

ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Guido Fubini in Torino

Salvatore Pincherle in Bologna

Tullio Levi-Civita in Roma

Francesco Severi in Roma

SERIE QUARTA - TOMO XII

(LXX DELLA RACCOLTA)



BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

MCMXXXIV

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1934-XII

Il problema di Dirichlet in campi dello spazio privi di punti esterni.

Memoria di CARLO MIRANDA (a Napoli).

Sunto. - *L'Autore stabilisce il teorema di esistenza per il problema di DIRICHLET in un campo illimitato, avente per completa frontiera una superficie aperta e limitata, valendosi del procedimento alternato di SCHWARZ.*

La risolubilità del problema di DIRICHLET in campi dello spazio è soggetta a condizioni necessarie e sufficienti, oramai classiche, date dal WIENER (1).

Il criterio del WIENER non pare però sempre di facile applicazione, onde l'interesse di esaminare direttamente la questione della esistenza della soluzione del problema di DIRICHLET, nei casi in cui detto criterio sia difficilmente applicabile. Uno di tali casi, al quale peraltro, in condizioni particolari, hanno già rivolto la loro attenzione il BELTRAMI prima [problema del disco] (2) e il WIENER (3) dopo, è quello di un campo (4), la cui frontiera contiene punti che non sono punti di accumulazione di punti esterni al campo.

In base ad alcune considerazioni, fondamentali in questo genere di studii, che io ho riassunte in un primo paragrafo, si vede che ci si può limitare a stabilire il teorema di esistenza per il problema di DIRICHLET per i campi illimitati T_σ , aventi per completa frontiera una superficie aperta (5) e limitata σ .

(1) N. WIENER, *The Dirichlet problem*, pag. 130 [« Publications of the Massachusetts Institute of Technology », Series II, n. 78, 1924].

(2) BELTRAMI, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, [« Memorie della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », Serie IV, Tomo II (1880), pag. 461-505].

(3) N. WIENER, loco citato, pag. 140.

(4) Intenderemo per *campo* un insieme aperto e connesso e per *dominio* la somma di un campo e della sua frontiera. L'insieme frontiera di un insieme T e l'insieme complementare saranno rispettivamente indicati con FT e CT . L'insieme dei punti comuni a due insiemi T_1 e T_2 sarà indicato con $T_1 \cdot T_2$.

(5) Una superficie limitata σ sarà detta *aperta* se non esiste alcun dominio limitato avente per completa frontiera una parte di σ .

In una mia precedente nota ⁽⁶⁾ ho già fatto vedere come, per la trattazione dell'analogo problema nel piano, ci si possa avvalere del procedimento alternato di SCHWARZ. Ciò si può fare anche nello spazio. Per raggiungere però una certa generalità di risultati, il detto procedimento nella sua forma classica non è più sufficiente e bisogna introdurre alcune modificazioni, che mi sono state suggerite da una Memoria di RAYNOR ⁽⁷⁾.

1. **Moderni contributi alla teoria del problema di Dirichlet** ⁽⁸⁾. — Sia T un campo dello spazio e $f(Q)$ una funzione continua del generico punto Q di FT . Si può sempre costruire una successione di domini $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ (non necessariamente distinti) tutti contenuti in T e tali che ogni punto di T stia in infiniti di essi, e in modo, inoltre, che per ognuno di tali domini si sappia risolvere il relativo problema di DIRICHLET. Per esempio, si può sempre trovare una successione di domini, limitati da superfici analitiche senza singolarità, invadente il campo T . Poichè in un dominio limitato da superfici analitiche senza singolarità si può agevolmente stabilire il teorema di esistenza per il problema di DIRICHLET, per mezzo della teoria delle equazioni integrali, tale successione si troverà proprio nelle condizioni richieste.

Prolungata per continuità la definizione di $f(Q)$ in tutto T , diciamo W_1 la funzione continua in T , eguale ad f in $T - R_1$ ed armonica in R_1 ; diciamo poi W_n la funzione continua in T , eguale a W_{n-1} in $T - R_n$ ed armonica in R_n . Si dimostra che la successione

$$W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$$

converge uniformemente in ogni dominio contenuto in T , verso una funzione W , armonica in T , che è indipendente dalla particolare scelta dei domini R_n e dal particolare prolungamento della funzione $f(Q)$. Se il problema di DIRICHLET per i valori al contorno $f(Q)$ è risolubile in T , la soluzione non può essere che W . Per vedere quindi se tale problema è risolubile

⁽⁶⁾ C. MIRANDA, *Il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in un campo piano privo di punti esterni*, [*« Rendiconti della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli »*, Serie 3^a, Vol. XXXVIII (1932), pag. 50-53].

⁽⁷⁾ G. E. RAYNOR, *Dirichlet's Problem*, [*« Annals of Mathematics »*, Vol. XXIII (1923), pag. 183-197].

⁽⁸⁾ I moderni sviluppi della teoria del problema di DIRICHLET nello spazio sono opera principalmente di ZAREMBA, POINCARÉ, LEBESGUE, PHILLIPS, WIENER, BOULIGAND, KELLOG e RAYNOR. La breve esposizione, che di tali sviluppi faccio in questo paragrafo, è desunta in gran parte da: KELLOG O. D., *Foundations of potential theory*, Cap. XI, [J. Springer, Berlin 1929].

oppur no, basta vedere se W è eguale in ogni punto Q di FT a $f(Q)$. Detto P il generico punto di T , si trova che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché $W(P)$ tenda a $f(Q)$ quando P tende a Q , è che esista una funzione $V(P, Q)$, armonica in T rispetto a P , nulla per $P \equiv Q$ ed avente un estremo inferiore positivo al variare di P in ogni dominio limitato, contenuto in $T + FT - Q$.

Torna naturale di chiamare *regolari* i punti Q di FT per i quali si può costruire la $V(P, Q)$, ed *eccezionali* gli altri. Possiamo allora dire:

Il problema di Dirichlet è risolvibile in un campo T , qualunque sia la funzione $f(Q)$ ⁽⁹⁾, se, e solo se, tutti i punti di FT sono regolari.

È facile far vedere che la regolarità o eccezionalità di un punto Q di FT è una proprietà locale di FT , nel senso che:

Se un punto Q di FT è regolare (eccezionale), esso è anche regolare (eccezionale) per ogni altro campo, che coincida con T in una sfera ⁽¹⁰⁾ di centro Q .

Vediamo ora come si costruiscono le funzioni $V(P, Q)$. Sia Σ una superficie avente in comune con $T + FT$ il solo punto Q , e tale inoltre che, detto Δ il campo illimitato avente per completa frontiera Σ e contenente $T + FT$, si sappia risolvere in Δ il problema di DIRICHLET. Come funzione $V(P, Q)$ si può scegliere una funzione di P armonica in Δ , ed assumente su Σ opportuni valori al contorno. Si hanno in tal modo diversi criterii di regolarità, di cui ricorderò solo i due seguenti:

CRITERIO DI ZAREMBA. — *Un punto Q di FT è regolare purchè esista un cono circolare retto di vertice Q , non avente alcun punto comune con T .*

CRITERIO DI POINCARÈ. — *Un punto Q di FT è regolare purchè esista una sfera passante per Q , non avente alcun punto comune con T .*

Un altro criterio dedotto per altra via, più generale dei precedenti, è il seguente:

CRITERIO DI RAYNOR ⁽¹¹⁾. — *Un punto Q di FT è regolare, se, detta S una sfera di centro Q e raggio ρ , l'insieme $FS \cdot (T + FT)$ è misurabile sulla superficie sferica FS , risultando*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\text{mis } FS \cdot (T + FT)}{4\pi\rho^2} < 1.$$

⁽⁹⁾ Dico « qualunque sia $f(a)$ » perchè il problema di DIRICHLET potrebbe essere risolvibile per particolari valori al contorno, malgrado la presenza di punti eccezionali.

⁽¹⁰⁾ Dicendo brevemente *sfera S* di raggio ρ e centro Q intendo sempre indicare il campo che ha per frontiera la superficie sferica di raggio ρ e centro Q , la quale sarà perciò indicata con FS .

⁽¹¹⁾ Cfr. RAYNOR, loco cit., pag. 197.

Tutti questi criterii possono essere dedotti da un altro generalissimo, dovuto al WIENER, che fa dipendere la regolarità o eccezionalità di un punto Q di FT dalla divergenza o convergenza di una certa serie a termini positivi.

È ovvio come quel che abbiamo detto finora non conduce ad alcun teorema di esistenza per il problema di DIRICHLET in un campo T , la cui frontiera contenga dei punti che sono punti limiti di soli punti di $T + FT$. In tal caso si potrà sempre costruire la successione delle W_n , che risulterà ancora convergente in ogni dominio contenuto in T , verso una funzione W armonica in T , ma non ci si potrà valere dei criterii sopra esposti, per dimostrare che la W assume effettivamente sul contorno i valori prescritti. Il solo criterio applicabile sarebbe quello di WIENER, il quale però è di uso molto difficile, perchè non è facile calcolare, tranne che in casi particolari, i termini della serie, di cui bisogna poi studiare il comportamento.

Da ciò che precede risulta però che, una volta stabiliti dei teoremi di esistenza per il problema di DIRICHLET nel campo illimitato T_σ , avente per completa frontiera un pezzo di superficie σ aperto e limitato, si possono trasformare tali teoremi in criterii di regolarità e quindi valersene per studiare l'esistenza della soluzione del problema di DIRICHLET, in campi di tipo più generale.

Consideriamo infatti un campo T , la cui frontiera contenga una superficie σ , i cui punti siano punti di accumulazione di soli punti del campo. Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un punto Q di σ sia regolare, è che si possa trovare una sfera S di centro Q , tale che, detta σ_1 la parte di σ interna ad S , Q riesca regolare per il campo T_{σ_1} , che coincide con T in S .

Pertanto nel seguito ci limiteremo a considerare campi T_σ .

2. Un lemma di Schwarz-Korn. — Come ho già detto al principio di questo lavoro, il metodo da seguire per stabilire il teorema di esistenza per il problema di DIRICHLET nel campo T_σ è il procedimento alternato di SCHWARZ. Per questo è necessario premettere un lemma di A. KORN ⁽¹²⁾, che è l'analogo per lo spazio del classico lemma di SCHWARZ:

LEMMA I. — *Sia Σ una superficie chiusa, somma di due superfici aperte σ e σ' . Se la funzione armonica all'esterno di Σ , nulla all'infinito e su σ , ed eguale ad uno su σ' , può essere messa sotto la forma*

$$(1) \quad u(P) = \int_{\Sigma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{PQ} d\Sigma(Q) + c \int_{\Sigma} \frac{1}{PQ} d\Sigma(Q)$$

⁽¹²⁾ A. KORN, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*, 1, pag. 18, [F. Dümmler, Berlino 1901].

dove $\mu(Q)$ è una funzione continua sia su σ che su σ' , c è una costante e ν è la normale esterna a Σ , allora, su ogni altra superficie σ'' , esterna a Σ , che incontri Σ solo nei punti comuni a σ e σ' , sotto un angolo diverso da π , risulta

$$(2) \quad 0 < u(P) \leq \lambda < 1,$$

dove λ è una costante che dipende solo da σ , σ' e σ'' .

Per mezzo della teoria delle equazioni integrali si vede facilmente che $u(P)$ può essere messa sotto la forma (1), purchè Σ soddisfi alle seguenti ipotesi:

- a) Σ è dotata in ogni punto di piano tangente.
- b) Nell'intorno di un suo qualunque punto Q , Σ è suscettibile di una rappresentazione cartesiana $z = g(x, y)$, rispetto ad un sistema di essi tangente-normale in Q a Σ , essendo $g(x, y)$ una funzione continua con le sue derivate parziali prime e seconde.

Dal lemma di KORN discende immediatamente il seguente ⁽¹³⁾:

LEMMA II. — Se $h(P)$ è una funzione armonica del punto P nello spazio esterno a Σ , nulla all'infinito e su σ , e coincidente su σ' con una funzione continua $f(P)$, il cui valore assoluto su σ' non supera F , si ha

$$(3) \quad \max_{\sigma''} |h(P)| \leq \lambda F.$$

3. Primo teorema di esistenza. — Sia ora σ un pezzo di superficie, aperta, limitata, con un numero finito di contorni, godente delle proprietà a) e b).

Supporremo inoltre che σ ammetta, rispetto ad una certa terna di assi $Oxyz$, una rappresentazione cartesiana $z = \varphi(x, y)$, essendo $\varphi(x, y)$ una funzione positiva, finita e continua con le sue derivate prime in tutto il dominio D , proiezione di σ sul piano xy .

Dico che sussiste il seguente teorema:

TEOREMA I. — Comunque si assegni su σ una funzione continua f , esiste sempre una funzione, armonica in T_σ , nulla all'infinito, eguale ad f su σ .

Nelle ipotesi ora poste per σ si può sempre costruire una superficie σ' in modo che $\sigma + \sigma'$ sia una superficie chiusa godente delle proprietà a) e b), e in modo inoltre che il dominio limitato T_1 , avente per frontiera $\sigma + \sigma'$ non abbia punti comuni col cilindro che proietta σ su D . Diremo poi σ'' la superficie somma della superficie piana D e della superficie cilindrica, che proietta i punti del bordo di σ sui punti frontiera di D .

Osserviamo che σ'' incontra $\sigma + \sigma'$ sotto un angolo certamente diverso da π , perchè, essendo le derivate parziali di $\varphi(x, y)$ finite e continue in D , il

⁽¹³⁾ Cfr. in E. PICARD, *Traité d'Analyse*, Vol. II, pag. 80-81. [Gauthier-Villars, Parigi, 3^a edizione] la dimostrazione del tutto analoga per il caso del piano.

piano tangente a $\sigma + \sigma'$ in un punto del bordo di σ non può essere verticale. Il dominio dello spazio avente per frontiera $\sigma + \sigma''$ sarà detto T_2 . Applicando il criterio di ZAREMBA, ricordato nel n.º 1, si riconosce subito che il problema di DIRICHLET è risolubile sia nel campo CT_1 , che nel campo CT_2 . Costruiamo allora due successioni di funzioni

$$(4) \quad v_1, v_2, \dots, v_n, \dots,$$

$$(5) \quad w_1, w_2, \dots, w_n, \dots,$$

la prima di funzioni armoniche in CT_1 , la seconda di funzioni armoniche in CT_2 , tutte infinitesime all'infinito, verificanti le condizioni al contorno:

$$(6) \quad v_1 = f \quad \text{su } \sigma + \sigma'$$

$$(7) \quad w_1 \begin{cases} = f & \text{su } \sigma \\ = v_1 & \text{su } \sigma'' \end{cases}$$

$$(8) \quad v_n \begin{cases} = f & \text{su } \sigma \\ = w_{n-1} & \text{su } \sigma' \end{cases}$$

$$(9) \quad w_n \begin{cases} = f & \text{su } \sigma \\ = v_n & \text{su } \sigma'' \end{cases}.$$

Facciamo ora vedere che le successioni (4) e (5) convergono uniformemente, la prima in $CT_1 + \sigma + \sigma'$, la seconda in $CT_2 + \sigma + \sigma''$. Si ha

$$|w_n - w_{n-1}| = |v_n - v_{n-1}| \quad \text{su } \sigma + \sigma'',$$

e quindi, poichè $v_n - v_{n-1} = 0$ su σ ,

$$\max_{\sigma + \sigma''} |w_n - w_{n-1}| = \max_{\sigma''} |v_n - v_{n-1}|,$$

d'onde, per il Lemma II,

$$(10) \quad \max_{\sigma + \sigma''} |w_n - w_{n-1}| \leq \lambda \max_{\sigma'} |v_n - v_{n-1}|.$$

Ora

$$|v_n - v_{n-1}| = |w_{n-1} - w_{n-2}| \quad \text{su } \sigma',$$

e quindi

$$(11) \quad \max_{\sigma'} |v_n - v_{n-1}| = \max_{\sigma'} |w_{n-1} - w_{n-2}| \leq \max_{\sigma_1 \sigma''} |w_{n-1} - w_{n-2}|.$$

In definitiva per la (10)

$$(12) \quad \max_{\sigma_1 \sigma''} |w_n - w_{n-1}| \leq \lambda \max_{\sigma_1 \sigma''} |w_{n-1} - w_{n-2}|$$

da cui

$$(13) \quad \max_{\sigma_1 \sigma''} |w_n - w_{n-1}| \leq \lambda^{n-2} \max_{\sigma_1 \sigma''} |w_2 - w_1|.$$

Poichè λ è minore di uno, questa diseuguaglianza basta ad assicurare la uniforme convergenza della successione (5) su $\sigma + \sigma''$, e quindi, per il teorema

di HARNACK, anche in tutto CT_2 verso una funzione $w(P)$, armonica in CT_2 , nulla all'infinito, eguale ad f su σ . Dalla (11) segue poi la uniforme convergenza della successione (4) verso una funzione $v(P)$, armonica in CT_1 , nulla all'infinito, eguale ad f su σ .

D'altra parte risulta

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \quad \text{su } \sigma'',$$

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = v \quad \text{su } \sigma',$$

e quindi

$$w = v \quad \text{in } CT_1 \cdot CT_2.$$

Ponendo allora

$$u \begin{cases} = v = w & \text{in } CT_1 \cdot CT_2 \\ = v & \text{in } T_2 \\ = w & \text{in } T_1, \end{cases}$$

si ottiene una funzione armonica in T_σ , nulla all'infinito ed eguale ad f su σ . Resta con ciò dimostrato quanto volevamo.

Il teorema ora dimostrato si presta ad una prima immediata generalizzazione:

TEOREMA I. — *Comunque si assegni una superficie σ aperta e limitata, godente delle sole proprietà a) e b), il problema di Dirichlet è risolubile in T_σ .*

Dimostreremo che un generico punto Q di σ è regolare. Per questo basta far vedere che esiste un campo T' , coincidente con T_σ in una sfera di centro Q , per il quale Q è regolare.

Ora, per le ipotesi fatte, si può trovare una sfera di centro Q , tale che la parte σ_1 di σ contenuta in detta sfera sia ad unico contorno ed ammetta una rappresentazione cartesiana rispetto ad un sistema di assi, il cui piano xy sia parallelo al piano tangente a σ in Q , in modo che σ_1 stia tutta nel semi-spazio positivo.

Per il teorema I il campo T_σ , si trova proprio nelle condizioni richieste per T' .

Il teorema I può essere ancora generalizzato e ciò faremo nel seguente paragrafo.

4. Secondo teorema di esistenza. — Consideriamo ora una superficie aperta e limitata σ , che si possa mettere in corrispondenza biunivoca e bi-continua con i punti di un dominio piano, e supponiamo che σ goda delle seguenti proprietà:

α) Detto Q un qualsiasi punto del bordo ⁽¹⁴⁾ di σ , si può trovare una sfera di centro Q , tale che la parte di σ , interna a detta sfera goda delle proprietà a) e b).

β) Esistono due domini limitati T_1 e T_2 , delle cui frontiere σ fa parte e non aventi altri punti comuni all'infuori di quelli di σ , per ognuno dei quali è possibile risolvere il relativo problema esterno di Dirichlet, tati inoltre che i punti interni di σ siano interni a $T_1 + T_2$.

γ) Comunque si prenda una sfera S di raggio ρ , avente per centro un punto interno Q di σ , interna a $T_1 + T_2$, l'insieme dei punti $\sigma \cdot FS$ ha misura nulla su FS e inoltre, detta $\mu_1(\rho)$ la misura su FS dell'insieme $FS \cdot CT_1$, risulta

$$(14) \quad 0 < \lim'_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu_1(\rho)}{4\pi\rho^2} < 1.$$

Osserviamo che, detta $\mu_2(\rho)$ la misura di $FS \cdot CT_2$, la (14) porta di conseguenza la

$$(15) \quad 0 < \lim'_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu_2(\rho)}{4\pi\rho^2} < 1,$$

e viceversa.

Ciò posto, dico che:

TEOREMA II. — *Comunque si assegni su una superficie aperta e limitata σ , godente delle proprietà α), β) e γ), una funzione continua $f(Q)$, esiste sempre una funzione, armonica in T_σ , nulla all'infinito, eguale ad $f(Q)$ su σ .*

Diremo $\varphi_i | [g]$ la funzione armonica in CT_i , nulla all'infinito, coincidente con la funzione g su FT_i e, dopo aver prolungata la definizione di f in tutto lo spazio, porremo:

$$\begin{aligned} W_1 \begin{cases} = f & \text{in } T_1 \\ = \varphi_1 | [f] & \text{in } CT_1 \end{cases} & \quad W_2 \begin{cases} = W_1 & \text{in } T_2 \\ = \varphi_2 | [W_1] & \text{in } CT_2 \end{cases} \\ W_{2^{n-1}} \begin{cases} = W_{2^{n-2}} & \text{in } T_1 \\ = \varphi_1 | [W_{2^{n-2}}] & \text{in } CT_1 \end{cases} & \quad W_{2^n} \begin{cases} = W_{2^{n-1}} & \text{in } T_2 \\ = \varphi_2 | [W_{2^{n-1}}] & \text{in } CT_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Per quel che abbiamo detto nel primo paragrafo, la successione

$$W_1, W_2, \dots, W_n, \dots,$$

converge in T_σ verso una funzione W , armonica in T_σ , nulla all'infinito,

⁽¹⁴⁾ Beninteso diremo punti *interni* di σ i punti di σ che corrispondono a punti interni del dominio e punti *del bordo* di σ quelli che corrispondono a punti della frontiera del dominio.

eguale ad $f(Q)$ nei punti regolari Q di σ , la quale non dipende nè dal particolare prolungamento di $f(Q)$, nè dai domini T_1 e T_2 .

Infatti, il procedimento seguito per costruire le W_k coincide con quello del detto paragrafo, non appena si ponga

$$R_{2n-1} = CT_1 + FT_1, \quad R_{2n} = CT_2 + FT_2.$$

Per l'ipotesi α) tutti i punti del bordo di σ sono regolari.

Resta pertanto da verificare che W coincide con f anche nei punti interni di σ . Ciò faremo vedere in base all'ipotesi γ), adottando opportunamente un metodo dato da RAYNOR per la dimostrazione dell'analogo teorema per i campi dotati di punti esterni, teorema già ricordato nel primo paragrafo.

Assegnato un numero $\varepsilon > 0$ e un punto interno Q di σ , costruiamo una sfera S_1 di centro Q e raggio ρ_1 , tale che in S_1 sia

$$f(P) \leq f(Q) + \frac{\varepsilon}{2}$$

e inoltre, detto p un arbitrario numero minore di uno, risulti

$$\frac{\mu_1(\rho_1)}{4\pi\rho_1^2} < p,$$

ciò che, per l'ipotesi γ), si può fare certamente.

Detto M un numero maggiore del massimo di $f(P) + \frac{\varepsilon}{2}$, sia $U_1(P)$ la funzione armonica in S_1 , soddisfacente alle condizioni al contorno

$$U_1(P) \begin{cases} = M & \text{su } FS_1 \cdot CT_1 \\ = f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} & \text{su } FS_1 \cdot T_1. \end{cases}$$

Per le note proprietà delle funzioni armoniche, si ha su $S_1 \cdot \sigma$

$$U_1(P) \geq f(Q) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poichè

$$W_k(P) \begin{cases} < M & \text{su } FS_1 \cdot CT_1 \\ = f(P) \leq f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} & \text{su } (S_1 + FS_1) \cdot \sigma, \end{cases}$$

nel campo $S_1 \cdot CT_1$, che ha per completa frontiera $FS_1 \cdot CT_1 + (S_1 + FS_1) \cdot \sigma$, risulta

$$W_k(P) < U_1(P),$$

e perciò al limite

$$W(P) \leq U_1(P).$$

Calcoliamo ora, col teorema della media, il valore di $U_1(P)$ nel punto Q , centro di S_1 . Sarà

$$\begin{aligned} U_1(Q) &= \frac{\mu_1(\rho_1)}{4\pi\rho_1^2} M + \left(1 - \frac{\mu_1(\rho_1)}{4\pi\rho_1^2}\right) \left(f(Q) + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \\ &< f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} + p \left(M - f(Q) - \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Si potrà ora certamente trovare una sfera S_2 di centro Q e raggio ρ_2 , tale che in $S_2 \cdot CT_1$ sia

$$\left. \begin{aligned} W_k(P) &< \\ W(P) &\leq \end{aligned} \right\} U_1(P) < f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} + p \left(M - f(Q) - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

risultando inoltre

$$\frac{\mu_1(\rho_2)}{4\pi\rho_2^2} < p.$$

In S_2 definiamo una funzione armonica $U_2(P)$, mediante le condizioni al contorno

$$\left. \begin{aligned} U_2(P) &= f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} + p \left(M - f(Q) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{su } FS_2 \cdot CT_1 \\ &= f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{su } FS_2 \cdot T_1. \end{aligned} \right\}$$

Come sopra, si vede che

$$\left. \begin{aligned} W_k(P) &< \\ W(P) &\leq \end{aligned} \right\} U_2(P) \quad \text{in } S_2 \cdot CT_1.$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} U_2(Q) &= \frac{\mu_1(\rho_2)}{4\pi\rho_2^2} \left[f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} + p \left(M - f(Q) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right] + \left(1 - \frac{\mu_1(\rho_2)}{4\pi\rho_2^2}\right) \left(f(Q) + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \\ &< f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} + p^2 \left(M - f(Q) - \frac{\varepsilon}{2}\right), \end{aligned}$$

e si potrà trovare una sfera S_3 di centro Q e raggio ρ_3 , tale che in $S_3 \cdot CT_1$ sia

$$\left. \begin{aligned} W_k(P) &< \\ W(P) &\leq \end{aligned} \right\} U_2(P) < f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} + p^2 \left(M - f(Q) - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

risultando inoltre

$$\frac{\mu_1(\rho_3)}{4\pi\rho_3^2} < p.$$

Così continuando si viene a costruire una successione di sfere di raggio infinitesimo $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$, tali che in $S_i \cdot CT_1$ risulta

$$W(P) < f(Q) + \frac{\varepsilon}{2} + p^{i-1} \left(M - f(Q) - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Poichè $p < 1$, si potrà trovare un i_0 per il quale sia

$$0 < p^{i_0-1} \left(M - f(Q) - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sarà allora in $S_{i_0} \cdot CT_1$

$$W(P) < f(Q) + \varepsilon.$$

Analogamente si vede che si possono determinare altre tre sfere S' , S'' , S''' , in modo che sia

$$W(P) \begin{cases} > f(Q) - \varepsilon & \text{in } S' \cdot CT_1 + S''' \cdot CT_2 \\ < f(Q) + \varepsilon & \text{in } S'' \cdot CT_2, \end{cases}$$

e ciò basta a completare la dimostrazione del nostro teorema.

Geometries involving affine connections and general linear connections.

An extension of the recent Einstein-Mayer geometry.

A. D. MICHAL and J. L. BOTSFORD (Pasadena, California, U. S. A.).

Summary. - *Part I of this paper is concerned with the theory of differential invariants of a symmetric affine connection and a general linear connection of the KÖNIG type. Part II deals with a geometry in which the components of the affine connection are CHRISTOFFEL symbols, and the general linear connection is of a special sort. This section can be considered in part as an extension of the EINSTEIN-MAYER (5) geometry,*

INTRODUCTION

The study of the general linear connection was initiated by ROBERT KÖNIG (1) and has been continued by L. SCHLESINGER (2), J. A. SCHOUTEN (3), J. H. C. WHITEHEAD (4), and others. A particular linear connection (with $m = 5$, $n = 4$) of the KÖNIG type has been used recently by A. EINSTEIN and W. MAYER (5) in the development of a geometry suitable for their unified field theory. Special cases, in which the associated spaces are tangent spaces, have been considered by H. WEYL, É. CARTAN, and others. For further references see O. VEULEN (6), L. P. EISENHART (7), and A. D. MICHAL (8).

In Part I of this paper we consider a manifold endowed with a symmetric affine connection and a general linear connection, and the composite tensors arising from the simultaneous consideration of these connections. With the aid of normal representations, normal tensors based on the linear connection and extensions of composite tensors are constructed. This leads to a general replacement theorem for simultaneous tensor differential invariants of a symmetric affine connection and a general linear connection. This includes as a special case the MICHAL-THOMAS (9) replacement theorem for differential invariants of an affine connection. E. BORTOLOTTI'S (10) two interesting memoirs on asymmetric connections and non-linear displacements suggest generalizations of our work. Furthermore, it is possible to consider invariants under projective changes of the two connections. Development of these theories will not be expounded here.

In Part II we consider a particular instance of this geometry, which is an extension of the EINSTEIN-MAYER geometry ⁽⁵⁾. In this case the manifold is a RIEMANNIAN space, the components of the affine connection are the CHRISTOFFEL symbols, and the linear connection is of a particular sort. For the general case ($m - n \neq 1$) we find that the calculation of the $m - n$ « exceptional directions » is not unique; and furthermore an additional postulate on the linear connection is necessary. Several of the theorems give new results for $m = 5$, $n = 4$, the EINSTEIN-MAYER case. It is of interest to note that the dependence of their field equations on V_4 tensors only is not a property peculiar to the tensors involved in those equations, but is a property common to all equations involving tensors of the form (11.4). See Theorem 28, below.

Without further statement, all functions considered in the paper will be assumed to be analytic in the region under consideration.

Numbers in parenthesis, as ⁽⁸⁾, refer to the papers listed at the end of the paper.

PART I.

Geometries involving affine connections and general linear connections.

1. **Definitions and Notation.** — Consider an n -dimensional manifold, with coordinates (x^1, x^2, \dots, x^n) , in which is defined a symmetric affine connection $\Gamma_{jk}^i(x)$ and a general linear connection $L_{\beta\alpha}^\alpha(x)$. By a symmetric affine connection we mean an invariant whose law of transformation under a change of coordinates

$$(1.1) \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n), \quad \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right| \neq 0$$

is

$$(1.2) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i(\bar{x}) = \left(\Gamma_{bc}^a(x) \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \right) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a}.$$

A general linear connection is an invariant whose law of transformation under a change of representation is

$$(1.3) \quad M_\sigma^\alpha \bar{L}_{\beta\alpha}^\sigma(\bar{x}) = \left(L_{\lambda r}^\alpha(x) M_\beta^\lambda + \frac{\partial M_\beta^\alpha}{\partial x^r} \right) \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^\alpha}.$$

A change of representation ^(*) denotes the composite of (i) a change of coor-

^(*) WHITEHEAD, loc. cit.; WHITEHEAD uses the terminology « frame of reference » instead of « vector coordinate system ».

dinates (1.1), (ii) a change of vector coordinates

$$V^\alpha = M^\alpha_\beta \bar{V}^\beta.$$

In the above formulas, as throughout the paper, we shall understand that small Latin indices range from 1 to n , and small Greek indices range 1 to m . Indices repeated in the same term are to be summed over their respective ranges.

We shall deal with composite tensors, i. e. tensors which may involve both Greek and Latin indices. The transformation law of the composite tensor $X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a}$ (x) is

$$(1.4) \quad X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a}(x) \dots M^\beta_\mu \dots \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^s} = \bar{X}_{\mu \dots s}^{\lambda \dots r}(\bar{x}) \dots M^\alpha_\lambda \dots \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^r}.$$

As special cases we have V_n tensors, i. e. tensors which involve only Latin indices (usual tensors), and V_m tensors, i. e. tensors which involve only Greek indices.

2. The absolute calculus of an affine connection and a general linear connection. — It follows from (1.2), (1.3), and (1.4) by the usual differentiation and elimination process that the functions $X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a};_c$ defined in terms of the composite tensor $X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a}$ by

$$(2.1) \quad X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a};_c \equiv \frac{\partial X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a}}{\partial x^c} + \dots + L^\alpha_{\lambda c} X_{\beta \dots b}^{\lambda \dots a} + \dots + \Gamma^a_{hc} X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots h} + \dots \\ \dots - L^\lambda_{\beta c} X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a} - \dots - \Gamma^h_{bc} X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a} - \dots$$

are the components of a composite tensor, to be known as the covariant derivative of the composite tensor $X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a}$. The covariant differential of the composite tensor $X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a}$ is defined to be

$$\delta X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a} = X_{\beta \dots b}^{\alpha \dots a};_c dx^c.$$

The invariant theory of the linear connection leads to the consideration of the composite tensor $P^\alpha_{\beta ab}$ defined by

$$(2.2) \quad P^\alpha_{\beta ab} \equiv \frac{\partial L^\alpha_{\beta a}}{\partial x^b} - \frac{\partial L^\alpha_{\beta b}}{\partial x^a} + L^\sigma_{\beta a} L^\alpha_{\sigma b} - L^\sigma_{\beta b} L^\alpha_{\sigma a}.$$

The vanishing of this tensor is a necessary and sufficient condition that there exist a representation in which the components of the connection vanish. In this case $L^\alpha_{\beta a}$ is said to be an integrable connection.

We have the identity, analogous to RICCI's identity:

$$(2.3) \quad X_{\beta \dots b \dots; c; d}^{\alpha \dots a \dots} - X_{\beta \dots b \dots; d; c}^{\alpha \dots a \dots} = \dots + P_{\lambda cd}^{\alpha} X_{\beta \dots b \dots}^{\lambda \dots a \dots} + \dots \\ \dots + B_{hcd}^{\alpha} X_{\beta \dots b \dots}^{\alpha \dots h \dots} + \dots - P_{\beta cd}^{\lambda} X_{\lambda \dots b \dots}^{\alpha \dots a \dots} - \dots - B_{bcd}^h X_{\beta \dots b \dots}^{\alpha \dots a \dots} - \dots,$$

where

$$B_{abc}^h \equiv \frac{\partial \Gamma_{ab}^h}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{ac}^h}{\partial x^b} + \Gamma_{ab}^i \Gamma_{ic}^h - \Gamma_{ac}^i \Gamma_{ib}^h.$$

Besides the equations for the parallel displacement of a V_n vector ξ^i along the curve $x^i = f^i(t)$, first considered by LEVI-CIVITA (¹⁴) for the Riemannian geometry,

$$(2.4) \quad \frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{dx^k}{dt} = 0,$$

we have the equations defining the parallel displacement of a V_m vector along the same curve,

$$(2.5) \quad \frac{dX^\alpha}{dt} + L_{\lambda\alpha}^\alpha X^\lambda \frac{dx^\alpha}{dt} = 0.$$

3. Normal Representations. — Consider a path in V_n with affine parameter s , passing through the point $x^i = g^i$ with $s = 0$ as the corresponding value of the parameter. Let $\left(\frac{dx^i}{ds}\right)_0 = \xi^i$ be the given value of the tangent vector at the point $x^i = g^i$. The path, with this parametrization, satisfies the differential equations (^{6,7})

$$(3.1) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Let $X^\alpha(x)$ be a vector field parallel to the initially given vector $X^\alpha(g) \equiv X_0^\alpha$ along the path (3.1). X^α will thus satisfy the system of differential equations

$$(3.2) \quad \frac{dX^\alpha}{ds} + L_{\lambda\alpha}^\alpha X^\lambda \frac{dx^\alpha}{ds} = 0$$

with initial conditions $(X^\alpha)_{s=0} = X_0^\alpha$.

By successive differentiations of (3.2) and substitutions from (3.1) and (3.2) we get the expression for $\left(\frac{d^p X^\alpha}{ds^p}\right)_{s=0}$, and hence the power series of $X^\alpha(s)$ in the neighborhood of the point $s = 0$.

Define

$$(3.3) \quad L_{\lambda ab}^\alpha = \frac{1}{2} P \left(\frac{\partial L_{\lambda a}^\alpha}{\partial x^b} - L_{\mu a}^\alpha L_{\lambda b}^\mu - L_{\lambda h}^\alpha \Gamma_{ab}^h \right) \\ \dots \dots \dots \\ L_{\lambda a_1 \dots a_p}^\alpha = \frac{1}{p} P \left(\frac{\partial L_{\lambda a_1 \dots a_{p-1}}^\alpha}{\partial x^{a_p}} - L_{\mu a_1 \dots a_{p-1}}^\alpha L_{\lambda a_p}^\mu - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{p-1} L_{\lambda a_1 \dots a_{i-1} h a_{i+1} \dots a_{p-1}}^\alpha \Gamma_{a_i a_p}^h \right) \quad (p \geq 2)$$

where $P(\dots)$ denotes the sum of terms derived from (\dots) by cyclic permutation of the Latin indices. Thus the functions $L_{\lambda a_1 \dots a_p}^\alpha$ are symmetric in the indices $a_1 \dots a_p$. The derivatives $\frac{d^k X^\alpha}{ds^k}$ are then given by

$$(3.4) \quad \frac{d^k X^\alpha}{ds^k} = -L_{\lambda a_1 \dots a_k}^\alpha X^\lambda \frac{dx^{\alpha_1}}{ds} \dots \frac{dx^{\alpha_k}}{ds}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

and the analytic solution of (3.2) is

$$(3.5) \quad X^\alpha = V_\lambda^\alpha X_0^\lambda$$

where

$$(3.6) \quad V_\lambda^\alpha = \delta_\lambda^\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} (L_{\lambda a_1 \dots a_k}^\alpha)_g \xi^{\alpha_1} \dots \xi^{\alpha_k} \frac{s^k}{k!}.$$

Along the path we have

$$y^i = \xi^i s$$

where y^i are affine normal coordinates ⁽⁶⁾. Hence $N_\lambda^\alpha(y)$, defined by

$$(3.7) \quad N_\lambda^\alpha(y) = \delta_\lambda^\alpha - \sum_{k=1}^{\infty} (L_{\lambda a_1 \dots a_k}^\alpha(x))_g \frac{y^{\alpha_1} \dots y^{\alpha_k}}{k!},$$

are analytic functions of the coordinates y^i . Obviously the determinant $|N_\beta^\alpha|$ does not vanish in the neighborhood of $y^i = 0$.

DEFINITION. — The representation defined implicitly from a given representation with coordinates x^i and vector coordinates $V^\alpha(x)$, by means of the transformations

$$(3.8) \quad x^i = g^i + y^i - (\Gamma_{jk}^i(x))_g \frac{y^j y^k}{2!} - (\Gamma_{jkl}^i(x))_g \frac{y^j y^k y^l}{3!} - \dots$$

and

$$(3.9) \quad V^\alpha(x) = N_\lambda^{\alpha \dagger} V^\lambda(y),$$

where $N_\lambda^\alpha(y)$ are defined by (3.7), will be called a *normal representation* with base point $x^i = g^i$.

The transformation (3.8) is the well known one that defines an affine normal coordinate system y^i determined by a coordinate system x^i and a point $x^i = g^i$.

The symbol (\dagger) preceding a component of a tensor, connection, etc., will denote that that component is referred to and evaluated in a normal representation.

THEOREM 1. — *Under a change of representation*

$$(3.10) \quad \begin{aligned} x^i &= f^i(\bar{x}) \\ V^\alpha(x) &= M_\beta^\alpha(x) \bar{V}^\beta(\bar{x}) \end{aligned}$$

the normal representation with base point $x^i = g^i$

$$y^i, {}^{\dagger}V^{\alpha}(y)$$

undergoes the transformations

$$(3.11) \quad y^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right)_g \bar{y}^j$$

$$(3.12) \quad {}^{\dagger}V^{\alpha}(y) = (M_{\beta}^{\alpha}(x))_g {}^{\dagger}\bar{V}^{\beta}(\bar{y}).$$

Proof: The relation (3.11) between two affine normal coordinate systems with the same origin is well known (6).

If X^{α} is a vector field parallel to an arbitrarily chosen initial value $X^{\alpha}(g) \equiv X_0^{\alpha}$ along a path in V_n , then ${}^{\dagger}X^{\alpha}$ given by

$$X^{\alpha} = N_{\lambda}^{\alpha} {}^{\dagger}X^{\lambda}$$

is a constant along the path and is equal to X_0^{α} (cf. (3.5) and (3.6)). If \bar{X}^{α} is given by

$$X^{\alpha} = M_{\beta}^{\alpha} \bar{X}^{\beta}$$

then \bar{X}^{α} satisfies the system

$$\frac{dX^{\alpha}}{ds} + \bar{L}_{\lambda\alpha}^{\alpha} \bar{X}^{\lambda} \frac{d\bar{x}^{\alpha}}{ds} = 0$$

and the initial values \bar{X}_0^{α} are given by $X_0^{\alpha} = (M_{\beta}^{\alpha})_g \bar{X}_0^{\beta}$. Also ${}^{\dagger}\bar{X}^{\alpha}$ is constant along the curve and is equal to \bar{X}_0^{α} . Hence

$$(3.13) \quad {}^{\dagger}X^{\alpha} = (M_{\beta}^{\alpha})_g {}^{\dagger}\bar{X}^{\beta}$$

at all points of the path, and consequently at all points in the region of convergence of (3.5). The transformation of vector coordinates between the normal representations is given by

$$(3.14) \quad {}^{\dagger}V^{\alpha} = \tilde{N}_{\lambda}^{\alpha} M_{\mu}^{\lambda} \bar{N}_{\beta}^{\mu} {}^{\dagger}\bar{V}^{\beta}$$

where $\|\tilde{N}_{\lambda}^{\alpha}\|$ is the inverse matrix of $\|N_{\lambda}^{\alpha}\|$ and \bar{N}_{β}^{μ} is defined similarly to N_{β}^{μ} (cf. (3.7)). Since (3.14) must also hold for the vector field ${}^{\dagger}X^{\alpha}(y)$ or ${}^{\dagger}\bar{X}^{\alpha}(\bar{y})$ we see that

$$\tilde{N}_{\lambda}^{\alpha} M_{\mu}^{\lambda} \bar{N}_{\beta}^{\mu} = (M_{\beta}^{\alpha})_g.$$

This completes the proof of the theorem.

THEOREM 2. — *The transformation law of the invariants $L_{\lambda\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\alpha}(x)$ under a change of representation*

$$x^i = f^i(\bar{x})$$

$$V^{\alpha} = M_{\beta}^{\alpha}(x) \bar{V}^{\beta}$$

is

$$(3.15) \quad L_{\lambda a_1 \dots a_p}^\alpha(x) M_\beta^\lambda \frac{\partial x^{a_1}}{\partial \bar{x}^{\beta r_1}} \dots \frac{\partial x^{a_p}}{\partial \bar{x}^{\beta r_p}} = M_\sigma^\alpha \bar{L}_{\beta r_1 \dots r_p}^\sigma + [\dots] - \frac{\partial^p M_\beta^\alpha}{\partial \bar{x}^{\beta r_1} \dots \partial \bar{x}^{\beta r_p}}$$

where [...] indicates terms in $\bar{\Gamma}_{r_1 \dots r_{k+1}}^\alpha$ and $\bar{L}_{\beta r_1 \dots r_k}^\sigma$, ($k < p$).

Proof: From the covariant sets of equations (6)

$$\frac{d^k \bar{x}^a}{ds^k} + \bar{\Gamma}_{c_1 \dots c_k}^a \frac{d\bar{x}^{c_1}}{ds} \dots \frac{d\bar{x}^{c_k}}{ds} = 0$$

we have, along a path,

$$(3.16) \quad \frac{d^k M_\beta^\alpha}{ds^k} = \left[\frac{\partial^k M_\beta^\alpha}{\partial \bar{x}^{c_1} \dots \partial \bar{x}^{c_k}} + (\dots) \right] \frac{d\bar{x}^{c_1}}{ds} \dots \frac{d\bar{x}^{c_k}}{ds}$$

where (...) indicates terms in $\bar{\Gamma}_{c_1 \dots c_i}^a$, ($i \leq k$). We also have the covariant sets of equations

$$(3.17) \quad \frac{d^k \bar{X}^\beta}{ds^k} + \bar{L}_{\mu r_1 \dots r_k}^\beta \bar{X}^\mu \frac{d\bar{x}^{r_1}}{ds} \dots \frac{d\bar{x}^{r_k}}{ds} = 0.$$

From (3.16) and (3.17) we have, along a path,

$$(3.18) \quad \frac{d^p X^\alpha}{ds^p} = \left[\frac{\partial^p M_\beta^\alpha}{\partial \bar{x}^{r_1} \dots \partial \bar{x}^{r_p}} + (\dots) - M_\lambda^\alpha \bar{L}_{\beta r_1 \dots r_p}^\lambda \right] X^\beta \frac{d\bar{x}^{r_1}}{ds} \dots \frac{d\bar{x}^{r_p}}{ds}$$

where (...) indicates terms in $\bar{\Gamma}_{r_1 \dots r_{k+1}}^\alpha$ and $\bar{L}_{\beta r_1 \dots r_k}^\alpha$, ($k < p$). The theorem follows by substituting from (3.10) and (3.18) in the equation

$$\frac{d^p X^\alpha}{ds^p} + L_{\lambda a_1 \dots a_p}^\alpha X^\lambda \frac{dx^{a_1}}{ds} \dots \frac{dx^{a_p}}{ds} = 0.$$

COROLLARY. — The invariants $L_{\lambda a_1 \dots a_p}^\alpha$, ($p = 1, 2, 3, \dots$), all vanish when referred to a normal representation and evaluated at the base point of that representation. That is

$$(3.19) \quad ({}^\dagger L_{\lambda a_1 \dots a_p}^\alpha(y))_0 = 0. \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

4. Tensor extensions of composite tensors and König normal tensors. —

With the aid of the above results we have the following two theorems.

THEOREM 3. — The functions $X_{\beta \dots b \dots c_1 \dots c_p}^{\alpha \dots a \dots}(x)$ defined in terms of the composite tensor $X_{\beta \dots b \dots}^{\alpha \dots a \dots}$ by

$$(4.1) \quad X_{\beta \dots b \dots c_1 \dots c_p}^{\alpha \dots a \dots}(g) = \left(\frac{\partial^\dagger X_{\beta \dots b \dots}^{\alpha \dots a \dots}}{\partial y^{c_1} \dots \partial y^{c_p}} \right)_0,$$

where $x^i = g^i$ is the base point of the normal representation, are the components of a composite tensor of the indicated rank.

THEOREM 4. — The functions $K_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha(x)$ defined by

$$(4.2) \quad K_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha(g) = \left(\frac{\partial^p \dagger L_{\beta\alpha}^\alpha}{\partial y^{c_1} \dots \partial y^{c_p}} \right)_0,$$

where $x^i = g^i$ is the base point of the normal representation, are the components of a composite tensor of the indicated rank.

The proofs of these two theorems parallel those of corresponding well known theorems for affine extensions of affine tensors, and affine normal tensors.

DEFINITION. — The tensors $X_{\dots, c_1 \dots c_p}(x)$ and $K_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha(x)$ defined by (4.1) and (4.2) will be referred to as the p^{th} extension of the tensor X_{\dots} and the p^{th} KÖNIG normal tensor, respectively.

COROLLARY. — In case the tensor X_{\dots} is a pure V_n tensor, the tensor $X_{\dots, c_1 \dots c_p}$ is the p^{th} affine extension of the tensor X_{\dots} .

THEOREM 5. — The König normal tensor $K_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha$ is symmetric in the indices $c_1 \dots c_p$,

$$(4.3) \quad K_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha = K_{\beta\alpha c_r \dots c_s}^\alpha$$

where $c_r \dots c_s$ in any permutation of $c_1 \dots c_p$. Furthermore $K_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha$ satisfies the identity

$$(4.4) \quad S(K_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha) = 0$$

where $S(\dots)$ indicates the sum of the terms derived from (\dots) by cyclic permutation of the Latin indices.

Proof: (4.3) is immediate from (4.2).

From the definition (3.3) of $L_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha$, we see that

$$L_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha = \frac{1}{p!} P \left[\frac{\partial^p L_{\beta\alpha}^\alpha}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_p}} + (\dots) \right]$$

where $P[\dots]$ indicates the sum of the terms derived from $[\dots]$ by permuting the Latin indices, and where (\dots) indicates terms in $L_{\beta\alpha}^\alpha$ and $\frac{\partial^k L_{\beta\alpha}^\alpha}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_k}}$, ($k < p$). Hence at the base point of a normal representation we have

$$0 = P \left[\frac{\partial^p \dagger L_{\beta\alpha}^\alpha}{\partial y^{c_1} \dots \partial y^{c_p}} + (\dots) \right]_0$$

or

$$(4.5) \quad P[K_{\beta\alpha c_1 \dots c_p}^\alpha(g) + (\dots)] = 0$$

where (...) indicates terms which vanish with $P[K_{\beta ac, \dots c_k}^z(g)]$, ($k < p$). For $p = 1$ (4.5) is equivalent to (4.4) for $p = 1$. Assume that (4.4) holds for the k^{th} normal tensor, ($k = 1, \dots, p - 1$). Then (4.5) establishes (4.4) for the p^{th} normal tensor. This proves the theorem as stated.

It is possible to calculate the explicit form of the extensions of tensors and the KÖNIG normal tensors.

THEOREM 6. — *The first König normal tensor is given by*

$$(4.6) \quad K_{\beta ab}^z = \frac{1}{2} P_{\beta ab}^z$$

where $P_{\beta ab}^z$ is the curvature tensor defined in (2.2).

Proof: From (2.2) we see that

$$(4.7) \quad P_{\beta ab}^z = K_{\beta ab}^z - K_{\beta ba}^z.$$

From (4.4) we have

$$(4.8) \quad 0 = K_{\beta ab}^z + K_{\beta ba}^z.$$

Addition of (4.7) and (4.8) establishes the theorem.

THEOREM 7. — *The first extension of a composite tensor is the covariant derivative, as given by (2.1).*

This follows without difficulty from the definitions of the covariant derivative and the first extension, and the properties of a normal representation.

THEOREM 8. — *The second extension of the composite tensor $X_{\beta b}^{za}$ is*

$$X_{\beta b, cd}^{za} = X_{\beta b; c; d}^{za} - K_{\lambda cd}^z X_{\beta b}^{\lambda a} - A_{hcd}^a X_{\beta b}^{zh} + K_{\beta cd}^\lambda X_{\lambda b}^{za} + A_{bcd}^h X_{\beta b}^{za}$$

where A_{bcd}^a is the first affine normal tensor ⁽⁶⁾.

Proof: By Theorem 7

$$X_{\beta b; c; d}^{za}(g) = \left(\frac{\partial + X_{\beta b; c}^{za}}{\partial y^d} \right)_0.$$

Expanding $X_{\beta b; c}^{za}$ according to the definition (2.1), differentiating the result, and evaluating at the base point of the normal representation proves the theorem. The generalization to any composite tensor is immediate.

COROLLARY. — *The second extension of a tensor $X_{\gamma \dots \delta}^{\alpha \dots \beta}$ with no Latin indices is*

$$X_{\gamma \dots \delta, cd}^{\alpha \dots \beta} = \frac{1}{2} [X_{\gamma \dots \delta; c; d}^{\alpha \dots \beta} + X_{\gamma \dots \delta; d; c}^{\alpha \dots \beta}].$$

THEOREM 9. — *The $(p + 1)^{st}$ König normal tensor is given by*

$$(4.9) \quad K_{\beta abc_1 \dots c_p}^z = \frac{1}{p + 2} \left(P_{\beta ab, c_1 \dots c_p}^z + \sum_{k=1}^p P_{\beta ac_k, c_1 \dots c_{k-1} b c_{k+1} \dots c_p}^z \right) \quad (p \geq 1).$$

Proof: From (2.2) we have

$$(4.10) \quad P_{\beta ab, c_1 \dots c_p}^\alpha = K_{\beta abc_1 \dots c_p}^\alpha - K_{\beta bac_1 \dots c_p}^\alpha + \\ + \sum_{k=1}^{p-1} C[K_{\beta ac_1 \dots c_k}^\alpha K_{\beta bc_{k+1} \dots c_p}^\alpha - K_{\beta bc_1 \dots c_k}^\alpha K_{\beta ac_{k+1} \dots c_p}^\alpha]$$

where $C[\dots]$ denotes the sum of the different terms derived from $[\dots]$ by taking permutations of the indices $c_1 \dots c_p$.

From Theorem 5 we have

$$S(K_{\beta abc_1 \dots c_p}^\alpha) = 0.$$

If we add to (4.10) this equation and the p equations derived from (4.10) by interchanging b with c_i , ($i = 1, \dots, p$), we have (making use of the symmetry relation (4.3))

$$(4.11) \quad (p+2)K_{\beta abc_1 \dots c_p}^\alpha = P_{\beta ab, c_1 \dots c_p}^\alpha + \\ + \sum_{k=1}^p P_{\beta ac_k, c_1 \dots c_{k-1} bc_{k+1} \dots c_p}^\alpha + (\dots),$$

where (\dots) denotes sums of terms in the KÖNIG normal tensors of lower order, which sums vanish by (4.4). The vanishing of those terms is easily checked by direct calculation for $p = 1, 2, 3$, and may be proved for the general case. The details will be omitted for the sake of brevity.

Another general method that will apply to the calculation of the explicit form of a KÖNIG normal tensor of any order will be indicated. Write the relations

$$(4.12) \quad N_\sigma^\alpha + L_{\beta a}^\sigma(y) = {}^+L_{\lambda r}^\alpha(x) N_\beta^\lambda \frac{\partial x^r}{\partial y^a} + \frac{\partial N_\beta^\alpha}{\partial y^a}.$$

Take the p^{th} partial derivative with respect to the normal coordinates y^i , and evaluate at the base point of the normal representation. The equations (3.7) and (3.8) yield

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (N_\beta^\alpha)_0 = \delta_\beta^\alpha \\ \left(\frac{\partial^k N_\beta^\alpha}{\partial y^{c_1} \dots \partial y^{c_k}} \right)_0 = - (L_{\beta c_1 \dots c_k}^\alpha(x))_0 \\ \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)_0 = \delta_j^i \\ \left(\frac{\partial^k x^i}{\partial y^{c_1} \dots \partial y^{c_k}} \right)_0 = - (\Gamma_{c_1 \dots c_k}^i(x))_0 \end{array} \right.$$

Making these substitutions in the equations derived from (4.12) gives an expression for $K_{\beta ac_1 \dots c_p}^\alpha(x)$ in terms of KÖNIG normal tensors of lower order, derivatives of $L_{\beta c}^\alpha$, $\Gamma_{c_1 \dots c_{k+1}}^i$, and $L_{\beta c_1 \dots c_k}^\alpha(x)$, ($k = 1, \dots, p$).

THEOREM 10. — *If $L_{\beta\alpha}^\alpha(x)$ is an integrable connection all of the König normal tensors vanish.*

This theorem follows from (4.6) and Theorem 9.

THEOREM 11. — *If the covariant derivatives of the tensors $P_{\beta ab}^\alpha$ and R_{abc}^h vanish, then the König normal tensors of even order all vanish.*

Proof: If $R_{abc;a}^h$ is zero the affine normal tensors of even order vanish (*). By hypothesis we have

$$(4.14) \quad \frac{\partial^\dagger P_{\beta ab}^\alpha}{\partial y^c} + \dagger L_{\lambda c}^\alpha \dagger P_{\beta ab}^\lambda - \dagger L_{\beta c}^\lambda \dagger P_{\lambda ab}^\alpha - \\ - \dagger \Gamma_{ac}^h \dagger P_{\beta hb}^\alpha - \dagger \Gamma_{bc}^h \dagger P_{\beta ah}^\alpha = 0.$$

These equations may also be written in a symbolic form convenient for our purposes,

$$(4.15) \quad \frac{\partial^2 \dagger L_{\beta\alpha}^\alpha}{\partial y^b \partial y^c} - \frac{\partial^2 \dagger L_{\beta b}^\alpha}{\partial y^a \partial y^c} + \left(\dagger L \frac{\partial \dagger L}{\partial y} + \dagger L \dagger P + \dagger \Gamma \dagger P \right) = 0.$$

From (4.9) we see that the second KÖNIG normal tensor vanishes. If we differentiate (4.14) twice with respect to y^i and evaluate at the base point of the normal representation we see that the third extension of $P_{\beta ab}^\alpha$ is zero. If we differentiate (4.15) twice with respect to y^i and evaluate at the base point we find that the fourth KÖNIG normal tensor is symmetric in the first two Latin indices. Then, by Theorem 5, it is a zero tensor. We may then proceed by induction and show that if the $(2k - 1)^{st}$ extensions of $P_{\beta ab}^\alpha$ and the $(2k)^{th}$ KÖNIG normal tensors ($k = 1, \dots, p$) all vanish, then the $(2p + 1)^{st}$ extension of $P_{\beta ab}^\alpha$ and the $(2(p + 1))^{nd}$ KÖNIG normal tensor vanish.

5. Replacement theorem. — With the aid of theorems 1, 3, 4, and by methods similar those used in establishing the MICHAL-THOMAS theorem for differential invariants of an affine connection (9), the following fundamental theorem for simultaneous differential invariants of a general linear connection and a symmetric affine connection can be established. We leave the details of the proof to the reader.

THEOREM 12. — *Any tensor differential invariant of the form*

$$(5.1) \quad T_{\dots \beta \dots a \dots} \left(L_{\beta\alpha}^\alpha, \frac{\partial L_{\beta\alpha}^\alpha}{\partial x^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial^r L_{\beta\alpha}^\alpha}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_r}}; \Gamma_{ab}^i, \frac{\partial \Gamma_{ab}^i}{\partial x^{\alpha_1}}, \dots, \right. \\ \left. \dots, \frac{\partial^s \Gamma_{ab}^i}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_s}}; (E)F^{\dots}, \frac{\partial (E)F^{\dots}}{\partial x^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial^t (E)F^{\dots}}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_t}} \right),$$

(*) This was proved by A. D. MICHAL in his course on Modern Differential Geometry, 1931-1932. The proof is similar to that of Theorem 11 above.

where ${}_{(E)}F^{\dots}$ are the components of any set of composite tensors, may be expressed as the same functions of arguments that are affine and composite tensors

$$T^{\dots\alpha\dots\alpha}_{\dots\beta\dots b}(\mathbf{0}, K^{\alpha}_{\beta a c_1}, \dots, K^{\alpha}_{\beta a c_1 \dots c_r}; \mathbf{0}, A^i_{a b c_1}, \dots, A^i_{a b c_1 \dots c_s}; \\ {}_{(E)}F^{\dots}, {}_{(E)}F^{\dots, c_1}, \dots, {}_{(E)}F^{\dots, c_1 \dots c_t})$$

by replacing $L^{\alpha}_{\beta a}$ by zero, derivatives of $L^{\alpha}_{\beta a}$ by the corresponding König normal tensors, Γ^i_{ab} by zero, derivatives of Γ^i_{ab} by the corresponding affine normal tensors, and derivatives of the components of any composite tensor by the corresponding extensions of that tensor.

COROLLARY. — Any tensor differential invariant of the form (5.1) may be expressed by functions of the König curvature tensor $P^{\alpha}_{\beta ab}$, the affine curvature tensor B^h_{abc} , the tensors ${}_{(E)}F^{\dots}$, and successive covariant derivatives of $P^{\alpha}_{\beta ab}$, B^h_{abc} , and ${}_{(E)}F^{\dots}$.

This corollary follows from a theorem analogous to one for an affinely connected manifold $(^9, ^6)$, namely: (A) The p^{th} extension ($p \geq 2$) of any composite tensor T may be expressed as a rational integral function of T and the first p repeated covariant derivatives of T , the tensors $P^{\alpha}_{\beta ab}$, B^h_{abc} , and the first $(p - 2)$ repeated covariant derivatives of $P^{\alpha}_{\beta ab}$ and B^h_{abc} ; (B) the p^{th} KÖNIG normal tensor is a rational integral function of $P^{\alpha}_{\beta ab}$ and its first $(p - 1)$ repeated covariant derivatives, and (when $p \geq 3$) B^h_{abc} and its first $(p - 3)$ repeated covariant derivatives. Note that Theorem 8 gives (A) for $p = 2$, and Theorem 9 (with $p = 1$) gives (B) for $p = 2$. The generalization follows by induction as in the affine case.

PART II.

An extension of the recent Einstein-Mayer geometry.

6. Preliminary remarks. — In this part of the paper we shall consider a special situation which is itself an extension of the geometry considered by EINSTEIN and MAYER in their recent treatment of the unified field theory $(^3)$.

Let V_n be an n -dimensional Riemannian space with each point of which is associated an m -dimensional linear vector space V_m ($m > n$) which is endowed with a symmetric metric tensor $G_{\alpha\beta}(x)$ of rank m , such that $G_{\alpha\beta}X^{\alpha}X^{\beta}$

is positive definite throughout V_n . Further assume the existence of a composite tensor γ_α^z for which $\|\gamma_\alpha^z\|$ is of rank n . Define $G^{\alpha\beta}$ to be the cofactor of $G_{\alpha\beta}$ in $|G_{\alpha\beta}|$, divided by $|G_{\alpha\beta}|$.

In addition to the previously mentioned summation conventions, capital Latin indices will have the range $n + 1$ to m and such an index repeated in the same term is to be summed over its range.

THEOREM 13. — *There exist $m - n$ orthonormal vector fields which are solutions of the equations*

$$(6.1) \quad \gamma_\alpha^z X_\alpha = 0;$$

i. e. there exist vector fields A_x^E such that

$$(6.2) \quad \gamma_\alpha^z A_x^E = 0$$

and

$$(6.3) \quad G^{\alpha\beta} A_x^E A_\beta^F = \delta^{EF} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } E = F \\ 0 & \text{if } E \neq F. \end{cases}$$

Any two such sets of vector fields are related by

$$A_x^E = L_F^E A_x^F$$

where $\|L_F^E\|$ is orthogonal.

The orthonormal sets of solutions are build up by the SCHMIDT orthogonalization process familiar in the theory of integral equations.

THEOREM 14. — *The quadratic form*

$$(G_{\alpha\beta} \gamma_\alpha^z \gamma_b^\beta) dx^a dx^b$$

is positive definite and of rank n .

The first part of the theorem is obvious. The second follows by reductio ad absurdum.

We impose the condition that the Riemannian metric g_{ab} is given by

$$(6.4) \quad g_{ab} = G_{\alpha\beta} \gamma_\alpha^z \gamma_b^\beta.$$

As consequences of theorems 13 and 14 we have the corollary:

COROLLARY 1. — *The vector fields A_E^z , defined by*

$$(6.5) \quad A_E^z = G^{\alpha\beta} A_\beta^E,$$

are orthonormal sets of solutions of

$$(6.6) \quad \gamma_\alpha^z X^\alpha = 0;$$

that is

$$\gamma_a^\alpha A_E^\alpha = 0$$

and

$$(6.7) \quad G_{\alpha\beta} A_E^\alpha A_F^\beta = \delta_{EF} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } E = F \\ 0 & \text{if } E \neq F. \end{cases}$$

DEFINITION. — The vectors A_E^α will be referred to as exceptional vectors and any vector X^α which satisfies the equation

$$G_{\alpha\beta} X^\alpha A_E^\beta = 0$$

will be said to lie in the exceptional manifold of V_m .

7. Formulae relating the fundamental tensors.

THEOREM 15.

$$(7.1) \quad \gamma_a^\alpha \gamma_\alpha^b = \delta_a^b.$$

THEOREM 16.

$$(7.2) \quad \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^\alpha = \delta_\beta^a - A_E^\alpha A_\beta^E.$$

The proof of these two theorems is similar to the EINSTEIN-MAYER case.

If we are given the components of a V_m vector we can construct the components of a corresponding V_n vector by the defining relations

$$(7.3) \quad b^a = \gamma_a^\alpha B^\alpha$$

$$(7.4) \quad b_a = \gamma_a^\alpha B_\alpha.$$

THEOREM 17. — *The inverses of (6.4), (7.3), and (7.4) are respectively*

$$(7.5) \quad G_{\alpha\beta} = g_{ab} \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b + A_E^\alpha A_\beta^E,$$

$$(7.6) \quad B^\alpha = \gamma_a^\alpha b^a + A_E^\alpha A_\beta^E B^\beta.$$

and

$$(7.7) \quad B_\alpha = \gamma_a^\alpha b_a + A_E^\alpha A_\beta^E B_\beta.$$

It is immediate from (7.6) and (7.7) that any vectors in the exceptional manifold of V_m are in one-one correspondence with V_n vectors.

8. **Postulates for the determination of the linear connection.** — A linear connection $L_{\beta\alpha}^\lambda(x)$ will be defined in terms of the tensors γ_a^α , A_E^α , $G_{\alpha\beta}$, g_{ab} , and $m - n$ arbitrarily chosen V_n tensors F_{ac}^E by means of the following tensor equations.

Postulate I

$$G_{\alpha\beta;c} \equiv \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x^c} - L_{\alpha c}^\lambda G_{\lambda\beta} - L_{\beta c}^\lambda G_{\alpha\lambda} = 0.$$

Postulate II (*)

$$\gamma_{a;c}^z \equiv \frac{\partial \gamma_a^z}{\partial x^c} + L_{\lambda c}^z \gamma_a^\lambda - \left\{ \begin{matrix} h \\ ac \end{matrix} \right\} \gamma_h^z = A_{E^z}^z F_{ac}^E$$

where $\left\{ \begin{matrix} h \\ ac \end{matrix} \right\}$ are the CHRISTOFFEL symbols of V_n .

Postulate III (*)

$$A_{z;c}^E A_D^z \equiv \left(\frac{\partial A_z^E}{\partial x^c} - L_{zc}^\lambda A_\lambda^E \right) A_D^z = 0.$$

It is to be noted that if $m - n = 1$, Postulate III is not independent but is a consequence of definitions and Postulate I.

THEOREM 18. — *The linear connection as determined by the above postulates is*

$$(8.1) \quad L_{zc}^\mu = \left(\frac{\partial A_z^D}{\partial x^c} + F_{ac}^D \gamma_z^a \right) A_D^\mu + \left(\frac{\partial \gamma_{za}}{\partial x^c} - \gamma_{zh} \left\{ \begin{matrix} h \\ ac \end{matrix} \right\} - A_z^D F_{ac}^D \right) \gamma^{\mu a}.$$

Proof: Since

$$\gamma_a^z A_z^E = 0$$

then

$$(8.2) \quad \gamma_a^z A_{z;c}^E = -\gamma_{a;c}^z A_z^E.$$

Multiply (8.2) by γ_β^a . With the aid of Theorem 16, postulates II and III, and the relation

$$(8.3) \quad A_\alpha^E A_D^z = \delta_D^E,$$

the equations resulting from (8.2) become

$$(8.4) \quad A_{\beta;c}^E \equiv \frac{\partial A_\beta^E}{\partial x^c} - L_{\beta c}^\lambda A_\lambda^E = -F_{ac}^E \gamma_\beta^a.$$

By postulates I and II we have

$$(8.5) \quad \gamma_{za;c} \equiv \frac{\partial \gamma_{za}}{\partial x^c} - L_{ac}^\lambda \gamma_{\lambda a} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ac \end{matrix} \right\} \gamma_{ah} = A_z^E F_{ac}^E.$$

Multiply (8.5) by $\gamma^{\mu a}$. With the aid of Theorem 16 we obtain

$$(8.6) \quad L_{ac}^\mu = L_{ac}^\lambda A_D^\mu A_\lambda^D + \left(\frac{\partial \gamma_{za}}{\partial x^c} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ac \end{matrix} \right\} \gamma_{ah} - A_z^D F_{ac}^D \right) \gamma^{\mu a}.$$

From (8.4) we have

$$(8.7) \quad L_{ac}^\lambda A_D^\mu A_\lambda^D = \left(\frac{\partial A_z^D}{\partial x^c} + F_{ac}^D \gamma_z^a \right) A_D^\mu,$$

(*) We consider these postulates with reference to a fixed set of exceptional directions A_E^z .

and hence (8.6) establishes the validity of the formula (8.1) for the linear connection $L_{\alpha c}^{\mu}$.

The consistency of the postulates has been shown by long but straightforward calculations, which will be omitted here for the sake of brevity.

THEOREM 19. — *The components of the V_m curvature tensor $P_{\alpha bc}^{\mu}$ based on the linear connection (8.1) is given in terms of the Riemann-Christoffel tensor R_{bcd}^a , the tensors g_{ij} , γ_{α}^a , A_{α}^E and F_{ac}^E , by*

$$(8.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{\alpha\beta c}^{\mu} = \gamma^{\mu\alpha}[\gamma_{\alpha h}(F_{Dc}^h F_{ab}^D - F_{Db}^h F_{ac}^D - R_{abc}^h) + \\ + A_{\alpha}^D(F_{ac;b}^D - F_{ab;c}^D)] + A_D^{\mu}\gamma_{\alpha a}(F_{Db;c}^a - F_{Dc;b}^a) + \\ + A_D^{\mu}A_{\alpha}^E(F_{Db}^a F_{ac}^E - F_{Dc}^a F_{ab}^E), \end{array} \right.$$

where F_{Dc}^a is given by (8.10):

Proof: (8.4) may be written as

$$(8.9) \quad A_{\alpha;b}^E = -F_{Eb}^a \gamma_{\alpha a}$$

where

$$(8.10) \quad F_{Eb}^a = g^{ah} F_{hb}^E.$$

From (8.5) and (8.9) we have by calculation

$$(8.11) \quad A_{\alpha;b;c}^E = -F_{Eb;c}^a \gamma_{\alpha a} - F_{Eb}^a A_{\alpha}^D F_{ac}^D$$

and

$$(8.12) \quad \gamma_{\alpha a;b;c} = -F_{Dc}^h \gamma_{\alpha h} F_{ab}^D + A_{\alpha}^D F_{ab;c}^D.$$

By the generalized RICCI identity (2.3) we have

$$(8.13) \quad A_{\alpha;b;c}^D - A_{\alpha;c;b}^D = -P_{abc}^{\lambda} A_{\lambda}^D$$

and

$$(8.14) \quad \gamma_{\alpha a;b;c} - \gamma_{\alpha a;c;b} = -P_{abc}^{\lambda} \gamma_{\lambda a} - R_{abc}^h \gamma_{\alpha h}.$$

Multiply (8.14) by $\gamma^{\mu\alpha}$, apply Theorem 16, and employ relation (8.13). This yields

$$(8.15) \quad P_{\alpha bc}^{\mu} = -[A_D^{\mu}(A_{\alpha;b;c}^D - A_{\alpha;c;b}^D) + (\gamma_{\alpha a;b;c} - \gamma_{\alpha a;c;b} + R_{abc}^h \gamma_{\alpha h}) \gamma^{\mu\alpha}].$$

Substitution from (8.11) and (8.12) gives (8.8) as was to be proved.

Note that the last parenthesis in the explicit form (8.8) of the V_m curvature tensor P_{abc}^{μ}

$$(F_{Db}^a F_{ac}^E - F_{Dc}^a F_{ab}^E).$$

vanishes identically if $m - n = 1$.

9. **Theorems on parallel vector fields.** — The first three of the following four theorems provide an alternative set of postulates for the determination of the connection.

THEOREM 20. — *Let X^z be any vector field parallel along an arbitrarily chosen curve. Then necessary and sufficient conditions that X_x , defined by*

$$X_x = G_{x\beta} X^\beta,$$

be a parallel vector field along that curve, for all curves and all such X^z , are that

$$G_{x\beta;c} = 0.$$

THEOREM 21. — *Let B^z be any vector in the exceptional manifold V_m . i. e. there exists b^a such that $B^z = \gamma_a^z b^a$, and let b^a be displaced parallel to itself along any curve. Then necessary and sufficient conditions that δB^z so defined be orthogonal to the exceptional manifold are that*

$$\gamma_{a;c}^z = A_E^z F_{ac}^E.$$

THEOREM 22. — *A necessary and sufficient condition that δA_E^z be a vector of the exceptional manifold of V_m is that $A_F^z A_{x;c}^E$ be zero.*

THEOREM 23. — *Let the parallel displacement of b^a be in the direction $dx^a = \rho b^a$. Then necessary and sufficient conditions that δB^a ($B^z = \gamma_a^z b^a$) be zero are that the tensors F_{ac}^E be skewsymmetric,*

$$F_{ac}^E = -F_{ca}^E.$$

10. **Special representations.** — The following two theorems will be found useful in the next paragraph.

THEOREM 24. — *The determinant $|M_\beta^z|$ whose elements are given by*

$$(10.1) \quad M_\beta^z = \delta_\beta^z \gamma_b^z + \delta_\beta^B A_B^z$$

is not zero. Furthermore the inverse matrix of $\|M_\beta^z\|$ is $\|\tilde{M}_\beta^z\|$ where \tilde{M}_β^z is given by

$$(10.2) \quad \tilde{M}_\beta^z = \delta_a^z \gamma_\beta^a + \delta_A^z A_\beta^A.$$

The first statement in the theorem is proved by reductio ad absurdum; the second statement is verified by direct calculation.

DEFINITION. — The representation derived from a given representation by the change of vector coordinates alone as determined by (10.1) will be referred to as a special representation.

THEOREM 25. — *In a special representation the components of the fundamental quantities are*

$$(10.3) \quad \gamma_a^\alpha = \delta_a^\alpha, \quad \gamma_\alpha^\alpha = \delta_\alpha^\alpha, \quad A_E^\alpha = \delta_E^\alpha, \quad A_\alpha^E = \delta_\alpha^E, \quad G_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^b g_{ab} + \delta_\alpha^A \delta_\beta^A.$$

$$(10.4) \quad L_{\beta c}^\alpha = \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^b \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ bc \end{matrix} \right\} + \delta_A^\alpha \delta_\beta^b F_{bc}^A - \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^B F_{Bc}^\alpha.$$

(10.3) is calculated from the law of transformation of composito tensors. (10.4) is more simply calculated from the expressions (7.5) and (8.1) for $G_{\alpha\beta}$ and $L_{\beta c}^\alpha$.

The components of P_{abc}^μ in a special representation may be calculated from (8.8). The results are embodied in the following theorem.

THEOREM 26. — *The V_m curvature tensor P_{abc}^μ has the following components in a special representation:*

$$P_{abc}^\mu = \delta_\alpha^s \delta_p^\mu (F_{sc}^D F_{Db}^p - F_{sb}^D F_{Dc}^p + R_{sbc}^p) + \delta_M^\mu \delta_x^s (F_{sb;c}^M - F_{se;b}^M) + \delta_p^\mu \delta_x^A (F_{Ac;b}^p - F_{Ab;c}^p) + \delta_M^\mu \delta_x^A (F_{ab}^M F_{Ac}^A - F_{ac}^M F_{Ab}^A).$$

11. Reduction theorem for tensor differential invariants with only Latin indices. — Besides the general replacement theorem, Theorem 12, it is possible to state a reduction theorem applicable to certain tensor differential invariants of the geometry under consideration in this part of the paper.

A prime (') before components of tensors, connection, etc. will be used to indicate that those components are referred to a special representation with Riemannian normal coordinates y^i .

Define the functions $\Lambda_{\beta c i_1 \dots i_k}^\alpha(x)$ by the equations

$$(11.1) \quad \begin{aligned} \Lambda_{\beta c}^\alpha(q) &= (L_{\beta c}^\alpha)_0 \\ \Lambda_{\beta c i_1 \dots i_k}^\alpha(q) &= \left(\frac{\partial^{k'} L_{\beta c}^\alpha}{\partial y^{i_1} \dots \partial y^{i_k}} \right)_0 \end{aligned}$$

where $x^i = q^i$ is the origin of the Riemannian normal coordinate system. Hence, by (10.4)

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \Lambda_{\beta c}^\alpha &= \delta_A^\alpha \delta_\beta^b F_{bc}^A - \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^B F_{Bc}^\alpha \\ \Lambda_{\beta c i_1 \dots i_k}^\alpha &= \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^b A_{bc i_1 \dots i_k}^\alpha + \delta_A^\alpha \delta_\beta^b F_{bc, i_1 \dots i_k}^A - \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^B F_{Bc, i_1 \dots i_k}^\alpha \end{aligned}$$

where $A_{bc i_1 \dots i_k}^\alpha$ are affine normal tensors, and $F_{bc, i_1 \dots i_k}^A$ and $F_{Bc, i_1 \dots i_k}^\alpha$ are extensions of F_{bc}^A and F_{Bc}^α based on the CHRISTOFFEL symbols. From Theorem 17 we see that

$$(11.3) \quad \left(\frac{\partial^{k'} G_{\alpha\beta}(y)}{\partial y^{i_1} \dots \partial y^{i_k}} \right)_0 = \delta_\alpha^\alpha \delta_\beta^b (g_{ab, i_1 \dots i_k}(x))_q.$$

THEOREM 27. - Any tensor differential invariant with no Greek indices

$$(11.4) \quad T_{k\dots l}^{i\dots j} \left(L_{\beta\alpha}^z, \dots, \frac{\partial^s L_{\beta\alpha}^z}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_s}}; \gamma_a^z, \dots, \frac{\partial^t \gamma_a^z}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_t}}; A_E^z, \dots, \frac{\partial^j A_E^z}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_j}}; \right. \\ \left. g_{ab}, \dots, \frac{\partial^i g_{ab}}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_i}}; G_{\alpha\beta}, \dots, \frac{\partial^u G_{\alpha\beta}}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_u}} \right)$$

may be expressed as the same functions with arguments that are linear combinations of V_n tensors; that is, it may be put in the form

$$(11.5) \quad T_{k\dots l}^{i\dots j} (\Lambda_{\beta\alpha}^z, \dots, \Lambda_{\beta\alpha c_1 \dots c_s}^z; \delta_a^z, \dots, 0; \delta_E^z, \dots, 0; \\ g_{ab}, \dots, g_{ab, c_1 \dots c_t}; \delta_x^a \delta_\beta^b g_{ab} + \delta_x^A \delta_\beta^A, \dots, \delta_x^a \delta_\beta^b g_{ab, c_1 \dots c_u})$$

by replacing $L_{\beta\alpha}^z$ by $\Lambda_{\beta\alpha}^z$, $\frac{\partial^k L_{\beta\alpha}^z}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_k}}$ by $\Lambda_{\beta\alpha c_1 \dots c_k}^z$, γ_a^z by δ_a^z , derivatives of γ_a^z by zero, A_E^z by δ_E^z , derivatives of A_E^z by zero, g_{ab} by g_{ab} , $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}$ by zero, $\frac{\partial^k g_{ab}}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_k}}$ (for $k > 1$) by the k^{th} extension of g_{ab} , $G_{\alpha\beta}$ by $\delta_x^a \delta_\beta^b g_{ab} + \delta_x^A \delta_\beta^A$, $\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x^c}$ by zero, and $\frac{\partial^k G_{\alpha\beta}}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_k}}$ (for $k > 1$) by $\delta_x^a \delta_\beta^b$ times the k^{th} extension of g_{ab} .

Proof: By hypothesis we have

$$(11.6) \quad T_{k\dots l}^{i\dots j} \left(L_{\beta\alpha}^z, \dots, \frac{\partial^u G_{\alpha\beta}}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_u}} \right) = \\ = T_g^e \dots f \left(*L_{\beta\alpha}^z, \dots, \frac{\partial^{u*} G_{\alpha\beta}}{\partial y^{c_1} \dots \partial y^{c_u}} \right) \frac{\partial y^g}{\partial x^k} \dots \frac{\partial y^h}{\partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial y^e} \dots \frac{\partial x^j}{\partial y^f}$$

where (*) denotes evaluation in a Riemannian normal coordinate system with origin at $x^i = q^i$. Clearly

$$(11.7) \quad T_g^e \dots f \left(*L_{\beta\alpha}^z, \dots, \frac{\partial^{u*} G_{\alpha\beta}}{\partial y^{c_1} \dots \partial y^{c_u}} \right) = T_g^e \dots f \left(L_{\beta\alpha}^z, \dots, \frac{\partial^{u'} G_{\alpha\beta}}{\partial y^{c_1} \dots \partial y^{c_u}} \right).$$

Since

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)_0 = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_q = \delta_j^i$$

it follows from (10.3), (11.2), and (11.3) that

$$\left[T_{k\dots l}^{i\dots j} \left(L_{\beta\alpha}^z, \dots, \frac{\partial^u G_{\alpha\beta}}{\partial x^{c_1} \dots \partial x^{c_u}} \right) \right]_{x=q} = \\ = \left[T_{k\dots l}^{i\dots j} \left(\Lambda_{\beta\alpha}^z, \dots, \delta_x^a \delta_\beta^b g_{ab, c_1 \dots c_u} \right) \right]_{x=q}.$$

THEOREM 28. - The components of any tensor differential invariant of the form (11.4) are expressible as functions of V_n tensors only; that is,

$$(11.8) \quad T_{k\dots l}^{i\dots j} = H_{k\dots l}^{i\dots j} (A_{abc_1}^h, \dots, A_{abc_1 \dots c_s}^h; F_{ab}^E, \dots, F_{ab, c_1 \dots c_s}^E; \\ g_{ab}, 0, g_{ab, c_1 c_2}, \dots, g_{ab, c_1 \dots c_q})$$

where q is the greatest of s , t , and u .

COROLLARY. — *The tensor differential invariant (11.4) may be expressed as*

$$T_{k\dots l}^{i\dots j} = K_{k\dots l}^i \dots j (R_{hab}^l, R_{hab;c_1}^l, \dots, R_{hab;c_1;c_2;\dots;c_n}^l; \\ F_{ab}^E, F_{ab;c_1}^E, \dots, F_{ab;c_1;c_2;\dots;c_s}^E; g_{ab})$$

where

(1) R_{hab}^l is the Riemann-Christoffel tensor of V_n ,

(2) a semicolon between indices indicates covariant differentiation based on the Christoffel symbols of V_n ,

(3) n is the greatest of $s - 1$, $t - 2$, and $u - 2$.

Evident modifications of the formulas and theorems of this paper will result from substituting for Postulate II the more general postulate

$$\gamma_{\alpha;c}^{\alpha} = A_E^{\alpha} F_{ac}^E + \gamma_r^{\alpha} U_{ac}^r$$

where U_{ac}^r is a mixed V_n tensor.

California, Institute of Technology, September 1932.

REFERENCES

- (¹) ROBERT KÖNIG, « Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung », vol. 28, 1919, pp. 213-228.
- (²) L. SCHLESINGER, « Mathematische Annalen », vol. 99, 1928, pp. 413-434.
- (³) J. A. SCHOUTEN, « Proceedings Koninklijke Akad. v. Wetenschappen », Amsterdam, vol. 27, 1924, pp. 407-424.
- (⁴) J. H. C. WHITEHEAD, « Transactions of the Amer. Mathem. Society », vol. 33, 1931, pp. 191-209.
- (⁵) A. EINSTEIN and W. MAYER, « Sitzungsberichte der Preuss. Akad. », Dec. 1931, pp. 541-547. Ibid., April 14, 1932.
- (⁶) O. VEBLEN, *Invariants of Quadratic Differential Forms*, « Cambridge Tract », 1927. See also, O. VEBLEN and T. Y. THOMAS, « Transactions of the Amer. Mathem. Society », vol. 25, 1923, pp. 561-608.
- (⁷) L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry*, « Colloquium Lectures of the Amer. Mathem. Society », 1927.
- (⁸) A. D. MICHAL, « Transactions of the Amer. Mathem. Society », vol. 29, 1927, pp. 612-646; « Proceedings of the National Academy », vol. 14, 1928, pp. 746-754; « Bulletin of the Amer. Mathem. Society », vol. 36, 1930, pp. 541-546; « Amer. Mathem. Monthly », vol. 37, 1930, pp. 529-533; « Tôhoku Mathem. Journal », 1931; « Proceedings of the National Academy », vol. 17, 1931, pp. 132-136.
- (⁹) A. D. MICHAL and T. Y. THOMAS, « Annals of Mathematics », vol. 28, 1927, pp. 196-236. Ibid., vol. 28, 1927, pp. 631-688.
- (¹⁰) E. BORTOLOTTI, « Annali di Mathem. », Serie IV, Tomo VIII, 1930-1931, pp. 54-101; « Annals of Mathematics », vol. 32, 1931, pp. 361-377.
- (¹¹) T. LEVI-CIVITA, « Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo », vol. 42, 1917, pp. 173-205. This paper initiated the theory of parallel displacements in Riemannian geometry. See also his book, *The Absolute Differential Calculus* (Blackie & Son, 1927).

Les probabilités à structure héréditaire et la statistique moléculaire.

FELIX JOACHIM DE WISNIEWSKI (Lazin-Polonia).

Dans la note suivante, on introduira dans la statistique moléculaire l'idée d'interdépendance entre deux états énergétiques consécutifs des molécules d'un milieu matériel.

L'introduction de l'interdépendance entre deux états consécutifs d'une molécule fait apparaître le temps comme une nouvelle variable dans la statistique moléculaire.

On obtiendra de cette manière l'expression de la répartition de l'énergie entre les molécules en fonction du temps, ce qui permettra de suivre l'évolution d'un système moléculaire à partir d'une répartition arbitraire donnée.

Le schéma d'interdépendance utilisé ici est analogue au schéma que M. POLYA ⁽¹⁾ a employé dans des recherches sur les probabilités à structure héréditaire.

Représentons nous N molécules qui ont en chaque instant l'une des différentes valeurs E_1, E_2, \dots, E_n , de l'énergie par molécule.

Divisons le temps en petits intervalles: $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r, \dots, \Delta_n$, et donnons nous une distribution arbitraire des énergies E_s parmi les molécules en nombre de N dans l'intervalle de temps Δ_0 .

Désignons ensuite par $\rho_s^{(0)}$ la probabilité que la molécule donnée possède l'énergie E_s dans l'intervalle Δ_0 .

Le nombre de molécules qui dans l'intervalle Δ_0 auront l'énergie E_s est alors:

$$N \cdot \rho_s^{(0)}.$$

Nous allons désigner la probabilité qu'une molécule ait, dans l'intervalle de temps Δ_r , l'énergie E_s par:

$$\rho_s^{(r)}.$$

(1) G. POLYA, « Annales de l'Institut Henri Poincaré », 1931, tome I, p. 117.

Nous admettrons ensuite que l'état énergétique de la molécule donnée dans l'intervalle de temps Δ_{r-1} influe sur l'état énergétique de la même molécule dans l'intervalle de temps Δ_r successif.

Supposons maintenant qu'une molécule donnée ait l'énergie E_k dans l'intervalle de temps Δ_{r-1} .

La probabilité qu'elle ait dans l'intervalle suivant l'énergie E_n sera désignée par :

$$\rho_{n, k}.$$

Comme chacune des molécules N peut avoir l'une des valeurs E_1, E_2, \dots, E_n de l'énergie dans l'intervalle Δ_{r-1} il suit que la probabilité que cette molécule ait dans l'intervalle Δ_r l'énergie E_n sera égale à :

$$\rho_n^{(r)} = \sum_1^{\infty} \rho_k^{(r-1)} \cdot \rho_{n, k}.$$

Comme :

$$\sum_1^{\infty} \rho_n^{(r)} = 1; \quad \sum_1^{\infty} \rho_k^{(r-1)} = 1,$$

on peut poser :

$$\sum_1^{\infty} \rho_{n, k} = 1,$$

$\rho_k^{(r-1)}$ étant la probabilité que la molécule donnée ait dans l'intervalle Δ_r l'énergie E_k .

Nous supposerons dans la suite que la probabilité $\rho_{n, k}$ qui exprime la dépendance d'un état énergétique des états énergétiques précédents, soit une constante pendant l'évolution du système moléculaire.

Le problème à résoudre se réduit à trouver la probabilité $\rho_k^{(r)}$ pour l'intervalle de temps Δ_r en fonction de la distribution primitive arbitraire :

$$\rho_n^{(0)}$$

à l'époque de l'intervalle Δ_0 .

Avant d'aller plus loin, on fera quelques hypothèses simplificatrices.

Nous allons distinguer entre les probabilités

1° la probabilité: $\rho_{n, k}.$

$$\rho_{n, n}$$

pour qu'une molécule ait la même énergie dans l'intervalle de temps suivant.

2° la probabilité:

$$\rho_{n, k}$$

pour que la molécule ait une énergie différente dans l'intervalle suivant.

Pour simplifier les calculs, on admettra que $\rho_{n, k}$ ne dépende pas de k , c'est-à-dire qu'on pourra écrire :

$$\rho_{n, k} = \sigma_{n, n}.$$

Pour $\rho_n^{(r)}$ on aura alors l'expression :

$$\rho_n^{(r)} = \rho_n^{(r-1)} \cdot \rho_{n, n} + \sigma_{n, n} \left\{ \sum_1^{n-1} \rho_s^{(r-1)} + \sum_{n+1}^{\infty} \rho_s^{(r-1)} \right\}.$$

En tenant compte de la relation :

$$\sum_1^{n-1} \rho_s^{(r-1)} + \sum_{n+1}^{\infty} \rho_s^{(r-1)} = 1 - \rho_n^{(r-1)}$$

on obtient

$$\rho_n^{(r)} = \rho_n^{(r-1)} \cdot \rho_{n, n} + \sigma_{n, n} (1 - \rho_n^{(r-1)}) = \sigma_{n, n} + (\rho_{n, n} - \sigma_{n, n}) \rho_n^{(r-1)}.$$

En posant maintenant :

$$\rho_{n, n} - \sigma_{n, n} = \tau$$

et admettant pour simplifier que τ est indépendant de n , on a :

$$\rho_n^{(r)} = \sigma_{n, n} + \tau \rho_n^{(r-1)}$$

d'où il suit que :

$$\sum_1^{\infty} \sigma_{n, n} = 1 - \tau.$$

En posant maintenant $r = 1$, on trouve :

$$\rho_n^{(1)} = \sigma_{n, n} + \tau \rho_n^{(0)}$$

et pour $r = 2, 3, \dots$ on obtient identiquement :

$$\begin{aligned} \rho_n^{(2)} &= \sigma_{n, n} + \tau \rho_n^{(1)} = \sigma_{n, n} (1 + \tau) + \tau^2 \rho_n^{(0)} \\ \rho_n^{(3)} &= \sigma_{n, n} + \tau \rho_n^{(2)} = \sigma_{n, n} (1 + \tau + \tau^2) + \tau^3 \rho_n^{(0)} \\ &\dots \end{aligned}$$

En général, on trouve :

$$\rho_n^{(r)} = \sigma_{n, n} (1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^{r-1}) + \tau^r \cdot \rho_n^{(0)}$$

d'où :

$$\rho_n^{(r)} = \frac{\sigma_{n, n}}{1 - \tau} + \tau^r \left\{ \rho_n^{(0)} - \frac{\sigma_{n, n}}{1 - \tau} \right\}.$$

Si $\tau < 1$ on a pour $r = \infty$:

$$\rho_n^{(\infty)} = \frac{\sigma_{n, n}}{1 - \tau}.$$

En introduisant la grandeur $\rho_n^{(\infty)}$ dans l'expression de $\rho_n^{(r)}$, on trouve:

$$\rho_n^{(r)} = \rho_n^{(\infty)} + \tau^r (\rho_n^{(0)} - \rho_n^{(\infty)}).$$

C'est l'expression de la probabilité pour qu'une molécule possède l'énergie E_n dans l'intervalle de temps Δ_r , c'est-à-dire dans l'intervalle de temps compris entre t et $t - \Delta_r$.

Posons maintenant:

$$t - \sum_1^r \Delta_r = t_0.$$

Si tous les Δ_s sont égaux à Δ , on aura:

$$t - t_0 = r \cdot \Delta.$$

Pour l'expression de $\rho_n^{(r)}$ on aura alors:

$$\rho_n^{(t)} = \rho_n^{(\infty)} + [\rho_n^{(0)} - \rho_n^{(\infty)}] (\tau)^{\frac{t-t_0}{\Delta}}.$$

En posant maintenant:

$$\tau^{\frac{1}{\Delta}} = e^{-\alpha} \quad \alpha > 0$$

on trouve enfin l'expression cherchée:

$$\rho_n^{(t)} = \rho_n^{(\infty)} + [\rho_n^{(0)} - \rho_n^{(\infty)}] e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Cette formule exprime la probabilité pour qu'une molécule possède l'énergie E_n au temps t si la même probabilité au moment $t_0 < t$ était $\rho_n^{(0)}$.

Cette expression montre que, indépendamment de la répartition primitive (pour $t = t_0$) des énergies E_s entre les molécules, la répartition après un intervalle de temps infini $t - t_0 = \infty$ tend vers la valeur:

$$\rho_n^{(\infty)}.$$

Si cette répartition est réaliséé pour un certain moment, par exemple pour $t = t_0$, c'est-à-dire si:

$$\rho_n^{(t)} = \rho_n^{(\infty)} \quad \text{pour } t = t_0$$

elle ne changera pas avec le temps sous l'influence des actions héréditaires.

La répartition $\rho_n^{(\infty)}$ des énergies entre les molécules est donc stable si le milieu moléculaire est isolé, c'est-à-dire soustrait aux actions extérieures.

Un système moléculaire identique au système décrit ici peut être suivi dans son évolution à travers le temps.

Nous passerons maintenant à calculer l'énergie et l'entropie du système moléculaire envisagé ici.

Pour l'énergie totale $U^{(t)}$ au moment t on trouve :

$$U^{(t)} = N \sum_1^{\infty} E_n \rho_n^{(t)} = N \sum_1^{\infty} E_n \rho_n^{(\infty)} + N \left\{ \sum_1^{\infty} E_n \rho_n^{(0)} - \sum_1^{\infty} E_n \rho_n^{(\infty)} \right\} e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

En posant :

$$U^{(\infty)} = N \sum_1^{\infty} E_n \rho_n^{(\infty)}; \quad U^{(0)} = N \sum_1^{\infty} E_n \rho_n^{(0)}$$

on obtient :

$$U^{(t)} = U^{(\infty)} + (U^{(0)} - U^{(\infty)})e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Un système moléculaire en évolution sous l'influence des actions héréditaires change son énergie totale avec le temps si l'énergie $U^{(0)}$ correspondante à la répartition primitive est différente de l'énergie $U^{(\infty)}$ correspondante à la répartition stable.

Si le système moléculaire est isolé, l'énergie primitive doit être égale ou plus grande que l'énergie de l'état stable :

$$U^{(0)} \geq U^{(\infty)}.$$

Si $U^{(0)} > U^{(\infty)}$ le système moléculaire en évolution perd par unité de temps l'énergie :

$$-\frac{dU^{(t)}}{dt} = \alpha(U^{(0)} - U^{(\infty)})e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Pour la chaleur spécifique c_v à volume constant on trouve l'expression :

$$c_v = \frac{dU^{(t)}}{dT} = c_v^{(\infty)} + (c_v^{(0)} - c_v^{(\infty)})e^{-\alpha(t-t_0)}$$

où

$$c_v^{(0)} = \frac{dU^{(0)}}{dT}; \quad c_v^{(\infty)} = \frac{dU^{(\infty)}}{dT}$$

et où T désigne la température.

On montrera maintenant que pour le système moléculaire ici décrit et qui tend vers la répartition stable :

$$\rho_n^{(\infty)} = e^{aE_n + b}$$

la grandeur

$$\frac{dS^{(t)}}{dt} + k\alpha \frac{dU^{(t)}}{dt} \quad (S^{(t)} \text{ entropie})$$

est toujours positive.

Comme pour l'entropie $S^{(t)}$ on a, par définition, l'expression :

$$S^{(t)} = -kN \sum_1^{\infty} \rho_n^{(t)} \log \rho_n^{(t)}$$

on obtient pour $\frac{dS^{(t)}}{dt}$, attendu que :

$$\sum_1^{\infty} \frac{d\rho_n^{(t)}}{dt} = 0,$$

l'expression suivante :

$$\frac{dS^{(t)}}{dt} = -kN \sum_1^{\infty} \frac{d\rho_n^{(t)}}{dt} \cdot \log \rho_n^{(t)}.$$

En introduisant maintenant

$$\frac{d\rho_n^{(t)}}{dt} = -\alpha(\rho_n^{(t)} - \rho_n^{(\infty)})$$

dans l'expression de $\frac{dS^{(t)}}{dt}$, on trouve :

$$\frac{dS^{(t)}}{dt} = kN\alpha \sum_1^{\infty} (\rho_n^{(t)} - \rho_n^{(\infty)}) \log \rho_n^{(t)}.$$

Pour $\frac{dU^{(t)}}{dt}$, on a l'expression suivante :

$$\frac{dU^{(t)}}{dt} = -\alpha N \sum_1^{\infty} E_n(\rho_n^{(t)} - \rho_n^{(\infty)}).$$

En multipliant $\frac{dU^{(t)}}{dt}$ par ka et en ajoutant ensuite à $\frac{dS^{(t)}}{dt}$, on trouve :

$$(\tilde{\omega}) \quad \frac{dS^{(t)}}{dt} + ka \frac{dU^{(t)}}{dt} = kaN \sum_1^{\infty} (\rho_n^{(t)} - \rho_n^{(\infty)}) [\log \rho_n^{(t)} - (aE_n + b)]$$

car

$$\sum_1^{\infty} (\rho_n^{(t)} - \rho_n^{(\infty)}) = 0;$$

a et b sont des constantes.

Puisque le produit :

$$(a - b)[\log a - \log b]$$

a une valeur toujours positive, il suit que le second membre de l'égalité ($\tilde{\omega}$) sera positif si :

$$(x) \quad \log \rho_n^{(\infty)} = aE_n + b.$$

On voit donc que pendant l'évolution d'un système moléculaire du type qu'on vient d'envisager, on a toujours l'inégalité :

$$\frac{dS^{(t)}}{dt} + ka \frac{dU^{(t)}}{dt} \geq 0$$

La répartition stable (x) ainsi trouvée est identique à la répartition la

plus probable de la statistique classique et quantique si l'on pose :

$$\alpha = -\frac{1}{kT}$$

où T est la température absolue.

Pour des systèmes moléculaires en évolution qui tendent vers la répartition stable donnée par la formule :

$$\rho_n^{(\infty)} = e^{-\frac{E_n}{kT} + b},$$

la relation :

$$\frac{dS^{(t)}}{dt} \geq \frac{1}{T} \frac{dU^{(t)}}{dt}$$

est satisfaite à tout instant pendant l'évolution du système.

Il suit de cette inégalité que :

$$\frac{dS^{(t)}}{dt} \geq 0$$

seulement pour des systèmes qui absorbent de l'énergie ($\frac{dU^{(t)}}{dt} \geq 0$) pendant l'évolution.

Pour un système qui évolue vers une répartition stable différente de la répartition :

$$\log \rho_n^{(\infty)} = \alpha E_n + b$$

c'est-à-dire pour une répartition donnée par :

$$\log \rho_n^{(\infty)} = \alpha E_n + b - \eta_n$$

l'inégalité :

$$\frac{dS^{(t)}}{dt} + k\alpha \frac{dU^{(t)}}{dt} \geq 0$$

est toujours satisfaite si la déviation :

$$-\eta_n = -(aE_n + b) + \log \rho_n^{(\infty)}$$

a le même signe que la différence :

$$\rho_n^{(t)} - \rho_n^{(\infty)},$$

comme on s'en rend compte facilement.

Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche.

Memoria di LUIGI ONOFRI (a Bologna).

Sunto. - *L'A. determina i campi di convergenza uniforme delle serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)],$$

essendo le funzioni $f_n(u)$, $\varphi(z)$ analitiche, intere; gli esponenti p_n sono numeri interi, positivi tendenti all'infinito ed i coefficienti a_n sono costanti.

In questo lavoro determiniamo i campi di convergenza uniforme per le serie del tipo:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)],$$

essendo:

- i coefficienti a_n delle costanti;
- gli esponenti p_n dei numeri interi, positivi tendenti all'infinito;
- la funzione $\varphi(z)$ analitica, intera e non costante;
- le funzioni

$$f_n(u) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{mn} u^m$$

analitiche, intere e tali che il primo coefficiente b_{mn} differente da zero, sia eguale all'unità.

Questo argomento, che già fu trattato, per serie più generali della (1), da vari Autori ed in ispecial modo, con ricchezza e cospicuità di risultati, dai proff. S. PINCHERLE ⁽¹⁾ e L. TONELLI ⁽²⁾, presenta, anche nel caso qui considerato, diversi aspetti interessanti ed offre la possibilità di effettuare numerose e notevoli ricerche. A tale proposito, è da ricordare la recente

⁽¹⁾ S. PINCHERLE, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche.* (« R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna », 1881); *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi.* (« Annali di Matematica », serie II, tomo XII, 1883-84); *Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes.* (« Comptes Rendus », tomo 107, 1888).

⁽²⁾ L. TONELLI, *Sulle serie di funzioni analitiche della forma $\sum a_n(x)x^n$.* (« Annali di Matematica, serie III, tomo XVIII, 1911).

Memoria di G. JULIA ⁽¹⁾ sulle serie della forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n f(z^n)$$

le quali si ottengono dalla (1) facendo $p_n = n$, $\varphi(z) = z$, $f_n(u) = f(u)$.

Nella prima parte della presente Memoria, esponiamo un procedimento atto alla costruzione di un campo C di convergenza uniforme della (1), avente, inoltre, la proprietà di contenere tutti quei campi in cui la (1) converge uniformemente.

Nei casi pratici, la determinazione di C , o del suo contorno, può riuscire, talvolta, lunga e laboriosa; allo scopo di renderla più rapida ed agevole, abbiamo enunciato, ai n.° 5, 6, 7, 8, speciali criteri di facile e frequente applicazione.

La seconda parte è dedicata allo studio di un caso particolare ed alla ricerca delle condizioni alle quali deve essere assoggettata la $\varphi(z)$ affinché il campo C contenga un dato cerchio $(0, k)$ la cui periferia appartenga al contorno di C .

Nella terza ed ultima parte vengono esaminate le curve continue, esterne a C , sulle quali la (1) è convergente uniformemente. Questo studio è rivolto, in particolar modo, al comportamento della $\varphi(z)$ lungo le curve suddette.

Come appare da questo breve riassunto, nella presente Memoria ci siamo occupati esclusivamente delle questioni inerenti la convergenza delle (1), senza intrattenerci sui problemi relativi alla rappresentazione di una funzione analitica assegnata mediante serie del tipo considerato.

Di ciò, ci riserviamo trattare ampiamente in un successivo lavoro.

I.

1. Cominciamo con lo studio di un caso assai particolare e semplice allo scopo di esporre subito i concetti ed i metodi che, convenientemente sviluppati nel seguito, ci permetteranno di addivenire alla conoscenza del campo di convergenza uniforme di una serie del tipo (1).

Poniamo:

$$a_{2n} = \frac{1}{2^{4n^2}}, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}, \quad p_{2n} = 2n, \quad p_{2n+1} = 2n + 1,$$

$$\varphi(z) = z - 2, \quad f_{2n}(u) = 1 + u^{2n}, \quad f_{2n+1}(u) = 1 + u.$$

⁽¹⁾ G. JULIA, *Sur un développement des fonctions holomorphes*. (« Acta Mathematica », vol. 54, 1930).

Indichiamo con $M_n(r^{p_n})$ il massimo di $|f_n(u)|$ sulla circonferenza $(0, r^{p_n})$ e con $R(r)$ il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(r^{p_n}) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^{4n^2}} (1 + r^{4n^2}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2^{2n+1}} (1 + r^{2n+1}).$$

Con facili calcoli si trova che $R(r)$ è eguale a 2 per $r \leq 1$, è eguale a $\frac{2}{r}$ per $1 < r \leq 2$, ed è nullo per $r > 2$.

Ciò premesso, consideriamo i punti z del piano nei quali si ha:

$$(a) \quad R(|\varphi(z)|) > |z|, \quad \text{cioè: } R(|z-2|) > |z|.$$

Tenendo presenti i valori assunti da $R(r)$ al variare di r , si vede subito che:

per $|z-2| \leq 1$, deve essere $|z| < 2$;

per $1 < |z-2| \leq 2$, deve essere $|z||z-2| < 2$;

per $|z-2| > 2$, non esistono valori di z soddisfacenti alla (a).

In altri termini, i punti z debbono trovarsi, contemporaneamente, all'interno dei cerchi $(0, 2)$, $(2, 2)$ e della cassinoide

$$|z||z-2| = 2.$$

È poi agevole provare che il campo C , determinato dai suddetti punti z , ha per contorno: 1.° l'arco della circonferenza $(0, 2)$ avente gli estremi nei punti $z_1 = \frac{7}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}$, $z_2 = \frac{7}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4}$ della cassinoide e passante per $z=2$;

2.° l'arco della circonferenza $(2, 2)$ avente gli estremi nei punti $z_3 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}$, $z_4 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4}$ della cassinoide e passante per l'origine; 3.° i due archi di cassinoide che congiungono z_1 con z_3 e z_2 con z_4 .

Passiamo ora a dimostrare che C è il campo di convergenza uniforme della serie considerata (1).

Prendiamo un arco γ di una circonferenza $(2, r)$ ed osserviamo che, al variare di z su γ , il punto $u = (z-2)^{p_n}$ viene a descrivere tutta la circonferenza $(0, r^{p_n})$, purchè si abbia l'avvertenza di scegliere abbastanza grande l'esponente p_n .

Ne discende che tutte le funzioni $|f_n((z-2)^{p_n})|$, a partire da un certo indice \bar{n} , raggiungono sull'arco γ i valori massimi $M_n(r^{p_n})$.

(1) A questa asserzione si può anche pervenire mediante un esame diretto della serie e cioè senza l'ausilio di quei procedimenti generali dei quali si fa uso nel testo.

Allora, se la serie converge uniformemente lungo l'arco γ , dovrà aversi, per n sufficientemente grande,

$$|a_n| |\zeta|^n M_n(r^{p_n}) < 1,$$

essendo $|\zeta|$ il minimo di $|z|$ sull'arco stesso. Ma questa disuguaglianza richiede che sia:

$$|\zeta| \leq R(r) = R(|\zeta - 2|)$$

e cioè, per la (a), che ζ sia interno od al contorno di C .

Resta così provato che la serie data non può convergere uniformemente in campi a due dimensioni esterni a C .

Infine, dalle disuguaglianze (a), cui soddisfano tutti i punti di C , consegue immediatamente la convergenza uniforme della serie nell'interno di questo campo.

2. Determinato così il campo di convergenza uniforme per una serie assai semplice del tipo (1), passiamo ora allo studio della questione nel caso generale.

Indichiamo con R ed $R(r)$ i raggi di convergenza delle serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(r^{p_n}) z^n,$$

essendo $M_n(r^{p_n})$ il massimo di $|f_n(u)|$ sulla circonferenza $(0, r^{p_n})$.

Detto r' il limite superiore dei valori di r pei quali la successione

$$\sqrt[n]{|a_n| M_n(r^{p_n})}$$

è limitata, si vede immediatamente che per $r < r'$ è $R(r) > 0$, mentre per $r > r'$ è $R(r) = 0$.

La funzione $R(r)$ non è, in generale, continua; tuttavia, essendo monotona, decrescente, può avere soltanto delle discontinuità di prima specie. Esisteranno, perciò, i due limiti $R(r-0)$, $R(r+0)$ i quali saranno, al pari della $R(r)$, funzioni monotone, decrescenti della variabile r .

Osserviamo, infine, che la $R(r-0)$ è continua a sinistra e la $R(r+0)$ a destra nei punti r in cui esse sono finite.

3. Consideriamo i punti z del piano nei quali la funzione

$$\alpha(z) = R(|\varphi(z)| + 0) - |z|$$

è positiva ed indichiamo con C il loro aggregato.

Nell'ipotesi che punti siffatti esistano, è facile provare che ciascuno di essi è interno a C .

Invero, detto z uno di questi punti e posto $|\varphi(z)| = r$, si determini un numero δ in guisa che sia:

$$R(r + \delta + 0) - |z| > 0.$$

Ciò è sempre possibile in virtù della continuità a destra della funzione $R(r + 0)$.

Poi, si prenda un intorno di z contenuto nel cerchio $(0, R(r + \delta + 0))$ e tale che entro di esso la funzione $|\varphi(z)|$ sia inferiore a $r + \delta$. Allora, se z_1 è un punto qualunque del suddetto intorno, si avrà:

$$R(|\varphi(z_1)| + 0) \geq R(r + \delta + 0)$$

e quindi $\alpha(z_1) > 0$.

Dunque, il punto z_1 appartiene a C .

4. Il campo C , che abbiamo ora definito, gode delle seguenti proprietà:

a) *In ogni campo limitato e completamente interno a C la serie (1) converge uniformemente.*

b) *La serie (1) non può convergere uniformemente nell'intorno di un punto esterno a C .*

Dimostrazione della proprietà a).

Sia D un campo limitato, completamente interno a C , e sia z_1 un punto di esso. Posto $|\varphi(z_1)| = r_1$, avremo $\alpha(z_1) > 0$, cioè $R(r_1 + 0) > |z_1|$.

Determiniamo poi un numero $\delta > 0$ in modo che si abbia:

$$R(r_1 + \delta + 0) - |z_1| > 0,$$

ed un intorno (z_1, ρ) di z_1 , contenuto nel cerchio $(0, R(r_1 + \delta + 0))$, tale che sia $|\varphi(z)| < r_1 + \delta$ per $|z - z_1| < \rho$.

Nel suddetto intorno si avrà:

$$\begin{aligned} |f_n[\varphi^{p_n}(z)]| &\leq M_n[(r_1 + \delta)^{p_n}], \\ |\alpha_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)]| &< |\alpha_n| (|z_1| + \rho)^n M_n[(r_1 + \delta)^{p_n}] \end{aligned}$$

e perciò i termini della (1) risulteranno, in modulo, inferiori a quelli di una serie convergente a termini positivi.

Resta così provata l'uniforme convergenza della (1) nel campo D .

Dimostrazione della proprietà b).

Supponiamo che in un cerchio (z_0, ρ) , esterno a C , la serie (1) converga uniformemente.

Prendiamo due punti z_1, z_2 di (z_0, ρ) in modo che:

$$|z_1| < |z_2|, \quad |\varphi(z_1)| < |\varphi(z_2)| \quad (1)$$

e poniamo, per semplicità di scrittura, $r_2 = |\varphi(z_2)|$.

Consideriamo poi un arco γ della curva passante per z_2 lungo la quale è $|\varphi(z)| = r_2$. Quando z percorre l'arco γ , il punto $u = \varphi^{p_n}(z)$ descrive un arco di circonferenza che ha per centro l'origine e per raggio $r_2^{p_n}$; anzi, per p_n abbastanza grande, il punto u descrive, almeno una volta, l'intera circonferenza.

Ciò significa che il massimo di $|f_n[\varphi^{p_n}(z)]|$ sulla curva γ è, per n sufficientemente grande, eguale a $M_n(r_2^{p_n})$.

Inoltre, per la supposta convergenza uniforme della (1) in (z_0, ρ) , avremo, da un certo indice \bar{n} in poi e per ogni z di γ ,

$$|a_n z^n f_n[\varphi^{p_n}(z)]| < 1,$$

ossia:

$$(a) \quad |a_n| \zeta^n M_n(r_2^{p_n}) < 1,$$

dove ζ indica il minimo di $|z|$ sull'arco γ .

Scegliendo γ in modo che risulti $\zeta > |z_1|$ si avrà, per la (a), $R(r_2) > |z_1|$ e quindi:

$$\alpha(z_1) = R(|\varphi(z_1)| + 0) - |z_1| \geq R(r_2) - |z_1| > 0.$$

Dunque, il punto z_1 dell'intorno (z_0, ρ) è interno a C , la qual cosa è in contraddizione con l'ipotesi fatta sui punti di (z_0, ρ) .

Le proposizioni ora dimostrate giustificano il nome di *campo di convergenza uniforme* della serie (1) che verrà dato a C .

5. Per stabilire se un punto z del piano è interno, esterno, o al contorno di C , basta, evidentemente, esaminare il comportamento della $\alpha(z)$ in un intorno del punto stesso. Tuttavia, nei casi concreti, può tornare utile anche la considerazione della funzione

$$\beta(z) = R(|\varphi(z)| - 0) - |z|.$$

A conferma di ciò, valgano le seguenti osservazioni.

(1) Ciò è sempre possibile. Difatti, se $\varphi(z) = az^m$ basterà prendere $|z_1| < |z_2|$ affinché sia anche $|\varphi(z_1)| < |\varphi(z_2)|$; se invece $\varphi(z)$ è di tipo diverso, si potranno trovare due numeri z_1, z_2' , di egual modulo, tali che $|\varphi(z_1)| < |\varphi(z_2')|$. Allora, per soddisfare alle disuguaglianze del testo, sarà sufficiente scegliere z_2 in un intorno abbastanza piccolo di z_2' ed in guisa che $|z_2| > |z_2'|$.

OSSERVAZIONE I. — Se $\beta(z) < 0$, il punto z è esterno a C . Difatti, in virtù della continuità a sinistra della funzione $R(r-0)$, si potrà determinare un numero $\delta > 0$ tale che per $|h| < \delta$ sia $\alpha(z+h) < 0$.

OSSERVAZIONE II. — Se $\alpha(z) \leq 0$, $\beta(z) > 0$, $|\varphi(z)| = r > 0$, il punto z è al contorno di C .

Per essere $|\varphi(z)| > 0$, si può trovare un punto $z+h$, prossimo a z quanto si vuole, nel quale sia $|\varphi(z+h)| = r_1 < r$.

Ma si ha $R(r_1+0) \geq R(r-0)$ e quindi $\alpha(z+h) > 0$.

Se $\varphi(z) = 0$, il ragionamento ora fatto cade in difetto; in questo caso il punto z può anche essere esterno. E ciò avviene effettivamente se $\alpha(z) < 0$ perchè nei punti z_1 di un intorno di z si ha $R(|\varphi(z_1)|+0) \leq R(0+0)$.

OSSERVAZIONE III. — Dalla Oss. II consegue che se per un valore $r > 0$ è $R(r-0) > R(r+0)$, tutti i punti z della curva $|\varphi(z)| = r$ situati nella corona circolare definita dalle circonferenze $(0, R(r+0))$, $(0, R(r-0))$ o posti sulla circonferenza $(0, R(r+0))$, appartengono al contorno di C .

OSSERVAZIONE IV. — Un punto z_1 , appartenente alla circonferenza $(0, R(|\varphi(z_1)|-0))$, può essere all'esterno o sul contorno di C . Ma se la curva $|\varphi(z)| = |\varphi(z_1)| = r$ penetra nell'interno del suddetto cerchio, passando per z_1 , allora questo punto è al contorno.

Invero, nell'interno di $(0, R(r-0))$ esistono dei punti z , vicini a z_1 , quanto si vuole, nei quali è $|\varphi(z)| < r$ e quindi $R(|\varphi(z)|+0) \geq R(r-0)$, $\alpha(z) > 0$.

6. ESEMPIO. — Determiniamo il contorno di C essendo la $R(r)$ una funzione continua nell'intervallo $(0, r')$ ad eccezione di un punto ρ .

Indichiamo con $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ le circonferenze che hanno i centri nell'origine e per raggi i numeri $R(0+0)$, $R(\rho-0)$, $R(\rho+0)$, $R(r'-0)$, e supponiamo che nei quattro intervalli $(0, r_1)$, (r_2, ρ) , (ρ, r_3) , (r_4, r') (alcuni dei quali possono ridursi ad un sol punto) si abbia, rispettivamente,

$$R(r) = R(0+0), \quad R(r) = R(\rho-0), \quad R(r) = R(\rho+0), \quad R(r) = R(r'-0).$$

All'esterno di Γ_1 non possono esistere punti del contorno di C , mentre appartengono al contorno quei punti z di $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ nei quali è:

$$\begin{aligned} |z| = R(0+0), \quad |\varphi(z)| < r_1; \quad |z| = R(\rho-0), \quad r_2 \leq |\varphi(z)| < \rho; \\ |z| = R(\rho+0), \quad \rho \leq |\varphi(z)| < r_3; \quad |z| = R(r'-0), \quad r_4 \leq |\varphi(z)| < r'. \end{aligned}$$

Vediamo quali sono i punti del contorno di C che figurano nelle due corone circolari definite da Γ_1, Γ_2 e da Γ_3, Γ_4 .

Per la supposta continuità della $R(r)$ negli intervalli $(0, \rho)$, (ρ, r') e per l'Oss. I, dovrà aversi $\alpha(z) = 0$ e cioè i punti al contorno, contenuti nelle

corone suddette, dovranno appartenere alla curva

$$R(|\varphi(z)| + 0) - |z| = 0.$$

Infine, in virtù dell'Oss. III, si può affermare che i punti al contorno posti nella corona circolare Γ_2 , Γ_3 o situati nell'interno di Γ_4 , sono quelli che soddisfano alle equazioni

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &= \rho & \text{per } R(\rho + 0) < |z| < R(\rho - 0), \\ |\varphi(z)| &= r' & \text{per } |z| < R(r' - 0). \end{aligned}$$

Un analogo procedimento vale nel caso in cui la $R(r)$ sia discontinua in un numero finito di punti, anzichè in uno soltanto.

7. Vogliamo ora trovare, particolarizzando convenientemente le funzioni $f_n(u)$ ed i numeri p_n , a_n , qualche nuova proprietà del campo C .

Ammettiamo, dapprima, che le funzioni $|f_n(u)|$ si mantengano inferiori, in un intorno $(0, k)$ della origine, alle funzioni $K|u|^{\lambda_n}$, essendo K una costante positiva e λ_n l'ordine di molteplicità della radice $u = 0$ della $f_n(u)$.

Prendiamo un numero $r < 1$ e determiniamo un indice \bar{n} in guisa che per $n > \bar{n}$ sia $r^{p_n} < k$.

Avremo allora:

$$|a_n| M_n(r^{p_n}) < |a_n| r^{\lambda_n p_n} K$$

e, per essere:

$$\left(\frac{f_n(u)}{u^{\lambda_n}} \right)_{u=0} = 1,$$

$$|a_n| M_n(r^{p_n}) \geq |a_n| r^{\lambda_n p_n}.$$

Dunque, si avrà:

$$\frac{1}{R(r)} = \limsup^n \sqrt[n]{|a_n| M_n(r^{p_n})} = \limsup^n \sqrt[n]{|a_n|} r^{\frac{\lambda_n p_n}{n}} \leq \frac{1}{R}.$$

Se poi le $\sqrt[n]{|a_n|}$ si suppongono limitate, e cioè $R > 0$, si vede facilmente che le funzioni $\sqrt[n]{|a_n|} r^{\frac{\lambda_n p_n}{n}}$ sono egualmente continue in ogni intervallo del tipo $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

Ciò vuol dire che il loro limite massimo è una funzione continua nello stesso intervallo.

Si può dunque affermare che la funzione $R(r)$ è continua in ogni intervallo $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ salvo che il limite massimo delle $\sqrt[n]{|a_n|} r^{\frac{\lambda_n p_n}{n}}$ non si annulli in qualche punto interno all'intervallo $(0, 1)$.

Ma se ciò avviene, è ben chiaro che il suddetto limite è sempre nullo per $r < 1$, onde $R(r) = \infty$ comunque si prenda $r < 1$.

Riassumendo le considerazioni svolte nel presente numero, possiamo enunciare le seguenti proprietà del campo C .

a) Se le funzioni $\frac{f_n(u)}{u^{\lambda_n}}$ sono egualmente limitate in un intorno dell'origine, il campo C contiene tutti i punti z del cerchio $(0, R)$ nei quali è $|\varphi(z)| < 1$.
In particolare, se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n p_n}{n} = 0,$$

si ha: $R(r) = R$ per $r < 1$ e quindi il campo C è contenuto nel cerchio $(0, R)$.

b) Se le funzioni $\frac{f_n(u)}{u^{\lambda_n}}$ sono egualmente limitate in un intorno dell'origine e se la successione $\sqrt[n]{|a_n|}$ è limitata superiormente, i punti del contorno di C , contenuti nella corona circolare definita dalle circonferenze $(0, R(0 + 0))$, $(0, R(1 - 0))$, appartengono alla curva

$$R(|\varphi(z)| + 0) - |z| = 0.$$

8. Esaminiamo, infine, i punti z di C in cui è $|\varphi(z)| > 1$.

Osserviamo, anzitutto, che l'esistenza di punti siffatti richiede al limite superiore r' , definito al n.º 2, di essere maggiore dell'unità e, di conseguenza, al raggio R di essere positivo.

Invero, si ha, per $r > 1$,

$$M_n(r^{p_n}) \geq 1, |a_n| M_n(r^{p_n}) \geq |a_n|, R(r) \leq R.$$

Da ciò discende subito che i punti z di C , nei quali è $|\varphi(z)| > 1$, appartengono al cerchio $(0, R)$.

Facciamo poi sulle funzioni $f_n(u)$ e sui numeri a_n e p_n le seguenti ipotesi: le $f_n(u)$ siano egualmente limitate in un cerchio $(0, k)$;

il limite massimo μ della successione $\frac{n}{p_n}$ sia finito;

il limite minimo η della successione $\sqrt[p_n]{|a_n|}$ sia positivo.

Ciò posto, prendiamo un r compreso fra 1 ed r' ; indichiamo con A un intero per cui si abbia:

$$M_n(r^{p_n}) < \frac{A^n}{|a_n|},$$

e determiniamo un numero intero, positivo a in maniera che sia:

$$r^a > \frac{A^h}{\eta}.$$

Avremo allora, per n maggiore di un certo \bar{n} :

$$r^a > \frac{A^{\frac{n}{p_n}}}{p_n \sqrt{|a_n|}}, \quad r^{ap_n} > \frac{A^n}{|a_n|}$$

e quindi:

$$M_n(r^{p_n}) < r^{ap_n} \quad (n > \bar{n}).$$

Da queste disuguaglianze si deducono importanti proprietà delle $f_n(u)$.

Anzitutto, dimostriamo che le $f_n(u)$ sono egualmente limitate in ogni regione finita del piano.

Infatti, presa ad arbitrio una circonferenza $(0, S)$, si consideri, nella corona circolare definita da $(0, S)$ e da $(0, \frac{k}{2})$, la funzione $\frac{f_n(u)}{u^a}$, con $n > \bar{n}$ ed $r^{p_n} > S$.

Poichè sulle circonferenze $(0, r^{p_n})$, $(0, \frac{k}{2})$ si ha, rispettivamente,

$$\left| \frac{f_n(u)}{u^a} \right| < 1, \quad \left| \frac{f_n(u)}{u^a} \right| < \frac{2^a K}{k^a},$$

la funzione $\left| \frac{f_n(u)}{u^a} \right|$ si manterrà inferiore ad un numero H , indipendente da n , in tutta la corona circolare suddetta. Da ciò consegue immediatamente l'asserto.

Consideriamo poi una successione estratta dalla

$$(\alpha) \quad f_0(u), f_1(u), \dots, f_n(u), \dots$$

e convergente uniformemente in una certa regione del piano. In base a quanto s'è ora detto, questa successione convergerà uniformemente in ogni cerchio $(0, S)$ ed il suo limite $F(u)$ sarà, di conseguenza, una funzione intera. Inoltre, la $F(u)$ non potrà essere nè una trascendente nè un polinomio di grado superiore ad a .

Invero, si ha:

$$\frac{|f_n^{(m)}(0)|}{m!} < \frac{M_n(r^{p_n})}{r^{mp_n}} < r^{p_n(a-m)},$$

e quindi, per $m > a$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n^{(m)}(0)|}{m!} = 0.$$

Ciò significa che nella serie

$$F(u) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m u^m$$

i coefficienti b_m , con indice $m > a$, sono tutti nulli.

Siamo così giunti al seguente risultato:

Se:

le $f_n(u)$ sono egualmente limitate in un intorno dell'origine;

il limite massimo della successione $\frac{n}{p_n}$ è finito;

il limite minimo della successione $\sqrt[p_n]{|a_n|}$ è positivo:

il campo C contiene dei punti z in cui $|\varphi(z)| > 1$;

allora:

le $f_n(u)$ sono egualmente limitate in ogni cerchio $(0, S)$, ed ogni successione estratta dalla (z) e convergente uniformemente ha per limite un polinomio il cui grado non può superare un numero fisso a .

II.

9. In questo paragrafo faremo due applicazioni delle teorie generali svolte nei precedenti numeri.

ESEMPIO I. — Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n f[\varphi^{p_n}(z)],$$

essendo $f(u)$ una trascendente intera a crescita regolare e d'ordine finito $\rho > 0$. Supponiamo, inoltre, che sia $f(0) = 1$.

Seguendo il procedimento generale indicato al paragrafo I, determiniamo, anzitutto, la funzione $R(r)$.

Per le proposizioni del n.º 7, possiamo intanto affermare che tale funzione è costantemente eguale ad R in tutti i punti dell'intervallo $(0, 1)$.

Ne discende, in particolare, che se $R = 0$ la serie data non può convergere uniformemente in campi a due dimensioni.

Esaminiamo poi il comportamento della $R(r)$ nei punti esterni all'intervallo $(0, 1)$. Per quanto s'è ora osservato, possiamo supporre, senz'altro, $R > 0$.

Essendo la $f(u)$ a crescita regolare, avremo, per n sufficientemente grande,

$$e^{r^{p_n(r-\varepsilon)}} < M(r^{p_n}) < e^{r^{p_n(r+\varepsilon)}}$$

e quindi:

$$\overline{\lim} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \frac{r^{p_n(\rho-\varepsilon)}}{e^n} \right) \leq \frac{1}{R(r)} \leq \overline{\lim} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \frac{r^{p_n(\rho+\varepsilon)}}{e^n} \right).$$

Dunque, per conoscere la $R(r)$, dobbiamo, dapprima, saper valutare il limite massimo di una espressione del tipo:

$$(a) \quad \frac{\alpha_n + r^{p_n \sigma}}{e^n} \quad (\alpha_n = \log |a_n|).$$

A tale scopo, decomponiamo la successione delle α_n nelle due successioni parziali

$$\begin{aligned} \alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \dots, \alpha_{s_n}, \dots, \\ \alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \dots, \alpha_{t_n}, \dots, \end{aligned}$$

mettendo nella prima tutte le α_n positive o nulle e nella seconda le α_n rimanenti.

Affinchè la (a) abbia limite massimo finito, occorre e basta che le successioni

$$\frac{\alpha_{s_n} + r^{p_{s_n} \sigma}}{s_n}, \quad \frac{\alpha_{t_n} + r^{p_{t_n} \sigma}}{t_n}$$

siano limitate superiormente; e ciò richiede che r non sia superiore al minore dei due numeri

$$(b) \quad \underline{\lim} \sqrt[p_{s_n \sigma}]{s_n}, \quad \underline{\lim} \sqrt[p_{t_n \sigma}]{t_n - \alpha_{t_n}}.$$

Difatti, se:

$$\frac{\alpha_{s_n} + r^{p_{s_n} \sigma}}{s_n} < h,$$

si ha:

$$r^{p_{s_n} \sigma} < h s_n,$$

da cui,

$$r \leq \underline{\lim} \sqrt[p_{s_n \sigma}]{s_n}.$$

Similmente, dalla disuguaglianza

$$\frac{\alpha_{t_n} + r^{p_{t_n} \sigma}}{t_n} < k$$

discende:

$$r \leq \underline{\lim} \sqrt[p_{t_n \sigma}]{k t_n - \alpha_{t_n}},$$

ed anche, per essere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{kt_n - \alpha_{t_n}}{t_n - \alpha_{t_n}} \right)^{p_{t_n} \sigma} = 1,$$

$$r \leq \underline{\lim} \frac{p_{t_n} \sigma}{\sqrt{t_n - \alpha_{t_n}}}.$$

Si trova poi, mediante facilissimi calcoli, che, per ogni r inferiore ad entrambi i numeri (b) , la successione (a) ha per limite massimo $\frac{1}{R}$; mentre, per ogni altro valore di r , la (a) è illimitata.

Da tutto ciò consegue, tenendo anche conto dell'arbitrarietà del numero ε , che il campo di convergenza uniforme della serie considerata è costituito dai punti z del piano soddisfacenti alle disuguaglianze

$$|z| < R, \quad |\varphi(z)| < \underline{\lim} \frac{p_{s_n} \sigma}{\sqrt{s_n}}, \quad |\varphi(z)| < \underline{\lim} \frac{p_{t_n} \sigma}{\sqrt{t_n - \alpha_{t_n}}}.$$

10. ESEMPIO II. — Ammettiamo che si conoscano le funzioni $f_n(u)$, i numeri a_n, p_n e, di conseguenza, la funzione $R(r)$.

Vogliamo determinare la funzione $\varphi(z)$ in modo che il campo C di convergenza uniforme della corrispondente serie (1) contenga un cerchio dato $(0, k)$ la cui periferia appartenga al contorno di C .

Intanto, si vede subito che il raggio k non può superare $R(0+0)$ poichè, altrimenti, sarebbe $\alpha(z) > 0$ per $R(0+0) < |z| < k$, e cioè $R(|\varphi(z)|+0) > R(0+0)$.

Ciò posto, consideriamo i limiti superiori r_1, r_2 degli aggregati formati con i valori di r che soddisfano alle disuguaglianze

$$R(r+0) - k > 0, \quad R(r+0) - k \geq 0.$$

Se noi vogliamo che ogni punto della circonferenza $(0, k)$ appartenga al contorno di C , dovremo prendere $|\varphi(z)|$ in guisa tale che il suo massimo sulla predetta circonferenza non superi r_2 ed il suo minimo non sia inferiore ad r_1 .

Difatti, nel caso opposto, tutti i punti z di $(0, k)$ nei quali è $|\varphi(z)| < r_1$ sarebbero interni a C e quelli in cui è $|\varphi(z)| > r_2$ sarebbero esterni al medesimo campo.

Premesse queste considerazioni di carattere generale, passiamo a discutere le soluzioni del problema assumendo come parametri i due numeri r_1, r_2 .

Se $r_1 = r_2 = 0$, oppure se $r_1 = r_2 = \infty$, il problema non ammette soluzioni, non potendosi trovare una funzione analitica $\varphi(z)$ sempre nulla o sempre infinita sulla circonferenza $(0, k)$.

Se $r_1 < r_2$, vi è una grande arbitrarietà nella scelta della soluzione poichè, in corrispondenza di una funzione intera $\psi(z)$, presa a piacere, si possono sempre determinare due costanti λ, μ in guisa tale che la funzione $\lambda\psi(z) + \mu$ soddisfi alle condizioni imposte alla $\varphi(z)$.

Infine, se $r_1 = r_2$, la funzione intera $\varphi(z)$, dovendo avere modulo costante su tutta la circonferenza $(0, k)$, sarà necessariamente della forma az^n con n intero, positivo.

È utile osservare che, nel presente caso, il campo C di convergenza uniforme coincide con il cerchio $(0, k)$.

III.

11. Al n.º 4 abbiamo visto come una serie del tipo (1) non possa convergere uniformemente in campi a due dimensioni posti nella regione formata con i punti esterni a C e, conseguentemente, su curve chiuse, continue, appartenenti alla stessa regione.

Beninteso, ciò non impedisce alla serie (1) di essere convergente uniformemente lungo delle curve continue ed aperte situate all'esterno del campo C .

Qui, vogliamo fare alcune considerazioni sul comportamento della funzione $\varphi(z)$ lungo le curve suddette.

Per semplicità, supporremo le funzioni $f_n(u)$ egualmente limitate in un intorno dell'origine ed $f_n(0) = 1$.

12. Dimostriamo, anzitutto, che:

La serie (1) non può convergere nei punti z , esterni al cerchio $(0, R)$, nei quali è $|\varphi(z)| < 1$.

Infatti, se in un tale punto la (1) fosse convergente, dovrebbe aversi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n f_n[\varphi^n(z)] = 0$$

e, non potendo $a_n z^n$ tendere allo zero, esisterebbe, conseguentemente, una successione

$$f_{m_1}[\varphi^{p_{m_1}}(z)], f_{m_2}[\varphi^{p_{m_2}}(z)], \dots, f_{m_n}[\varphi^{p_{m_n}}(z)], \dots$$

avente per limite zero.

Ma ciò è impossibile perchè, in forza delle ipotesi fatte sulle $f_n(u)$ e per essere $|\varphi(z)| < 1$, una siffatta successione tende all'unità.

13. Sia γ una curva continua, posta all'esterno di $(0, R)$, e sulla quale la serie (1) converga uniformemente.

Ripetendo un ragionamento fatto al n.º 4, si vede subito che, al variare di z su γ , il punto $u = \varphi^{p_n}(z)$ non può descrivere una curva chiusa circondante l'origine.

Ne discende, in particolare, che:

lungo la curva γ il modulo di $\varphi(z)$ non può essere costante.

Supponiamo poi che sulla curva γ l'argomento di $\varphi(z)$ sia una funzione sempre crescente, o decrescente, e che in un punto z_0 di γ il modulo di $\varphi(z)$ abbia un massimo (minimo). Sia, cioè, crescente (decrecente) in un tratto precedente z_0 e decrescente (crescente) in un tratto seguente z_0 .

Prendiamo un arco γ' di γ contenente z_0 e tale che nei suoi estremi z_1, z_2 si abbia $|\varphi(z_1)| = |\varphi(z_2)|$. Facendo variare la z sull'arco γ' , veniamo ad ottenere, nel piano della u , delle curve continue $u = \varphi^{p_n}(z)$ le quali, in conseguenza delle ipotesi fatte, hanno la proprietà di circondare l'origine.

L'incompatibilità di questa conclusione con la convergenza uniforme della serie (1), ci permette di affermare che:

Se sulla curva γ l'argomento di $\varphi(z)$ è una funzione monotona, il modulo di $\varphi(z)$ non può avere nè massimi nè minimi nei punti interni di γ .

14. Particolarizzando le funzioni $f_n(u)$, si possono ottenere delle altre proprietà per le curve γ .

Ad esempio, se esiste una semiretta d uscente dalla origine e sulla quale tutte le funzioni $|f_n(u)|$ siano superiori ad un numero $K > 0$, allora lungo la curva γ l'argomento di $\varphi(z)$ è costante.

Infatti, nel caso opposto, si può determinare un indice \bar{n} in modo che per $n > \bar{n}$ i massimi delle funzioni $|f_n[\varphi^{p_n}(z)]|$, sulla curva γ , siano maggiori di K .

Questa osservazione può applicarsi alla serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-\left(\frac{z^2-1}{2}\right)^{4n}},$$

della quale vogliamo determinare il campo C e le curve γ .

Abbiamo, evidentemente:

$$f_n(u) = e^{-u}, \quad \varphi(z) = \frac{z^2-1}{2}, \quad a_n = 1, \quad p_n = 4n, \quad R = 1.$$

Consideriamo, dapprima, la cassinoide

$$(a) \quad |\varphi(z)| = \frac{z^2-1}{2} = 1,$$

nell'interno della quale è $|\varphi(z)| < 1$.

Poichè questa curva è situata all'esterno del cerchio $(0, R)$, potremo asserire, applicando il teorema del n.º 8, che il campo C di convergenza uniforme coincide col cerchio $(0, 1)$.

Ciò posto, passiamo alla ricerca delle curve γ .

In virtù della proposizione del n.º 12, queste curve saranno poste all'esterno della cassinoide (α) e, per l'osservazione fatta al principio del presente n.º, dovranno essere tali che, lungo di esse, la funzione

$$\varphi(z) = \frac{x^2 - y^2 - 1}{2} + ixy$$

abbia argomento costante.

Un semplice calcolo mostra che le uniche soluzioni accettabili sono fornite dalle rette

$$(b) \quad x = 0, \quad y = 0,$$

luogo dei punti in cui la $\varphi(z)$ è reale, e dalla iperbole

$$(c) \quad x^2 - y^2 = 1,$$

sulla quale la $\varphi(z)$ è immaginaria.

In conclusione, la serie data converge uniformemente nel cerchio $(0, 1)$ e su qualsiasi arco limitato appartenente ad una delle curve (b) , (c) ed esterno alla cassinoide (α) .

Ueber die nomographische Lösung einer elementarmechanischen Extremumaufgabe.

Von ALEXANDER FISCHER (Praga-Cecoslovacchia).

Uebersicht: Es wird eine graphische Rechentafel für die Bestimmung der reduzierten Länge eines physikalischen Pendels nach dem allgemeinen Verfahren des Verfassers hergeleitet und gezeigt, wie sich das Minimum der letzteren mit Hilfe der Tafel ebenfalls formelmässig festlegen lässt. Die mathematischen Grundlagen hierzu werden im Aufsatz selbst entwickelt, so dass er ohne weitere Vorstudien verständlich ist.

1. Einleitung und Aufgabestellung. — In der angewandten Mathematik und in den technischen Wissenschaften kommt es bekanntlich des öfteren vor, dass man nicht nur den Verlauf einer Funktionsbeziehung leicht übersehen will, sondern auch die Extremwerte der in Betracht kommenden Veränderlichen kennen muss. Im folgenden soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, dass die heutige Nomographie, dieses ebenso interessante wie nützliche Teilgebiet der angewandten « Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus » (im Sinne von FELIX KLEIN), beiden Forderungen gerecht wird. Darüber hinaus wird dasselbe aber auch zeigen, dass durch die Anwendung elementargeometrischer Sätze die mit Hilfe der Differentialrechnung erhaltenen Ergebnisse in reizvoller Weise gedeutet und bestätigt werden können.

Der Entwurf des Rechenbildes (Nomogramms), bei dem ein Rechtwinkelkreuz als Ablesegerät dienen wird, soll nach meinem allgemeinen Verfahren (*) geschehen. Wie ersichtlich sein wird, ergibt dasselbe — neben Tafeln z. B. mit einfacher Ablesegerade — auch diese Tafeln auf einfachste Weise.

Die Berechnung der reduzierten Pendellänge erfolgt bekanntlich (vgl. z. B. (5)) nach der Formel:

$$(A) \quad l = \frac{\theta_s}{ms} + s,$$

(*) Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf den Schriftennachweis am Ende der Arbeit.

worin Θ , das Trägheitsmoment des Pendels für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse,

s den Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehachse und

m die Masse des Pendels bedeutet.

Das Minimum von l ergibt sich nach den Regeln der Differentialrechnung zu

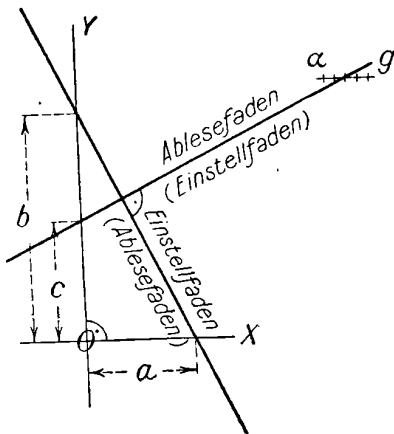
$$(B1) \quad l_{min} = 2s_b, \quad \text{für} \quad (B2) \quad s_b = \sqrt{\frac{\Theta_s}{m}}.$$

2. Mathematische Grundlagen des Entwurfes. — Dieselben sind in den folgenden paar Zeilen enthalten:

a) Die Gleichung der Geraden g mit der Richtungskonstante a/b , die auf der y -Achse eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems (xy) die Grösse c abschneidet, lautet:

$$(I) \quad y = (a/b) \cdot x + c,$$

wodurch ein Rechtwinkelkreuz festgelegt wird. (s. Abb. 1) Hierbei ist einer der Fäden als « Ablesefaden », der andere als « Einstellfaden » zu bezeichnen, je nachdem ob er der gesuchten oder den gegebenen Veränderlichen der vorgelegten, zu vertafelnden Funktionsbeziehung zugeordnet ist.



b) Betrachtet man x und y als Funktionen eines Parameters α , also

$$(II) \quad x = x(\alpha), \quad (III) \quad y = y(\alpha),$$

so bedeutet (I), dass die Kurve, die durch die beiden Gleichungen (II) und (III) in Parameterform definiert wird, von der Geraden g geschnitten wird.

c) Hierzu tritt schliesslich der leitende Grundgedanke (vgl. (4)) des eingangs genannten Verfahrens: Die vorgelegte Funktionsbeziehung ist

zunächst rein formal

in die Gleichungsdreierheit:

Gleichung der « Ablesekurve » (insbesondere « Ablesegerade »);

Gleichung der « Lösenden Kurve » und

Gleichung von deren « Bezifferung »

zu zerfallen und diese Zuordnungsbeziehung ist

dann erst geometrisch

zu deuten — und zwar im vorliegenden Fall im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem. (Implizite Definition der allgemeinen « Fluchtlinientafel »!).

3. **Tafelentwurf.** — Die Anwendung des ebengesagten ergibt die Gleichungsdreiheit:

Gl. d. Ablesefadens:

(I)
$$y = (\Theta_s/10m)x + l,$$

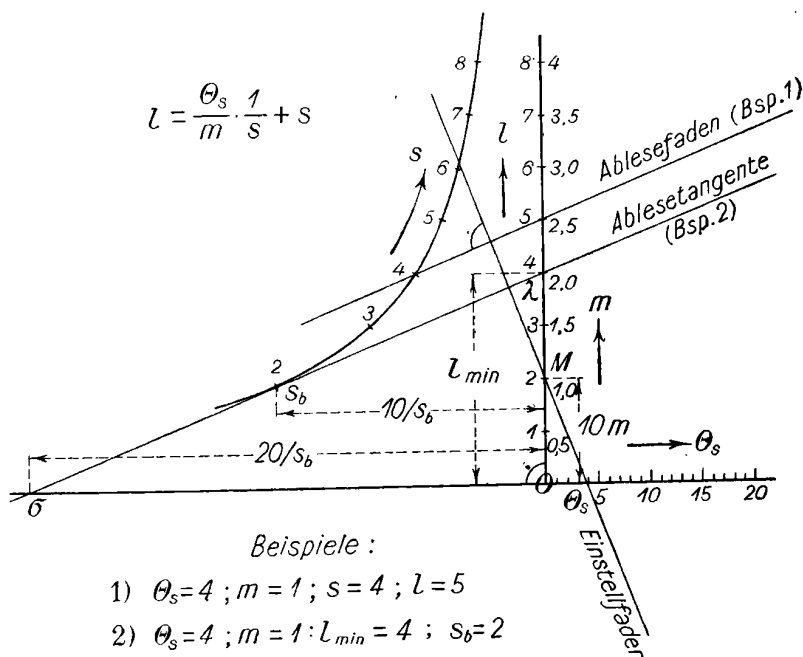
Gl. d. Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

(II)
$$x = -10s^{-1},$$

(III)
$$y = s,$$

also die Parameterdarstellung der gleichseitigen Hyperbel $xy = -10$. Hierin ist 10 ein freigewählter Masstabfaktor, um die Tafel brauchbarer zu gestalten.

4. **Benutzung der Tafel.** — Durch die gegebenen Werte von Θ_s und m ist der Einstellfaden festgelegt. Derselbe ist hierauf solange in sich zu



verschieben, bis der Ablesefaden durch den ebenfalls gegebenen s -Wert auf der Lösenden Kurve hindurchgeht. Er schneidet dann auf der 2-Leiter das gesuchte 2 ab. (s. Beispiel 1 in Abb. 2).

5. **Extremumbestimmung mittels der Tafel.** — Wie unmittelbar ersichtlich, gelangt der Ablesefaden bei dieser Verschiebung in eine Grenzlage, die « Ablesetangente » (an die Lösende Kurve), der auf der l -Leiter ein Extremum von l , (im vorliegenden Fall das Minimum l_{min}), entspricht. (s. Beisp. 2 in Abb. 2). Der Berührungspunkt dieser Ablesetangente trägt dann die dem l_{min} entsprechende Bezifferung s_b .

Beide Grössen können aber unter Heranziehung des elementargeometrischen Satzes, dass das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Hyperbeltangente im Berührungspunkt halbiert wird, durch folgende ganz elementaren Betrachtungen bestimmt werden.

Es ist auf Grund dieses Satzes: $2y_b = l_{min}$, oder, da nach (III) $y_b = s_b$: $2s_b = l_{min}$.

Diesem s_b entspricht nach (II): $x_b = -10s_b^{-1}$, die Ablesetangente schneidet daher auf der negativen x -Achse das Stück $O\sigma = 20s_b^{-1}$ ab. Die Betrachtung der beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke $MO\theta_s$ und $\sigma O\lambda$ ergibt:

$$\frac{\theta_s}{10m} = \frac{2s_b}{20s_b^{-1}} \quad \text{oder} \quad s_b^2 = \frac{\theta_s}{m}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

6. **Anmerkungen.** — α) Wie leicht einzusehen, entfaltet das gegebene Verfahren seine volle Wirksamkeit erst im Falle höherer algebraischer oder transzendenter Funktionsbeziehungen, (vgl. (2)), bei denen der Differentiationsprozess wieder auf solche führt und deren Auflösung bekanntlich allgemein rechnerisch nicht möglich ist. Die nomographische Lösungsart ergibt dann in einfachster Weise Näherungswerte, die nach Erfordernis rechnerisch beliebig verschärft werden können. Aber auch bei empirisch festgelegten Funktionsbeziehungen ist es mühelos anwendbar, es vermeidet hier die sonst unvermeidliche graphische Differentiation. (vgl. (3)).

β) Beim neuerlichen Studium der Abhandlung von P. LUCKEY (4) — nach Abschluss meiner Arbeiten (2) und (3) — fand ich gelegentlich der Besprechung der Arbeiten von W. MARGOULIS daselbst die Bemerkung: « Die tangentiellen Berührungen (d. i. die Berührungen zweier Linien) haben sich für die Aufsuchung gewisser Höchst- und Niedrigstwerte brauchbar erwiesen ». Da mir die genannten Arbeiten nicht zugänglich sind, vermag ich nicht anzugeben, in welchem Zusammenhang sie mit dem Vorstehenden stehen.

SCHRIFTENNACHWEIS

(4) A. FISCHER, *Ueber ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln.* « Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech. », 7 (1927): H. 3 u. 5; 8 (1928): H. 4; 9 (1929): H. 5.

(²) A. FISCHER, *Ueber zwei Anwendungen der Nomographie auf Aufgaben der Bau-
mechanik.* « HDI-Mitteilungen d. Hauptvereines deutsch. Ing. in d. Tschechoslow Republ. »,
21 (1932), H. 6, S. 117.

(³) A. FISCHER, *Ueber eine Anwendung der Nomographie auf eine Aufgabe aus dem
Dynamobau.* Ebenda, H. 19-20, S. 405.

(⁴) P. LUCKEY, *Die Flächenschieber oder zweidimensionalen ebenen Rechenschieber.*
« Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech. », 5 (1925), H. 3, S. 254.

(⁵) R. W. POHL, *Einführung in die Mechanik und Akustik.* 2. Aufl., Berlin 1931, S. 83.

Su di uno speciale problema dei momenti.

Memoria di UGO BROGGI (a Milano).

Sunto. - Si associa alla serie $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots$, divergente per ogni valore di z , una serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n}$, convergente in tutto il piano, e di cui $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots$ costituisce lo sviluppo assintotico, per $z \rightarrow \infty e^{i\vartheta}$, dove $\vartheta = \arg z$, $|\vartheta| \leq \pi - \delta$.

1. Gli elementi della successione a_0, a_1, \dots siano reali. Se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ converge, la serie di frazioni parziali

$$(1) \quad I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n}$$

converge assolutamente in tutto il piano z , meno in intorni arbitrari dei poli semplici $z = 0, -1, -2, \dots$, e vi definisce una funzione $f(z)$, non avente altre singolarità finite.

È infatti

$$\left| \frac{a_n}{z+n} \right| = \frac{|a_n|}{n} \left| \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} \right|$$

e le due serie aventi i termini generali $\frac{a_n}{n}, \frac{a_n}{z+n}$ convergono assolutamente a un tempo.

Ove poi la funzione $\psi(x)$ della variabile reale x sia definita da

$$(A) \quad \begin{array}{lll} \psi(x) = 0 & \text{in corrispondenza di} & x \leq 0 \\ = a_0 & \text{»} & \text{»} & 0 < x \leq 1 \\ = a_0 + a_1 & \text{»} & \text{»} & 1 < x \leq 2 \\ \dots & & & \dots \\ = a_0 + a_1 + \dots + a_n & \text{»} & \text{»} & n < x \leq n + 1 \\ \dots & & & \dots \end{array}$$

può scriversi

$$(2) \quad f(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

dove l'integrale del secondo membro è l'integrale di STIELTJES della funzione $\frac{1}{z+x}$ rispetto alla funzione $\psi(x)$. La quale è a variazione limitata se gli infiniti integrali

$$(3) \quad \int_0^{\infty} x^h d\psi(x)$$

corrispondenti a $h = 0, 1, \dots$, convergono. È infatti

$$\int_0^{\infty} x^h d\psi(x) = 1^h a_1 + 2^h a_2 + \dots$$

mentre i secondi membri non possono convergere qualunque sia h , senza convergere assolutamente.

Lo si vede osservando che, poichè $\Sigma \frac{1}{n^p}$ converge assolutamente se $p > 1$, dalla convergenza di $\Sigma n^p b_n$ può venire dedotta la convergenza assoluta di

$$\Sigma \frac{n^p b_n}{n^p} = \Sigma b_n,$$

giacchè $n^p b_n \rightarrow 0$.

Se gli integrali (3) convergono, ed è

$$c_n = \int_0^{\infty} x^n d\psi(x)$$

lo sviluppo formale di $f(z)$ in serie di potenze decrescenti di z

$$(4) \quad S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

può venire ottenuto da (2) se sotto il segno d'integrale si sostituisca a $\left(1 + \frac{x}{z}\right)^{-1}$ il suo sviluppo e s'integri termine a termine.

Se non è finito il numero degli a_n diversi da zero, il punto all'infinito della funzione $f(z)$ è punto limite di poli, e pertanto singolare: la (4) diverge per ogni valore di z , e può considerarsi sommata in tutto il piano (con esclusione degli intorno di $0, -1, -2, \dots$) dalla funzione analitica $f(z)$.

È poi per ogni valore di n , se $z = |z| e^{i\vartheta}$

$$\lim_{z \rightarrow \infty e^{i\vartheta}} z^n \left[f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{c_\nu}{z^{\nu+1}} \right] = 0$$

e cioè

$$f(z) \sim S(z)$$

nell'angolo

$$-\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta.$$

Si ha infatti, se la funzione $\varphi(t)$ della variabile reale t è infinitamente derivabile nell'intervallo chiuso $(0, 1)$, se, per ogni valore di h , l'integrale di LAPLACE

$$\int_0^1 t^{z-1} \varphi^{(h)}(t) dt \quad (h=0, 1, \dots)$$

che, ove converga in corrispondenza di un determinato valore z_0 di z , di parte reale $R(z_0)$, converge nel semipiano $R(z) > R(z_0)$, converge nel semipiano $R(z) > \lambda$, e se

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0(t) \\ \varphi_h(t) &= t \varphi_{h-1}(t) \end{aligned} \quad (h=1, 2, \dots)$$

la relazione

$$\int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt = \frac{\varphi_0(1)}{z} - \frac{\varphi_1(1)}{z^2} + \dots + (-1)^n \frac{\varphi_n(1)}{z^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{z^{n+1}} \int_0^1 t^{z-1} \varphi_{n+1}(t) dt$$

dalla quale appunto si deduce

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left[\int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{\varphi_\nu(1)}{z^{\nu+1}} \right] &= \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} (-1)^n \int_0^1 t^{z-1} \varphi_n(t) dt = 0, \end{aligned}$$

se $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$. Nel caso particolare in cui sia

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

e gli integrali (3) convergono, è anche, per ogni valore di h

$$\begin{aligned} (B) \quad \varphi_0(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots = c_0 \\ \varphi_n(1) &= 1^n a_1 + 2^n a_2 + \dots = c_n \end{aligned}$$

mentre

$$\int_0^1 t^{z-1} \varphi_n(t) dt$$

converge in un semipiano $R(z) > \lambda \leq 0$.

E poichè l'integrazione termine a termine di

$$\int_0^1 t^{z-1} (a_0 + a_1 t + \dots) dt$$

è evidentemente legittima e conduce alla serie di frazioni parziali (1), si deduce dalla (2) e dalla (3), poichè $\left| \frac{z}{z+x} \right| < 1$, se $|\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}$, $< \frac{1}{|\sin \vartheta|}$, se $|\vartheta| > \frac{\pi}{2}$, che

$$\lim_{z=\infty e^{i\vartheta}} \left| z^n \left(f(z) - \left(\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots + (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}} \right) \right) \right| \leq \lim_{z=\infty e^{i\vartheta}} \frac{1}{|z|} \int_0^{\infty} \left| \frac{z}{z+x} \right| x^n d\psi(x).$$

2. Reciprocamente: data una serie divergente di potenze negative della variabile

$$(4) \quad S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots$$

ci si può proporre di associare ad essa una funzione meromorfa $f(z)$, definita da una serie del tipo (1), che la sommi nel piano z , meno che nell'intorno di ciascun polo, e di cui la serie $S(z)$ costituisca lo sviluppo assintotico.

Si ha intanto, se la serie

$$\Phi(t) = c_0 - \frac{c_1}{1!} t + \frac{c_2}{2!} t^2 - \dots$$

associata della (4) converge per ogni valore di t , o converge in un intorno del punto $t=0$ e può venire continuata analiticamente in una parte infinita di piano che comprende il semiasse reale positivo, e se $\Phi(t)$ è infinitamente derivabile con derivate limitate integrabili in ogni tratto finito da 0 a $+\infty$, e l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-tz} \Phi^{(h)}(t) dt$$

converge nel semipiano $R(z) > \mu$, ($h = 0, 1, \dots$), che, se $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-tz} \Phi(t) dt &\asymp \frac{\Phi(0)}{z} + \frac{\Phi'(0)}{z^2} + \frac{\Phi''(0)}{z^3} + \dots \\ &= \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots \end{aligned}$$

dove

$$c_h = \varphi_h(1) = (-1)^h \Phi^{(h)}(0).$$

Condizione necessaria perchè la funzione determinante

$$\int_0^{\infty} e^{-tz} \Phi(t) dt = \int_0^1 t^{z-1} \Phi(-\log t) dt$$

sia sviluppabile in serie della forma (1) è che il punto singolare della funzione $\Phi(-\log t)$ più prossimo all'origine abbia modulo per lo meno uguale ad 1.

Ed è allora, se

$$\Phi(-\log t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$a_n = n! \left(\frac{d^n \Phi(-\log t)}{dt^n} \right)_{t=0}$$

dove a_n può venire formato a mezzo di $\Phi(t)$ e delle sue derivate rispetto a t di ordine 1, 2, ... n , e dei numeri di STIRLING di prima specie.

La soluzione generale del problema può venire fondata sulla risoluzione del sistema di infinite equazioni lineari con infinite incognite (B) che secondo un'osservazione di E. BOREL si può risolvere ove, come di fatto accade, lo si sappia risolvere con una certa approssimazione.

La soluzione x_1, x_2, \dots del sistema

$$\sum q_k^h x_k = A_h \quad (h=0, 1, 2, \dots)$$

dove q_k cresce indefinitamente con k , può ottenersi, secondo BOREL ⁽¹⁾, se il sistema degli A_h è limitato, formando una funzione intera $g(z)$ della quale i q_k sono zero semplici, ed una funzione intera $\theta(z)$ tale che le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{q_k^h}{g'(q_k)^{\nu}(q_k)} \right| \quad (k=1, 2, \dots)$$

convergono. Se

$$\frac{g(z) \theta(z)}{z - q_k} = \sum c_n^{(k)} z^n$$

è anche

$$x_k = \frac{\sum c_i^{(k)} A_i}{g'(q_k)^{\nu}(q_k)}$$

Se il sistema degli A_i non è limitato, potrà assumersi

$$x_k = \pm \frac{1}{k}, \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n$$

$$= \pm \frac{1}{k^{\varphi_k}}, \quad \text{per } k = n+1, n+2, \dots, n'$$

$$= \pm \frac{1}{k^{2\varphi_k}}, \quad \text{per } k = n'+1, n'+2, \dots, n''$$

.....

scegliendosi il segno di ogni x_k e gli interi n, n', n'', \dots per modo che sia

$$\left| \sum_{k=1}^n q_k x_k - A_1 \right| < 1$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n'} q_k^2 x_k - A_2 \right| < 1$$

.....

(1) É. BOREL, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, « Annales de l'École Norm. Sup. », 1895, pag. 33-44.

il sistema delle differenze

$$B_h = A_h - \sum_{k=1}^{\infty} q_k^h x_k$$

è limitato, e le infinite equazioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k^h u_k = B_h \quad (h = 1, 2, \dots)$$

permettono di determinare le differenze fra i valori x_k , che si vogliono determinare, ed i valori attribuiti a ciascuno di essi, e pertanto anche gli x_k .

Il sistema (B)

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots &= c_0 \\ 1^h a_1 + 2^h a_2 + \dots &= c_h \end{aligned} \quad (h = 1, 2, \dots)$$

che c'interessa di risolvere è della forma considerata. Si ha infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^h a_n = c_h \quad (h = 0, 1, 2, \dots)$$

se, conferito ad a_0 un valore arbitrario, s'immagini attribuito al secondo membro della prima equazione, corrispondente ad $h = 0$, il valore $c_0 - a_0$, che conveniamo di designare con c_0 .

È $q_k = k$. Può dunque ammettersi sia

$$g(z) = \text{sen } \pi z, \quad \theta(z) = e^z$$

e, se

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } \pi z \cdot e^{-z}}{z - k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(k)} z^n \\ u_k &= \frac{(-1)^k}{\pi} e^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{(k)} A_n \end{aligned}$$

dove

$$u_k = a_k, \quad A_n = c_n$$

se il sistema dei c_s è limitato,

$$\begin{aligned} u_h &= a_h - x_h, \quad A_n = c_n - \sum_{v=1}^{\infty} v^s x_v \\ A_0 &= c_0 \end{aligned} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

in caso contrario. È $x_v = \pm \frac{1}{v^h}$, ($h = 1, 2, \dots$), a seconda del valore di v .

Poichè la serie (4) diverge per ogni valore di z , l'insieme di elemento generale c_n non potrebbe essere limitato.

3. Il cammino seguito, consistente nella risoluzione di un sistema di infinite equazioni lineari, permette dunque sempre di associare alla serie divergente

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

una serie di frazioni parziali convergente in tutto il piano z , e pertanto anche l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt$$

mentre la serie associata della (4)

$$\Phi(t) = c_0 - \frac{c_1}{1!} t + \frac{c_2}{2!} t^2 - \dots$$

può essere tale che l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-tz} \Phi(t) dt = \int_0^1 t^{z-1} \Phi(-\log t) dt$$

non converge in corrispondenza di valore alcuno di z , o che il punto $t=0$ sia punto singolare di $\Phi(-\log t)$, che non ammette allora sviluppo in serie di potenze crescenti di t .

Il secondo caso si presenta, ad esempio, ove sia

$$c_{2n+1} = 0, \quad c_{2n} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \quad (n=0, 1, \dots)$$

e pertanto anche

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{-t^2}, & \Phi(-\log t) &= e^{-\log^2 t} \\ a_0 &= a_1 = \dots = 0. \end{aligned}$$

Poichè può sempre invece definirsi un sistema di valori a_0, a_1, \dots ai quali corrisponde

$$\int_0^1 t^{z-1} (a_0 + a_1 t + \dots) dt \approx \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots$$

se ne deduce che possono venire definite funzioni determinanti, che possono non coincidere con

$$\int_0^{\infty} e^{-tz} \left(c_0 - \frac{c_1}{1!} t + \frac{c_2}{2!} t^2 - \dots \right) dt$$

(ove questo integrale esista), di generatrice $a_0 + a_1 t + \dots$ convergente assolutamente nell'intervallo d'integrazione, i limiti inclusi, aventi lo sviluppo assintotico (4).

Data la serie divergente

$$S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots$$

e supposto che i determinanti di HANKEL

$$C_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}$$

$$B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}$$

e pertanto anche i c_n , siano positivi per ogni valore di n , lo STIELTJES associa ad essa, come è noto ⁽¹⁾, un integrale

$$(5) \quad \int_0^{\infty} \frac{d\theta(x)}{z+x}$$

dove $\theta(x)$ è una funzione crescente di x , avente infiniti punti di crescita, e tale che esistono i momenti

$$\int_0^{\infty} x^k d\theta(x), \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

ed una frazione continua

$$\frac{1}{b_1 z + \frac{1}{b_2 z + \frac{1}{b_3 z + \dots}}}$$

dove i b_n sono numeri reali e positivi.

I denominatori $Q_n(z)$ delle ridotte di ordine n

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

di (6) solo hanno radici reali non positive.

In ogni dominio connesso chiuso, che non contiene nessun punto del semiasse reale negativo, nè lo zero, le ridotte di ordine pari convergono uniformemente verso una funzione analitica regolare $F_0(z)$, le ridotte di ordine dispari verso una funzione analitica regolare $F_1(z)$.

⁽¹⁾ T. J. STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues*, « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », Vol. 8 (1894), 9 (1895). Cfr. pure O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 1913, cap. IX.

$F_0(z)$, $F_1(z)$ sono due funzioni meromorfe dappertutto distinte, se la serie b_n converge.

Se Σb_n diverge è $F_0(z) = F_1(z)$: la frazione continua converge e definisce una funzione olomorfa in tutto il piano della variabile complessa, fatta eccezione dei punti del semiasse reale negativo e dello zero. Il suo valore è quello dell'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{d\theta(x)}{z+x}.$$

Si ha divergenza di Σb_n e pertanto convergenza della frazione continua, se, essendo $B_n > 0$, $C_n > 0$ per ogni valore di n , può venire indicato un numero positivo fisso ρ tale che per ogni valore di ν sia

$$c_\nu < \rho^\nu (2\nu)!$$

Il teorema che, a differenza degli anteriori, non è dovuto allo STIELTJES, veniva stabilito da H. HAMBURGER ⁽¹⁾, e ne completa un altro anteriore di O. PERRON ⁽²⁾ secondo il quale si ha convergenza della frazione continua se la disuguaglianza

$$c_n < \rho^\nu \cdot \nu!$$

sussiste in corrispondenza di infiniti valori di ν .

Il problema dei momenti: di determinare la frazione positiva crescente $\theta(x)$, avente un numero infinito di punti di crescita, tale che

$$\int_0^{\infty} x^n d\theta(x) = c_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ha un'unica soluzione (se due funzioni crescenti uguali a 0 per $x=0$ e coincidenti in tutti i punti di continuità non si considerano come distinte) se la frazione continua converge, ne ha infinite se essa diverge.

Si ha infatti in questo caso, $\sigma = 0, 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n-\sigma}(z)}{Q_{2n-\sigma}(z)} &= F_\sigma(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\theta_\sigma(x)}{z+x} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{G_{\sigma,\nu}}{z + \alpha_{\sigma,\nu}} \end{aligned}$$

(1) H. HAMBURGER, *Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjeschen Kettenbrüche*, « *Mathematische Zeitschrift* », Vol. 4 (1919), pag. 186-223. L'H. dimostra che il secondo membro non potrebbe venire sostituito da altro minore.

(2) O. PERRON, *Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz Gewisser Kettenbrüche*, « *Mathematische Annalen* », Vol. 74 (1913), pag. 545-554.

dove

$$G_{\sigma, \nu} > 0, \quad \alpha_{\sigma, \nu} \geq 0,$$

e, non solo

$$\int_0^{\infty} x^n d\theta_{\sigma}(x) = c_n$$

ma anche

$$\int_0^{\infty} x^n d(\alpha\theta_0(x) + \beta\theta_1(x)) = c_n$$

dove α, β sono costanti non negative, di somma 1.

Nel caso in cui i c_n, C_n, B_n siano positivi, infiniti a_n siano diversi da 0, e nessuno fra essi sia negativo, la funzione a ripiani $\psi(x)$ definita dalle condizioni (A) è crescente, con infiniti punti di crescita e costituisce una soluzione, nel senso di STIELTJES, del problema dei momenti,

L'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} = \int_0^1 t^{z-1} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n}$$

ci dà lo sviluppo della frazione continua di STIELTJES (6) in serie di frazioni parziali. E la soluzione prima ottenuta è unica, nel senso prima definito.

Ove la frazione continua diverga e $\psi(x)$ sia una delle infinite soluzioni $\alpha\theta_0(x) + \beta\theta_1(x)$, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z+n} = \alpha \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G_{0,\nu}}{z+\alpha_{0,\nu}} + \beta \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G_{1,\nu}}{z+\alpha_{1,\nu}}.$$

La relazione non può sussistere se $\alpha_{0,\nu}, \alpha_{1,\nu}$ assumono valori diversi da 0, 1, 2, ...; $\alpha_{0,\nu}, \alpha_{1,\nu}$ possono venire ordinati per modo che sia

$$\alpha_{0,\nu} = \alpha_{1,\nu} = \nu$$

sempre che $G_{0,\nu}, G_{1,\nu}$ possano assumere anche il valore 0. È allora

$$a_n = \alpha G_{0,n} + \beta G_{1,n}.$$

4. Si è indicata nel § 2 una fra le infinite soluzioni del sistema (B) che possono ottenersi modificando opportunamente la definizione delle funzioni $g(z), \theta(z)$, od il valore di a_0 .

Supposto, ad esempio,

$$\theta(z) = e^{\alpha z}, \quad (\alpha > 0)$$

a due valori diversi di α corrispondono due soluzioni diverse di (B).

Lo siano (a_0, a_1, a_2, \dots) , $(b_0 (= a_0), b_1, b_2, \dots)$ e si scriva

$$d_n = a_n - b_n.$$

È anche

$$(C) \quad 1^h d_1 + 2^h d_2 + \dots = 0 \quad (h = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\int_0^1 t^{z-1} (d_1 t + d_2 t^2 + \dots) dt = \frac{d_1}{z+1} + \frac{d_2}{z+2} + \dots \approx 0$$

e, poichè

$$\int_0^1 t^{z-1} (d_1 t + d_2 t^2 + \dots) dt = \int_0^\infty e^{-tz} (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-2t} + \dots) dt$$

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \dots = 0$$

se

$$\Phi(t) = d_1 e^{-t} + d_2 e^{-2t} + \dots$$

Il problema di associare alla serie divergente

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \dots$$

una funzione meromorfa

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z+1} + \dots$$

avente infiniti poli semplici in punti che appartengono all'insieme $0, -1, -2, \dots$ e di cui la serie divergente costituisce lo sviluppo assintotico, ha dunque sempre infinite soluzioni.

Il nuovo problema di scegliere fra esse una soluzione privilegiata, univocamente definita da ulteriori condizioni, rientra nella categoria di problemi in cui si tratta di determinare una funzione soddisfacente ad un sistema discreto di condizioni, a proposito dei quali osservava più di un terzo di secolo fa il BOREL ⁽¹⁾ come apparisse interessante di vincolarli alla teoria degli zeri delle funzioni intere. Si tratterebbe nel caso concreto delle funzioni intere $g(z)$ che si annullano se $z = 1, 2, \dots$. Ma accanto a questo problema si presenta l'altro dell'influenza che la scelta della funzione sommatrice intera $\theta(z)$ esercita sul risultato.

(¹) É. BOREL, *Sur l'interpolation*, « Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. », t. 124, pag. 673 e *Méthodes et problèmes de la Théorie des Fonctions*, pag. 129.

Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n e applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi.

Memoria di MARIO MANARINI (a Bologna).

Sunto. - Si stabiliscono alcuni complementi sulle omografie vettoriali e in particolare sulle omografie assiali; si applicano i risultati ottenuti per sviluppare il Calcolo plurivettoriale in modo assoluto, cioè senza l'uso dell'ordinario Calcolo tensoriale.

Come conseguenza, si estende allo spazio S_n , con $n > 3$, l'operatore \wedge (prodotto vettoriale) ed il concetto di vettore di una omografia, finora considerati soltanto nello spazio ordinario. Così si sviluppa una teoria vettoriale che con altre ad essa riattaccatesi si presta utilmente per le indagini geometriche e fisico-matematiche negli spazi a più dimensioni.

Infine, come esempio illustrativo, si è fatta una applicazione meccanica, stabilendo i fondamenti della Cinematica dei sistemi rigidi negli spazi S_n , ottenendosi rapidamente una discussione più esauriente di quelle già note.

Molti Autori ⁽¹⁾ rielaborando il *Calcolo differenziale assoluto* per applicarlo allo studio degli spazi curvi usano enti geometrici chiamati bivettori, tri-vettori ecc. (che estendono l'ordinario concetto di vettore) riferendosi alle coordinate cioè considerandone le componenti covarianti e contravarianti e trattandoli come particolari tensori.

Il BOGGIO ed il BURALI-FORTI trattarono pure i principali argomenti relativi agli spazi curvi con metodo assoluto, cioè senza l'uso delle componenti, operando esclusivamente sul vettore ed estendendo invece la teoria delle omografie vettoriali nella teoria delle iperomografie od omografie di ordine n ⁽²⁾.

Nondimeno con questo ultimo modo di procedere, ottimo sotto molteplici aspetti per le semplificazioni notevoli che apporta, permane, nell'ordinaria analisi vettoriale, l'impossibilità di estendere in modo naturale agli spazi

⁽¹⁾ Cfr. ad es.: E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928; E. CARTAN, *La Géométrie des Espaces de Riemann*, « Mémorial des Sciences Mathématiques », Fasc. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1925; J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Springer, Berlin, 1924; A. DUSCHEK e W. MAYER, *Lehrbuch der Differential-geometrie*, B. II, W. MAYER, *Riemannsche Geometrie*, B. G. Teubner, Leipzig, 1930.

⁽²⁾ Cfr. C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Espaces Courbes et critique de la Relativité*, Sten, Torino, 1924; *Analisi Vettoriale Generale*, Vol. II, P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI; *Geometria differenziale*, Parte II, BOGGIO, Zanichelli, Bologna, 1930.

$S_n (n > 3)$ le teorie che in S_3 dipendono dall'operatore \wedge (prodotto vettoriale) e conseguentemente dagli operatori *rot* per i vettori e *Rot* per le omografie ⁽¹⁾, e che trovarono applicazioni importantissime specialmente nella geometria e nella fisica-matematica dello spazio ordinario.

Allo spazio S_n , coi detti metodi, si può soltanto estendere il gradiente di uno scalare e la divergenza di un vettore.

In questa Memoria, mediante l'uso delle omografie vettoriali, stabilisco *in modo assoluto* ⁽²⁾ cioè senza l'uso delle coordinate, i fondamenti del calcolo plurivettoriale, trattato cartesianamente nel senso detto dagli Autori citati.

Questo studio mi permette poi di estendere allo spazio S_n l'operatore \wedge (prodotto vettoriale), il concetto di vettore d'una omografia, l'operatore *rot* e teoremi relativi, ed ancora l'operatore *div* in modo più generale di quello fatto fino ad ora.

Queste due ultime estensioni di carattere differenziale saranno trattate in altri lavori che appariranno nei « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei ».

Si comprende come si affacciano tosto importanti applicazioni allo studio degli spazi curvi con un *nuovo metodo vettoriale d'indagine* che opera direttamente sugli enti geometrici a questi collegati. Qui, invece, come applicazione del solo calcolo plurivettoriale e per mostrarne l'utilità, mi sono limitato a trattare la cinematica dei sistemi rigidi negli spazi S_n , già trattata da vari Autori con metodi diversi. Molte altre applicazioni si intravedono facilmente.

Premetto, in questa Memoria, un'introduzione sulle omografie vettoriali nello spazio S_n , nella quale studio in particolar modo le omografie assiali, sviluppando quelle proposizioni, in parte nuove, con le quali mi è stato possibile fare la trattazione e l'estensione accennate.

Presuppongo invece nel lettore la conoscenza della teoria delle *omografie*

⁽¹⁾ Cfr. C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Espaces Courbes ecc.*, loc. cit., pagine 19, 56, 58; P. BURGATTI, « Boll. Un. Mat. It. », 1928, pag. 70.

⁽²⁾ Mi permetto a questo proposito di citare quanto afferma il CARTAN nella prefazione alla Tesi del prof. DELENS, *Méthodes et Problèmes des Géométries différentielles Euclidienne et conforme*, Gauthier-Villars, Paris, 1927 e cioè: « *L'idéal serait de raisonner et de calculer sur les êtres géométriques eux mêmes...* », ed a questo ideale corrisponde in modo lusinghiero il metodo vettoriale della Scuola italiana. Gioverà anche riflettere su quanto dice l'APPELL a proposito del Calcolo Vettoriale in *Elements de Calcul Tensoriel*, vol. V del *Traité de Mécanique rationnelle*, 1926, Gauthier-Villars, Paris. Ivi, a pag. 21, l'illustre Scienziato accetta detto calcolo per lo spazio S_3 , rimanendone titubante per gli spazi S_n specie se non sono euclidei.

Ancora il SEVERI nel suo Discorso « La matematica italiana », tenuto a Trento nel 1930, (« cfr. Atti della Soc. It. per il Progresso delle Scienze », 1931, Vol. I, pag. 194) giudica « la moderna teoria dei vettori, tanto importante in numerose questioni matematiche e fisiche ».

vettoriali per quanto può trovare nelle opere fondamentali seguenti: *Analisi vettoriale Generale*: Vol. I, C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*, 1928, Zanichelli, Bologna; Vol. II, P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI, loc. cit. ed ancora C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Les Espaces Courbes*, loc. cit.

Nel primo paragrafo tratto la teoria dei plurivettori in S_n con metodo puramente vettoriale, riservando al paragrafo successivo la traduzione cartesiana degli enti e delle operazioni considerate; in tal modo intendo anche collegare il metodo da me seguito con quello adoperato dagli Autori citati. Infine nel terzo paragrafo sviluppo l'accennata applicazione alla cinematica dei sistemi rigidi, come esempio scelto fra le tante altre che si potrebbero fare, stabilendo nuovi semplici caratteri differenziali fra spazi di indice pari e dispari.

A proposito di questa applicazione mi sia concesso di osservare che il metodo facile e assai celere da me seguito nello stabilire i fondamenti della cinematica in S_n può manifestamente essere adoperato, con vantaggio rispetto a quelli in uso, nello sviluppo degli stessi argomenti nella Meccanica ordinaria qualora siano conosciuti gli elementi delle omografie vettoriali.

INTRODUZIONE

1. Complementi sulle Omografie. — Per ottenere in S_n una esatta classificazione delle omografie vettoriali in proprie ed improprie come in S_3 e specialmente per avere le varie specie di omografie improprie, è importante il seguente teorema generale che estende l'analogo ben noto dello spazio S_3 :

Se una n-pla di vettori a_1, a_2, \dots, a_n non linearmente dipendenti è trasformata dall'omografia α in una n-pla di vettori pure linearmente indipendenti, lo stesso accade per ogni altra n-pla di vettori non linearmente dipendenti che si consideri; se invece a_1, \dots, a_n vengono da α trasformati in una n-pla di vettori paralleli ad una giacitura p-dimensionale ⁽¹⁾ con $p \leq n - 1$, senza essere paralleli ad una giacitura q-dimensionale con $q < p$ e parallela alla precedente, ogni altra n-pla b_1, \dots, b_n di vettori anche linearmente indipendenti gode della stessa proprietà.

Non ne espongo per brevità la dimostrazione che ho stabilito in modo quasi analogo a quello che trovasi, per lo spazio S_3 , in Vol. I dell'*Analisi Vettoriale Generale*, loc. cit., pag. 54.

Con questo teorema classifico le omografie vettoriali in *proprie* le prime e *degeneri* o *improprie* o *singolari* e di *specie* o *rango* $n - p$ le altre.

(1) Con ciò intendo il « quid » comune a tutti gli spazi S_p di S_n paralleli fra loro.

Ne consegue facilmente che le omografie degeneri di rango p sono tutte e soltanto quelle che ammettono p direzioni nulle distinte ⁽¹⁾ ossia per le quali esistono p direzioni linearmente indipendenti e quindi un'intera giacitura p -dimensionale tale che ogni vettore ad essa parallelo, viene trasformato da α nel vettore nullo.

Allora si ha l'osservazione, sfruttata spesso nel seguito, che le omografie degeneri di specie p sono tutte e soltanto quelle che, usando una scrittura ben nota, possono mettersi sotto la forma

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{n-p} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-p} & \mathbf{a}_{n-p+1} & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix},$$

con $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{n-p}$ non nulli e non appartenenti ad uno stesso S_{n-p-1} .

Per esempio la diade $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ che come è noto trasforma i vettori dello spazio, o in vettori nulli, quelli perpendicolari ad \mathbf{a} , o in vettori paralleli a \mathbf{b} , gli altri, è un'omografia degenera di rango $n - 1$.

Vedremo in seguito che questo teorema si può invertire.

Per le considerazioni che seguiranno, mi sarà utile riferirmi spesso alla cosiddetta forma diadica delle omografie.

Se α è determinata dalla n -pla $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ che viene trasformata nell'altra $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n$, risolvendo un sistema algebrico vettoriale facilmente ottenibile, ho dimostrato che α è sempre possibile porla sotto forma di somma di n diadi:

$$\alpha = H(\mathbf{a}'_1, \mathbf{u}_1) + \dots + H(\mathbf{a}'_n, \mathbf{u}_n),$$

con

$$\mathbf{a}'_r = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{r-1} \mathbf{a}_{r+1} \dots \mathbf{a}_n)}{\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{r-1} \mathbf{a}_{r+1} \dots \mathbf{a}_n)} \times \mathbf{a}_r,$$

dove $\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{r-1} \mathbf{a}_{r+1} \dots \mathbf{a}_n)$ è il ben noto ⁽²⁾ vettore perpendicolare agli $n - 1$ vettori scritti entro parentesi.

Da questi teoremi traggo subito la proposizione, importante per il seguito, che: un'omografia degenera di rango r si può sempre esprimere come somma di $n - r$ diadi e non di un numero inferiore.

⁽¹⁾ In tal modo si ricade nella definizione di rango di altri Autori: cfr. B. DE FINETTI, *Studio delle omografie vettoriali in relazione alle radici di $I_n(x-x)=0$* , « Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei », Anno LXXXII, 1929, pag. 387; per il caso delle assiali cfr. P. BURGATTI, *Proprietà delle omografie assiali in un S_n euclideo con applicazione alle formule di Frenet*, « Rend. della R. Accademia dei Lincei », 1928, 1° sem., Vol. VII, pag. 791.

Si potrà consultare utilmente anche S. PINCHERLE e U. AMALDI, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*, Cap. III e IV, Zanichelli, Bologna, 1901.

⁽²⁾ Cfr. C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Espaces Courbes ecc.*, loc. cit., pag. 7, oppure Vol. II, dell'*Analisi Vettoriale Generale*, loc. cit., pag. 158.

In particolare: ogni omografia degenerare di rango $n - 1$ si può porre sempre in forma di diade. In tal modo si ha l'inversione della proposizione poco fa accennata.

La forma diadica permette inoltre di stabilire con metodo assoluto che un'omografia α e la sua coniugata $K\alpha$ sono proprie o degeneri contemporaneamente e quando sono degeneri lo sono della medesima specie.

In particolare, come è noto, è

$$KH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = H(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

2. Complementi sulle omografie assiali. — Indicherò, seguendo altri Autori, con A l'operatore lineare che applicato ad un'omografia α dà la sua assiale:

$$A\alpha = \frac{\alpha - K\alpha}{2}.$$

In particolare osserviamo che per la diade $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ si ha:

$$AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \{ H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - H(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \},$$

dalla quale si scorge che $AH(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ è un'assiale sempre degenerare qualunque sia l'indice n dello spazio, e lo è di rango $n - 2$.

Vedremo fra breve che questa proposizione si potrà invertire.

È ben noto che le omografie assiali possono essere proprie soltanto se l'indice n dello spazio è pari; le assiali in genere ed in specie quelle di rango $n - 2$, hanno importanti proprietà che useremo nel seguito e delle quali si è occupato in modo particolare anche il prof. BURGATTI ⁽¹⁾.

Nella Nota ora citata il prof. BURGATTI dimostra che « un'omografia assiale non può essere di rango maggiore di $n - 2$ » e ricordiamo che ad esempio un'assiale di rango $n - 2$ è data dall'assiale di una qualsiasi diade.

Inoltre il prof. BURGATTI, nello stesso lavoro, in base all'osservazione che per un'assiale tutti gli invarianti di ordine dispari sono nulli, ricorrendo all'equazione in x

$$I_n(\gamma - x) = x^n - I_1\gamma \cdot x^{n-1} + \dots + (-1)^n I_n\gamma = 0,$$

alle cui radici reali corrispondono direzioni unite per l'omografia γ , fa notare che questa equazione, nel caso di γ assiale, contiene soltanto i termini di grado n , $n - 2$, $n - 4$, ecc.

(1) Cfr. P. BURGATTI, *Proprietà delle omografie assiali in S_n ecc.*, loc. cit.

Ne deduce che allora essa non può avere che radici reali nulle ⁽¹⁾ e che la radice nulla potrà essere di ordine di molteplicità 0, 2, 4, 6... $n-2$ cioè pari se n è pari, 1, 3, 5... $n-2$ cioè dispari se n è dispari; corrispondentemente l'omografia γ potrà avere 0, 2, 4... $n-2$, oppure 1, 3... $n-2$ direzioni nulle distinte a seconda che n è pari oppure dispari.

Quindi possiamo aggiungere che le assiali in S_n potranno avere interi spazi (o meglio giaciture) di direzioni nulle con dimensioni pari o dispari variabili da 0 a $n-2$ a seconda che l'indice n di S_n è pari o dispari.

Di questo risultato me ne servirò spesso nel seguito ed in particolare nella applicazione cinematica annunciata.

Poichè anche dell'ultima parte della proposizione del prof. BURGATTI nella Nota citata non figura la dimostrazione e dato che sarà da me applicata nel seguito, mi permetto di darne la seguente.

Supponiamo che lo zero sia radice multipla dell'equazione scritta sopra e dell'ordine di molteplicità r , pari se n è pari, dispari se n è dispari. Dico, con il BURGATTI, che γ dovrà avere r direzioni nulle distinte cioè linearmente indipendenti. Infatti per l'ipotesi si ha:

$$I_n\gamma = 0, \quad I_{n-1}\gamma = 0, \dots, \quad I_{n-r+1}\gamma = 0, \quad I_{n-r} \neq 0.$$

Essendo $I_n\gamma = 0$, γ è degenera e quindi esisterà almeno un vettore \mathbf{a}_1 non nullo, tale che $\gamma\mathbf{a}_1 = 0$.

Essendo $I_{n-1}\gamma = 0$, considerando l'espressione di questo invariante prendendo la n -pla di vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, ne viene di conseguenza $\mathbf{a}_1\gamma\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_1\gamma\mathbf{b}_n$ linearmente dipendenti, per modo che esisteranno gli $n-1$ numeri reali m_2, \dots, m_n non tutti nulli tali che

$$(*) \quad \mathbf{a}_1 = m_2\gamma\mathbf{b}_2 + m_3\gamma\mathbf{b}_3 + \dots + m_n\gamma\mathbf{b}_n.$$

Allora il vettore

$$\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{b}_2 + \dots + m_n\mathbf{b}_n,$$

indipendente linearmente da \mathbf{a}_1 per l'ipotesi, è tale che

$$\gamma\mathbf{a}_2 = 0$$

risultando per (*) $\gamma\mathbf{a}_2 = \gamma\mathbf{a}_1$.

Quindi se $I_n\gamma = I_{n-1}\gamma = 0$, esisteranno due direzioni nulle distinte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Così seguitando, stante l'ipotesi del teorema in parola, si possono costruire r vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ linearmente indipendenti e direzioni nulle di γ .

(1) Invero se avesse una radice reale non nulla, m , si avrebbe che $\gamma - m$ sarebbe degenera ed esisterebbe \mathbf{u} tale che $(\gamma - m)\mathbf{u} = 0$, ossia $\gamma\mathbf{u} = m\mathbf{u}$ con $m \neq 0$, ciò che non può essere per γ assiale.

Inoltre γ , nelle ipotesi adottate, non può ammettere più di r direzioni nulle distinte perchè altrimenti risulterebbe degenerare di ordine maggiore di r e quindi sarebbero nulli altri invarianti d'ordine minore di $n - r + 1$, contro l'ipotesi (1). c. d. d.

3. Assiali semplici. — Per quanto seguirà è particolarmente interessante lo studio delle omografie assiali di rango $n - 2$. Anzitutto stabiliamo il seguente:

TEOREMA. — *Tutte le assiali di rango $n - 2$ aventi le stesse direzioni nulle distinte $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ non differiscono che per un fattore di proporzionalità.*

Infatti se \mathbf{b} è un vettore non parallelo alla giacitura $(n - 2)$ -dimensionale determinata da $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$, e γ è un'assiale avente quelle direzioni nulle si ha:

$$\gamma \mathbf{b} = m \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{b}),$$

con $m \neq 0$ e dipendente soltanto da γ , cioè indipendente da \mathbf{b} , una volta fissati $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$.

Siano invero \mathbf{a}_{n-1} , \mathbf{a}_n altri due vettori indipendenti fra loro e dai precedenti $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ cioè tali che:

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{a}_{n-1}) \times \mathbf{a}_n \neq 0;$$

si consideri il vettore $\gamma \mathbf{a}_{n-1}$; esso non risulterà nullo ma perpendicolare ad \mathbf{a}_{n-1} stesso, essendo

$$\gamma \mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_{n-1} = 0$$

per le proprietà delle assiali. Inoltre è:

$$\gamma \mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_r = -\mathbf{a}_{n-1} \times \gamma \mathbf{a}_r = 0 \quad \text{per } r = 1, 2, \dots, n - 2,$$

e perciò $\gamma \mathbf{a}_{n-1}$ risulta perpendicolare alla giacitura $(n - 1)$ -dimensionale determinata dai vettori $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{a}_{n-1}$.

Quindi sarà parallelo al vettore $\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{a}_{n-1})$ ed avremo:

$$(1) \quad \gamma \mathbf{a}_{n-1} = m \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{a}_{n-1});$$

con $m \neq 0$, numero reale.

Analogamente si potrà scrivere

$$(2) \quad \gamma \mathbf{a}_n = \bar{m} \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{a}_n)$$

con \bar{m} numero reale non nullo.

(1) A questo proposito richiamo l'attenzione del lettore sulla Memoria del DE FINETTI loc. cit., ove si tratta il caso generale di una omografia α qualunque e in particolare quello delle dilatazioni; la discussione che l'A. fa per queste ultime mi pare che potrebbe essere ripetuta anche per le assiali.

Dico che è $m = \bar{m}$. Infatti essendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{a}_{n-1}) \times \mathbf{a}_n = -\mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{a}_n) \times \mathbf{a}_{n-1}$$

si ha per le (1) e (2):

$$\frac{1}{m} \gamma \mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_n = -\frac{1}{m} \gamma \mathbf{a}_n \times \mathbf{a}_{n-1} = \frac{1}{m} \gamma \mathbf{a}_{n-1} \times \mathbf{a}_n$$

da cui

$$m = \bar{m}.$$

Così resta provato che per ogni \mathbf{b} non parallelo alla giacitura $(n-2)$ -dimensionale determinata da $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ si ha effettivamente

$$\gamma \mathbf{b} = m \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{b}).$$

Ne consegue che per un'altra assiale γ_1 avente le stesse direzioni nulle si ha

$$\gamma_1 \mathbf{b} = m_1 \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{b}), \quad m_1 \neq 0$$

ed allora per ogni vettore \mathbf{b} dello spazio si ha:

$$\frac{1}{m} \gamma \mathbf{b} = \frac{1}{m_1} \gamma_1 \mathbf{b}$$

ossia

$$\gamma = \frac{m}{m_1} \gamma_1. \quad \text{c. d. d.}$$

In particolare esiste l'omografia γ tale da dare proprio

$$\gamma \mathbf{b} = \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{b}).$$

Essa si può formare nel seguente modo: si considerino i due vettori \mathbf{a}_{n-1} , \mathbf{a}_n ortogonali alla giacitura $(n-2)$ -dimensionale determinata dalle direzioni nulle $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$; inoltre il valore assoluto dell'area del parallelogramma formato con i due vettori \mathbf{a}_{n-1} , \mathbf{a}_n sia uguale al valore assoluto del volume del parallelepipedo $(n-2)$ -dimensionale costruito sopra $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ ed ancora i due vettori siano tali che il verso della n -pla $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{a}_n$ sia quello positivo prefissato per le n -ple di S_n .

Allora l'assiale

$$\gamma = H(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n) - H(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n-1}) = 2AH(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n)$$

per ogni \mathbf{b} dà appunto

$$\gamma \mathbf{b} = \mathbf{E}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{b}).$$

Ciò si può vedere direttamente oppure vedremo che risulterà manifesto dopo quanto avremo detto più avanti al n. 15.

Un'altra proposizione usata nel seguito è il seguente:

TEOREMA. — In uno spazio di dimensioni pari se γ è un'assiale non degenera anche l'inversa γ^{-1} è pure un'assiale non degenera.

Invero, essendo $\gamma = -K\gamma$, esistendo γ^{-1} ed applicandola ai due membri (a sinistra) abbiamo:

$$1 = -\gamma^{-1}K\gamma.$$

Essendo $K\gamma$ non degenera, esisterà $(K\gamma)^{-1}$ che applicata, a destra, nella precedente dà:

$$K\gamma^{-1} = -\gamma^{-1}. \quad \text{c. d. d.}$$

Assai importante per quanto ci occuperà più oltre è il:

TEOREMA. — Un'omografia assiale γ qualsiasi, di qualunque rango, può sempre considerarsi, in infiniti modi, come somma di n assiali di rango $n-2$.

Invero, diamo all'assiale γ la forma diadica, che, ricorrendo ad una n -pla fondamentale $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$, assumerà l'espressione semplice:

$$\gamma = H(\mathbf{i}_1, \gamma\mathbf{i}_1) + H(\mathbf{i}_2, \gamma\mathbf{i}_2) + \dots + H(\mathbf{i}_n, \gamma\mathbf{i}_n).$$

Considerando la coniugata

$$K\gamma = H(\gamma\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1) + H(\gamma\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_2) + \dots + H(\gamma\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_n)$$

si ha subito:

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma - K\gamma) = \frac{1}{2}[H(\mathbf{i}_1, \gamma\mathbf{i}_1) - H(\gamma\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1)] + \dots + \frac{1}{2}[H(\mathbf{i}_n, \gamma\mathbf{i}_n) - H(\gamma\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_n)],$$

ove evidentemente gli n addendi sono del tipo $AH(\mathbf{i}_r, \gamma\mathbf{i}_r)$ ossia assiali di rango $n-2$. c. d. d.

Per questa ragione chiamo *assiale semplice* l'assiale di una diade e *assiale multiple* le altre. Queste ultime sono quindi *decomponibili in una somma di assiali semplici*.

Si noti che il prodotto di un'assiale semplice per un numero reale è ancora un'assiale semplice.

OSSERVAZIONE. — Poichè un'assiale di rango r può scriversi sotto forma di somma di $n-r$ diadi (e non di un numero minore, cfr. n. 1), ne consegue che *un'assiale multipla di rango r potrà scriversi sotto forma di somma di $n-r$ assiali semplici ed anche però di un numero inferiore*, come avviene per esempio per un'assiale semplice stessa che, essendo di rango $n-2$, può ridursi alla somma di due diadi, dalle quali applicando l'operatore A consegue la somma di due assiali semplici, che debbono ridursi all'assiale semplice primitiva.

Ci sarà anche utile il seguente:

TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché in S_n un'assiale sia semplice è che sia di rango $n-2$.*

Già sappiamo che le assiali semplici sono di rango $n-2$; viceversa dimostriamo ora che un'assiale di rango $n-2$ è un'assiale semplice. Ciò è anche conseguenza di una osservazione precedente di cui però per la dimostrazione rimandammo ad un n.º più innanzi. Diamone perciò la seguente dimostrazione diretta.

Se γ è di rango $n-2$, ammetterà $n-2$ direzioni nulle non linearmente dipendenti ed esisteranno, in infiniti modi, $n-2$ versori $\mathbf{i}_3 \dots \mathbf{i}_n$ linearmente indipendenti ortogonali a due a due, tali che:

$$(1) \quad \gamma \mathbf{i}_r = 0 \quad r = 3, \dots, n.$$

Insieme a questi consideriamo nella giacitura 2-dimensionale perpendicolare alla giacitura $(n-2)$ -dimensionale determinata dai versori precedenti, altri due versori \mathbf{i}_1 e \mathbf{i}_2 tali che con i precedenti $n-2$, formino in S_n una n -pla fondamentale. Scrivendo la γ in forma diadica, mediante questa n -pla, abbiamo semplicemente

$$(2) \quad \gamma = H(\mathbf{i}_1, \gamma \mathbf{i}_1) + H(\mathbf{i}_2, \gamma \mathbf{i}_2).$$

Si ha per la (1)

$$\gamma \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_r = 0, \quad r = 3, \dots, n,$$

ed inoltre

$$\gamma \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = 0,$$

per le proprietà delle assiali; quindi ne consegue

$$\gamma \mathbf{i}_1 = m \mathbf{i}_2,$$

con m numero reale non nullo.

Analogamente risulta

$$\gamma \mathbf{i}_2 = \bar{m} \mathbf{i}_1, \quad \text{con } \bar{m} \text{ reale, } \neq 0,$$

e per essere γ assiale:

$$\gamma \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = -\gamma \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1,$$

onde si deduce che è

$$\bar{m} = -m.$$

Perciò la (2) diviene

$$\gamma = m \{ H(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) - H(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1) \},$$

cioè γ è un'assiale semplice, essendo l'assiale della diade $H(2m\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$. c. d. d.

Dopo queste considerazioni possiamo affermare che le *assiali semplici* sono senz'altro le *assiali degeneri di rango $n-2$* .

§ I. Calcolo plurivettoriale.

4. Ricordiamo che il vettore di cui tratta l'ordinario calcolo vettoriale è un ente geometrico determinato da un numero reale positivo (il suo modulo) da una direzione e da un verso. Si suole in generale rappresentare geome-

tricamente o con una coppia di punti A, B , scrivendo in questo caso $B - A$, oppure con una lettera minuscola latina scritta in grassetto.

Si chiama *bivettore semplice* o soltanto *bivettore* (almeno fino a che non darà luogo ad equivoco) un ente geometrico determinato da una *giacitura* duedimensionale, da un numero reale positivo e da un « verso ».

Per rappresentarlo completamente si potrebbe far uso di una terna di punti non in linea retta; ma è preferibile far uso col CARTAN di una coppia di vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ non paralleli, considerati in un dato ordine, e paralleli a quella giacitura; l'area del parallelogramma costruito con essi presa in valore assoluto ci dà il modulo del bivettore, il loro ordine determina il verso ossia determina il senso del percorso dell'area del parallelogramma considerato. Evidentemente per rappresentare lo stesso bivettore disponiamo di infinite coppie di vettori. Il bivettore considerato lo rappresenteremo con la scrittura $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, oppure più semplicemente con \mathbf{a}_2 .

Se il bivettore è di modulo unitario, lo chiamerò *biversore*. L'uguaglianza dei bivettori si avrà con le uguaglianze dei moduli, delle giaciture e dei versi.

Più avanti considereremo altri bivettori che si diranno bivettori multipli.

5. Si chiama *trivettore* un ente geometricamente rappresentabile mediante una terna *ordinata* di vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ non appartenenti ad uno stesso S_2 , e che indicheremo con \mathbf{a}_3 . Questo ente è determinato ancora da un modulo, un « verso » ed una *giacitura* (tridimensionale): il modulo è dato dal valore assoluto del parallelepipedo tridimensionale avente gli spigoli rappresentati dai tre vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$; il verso è determinato dall'ordine dei tre vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, che si conserva per una permutazione pari eseguita sui vettori; esso stabilisce l'orientamento positivo o negativo delle terne di vettori negli spazi S_3 paralleli alla giacitura tridimensionale determinata da essi; la giacitura (tridimensionale) di \mathbf{a}_3 è quella dianzi accennata, determinata dai tre vettori.

L'uguaglianza si definisce in modo analogo a quello per i bivettori e se ne deduce l'infinità dei modi per rappresentare uno stesso trivettore mediante terne ordinate di vettori.

Se il modulo del trivettore è unitario si può chiamare *triversore*.

Così si può seguitare e definire in generale il p -vettore \mathbf{a}_p con $p \leq n$ essendo n le dimensioni dello spazio entro cui si opera.

Nello spazio ordinario S_3 esistono soltanto vettori, bivettori e trivettori; questi ultimi poi hanno tutti la medesima giacitura (tridimensionale) che è quella stessa di S_3 .

Nello spazio S_n si possono considerare plurivettori fino all' n -vettore e tutti gli n -vettori sono fra loro paralleli ossia hanno la stessa giacitura (n -dimensionale) che è quella di S_n .

6. I bivettori in relazione alle omografie vettoriali. — Dato il bivettore \mathbf{a}_2 , rappresentabile geometricamente con la coppia di vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} , consideriamo la diade $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ed il doppio della sua assiale:

$$2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - H(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Osservando che fra i bivettori semplici e le assiali delle diadi, ossia le assiali semplici, intercede una corrispondenza biunivoca, chiameremo \mathbf{a}_2 il *bivettore semplice corrispondente all'assiale semplice* $2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

In generale le assiali dello spazio S_n possono essere di rango 0, 1, 2, ... fino ad $n-2$, escluso lo zero nel caso di n dispari, e sappiamo che in ogni caso si può *sempre* (cfr. n.º 3) decomporle nella somma di assiali semplici. Estendendo la corrispondenza con i bivettori anche alle assiali multiple, chiamando *bivettore multiplo* il corrispondente dell'assiale multipla, assumeremo questo come *somma* dei bivettori *semplici* corrispondenti alle assiali semplici secondo cui si può decomporre l'assiale multipla assegnata. All'assiale nulla corrisponderà il bivettore nullo e il concetto di somma così stabilito soddisfa alle leggi ordinarie di tale operazione giacchè queste sono soddisfatte dalla somma delle omografie e in particolare delle assiali.

Il bivettore multiplo così introdotto corrisponde, come si vedrà meglio al § 2 allorchè tratteremo della rappresentazione cartesiana, all'ente geometrico chiamato dal CARTAN, « *Système de bivecteurs* » (1), e dallo SCHOUTEN, « *Allgemeine bivektor* » (2).

L'uguaglianza dei *bivettori multipli* sarà, per definizione, conseguenza dell'uguaglianza delle *assiali multiple corrispondenti* e così pure attraverso la somma delle assiali multiple si definirà la *somma dei bivettori multipli*.

In particolare, essendo

$$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad -\mathbf{a}_2 = (\mathbf{b}, \mathbf{a}),$$

si avrà

$$\mathbf{a}_2 + (-\mathbf{a}_2) = 0,$$

come in corrispondenza è

$$2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 2AH(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0.$$

(1) Cfr. E. CARTAN, *Leçons sur les Espaces de Riemann*, loc. cit., pag. 11.

(2) Cfr. J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, loc. cit.

Diremo *rango* del bivettore multiplo il rango dell'assiale corrispondente; i *bivettori di rango* $n - 2$ sono *bivettori semplici*, essendo l'assiale corrispondente un'assiale semplice (cfr. n.º 3). Ricordando la decomposizione delle assiali multiple vista al n.º 3 possiamo affermare che:

Un *bivettore multiplo* (corrispondente ad un'assiale multipla) può sempre pensarsi decomposto nella somma di n *bivettori semplici*; se r è il rango del bivettore, si può anche pensare decomposto nella somma di $n - r$ bivettori semplici (e anche di un numero minore).

Nello spazio S_n , con n dispari, ogni bivettore è almeno di rango 1; negli spazi di indice pari può essere di rango zero.

Come si è visto, la somma di bivettori semplici deve considerarsi come un bivettore, in generale *multiplo*; ma può anche risultare un bivettore semplice; basta pensare al bivettore semplice corrispondente ad una assegnata assiale semplice; questa può scriversi, in infiniti modi, sotto forma di somma di n assiali semplici riferendosi ad es. ad una n -pla fondamentale qualsiasi; a ciascuna corrisponde un particolare bivettore semplice e la somma di questi è manifestamente il bivettore semplice iniziale.

Nello spazio S_3 tutte le assiali sono semplici (di rango 1) e quindi in esso la somma delle assiali è ancora un'assiale semplice a cui corrisponderà un bivettore semplice. Ne consegue che in S_3 non esistono che *bivettori semplici la cui somma è sempre un bivettore semplice* che si ottiene facilmente attraverso la somma delle assiali corrispondenti.

7. Prodotto scalare di due bivettori. — Cominciando da due bivettori semplici, siano essi \mathbf{a} e \mathbf{b} , rappresentabili geometricamente con le coppie di vettori $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ e $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ rispettivamente.

Si chiama prodotto scalare di questi due bivettori l'espressione

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}$$

che, come si vede, è riconducibile all'operazione di prodotto scalare per i vettori.

Se ci poniamo nello spazio S_3 e ci rappresentiamo \mathbf{a} e \mathbf{b} con due coppie di vettori $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ tali che sia $\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2 = 0$ e $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ siano i lati della sezione rettilinea del diedro formato dai piani dei bivettori, essendo

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1 = 0,$$

si ha che $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ viene ad essere uguale al prodotto dei moduli dei due bi-

vettori per il coseno dell'angolo diedro formato dai piani dei due bivettori; in tal modo si scorge la naturale estensione ai bivettori della nozione di prodotto scalare di due vettori.

In particolare per il quadrato di un bivettore si ha

$$\mathbf{a}_2^2 = \mathbf{a}_1^2 \cdot \mathbf{a}_2^2 - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1^2 \\ \mathbf{a}_2^2 & \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \end{vmatrix}$$

e la sua radice quadrata è il modulo del bivettore che coincide appunto con l'area del parallelogramma detta in principio, come si verifica facilmente.

Si hanno le proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= m\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times m\mathbf{b}, \end{aligned}$$

con m numero reale.

Osserviamo che con l'uso delle assiali si può anche scrivere

$$(1) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = 2AH(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$$

e quindi

$$\mathbf{a}^2 = 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2.$$

Per completare le proprietà del prodotto scalare di due bivettori semplici, dimostriamone la *proprietà distributiva rispetto alla somma*:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= [2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + 2AH(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)]\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = \\ &= 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 + 2AH(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

Questa proprietà ci permette di estendere il prodotto scalare ai bivettori multipli e di questo diremo fra poco.

Consideriamo ancora il prodotto scalare $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e sia $\mathbf{j} = (\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ il biverlore del bivettore \mathbf{b} , per modo che si avrà

$$\mathbf{b} = \text{mod } \mathbf{b} \cdot \mathbf{j}_2.$$

Ne consegue:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{mod } \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{j}_2.$$

Come si vede facilmente in S_3 e come si vedrà in generale più avanti, nel § 2, ove tratteremo delle rappresentazioni cartesiane, l'espressione $\mathbf{a} \times \mathbf{j}$ misura la *proiezione ortogonale del bivettore \mathbf{a} sul piano del bivettore \mathbf{b}* . Perciò pos-

siamo affermare che: *il prodotto scalare di due bivettori è uguale al modulo dell'uno per la proiezione ortogonale dell'altro su questo.*

E veniamo ora al prodotto scalare dei bivettori multipli. Potendoli considerare come somma di bivettori semplici e valendo la proprietà distributiva per il prodotto scalare di somme di bivettori semplici, ne consegue la possibilità di definire e di calcolare il prodotto scalare di due bivettori multipli, come somma dei prodotti scalari di bivettori semplici, seguendo l'algoritmo algebrico del prodotto dei polinomi.

Osserviamo che se γ è un'assiale multipla e $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ un bivettore semplice, il prodotto scalare del bivettore multiplo corrispondente a γ per il bivettore \mathbf{b} è rappresentabile con $\gamma \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$, poichè questa espressione vale appunto la somma dei prodotti scalari dei bivettori semplici costituenti il bivettore multiplo per il bivettore \mathbf{b} .

Poichè, se γ e γ_1 sono assiali qualunque, condizione necessaria e sufficiente perchè esse siano uguali è che per ogni coppia di vettori arbitrari $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ si abbia

$$\gamma \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \gamma_1 \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2,$$

ne consegue, in virtù della condizione di uguaglianza di due bivettori multipli, che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due bivettori multipli siano uguali è che, moltiplicati scalarmente per uno stesso bivettore semplice arbitrario $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ diano lo stesso risultato (cfr. CARTAN, loc. cit., pag. 11).

Questa condizione acquisterà anche un'altra forma più avanti al n. 10.

8. Ortogonalità totale di due bivettori (semplici). — Due bivettori $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ si dicono *totalmente ortogonali* quando ogni vettore parallelo alla giacitura di \mathbf{a} è ortogonale ad ogni vettore parallelo alla giacitura di \mathbf{b} .

Condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che sia

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1)^2 + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2)^2 + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1)^2 + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2)^2 = 0.$$

Poichè nel seguito noi non sfrutteremo che questa osservazione, ci limitiamo a questo cenno, rimandando per tale argomento ad altri lavori (⁴).

(⁴) Cfr. ENEA BORTOLOTTI, *Invarianti angolari nella metrica bivettoriale*, « Rend. del Seminario della Facoltà di Scienza di Cagliari », 1932, Vol. II, pag. 4-5 e le opere citate in questa Nota.

9. Angolo di due bivettori (semplici) e di due giaciture bidimensionali in S_n . — Si definisce l'angolo φ di due bivettori semplici ponendo

$$(1) \quad \cos \varphi = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\text{mod } \mathbf{a}_2 \cdot \text{mod } \mathbf{b}_2} = \frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1)}{\sqrt{\mathbf{a}_1^2 \mathbf{a}_2^2 - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^2} \sqrt{\mathbf{b}_1^2 \mathbf{b}_2^2 - (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^2}},$$

ove il secondo membro è in valore assoluto minore di 1, come si può verificare.

Due bivettori $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$ si dicono semplicemente ⁽¹⁾ ortogonali quando è

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 = 0.$$

Si può verificare che se il bivettore \mathbf{b}_2 è parallelo ad \mathbf{a}_2 , cioè se \mathbf{a}_2 e \mathbf{b}_2 hanno la stessa giacitura, è $\cos \varphi = \pm 1$ e si verifica pure che l'espressione di $\cos \varphi$ è indipendente dalla scelta delle coppie di vettori atte a rappresentarci i bivettori.

Considerati in S_n due piani S_2 , si dirà angolo dei due piani o delle giaciture bidimensionali da essi determinate, l'angolo di due bivettori o bivettori semplici aventi le giaciture parallele ai due piani e la sua espressione sarà data da (1).

10. Prodotto vettoriale interno di un bivettore semplice o multiplo per un vettore. — Sia \mathbf{a}_2 un bivettore semplice ed \mathbf{u} un vettore.

Chiameremo *prodotto vettoriale interno* di \mathbf{a}_2 per \mathbf{u} e lo indicheremo con $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u}$ oppure $\mathbf{u} \times \mathbf{a}_2$, *il vettore* che si ottiene applicando ad \mathbf{u} l'assiale semplice corrispondente al bivettore:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{u} = 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{u} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{u})\mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u})\mathbf{a}_1.$$

Si noti che il risultato è un vettore parallelo ad \mathbf{a}_2 ed è perpendicolare ad \mathbf{u} ; esso è nullo quando il vettore \mathbf{u} è perpendicolare alla giacitura del bivettore; è un'operazione distributiva rispetto alla somma di bivettori e alla somma di vettori ed è permutativa con il prodotto per un numero.

⁽¹⁾ L'ortogonalità semplice non porta la conseguenza che ogni vettore parallelo ad uno dei bivettori sia ortogonale ad ogni vettore parallelo all'altro. Nello spazio S_3 ciò non avviene mai e quindi i bivettori in esso non possono essere che semplicemente ortogonali.

Invero:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times_2 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= [2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + 2AH(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)]\mathbf{u} = \\ &= 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{u} + 2AH(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)\mathbf{u} = \mathbf{u} \times_2 \mathbf{a} + \mathbf{u} \times_2 \mathbf{b}, \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times_2 \mathbf{a} &= 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{u} + \\ &+ 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{v} = \mathbf{u} \times_2 \mathbf{a} + \mathbf{v} \times_2 \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Similmente

$$m\mathbf{a} \times_2 \mathbf{u} = \mathbf{a} \times_2 m\mathbf{u} = m(\mathbf{a} \times_2 \mathbf{u}).$$

La condizione di ortogonalità di un vettore \mathbf{u} con un bivettore \mathbf{a} è data dall'annullarsi del loro prodotto vettoriale interno:

$$\mathbf{a} \times_2 \mathbf{u} = 0.$$

Se diciamo $\mathbf{i}_{12} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ il bivettore parallelo ad \mathbf{a} , il vettore

$$\mathbf{u}_1 = (\mathbf{u} \times \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1 + (\mathbf{u} \times \mathbf{i}_2)\mathbf{i}_2$$

è la componente ortogonale di \mathbf{u} secondo il piano del bivettore. È facile vedere allora che è:

$$\mathbf{a} \times_2 \mathbf{u} = \mathbf{a} \times_2 \mathbf{u}_1,$$

cioè il prodotto vettoriale interno di un bivettore per un vettore è lo stesso di quello che si ottiene sostituendo il vettore con la sua componente ortogonale secondo il piano del bivettore.

Infatti la componente di \mathbf{u} secondo l' S_{n-2} perpendicolare al piano del bivettore data da $\sum_{r=3}^n (\mathbf{u} \times \mathbf{i}_r)\mathbf{i}_r$, essendo $\mathbf{i}_3 \dots \mathbf{i}_n$ vettori tali che con \mathbf{i}_1 e \mathbf{i}_2 formano una n -pla fondamentale, si vede che non dà contributo al prodotto vettoriale interno, risultando perpendicolare al piano del bivettore.

Se \mathbf{u} è parallelo al piano del bivettore \mathbf{a} , si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times_2 \mathbf{u} &= \text{mod } \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_{12} \times_2 \mathbf{u} = \\ &= \text{mod } \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{u})\mathbf{i}_2 - (\mathbf{u} \times \mathbf{i}_2)\mathbf{i}_1] \\ &= \text{mod } \mathbf{a} \cdot \text{mod } \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}, \end{aligned}$$

essendo \mathbf{k} un versore del piano del bivettore perpendicolare ad \mathbf{u} e nel senso del bivettore. Ne consegue che:

se \mathbf{u} è nel piano del bivettore \mathbf{a}_2 , si ottiene il *prodotto vettoriale interno* di \mathbf{a}_2 per \mathbf{u} , facendo ruotare \mathbf{u} d'un angolo retto parallelamente al piano del bivettore nel senso del bivettore e alterandolo nel rapporto di 1 a $\text{mod } \mathbf{a}_2$ ⁽⁴⁾.

Dalle due ultime osservazioni segue che qualunque sia \mathbf{u} , se $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u}$ non è nullo, è un vettore del piano di \mathbf{a}_2 perpendicolare alla componente ortogonale di \mathbf{u} nel piano di \mathbf{a}_2 e nella direzione positiva del bivettore \mathbf{a}_2 ; ossia il bivettore $(\mathbf{u}, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{u})$ ha lo stesso verso di \mathbf{a}_2 .

In particolare se \mathbf{i}_2 è il bivettore di \mathbf{a}_2 , risulta che $\mathbf{u} \times \mathbf{i}_2$ è lo stesso vettore \mathbf{u} girato di 90° nel piano del bivettore e nel senso del bivettore stesso. Quindi l'operazione $\mathbf{i}_2 \times$ per i vettori paralleli ad \mathbf{i}_2 può essere sostituita con l'operatore i di TAIT, analogamente a quanto si fa per i vettori. Fra breve vedremo che quest'operatore i sostituirà una operazione che sarà più particolarmente analoga di quella che sostituisce nello spazio S_3 .

Osserviamo per ora che nello spazio a tre dimensioni per tale prodotto vettoriale interno si ha:

$$\text{mod } (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u}) = \text{mod } \mathbf{a}_2 \cdot \text{mod } \mathbf{u} \cdot \cos \varphi,$$

essendo φ l'angolo che \mathbf{u} forma col piano di \mathbf{a}_2 .

Basta pensare che ivi esso vale anche $(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{u}$.

In base a ciò si dice angolo φ di un bivettore \mathbf{a}_2 con un vettore \mathbf{u} , in un S_n qualunque, quello definito da

$$\cos \varphi = \frac{\text{mod } (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u})}{\text{mod } \mathbf{a}_2 \cdot \text{mod } \mathbf{u}}.$$

Osserviamo infine col CARTAN, sempre a proposito del prodotto vettoriale interno di un bivettore $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ per un vettore \mathbf{u} , che se il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{u}$ lo moltiplichiamo scalarmente per un altro vettore \mathbf{v} , si ottiene il prodotto scalare del bivettore \mathbf{a}_2 per il bivettore semplice determinato dai due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} presi in quest'ordine, $\mathbf{b}_2 = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

(4) Cfr. E. CARTAN, *Leçons sur les Espaces de Riemann*, loc. cit., pag. 10.

Invero si ha

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{u})(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{v}) - (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u})(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{v}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Questa osservazione ci sarà utile per determinare l'espressione cartesiana di \mathbf{w} servendoci dell'espressioni cartesiane di \mathbf{a}_2 e di \mathbf{u} , ciò che faremo più avanti al n.º 18.

Diremo *prodotto vettoriale interno* di un bivettore multiplo per un vettore \mathbf{u} , il vettore risultato dell'applicazione al vettore \mathbf{u} dell'assiale multipla corrispondente al bivettore; viene ad essere il vettore somma dei prodotti vettoriali interni per \mathbf{u} , dei bivettori semplici secondo cui si decompone il bivettore multiplo.

Osserviamo ancora col CARTAN che moltiplicando scalarmente il risultato per un vettore \mathbf{v} si ottiene il prodotto scalare del bivettore multiplo per il bivettore semplice $\mathbf{b} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Ricordando un risultato del n.º 7 si capisce allora che due bivettori multipli saranno uguali se e soltanto se, moltiplicati internamente per uno stesso vettore \mathbf{u} danno lo stesso risultato.

11. $(n-2)$ -vettore supplementare di un bivettore semplice o multiplo. — Dato un bivettore semplice \mathbf{a}_2 , chiamasi $(n-2)$ -vettore supplementare di \mathbf{a}_2 l' $(n-2)$ -vettore semplice, che indicheremo con \mathbf{a}_{n-2} , tale che la giacitura $(n-2)$ -dimensionale a cui è parallelo, sia *totalmente* normale alla giacitura 2-dimensionale di \mathbf{a}_2 , il che avviene evidentemente quando ciascuno dei vettori $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ rappresentanti l' \mathbf{a}_{n-2} sia ortogonale a ciascuno dei vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ rappresentanti l' \mathbf{a}_2 :

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3)^2 + \dots + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_n)^2 + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)^2 + \dots + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_n)^2 = 0;$$

inoltre il volume del parallelepipedo $(n-2)$ -dimensionale costruito sopra $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ sia in valore assoluto uguale al valore assoluto dell'area del parallelogramma costruito sopra $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, cioè:

$$\text{mod } \mathbf{a}_{n-2} = \text{mod } \mathbf{a}_2;$$

infine l' n -vettore rappresentato dai vettori $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ abbia orientamento uguale a quello dell' n -pla fondamentale di S_n .

Se \mathbf{a}_2 è un bivettore multiplo, si definisce suo $(n-2)$ -vettore multiplo

supplementare la somma degli $(n-2)$ -vettori semplici supplementari dei bivettori semplici che costituiscono l' \mathbf{a} , la cui definizione è manifesta.

La definizione di plurivettori supplementari si può trattare in modo analogo anche in generale (cfr. CARTAN, *Leçons sur les Espaces de Riemann*, loc. cit., pag. 16); noi ci limiteremo al caso accennato. Soltanto osserviamo che il bivettore supplementare del $(n-2)$ -vettore \mathbf{a} è, reciprocamente, il bivettore \mathbf{a} e ciò dipende dal fatto che la disposizione degli indici $3 \dots n, 1, 2$ è di classe pari.

12. Prodotto vettoriale esterno di un $(n-2)$ -vettore per un vettore. — Chiameremo prodotto vettoriale esterno dell' $(n-2)$ -vettore semplice \mathbf{a} per il vettore \mathbf{u} , il vettore $\mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u})$ la cui definizione è stata richiamata al n. 1, ove $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$ sono $n-2$ vettori atti a rappresentarci l' \mathbf{a} . Indicheremo quest'operazione scrivendo

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u}).$$

Come si vede risulta un vettore di grandezza $\text{mod } \mathbf{a} \cdot \text{mod } \mathbf{u} \cdot \cos \varphi$, essendo φ l'angolo che \mathbf{u} forma col bivettore \mathbf{a} supplementare di \mathbf{a} , di direzione ortogonale alla giacitura $(n-1)$ -dimensionale determinata da $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u}$, e verso tale che l' n -vettore determinato da $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u} \mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u})$ abbia il verso positivo fissato a priori per le n -ple di vettori in S_n .

Si ha subito il teorema:

$$(1) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{u} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{u},$$

cioè il prodotto vettoriale interno di un bivettore semplice per un vettore è uguale al prodotto vettoriale esterno per lo stesso vettore dell' $(n-2)$ -vettore supplementare del bivettore.

Infatti, per le cose dette, i due vettori risultati hanno manifestamente ugual modulo, ugual direzione ed ugual verso. Circa quest'ultimo ci si convince subito pensando che nell'espressione di $\mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u})$ si può sostituire \mathbf{u} con la componente \mathbf{u}_1 considerata in precedenza.

La proprietà distributiva del prodotto vettoriale esterno rispetto a somme di $(n-2)$ -vettori o a somme di vettori è conseguenza della validità della stessa proprietà per il prodotto vettoriale interno, del teorema espresso da (1) e della definizione di complementarità data per i bivettori.

Nello spazio a tre dimensioni il supplementare del bivettore $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ è il vettore dato da $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$.

Quindi si ha, sempre in S_3 ,

$$\mathbf{a} \times_2 \mathbf{u} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{u} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \wedge \mathbf{u} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{u})\mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u})\mathbf{a}_1.$$

Tornando allo spazio S_n , nel caso particolare che \mathbf{a} sia unitario, anche l' $(n - 2)$ -vettore supplementare \mathbf{a} è unitario; indicandoli con \mathbf{i} e \mathbf{i} rispettivamente, abbiamo

$$\mathbf{i} \times_{n-2} \mathbf{u} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{u};$$

se \mathbf{u} è nel piano di \mathbf{i} ciascuno dei due membri rappresenta il vettore \mathbf{u} girato di 90° nel verso di \mathbf{i} . Ne consegue che la naturale estensione dell'operatore i usato in S_3 (4) e già accennata al n. 10 è quella di rappresentarci qui l'operazione $\mathbf{i} \wedge$ da applicarsi ai vettori della giacitura 2-dimensionale perpendicolare ad \mathbf{i} .

Per note proprietà dell'operatore E essendo

$$E(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{u}) = (-1)^n E(\mathbf{u} \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2})$$

si ha

$$\mathbf{a} \wedge_{n-2} \mathbf{u} = (-1)^n \mathbf{u} \wedge_{n-1} \mathbf{a}.$$

Inoltre: la condizione necessaria e sufficiente affinché il vettore \mathbf{u} appartenga alla giacitura di \mathbf{a} è espressa da

$$\mathbf{a} \wedge_{n-2} \mathbf{u} = 0;$$

essa coincide con la condizione di ortogonalità di \mathbf{a} con \mathbf{u} espressa come sappiamo da $\mathbf{a} \times_2 \mathbf{u} = 0$.

Per un $(n - 2)$ -vettore multiplo, somma di $(n - 2)$ -vettori semplici, si definirà il *prodotto vettoriale esterno per un vettore \mathbf{u}* come la somma dei prodotti vettoriali esterni per \mathbf{u} dei $(n - 2)$ -vettori semplici secondo cui quello si decompone.

Ciò è conseguenza della validità della proprietà distributiva accennata.

(4) Cfr. P. BURGATTI, *Lezioni di Meccanica razionale*, Zanichelli, Bologna, Introduzione.

13. Prodotto vettoriale di due vettori in S_n . — Dati due vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, chiameremo *prodotto vettoriale* di essi l' $(n-2)$ -vettore semplice supplementare del bivettore \mathbf{a} rappresentabile con i due vettori.

Lo indicheremo usando ancora il segno \wedge :

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_{n-2}$$

Nello spazio S_3 coincide con l'ordinario prodotto vettoriale.

Le sue proprietà sono identiche a quelle che esso ha nello spazio S_3 . In particolare è manifestamente $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1$ e dimostriamo la *proprietà distributiva rispetto alla somma*. Osserviamo che essendo

$$2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3),$$

per i bivettori semplici corrispondenti abbiamo la relazione

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)$$

e quindi la stessa relazione passerà fra i rispettivi $(n-2)$ -vettori supplementari. Ne consegue che è

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \wedge (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3).$$

Condizione di parallelismo dei due vettori \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 è: $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = 0$.

14. Prodotto misto. — Sia \mathbf{v} un vettore non parallelo alla giacitura $(n-1)$ -dimensionale determinata dai vettori $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ u del n. 12, ossia:

$$E(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \neq 0.$$

Si ha, essendo \mathbf{a} l' $(n-2)$ -vettore determinato da $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = E(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \text{vol}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{u} \mathbf{v}).$$

Si hanno le proprietà

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= -\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \\ &= (-1)^{n-1} \mathbf{u} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{v} \\ &= (-1)^n \mathbf{v} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{u}. \end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \times \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{a} \wedge \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Ho dimostrato che anche nello spazio S_n nella espressione $\mathbf{a} \wedge_{n-2} \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ è possibile, come in S_3 , scambiare i due segni \wedge e \times . La scrittura che si ottiene con lo scambio ha un facile significato trattandosi di prodotto scalare di due $(n - 2)$ -vettori semplici. La dimostrazione sarà accennata più avanti al n. 21.

Ora limitiamoci a far notare che il prodotto scalare di due p -vettori $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p)$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p)$, si ottiene estendendo l'espressione che dà il prodotto scalare di due bivettori e cioè:

$$\mathbf{a} \times_p \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_p \\ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_p \times \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_p \times \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_p \times \mathbf{b}_p \end{vmatrix}$$

(cfr. CARTAN, loc. cit., pag. 13).

Si noti che $(\mathbf{a} \wedge_{n-2} \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}$ rappresenta un $(n - 2)$ -vettore parallelo alla giacitura $(n - 1)$ -dimensionale determinata da \mathbf{a} e da \mathbf{u} , mentre $(\mathbf{a} \wedge_{n-2} \mathbf{u}) \wedge_{n-2} \mathbf{b}$ rappresenta un vettore parallelo alla stessa giacitura.

Se \mathbf{a} è un $(n - 2)$ -vettore multiplo, basta pensare che esso è la somma, in infiniti modi, di $(n - 2)$ -vettori semplici che sono i supplementari dei bivettori semplici di cui si compone il bivettore multiplo supplementare di \mathbf{a} .

L'omografia $\mathbf{a} \wedge_{n-2}$ risulta la somma delle assiali semplici corrispondenti agli $(n - 2)$ -vettori semplici componenti, quindi risulta un'assiale; chiamo \mathbf{a}_{n-2} l' $(n - 2)$ -vettore di questa assiale.

Essendo K il solito operatore che applicato ad un'omografia dà la coniugata, verifichiamo che, essendo \mathbf{a} multiplo o semplice, si ha appunto la ben nota proprietà caratteristica

$$K(\mathbf{a} \wedge_{n-2}) = -\mathbf{a}_{n-2}$$

Invero, presi \mathbf{u} e \mathbf{v} arbitrari abbiamo:

$$\mathbf{a} \wedge_{n-2} \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times K(\mathbf{a} \wedge_{n-2}) \mathbf{v}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge_{n-2} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \mathbf{v} \times \mathbf{a} \wedge_{n-2} \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \times (-\mathbf{a}_{n-2}) \mathbf{v} \end{aligned}$$

e dal confronto si ha l'asserto.

15. $(n - 2)$ -vettore di una omografia. — Da quanto precede abbiamo che se si considera l'assiale della diade $H(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ si ha

$$(1) \quad 2AH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \underset{2}{\mathbf{a}} \underset{n-2}{\times} = \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge,$$

essendo $\underset{2}{\mathbf{a}}$ il bivettore semplice rappresentato dai vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ che determinano la diade e $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$ l' $(n - 2)$ -vettore semplice supplementare ⁽⁴⁾.

Chiamo $(n - 2)$ -vettore della assiale della diade $H(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ed anche della diade stessa, l' $n - 2$ -vettore $\frac{1}{2} \underset{n-2}{\mathbf{a}}$.

Per quanto dicemmo al n. 13, esso può anche venire indicato con la scrittura $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)$.

In generale, presa un'omografia qualunque di S_n :

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n \\ \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

la si scriva nella forma diadica:

$$\alpha = H(\mathbf{a}'_1, \mathbf{u}_1) + H(\mathbf{a}'_2, \mathbf{u}_2) + \dots + H(\mathbf{a}'_n, \mathbf{u}_n)$$

come si è detto al n. 1.

Calcolando l'assiale di α abbiamo

$$A\alpha = AH(\mathbf{a}'_1, \mathbf{u}_1) + \dots + AH(\mathbf{a}'_n, \mathbf{u}_n)$$

e per la (1) del n.º precedente risulta

$$\begin{aligned} A\alpha &= \frac{1}{2} (\underset{2}{\mathbf{a}}_1 + \underset{2}{\mathbf{a}}_2 + \dots + \underset{2}{\mathbf{a}}_n) \underset{2}{\times} \\ &= \frac{1}{2} (\underset{n-2}{\mathbf{a}}_1 + \underset{n-2}{\mathbf{a}}_2 + \dots + \underset{n-2}{\mathbf{a}}_n) \wedge \end{aligned}$$

ove i simboli hanno evidente significato.

⁽⁴⁾ Ora è il momento di completare la dimostrazione lasciata in sospenso al n. 3.

Se $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2}$ sono le direzioni nulle distinte dell'assiale γ , di rango $n - 2$ ivi considerata, esse definiscono un $(n - 2)$ -vettore semplice $\underset{n-2}{\mathbf{a}}$; se \mathbf{a} è il bivettore supplementare determinato dai vettori \mathbf{a}_{n-1} e \mathbf{a}_n si ha, essendo \mathbf{b} un vettore qualunque di S_n :

$$2AH(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n)\mathbf{b} = \underset{2}{\mathbf{a}} \underset{n-2}{\times} \mathbf{b} = \underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b} = E(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{b})$$

e poichè

$$2AH(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n) = H(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n) - H(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n-1}) = \gamma,$$

è

$$\gamma \mathbf{b} = E(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-2} \mathbf{b})$$

come appunto dicevamo allora.

Dunque l'assiale γ in parola è $\underset{n-2}{\mathbf{a}} \wedge$.

L' $(n - 2)$ -vettore (multiplo in generale)

$$\mathbf{a}_{n-2} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{n-2} + \dots + \mathbf{a}_{n-2})$$

sarà detto l' $(n - 2)$ -vettore dell' omografia $A\alpha$ ed anche dell' omografia α e l' indicheremo con $V\alpha$. In generale quindi si tratterà di un $(n - 2)$ -vettore multiplo.

Si dirà rango di questo $(n - 2)$ -vettore il rango di $A\alpha$ e se $A\alpha$ è semplice il suo rango sarà $n - 2$ e viceversa.

Nello spazio ordinario, $n = 3$, l' $(n - 2)$ -vettore di una qualunque omografia α diventa semplicemente un vettore ed è il ben noto vettore dell' assiale di α , ossia il vettore di α che si suole indicare appunto con $V\alpha$. Per questa ragione ho conservato lo stesso simbolo V che con maggiore espressività si potrebbe indicare con V_{n-2} .

Per la diade si avrà $VH(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)$; anche in S_3 si ha, come è noto, $VH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ (1).

Se n è dispari il rango di $A\alpha$ è almeno uno e quindi l' $(n - 2)$ -vettore di α è almeno di rango 1.

Con più esattezza, per quanto abbiamo visto al n.º 2 sul rango delle assiali e più precisamente sulle direzioni nulle delle assiali, ciò che equivale, possiamo dire che negli spazi di indice pari gli $(n - 2)$ -vettori sono di rango nullo o pari fino ad $n - 2$, negli spazi di indice dispari sono di rango dispari che può variare da 1 a $n - 2$.

Potendosi scrivere $\alpha = D\alpha + A\alpha$, ove $D\alpha$ è la dilatazione di α , abbiamo anche l'altra espressione

$$\alpha = D\alpha + \mathbf{a}_{n-2} \wedge = D\alpha + V\alpha \wedge,$$

che estende formalmente e concettualmente allo spazio S_n la formula analoga dello spazio S_3 .

Come conseguenza della linearità dell' operatore A per le omografie in S_n , ne risulta la linearità dell' operatore V che applicato ad una omografia dà il suo $(n - 2)$ -vettore.

Allora posta l' omografia α sotto la forma:

$$\alpha = H(\mathbf{i}_1, \alpha\mathbf{i}_1) + \dots + H(\mathbf{i}_n, \alpha\mathbf{i}_n),$$

essendo $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$ una n -pla fondamentale di S_n , si ha subito

$$2V\alpha = \mathbf{i}_1 \wedge \alpha\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \wedge \alpha\mathbf{i}_2 + \dots + \mathbf{i}_n \wedge \alpha\mathbf{i}_n,$$

(1) Cfr. *Analisi vettoriale generale*, Vol. I, C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, loc. cit., pag. 86.

la quale è una formula del tutto analoga a quella dello spazio S_3 ; qui però i singoli addendi sono $(n-2)$ -vettori semplici, supplementari dei bivettori semplici rappresentabili dalle coppie di vettori i_r, α_i , che determinano le diadi.

In tal modo l' $(n-2)$ -vettore di una omografia α , che in generale è multiplo, è decomposto nella somma di $n(n-2)$ -vettori semplici, servendosi di una n -pla fondamentale.

§ II. Rappresentazioni cartesiane.

16. Consideriamo nello spazio S_n una n -pla di vettori fondamentali $i_1 \dots i_n$ che determinerà l'ordinamento positivo delle n -ple di vettori dello spazio.

Essa, in sostanza, costituisce l' n -versore i_n dello spazio S_n che determina il verso in S_n , in modo analogo a quello per cui si dice che un versore i determina il verso sulle rette ad esso parallele.

Con i vettori di $(i_1 \dots i_n)$ si possono determinare $\frac{n(n-1)}{2}$ bivettori fondamentali (biversori) combinandoli a due a due, senza ripetizione, e facendo in modo che le disposizioni dei due indici siano di classe pari.

Sia dato il bivettore qualunque a rappresentabile con la coppia di vettori (a, b) . Si chiamano componenti (cartesiane) di a rispetto alla n -pla scelta, le proiezioni di (a, b) sui piani dei bivettori fondamentali accennati. Sia (i_1, i_2) il primo di questi e diciamo a_1, a_2, b_1, b_2 rispettivamente le proiezioni di a e b , sugli assi determinati dai versori i_1, i_2 ; la proiezione di (a, b) sul piano (i_1, i_2) sarà l'area del parallelogramma proiezione su (i_1, i_2) del parallelogramma costruito su a e b portati ad esempio a partire dall'origine; essa proiezione come è noto è data da

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ossia dalla differenza

$$a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Così si ha il valore algebrico della componente cartesiana di a secondo il biversore (i_1, i_2) , che indicheremo con a_{12} .

In generale la componente cartesiana a_{rs} di a sarà la proiezione di (a, b) su (i_r, i_s) ed è data da

$$a_{rs} = a_r b_s - a_s b_r.$$

È da notare subito che è

$$a_{rs} = - a_{sr}.$$

Le condizioni geometriche di uguaglianza di due bivettori mediante l'uguaglianza dei moduli, delle giaciture e dei versi vengono tradotte analiticamente mediante il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché due bivettori siano uguali è che siano rispettivamente uguali le $\frac{n(n-1)}{2}$ componenti rispetto ad un riferimento cartesiano qualsiasi (1).

Se calcoliamo le componenti cartesiane a_{rs} dell'assiale $2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ rispetto alla scelta n -pla fondamentale, in corrispondenza della quale è

$$\mathbf{a} = \sum_1^n a_r \mathbf{i}_r, \quad \mathbf{b} = \sum_1^n b_s \mathbf{i}_s,$$

si scorge che esse coincidono con le componenti cartesiane di \mathbf{a} secondo i bivettori coordinati e testè calcolate.

Invero si ha

$$\begin{aligned} a_{rs} &= 2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s = (\mathbf{a} \times \mathbf{i}_r)(\mathbf{b} \times \mathbf{i}_s) - (\mathbf{b} \times \mathbf{i}_r)(\mathbf{a} \times \mathbf{i}_s) \\ &= a_r b_s - a_s b_r = a_{rs}. \end{aligned}$$

In estensione di ciò, diremo componenti cartesiane a_{rs} di un bivettore multiplo, le componenti cartesiane dell'assiale multipla corrispondente; esse soddisfano pure alla relazione

$$a_{rs} = - a_{sr}$$

e, disposte secondo una matrice quadrata, questa risulta gobba; i suoi elementi si otterranno sommando gli elementi corrispondenti delle matrici gobbe delle componenti cartesiane corrispondenti ai bivettori semplici secondo cui si decompone il bivettore multiplo.

Tornando al bivettore semplice $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ osserviamo che per le posizioni fatte è:

$$2AH(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2AH\left(\sum_1^n a_r \mathbf{i}_r, \sum_1^n b_s \mathbf{i}_s\right) = \sum_{(rs)} (a_r b_s - a_s b_r) \cdot 2AH(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s),$$

(1) Cfr. E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, loc. cit., pag. 7. In questa dimostrazione si fa uso delle componenti covarianti e contravarianti del bivettore che nel caso nostro coincidono essendo gli assi ortogonali.

ove la sommatoria è estesa a tutte le combinazioni degli indici 1, 2, ... n a due a due.

Poichè all'assiale sotto il segno di sommatoria corrisponde la componente del bivettore (\mathbf{a}, \mathbf{b}) secondo il piano $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$, ossia secondo il bivettore $(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s)$, per la precedente relazione si ha che il bivettore $\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ può considerarsi come la somma delle sue componenti secondo i bivettori fondamentali coordinati e si può scrivere perciò

$$(1) \quad \mathbf{a} = \sum_{(rs) \atop 2} a_{rs} (\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s) = \sum_{(rs) \atop 2} a_{rs} \mathbf{i}_{rs},$$

indicando con \mathbf{i}_{rs} il bivettore determinato dai due vettori $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_s$.

La (1) si dirà, analogamente a quanto avviene per i vettori, *rappresentazione cartesiana del bivettore semplice* \mathbf{a} .

Per un bivettore multiplo, se ne potrà ottenere la rappresentazione cartesiana in forma analoga considerandolo decomposto nella somma di bivettori semplici.

Si può notare che le componenti cartesiane a_{rs} secondo gli $\frac{n(n-1)}{2}$ piani coordinati del bivettore \mathbf{a} e calcolate sopra, sono date da

$$a_{rs} = \mathbf{a} \times \mathbf{i}_{rs},$$

essendo \mathbf{i}_{rs} il bivettore corrispondente al piano di \mathbf{i}_r e \mathbf{i}_s .

Si può quindi anche scrivere, analogamente a quanto avviene per i vettori,

$$\mathbf{a} = \sum_{(rs) \atop 2} \mathbf{a} \times \mathbf{i}_{rs} \cdot \mathbf{i}_{rs},$$

la sommatoria essendo estesa agli $\frac{n(n-1)}{2}$ bivettori fondamentali.

Questa si dirà pure come per i vettori *espressione cartesiana del bivettore* \mathbf{a} .

Servendosi della (1) del n. 7 si può verificare che presi quattro indici h, k, l, m , percorrenti la permutazione 1, 2, ... n , fra le componenti cartesiane di un bivettore semplice aventi quegli indici passa l'identità:

$$a_{hk} \cdot a_{lm} + a_{hl} \cdot a_{mk} + a_{hm} \cdot a_{kl} = 0 \quad (1).$$

Per $n = 3$ questa è sempre verificata; non ha luogo per i bivettori multipli.

(1) Cfr. E. CARTAN, loc. cit., pag. 11.

17. Veniamo ora a stabilire le espressioni cartesiane degli altri enti ed operazioni studiate nel § I.

Incominciamo col prodotto scalare di due bivettori semplici o multipli. Avendosi per questi le espressioni cartesiane

$$\mathbf{a} = \sum_2 \sum_{(rs)} a_{rs} \mathbf{i}_{rs}, \quad \mathbf{b} = \sum_2 \sum_{(rs)} b_{rs} \mathbf{i}_{rs},$$

dalle proprietà studiate discende immediatamente che è:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_2 \sum_{(rs)} a_{rs} b_{rs},$$

con la quale si ha l'espressione cartesiana del prodotto scalare di due bivettori (semplici o multipli).

Come si nota, essa è del tutto analoga a quella dei vettori.

18. Determiniamo ora l'espressione cartesiana del prodotto vettoriale interno

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{u}.$$

Posto $\mathbf{w} = \sum_r w_r \mathbf{i}_r$ si ha

$$w_r = \mathbf{w} \times \mathbf{i}_r$$

e per l'osservazione fatta alla fine del n. 10, si ha che questa componente w_r è anche uguale al prodotto scalare di \mathbf{a} per il bivettore $\mathbf{b} = (\mathbf{u}, \mathbf{i}_r)$.

Le componenti cartesiane del bivettore \mathbf{b} sono evidentemente in parte nulle riducendosi ad $n - 1$ quelle diverse da zero; precisamente queste sono:

$$b_{sr} = u_s \quad s = 1, 2, \dots, n \text{ e con } s \neq r.$$

Allora si ha subito:

$$w_r = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_2 \sum_{s=1}^n a_{sr} u_s;$$

quindi l'espressione cartesiana di \mathbf{w} è:

$$\mathbf{w} = \sum_{r=1}^n \left(\sum_2 \sum_{s=1}^n a_{sr} u_s \right) \mathbf{i}_r.$$

Espressione analoga vale nel caso che \mathbf{a} sia un bivettore multiplo.

19. Come abbiamo fatto per i bivettori, si possono ottenere le componenti cartesiane dei plurivettori, calcolando con opportune estensioni le proiezioni di questi plurivettori sugli spazi coordinati fondamentali determinati dai vettori $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$, opportunamente raggruppati.

Per un p -vettore semplice con $p \leq n$, le componenti cartesiane distinte sono $\binom{n}{p}$ e sono date dai minori di ordine p estratti dalla matrice a p linee ed n colonne formata con le componenti cartesiane dei p vettori che servono a determinare il p -vettore.

A noi interessa accennare in particolare alla *rappresentazione cartesiana dell' $(n-2)$ -vettore \mathbf{a} , supplementare del bivettore \mathbf{a}_2 avente per espressione cartesiana*

$$\mathbf{a}_2 = \sum_{(s_1, s_2)} a_{s_1 s_2} \mathbf{i}_{s_1 s_2},$$

ove (s_1, s_2) sono le combinazioni degli indici $1, 2, \dots, n$ a due a due.

Si riesce facilmente a vedere che in corrispondenza si ha

$$\mathbf{a}_{n-2} = \sum_{(s_1, s_2)(r_1, r_2, \dots, r_{n-2})} a_{s_1 s_2} \mathbf{i}_{r_1 r_2 \dots r_{n-2}},$$

ove (s_1, s_2) ha il significato detto sopra, $(r_1 \dots r_{n-2})$ sono le combinazioni degli indici $1, 2, \dots, n$ ad $n-2$ ad $n-2$; $s_1, s_2, r_1, \dots, r_{n-2}$, insieme, sono permutazioni di classe pari degli indici medesimi $1, 2, \dots, n$ e infine gli $\mathbf{i}_{r_1 \dots r_{n-2}}$ sono gli $\frac{n(n-1)}{2}$ $(n-2)$ -vettori fondamentali.

20. Prendiamo ora l'espressione del prodotto vettoriale esterno $\mathbf{a} \wedge \mathbf{u}$ studiato al n. 12.

Come è noto, le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u})$ sono i minori di ordine $n-1$ che si ricavano dalla matrice di $n-1$ linee ed n colonne formata con le componenti cartesiane dei vettori $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u}$; le stesse componenti varranno quindi anche per $\mathbf{a} \wedge \mathbf{u}$, nel caso di \mathbf{a} semplice.

Oppure, se sono date le componenti cartesiane di \mathbf{a} invece di quelle dei vettori che lo costituiscono, nel qual caso le considerazioni valgono anche se esso è multiplo, è facile convincersi che *dette componenti sono uguali anche a quelle del bivettore supplementare \mathbf{a}_2* ; allora ricordando che è (n. 12)

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{u},$$

si ottiene l'espressione cartesiana di $\mathbf{a} \wedge \mathbf{u}$ applicando la formula che dà l'espressione cartesiana di $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{u}$ (n. 18).

21. Il prodotto misto $\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ nel caso di \mathbf{a} semplice essendo uguale a $\mathbf{E}(\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$, per cose note, avrà come espressione cartesiana il determinante di ordine n formato con le componenti cartesiane di $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \dots \mathbf{a}_n, \mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Ciò vale se \mathbf{a} è determinato dagli $n - 2$ vettori $\mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$; se invece è dato senz'altro mediante le sue componenti cartesiane, nel qual caso le considerazioni valgono anche se esso è multiplo, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \mathbf{a} \times \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n a_{s_1 s_2} u_{s_2} v_{s_1} = \\ &= \sum_{(s_1 s_2)} a_{s_1 s_2} b_{s_1 s_2} = \sum_{(s_1 s_2) (r_1 \dots r_{n-2})} a_{r_1 \dots r_{n-2}} b_{s_1 s_2}, \end{aligned}$$

essendo $b_{s_1 s_2}$ le componenti cartesiane del bivettore semplice $\mathbf{b} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $a_{r_1 \dots r_{n-2}}$ quelle di \mathbf{a} che sono numericamente uguali alle componenti $a_{s_1 s_2}$ del bivettore supplementare \mathbf{a} .

Osserviamo che $\mathbf{a} \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ viene ad essere il prodotto scalare di due $(n - 2)$ -vettori dei quali il secondo è semplice; ma esso è anche uguale al prodotto scalare dei bivettori supplementari, poichè l'espressione cartesiana di questo è ancora $\sum_{(s_1 s_2)} a_{s_1 s_2} b_{s_1 s_2}$.

Ne segue che è

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{v},$$

cioè i due segni \wedge e \times quando si seguono si possono scambiare.

22. Prendiamo il prodotto vettoriale

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2.$$

Se diciamo a_{rs} le componenti cartesiane del bivettore $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, per quanto è stato detto in precedenza si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \sum_{(s_1 s_2) (r_1 \dots r_{n-2})} a_{s_1 s_2} i_{r_1 \dots r_{n-2}}$$

ove i simboli hanno il significato già detto sopra.

23. Veniamo infine alla espressione cartesiana dell' $(n - 2)$ -vettore di una omografia α .

Essendo (n. 15)

$$2V\alpha = (\mathbf{i}_1 \wedge \alpha \mathbf{i}_1) + (\mathbf{i}_2 \wedge \alpha \mathbf{i}_2) + \dots + (\mathbf{i}_n \wedge \alpha \mathbf{i}_n),$$

posto

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{i}_1 &= a_{11} \mathbf{i}_1 + \dots + a_{1n} \mathbf{i}_n \\ \alpha \mathbf{i}_2 &= a_{21} \mathbf{i}_1 + \dots + a_{2n} \mathbf{i}_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha \mathbf{i}_n &= a_{n1} \mathbf{i}_1 + \dots + a_{nn} \mathbf{i}_n, \end{aligned}$$

si ottiene subito, per le cose dette

$$2V\alpha = \sum_{(s_1 s_2)} (a_{s_1 s_2} - a_{s_2 s_1}) (\mathbf{i}_{s_1} \wedge \mathbf{i}_{s_2}) = \sum_{(s_1 s_2)(r_1 \dots r_{n-2})} (a_{s_1 s_2} - a_{s_2 s_1}) \mathbf{i}_{r_1 \dots r_{n-2}},$$

ove i simboli hanno il significato noto.

Per $n = 3$ si ottiene la formula ben nota

$$2V\alpha = (a_{23} - a_{32})\mathbf{i} + (a_{31} - a_{13})\mathbf{j} + (a_{12} - a_{21})\mathbf{k},$$

ove \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} sono i vettori fondamentali.

In altri lavori che saranno pubblicati nei « Rendiconti della Reale Acc. dei Lincei » svilupperò l'Analisi plurivettoriale, estendendo e studiando in particolare gli operatori *div*, *rot*, *Rot* dello spazio ordinario (4).

Qui mi limito a fare applicazioni cinematiche del calcolo plurivettoriale svolto.

§ III. Cinematica dei sistemi rigidi in uno spazio S_n .

24. Moto di un corpo rigido con un punto fisso. — Sia O il punto fisso, M ed N due punti qualsiasi del corpo, naturalmente ad n dimensioni; per la rigidità dovremo avere durante il movimento

$$(N - M)^2 = \text{cost.}$$

e quindi, derivando rispetto al tempo:

$$(1) \quad \left(\frac{dN}{dt} - \frac{dM}{dt} \right) \times (N - M) = 0;$$

questa esprime una ben nota proprietà delle velocità dei punti di un corpo rigido in movimento.

Se consideriamo N vicinissimo ad M e diciamo \mathbf{v} la velocità di M , la precedente si può scrivere volendo:

$$(1') \quad d\mathbf{v} \times dM = 0.$$

Osserviamo che la corrispondenza fra i vettori $M - O$ nel corpo e le velocità dei punti M , $\frac{dM}{dt}$, è lineare giacchè se è:

$$M_3 - O = (M_1 - O) + (M_2 - O)$$

(4) Cfr. M. MANARINI, *Rotazionale di un vettore negli spazi S_n* , « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1° sem., 1933-XI, pag. 706-712.

si ha

$$\frac{dM_3}{dt} = \frac{dM_1}{dt} + \frac{dM_2}{dt}$$

e se è $M_2 - O = m(M_1 - O)$, con m numero reale, si ha $\frac{dM_1}{dt} = m \frac{dM_2}{dt}$.

Questa corrispondenza è perciò un'omografia vettoriale e indicandola con α , possiamo scrivere

$$(2) \quad \mathbf{v} = \frac{dM}{dt} = \alpha(M - O);$$

si ha subito

$$(3) \quad \frac{dN}{dt} - \frac{dM}{dt} = \alpha(N - O) - \alpha(M - O) = \alpha(N - M)$$

che, per N vicinissimo a M , diviene

$$(3') \quad d\mathbf{v} = \alpha dM.$$

Per le (1) e (3) risulta per ogni coppia di punti M ed N collegati col corpo

$$\alpha(N - M) \times (N - M) = 0,$$

il che assicura che α è un'omografia assiale, essendo M ed N arbitrari nel corpo.

L'omografia α è la cosiddetta omografia di rotazione ⁽¹⁾; essendo un'assiale, indicando con ω_{n-2} il suo $(n-2)$ -vettore che in generale sarà multiplo, possiamo scrivere (n. 15)

$$(4) \quad \alpha = \omega_{n-2} \wedge$$

e la (2) può mettersi sotto la forma

$$(5) \quad \frac{dM}{dt} = \omega_{n-2} \wedge (M - O) = (-1)^{n-1} (O - M) \wedge \omega_{n-2}$$

(cfr. n. 14) la quale è del tutto analoga a quella dello spazio S_3 dove l' $(n-2)$ -vettore ω_{n-2} diventa il vettore ω che definisce la velocità angolare.

Nello spazio S_n si può dire che il corpo avente il punto fisso O è animato in

(1) Per un'altra maniera di introdurre l'omografia di rotazione cfr.: *Analisi vettoriale Generale*, loc. cit., Vol. II, Parte II (BOGGIO), pag. 149; BURALI-FORTI e BOGGIO, *Espaces Courbes ecc.* (loc. cit.), pag. 244, ove l'assiale α è messa in relazione con i « coefficienti di Rotazione » che il RICCI considerò nel suo *Calcolo differenziale assoluto* (cfr. in proposito T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, Alberto Stock, Roma, 1925, pag. 284 e *Analisi Vett. Gen.*, loc. cit., Vol. II, BOGGIO, pag. 265); E. CARTAN, loc. cit., pag. 19; C. AGOSTINELLI in loc. cit. più avanti. Esistono su tali argomenti antichi lavori del DE FRANCESCHI, pubblicati nei « Rend. della R. Acc. delle Scienze di Napoli », trattati, s'intende, con il calcolo cartesiano. Cfr. ancora: GEORGES TIERCHY, *Sur les éléments immobiles dans une rotation dans l'Espace à n dimensions*, « L'Enseignement Mathématique », 1926, XXV année, nn. 1-2-3, pag. 11-21.

ogni istante da una « rotazione » istantanea rappresentata dall' $(n - 2)$ -vettore-applicato $[0, (-1)^{n-1} \cdot \omega]_{n-2}$.

La rotazione si dice *semplice* quando l' $(n - 2)$ -vettore ω_{n-2} è semplice e rappresentabile quindi da una $(n - 2)$ -pla di vettori; in tal caso i punti che sono nello spazio S_{n-2} condotto per O e parallelo ad esso, hanno velocità nulla; ed allora si dice che la « velocità angolare » è uguale al modulo di quel $(n - 2)$ -vettore ω_{n-2} e che la rotazione istantanea *si compie intorno a quell' S_{n-2}* .

Per $n = 3$, questo S_{n-2} esiste sempre ed è una retta: *l'asse istantaneo di rotazione*.

Potendosi in generale considerare (n. 15) ω_{n-2} come somma di n $(n - 2)$ -vettori semplici mediante la relazione

$$\omega_{n-2} = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_1 \wedge \alpha \mathbf{i}_1 + \dots + \mathbf{i}_n \wedge \alpha \mathbf{i}_n),$$

ove $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$ è una n -pla fondamentale, abbiamo che, in generale la « rotazione » del corpo con un punto fisso O può in ogni istante considerarsi sempre come la somma di n rotazioni semplici intorno agli n spazi ad $n - 2$ dimensioni condotti per O e determinati dagli $(n - 2)$ -vettori semplici $\mathbf{i}_r \wedge \alpha \mathbf{i}_r$ ($r = 1, \dots, n$).

Oppure, riferendosi all'espressione cartesiana di ω_{n-2} , la rotazione può sempre pensarsi somma di $\binom{n}{2}$ rotazioni semplici intorno agli $\binom{n}{2}$ S_{n-2} coordinati determinati dal riferimento $(O, \mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n)$.

Se l'indice n dello spazio è dispari, l' $(n - 2)$ -vettore multiplo ω_{n-2} è almeno di rango 1, ossia l'assiale $\omega_{n-2} \wedge$ è degenerare almeno di prima specie; quindi *esiste almeno un vettore \mathbf{u} tale che sia*

$$\omega_{n-2} \wedge \mathbf{u} = 0;$$

tutti i punti dell'asse per O e parallelo ad \mathbf{u} hanno velocità nulla.

Se $\omega_{n-2} \wedge$ non è degenerare di specie superiore, esso è l'asse istantaneo di rotazione per il corpo; ma quest'asse non è sufficiente come in S_3 a determinare il moto, cioè a calcolare ad es. le direzioni delle velocità dei punti del corpo.

Se n è pari e se ω_{n-2} è di rango zero, non esistono punti di velocità nulla all'infuori di O .

Questo si verifica ad es. nello spazio S_2 .

Per quanto abbiamo visto al n.º 2 possiamo dire che se n è dispari o pari l'assiale $\omega_{n-2} \wedge$ potrà avere rispettivamente $1, 3, \dots, n-2$ oppure $0, 2, \dots, n-2$ direzioni nulle distinte, ciò che in corrispondenza porta l'esistenza di uno spazio di dimensioni dispari $1, 3, \dots, n-2$ o di dimensioni pari $0, 2, \dots, n-2$ tirato da O i cui punti stanno fermi e quindi intorno ai quali ruoterà il corpo.

Per un caso particolare trattato cartesianamente si può confrontare la Nota del TIERCY già citata.

Osserviamo che per quanto vedemmo al n. 12 si può far uso del bivettore ω_2 supplementare di ω_{n-2} e porre:

$$(4') \quad \alpha = \omega_2 \dot{\times}$$

adoperando cioè l'operazione di prodotto vettoriale interno.

Quindi si può anche scrivere

$$(5') \quad \frac{dM}{dt} = \omega_2 \dot{\times} (M - O),$$

in modo che la rotazione istantanea può essere rappresentata anche dal bivettore ω_2 , in generale multiplo, e se si vuole dalla somma dei bivettori semplici corrispondenti alle assiali $2AH(\mathbf{i}_r, \alpha\mathbf{i}_r)$.

25. Formule di Poisson. Moto di un corpo libero. Velocità di trascinamento. — Se $\mathbf{i}_1 \dots \mathbf{i}_n$ costituiscono una n -pla fondamentale collegata con un corpo mobile, dalla formula (5) si ha in particolare, ponendo $M_r - O = \mathbf{i}_r$,

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{i}_r}{dt} = \omega_{n-2} \wedge \mathbf{i}_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

ove ω_{n-2} definisce lo stato cinetico di rotazione di un corpo fittizio che si muove intorno ad un punto fisso mantenendosi costantemente parallelo al corpo dato.

Se poi \mathbf{u} è un vettore costante nel corpo si ha, sempre per la (5), ponendovi $M - O = \mathbf{u}$:

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \omega_{n-2} \wedge \mathbf{u}.$$

Qualora invece il vettore \mathbf{u} sia variabile anche nel corpo cioè variabile rispetto all'osservatore fisso O e all'osservatore (O_1) collegato al corpo mobile

si ha, ragionando come in S_3 (1),

$$(8) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_i + \boldsymbol{\omega}_{n-2} \wedge \mathbf{u},$$

ove $\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_i$ è la derivata di \mathbf{u} calcolata dall'osservatore mobile col corpo.

Si ricavano allora subito le due formule fondamentali per la cinematica in S_n , analoghe a quelle di S_3 .

Per la velocità di un punto M appartenente ad un corpo libero che si muove (*velocità di trascinamento*) essendo O_i un punto collegato con questo, si ha

$$(9) \quad \frac{dM}{dt} = \frac{dO_i}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{n-2} \wedge (M - O_i)$$

e per la velocità del punto M , mobile rispetto ai due osservatori (O) ed (O_i) in moto fra loro, si ha:

$$(10) \quad \frac{dM}{dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right)_i + \left\{ \frac{dO_i}{dt} + \boldsymbol{\omega}_{n-2} \wedge (M - O_i) \right\}$$

che esprime il *teorema della composizione della velocità*.

Per indagare sulla generalizzazione delle formule riguardanti l'accelerazione, bisogna introdurre regole per la derivazione dei plurivettori, ciò che si può fare, sempre pensando all'intimo legame di questi con le omografie assiali.

Osserviamo che la (9) esprime un teorema il cui enunciato è del tutto analogo a quello che si suol dare nello spazio ordinario (2): basta sostituirvi il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di S_3 con l' $(n-2)$ -vettore $\boldsymbol{\omega}_{n-2}$. E sempre in relazione alla formula (9) osserviamo che l'assiale $\boldsymbol{\omega}_{n-2} \wedge$ può essere degenerare o no (quest'ultimo caso potrà avvenire soltanto se n è pari) e se è degenerare, a seconda del suo rango, esisterà un S_1 (retta), oppure un S_2 (piano) ecc., fino alla possibilità d'esistenza di un S_{n-2} tale che tutti i punti contenuti in esso e collegati col corpo hanno soltanto velocità di traslazione.

Possiamo poi anche affermare, in base a quanto dicemmo nel n.º precedente, che a seconda della parità o disparità dell'indice n dello spazio S_n , detti spazi di punti con sola velocità di traslazione sono rispettivamente di dimensioni pari o dispari.

Se questa velocità poi risulta parallela a questi stessi spazi si tratta allora dell'estensione dell'asse istantaneo elicoidale considerato in S_3 .

(1) Cfr. P. BURGATTI, *Lezioni di Mecc. razionale*, Zanichelli, Bologna, Cap. III.

(2) P. BURGATTI, *Lezioni di Meccanica razionale*, loc. cit., Cap. III, n.º 2.

Se ω_{n-2} è di rango $n-2$, ossia è un $(n-2)$ -vettore semplice, si avrà uno stato cinetico elicoidale intorno all' S_{n-2} parallelo ad ω_{n-2} condotto per un punto O_1 del luogo dei punti del corpo che in quell'istante hanno soltanto velocità di traslazione.

Se $\omega_{n-2} \wedge$ non è un'assiale degenera ossia è di rango zero, il che può avvenire soltanto se n è pari, esiste allora un punto C ed uno solo che ha velocità nulla. Invero, in tal caso (n. 3) anche l'assiale $(\omega_{n-2} \wedge)^{-1}$ non è degenera e, se diciamo C questo punto di velocità nulla, esso è dato da

$$(11) \quad 0 = \frac{dO_1}{dt} + \omega_{n-2} \wedge (C - O_1),$$

da cui si ricava

$$(11') \quad C - O_1 = -(\omega_{n-2} \wedge)^{-1} \frac{dO_1}{dt}.$$

Sottraendo la (11) dalla (9) abbiamo

$$\frac{dM}{dt} = \omega_{n-2} \wedge (M - C),$$

la quale esprime che lo stato cinetico del corpo è una rotazione intorno a C definita da un $(n-2)$ -vettore multiplo ω_{n-2} il quale può sempre pensarsi somma di n $(n-2)$ -vettori semplici; quindi detta rotazione risulta in ogni istante la somma di n rotazioni semplici intorno ad n S_{n-2} passanti per C (⁴).

(⁴) In una Memoria apparsa in due puntate negli « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », Vol. LXVII, 1932, avente per titolo: *Sul movimento dei sistemi rigidi in uno spazio di n dimensioni*, il dott. CATALDO AGOSTINELLI tratta, in maniera diversa, lo stesso argomento di Cinematica ispirandosi a fondamenti posti dal BOGGIO. Egli afferma che l'omografia di rotazione, che in sostanza è la nostra assiale $\alpha = \omega_{n-2} \wedge$, è per n pari sempre propria e da ciò ne trae la sempre esistenza in un S_n pari del centro istantaneo di rotazione C ; considerato anche da noi.

Ora ciò non è vero poichè quell'omografia può essere anche degenera come lo mostrano casi particolari di movimento e la possibilità di poterne costruire arbitrariamente di tali.

L'affermazione inesatta dell'AGOSTINELLI dipende da un'altra errata affermazione dello stesso Autore. Invero Egli afferma che per una assiale « sarà l' I_n (invariante ennesimo) differente od uguale allo zero a seconda che l' S_n in cui si muove il sistema è di un numero pari o dispari di dimensioni ». Invece se n è dispari ciò è senz'altro vero, ma se n è pari, l' I_n dell'assiale può essere nullo e quindi l'assiale considerata dall'AGOSTINELLI può essere anche degenera.

Ne consegue che anche le altre deduzioni trattate dall'AGOSTINELLI nel caso di n pari, e fatte conseguire dal fatto di essere l'assiale considerata sempre propria non sono vere che allorquando si faccia esplicita ipotesi che quell'assiale sia effettivamente propria.

26. Casi particolari di movimento in un S_4 . — In S_4 la formula fondamentale (9) che dà la velocità di trascinamento diviene

$$(9') \quad \frac{dM}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \omega_2 \wedge (M - O_1),$$

ove ω_2 è un bivettore semplice o multiplo e potrà essere di rango 0 o 2.

Lo stato cinetico di rotazione potrà avvenire intorno ad un punto, nel primo caso, oppure intorno ad un piano, nel secondo caso.

Veniamo ora a trattare i seguenti casi particolari di movimento in S_4 che possono servire a mettere meglio in evidenza l'efficacia del metodo assoluto seguito.

Possiamo prospettarci le seguenti due questioni particolari:

1) Studio del moto di un corpo parallelamente ad un S_2 , equivalente allo studio del moto di una figura (s_2) a due dimensioni nel suo S_2 .

2) Studio del moto di un corpo parallelamente ad un S_3 , equivalente allo studio del moto di una figura (s_3) a tre dimensioni nel suo S_3 .

Consideriamo il primo movimento; sia \mathbf{a}_2 un bivettore semplice che definisce la giacitura (2-dimensionale) dell' S_2 entro cui avviene il movimento della figura piana (s_2). Sia \mathbf{u}_2 il bivettore supplementare di \mathbf{a}_2 il quale quindi risulterà semplice e totalmente ortogonale ad \mathbf{a}_2 e poniamo che possa essere rappresentabile mediante la coppia di vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$.

Nel nostro caso vale la formula fondamentale (9') essendo M ed O_1 due punti qualsiasi di (s_2).

Moltiplicandola scalarmente per \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , tenendo conto dell'ipotesi, abbiamo

$$\omega_2 \wedge (M - O_1) \times \mathbf{u}_1 = 0,$$

$$\omega_2 \wedge (M - O_1) \times \mathbf{u}_2 = 0,$$

ossia

$$\mathbf{u}_1 \times \omega_2 \wedge (M - O_1) = 0,$$

$$\mathbf{u}_2 \times \omega_2 \wedge (M - O_1) = 0,$$

e ricordando il n. 14, oppure la validità della permutabilità dei due segni \times e \wedge , abbiamo

$$(M - O_1) \times \omega_2 \wedge \mathbf{u}_1 = 0,$$

$$(M - O_1) \times \omega_2 \wedge \mathbf{u}_2 = 0;$$

per l'arbitrarietà di $M - O_1$ risulta allora

$$\omega_2 \wedge \mathbf{u}_1 = 0, \quad \omega_2 \wedge \mathbf{u}_2 = 0,$$

ossia l'assiale $\omega_2 \wedge$ è degenerare di seconda specie e ω_2 è un bivettore di rango 2. Tenendo presente che siamo in uno spazio S_4 , possiamo concludere che $\omega_2 \wedge$ è un'assiale semplice e ω_2 un bivettore semplice.

Dunque: In uno spazio S_4 , nel moto di un corpo parallelamente ad un S_2 , lo stato cinetico di rotazione è istante per istante definito da un bivettore semplice ossia è in ogni istante una rotazione semplice (n. 25).

Inoltre ω_2 risulta parallelo ad \mathbf{u} e quindi anche totalmente ortogonale al piano S_2 . Perciò la rotazione istantanea avviene intorno ad un S_2' totalmente ortogonale a S_2 .

Sia C il punto di S_2 che per la figura piana (s_2) ha velocità nulla; esso è definito dalla relazione

$$0 = \frac{dO_1}{dt} + \omega_2 \wedge (C - O_1).$$

Per quanto vedemmo al n. 12, $\omega_2 \wedge (C - O_1)$ equivale al vettore che si ottiene girando $C - O_1$ in S_2 di un angolo retto nel senso del bivettore semplice supplementare di ω_2 e moltiplicandolo quindi per $\omega = \text{mod } \omega_2$; usando l'operatore i (n. 12), abbiamo come in S_3 :

$$C - O_1 = \frac{1}{\omega} i \frac{dO_1}{dt},$$

che ci permette la costruzione di C .

Veniamo ora allo studio del moto del corpo a tre dimensioni (s_3) che si muove nel suo S_3 . Sia \mathbf{n} il versore di S_4 normale ad S_3 che definisce l'orientamento di S_3 . Dalla (9') moltiplicando scalarmente per \mathbf{n} , ricaviamo come in precedenza

$$\omega_2 \wedge \mathbf{n} = 0,$$

da cui risulta che ω_2 è in tal caso un bivettore almeno di rango 1.

D'altra parte il caso in esame non è altro che il moto ordinario di un corpo nello spazio S_3 , onde per quanto insegna la cinematica classica, in questo S_3 (non in S_4) possiamo scrivere, essendo M ed O_1 due punti qualsiasi di (s_3),

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \omega \wedge (M - O_1),$$

ove ω è il vettore che definisce lo stato cinetico di rotazione di (s_3) in S_3 (non in S_4) e il prodotto vettoriale che vi figura è quello che ordinariamente si adopera nell' S_3 . Per tutti i punti M_1 di questo S_3 , che si trovano sull'asse per O_1 parallelo ad ω e per i quali si ha

$$M_1 - O_1 \wedge \omega = 0,$$

abbiamo

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{dO_1}{dt};$$

tenendo presente ciò dalla (9'), per il vettore ω di S_3 testè considerato abbiamo

$$\omega \wedge \omega = 0,$$

con

$$\omega \times \mathbf{n} = 0.$$

Con ciò si vede che $\omega \wedge$ è omografia assiale degenera di seconda specie ed ha per direzioni nulle il vettore costante \mathbf{n} esterno all' S_3 e perpendicolare ad esso ed il vettore ω di S_3 variabile da istante a istante.

Perciò ω è anche in questo caso un bivettore semplice ed il moto del corpo (s_3) in S_4 è istante per istante una rotazione semplice.

Dunque: in uno spazio S_4 , il moto di un corpo (s_3) nel suo S_3 è istante per istante una rotazione semplice, definita da un bivettore semplice che è parallelo al vettore costante \mathbf{n} normale all' S_3 ed al vettore ω variabile col tempo che in S_3 definisce lo stato cinetico di rotazione del corpo (s_3) . L' S_2 determinato dal bivettore ω condotto per O_1 intorno al quale ruota in ogni istante il corpo (s_3) (essendo inoltre soggetto alla traslazione $\frac{dO_1}{dt}$) è normale allo spazio S_3 ed è il luogo dei punti di (s_3) , o collegati con esso, che hanno velocità di rotazione nulla avendo velocità di traslazione uguale a quella di O_1 .

Se si considera un punto O_2 di (s_3) appartenente all'asse istantaneo elicoidale del moto di (s_3) nel suo S_3 , la sua velocità $\frac{dO_2}{dt}$ sarà parallela ad ω e quindi anche ad ω ed ancora sarà parallela all' S_2 dianzi considerato. Allora, analogamente ed in estensione di quanto avviene nella cinematica ordinaria, si può dire che in ogni istante vi è uno stato cinetico (atto di moto, moto tangenziale) elicoidale e che l' S_2 condotto per O_2 parallelamente ad ω è il piano istantaneo elicoidale.

Lo spazio S_3 avrà proprietà diverse da quello considerato di indice pari. Intanto il trivettore ω che definirà lo stato cinetico di rotazione potrà essere

di rango 1 oppure 3 ed esisterà nel primo caso una direzione \mathbf{u} tale che

$$\underset{3}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{u} = 0;$$

nel secondo caso il trivettore è semplice e si avrà rotazione semplice intorno ad un S_3 .

Perciò, in S_5 , un corpo mobile intorno ad un punto fisso, anche se $\underset{3}{\boldsymbol{\omega}}$ non è semplice, ammette sempre un asse appartenente al corpo o collegato col corpo passante per il punto fisso e parallelo ad \mathbf{u} i cui punti hanno velocità nulla. Questa retta però non è sufficiente a determinare le direzioni delle velocità dei punti del corpo.

A questo proposito riportandoci all'APPELL, in loc. cit., pag. 87, bisognerà concludere che la risoluzione del sistema di equazioni omogenee che ivi figura

$$\omega_{ik}x^k = 0,$$

e che dovrebbe dare i punti di velocità nulla in S_n , porterà a punti che staranno in spazi pari se n è pari, dispari se n è dispari, come appunto ha in parte analizzato il TIERCHY in loc. cit.

Naturalmente dopo questi sviluppi non sarà difficile l'estensione di alcune teorie della dinamica dei sistemi rigidi ed altre teorie fisico-matematiche o geometriche che anche in S_3 dipendono soltanto dal calcolo e non dall'analisi vettoriale.

On the Periodic Motions Near a given Periodic Motion of a Dynamical System.

By G. D. BIRKHOFF and D. C. LEWIS Jr. (Cambridge (Mass.) U. S. A.).

§ 1. **Introduction.** — In a recent note (Comptes Rendus, 1921), BIRKHOFF proved a $2n$ -dimensional generalization of a simple special case of POINCARÉ'S two-dimensional geometric theorem. It was there suggested how this theorem might be useful in establishing the existence of infinitely many periodic motions (of a dynamical system with fixed energy constant) in the neighborhood of a given periodic motion of general stable type. This application is carried out for the first time in the present paper. A summary of the necessary preliminaries is also given.

Suppose we have a dynamical system with $n + 1$ degrees of freedom and a given periodic motion of general stable type. By a change of variables and a reduction of the order of the system with the help of the energy integral and the elimination of the time, the system can be written in the Hamiltonian form,

$$(1.1) \quad \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

where H is an analytic function of $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ and t , and admits the period 2π in t . The periodic motion appears as a « generalized equilibrium » point, $x_1 \equiv y_1 \equiv x_2 \equiv y_2 \equiv \dots \equiv x_n \equiv y_n \equiv 0$, and any further periodic solutions of (1.1), near this equilibrium point and having a period which is an integral multiple of 2π , correspond to periodic motions in the original $(2n + 2)$ th order system near the given periodic motion.

Let

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, \dots, x_{n0}, y_{n0}, t) \\ y_i &= g_i(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, \dots, x_{n0}, y_{n0}, t) \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

be the solution of (1.1) which takes on the initial values, $x_{10}, y_{10}, \dots, x_{n0}, y_{n0}$, for $t = 0$, and let

$$\begin{aligned} x_{i1} &= f_i(x_{10}, y_{10}, \dots, x_{n0}, y_{n0}, 2\pi) \\ y_{i1} &= g_i(x_{10}, y_{10}, \dots, x_{n0}, y_{n0}, 2\pi). \end{aligned}$$

These equations define a transformation T of the neighborhood of the origin into itself, and evidently there is a one-to-one correspondence between the periodic solutions of period $2m\pi$ and the points that are invariant under T^m , the m th iterate of T . The following method for detecting these invariant points was given by BIRKHOFF as a generalization of POINCARÉ'S geometric theorem:

Let $x_{1m}, y_{1m}, \dots, x_{nm}, y_{nm}$ represent the point into which the point $x_{10}, y_{10}, \dots, x_{n0}, y_{n0}$ is carried by T^m . On account of the well known relative integral invariants of (1.1), it is seen that

$$dJ = \sum_{i=1}^n (x_{im} dy_{im} - y_{im} dx_{im} - x_{i0} dy_{i0} + y_{i0} dx_{i0})$$

is an exact differential. Changing the variables to the modified polar coördinates, $u_i = x_i^2 + y_i^2$ and $\theta_i = \tan^{-1}(y_i/x_i)$, we find that

$$dJ = \sum_{i=1}^n (u_{im} d\theta_{im} - u_{i0} d\theta_{i0}).$$

Now suppose that we are able to find a manifold defined by the equations,

$$(1.2) \quad u_{i0} = B_i(\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{n0}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (B_i \text{ analytic, periodic})$$

such that along this manifold θ_{im} always differs from θ_{i0} by some integral multiple of 2π , i. e. $\theta_{im} - \theta_{i0} = 2k_i\pi$. Then we have $d\theta_{im} = d\theta_{i0}$ and hence

$$dJ = \sum_{i=1}^n (u_{im} - u_{i0}) d\theta_{i0}$$

along the manifold. Integrating, we get J as a single valued function of $(x_{10}, y_{10}, \dots, x_{n0}, y_{n0})$, unique save for an additive constant, defined over the manifold. Considered as a function of the θ_0 's, it must therefore be periodic and must have at least 2^n critical points⁽¹⁾. But any critical point of J on the manifold is obviously invariant under T^m , since $dJ=0$ implies that $u_{im} = u_{i0}$, while we already know that for the point in question $\theta_{im} = \theta_{i0} + 2k_i\pi$.

The existence of periodic motions therefore depends upon the existence

⁽¹⁾ A critical point is a point for which $dJ=0$; these are to be counted with their proper multiplicity. The existence of two critical points — maximum and minimum — is obvious. An easy method of establishing the existence of $2^n - 2$ other critical points is to apply M. MORSE'S critical point relations (see, for instance, his paper, *Relations between the Critical Points of a Real Function of n Real Variables*, « Trans. Am. Math. Soc. », vol. 27 (1925), pp. 345-356) to the n dimensional torus for which the connectivity numbers (mod 2) are the binomial coefficients.

of manifolds of the type (1.2). To prove that these manifolds really do exist, we make use of a preliminary normalization of equations (1.1) ⁽¹⁾. In terms of conjugate imaginary variables $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n$, the transformation T can be written in the form

$$\begin{aligned} p_{i_1} &= p_{i_0} e^{\sqrt{-1}M_i(p_0, q_0)} + \Phi_i(p_0, q_0) \\ q_{i_1} &= q_{i_0} e^{-\sqrt{-1}M_i(p_0, q_0)} + \Psi_i(p_0, q_0). \end{aligned}$$

The $\Phi_i(p_0, q_0)$ and $\Psi_i(p_0, q_0)$ are convergent power series in p_{1_0}, \dots, q_{n_0} beginning with terms of degree $2\mu + 1$, where μ is arbitrarily large. The $M_i(p, q)$ are polynomials with real coefficients of degree μ at most in the n products $p_1q_1, p_2q_2, \dots, p_nq_n$. Setting $p_iq_i = u_i$, we accordingly write $M_i(u) = \psi_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}u_j + \dots$

The significance of the fact that we are dealing with a given periodic motion of *general* stable type is that there are no homogeneous linear relations with integral coefficients (not all zero) connecting the ψ_i and 2π , and that the determinant $|c_{ij}|$ is not zero. We shall regularly denote by c^{lj} the cofactor of c_{ij} divided by the determinant itself, so that

$$\sum_{k=1}^n c_{jk}c^{ki} = \sum_{k=1}^n c_{kj}c^{ki} = \delta_{ji}.$$

We now change back to real coördinates, $x_i = \frac{p_i + q_i}{2}$, $y_i = \frac{p_i - q_i}{2\sqrt{-1}}$. It is to be remembered that these changes in coördinates do not destroy the Hamiltonian form of equations (1.1). The transformation T now appears in the form,

$$\begin{aligned} x_{i_1} &= x_{i_0} \cos \varphi_i - y_{i_0} \sin \varphi_i + X_i(x_0, y_0) \\ y_{i_1} &= x_{i_0} \sin \varphi_i + y_{i_0} \cos \varphi_i + Y_i(x_0, y_0), \end{aligned}$$

where, for abbreviation, we have set $M_i(x_0^2 + y_0^2) = \varphi_i$. The $X_i(x, y)$ and $Y_i(x, y)$ are real convergent power series in $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ beginning with terms of degree $2\mu + 1$. Finally on introducing modified polar coördinates, $u_i = x_i^2 + y_i^2$, $\theta_i = \tan^{-1}(y_i/x_i)$, the transformation T takes the form

$$\begin{aligned} u_{i_1} &= u_{i_0} + U_i(u_0, \theta_0) \\ \theta_{i_1} &= \theta_{i_0} + M_i(u_0) + \Theta_i(u_0, \theta_0). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cf. G. D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, Chapter III, particularly § 9. Also Chapter VI, § 1.

The formal expressions for U_i and Θ_i are readily written down:

$$U_i(u_0, \theta_0) = 2X_i u_{i_0}^{\frac{1}{2}} \cos(\theta_{i_0} + \varphi_i) + 2Y_i u_{i_0}^{\frac{1}{2}} \sin(\theta_{i_0} + \varphi_i) + X_i^2 + Y_i^2$$

$$\Theta_i(u_0, \theta_0) = \arctan \frac{-X_i \sin(\theta_{i_0} + \varphi_i) + Y_i \cos(\theta_{i_0} + \varphi_i)}{u_{i_0}^{\frac{1}{2}} + X_i \cos(\theta_{i_0} + \varphi_i) + Y_i \sin(\theta_{i_0} + \varphi_i)}.$$

$U_i(u, \theta)$ may be represented as a convergent power series in $u_1^{\frac{1}{2}}, u_2^{\frac{1}{2}}, \dots, u_n^{\frac{1}{2}}$, with coefficients which are analytic periodic functions of $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ of period 2π . It begins with terms of degree $2\mu + 2$ in the \sqrt{u} 's. The expression for $\Theta_i(u, \theta)$ is not so simple and will be discussed later.

§ 2. **Some Fundamental Inequalities.** — Let it be understood once and for all that the capital letter A , followed perhaps by a subscript, is used throughout this paper to denote a suitably chosen positive number, independent of $u_1, \theta_1, \dots, u_n, \theta_n$. Thus, for example, we know from the power series development of $U_i(u, \theta)$ in powers of $u_1^{\frac{1}{2}}, u_2^{\frac{1}{2}}, \dots, u_n^{\frac{1}{2}}$ that

$$|U_i(u, \theta)| \leq A_1 \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_j^{\frac{1}{2}} \right]^{2\mu+2} \leq A_1 n^{\mu+1} \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_j \right]^{\mu+1},$$

provided that the u 's are sufficiently small. Thus, we may write:

$$(2.1) \quad |U_i(u, \theta)| \leq A_2 \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_j \right]^{\mu+1}.$$

The point in $2n$ dimensional space whose modified polar coordinates are represented by $u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, \dots, u_n, \theta_n$ will be denoted by the symbol (u, θ) . Sometimes, when the θ 's are not being emphasized and no confusion is likely to result, this same point will be denoted by the more abbreviated symbol (u) . The « distance » between two such points, (u, θ) and (u', θ') is defined as $\sqrt{\sum_{j=1}^n (u_j' - u_j)^2}$. The « distance » is thus independent of the θ 's and is equal to the ordinary distance between two corresponding points (u) and (u') in n dimensional space. The distance of (u, θ) from the origin will be denoted by ζ .

Let α denote a fixed positive number less than $1/2$. We shall show that the following inequalities hold as long as ζ is sufficiently small and $u_i/u_j \geq \alpha$

for all pairs of indices, $i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |U_i(u, \theta)| \leq A \cdot \zeta^{\mu+1} \\ |\Theta_i(u, \theta)| \leq A \cdot \zeta^\mu \\ |\partial U_i / \partial u_j| \leq A \cdot \zeta^\mu \\ |\partial U_i / \partial \theta_j| \leq A \cdot \zeta^{\mu+1} \\ |\partial \Theta_i / \partial u_j| \leq A \cdot \zeta^{\mu-1} \\ |\partial \Theta_i / \partial \theta_j| \leq A \cdot \zeta^\mu. \end{array} \right.$$

The first of these inequalities follows immediately from (2.1) from the fact that $(\sum u_j)^2 \leq n \sum_{j=1}^n u_j^2 = n\zeta^2$. In order to prove the second inequality, we

consider briefly the function $\Theta_i(u, \theta)$. It is of the form, $\arctan \frac{f(u, \theta)}{u_i^{\frac{1}{2}} - g(u, \theta)}$,

where f and g are convergent power series in $u_1^{\frac{1}{2}}, u_2^{\frac{1}{2}}, \dots, u_n^{\frac{1}{2}}$ with coefficients which are analytic periodic functions of $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. They begin with terms of degree $2\mu + 1$. Consequently we have $|f(u, \theta)|, |g(u, \theta)| \leq A_3 \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_j^{\frac{1}{2}} \right]^{1\mu+1}$ for u_1, \dots, u_n sufficiently small. Let us temporarily make the definition:

$$\Theta_i(\xi; u, \theta) = \arctan \frac{\xi f(u, \theta)}{1 - \xi g(u, \theta)}, \quad \text{so that} \quad \Theta_i(u, \theta) = \Theta_i\left(\frac{1}{u_i^{\frac{1}{2}}}; u, \theta\right).$$

We have $|\Theta_i(\xi; u, \theta)| \leq A_4 |\xi f(u, \theta)| \leq A_4 A_3 \cdot |\xi| \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_j^{\frac{1}{2}} \right]^{2\mu+1}$ as long as $|\xi f(u, \theta)|, |\xi g(u, \theta)|$, and the u 's are sufficiently small. Therefore

$$|\Theta_i(u, \theta)| \leq A_3 A_4 \cdot \left| \frac{1}{u_i^{\frac{1}{2}}} \right| \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_j^{\frac{1}{2}} \right] \left[\sum_{j=1}^n u_j^{\frac{1}{2}} \right]^{2\mu} = A_5 \cdot \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{u_j}{u_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_j^{\frac{1}{2}} \right]^{2\mu}.$$

But, we are assuming that $u_i/u_j \geq \alpha$, and therefore we get

$$|\Theta_i(u, \theta)| \leq A_5 n \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_j^{\frac{1}{2}} \right]^{2\mu} \leq A_6 \cdot \zeta^\mu,$$

as long as ζ is sufficiently small; here $A_6 = A_5 n^{\frac{3}{2}\mu+1} / \sqrt{\alpha}$. Similar considerations applied to the partial derivatives of $\Theta_i(\xi; u, \theta)$, with respect to ξ , the $u_j^{\frac{1}{2}}$, and the θ 's, enable us to obtain the appraisals for $\partial \Theta_i / \partial u_j$ and $\partial \Theta_i / \partial \theta_j$. The appraisals for $\partial U_i / \partial u_j$ and $\partial U_i / \partial \theta_j$ are even easier.

§ 3. **A Simplification of the Coördinate System (u, θ) .** — If we make the change of variables $\bar{u}_j = \sum_{k=1}^n c^{kj} [M_k(u) - \psi_k]$, the transformation T is readily seen (since $\sum_{k=1}^n c_{kj} c^{kj} = \delta_{ij}$) to take the simpler form:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_{i_1} &= u_{i_0} + U_i(u_0, \theta_0) \\ \theta_{i_1} &= \theta_{i_0} + \psi_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} u_{j_0} + \Theta_i(u_0, \theta_0), \end{aligned}$$

where in accordance with our later notation the dashes over the new variables have been omitted. This change of variables is such that

$$(3.2) \quad \bar{u}_i = u_i + p_i(\bar{u}); \quad u_i = \bar{u}_i + P_i(\bar{u}),$$

where $p_i(u)$ is a polynomial in u_1, u_2, \dots, u_n which lacks constant and linear terms, and $P_i(u)$ is a convergent power series beginning with quadratic terms.

We must show that the inequalities of the previous paragraph still hold for these new variables as long as $\bar{\zeta}$ is sufficiently small and $\bar{u}_i/\bar{u}_j \geq \bar{\alpha}$ for all pairs of indices $i, j = 1, 2, \dots, n$. Here $\bar{\alpha}$ is a fixed positive number less than 1/2, and $\bar{\zeta} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \bar{u}_j^2}$.

Let α be any number such that $0 < \alpha < \bar{\alpha} < \frac{1}{2}$. Then starting with (3.2) it is easily shown that the fact that $\bar{u}_j/\bar{u}_k \leq 1/\bar{\alpha}$ (for all pairs of indices j and k) implies that $u_j/u_k \leq 1/\alpha$, provided that the \bar{u} 's are taken sufficiently small. It also follows from (3.2) that $\zeta \leq A_1 \cdot \bar{\zeta}$, and that the derivatives $\partial u_j / \partial \bar{u}_i$ are bounded for small values of the \bar{u} 's. This is all that is needed to verify the validity of inequalities (2.2) and (2.1) in the new variables.

Hereafter these new variables will be used exclusively with the dashes omitted.

§ 4. **The Behavior of the Image of a Point Under the Iterates of T .** — Let the m^{th} iterate of T take the point (u_0, θ_0) into (u_m, θ_m) . In this paragraph we prove two fundamental theorems about the behavior of (u_m) for large values of m and small values of the u 's.

THEOREM I. — *If (u_0, θ_0) is at a sufficiently small distance from the origin, then the distance ζ_m , of (u_m, θ_m) from the origin does not exceed $n\zeta_0$ as long as $m \leq A_{10} \zeta_0^{-\nu}$ ($n \geq 2$).*

Proof: From (3.1) and (2.1) we have

$$|\Delta u_{im}| = |u_{im+i} - u_{im}| \leq A_2 \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_{jm} \right]^{\mu+1}.$$

Hence u_{im} increases less rapidly with m than as if $\frac{du_{im}}{dm} = \frac{A_8}{n} \left[\sum_{j=1}^n u_{jm} \right]^{\mu+1}$.

It follows that $\sum_{j=1}^n u_{jm}$ can not increase to $\sqrt[n]{n}$ times its initial value for $m=0$ until

$$m \geq \frac{1}{\mu A_8} \left(1 - n^{-\frac{\mu}{2}} \right) \left[\sum_{j=1}^n u_{j0} \right]^{-\mu} \text{ i. e. } m \geq A_9 \left[\left(\sum_{j=2}^n u_{j0} \right)^2 \right]^{-\frac{\mu}{2}} \geq A_9 \left[n \sum_{j=1}^n u_{j0}^2 \right]^{-\frac{\mu}{2}} = A_{10} \zeta_0^{-\mu}.$$

Hence, as long as $m \leq A_{10} \cdot \zeta_0^{-\mu}$, we have

$$\sum_{j=1}^n u_{jm}^2 \leq \left[\sum_{j=1}^n u_{jm} \right]^2 \leq n \left[\sum_{j=1}^n u_{j0} \right]^2 \leq n^2 \sum_{j=1}^n u_{j0}^2$$

since $u_j \geq 0$, i. e. $\zeta_m \leq n \zeta_0$ as long as $m \leq A_{10} \cdot \zeta_0^{-\mu}$, q. e. d.

THEOREM II. — *If the point (u_0) is such that $u_{j0}/u_{k0} \geq 2\alpha$ for all ordered pairs of indices j and k , then $u_{jm}/u_{km} \geq \alpha$ as long as $m \leq A_{15} \cdot \zeta_0^{-\mu}$, provided that ζ_0 is sufficiently small.*

Proof: As in the proof of theorem I, we have

$$\Delta u_{im} \leq A_2 \cdot \left[\sum_{j=1}^n u_{jm} \right]^{\mu+1} \leq A_{11} \zeta_m^{\mu+1}.$$

As long as $m \leq A_{10} \zeta_0^{-\mu}$, we have from theorem I, $\Delta u_{im} \leq A_{12} \zeta_0^{\mu+1}$. Hence

$\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta u_{im}^2} \leq A_{13} \zeta_0^{\mu+1} = d$, which is not less than the greatest distance the point (u_m) can move at each application of the transformation T .

Let $u_{j0}/u_{k0} = 2\beta_{jk} \geq 2\alpha$. Also let $\lambda_i = u_{i0}/\zeta_0$, so that the λ_i are the « direction cosines » of the ray from the origin through (u_0) . We have $\lambda_j/\lambda_k \geq 2\alpha$. Hence $n\lambda_j^2 \geq 4\alpha^2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 4\alpha^2$. Therefore $\lambda_j \geq \frac{2\alpha}{\sqrt{n}}$.

We consider some other point (u) , which for a certain pair of indices, j and k , is such that $u_j/u_k = \alpha$. The distance between the point (u_0) [regarded as fixed] and the point (u) [regarded as variable subject to the condition

$u_j - \alpha u_k = 0$] is given by $\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - u_{i0})^2}$, the minimum value, D , of which is found by elementary methods to be

$$D = \frac{u_{j0} - \alpha u_{k0}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{(2\beta_{jk} - \alpha)u_{k0}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \geq \frac{\alpha u_{k0}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = \frac{\alpha \lambda_k \zeta_0}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \geq \frac{2\alpha^2}{\sqrt{n(1 + \alpha^2)}} \zeta_0 = A_{14} \cdot \zeta_0.$$

This distance cannot be traversed by the point (u_m) upon successive iterations of T until $m \geq D/d \geq (A_{14}/A_{13})\zeta_0^{-\mu}$, unless perhaps m first becomes greater than $A_{10}\zeta_0^{-\mu}$, at which point the necessary information from Theorem I would no longer be forthcoming.

Hence the theorem is true as stated, if we denote by A_{15} the lesser of the two numbers A_{10} and (A_{14}/A_{13}) .

Let the region $R(\eta, \alpha)$ denote the collection of points for which $\zeta \leq \eta$ and $u_j/u_k \geq \alpha$ for all pairs of indices j and k . Theorems I and II show us that if (u_0, θ_0) is a point of $R(\eta, 2\alpha)$, then the image point (u_m, θ_m) under T^m must lie within $R(m\eta, \alpha)$ as long as $m \leq A_{15}\zeta_0^{-\mu}$, provided that ζ_0 is sufficiently small.

§ 5. **The Non-Vanishing Property of the Jacobian.** — We now proceed to prove

THEOREM III. — *If K is any positive number and if η is a sufficiently small positive number, then for (u_0, θ_0) in $R(\eta, 2\alpha)$ the derivative $\frac{\partial \theta_{im}}{\partial u_{j0}}$ differs from mc_{ij} by a quantity which tends to zero with ζ_0 , as long as m does not exceed $K\zeta_0^{-\frac{\mu}{4}+1}$. This tendency to zero is uniform with respect to m .*

Proof: We introduce the notation $\frac{\partial \theta_{im}}{\partial u_{k0}} = v_{ik}(m)$, $\frac{\partial u_{im}}{\partial u_{k0}} = w_{ik}(m)$. $[m, k]$ will be used as a symbol to denote any linear homogeneous function of $v_{1k}(m), v_{2k}(m), \dots, v_{nk}(m), w_{1k}(m), w_{2k}(m), \dots, w_{nk}(m)$, whose coefficients, depending upon m and (u_0, θ_0) , are infinitesimals of at least the $(\mu - 1)^{th}$ order in ζ_0 for $m \leq K\zeta_0^{-\mu+1}$ uniformly for (u_0, θ_0) in $R(\eta, 2\alpha)$. The sum of any definite number N of the symbols $[m, k]$ is another symbol $[m, k]$, N being assumed independent of m or ζ_0 . Let

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ik} = \frac{\partial \theta_{i1}}{\partial u_{k0}} = c_{ik} + \frac{\partial \theta_i}{\partial u_{k0}}(u_0, \theta_0) \\ v_{ik}(1) = a_{ik}, \quad v_{ik}(0) = 0, \quad w_{ik}(0) = \delta_{ik}. \end{array} \right.$$

Now by the elementary rules for partial differentiation we find

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{ik}(m+1) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \theta_{im+1}}{\partial \theta_{jm}} v_{jk}(m) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \theta_{im+1}}{\partial u_{jm}} w_{jk}(m) \\ w_{ik}(m+1) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_{im+1}}{\partial \theta_{jm}} v_{jk}(m) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_{im+1}}{\partial u_{jm}} w_{jk}(m). \end{array} \right.$$

But

$$\frac{\partial^2 \theta_{im+1}}{\partial \theta_{jm}} = \delta_{ij} + \frac{\partial \Theta_i(u_m, \theta_m)}{\partial \theta_{jm}}, \quad \frac{\partial \theta_{im+1}}{\partial u_{jm}} = c_{ij} + \frac{\partial \Theta_i(u_m, \theta_m)}{\partial u_{jm}},$$

$$\frac{\partial u_{im+1}}{\partial \theta_{jm}} = \frac{\partial U_i(u_m, \theta_m)}{\partial \theta_{jm}}, \quad \frac{\partial u_{im+1}}{\partial u_{jm}} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i(u_m, \theta_m)}{\partial u_{jm}}.$$

We now use the inequalities (2.2) with reference to the point (u_m, θ_m) . These inequalities are here applicable, because from Theorem II $u_{jm}/u_{km} \geq \alpha$ for all pairs of indices j and k , m being restricted in such a way that $m \leq A_{45} \zeta_0^{-\mu}$. Remembering from Theorem I that $\zeta_m \leq n \zeta_0$, and introducing the symbols $[m, k]$, we therefore get from (5.2)

$$(5.3) \quad \begin{cases} \text{I. } v_{ik}(m+1) = v_{ik}(m) + \sum_{j=1}^n c_{ij} w_{jk}(m) + [m, k] \\ \text{II. } w_{ik}(m+1) = w_{ik}(m) + [m, k]. \end{cases}$$

We proceed to show how the w 's can be eliminated from equations (5.3). Replacing m by $m+1$ in equations (5.3) I., we have

$$v_{ik}(m+2) = v_{ik}(m+1) + \sum_{j=1}^n c_{ij} w_{jk}(m+1) + [m+1, k].$$

Subtracting I from this, we get after transposing,

$$\Delta^2 v_{ik}(m) = v_{ik}(m+2) - 2v_{ik}(m+1) + v_{ik}(m) = \sum_{j=1}^n c_{ij} [w_{jk}(m+1) - w_{jk}(m)] + [m+1, k] + [m, k].$$

We eliminate the $w_{jk}(m+1)$ from these equations with the help of (5.3) II and thus obtain

$$(5.4) \quad \Delta^2 v_{ik}(m) = [m+1, k] + [m, k],$$

where now the $w_{ik}(m+1)$ have already been eliminated from the symbol $[m+1, k]$. We now solve equations (5.3) I for the $w_{ik}(m)$ in terms of the $v_{ik}(m)$ and $v_{ik}(m+1)$. We can clearly do this, since the determinant of the coefficients of the unknowns is precisely the non-zero determinant $|c_{ij}|$ plus an infinitesimal in ζ_0 of order $\mu - 1$ at least. Substituting the resulting expressions for the $w_{ik}(m)$ into the right members (5.4), we see that the required elimination has been completely effected.

For convenience, let us now introduce the functions $y_{ik}(m)$ and the numbers b_{ik} as follows:

$$(5.5) \quad \begin{cases} b_{ik} = a_{ik} & \text{and } y_{ik}(m) = v_{ik}(m), & \text{if } a_{ik} \geq 0, \\ b_{ik} = -a_{ik} & \text{and } y_{ik}(m) = -v_{ik}(m) & \text{if } a_{ik} < 0. \end{cases}$$

We first wish to find out how large the $y_{ik}(m)$ can become while m is restricted by the inequality $m \leq 2K\zeta_0^{-\frac{\mu}{4}+1}$. Evidently, on account of (5.4), the $|y_{ik}|$ can not increase as rapidly as they would if

$$\Delta^2 y_{ik}(m) = + \frac{2\rho}{n} \left[\sum_{j=1}^n y_{jk}(m+1) \right],$$

where for abbreviation $\rho = A_{18} \cdot \zeta_0^{\mu-1}$. A solution (unique for integral values of m) of this system of difference equations, under the initial conditions,

$$(5.6) \quad y_{ik}(0) = 0, \quad y_{ik}(1) = b_{ik},$$

is readily found to be

$$(5.7) \quad y_{ik}(m) = b_{ik}m + \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n b_{jk} \right) \left[\frac{(1+\rho + \sqrt{2\rho + \rho^2})^m - (1+\rho - \sqrt{2\rho + \rho^2})^m}{2\sqrt{2\rho + \rho^2}} - m \right] \\ = b_{ik}m + \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n b_{jk} \right) \rho^{-\frac{1}{2}} \Omega \left(m\rho^{\frac{1}{2}}, \rho^{\frac{1}{2}} \right),$$

where Ω is a convergent power series in powers of $m\rho^{\frac{1}{2}}$ and $\rho^{\frac{1}{2}}$, which lacks constant and linear terms.

Let us see how (5.7) behaves as we let ζ_0 (and consequently ρ) approach zero and allow m to take on values in the range,

$$(5.8) \quad 0 < m \leq 2K\zeta_0^{-\frac{\mu}{4}+1}, \\ \text{i. e. } 0 < m \leq A_{17}\rho^{-\frac{\mu}{4}+\omega} = 2K\zeta_0^{-\frac{\mu}{4}+1}, \quad \text{where } \omega = \frac{3}{4(\mu-1)} > 0.$$

We have from (5.5), (5.1), and (2.2):

$$(5.9) \quad |b_{ik} - |c_{ik}|| \leq \rho \quad (|c_{ik}| = \text{absolute value of } c_{ik} \text{ and not the determinant})$$

provided that ζ_0 is sufficiently small. Here we increase the number A_{18} defining ρ , if necessary. From the power series development of Ω , we have

$$\left| \Omega \left(m\rho^{\frac{1}{2}}, \rho^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq A_{18} \left(m\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{1}{2}} \right)^2 = A_{18} (m^2\rho + 2m\rho + \rho),$$

as long as both $m\rho^{\frac{1}{2}}$ and $\rho^{\frac{1}{2}}$ are taken sufficiently small. On account of (5.8) this requirement is surely fulfilled, if ζ_0 is sufficiently small; therefore

$$\left| \rho^{-\frac{1}{2}} \Omega \left(m\rho^{\frac{1}{2}}, \rho^{\frac{1}{2}} \right) \right| \leq A_{18} \left(m^2\rho^{\frac{1}{2}} + 2m\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{1}{2}} \right) \leq A_{18} \left(A_{17}^2 \rho^{2\omega} + 2A_{17}\rho^{\frac{1}{4}+\omega} + \rho^{\frac{1}{2}} \right)$$

by (5.8). Hence, since $\sum_{j=1}^n b_{jk}$ is bounded, we see that the second term in the

right hand member of (5.7) tends to zero with ρ and ζ_0 ; (5.7) and (5.9) thus yield the result that

$$y_{ik}(m) - |c_{ik}| m = \bar{\iota}_{ik}(\zeta_0, m)$$

where $\lim_{\zeta_0=0} \bar{\iota}(\zeta_0, m) = 0$ uniformly in m , for the range (5.8).

Now let us see how rapidly the slopes of the $y_{ik}(m)$ can decrease, while we limit m to lie in the range,

$$(5.10) \quad 0 < m \leq A_{17}\rho^{-\frac{1}{4}+\omega} - 1 = 2K\zeta_0^{-\frac{p}{4}+1} - 1.$$

From the above results, it follows that the right hand members of (5.4) can not exceed, in absolute value, an expression of the form $A_{19}\rho^{\frac{3}{4}+\omega}$. Hence the y_{ik} can not decrease as rapidly as they would if they satisfied the difference relation $\Delta^2 y_{ik}(m) = -A_{19}\rho^{\frac{3}{4}+\omega}$. But, using the initial conditions (5.6), this yields $y_{ik}(m) = b_{ik}m - A_{19}\rho^{\frac{3}{4}+\omega} \cdot \frac{1}{2}m(m-1)$. Also

$$\left| A_{19}\rho^{\frac{3}{4}+\omega} \frac{1}{2}m(m-1) \right| = \frac{A_{19}}{2} \left| m^2\rho^{\frac{3}{4}+\omega} - m\rho^{\frac{3}{4}+\omega} \right| \leq \frac{A_{19}}{2} \left| A_{17}^2\rho^{\frac{1}{4}+3\omega} + A_{17}\rho^{\frac{1}{2}+2\omega} \right|,$$

which tends to zero with ρ . Hence, we again obtain the result that $y_{ik}(m)$ differs from $|c_{ik}| m$ by an infinitesimal in ζ_0 . Thus the true value of $y_{ik}(m)$ must also have this property. That is, from (5.5),

$$v_{ik}(m) \equiv \frac{\partial \theta_{im}}{\partial u_{k0}} \equiv \pm y_{ik}(m) = c_{ik}m + \iota_{ik}(\zeta_0, m),$$

where $\iota_{ik}(\zeta_0, m)$ represents an infinitesimal in ζ_0 , uniformly with respect to m , as long as m lies on the range (5.10). It remains only to note that m will surely lie on the range (5.10), if it satisfies the inequalities

$$0 < m \leq K\zeta_0^{-\frac{p}{4}+1}$$

provided, as always, that ζ_0 is sufficiently small.

Incidentally the theorem just proved shows us that $\frac{1}{m^n} \frac{\partial(\theta_{1m}, \theta_{2m}, \theta_{3m}, \dots, \theta_{nm})}{\partial(u_{10}, u_{20}, u_{30}, \dots, u_{n0})}$ differs from the determinant $|c_{ij}|$ by an infinitesimal in ζ_0 and hence can not vanish for ζ_0 sufficiently small.

§ 6. A Simple Special Case. — We consider here the degenerate case where, in the transformation (3.1), defining T , the U_i and the Θ_i are identi-

cally zero. In this case the m^{th} iterate of T becomes simply:

$$(6.1) \quad \begin{cases} u_{im} = u_{i_0} = u_i \\ \theta_{im} = \theta_{i_0} + m\psi_i + m \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j. \end{cases}$$

We shall use a theorem proved by BOREL ⁽¹⁾ in the consideration of the approximation of irrational numbers by continued fractions. An immediate corollary of BOREL'S theorem is the following

LEMMA. — Corresponding to any positive number γ not less than 11 and to any real number β (rational or irrational), two integers p and q can always be found such that $\left| \beta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{q^2}$ and $\gamma \leq q \leq 15\gamma^2 \cdot [p \geq 0]$.

We consider a positive number, $\frac{1}{2}\eta$, which we regard as fixed but as having been chosen sufficiently small in advance. Let $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \dots = \bar{u}_n = \frac{\eta}{2\sqrt{n}}$.

Let $v_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \bar{u}_j$. Then

$$(6.2) \quad \bar{u}_k = \sum_{j=1}^n c^{jk} v_j.$$

Let ν be a fixed positive number ≥ 1 . Then, if η is sufficiently small, we have $\eta^{-\nu} \geq 11$. Using the lemma, we choose integers m_i and k_i' such that

$$\left| \frac{k_i'}{m_i} - \frac{\psi_i + v_i}{2\pi} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{m_i^2} \quad \text{and} \quad \eta^{-\nu} \leq m_i \leq 15\eta^{-2\nu}.$$

Write $m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \dots m_n$ so that $\eta^{-n\nu} \leq m \leq 15^n \eta^{-2n\nu}$. And let $k_i = m_1 \cdot m_2 \dots m_{i-1} \cdot k_i' \cdot m_{i+1} \cdot m_{i+2} \dots m_n$. Then the above inequalities yield $\left| \frac{2k_i\pi}{m} - \psi_i - v_i \right| < \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \frac{1}{m_i^2} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \eta^{2\nu}$. In other words $\frac{2k_i\pi}{m} - \psi_i = v_i + \varepsilon_i$, where $|\varepsilon_i| \leq A_{20} \eta^{2\nu}$.

Now, using the above definitions for the integers k_1, k_2, \dots, k_n and m , we define u_1, u_2, \dots, u_n by means of the linear equations, $2k_i\pi = m\psi_i + m \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j$, and hence $\sum_{j=1}^n c_{ij} u_j = v_i + \varepsilon_i$. Solving these equations for the u_i , we get with the help of (6.2)

$$u_k = \sum_{i=1}^n c^{ik} (v_i + \varepsilon_i) = \bar{u}_k + \bar{\varepsilon}_k, \quad \text{where} \quad |\bar{\varepsilon}_k| = \left| \sum_{i=1}^n c^{ik} \varepsilon_i \right| \leq A_{21} \eta^{2\nu}.$$

⁽¹⁾ ÉMILE BOREL, *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 149.

The distance of the point (u) from the point (\bar{u}) is

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (u_k - \bar{u}_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \bar{\varepsilon}_k^2} \leq A_{22} \eta^{2\nu}.$$

On the other hand the distance of the point (\bar{u}) from any of the manifolds, $u_i - 2\alpha u_j = 0$ $\left[\alpha < \frac{1}{2} \right]$, is found to be $\frac{\bar{u}_i - 2\alpha \bar{u}_j}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}} = \frac{1 - 2\alpha}{\sqrt{n(1 + 4\alpha^2)}} \cdot \frac{\eta}{2}$. Hence, if η is sufficiently small, the point (u) will lie well within the region $R(\eta, 2\alpha)$, its distance from the boundary exceeding $A_{23} \cdot \eta$.

In order to conform with the notation of the rest of the paper we replace ν by $\frac{\mu - 4}{8n}$ [$\mu \geq 8n + 4$] and u_i by u_{i_0}' . We collect the results of this paragraph in the following

THEOREM IV. — *Let the positive numbers α ($< \frac{1}{2}$) and μ ($\geq 8n + 4$) be chosen in advance and then held fast. Then it is possible to choose the positive number η so small that one can always find integers, k_1, k_2, \dots, k_n , and m , dependent upon η and having the following two properties:*

1. $\eta^{-\frac{\mu}{8} + \frac{1}{2}} \leq m \leq K \eta^{-\frac{\mu}{4} + 1}$ [$K = 15^n$].

2. *The solution of the linear equations $2k_i \pi = m \psi_i + m \sum_{j=1}^n c_{ij} u_{j_0}'$, yields a point (u_0') lying within the region $R(\eta, 2\alpha)$, its distance from the boundary exceeding $A_{23} \eta$.*

Here A_{23} is a suitably chosen positive number, dependent upon n, c_{ij}, μ , and α , but independent of η .

§ 7. **The General Case.** — We need the following elementary lemma:

LEMMA. — Let $f_i(u_1, u_2, \dots, u_n, t)$ [$i = 1, 2, \dots, n$] be defined for $0 \leq t \leq 1$ and for (u) in some closed n dimensional region S . Let all the $f_i(u_1, u_2, \dots, u_n, 0)$ vanish together for one and only one set of values for the u 's; viz. $u_i = u_i'$. Let K denote the shortest distance from (u') to the boundary of S . Suppose that f_i is of class C'' and that the Jacobian,

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)},$$

is nowhere zero for (u) in S and $0 \leq t \leq 1$. Let $g_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_n, t)$ represent the cofactor of $\partial f_i / \partial u_j$ in J divided by J itself, so that

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial f_k} \equiv \sum_{j=1}^n g_{ji} \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \equiv \delta_{ik}.$$

Finally denote by M an upper bound for the functions,

$$F_k(u_1, u_2, \dots, u_n, t) \equiv - \sum_{i=1}^n g_{ik} \frac{\partial f_i}{\partial t}.$$

That is, $|F_i| \leq M$ for (u) in S and $0 \leq t \leq 1$.

Then there exists a unique set of functions $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$, of class C'' , defined on some interval, $0 \leq t \leq t_1$, such that $f_i[u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t] \equiv 0$.

Furthermore $u_i(0) = u_i'$ and t_1 is the lesser of the two numbers 1 and $\frac{x}{\sqrt{nM}}$.

This lemma is for our purposes more advantageous than the usual « implicit function theorem », because it gives us a definite appraisal for the interval on which the functions $u_1(t), \dots, u_n(t)$ are defined. We give a brief indication of the proof: Necessary and sufficient conditions on a set of functions, $u_1(t), \dots, u_n(t)$, that all the $f_i[u_1(t), \dots, u_n(t), t] = 0$, are that

$$\frac{df_i}{dt} \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \frac{du_j}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{and} \quad f_i[u_1(0), \dots, u_n(0), 0] = 0.$$

Solving for the derivatives of the u_i we get a system of differential equations, $\frac{du_i}{dt} = F_i(u_1, u_2, \dots, u_n, t)$, in the standard form. These equations are to be solved under the initial conditions $u_i(0) = u_i'$. The lemma now follows from the known existence theorems for systems of ordinary differential equations.

We consider values for η , not only sufficiently small for the validity of theorem IV, but also so small that all the results of the preceding paragraphs hold if $\zeta_0 \leq \eta$. We forthwith choose a set of values for k_1, k_2, \dots, k_n , and m , depending on η and satisfying the conditions of theorem IV,

$$(7.1) \quad \eta^{-\frac{p}{8} + \frac{1}{2}} \leq m \leq K \eta^{-\frac{p}{4} + 1} \leq K \zeta_0^{-\frac{p}{4} + 1}.$$

Now it is easily proved by induction that T^m may be written in the form

$$(7.2) \quad \begin{cases} u_{im} = u_{i_0} + U_{im}(u_0, \theta_0) \\ \theta_{im} = \theta_{i_0} + m\psi_i + m \sum_{j=1}^n c_{ij} u_{j_0} + \Theta_{im}(u_0, \theta_0) \end{cases}$$

where

$$(7.3) \quad \Theta_{im}(u_0, \theta_0) = \sum_{\nu=0}^{m-2} (m-1-\nu) \left[\sum_{j=1}^n c_{ij} U_j(u_\nu, \theta_\nu) \right] + \sum_{\nu=0}^{m-1} \Theta_i(u_\nu, \theta_\nu).$$

We wish to show that the equations, $\theta_{im} - \theta_{i_0} = 2k_i\pi$ can be solved for the $u_{i_0}, u_{2_0}, \dots, u_{n_0}$ in terms of the $\theta_{1_0}, \theta_{2_0}, \dots, \theta_{n_0}$. For this purpose we regard

the θ 's as fixed and try to solve the equations,

$$(7.4) \quad \Phi_i(u_{10}, \dots, u_{n0}) \equiv -\frac{2k_i\pi}{m} + \psi_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}u_{j0} + \frac{1}{m} \Theta_{im}(u_0, \theta_0) = 0,$$

for the u_0 's. Since $m\Phi_i$ differs from θ_{im} by a constant, $2k_i\pi + \theta_{i0}$, it appears that $\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_{j0}} \equiv \frac{1}{m} \frac{\partial \theta_{im}}{\partial u_{j0}}$, which, according to theorem III, differs from c_{ij} by an infinitesimal in ζ_0 , uniformly with respect to m , m being required not to exceed $K\zeta_0^{-\frac{\mu}{4}+1}$ ($\geq K\eta^{-\frac{\mu}{4}+1}$). This means that $\frac{\partial}{\partial u_{j0}} \left[\frac{1}{m} \Theta_{im}(u_0, \theta_0) \right]$ tends to zero with η , uniformly with respect to m , and, hence, in particular, if m is determined as in theorem IV. We assume always that (u_0) lies in $R(\eta, 2\alpha)$.

It will be convenient at this stage to introduce a parameter t and consider the equations,

$$(7.5) \quad f_i(u_1, \dots, u_{n0}, t) \equiv -\frac{2k_i\pi}{m} + \psi_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}u_{j0} + \frac{t}{m} \Theta_{im}(u_0, \theta_0) = 0.$$

We allow t to assume values on the interval $0 \leq t \leq 1$, and we shall try to solve (7.5) for the u_0 's as functions of t . Evidently, if we can do this, all we need to do is to set $t = 1$ to get the required solution of (7.4).

We try to apply the lemma. In the first place

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_{j0}} = c_{ij} + t \frac{\partial}{\partial u_{j0}} \left[\frac{1}{m} \Theta_{im}(u_0, \theta_0) \right]$$

which differs from c_{ij} by an infinitesimal in η . Hence, if we denote by g_{ij} the cofactor of $\frac{\partial f_i}{\partial u_{j0}}$ in $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0})}$, divided by the Jacobian itself, we see that g_{ij} differs from c^{ij} by an infinitesimal in η . Hence $|g_{ij}| \leq A_{24}$. Also it follows from (7.3), (2.2), (7.1), and from the elementary fact that $\sum_{\nu=0}^{m-2} (m-1-\nu) = \frac{1}{2} m(m-1)$ that

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial t} \right| = \left| \frac{1}{m} \Theta_{im}(u_0, \theta_0) \right| \leq A_{25} \eta^{\frac{3}{4}\mu+2}.$$

Hence, we find that

$$|F_k| \equiv \left| -\sum_{j=1}^n g_{ik} \frac{\partial f_i}{\partial t} \right| \leq n A_{24} A_{25} \eta^{\frac{3}{4}\mu+2} = A_{26} \eta^{\frac{3}{4}\mu+2}$$

which is the M of the lemma.

In the second place, we know from theorem IV that for $t = 0$ equations (7.5) have one and only one solution, $u'_{10}, u'_{20}, \dots, u'_{n0}$, which lies well

within the region $R(\eta, 2\alpha)$. For the region S of the lemma, we shall take a certain $n - 1$ dimensional sphere together with its interior. The center of S is to be the point (u') and the radius is to be $A_{23}\eta^2$. By theorem IV the whole of S lies within $R(\eta, 2\alpha)$. The « K » of the lemma is therefore equal to $A_{23}\eta^2$.

Hence a unique set of solving functions $u_{10}(t), u_{20}(t), \dots u_{n0}(t)$ exists, the interval of definition being $0 \leqq t \leqq t_1$, where t_1 is the lesser of the two numbers, $A_{27}^{-\frac{3}{4}}$ and 1. Hence, if η is taken sufficiently small, $t_1 = 1$, and $u_{10}(1), u_{20}(1), \dots u_{n0}(1)$ satisfy (7.4), as required. The solution (u_0) , thus obtained, also has the property that its distance from (u_0') does not exceed $A_{23}\eta^2$. Hence ζ_0 exceeds an infinitesimal of the first order in η .

For a fixed sufficiently small value of η and with a corresponding fixed choice for the k_i and m , the solution (u_0) is unique, at least so far as the region $R(\eta, 2\alpha)$ is concerned. For suppose there were a second solution (\bar{u}_0) corresponding to each element of an infinite sequence of η 's tending to zero. We can join the two points (u_0) and (\bar{u}_0) with a straight line segment, which lies wholly within $R(\eta, 2\alpha)$ and whose direction cosines we denote by $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Since θ_{im} has the same value (viz. $\theta_{i0} + 2k_i\pi$) at both ends of the segment, its directional derivative, $\sum_{j=1}^n \frac{\partial \theta_{im}}{\partial u_{j0}} \lambda_j$, must vanish at some intermediate point P_i . We know, by theorem III, that

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \theta_{im}}{\partial u_{j0}} \Big|_P \lambda_j = \sum_{j=1}^n c_{ij} \lambda_j + \tau_i(P, \eta)$$

where $\tau_i(P, \eta)$ tends to zero with η , uniformly as to P or the λ 's. Hence

$$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n c_{ij} \lambda_j + \tau_i(P_i, \eta) \right]^2 = 0 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} \lambda_j \right)^2$$

+ an infinitesimal in η , where, of course, the λ_i depend upon η . Let $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \Lambda_n$ be the set of values for the λ_i which, under the condition $\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = 1$ makes $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} \lambda_j \right)^2$ a minimum. Then we infer that $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} \Lambda_j \right)^2 \leqq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} \lambda_j \right)^2 =$ an infinitesimal in η . But, since the Λ_i are independent of η , this implies that $\sum_{i=1}^n c_{ij} \Lambda_j = 0$ for Λ_i not all zero; and thus we obtain a contradiction of the hypothesis that the determinant of the c_{ij} is different from zero.

The obtained unique values for $u_{10}, u_{20}, \dots u_{n0}$, which satisfy (7.4) may

be regarded as single valued functions, $B_i(\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{n0})$ of the θ_0 's. They are obviously periodic of period 2π , since the Φ_i are also. The implicit function theorem, furthermore, shows that they are analytic in the neighborhood of any point $(\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{n0})$. We have thus proved the following theorem, which is the main result of this paper:

THEOREM V. — *It is possible to find a manifold in the space of the $2n$ variables, $u_{10}, \theta_{10}, \dots, u_{n0}, \theta_{n0}$ (or the original variables $x_{i0} = u_{i0}^2 \cos \theta_{i0}$, $y_{i0} = u_{i0}^2 \sin \theta_{i0}$) defined by equations of the type,*

$$u_{i0} = B_i(\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{n0}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

along which, for a suitable choice of the integer m , the θ_{im} differ from the θ_{i0} by integral multiples of 2π . The B_i are analytic single-valued non-vanishing periodic functions of period 2π in the θ_0 's. It is assumed that μ (which appears in the equations defining T) is not less than $8n + 4$.

Furthermore this manifold may be taken in such a way that, given a positive number $\alpha < \frac{1}{2}$, the u_{i0} satisfy the following relations:

1. $\frac{u_{i0}}{u_{j0}} \geq 2\alpha$ for all pairs of indices $i, j = 1, 2, \dots, n$.
2. $\sum_{j=1}^n u_{j0}^2 [\equiv \zeta_0^2]$ is arbitrarily small.
3. $0 \leq m \leq K \zeta_0^{-\frac{\mu}{4} + 1}$, where $K = 15^n$.

Item 2, of course, implies that there are an infinite number of manifolds of the type described in the theorem.

Sur la solution de l'équation générale du cinquième degré réduite à la forme libre.

par K. BOHLIN (à Stockholm).

1. Il est bien connu qu'au moyen de réductions élémentaires, on peut éliminer des équations algébriques complètes, en outre du second terme, encore un certain nombre des termes suivants. La forme *normale* des équations du troisième, du quatrième et du cinquième degré devient ainsi

$$(1) \quad \begin{aligned} z^3 + 3sz &= 2\tau \\ z^4 + 4sz &= 3\tau \\ z^5 + 5sz &= 4\tau. \end{aligned}$$

Ces équations possèdent les résolvantes

$$(2) \quad \begin{aligned} w^2 + 2\tau w &= s^2 \cdot 1, \\ w^3 + 3\tau w &= 2s^4 \cdot 1_2, \\ w^4 + 4\tau w &= 3s^5 \cdot 1_3. \end{aligned}$$

C'est au moyen des *substitutions* suivantes

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\left(\frac{w}{1}\right)^{2 \cdot 1_3}}{s}; & \zeta &= z \cdot \frac{\left(\frac{w}{1}\right)^{1 \cdot 1_3}}{s} \\ u &= \frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{3 \cdot 1_4}}{s^2 \cdot 1_2}; & \zeta &= z \cdot \frac{\left(\frac{w}{2}\right)^{1 \cdot 1_4}}{s^2 \cdot 1_2} \\ u &= \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{4 \cdot 1_5}}{s^3 \cdot 1_3}; & \zeta &= z \cdot \frac{\left(\frac{w}{3}\right)^{1 \cdot 1_5}}{s^3 \cdot 1_3} \end{aligned}$$

qu'on peut réduire la forme normale des équations à celle qu'on a nommé la *forme libre*, savoir

$$(4) \quad \begin{aligned} \zeta^3 + 3u\zeta &= 1 - u^3 \\ \zeta^4 + 4u\zeta &= 1 - 2 \cdot 2 \cdot u^4 \\ \zeta^5 + 5u\zeta &= 1 - 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot u^5 \end{aligned}$$

qui, dans les cas du troisième et du quatrième degré, donne les solutions

bien simples

$$(5) \quad \begin{aligned} \zeta &= 1 - u \\ \zeta &= -u + \sqrt{1 - u^2}; \quad \zeta = -u + \sqrt{1 + u^2} \end{aligned}$$

dont, en particulier, la solution de l'équation du quatrième degré paraît offrir un calcul plus expéditif que les formules anciennement proposées.

Au moyen de la substitution

$$\eta = \frac{\zeta}{u}$$

les équations se simplifient encore, devenant ⁽¹⁾

$$(6) \quad \begin{aligned} \eta^3 + \frac{3}{u} \eta &= \frac{1}{u^3} - 1 \\ \eta^4 + \frac{4}{u^2} \eta &= \frac{1}{u^4} - 4 \\ \eta^5 + \frac{5}{u^3} \eta &= \frac{1}{u^5} - 27 \end{aligned}$$

et possédant les *résolvantes*

$$(6a) \quad \begin{aligned} v_i + \frac{1}{u^3} &= 0 \\ v_i^2 + v_i + \frac{1}{4u^4} &= 0 \\ v_i^3 + v_i^2 + v_i + \frac{1}{27u^5} &= 0. \end{aligned}$$

Ayant formé, pour l'équation du cinquième degré, les trois racines de la dernière résolvante, et en posant

$$(7) \quad p_1 = \left(\frac{v_1}{3}\right)^{3/5}; \quad p_2 = \left(\frac{v_2}{3}\right)^{3/5}; \quad p_3 = \left(\frac{v_3}{3}\right)^{3/5},$$

c'est au moyen de ces éléments qu'on peut chercher d'abord les solutions convenables ⁽²⁾ de l'équation du cinquième degré, savoir

$$(8) \quad \eta^5 + \frac{5}{u^3} \eta = \frac{1}{u^5} - 27,$$

et cela de plusieurs manières. En particulier on peut adopter la formule

$$(9) \quad \frac{\eta}{K} = 1 + p_1 + p_2 + p_3 \qquad K = -\frac{3^{3/5}}{3}$$

à condition qu'on fasse varier la constante k , qui entre dans les quantités

$$v_2 = \rho \cdot e^{i\theta + 2k\pi i}; \quad v_3 = \rho \cdot e^{-i\theta - 2k\pi i}$$

⁽¹⁾ I. *Sur une équation algébrique remarquable, se trouvant en rapport à la Mécanique Celeste*, « Astron. iaktt. o. undersökn. Stockholms Observatorium », Band 8, n. 7, Stockholm 1907.

⁽²⁾ II. *Sur l'équation algébrique du cinquième degré*, « Annali di Matematica pura ed applicata », Bologna, Tome XI; 4, 1933.

de la manière exposée dans le memoire II, n°. 2 (1). La formule (9) se trouve ainsi expéditive dans les environs de l'origine des $\frac{1}{u^5}$.

2. Considérons maintenant le développement, dit *racinal*, de la racine de l'équation (8), subsistant tout d'abord pour des valeurs petites du paramètre u , c. a. d. aux environs du point $\frac{1}{u^5} = \infty$.

Cette expression, élaborée jusqu'aux termes du degré u^{20} entre les parenthèses, est la suivante (cfr. II (61))

$$\begin{aligned}
 \eta = & \frac{1}{u} \left[1 - \frac{6}{5} u^5 - \frac{52}{5^2} u^{10} + \frac{234}{5^3} u^{15} + \frac{46644}{5^4} u^{20} \dots \right] \\
 & - \left[1 + \frac{3}{5} u^5 + \frac{77}{5^2} u^{10} + \frac{1672}{5^3} u^{15} + \frac{18964}{5^4} u^{20} \dots \right] \\
 (10) \quad & - u \left[1 + \frac{2}{5} u^5 - \frac{33}{5^2} u^{10} - \frac{2352}{5^3} u^{15} - \frac{83961}{5^4} u^{20} \dots \right] \\
 & - u^2 \left[1 + \frac{11}{5} u^5 + \frac{168}{5^2} u^{10} + \frac{721}{5^3} u^{15} - \frac{107406}{5^4} u^{20} \dots \right] \\
 & + u^3 \left[* \quad * \quad * \quad * \quad \dots \right]
 \end{aligned}$$

ou bien, pour abrégier,

$$(10a) \quad \eta = \frac{1}{u} A - B - uC - u^2 D,$$

THÉOREME I. — Les termes de la dernière ligne s'évanouissent. Il y a, dans ce cas, une nouvelle résolvante aux même points doubles que dans le cas antérieur, savoir II, (67)

$$(11) \quad \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0$$

et on peut, en prenant la petite racine α correspondant à une petite valeur de u^5 , évidemment employer la quantité α comme élément de développement au lieu de u^5 dans la formule (10). Il sera même avantageux d'introduire une nouvelle quantité β , liée à α par la relation

$$(11a) \quad \beta = \alpha + \alpha^2$$

d'où il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 A = & 1 + \frac{6}{15} \beta - \frac{52}{15^2} \beta^2 + \frac{1116}{15^3} \beta^3 - \frac{37506}{15^4} \beta^4 \\
 (12) \quad B = & 1 - \frac{3}{15} \beta + \frac{77}{15^2} \beta^2 - \frac{2347}{15^3} \beta^3 + \frac{83989}{15^4} \beta^4
 \end{aligned}$$

(1) II. *Sur l'équation algébrique du cinquième degré*, « Annali di Matematica pura ed applicata », Bologna, Tome XI; 4, 1933.

$$C = 1 - \frac{2}{15} \beta - \frac{33}{15^2} \beta^2 + \frac{1902}{15^3} \beta^3 - \frac{78561}{15^4} \beta^4$$

$$D = 1 - \frac{11}{15} \beta + \frac{168}{15^2} \beta^2 - \frac{3116}{15^3} \beta^3 + \frac{79569}{15^4} \beta^4.$$

En réduisant ces séries à la forme de produits [II. (77)], on va trouver

$$(13) \quad \begin{aligned} A &= (1 + \beta)^{+\frac{6}{15}} (1 + \beta^2)^{-\frac{1}{9}} (1 + \beta^3)^{+\frac{1}{5} + \frac{9}{81}} (1 + \beta^4)^{-\frac{1}{9} - \frac{4}{5} + \frac{1}{81}} \\ B &= (1 + \beta)^{-\frac{3}{15}} (1 + \beta^2)^{+\frac{2}{9}} (1 + \beta^3)^{-\frac{3}{5} + \frac{3}{81}} (1 + \beta^4)^{+\frac{2}{9} + \frac{7}{5} - \frac{7}{81}} \\ C &= (1 + \beta)^{-\frac{2}{15}} (1 + \beta^2)^{-\frac{2}{9}} (1 + \beta^3)^{+\frac{3}{5} - \frac{1}{81}} (1 + \beta^4)^{-\frac{2}{9} - \frac{7}{5} - \frac{1}{81}} \\ D &= (1 + \beta)^{-\frac{11}{15}} (1 + \beta^2)^{+\frac{1}{9}} (1 + \beta^3)^{-\frac{1}{5} - \frac{7}{81}} (1 + \beta^4)^{+\frac{1}{9} + \frac{4}{5} - \frac{9}{81}} \end{aligned}$$

— expressions formant le point de départ du mémoire présent. De l'observation, faite à la fin du mémoire II, sur les exposants de ces expressions en produits, savoir qu'en général

$$(14) \quad a + d = b + c$$

a, b, c, d désignant les numérateurs des exposants dans A, B, C, D , et que de plus

$$a + d = 0; \quad b + c = 0$$

pour les exposants ayant les dénominateurs autres que 15 ou 81, il s'ensuit qu'on a

THÉORÈME II.

$$(15) \quad AD = BC$$

— relation fondamentale, qui se vérifie, en formant ces produits d'après les expressions (10), ce qui donne en effet

$$AD = BC = 1 + u^5 - 2u^{10} - 5u^{15} - 114u^{20} \dots$$

Pour simplifier, nous allons introduire les quantités

$$(16) \quad \gamma = \frac{\beta}{3}; \quad \left| \quad \delta = \frac{\alpha}{3}.$$

Selon que u^5, γ ou δ sont prises comme éléments des développements, on trouve des expressions diverses. Soit

$$(17) \quad AD = BC = 1 - s.$$

Le plus simple des développements possibles de s est alors le suivant

$$(17a) \quad s = \gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4$$

— expression finie, qui jusqu'aux termes du quatrième degré possède l'*inversion*:

$$(17b) \quad \gamma = s + 2s^2 + 4s^3 + 3s^4.$$

En posant encore

$$(18) \quad p = \frac{AC}{D},$$

on remarquera, parmi les diverses représentations possibles de cette quantité, la suivante de simplicité prépondérante

$$(19) \quad p = 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4.$$

3. On déduit des formules (15) et (18) les relations suivantes

$$D = \frac{1-s}{A}$$

$$C = p \cdot \frac{D}{A} = \frac{p(1-s)}{A^2}$$

$$B = \frac{1-s}{C} = \frac{A^2}{p},$$

de manière qu'on aura tout de suite

$$(20) \quad \eta = \frac{1}{u} \cdot A - \frac{A^2}{p} - u \cdot \frac{p}{A^2} \cdot (1-s) - u^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot (1-s).$$

Il s'agit maintenant de la détermination du coefficient A , quantité qui, des quatre séries A, B, C, D , paraît en effet la plus convenable pour notre but.

Toutefois, comme cette série A résiste encore à la déduction d'une expression acceptable au point de vue de la simplicité, nous avons procédé à en former la cinquième puissance, et parmi plusieurs représentations de A^5 avec l'une ou l'autre de nos variables, on a ainsi trouvé la suivante, jouissant de la symétrie analytique:

$$(21) \quad A_0^5 = 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6.$$

Mais, ainsi que pour ce qui concerne les autres quantités entrant dans l'expression (20), nous avons aussi considéré comme élément de développement la quantité s à côté des autres, comme γ, δ : cela fut réitéré pour A^5

et conduisit encore à une expression symétrique, savoir

$$(21a) \quad A^5 = 1 + 6s + 16s^2 + 52s^3 + 16s^4 + 6s^5 + s^6,$$

qui pourtant ne paraît pas appartenir à notre question proprement dite.

Ayant par suite choisi la formule (21), il s'agit encore d'en donner une extension propre à tenir compte des termes supérieurs au quatrième degré de u^5 dans le développement (10). Prenons à ce but le cas spécial

$$\frac{1}{u^5} = +3$$

où, comme on se persuade (cfr. II, page 2), on a

$$\eta = -3^{1/5} = -1.5518461.$$

On a encore dans ce cas

$$\alpha = -1; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0; \quad \delta = -\frac{1}{3}; \quad s = 0; \quad A_0^5 = \frac{262}{729}.$$

Faisant usage des formules (21) et (20), on obtient avec un accord avec la valeur vraie de $\eta = -1.55185$, qui à ce point éloigné de $\frac{1}{u^5} = \infty$ ne serait guère attendu, la valeur de

$$\eta = -1.58149,$$

présentant pourtant la différence $\Delta\eta = +0.02964$, propre à la détermination de l'extension dont il s'agit. L'étude numérique du cas conduit d'abord à l'équation du quatrième degré:

$$(22) \quad A_0^5 = A_1^5 [1 + 66\delta^5 A_1^5 + 66\delta^{10} (A_1^5)^2 + \delta^{15} (A_1^5)^3]$$

pour la détermination de la quantité A_1 , devant remplacer au premier abord la quantité A dans l'équation (20), après quoi on trouve encore la seconde équation du quatrième degré:

$$(23) \quad (A_1^5)^3 = (A^5)^3 [1 + \delta^{10} A^5],$$

tenant à un écart petit, restant après l'emploi de (22). Cette équation (23) fait déterminer la valeur de A , qui, en définitive, appartient à la formule (20), et qui maintenant fournit la valeur de la racine pour $\frac{1}{u^5} = +3$, savoir

$$\eta = -1.5518462; \quad \text{valeur vraie: } \eta = -1.5518461.$$

Les expressions entre parenthèses de (22) et (23) devant être considérées, par rapport à leurs coefficients, comme engendrées par l'expression (21), on

voit que les moyens de correction par cette voie sont bien épuisés par les deux équations (22) et (23).

4. Comme, au cas spécial considéré de $\frac{1}{u^5} = +3$, on a $s = 0$, il n'est pas cependant exclu qu'il y existe encore quelque correction, dépendant de s , et cela se trouve en effet être le cas. Considérons en effet en second lieu le point

$$\frac{1}{u^5} = 27$$

où l'on a $\eta = 0$ et, comme on trouve aisément,

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -\frac{1}{9}; \quad \alpha = -0.1247277; \quad \beta = -0.1091707; \quad \gamma = -0.0363902$$

$$A_0^5 = +0.7860507; \quad \delta = -0.0415759; \quad p = +0.8841906; \quad s = -0.0392366.$$

Dans ce cas, ainsi qu'à la plupart des cas appartenant à la formule (20), il est superflu de résoudre directement les équations (22) et (23), les valeurs de A_1 et de A s'obtenant par une ou deux approximations faciles. On trouve

$$\eta = -0.0000030 \quad \text{et par suite} \quad \Delta\eta = +0.0000030.$$

C'est la différence susdite, tenant à la quantité s , pour laquelle il n'y a plus de directive directe, parce que cette correction n'a pas lieu pour les équations de degré moindre. La seule chose dont on peut s'assurer sans calcul, c'est que le terme de correction dont il s'agit doit se trouver en dehors de l'expression (20), à laquelle par cela, et par quelques méditations numériques, nous allons substituer en définitive la formule

$$(20A) \quad \eta = -k \frac{s^5}{u^5} + \frac{1}{u} \cdot A$$

$$- \frac{A^2}{p}$$

$$- u \cdot \frac{p}{A^2} \cdot (1 - s)$$

$$- u^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot (1 - s),$$

où pour des valeurs de $\left| \frac{1}{u^5} \right|$ excédant la valeur de 27 on peut admettre

$$k = 1.$$

En général le terme correspondant est insensible pour ce domaine de $\frac{1}{u^5}$.

Pour $k = 1$, la dernière formule remplit la valeur de la racine pour $\frac{1}{u^5} = 27$.

Dans le cas de $\frac{1}{u^5} = 3$, où l'on a $s = 0$, le terme accessoire de (20A) s'évanouit.

Au sujet de ce terme — soit $\eta_0(u^5, s)$ — on peut à l'aide des écarts ayant lieu pour $\frac{1}{u^5} = 7$ et $\frac{1}{u^5} = -9$ chercher, au moyen de la formule d'interpolation de LAGRANGE, une expression remplissant la condition d'accord absolu aussi pour ces points, par exemple en mettant

$$\begin{aligned} \eta_0(u^5, s) = & \frac{s^5}{u^5} \left[\frac{27 - \frac{1}{u^5}}{16.36} + \frac{9 + \frac{1}{u^5}}{20.36} \right] \cdot \left(7 - \frac{1}{u^5} \right) \\ & + s^6 \left[\frac{10 \cdot \left(27 - \frac{1}{u^5} \right)^2 \left(9 + \frac{1}{u^5} \right)}{16} - \frac{8 \left(7 - \frac{1}{u^5} \right)}{16} \right] \cdot \left(27 - \frac{1}{u^5} \right), \end{aligned}$$

mais, parce qu'il s'ensuivrait de petits inconvénients pour d'autres motifs, il faut préférer la formule (20A). Aussi, parceque en tout cas il sera nécessaire de contrôler le calcul — qui n'est guère plus long que, par exemple, pour l'équation du quatrième degré — en mettant la valeur trouvée de la racine dans l'équation originale (8), on trouvera aussitôt la correction tenant au terme

$$-k \frac{s^5}{u^5},$$

sans qu'il soit nécessaire de connaître l'expression analytique du coefficient k .

5. Pour le domaine s'approchant de l'origine $\frac{1}{u^5} = 0$, il faut avoir recours à la formule (cfr. II, n.º 2)

$$(24) \quad \frac{\eta}{K} = 1 + p_1 + p_2 + p_3,$$

avec les conditions exposées *loco citato*, y inclus la relation remarquable

$$2f \mp p_1^2 = 0,$$

ayant lieu au voisinage immédiat de $\frac{1}{u^5} = 0$.

6. Pour le procédé de solution décrit dans ce qui précède, le point $\beta = -\frac{1}{4}$, appartenant à l'argument $\frac{1}{u^5} = 8$, mérite d'être considéré en particulier, mais il n'y a pas lieu à s'en occuper ici.

7. Par rapport à l'expression secondaire de A^5 (21a) on peut considérer le cas de $\frac{1}{u^5} = 3$. On trouverait ainsi

$$\begin{array}{rcl} (\eta) = \frac{1}{u} & = & 3^{1/5} \\ - 1 & - & 1 \\ - u & - & \frac{1}{3^{1/5}} \\ - u^2 & - & \frac{1}{3^{2/5}} \end{array}$$

d'où, parce que dans ce cas $\eta = -3^{1/5}$, il s'ensuit

$$\begin{array}{rcl} (\eta) = i \sqrt{\eta} & & \\ - 1 & & \\ + \frac{i}{\sqrt{\eta}} & & \\ + \frac{1}{\eta} & & \end{array}$$

c. a. d. une quantité nouvelle, ne coïncidant pas avec la valeur de la racine.

8. Exemple de calcul pour $\frac{1}{u^5} = 54$. On a dans ce cas

$$\begin{array}{rcl} \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -\frac{1}{18}; & \alpha = -0.05881085 & \gamma = -0.01845071 \\ & & \delta = -0.01960365 \\ & & s = -0.01915703. \end{array}$$

Les corrections successives sont insensibles, et l'on obtient

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{u} \cdot A & = & + 2.1697610 \\ - \frac{A^2}{p} & = & - 1.0122550 \\ - u \cdot \frac{p}{A^2} \cdot (1 - s) & = & - 0.4533905 \\ - u^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot (1 - s) & = & - 0.2115195. \\ \text{Somme: } \eta & = & + 0.4925960; \\ \text{valeur vraie: } \eta & = & + 0.4925958. \end{array}$$

9. Exposé succinct des formules, pour l'équation du cinquième degré,

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 3u^5 = 0 \quad \beta = \alpha + \alpha^2$$

$$\gamma = \frac{\beta}{3} \quad \delta = \frac{\alpha}{3}$$

$$(a) \quad p = 1 + 3\delta + 5\delta^2 - 4\delta^3 - 4\delta^4$$

$$s = \gamma - 2\gamma^2 + 4\gamma^3 - 3\gamma^4$$

$$A_0^5 = 1 + 6\delta + 22\delta^2 + 36\delta^3 + 22\delta^4 + 6\delta^5 + \delta^6$$

$$(b) \quad A_0^5 = A_1^5 [1 + 66\delta^5 A_1^5 + 66\delta^{10} (A_1^5)^2 + \delta^{15} (A_1^5)^3]$$

$$(A_1^5)^3 = (A^5)^3 [1 + \delta^{10} A^5]$$

$$\eta = -\frac{s^5}{u^5} + \frac{1}{u} A$$

(c)

$$- \frac{A^2}{p}$$

$$- u \cdot \frac{p}{A^2} \cdot (1 - s)$$

$$- u^2 \cdot \frac{1}{A} \cdot (1 - s).$$

On the infinitesimal deformations of a space.

E. T. DAVIES (London-Inghilterra)

1. Since the publication of LEVI-CIVITA'S paper on geodesic deviation in 1926 ⁽¹⁾, several works have appeared containing generalizations of the results contained in that paper. CARTAN ⁽²⁾ obtained a formula for the normal deviation between two minimal surfaces in a V_n , generalizing both the equations of geodesic deviation of LEVI-CIVITA, and a formula due to SCHWARZ for minimal surfaces in Euclidean space. Later SCHOUTEN ⁽³⁾ and BORTOLOTTI ⁽⁴⁾ have studied the corresponding problem for a minimal V_m in V_n .

SCHOUTEN obtains the expressions for the changes in the fundamental quantities of a V_m in a V_n when the points of a V_m are subjected to a displacement $\varepsilon\xi^i$, so that the new coordinates \bar{x}^i of the points are given by

$$(1) \quad \bar{x}^i = x^i + \varepsilon\xi^i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

He then obtains the equations to be satisfied by the ξ^i in order that a certain geometrical property possessed by the V_m (for example, of being minimal), may be possessed by the transformed V_m .

BORTOLOTTI starts from the expressions for the change in the metric tensor due to an infinitesimal deformation of the space, and obtains in tensor form the corresponding changes in the three-index symbols of CHRISTOFFEL for the V_n and for the V_m . He then obtains the conditions that the minimal property may be preserved.

In two recent papers SLEBODZINSKI ⁽⁵⁾ and van DANTZIG ⁽⁶⁾ have made

⁽¹⁾ T. LEVI-CIVITA, *Sur l'écart géodésique*, (« Math. Ann. », Bd. 97, 1926, pp. 291-3).

⁽²⁾ E. CARTAN, *Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes* (« Rend. Accad. Lincei », 1927, 1^o sem., ser. 6^a, vol. 5, pp. 275-278).

⁽³⁾ J. A. SCHOUTEN, *On infinitesimal deformations of a V_m in V_n* (« Proc. Kon. Akad. v. Wetenschappen », Amsterdam 1928, vol. 21, pp. 208-218).

⁽⁴⁾ E. BORTOLOTTI, *Scostamento geodetico e sue generalizzazioni* (« Giornale di Matem. », vol. LXVI, 1928, pp. 152-191).

⁽⁵⁾ W. SLEBODZINSKI, *Sur les transformations isomorphiques d'une variété à connexion affine* (« Prace Mat. Fiz. », Warszawa, T. XXXLX, 1932, pp. 55-62).

⁽⁶⁾ D. VAN DANTZIG, *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie* (« Proc. Kon. Akad. Amsterdam », vol. XXXV, 1932, p. 535).

use of an operation which is called « Lie derivation » by the latter, and which is substantially equivalent to a procedure employed by WEITZENBÖCK (1) in order to obtain the change in any tensor due to an infinitesimal transformation of the form (1). SLEBODZINSKI is concerned with the determination of spaces which admit an « isomorphic transformation », for which the ξ^t satisfy the condition that the parallel transport may not be changed by the transformation (1). In the following note we shall obtain expressions for the « deformations » of tensors of the manifold, as well as of the coefficients Γ_{ab}^c of the affine connexion. We shall refer to the « deformed space » as the space whose connexion is determined by the deformed values of the Γ_{ab}^c . Our standpoint therefore differs from that of SLEBODZINSKI in that the latter determines precisely the conditions that the space may not be « deformed ».

2. Let $T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}(x)$ be the components of a tensor field in an n -dimensional manifold X_n , and let the points of the manifold undergo an infinitesimal transformation of the form (1). The value of the tensor field at the new points \bar{x}^t will be given by

$$(2) \quad T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}(\bar{x}) = T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}(x) + \varepsilon \xi^\rho \cdot \partial_\rho T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}$$

where

$$\partial_\rho f = \frac{\partial f}{\partial x^\rho}$$

whereas if we regard (1) as a transformation of coordinates in the manifold and consider the consequent transformation in the $T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}$, namely

$$(3) \quad T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\bar{x}) = T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\alpha_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{k_p}}{\partial \bar{x}^{\beta_p}}$$

taking account of the fact that, in this case

$$(4) \quad \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^z} = \delta_z^t + \varepsilon \partial_z \xi^t; \quad \frac{\partial x^z}{\partial \bar{x}^t} = \delta_z^t - \varepsilon \partial_t \xi^z$$

we have

$$\bar{T}_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}(\bar{x}) = T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}(x) + \sum_{r=1}^p T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_r - 1 \rho i_r + 1 \dots i_p} \partial_\rho \xi^{i_r} - \sum_{s=1}^q T_{k_1 \dots k_{s-1} \rho k_{s+1} \dots k_p}^{i_1 \dots i_p} \partial_{k_s} \xi^\rho$$

The true variation or « deformation » of the field is the difference

$$\delta T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p} = T_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}(\bar{x}) - \bar{T}_{k_1 \dots k_p}^{i_1 \dots i_p}(\bar{x})$$

(1) R. WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*, p. 375.

which in this case becomes

$$(5) \quad \delta T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p} = \varepsilon \left\{ \xi^\rho \partial_\rho T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^q T_{k_1 \dots k_{s-1} \rho k_{s+1} \dots k_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{k_s} \xi^\rho - \sum_{r=1}^p T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_{r-1} \rho i_{r+1} \dots i_p} \partial_\rho \xi^{i_r} \right\} \quad (1).$$

We notice that so far we have not made use of any connexion parameters Γ_{ab}^c ($a, b, c = 1, 2, \dots, n$) which may be assigned in the X_n . If, however, we introduce the symbol of covariant derivation corresponding to the Γ_{ab}^c , the right hand side of (5) may be written in tensor form, and we therefore have

$$(6) \quad \delta T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p} = \varepsilon \left\{ \xi^\rho \nabla_\rho T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^q T_{k_1 \dots k_{s-1} \rho k_{s+1} \dots k_q}^{i_1 \dots i_p} \nabla_{k_s} \xi^\rho - \sum_{r=1}^p T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_{r-1} \rho i_{r+1} \dots i_p} \nabla_\rho \xi^{i_r} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{s=1}^q S_{k_s \rho}^{\cdot \sigma} T_{k_1 \dots k_{s-1} \gamma k_{s+1} \dots k_q}^{i_1 \dots i_p} \xi^\rho - 2 \sum_{r=1}^p S_{\sigma \rho}^{\cdot i_r} T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_{r-1} \gamma i_{r+1} \dots i_p} \xi_\rho^{\sigma} \right\}.$$

On applying the same procedure to the functions Γ_{ab}^c , we have

$$\Gamma_{ab}^c(\bar{x}) = \Gamma_{ab}^c(x) + \varepsilon \xi^\rho \partial_\rho \Gamma_{ab}^c$$

and remembering their law of transformation for a change of variables

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^c}{\partial x^a \partial x^b} = \Gamma_{ab}^c \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^\rho} - \bar{\Gamma}_{\sigma \rho}^c \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^b}$$

we have

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c(\bar{x}) = \Gamma_{ab}^c - \varepsilon [\partial_b \partial_a \xi^c + \Gamma_{a\rho}^c \partial_b \xi^\rho + \Gamma_{\rho b}^c \partial_a \xi^\rho - \Gamma_{ab}^c \partial_\rho \xi^c]$$

so that

$$(7) \quad \delta \Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c(\bar{x}) - \bar{\Gamma}_{ab}^c(\bar{x}) \\ = \varepsilon [\partial_b \partial_a \xi^c + \Gamma_{a\rho}^c \partial_b \xi^\rho + \Gamma_{\rho b}^c \partial_a \xi^\rho - \Gamma_{ab}^c \partial_\rho \xi^c + \xi^\rho \partial_\rho \Gamma_{ab}^c]$$

finally

$$\delta \Gamma_{ab}^c = \varepsilon [\nabla_b \nabla_a \xi^c + R_{bda}^{\cdot c} \xi^d + 2 \nabla_b (S_{ad}^{\cdot c} \xi^d)] \quad (2).$$

(1) The $\delta T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p}$ is called $\bar{X}(T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p})$ by SLEBODZINSKI, and $D_L(T_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_p})$ by VAN DANTZIG.

In SLEBODZINSKI's paper (5) is taken as the definition of the operator X .

(2) This expression for the $\delta \Gamma_{ab}^c$ in the Riemannian case occurs already in the previously cited paper by BORTOLOTTI (l. c. equation (93)). The conditions for an isomorphic transformation obtained by SLEBODZINSKI (l. c., p. 57, equations 1) are equivalent to $\delta \Gamma_{ab}^c = 0$ in our notation.

3 We shall now define the « deformed » space as being a space whose law of parallelism is determined in the following manner:

If a vector v^c at P is parallel to the vector w^c at Q in the original space, so that $v^c = w^c + \Gamma_{ab}^c w^a dx^b$, and if as the result of the transformation $\bar{x}^t = x^t + \varepsilon \xi^t$ which carries the point P to \bar{P} and Q to \bar{Q} , the vectors v^c and w^c become $\bar{v}^c = v^c (\partial_\rho^c + \varepsilon \partial_\rho^c \xi^c)$ and \bar{w}^c respectively: then the connexion parameters $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ for the deformed space will be determined by the condition that \bar{v}^c at \bar{P} and \bar{w}^c at \bar{Q} are parallel (relative to the new connexion), or that $\bar{v}^c = \bar{w}^c + \bar{\Gamma}_{ab}^c \bar{w}^a d\bar{x}^b$.

The $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ thus obtained are equal to $\Gamma_{ab}^c + \delta\Gamma_{ab}^c$ (1). The X_n can therefore be regarded as endowed with two sets of connexion parameters, the Γ_{ab}^c and the $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ the latter set being those of the deformed space. We are going to prove that the Torsion and Curvature tensors of the deformed space are equal to $S_{ab}^c + \delta S_{ab}^c$ and $R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}^{\dot{d}} + \delta R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}^{\dot{d}}$ as calculated from the general formula (6),

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ab}^c &= \frac{1}{2}(\bar{\Gamma}_{ab}^c - \bar{\Gamma}_{ba}^c) = S_{ab}^c + \frac{1}{2}(\delta\Gamma_{ab}^c - \delta\Gamma_{ba}^c) \\ &= S_{ab}^c + \varepsilon[\nabla_{[b}\nabla_{a]} + R_{[b}{}^{\dot{c}}{}_{\dot{a}]}{}^{\dot{d}}\xi^{\dot{d}} + 2\nabla_{[b}(S_{a]}{}^{\dot{c}}{}_{\dot{d}}\xi^{\dot{d}})]. \end{aligned}$$

If we now take account of the identities

$$(9) \quad 2\nabla_{[b}\nabla_{a]}\xi^c = R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}^{\dot{d}}\xi^{\dot{d}} + 2S_{\dot{b}\dot{a}}^{\dot{d}}\nabla_{\dot{d}}\xi^c$$

and

$$(10) \quad R_{[\dot{b}\dot{d}\dot{a}]}^{\dot{c}} = 4S_{[\dot{b}\dot{d}}^{\dot{e}}S_{\dot{a}]\dot{e}}^{\dot{c}} + 2\nabla_{[\dot{b}}S_{\dot{d}\dot{a}]}^{\dot{c}} \quad (2)$$

we obtain

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ab}^c &= S_{ab}^c + \varepsilon \{ \xi^\rho \nabla_\rho S_{ab}^c + S_{\dot{\rho}\dot{b}}^{\dot{c}} \nabla_a \xi^\rho + S_{\dot{a}\dot{\rho}}^{\dot{c}} \nabla_b \xi^\rho - S_{\dot{a}\dot{b}}^{\dot{\rho}} \nabla_\rho \xi^c + \\ &\quad + 2S_{\dot{a}\dot{\rho}}^{\dot{\sigma}} S_{\dot{\sigma}\dot{b}}^{\dot{c}} \xi^\rho + 2S_{\dot{b}\dot{\rho}}^{\dot{\sigma}} S_{\dot{a}\dot{\sigma}}^{\dot{c}} \xi^\rho - 2S_{\dot{a}\dot{b}}^{\dot{\sigma}} S_{\dot{\sigma}\dot{\rho}}^{\dot{c}} \xi^\rho \} \\ (11) \quad \dots \quad \bar{S}_{ab}^c &= S_{ab}^c + \delta S_{ab}^c. \end{aligned}$$

In order to make the corresponding calculation for the $R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}^{\dot{d}}$, let us write

$$\delta\Gamma_{ab}^c = \varepsilon\Lambda_{ab}^c$$

then

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}^{\dot{d}} &= \partial_a(\Gamma_{ba}^c + \varepsilon\Lambda_{ba}^c) - \partial_a(\Gamma_{bd}^c + \varepsilon\Lambda_{bd}^c) + (\Gamma_{ed}^c + \varepsilon\Lambda_{ed}^c)(\Gamma_{ba}^e + \varepsilon\Lambda_{ba}^e) - (\Gamma_{ea}^c + \varepsilon\Lambda_{ea}^c)(\Gamma_{bd}^e + \varepsilon\Lambda_{bd}^e) \\ &= R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}^{\dot{d}} + \varepsilon[\partial_a\Lambda_{ba}^c - \partial_a\Lambda_{bd}^c + \Gamma_{ed}^c\Lambda_{ba}^e + \Gamma_{ba}^e\Lambda_{ed}^c - \Gamma_{ea}^c\Lambda_{bd}^e - \Gamma_{bd}^e\Lambda_{ea}^c] + \text{terms in } \varepsilon^2 \\ &= R_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}}^{\dot{d}} + \varepsilon[\nabla_a\Lambda_{ba}^c - \nabla_a\Lambda_{bd}^c + 2S_{\dot{a}\dot{d}}^{\dot{e}}\Lambda_{be}^c]. \end{aligned}$$

(1) This fact is proved in a paper to be published shortly by P. DIENES, to whom I owe the above definition.

(2) SCHOUTEN, *Der Ricci Kalkul*, p. 88.

Substituting the values of Λ_{ab}^c in this expression, we obtain

$$\begin{aligned} \bar{R}_{adb}^c = R_{adb}^c + \varepsilon [R_{ad\rho}^c \nabla_b \xi^\rho + R_{a\rho b}^c \nabla_d \xi^\rho + R_{\rho db}^c \nabla_a \xi^\rho - R_{adb}^c \nabla_\rho \xi^c + \xi^\rho (\nabla_a R_{\rho db}^c + \nabla_d R_{a\rho b}^c) \\ + 2S_{b\rho}^{\sigma} R_{ad\sigma}^c \xi^\rho + 2S_{ad}^{\sigma} R_{\sigma\rho b}^c \xi^\rho - 2S_{\sigma\rho}^c R_{adb}^{\sigma} \xi^\rho]. \end{aligned}$$

But from the generalization of BIANCHI'S identity, we have

$$(12) \quad \nabla_a R_{\rho db}^c + \nabla_d R_{a\rho b}^c + \nabla_\rho R_{adb}^c = -2(S_{a\rho}^{\sigma} R_{d\sigma b}^c + S_{da}^{\sigma} R_{\rho\sigma b}^c + S_{\rho d}^{\sigma} R_{a\sigma b}^c).$$

Hence

$$\begin{aligned} \bar{R}_{adb}^c = R_{adb}^c + \varepsilon [\xi^\rho \nabla_\rho R_{adb}^c + R_{\rho db}^c \nabla_a \xi^\rho + R_{a\rho b}^c \nabla_d \xi^\rho + R_{adb}^c \nabla_\rho \xi^c - R_{adb}^c \nabla_\rho \xi^c + \\ + 2S_{a\rho}^{\sigma} R_{\sigma db}^c \xi^\rho + 2S_{d\rho}^{\sigma} R_{a\sigma b}^c \xi^\rho + 2S_{b\rho}^{\sigma} R_{ad\sigma}^c \xi^\rho - 2S_{\sigma\rho}^c R_{adb}^{\sigma} \xi^\rho] \\ (13) \quad \text{l. e. } \bar{R}_{adb}^c = R_{adb}^c + \delta R_{adb}^c \quad (1). \end{aligned}$$

4. The property which has just been proved valid for S_{ab}^c and R_{adb}^c , expressed by (9) and (10), is not restricted to expressions involving only the connexion parameters and their derivatives. It can also be proved to hold for expressions involving an arbitrary vector v^c in addition to the connexion parameters (2). We shall take as an example the covariant derivative $\nabla_b v^c$.

Denoting covariant derivation with respect to $\Gamma_{ab}^c + \delta\Gamma_{ab}^c$ by $\bar{\nabla}_b$, we shall prove that

$$(14) \quad \bar{\nabla}_b \bar{v}^c = \nabla_b v^c + \delta(\nabla_b v^c).$$

In fact, retaining only first order terms, we have

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_b \bar{v}^c = \nabla_b v^c + \delta\Gamma_{ab}^c \cdot v^a \\ = \nabla_b v^c + \varepsilon \{ \nabla_b \nabla_a v^c \cdot \xi^a + \nabla_\rho v^c \cdot \nabla_b \xi^\rho - \nabla_b v^\rho \cdot \nabla_\rho \xi^c - 2v^a \cdot \nabla_b (S_{ad}^c \xi^d) - 2S_{ad}^c \cdot \nabla_b v^a \cdot \xi^d \} + \delta\Gamma_{ab}^c \cdot v^a. \end{aligned}$$

On substituting for $\delta\Gamma_{ab}^c$ and using the identity (9), we obtain

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_b \bar{v}^c = \nabla_b v^c + \varepsilon \{ \nabla_a \nabla_b v^c \cdot \xi^a + \nabla_\rho v^c \cdot \nabla_b \xi^\rho - \nabla_b v^\rho \cdot \nabla_\rho \xi^c + 2S_{bd}^{\rho} \nabla_\rho v^c \cdot \xi^d - 2S_{\rho d}^c \nabla_b v^\rho \cdot \xi^d \} \\ \text{l. e. } \bar{\nabla}_b \bar{v}^c = \nabla_b v^c + \delta(\nabla_b v^c). \end{aligned}$$

5. If we apply the preceding considerations to the question of geodesic deviation, we can obtain in a very simple form, the equations given by LEVI-CIVITA for the normal deviation.

(1) SLEBODZINSKI (l. c.) obtains $\delta S_{ab}^c = 0$ and $\delta R_{adb}^c = 0$ as the conditions of integrability of the equations $\delta\Gamma_{ab}^c = 0$.

(2) More generally it subsists also for any differential invariant involving arbitrary functions, of the connexion, owe this remark to prof. BORTOLOTTI, for whose helpful correspondence I am deeply grateful.

Let

$$(15) \quad \frac{d^2 x^c}{ds^2} + \Gamma_{ab}^c \frac{dx^a}{ds} \cdot \frac{dx^b}{ds} = 0$$

be a geodesic of the space passing through the point $P(x^i)$, and let each point of this geodesic undergo an infinitesimal displacement normal to the curve so that the element of arc is not changed (¹).

If $\bar{x}^c = x^c + \varepsilon \xi^c$ are the coordinates of points on the new curve, we shall have

$$(16) \quad \frac{d\bar{x}^c}{ds} = \frac{dx^\rho}{ds} (\delta_\rho^c + \varepsilon \partial_\rho \xi^c)$$

and

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}^c}{ds^2} &= \frac{d^2 x^c}{ds^2} + \varepsilon \left(\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} \partial_\rho \xi^c + \frac{dx^a}{ds} \cdot \frac{dx^b}{ds} \cdot \partial_b \partial_a \xi^c \right) \\ &= \frac{d^2 x^c}{ds^2} + \varepsilon \frac{dx^a}{ds} \cdot \frac{dx^b}{ds} (\partial_b \partial_a \xi^c - \Gamma_{ab}^c \partial_\rho \xi^c). \end{aligned}$$

The curve passing through $\bar{P}(\bar{x}^i)$ will be also geodesic provided

$$\frac{d^2 \bar{x}^c}{ds^2} + (\Gamma_{ab}^c + \varepsilon \xi^\rho \cdot \partial_\rho \Gamma_{ab}^c) \frac{d\bar{x}^a}{ds} \cdot \frac{d\bar{x}^b}{ds} = 0.$$

On taking account of (15), (16) and (17), this condition becomes

$$(\partial_b \partial_a \xi^c + \Gamma_{\rho b}^c \partial_a \xi^\rho + \Gamma_{a\rho}^c \partial_b \xi^\rho - \Gamma_{ab}^c \partial_\rho \xi^c + \xi^\rho \partial_\rho \Gamma_{ab}^c) \frac{dx^a}{ds} \cdot \frac{dx^b}{ds} = 0$$

or

$$(18) \quad (\delta \Gamma_{ab}^c) \frac{dx^a}{ds} \cdot \frac{dx^b}{ds} = 0.$$

For the case in which the Γ_{ab}^c are the three-index symbols of CHRISTOFFEL, these equations reduce to the equations of normal deviation of LEVI-CIVITA.

6. When the Γ_{ab}^c are unrestricted the equations (18) represent the condition that the autoparallel property of the curves defined by the differential equations (15) may be preserved on deformation. These lines are only lines of extremal length in the space provided:

$$(19) \quad \Gamma_{ab}^c = \left\{ \begin{matrix} c \\ ab \end{matrix} \right\} + S_{ab}^{\cdot\cdot c}.$$

(¹) LEVI-CIVITA (l. c., p. 317) points out that the deviation need not necessarily be *normal* in order that the two arcs of geodesics may be equal.

If we restrict ourselves to this case, we shall have as a consequence of our definition of parallelism in the deformed space, — *That if a space possesses the property that autoparallels are lines of extremal length, then the deformed space will also possess this property.*

This fact follows immediately from the fact that the operation δ is permutable with addition (¹), so that

$$\delta\Gamma_{ab}^c = \delta \left\{ \begin{matrix} c \\ ab \end{matrix} \right\} + \delta S_{ab}^{\cdot\cdot c}.$$

Hence

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c + \delta\Gamma_{ab}^c = \left\{ \begin{matrix} c \\ ab \end{matrix} \right\} + S_{ab}^{\cdot\cdot c} + \delta \left\{ \begin{matrix} c \\ ab \end{matrix} \right\} + \delta S_{ab}^{\cdot\cdot c}$$

$$\text{i. e. } \bar{\Gamma}_{ab}^c = \left\{ \begin{matrix} \bar{c} \\ ab \end{matrix} \right\} + S_{ab}^{\cdot\cdot c}$$

so that the symmetrical part of the $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ are the three-index symbols of CHRISTOFFEL calculated with the deformed metric coefficients.

(¹) VAN DANTZIG (l. c., p. 537).

Sopra una formula di Curtiss (*).

Memoria di SILVIO CINQUINI (a Pisa).

Sunto. - È noto che DARBOUX, WEIERSTRASS e CURTISS hanno dato tre differenti estensioni della formula del valor medio alle funzioni di variabile complessa.

Nella presente Memoria si danno alcune estensioni dei risultati di CURTISS ad un'espressione (in cui compaiono i valori di una data funzione in $n + 1$ punti) analoga a quella a cui recentemente il prof. MONTEL ha esteso le formule di DARBOUX e di WEIERSTRASS.

È noto che la formula del valor medio non è senz'altro applicabile alle funzioni di variabile complessa e che, per queste funzioni, DARBOUX, WEIERSTRASS e CURTISS hanno dato tre differenti estensioni di tale formula.

In un recente articolo ⁽¹⁾ il prof. MONTEL ha esteso il risultato di DARBOUX ad un'espressione più generale, formata con i valori di una data funzione in $n + 1$ punti, ed ha accennato ad un'analogia estensione per la formula di WEIERSTRASS.

Nel presente lavoro mi propongo invece di dare alcune estensioni dei risultati del CURTISS ad un'espressione analoga a quella considerata dal MONTEL ^(1*).

Ringrazio il prof. TONELLI che mi ha indicato tale questione e il prof. ASCOLI che mi ha dato alcuni utili suggerimenti.

1. Generalità. — Richiamo innanzi tutto le due proposizioni del CURTISS ⁽²⁾ che estendono il teorema del valor medio alle funzioni di variabile complessa:

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) P. MONTEL, *Sur une formule de Darboux et les polynomes d'interpolation*. « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », Serie II. vol. I (1932), pagg. 371-84.

(1*) Si veda anche: EBERHARD HOPF, *Ein Analogon zu einem Mittelwertsatz von H. A. Schwarz bei komplexen Polynomen* (« Jahresbericht der deutschen Mathematiker vereinigung », T. 37 (1928), pagg. 249-51). In tale Nota l'HOPF stabilisce, solamente per i polinomi, e con procedimento completamente diverso da quello qui tenuto, una formula che presenta qualche analogia con i risultati del presente lavoro.

(2) D. R. CURTISS, *On certain Theorems of Mean value for Analytic Functions of a complex Variable*. « Annals of Mathematics », Serie II, vol. 8 (1907), pagg. 118-26; n. 1 e 2.

α) Sia a un punto interno ad una regione B , nella quale $f(z)$ è analitica regolare. Allora esiste un intorno A di a tale che per ogni valore di z in A l'equazione

$$f(z) - f(a) - (z - a)f'(a + \theta[z - a]) = 0$$

è soddisfatta da un valore di θ che verifica la disuguaglianza

$$\left| \theta - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

β) Sia a un punto interno ad una regione B , nella quale $f(z)$ è analitica regolare, mentre è $f'(a) \neq 0$. Allora esiste un intorno A di a tale che per tutti i valori z_1 e z_2 in A l'equazione

$$f(z_1) - f(z_2) - (z_1 - z_2)f'(z_2 + \theta[z_1 - z_2]) = 0$$

ha una soluzione soddisfacente alla disuguaglianza

$$\left| \theta - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

Per ben comprendere lo scopo del presente lavoro è opportuno rilevare che, mentre nella formula di DARBOUX

$$f(z_2) - f(z_1) = \lambda(z_2 - z_1)f'(\eta),$$

in cui η è l'affissa di un punto del segmento rettilineo $z_1 z_2$, compare un numero complesso λ di modulo non superiore all'unità, e mentre in quella di WEIERSTRASS

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)Z_1$$

si può soltanto affermare che Z_1 è un punto appartenente al campo di convessità dei valori che prende $f'(z)$ quando z descrive il segmento rettilineo $z_1 z_2$, nella formula di CURTISS figura il valore della derivata $f'(z)$ in un punto interno al cerchio avente per diametro la distanza dei due punti considerati.

Nel presente lavoro si considera l'espressione (analoga a quella del MONTEL)

$$(1) \quad D_n[f(z)] \equiv \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^{n-1} & f(z_0) \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} & f(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} & f(z_n) \end{vmatrix},$$

ove z_0, z_1, \dots, z_n sono le affisse di $n + 1$ punti appartenenti a un campo, in cui la funzione $f(z)$ è analitica regolare.

Si noti che, per la (1), $D_n[z^n]$ è il determinante di VANDERMONDE delle $n + 1$ quantità z_0, z_1, \dots, z_n .

2. Teorema I. — *Se la funzione analitica $f(z)$ è regolare in z_0 , esiste un intorno circolare $(z_0; r_0')$ di z_0 , in cui $f(z)$ è ancora regolare, e tale che, considerati n punti qualunque z_1, z_2, \dots, z_n , tali che il massimo modulo delle differenze $z_0 - z_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) sia $r_0 \leq r_0'$, risulta*

$$(2) \quad D_n[f(z)] = D_n[z^n] \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ove ξ è un punto interno al cerchio $(z_0; r_0)$ ⁽³⁾.

DIMOSTRAZIONE. — Se due qualunque degli $n + 1$ punti z_0, z_1, \dots, z_n coincidono, i determinanti $D_n[f(z)]$ e $D_n[z^n]$ sono nulli, perchè hanno due linee uguali, e la (2) è sempre verificata.

Eliminato così questo caso banale, si supporrà sempre che gli $n + 1$ punti z_0, z_1, \dots, z_n siano a due a due distinti.

Nell'intorno di z_0 si ha

$$(3) \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu}(z - z_0)^{\nu}.$$

Sia R un numero positivo minore del raggio di convergenza della serie (3); indicato con M il massimo modulo di $f(z)$ sulla circonferenza $(z_0; R)$, per una nota disuguaglianza di CAUCHY è

$$(4) \quad |C_{\nu}| \leq \frac{M}{R^{\nu}}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Si tenga presente che è $C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ e, per considerare senz'altro il caso più generale, si supponga che C_{n+m} ($m \geq 1$) sia il primo coefficiente C_{ν} , di indice maggiore di n , che non sia nullo; si abbia cioè

$$(5) \quad C_{n+1} = C_{n+2} = \dots = C_{n+m-1} = 0; \quad C_{n+m} \neq 0.$$

Si prendano n punti qualunque z_1, z_2, \dots, z_n interni al cerchio $(z_0; R)$, distinti da z_0 e tra loro, e sia r_0 il massimo modulo delle differenze $z_0 - z_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Tenuta presente la (1), in virtù della (3) risulta

$$D_n[f(z)] = D_n \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu}(z - z_0)^{\nu} \right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} D_n[(z - z_0)^{\nu}] = \sum_{\nu=n}^{\infty} C_{\nu} D_n[(z - z_0)^{\nu}],$$

⁽³⁾ Con cerchio $(z_0; r_0)$ si intende il cerchio di centro z_0 e raggio r_0 .

ove si è tenuto conto che i determinanti $D_n[1], D_n[z - z_0], \dots, D_n[(z - z_0)^{n-1}]$ sono nulli, poichè in ciascuno di essi l'ultima colonna è una combinazione lineare delle precedenti.

Si consideri il rapporto $\frac{D_n[f(z)]}{D_n[z^n]}$, il cui denominatore è, per ogni n -pla z_1, z_2, \dots, z_n , determinata nel modo sopra indicato, un numero sempre diverso da zero.

Ricordando che il rapporto dei determinanti $D_n[z^\nu]$ e $D_n[z^n]$, ($\nu > n$) è uguale a ⁽⁴⁾

$$\frac{D_n[z^\nu]}{D_n[z^n]} = [z_0, z_1, \dots, z_n]^{\nu-n},$$

ove si indicata con $[z_0, z_1, \dots, z_n]^{\nu-n}$ l'espressione (chiamata da WRONSKI *funzione aleph*), che si ottiene dallo sviluppo della potenza $(\nu - n)$ -ma del polinomio $z_0 + z_1 + \dots + z_n$, quando in tale sviluppo si facciano tutti i coefficienti uguali all'unità, si deduce facilmente che ⁽⁵⁾

$$\frac{D_n[(z - z_0)^\nu]}{D_n[z^n]} = [(z_1 - z_0), (z_2 - z_0), \dots, (z_n - z_0)]^{\nu-n}.$$

Pertanto, tenendo conto delle (5), risulta

$$\frac{D_n[f(z)]}{D_n[z^n]} = C_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} C_\nu [(z_1 - z_0), (z_2 - z_0), \dots, (z_n - z_0)]^{\nu-n}.$$

⁽⁴⁾ Vedi p. es.: TH. MUIR, *A Treatise on the Theory of Determinants*. « Priv. publ. Albany », New-York (1930); Cap. XI, n.º 335, pagg. 329-31.

⁽⁵⁾ Come si verifica immediatamente. Si ha infatti

$$\frac{D_n[(z - \alpha)^\nu]}{D_n[z^n]} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_0 \dots z_0^{n-1} (z_0 - \alpha)^\nu \\ 1 & z_1 \dots z_1^{n-1} (z_1 - \alpha)^\nu \\ \dots & \dots \\ 1 & z_n \dots z_n^{n-1} (z_n - \alpha)^\nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0 \dots z_0^{n-1} z_0^n \\ 1 & z_1 \dots z_1^{n-1} z_1^n \\ \dots & \dots \\ 1 & z_n \dots z_n^{n-1} z_n^n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_0 - \alpha \dots (z_0 - \alpha)^{n-1} (z_0 - \alpha)^\nu \\ 1 & z_1 - \alpha \dots (z_1 - \alpha)^{n-1} (z_1 - \alpha)^\nu \\ \dots & \dots \\ 1 & z_n - \alpha \dots (z_n - \alpha)^{n-1} (z_n - \alpha)^\nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0 - \alpha \dots (z_0 - \alpha)^{n-1} (z_0 - \alpha)^n \\ 1 & z_1 - \alpha \dots (z_1 - \alpha)^{n-1} (z_1 - \alpha)^n \\ \dots & \dots \\ 1 & z_n - \alpha \dots (z_n - \alpha)^{n-1} (z_n - \alpha)^n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t_0 \dots t_0^{n-1} t_0^\nu \\ 1 & t_1 \dots t_1^{n-1} t_1^\nu \\ \dots & \dots \\ 1 & t_n \dots t_n^{n-1} t_n^\nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_0 \dots t_0^{n-1} t_0^n \\ 1 & t_1 \dots t_1^{n-1} t_1^n \\ \dots & \dots \\ 1 & t_n \dots t_n^{n-1} t_n^n \end{vmatrix}},$$

ove si è posto $z_i - \alpha = t_i$, ($i = 0, 1, \dots, n$).

Pertanto, per la proprietà già ricordata, risulta

$$\frac{D_n[(z - \alpha)^\nu]}{D_n[z^n]} = [t_0, t_1, \dots, t_n]^{\nu-n} = [(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), (z_2 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{\nu-n};$$

e quindi, per $\alpha = z_0$, si ha

$$\frac{D_n[(z - z_0)^\nu]}{D_n[z^n]} = [0, (z_1 - z_0), (z_2 - z_0), \dots, (z_n - z_0)]^{\nu-n} = [(z_1 - z_0), (z_2 - z_0), \dots, (z_n - z_0)]^{\nu-n}.$$

Siccome d'altra parte per ogni z , che sia interno al cerchio $(z_0; R)$, si ha dalla (3) e tenendo poi conto delle (5)

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z) = C_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \binom{\nu}{n} C_{\nu} (z - z_0)^{\nu-n} = C_n + \sum_{\nu=n+m}^{\infty} \binom{\nu}{n} C_{\nu} (z - z_0)^{\nu-n},$$

per provare l'asserto basterà far vedere che se r_0 è abbastanza piccolo esiste almeno un punto ξ , interno al cerchio $(z_0; r_0)$ e verificante l'uguaglianza

$$(6) \quad \sum_{\nu=n+m}^{\infty} \binom{\nu}{n} C_{\nu} (\xi - z_0)^{\nu-n} = \sum_{\nu=n+m}^{\infty} C_{\nu} [(z_1 - z_0), (z_2 - z_0), \dots, (z_n - z_0)]^{\nu-n}.$$

Si indichi allora con $\mu(z_0; r_0)$ il minimo modulo, sulla circonferenza $(z_0; r_0)$, della funzione $\sum_{\nu=n+m}^{\infty} \binom{\nu}{n} C_{\nu} (z - z_0)^{\nu-n}$; poichè questa funzione si annulla per $z = z_0$, per una nota proprietà delle funzioni analitiche ⁽⁶⁾ essa assume entro la circonferenza $(z_0; r_0)$ almeno una volta ogni valore di modulo minore di $\mu(z_0; r_0)$; basta dunque prendere r_0 in modo che il massimo modulo dell'espressione che figura al secondo membro della (6) sia inferiore a $\mu(z_0; r_0)$.

Poichè r_0 è il massimo modulo delle differenze $z_0 - z_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), tenendo conto della (4) e tenendo presente che il numero dei termini dello sviluppo di $[(z_1 - z_0), (z_2 - z_0), \dots, (z_n - z_0)]^{\nu-n}$ è $\binom{\nu-1}{\nu-n}$, risulta

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\nu=n+m}^{\infty} C_{\nu} [(z_1 - z_0), (z_2 - z_0), \dots, (z_n - z_0)]^{\nu-n} \right| \leq \\ & \leq |C_{n+m}| \binom{n+m-1}{m} r_0^m + \sum_{\nu=n+m+1}^{\infty} \frac{M}{R^{\nu}} \binom{\nu-1}{\nu-n} r_0^{\nu-n} \leq \\ & \leq |C_{n+m}| \binom{n+m-1}{m} r_0^m + M \binom{n+m}{m+1} \sum_{\nu=n+m+1}^{\infty} \binom{\nu-1}{\nu-n-m-1} \frac{r_0^{\nu-n}}{R^{\nu}}, \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto che, per $\nu \geq n+m+1$, è sempre

$$\binom{\nu-1}{\nu-n} \leq \binom{n+m}{m+1} \binom{\nu-1}{\nu-n-m-1};$$

⁽⁶⁾ Vedi p. es.: L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa ecc.* (Ediz. II; Spoerri, Pisa (1916)), Cap. V, § 57, pagg. 179-80. Si tratta, del resto, di un'immediata applicazione del noto teorema di ROUCHÉ.

e ponendo $j = \nu - n - m - 1$, si deduce, poichè è $r_0 < R$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\nu=n+m}^{\infty} C_{\nu} [(z_1 - z_0), (z_2 - z_0), \dots, (z_n - z_0)]^{\nu-n} \right| \leq \\ & \leq |C_{n+m}| \binom{n+m-1}{m} r_0^m + M \binom{n+m}{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+n+m}{j} \frac{r_0^{j+m+1}}{R^{j+n+m+1}} = \\ & = |C_{n+m}| \binom{n+m-1}{m} r_0^m + M \binom{n+m}{m+1} \frac{r_0^{m+1}}{R^{n+m+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+n+m}{j} \left(\frac{r_0}{R}\right)^j = \\ & = |C_{n+m}| \binom{n+m-1}{m} r_0^m + \frac{M \binom{n+m}{m+1} r_0^{m+1}}{R^{n+m+1} \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^{n+m+1}} = \\ & = r_0^m \left[|C_{n+m}| \binom{n+m-1}{m} + \frac{M \binom{n+m}{m+1} r_0}{(R-r_0)^{n+m+1}} \right]. \end{aligned}$$

D'altra parte, tenendo conto della (4), si ha

$$\mu(z_0; r_0) \geq \binom{n+m}{n} |C_{n+m}| r_0^m - \sum_{\nu=n+m+1}^{\infty} \binom{\nu}{n} \frac{M}{R^{\nu}} r_0^{\nu-n},$$

e siccome, per $\nu \geq n+m+1$, è sempre

$$\binom{\nu}{n} \leq \binom{n+m+1}{m+1} \binom{\nu}{\nu-n-m-1},$$

si ha *a fortiori*

$$\mu(z_0; r_0) \geq \binom{n+m}{m} |C_{n+m}| r_0^m - M \binom{n+m+1}{m+1} \sum_{\nu=n+m+1}^{\infty} \binom{\nu}{\nu-n-m-1} \frac{r_0^{\nu-n}}{R^{\nu}}$$

ed anche, ponendo $j = \nu - n - m - 1$, e procedendo come sopra

$$\begin{aligned} \mu(z_0; r_0) & \geq \binom{n+m}{n} |C_{n+m}| r_0^m - M \binom{n+m+1}{m+1} \frac{r_0^{m+1}}{R^{n+m+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+n+m+1}{j} \left(\frac{r_0}{R}\right)^j = \\ & = r_0^m \left[\binom{n+m}{m} |C_{n+m}| - M \binom{n+m+1}{m+1} \frac{Rr_0}{(R-r_0)^{n+m+2}} \right]. \end{aligned}$$

Pertanto esiste sicuramente un punto ξ , interno al cerchio $(z_0; r_0)$ e che verifica la (6), se è

$$\begin{aligned} & r_0^m \left[|C_{n+m}| \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m}{m+1} \frac{Mr_0}{(R-r_0)^{n+m+1}} \right] < \\ & < r_0^m \left[\binom{n+m}{m} |C_{n+m}| - \binom{n+m+1}{m+1} \frac{MRr_0}{(R-r_0)^{n+m+2}} \right] \end{aligned}$$

ossia, essendo $\binom{n+m}{m} - \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m-1}{m-1}$, se si ha

$$(7) \quad M \left[\binom{n+m}{m+1} + \binom{n+m+1}{m+1} \frac{R}{R-r_0} \right] \frac{r_0}{(R-r_0)^{n+m+1}} < \binom{n+m-1}{m-1} |C_{n+m}|.$$

Poichè il primo membro di quest'ultima disuguaglianza tende a zero per $r_0 \rightarrow 0$, e il secondo membro (che è sempre positivo) non dipende da r_0 , esiste certamente un valore r_0' di r_0 che soddisfa a tale disuguaglianza, e siccome ogni $r_0 < r_0'$ la verifica *a fortiori*, ciò basta per provare il teorema enunciato.

OSSERVAZIONE. — È anche possibile dare in forma esplicita un valore accettabile per r_0' .

A tal uopo si osservi innanzi tutto che, sostituendo ai coefficienti binomiali le loro espressioni, la (7) diviene, a riduzioni fatte,

$$\frac{[(2n+m+1)R - nr_0]r_0}{(R-r_0)^{n+m+2}} < \frac{m(m+1) |C_{n+m}|}{(n+m)M},$$

ossia, posto $\frac{m(m+1) |C_{n+m}|}{n+m} \frac{1}{M} = \Lambda$,

$$\frac{[(2n+m+1)R - nr_0]r_0}{(R-r_0)^{n+m+2}} < \Lambda.$$

Posto ora

$$\varphi(r_0) = \Lambda(R-r_0)^{n+m+2} + nr_0^2 - (2n+m+1)Er_0,$$

si ha

$$\varphi'(r_0) = -(n+m+2)\Lambda(R-r_0)^{n+m+1} + 2nr_0 - (2n+m+1)E,$$

$$\varphi''(r_0) = (n+m+1)(n+m+2)\Lambda(R-r_0)^{n+m} + 2n,$$

donde si vede che, per $0 < r_0 < R$, $\varphi'(r_0)$ è positiva. Dalla formula di TAYLOR-LAGRANGE risulta perciò, per $0 < r_0 < R$,

$$\varphi(r_0) > \varphi(0) + r_0\varphi'(0),$$

onde si soddisfa certamente allo scopo con un valore di r_0 tale che sia insieme

$$0 < r_0 < R, \quad \varphi(0) + r_0\varphi'(0) \geq 0.$$

Si trova facilmente che le due condizioni sono compatibili e si ha precisamente

$$r_0 \leq \frac{R}{n+m+2 + \frac{2n+m+1}{\Lambda R^{n+m}}}.$$

Si può dunque prendere

$$r_0' = \frac{R}{n+m+2 + \frac{2n+m+1}{\Lambda R^{n+m}}} =$$

$$= \frac{R}{n+m+2 + \frac{(2n+m+1)(n+m)}{m(m+1)} \frac{M}{|C_{n+m}| R^{n+m}}}.$$

3. Teorema II. — *La funzione analitica $f(z)$ sia regolare nel punto α , e sia $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$.*

Esiste allora un intorno circolare $(\alpha; r_0')$ di α , in cui $f(z)$ è regolare e tale che, considerati $n+1$ punti qualunque z_0, z_1, \dots, z_n , tali che il massimo modulo delle differenze $\alpha - z_i$, ($i=0, 1, 2, \dots, n$) sia $r_0 \leq r_0'$, e tali inoltre che si abbia

$$(8) \quad z_0 + z_1 + \dots + z_n = (n+1)\alpha,$$

risulta

$$(9) \quad D_n[f(z)] = D_n[z^n] \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ove ξ è un punto interno al cerchio $(\alpha; r_0)$.

DIMOSTRAZIONE. — Si può senz'altro supporre che i punti z_0, z_1, \dots, z_n siano a due a due distinti, poichè in caso contrario, come si è già osservato al principio della dimostrazione del n.º 2, la (9) è sempre verificata.

Nell'intorno di α si ha

$$(10) \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - \alpha)^{\nu}.$$

Sia R un numero positivo minore del raggio di convergenza della serie (10); indicato con M il massimo modulo di $f(z)$ sulla circonferenza $(\alpha; R)$, per una nota disuguaglianza di CAUCHY, è

$$(11) \quad |a_{\nu}| \leq \frac{M}{R^{\nu}}, \quad (\nu=0, 1, 2, \dots).$$

Poichè, come è noto, è $a_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$, in virtù dell'ipotesi $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$, risulta anche $a_{n+1} \neq 0$.

Si prendano $n+1$ punti z_0, z_1, \dots, z_n , interni al cerchio $(\alpha; R)$, e soddisfacenti alla (8), e sia r_0 il massimo modulo delle differenze $\alpha - z_i$, ($i=0, 1, 2, \dots, n$).

Tenuta presente la (1), in virtù della (10) risulta

$$D_n[f(z)] = D_n \left[\sum_{v=0}^{\infty} a_v (z - \alpha)^v \right] = \sum_{v=0}^{\infty} a_v D_n [(z - \alpha)^v] = \sum_{v=n}^{\infty} a_v D_n [(z - \alpha)^v],$$

ove si è tenuto conto che i determinanti $D_n[1]$, $D_n[z - \alpha]$, ..., $D_n[(z - \alpha)^{n-1}]$ sono nulli, poichè in ciascuno di essi l'ultima colonna è una combinazione lineare delle precedenti.

Considerato il rapporto $\frac{D_n[f(z)]}{D_n[z^n]}$, il cui denominatore è, per ogni $(n+1)$ -pla determinata nel modo sopra indicato, un numero diverso da zero, procedendo in modo analogo al n.º 2, risulta

$$\begin{aligned} \frac{D_n[f(z)]}{D_n[z^n]} &= a_n + a_{n+1}[(z_0 - \alpha) + (z_1 - \alpha) + \dots + (z_n - \alpha)] + \\ &+ \sum_{v=n+2}^{\infty} a_v [(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[v-n]}, \end{aligned}$$

ove con $[(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[v-n]}$ si intende ancora l'espressione indicata al n.º 2.

Tenendo conto della (8) si ha

$$\frac{D_n[f(z)]}{D_n[z^n]} = a_n + \sum_{v=n+2}^{\infty} a_v [(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[v-n]}.$$

Siccome d'altra parte, per ogni z che sia interno al cerchio $(\alpha; R)$, si ha dalla (10)

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = a_n + \sum_{v=n+1}^{\infty} \binom{v}{n} a_v (z - \alpha)^{v-n},$$

per provare l'asserto basterà far vedere che, se r_0 è abbastanza piccolo, esiste almeno un punto ξ , interno al cerchio $(\alpha; r_0)$ e verificante l'uguaglianza

$$(12) \quad \sum_{v=n+1}^{\infty} \binom{v}{n} a_v (\xi - \alpha)^{v-n} = \sum_{v=n+2}^{\infty} a_v [(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[v-n]}.$$

Si indichi allora con $\mu(\alpha; r_0)$ il minimo modulo, sulla circonferenza $(\alpha; r_0)$, della funzione $\sum_{v=n+1}^{\infty} \binom{v}{n} a_v (z - \alpha)^{v-n}$; poichè questa funzione si annulla per $z - \alpha$, per la proprietà delle funzioni analitiche già sfruttata al n.º precedente, essa

assume entro la circonferenza $(\alpha; r_0)$ almeno una volta ogni valore di modulo minore di $\mu(\alpha; r_0)$; basta dunque prendere r_0 in modo che il massimo modulo dell'espressione che figura al secondo membro della (12) sia inferiore a $\mu(\alpha; r_0)$.

Ora, poichè r_0 è il massimo modulo delle differenze $\alpha - z_i$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), tenendo conto della (11) e tenendo presente che il numero dei termini dello sviluppo di $[(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[\nu-n]}$ è $\binom{\nu}{\nu-n}$, risulta

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} a_{\nu} [(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[\nu-n]} \right| \leq \\ & \leq \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \binom{\nu}{\nu-n} \frac{M}{R^{\nu}} r_0^{\nu-n} \leq M \binom{n+2}{2} \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \binom{\nu}{\nu-n-2} \frac{r_0^{\nu-n}}{R^{\nu}} \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto che, per $\nu \geq n+2$, è sempre

$$\binom{\nu}{\nu-n} \leq \binom{n+2}{2} \binom{\nu}{\nu-n-2}.$$

Ponendo poi $j = \nu - n - 2$ e procedendo come al n.º 2 si ottiene

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\nu=n+2}^{\infty} a_{\nu} [(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[\nu-n]} \right| \leq \\ & \leq M \binom{n+2}{2} \frac{r_0^2}{R^{n+2}} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+n+2}{j} \left(\frac{r_0}{R}\right)^j = M \binom{n+2}{2} \frac{Rr_0^2}{(R-r_0)^{n+3}}. \end{aligned}$$

D'altra parte, tenendo conto della (11), si ha

$$\begin{aligned} \mu(\alpha; r_0) & \geq (n+1) |a_{n+1}| r_0 - \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \binom{\nu}{n} \frac{M}{R^{\nu}} r_0^{\nu-n} \geq \\ & \geq (n+1) |a_{n+1}| r_0 - M \binom{n+2}{2} \frac{Rr_0^2}{(R-r_0)^{n+3}}, \end{aligned}$$

poichè, come si è ora visto, è

$$\sum_{\nu=n+2}^{\infty} \binom{\nu}{n} \frac{M}{R^{\nu}} r_0^{\nu-n} \leq M \binom{n+2}{2} \frac{Rr_0^2}{(R-r_0)^{n+3}}.$$

La (12) è dunque sicuramente verificata, se è

$$M \binom{n+2}{2} \frac{Rr_0^2}{(R-r_0)^{n+3}} < (n+1) |a_{n+1}| r_0 - M \binom{n+2}{2} \frac{Rr_0^2}{(R-r_0)^{n+3}},$$

ossia se è

$$\frac{r_0}{(R - r_0)^{n+3}} < \frac{|a_{n+1}|}{(n+2)MR}.$$

Poichè il primo membro di quest'ultima disuguaglianza tende a zero per $r_0 \rightarrow 0$, e il secondo membro (che è sempre positivo) non dipende da r_0 , esiste certamente un valore r'_0 di r_0 , che soddisfa a tale disuguaglianza, e siccome ogni $r_0 < r'_0$ la verifica a fortiori, ciò basta per provare il teorema enunciato.

OSSERVAZIONE. — Per assegnare anche in questo caso un valore effettivo di r'_0 si procede come al n.º 2 e si ottiene

$$r'_0 = \frac{R}{n+3 + (n+2) \frac{M}{|a_{n+1}| R^{n+1}}}.$$

4. **Teorema III.** — Il teorema del n.º precedente permette di considerare soltanto quelle $(n+1)$ -ple di punti che appartengono all'intorno di un dato punto α e che hanno il baricentro in tale punto. Nel presente n.º mi propongo di far vedere che quest'ultima restrizione si può togliere, purchè l'intorno di α sia abbastanza piccolo.

Tenendo conto del risultato del n.º precedente, si dimostra il seguente teorema:

La funzione analitica $f(z)$ sia regolare nel punto α e sia $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$.

Esiste allora un intorno circolare $(\alpha; r^)$ di α , in cui $f(z)$ è regolare, e tale che, considerati $n+1$ punti qualunque z_0, z_1, \dots, z_n , appartenenti a tale intorno, posto*

$$\eta = \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{n+1},$$

e indicato con r_η il massimo modulo delle differenze $\eta - z_i$, ($i = 0, 1, \dots, n$), risulta

$$(13) \quad D_n[f(z)] = D_n[z^n] \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ove ξ è un punto interno al cerchio $(\eta; r_\eta)$.

DIMOSTRAZIONE. — Si può senz'altro supporre che i punti z_0, z_1, \dots, z_n siano a due a due distinti, poichè, in caso contrario, come si è già osservato all'inizio della dimostrazione dei precedenti teoremi, la (13) è sempre verificata.

Nell'intorno di α si ha

$$(14) \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - \alpha)^{\nu}.$$

Sia ancora R un numero positivo minore del raggio di convergenza della serie (14) e si indichi con M il massimo modulo di $f(z)$ sulla circonferenza $(\alpha; R)$.

In virtù dell'ipotesi $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$, si può trovare un numero $\delta > 0 (< R)$, abbastanza piccolo, in modo che in tutti i punti del cerchio $(\alpha; \delta)$, circonferenza compresa, il minimo modulo della derivata $f^{(n+1)}(z)$ sia maggiore di zero; si indichi con $\lambda (> 0)$ il minimo modulo di $\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}$ in tale cerchio.

Preso un punto β , appartenente al cerchio $(\alpha; \delta)$, sia nell'intorno di β

$$(15) \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(z - \beta)^{\nu}.$$

Poichè R è minore del raggio di convergenza della serie (14), per una nota proprietà delle funzioni analitiche, il numero $R - \delta$ è certamente inferiore al raggio di convergenza della serie (15).

Pertanto indicato con M_{β} il massimo modulo di $f(z)$ sulla circonferenza $(\beta; R - \delta)$ si ha per la solita disuguaglianza di CAUCHY

$$|b_{\nu}| \leq \frac{M_{\beta}}{(R - \delta)^{\nu}}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Inoltre, essendo $b_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}$, poichè β appartiene al cerchio $(\alpha; \delta)$, risulta $|b_{n+1}| > 0$.

Quindi in virtù del teorema II e dell'osservazione fatta alla fine di tale teorema, se è

$$r_{\beta}' = \frac{R - \delta}{n + 3 + (n + 2) \frac{M_{\beta}}{|b_{n+1}| (R - \delta)^{n+1}}},$$

presi $n + 1$ punti qualunque z_0, z_1, \dots, z_n tali che il massimo modulo delle differenze $z_i - \beta$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sia $r_{\beta} \leq r_{\beta}'$ e tali inoltre che sia

$$z_0 + z_1 + \dots + z_n = (n + 1)\beta,$$

esiste almeno un punto ξ , interno al cerchio $(\beta; r_\beta)$ e che verifica l'uguaglianza

$$D_n[f(z)] = D_n[z^n] \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Ma, qualunque sia il punto β del cerchio $(\alpha; \delta)$, si ha sempre

$$M_\beta \leq M; \quad |b_{n+1}| \geq \lambda.$$

Pertanto se è

$$r_1' = \frac{R - \delta}{n + 3 + (n + 2) \frac{M}{\lambda(R - \delta)^{n+1}}},$$

qualunque sia il punto β appartenente al cerchio $(\alpha; \delta)$, per ogni $(n + 1)$ -pla z_0, z_1, \dots, z_n , tale che il massimo modulo delle differenze $z_i - \beta$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sia $r_i \leq r_1'$ e tale inoltre che sia

$$z_0 + z_1 + \dots + z_n = (n + 1)\beta$$

esiste sempre almeno un punto ξ , interno al cerchio $(\beta; r_1)$ e che verifica l'uguaglianza

$$D_n[f(z)] = D_n[z^n] \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Si indichi ora con r^* il minore dei due numeri $\frac{n+1}{2n} r_1'$ e δ ; dico che r^* gode della proprietà richiesta.

Infatti, presi $n + 1$ punti qualunque z_0, z_1, \dots, z_n non esterni al cerchio $(\alpha; r^*)$, il punto

$$\eta = \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{n + 1}$$

è certamente interno al cerchio $(\alpha; r^*)$ e quindi anche, *a fortiori*, al cerchio $(\alpha; \delta)$ (essendo $r^* \leq \delta$); risulta quindi $\frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\eta)| > \lambda$. Inoltre, essendo $r^* \leq \frac{n+1}{2n} r_1'$, il massimo modulo delle differenze $\eta - z_i$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) non può superare r_1' , come si verifica immediatamente; e quindi, indicato con r_η tale massimo modulo, per quanto si è visto poco sopra esiste almeno un punto ξ interno al cerchio $(\eta; r_\eta)$ e che verifica la (13).

Il teorema enunciato è con ciò provato.

OSSERVAZIONE. — La dimostrazione del presente n.º permette anche di assegnare un valore per il numero r^* , che, come si è visto, può essere preso

uguale al minore dei due numeri δ e

$$\frac{n+1}{2n} \frac{R-\delta}{n+3+(n+2)\frac{M}{\lambda(R-\delta)^{n+1}}} \quad (7).$$

5. **Osservazione I.** — Per $n=1$ la (13) del teorema del n.º precedente diviene

$$f(z_1) - f(z_0) = (z_1 - z_0)f'(\xi),$$

ove ξ è un punto interno al cerchio di centro $\frac{z_0+z_1}{2}$, e raggio uguale alla distanza di questo punto da uno qualunque dei punti z_0, z_1 (che sono equidistanti da $\frac{z_0+z_1}{2}$). Il teorema III contiene dunque, come caso particolare, la proposizione (β) di CURTISS. Si ha inoltre, tenendo presente l'osservazione fatta alla fine del n.º precedente, un interessante complemento, che il CURTISS ritiene difficile a conseguire, alla medesima proposizione (β), perchè il campo B , in cui possono essere presi i due punti z_0 e z_1 , risulta costituito almeno dal cerchio di centro α e raggio uguale al minore dei due numeri δ e $\frac{R-\delta}{4 + \frac{3M}{\lambda(R-\delta)^2}}$,
 ove R è un numero positivo inferiore al raggio di convergenza della serie

(7) Sulla determinazione del numero δ può farsi la seguente osservazione: Tenendo conto della solita disuguaglianza di CAUCHY, il minimo modulo della funzione

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} = a_{n+1} + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \binom{\nu}{n+1} a_{\nu} (z-\alpha)^{\nu-n-1}$$

sulla circonferenza ($\alpha; \delta$) è uguale o maggiore di

$$|a_{n+1}| - \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \binom{\nu}{n+1} \frac{M}{R^{\nu}} \delta^{\nu-n-1} = |a_{n+1}| - \frac{M}{R^{n+1}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\delta}{R}\right)^{n+2}} - 1 \right].$$

Basta dunque che il numero δ soddisfi alla disuguaglianza

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\delta}{R}\right)^{n+2}} < 1 + \frac{|a_{n+1}| R^{n+1}}{M},$$

ossia

$$\delta < R \left\{ 1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{|a_{n+1}| R^{n+1}}{M} \right]^{n+2}} \right\}.$$

$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - \alpha)^{\nu}$, M è il massimo modulo della funzione $f(z)$ sulla circonferenza $(\alpha; R)$, δ è un numero positivo ($< R$), tale che in tutto il cerchio $(\alpha; \delta)$, circonferenza compresa, $f''(z)$ non si annulla, λ è il minimo modulo dell'espressione $\frac{1}{2!} f''(z)$ in questo cerchio.

Osservazione II. ESEMPIO. — Se si sopprime la condizione $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$, il teorema del n.º precedente cessa di esser vero, come risulta dal seguente esempio.

Sia

$$\alpha = 0, \quad f(z) = z^{4n};$$

onde

$$f^{(n+1)}(\alpha) = 0.$$

Si prendano poi i seguenti $n + 1$ punti

$$z_0; \quad z_k = z_0 e^{\frac{i\pi k}{2n}} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

z_0 essendo un qualunque numero complesso diverso da zero.

Si osservi che gli $n + 1$ punti scelti si trovano sulla circonferenza avente il centro nell'origine O e raggio uguale al $|z_0| = \rho$, e dividono in n parti uguali l'arco di questa circonferenza, di lunghezza $\frac{\pi}{2} \rho$, che ha per estremi i punti $A \equiv z_0$ e $B \equiv z_0 e^{i\frac{\pi}{2}}$. I punti dati appartengono dunque ad un intorno dell'origine che può farsi piccolo a piacere, prendendo ρ abbastanza piccolo.

Qualunque sia z_0 , per ogni $k = 0, 1, 2, \dots, n$ si ha sempre

$$z_k^{4n} = z_0^{4n} e^{2i\pi k} = z_0^{4n};$$

e perciò risulta

$$D_n[z^{4n}] = 0,$$

perchè gli elementi dell'ultima colonna di questo determinante sono proporzionali a quelli della prima. D'altra parte, siccome gli $n + 1$ punti sono a due a due distinti, il loro determinante di VANDERMONDE è sempre diverso da zero; pertanto, perchè abbia luogo l'uguaglianza

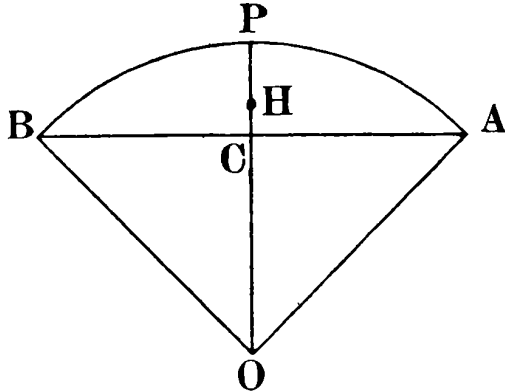
$$D_n[z^{4n}] = D_n[z^n] \frac{4n(4n-1) \dots (3n+1)}{n!} \xi^{3n},$$

occorre che sia $\xi = 0$.

È facile ora verificare che, per quanto il numero ρ sia piccolo, l'origine non appartiene mai al cerchio avente per centro il punto H di affisso

$\frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{n+1}$, e raggio uguale alla massima distanza di questo punto dai punti di affisse z_0, z_1, \dots, z_n .

Infatti, per il modo in cui i punti z_0, z_1, \dots, z_n sono distribuiti sull'arco \widehat{AB} , H deve trovarsi sul raggio OP che biseca l'arco \widehat{AB} . Inoltre indicato con C il punto d'incontro di OP con la corda AB , il punto H non può essere interno al segmento OC , e nemmeno coincidere con C , se è $n \geq 2$.



Si osservi ora che la massima distanza di H dai punti di affisse z_0, z_1, \dots, z_n è uguale al segmento HA .

Dal triangolo ACH si ha

$$\overline{HA} < \overline{HC} + \overline{CA},$$

ma C , quale punto di mezzo dell'ipotenusa del triangolo rettangolo AOB , è equidistante dai tre vertici, e perciò risulta

$$\overline{HA} < \overline{HC} + \overline{CO} = \overline{HO},$$

ossia l'origine è esterna al cerchio di centro H e raggio uguale alla massima distanza di questo punto dai punti di affisse z_i , ($i=0, 1, \dots, n$), se è $n \geq 2$.

Se poi è $n=1$ (vedi l'Osservazione I del presente n.º), si ricade nella proposizione (β) di CURTISS: si ha allora $H \equiv C$ e l'origine appartiene alla circonferenza di centro H e raggio uguale ad HA , ma non è, neppure in questo caso, interna a tale circonferenza ⁽⁸⁾.

6. Estensione del teorema III. — Come risulta dall'esempio del n.º precedente, se è $f^{(n+1)}(\alpha) = 0$, il teorema III può non esser vero.

⁽⁸⁾ L'esempio ora dato, nel caso particolare $n=1$, è contenuto in quello dato dal CURTISS, vedi luogo cit. in ⁽²⁾, n.º 2.

In tal caso, supposto che $f^{(n+m)}(z)$, ($m > 1$) sia la prima derivata, di ordine superiore ad n che non si annulla per $z = \alpha$, si può ottenere un'estensione del teorema III, procedendo nel seguente modo.

Tenendo presente che il numero dei termini dello sviluppo di $[(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[m]}$ è $\binom{m+n}{m}$ e collo stesso procedimento del n.º 3 si dimostra, in luogo del teorema II, il seguente

TEOREMA II'. — *La funzione analitica $f(z)$ sia regolare nel punto α e $f^{(n+m)}(z)$, ($m \geq 1$) sia la prima derivata di ordine superiore ad n che è diversa da zero per $z = \alpha$.*

Esiste allora un intorno circolare $(\alpha; r_0')$ di α , in cui $f(z)$ è regolare, e tale che, considerati $n + 1$ punti z_0, z_1, \dots, z_n , tali che il massimo modulo delle differenze $\alpha - z_i$, ($i = 0, 1, \dots, n$) sia $r_0 \leq r_0'$ e tali inoltre che si abbia

$$z_0 + z_1 + \dots + z_n = \binom{m+n}{m} \alpha,$$

risulta

$$D_n[f(z)] = D_n[z^n] \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ove ξ è un punto interno al cerchio $(\alpha; r_0)$.

Procedendo poi in modo analogo al n.º 4 e tenendo conto del teorema II', si dimostra il seguente

TEOREMA III'. — *La funzione analitica $f(z)$ sia regolare nel punto α e $f^{(n+m)}(z)$, ($m \geq 1$) sia la prima derivata di ordine superiore ad n che è diversa dallo zero per $z = \alpha$.*

Esiste allora un intorno circolare $(\alpha; r^)$ di α , in cui $f(z)$ è regolare, e tale che, considerati $n + 1$ punti qualunque z_0, z_1, \dots, z_n , appartenenti al cerchio $(\alpha; r^*)$, posto*

$$\eta = \frac{z_0 + z_1 + \dots + z_n}{\binom{m+n}{m}},$$

e indicato con r_η il massimo modulo delle differenze $\eta - z_i$, ($i = 0, 1, \dots, n$), risulta

$$D_n[f(z)] = D_n[z^n] \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ove ξ è un punto interno al cerchio $(\eta; r_\eta)$.

OSSERVAZIONE. — Per $m = 1$ si ha nuovamente il teorema III.

7. Un'ulteriore estensione dei precedenti teoremi. — Se gli $n + 1$ punti z_0, z_1, \dots, z_n non sono a due a due distinti, risulta sempre $D_n[f(z)] = D_n[z^n] = 0$, e, come si è già osservato, tutte le formule dimostrate nei precedenti n.º si riducono a banali identità.

Tuttavia anche in questo caso, analogamente a quanto ha fatto il MONTEL, le precedenti formule possono essere estese, facendo in ciascuno dei determinanti $D_n[f(z)]$ e $D_n[z^n]$ le seguenti modificazioni:

Se z_j coincide con z_i , ($0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq n$, $i \neq j$) si sostituisca ogni elemento della riga ($j + 1$), con la derivata del primo ordine rispetto a z_i dell'elemento della riga ($i + 1$) appartenente alla stessa colonna.

Se z_k e z_j coincidono con z_i , ($0 \leq k \leq n$, $0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq n$, $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$), si cambino gli elementi della riga ($j + 1$) nel modo ora indicato e poi si sostituisca ogni elemento della riga ($k + 1$) con la derivata del secondo ordine rispetto a z_i dell'elemento della riga ($i + 1$) appartenente alla stessa colonna.

E così di seguito se più di tre punti coincidono.

Si avrà in generale:

$$\begin{vmatrix}
 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^{n-1} & f(z_0) \\
 0 & 1 & 2z_0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} z_0^{n-2} & f'(z_0) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k_0)!} z_0^{n-k_0} & f^{(k_0-1)}(z_0) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & z_h & z_h^2 & \dots & z_h^{n-1} & f(z_h) \\
 0 & 1 & 2z_h & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} z_h^{n-2} & f'(z_h) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k_h)!} z_h^{n-k_h} & f^{(k_h-1)}(z_h)
 \end{vmatrix} =
 \begin{vmatrix}
 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^{n-1} & z_0^n \\
 0 & 1 & 2z_0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} z_0^{n-2} & \frac{n!}{(n-1)!} z_0^{n-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k_0)!} z_0^{n-k_0} & \frac{n!}{(n-k_0+1)!} z_0^{n-k_0+1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & z_h & z_h^2 & \dots & z_h^{n-1} & z_h^n \\
 0 & 1 & 2z_h & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} z_h^{n-2} & \frac{n!}{(n-1)!} z_h^{n-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k_h)!} z_h^{n-k_h} & \frac{n!}{(n-k_h+1)!} z_h^{n-k_h+1}
 \end{vmatrix} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

con $k_0 + k_1 + \dots + k_h = n$, ove il punto ξ è rispettivamente interno al cerchio indicato in ognuno dei precedenti teoremi, intendendosi che, (per quanto ri-

guarda i punti α e η , che figurano negli enunciati dei n.º 3 e 4 (e del n.º 6), ogni punto z_i venga contato tante volte quanti sono i punti in esso riuniti.

Per provare questi teoremi basta ripetere le precedenti dimostrazioni tenendo presente che, se p. es. z_2 coincide con z_1 , nelle *funzioni aleph* si deve fare $z_2 = z_1$. Infatti dall'uguaglianza (vedi nota (5))

$$D_n[(z - \alpha)^v] = D_n[z^n][(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[v-n]},$$

supposto z_2 variabile, derivando ambo i membri rispetto a z_2 , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dD_n[(z - \alpha)^v]}{dz_2} &= \frac{dD_n[z^n]}{dz_2} [(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[v-n]} + \\ &+ D_n[z^n] \frac{d[(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[v-n]}}{dz_2}. \end{aligned}$$

e facendo $z_2 = z_1$, l'ultimo termine si annulla, onde risulta

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dD_n[(z - \alpha)^v]}{dz_2} \right)_{z_2=z_1} = \\ &= \left(\frac{dD_n[z^n]}{dz_2} \right)_{z_2=z_1} [(z_0 - \alpha), (z_1 - \alpha), (z_1 - \alpha), (z_3 - \alpha), \dots, (z_n - \alpha)]^{[v-n]}. \end{aligned}$$

Sulle direzioni di Borel di funzioni olomorfe.

Memoria di VLADIMIRO BERNSTEIN (a Milano).

1. Questa Memoria è consacrata alla dimostrazione di alcuni teoremi relativi alle direzioni di BOREL (e di JULIA) delle funzioni intere, ed, in genere, delle funzioni olomorfe in certi settori.

Cominceremo col ricordare brevemente alcuni fatti noti, e collo stabilire la terminologia di cui ci serviremo in seguito.

Data una funzione $F(z)$, olomorfa in un settore $S: (\alpha \leq \arg z \leq \beta)$, ed indicato con $M(r)$ il suo massimo modulo nel campo $S, (|z| \leq r, \alpha \leq \arg z \leq \beta)$, si dice che $F(z)$ è d'ordine ρ in S se il limite superiore, per $r \rightarrow \infty$, del rapporto

$$(1) \quad \frac{\log M(r)}{r^k}$$

è nullo per $k > \rho$, ed è uguale a $+\infty$ per $k < \rho$. Inoltre, $F(z)$ è detta di tipo minimo, medio, oppure massimo secondo che, per $k = \rho$, il limite superiore dello stesso rapporto è uguale a zero, ad un numero finito non nullo, oppure a $+\infty$. Se il limite superiore di (1) è uguale a $+\infty$ per ogni valore di k , la funzione $F(z)$ è d'ordine infinito in S .

Sia adesso $\rho(r)$ una funzione reale e positiva di r , derivabile per ogni r , all'infuori tutt'al più di una successione di valori eccezionali isolati di r , pei quali tuttavia ammetteremo l'esistenza delle derivate $\rho'(r-0)$ e $\rho'(r+0)$; se questa funzione soddisfa alle due condizioni

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho'(r)r \log r = 0,$$

diremo che $\rho(r)$ è un ordine precisato. Inoltre diremo che la funzione $F(z)$ è nel settore S , d'ordine precisato $\rho(r)$ se, per $r \rightarrow \infty$, il rapporto

$$\frac{\log M(r)}{r^{\rho(r)}}$$

ha un limite superiore finito e non nullo. G. VALIRON ha dimostrato ⁽¹⁾ che

(1) G. VALIRON, *Integral functions*, Toulouse, 1923, p. 64.

ad ogni funzione $F(z)$, d'ordine finito in S , corrisponde effettivamente un ordine precisato $\rho(r)$. Quest'ultimo non è però completamente determinato, perchè è ovvio che, se la funzione $F(z)$ è d'ordine precisato $\rho(r)$, essa è anche d'ordine precisato $\rho_1(r)$, ogni volta che $\rho_1(r)$ soddisfa alle (2), e per di più l'espressione $r^{\rho(r)-\rho_1(r)}$ ha un limite finito non nullo per $r \rightarrow \infty$. Due ordini precisati $\rho(r)$ e $\rho_1(r)$ soddisfacenti a queste condizioni saranno detti *equivalenti*. Si può ancora ricordare che, data ad arbitrio una funzione $\rho(r)$ soddisfacente alle condizioni (2), esistono delle funzioni $F(z)$ che, in un dato settore S , sono olomorfe e d'ordine precisato $\rho(r)$.

Aggiungiamo ancora che, se una funzione $\Phi(z)$ (d'ordine $\leq \rho$) soddisfa in S alla condizione

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log^+ |\Phi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} = 0 \quad (1),$$

si può dire che essa è *d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$* nel settore S .

Per abbreviare, ometteremo d'ora innanzi l'indicazione che le funzioni considerate sono olomorfe; dicendo che una funzione è d'ordine precisato $\rho(r)$ (oppure inferiore a $\rho(r)$) in un settore S , sottintenderemo sempre che la funzione è olomorfa in questo settore S .

L'ordine (oppure l'ordine precisato) serve a caratterizzare la crescita di $F(z)$ in tutto il settore S . Quando invece si vuole studiare la crescita di $F(z)$ secondo le singole direzioni $\arg z = \text{const.}$ è utile considerare l'indicatrice di crescita

$$h(\varphi) = \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{\log^+ |F(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}};$$

questa funzione, la cui introduzione nel campo dell'Analisi è dovuta a PHRAGMÈN-LINDELÖF ed a VALIRON, ha parecchie proprietà importanti: essa è continua (2); in ogni punto ($\alpha < \varphi < \beta$) esistono le derivate $h'(\varphi - 0)$ e $h'(\varphi + 0)$ e si ha $h'(\varphi - 0) \leq h'(\varphi + 0)$ (3); infine, se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono tre va-

(1) Il simbolo $\log^+ A$ (leggasi *logaritmo positivo* di A) significa $\log A$ quando $A > 1$, e zero se $A \leq 1$.

(2) PHRAGMÈN e LINDELÖF (« Acta Math. », 31, 1908, p. 394) e VALIRON (« Ann. Fac. Sc. Toulouse », t. 5, 1913, p. 233).

(3) PÓLYA (« Math. Zeitschr. », 29, 1929, p. 549).

lori di φ tali che $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$, e $\varphi_3 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\rho}$, allora si ha

$$\begin{vmatrix} h(\varphi_1) & \cos \rho\varphi_1 & \operatorname{sen} \rho\varphi_1 \\ h(\varphi_2) & \cos \rho\varphi_2 & \operatorname{sen} \rho\varphi_2 \\ h(\varphi_3) & \cos \rho\varphi_3 & \operatorname{sen} \rho\varphi_3 \end{vmatrix} \geq 0 \quad (1).$$

Da quest'ultima proprietà si deduce, fra l'altro, che, se $h(\varphi)$ è uguale a zero in due punti φ_1 e φ_2 distanti di meno di $\frac{\pi}{\rho}$, essa è uguale a zero in tutto l'intervallo $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

Consideriamo adesso una direzione $\arg z = \varphi_0$ ($\alpha < \varphi_0 < \beta$), ed indichiamo con $N(F(z); r)$ il numero degli zeri della funzione $F(z)$, situati nel campo Σ_r ($|z| \leq r$; $\varphi_0 - \delta \leq \arg z \leq \varphi_0 + \delta$). Si dice che la direzione $\arg z = \varphi_0$ è una *direzione di Borel d'ordine precisato* $\rho(r)$ della funzione $F(z)$ se, comunque si scelga $\delta > 0$, il rapporto

$$\frac{N(F(z) - a; r)}{r^{\rho(r)}}$$

ha, per $r \rightarrow \infty$, un limite superiore finito non nullo, qualunque sia il valore di a , all'infuori tutt'al più di un possibile valore eccezionale a_0 .

G. VALIRON ha dimostrato che, se la funzione $F(z)$ è d'ordine precisato $\rho(r)$ in un settore S d'apertura superiore a $\frac{\pi}{\rho}$, allora nel settore S esiste almeno una *direzione di Borel d'ordine precisato* $\rho(r)$ della funzione $F(z)$ ⁽²⁾. Le direzioni di BOREL, il cui ordine precisato è identico od equivalente all'ordine precisato della funzione stessa (p. es. le direzioni di BOREL specificate nel teorema ora citato) sono chiamate *direzioni di Borel di tipo massimo*. Qui bisogna notare che una medesima direzione può essere di tipo massimo o no, secondo che la funzione $F(z)$ viene considerata in un settore più o meno largo; infatti, in un settore più largo, la funzione $F(z)$ può avere un ordine precisato superiore a quello che essa ha in un settore più piccolo.

2. La ricerca delle direzioni di BOREL di tipo massimo di una funzione $F(z)$ può essere legata, in certi casi, allo studio dell'indicatrice $h(\varphi)$ definita più sopra. Infatti, G. VALIRON e la signa M. L. CARTWRIGHT hanno dimostrato che le *direzioni* $\arg z = \varphi_0$, per le quali $h(\varphi_0) = 0$, mentre in uno al-

(1) PHRAGMÈN e LINDELÖF (l. c.).

(2) « Comptes Rendus », t. 194, 1932, p. 1306.

meno degli intervalli $(\varphi_0 - \frac{\pi}{\rho}, \varphi_0)$, oppure $(\varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{\rho})$, è sempre $h(\varphi) > 0$, sono delle direzioni di Borel di tipo massimo di $F(z)$ (1).

In questa Memoria noi mostreremo che, dal punto di vista della ricerca delle direzioni di BOREL di tipo massimo, giova confrontare la funzione $h(\varphi)$ con funzioni trigonometriche del tipo $A \cos \rho\varphi + B \sin \rho\varphi$. Se si può determinare un $\delta > 0$, e due costanti A e B in modo tale che si abbia $h(\varphi) = A \cos \rho\varphi + B \sin \rho\varphi$, per ogni φ dell'intervallo $\varphi_0 - \delta < \varphi < \varphi_0 + \delta$ diremo che la direzione $\arg z = \varphi_0$ è una *direzione sinusoidale* della funzione $F(z)$. Se questo non è possibile, diremo che la direzione $\arg z = \varphi_0$ è *non-sinusoidale* per la funzione $F(z)$. Ciò posto, mostreremo in questa Memoria che *le direzioni non-sinusoidali di $F(z)$ sono in generale, delle direzioni di Borel di tipo massimo della funzione $F(z)$* . Naturalmente, si dovrà precisare quale senso si deve attribuire qui alle parole « in generale ».

Per raggiungere la meta che ci siamo fissati, dovremo cominciare col ridimostrare, sotto una forma un po' più precisa, il teorema testè citato di VALIRON-CARTWRIGHT.

Sia $\arg z = \varphi_0$ una direzione soddisfacente alle condizioni di questo teorema. Se $S'(\alpha' \leq \arg z \leq \beta')$ è un settore (d'apertura arbitrariamente piccola, ma fissa) che contiene la direzione $\arg z = \varphi_0$, e se $\pi(z)$ denota una qualsiasi funzione che in S' è d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$, il teorema di VALIRON-CARTWRIGHT può essere applicato anche alla funzione $F(z) - \pi(z)$. Dunque, se $N(\Phi(z); r)$ ha lo stesso significato di prima (n° 1), si potrà affermare che, nelle condizioni del teorema di VALIRON-CARTWRIGHT, ad ogni funzione $\pi(z)$, d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore S' , corrisponde al massimo un valore eccezionale a_π tale che si abbia

$$(3) \quad \lim_{r=\infty} \frac{N[F(z) - \pi(z) - a_\pi; r]}{r^{\rho(r)}} = 0,$$

mentre per ogni $a \neq a_\pi$ si deve avere

$$(4) \quad \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{N[F(z) - \pi(z) - a; r]}{r^{\rho(r)}} > 0.$$

Mostreremo al n° 8 che un tale valore eccezionale a_π non può certamente corrispondere ad ogni funzione $\pi(z)$; anzi, vedremo che le funzioni $\pi(z)$, alle quali un tale valore eccezionale corrisponde effettivamente, possono essere considerate, esse medesime, come *funzioni eccezionali*, mentre *in generale* il

(1) VALIRON (l. c. nella nota precedente) e M. L. CARTWRIGHT (« Comptes Rendus », t. 194, 1932, p. 1891).

valore eccezionale non esiste e la diseuguaglianza (4) è soddisfatta per ogni a senza eccezioni di sorta.

Per enunciare, sotto una forma precisa, il teorema che intendiamo così dimostrare, ci sarà necessario stabilire ancora una nozione relativa alle funzioni $\pi(z)$. Nei ragionamenti che dovremo svolgere, sarà necessario di considerare come diverse l'una dall'altra solo quelle funzioni $\pi(z)$, la cui differenza non è troppo piccola rispetto alle funzioni medesime. Faremo perciò la convenzione seguente: *due funzioni $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$, d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ in un settore $\Sigma(\varphi_0 - \delta \leq \arg z \leq \varphi_0 + \delta)$, saranno considerati come non sostanzialmente diverse nel settore Σ , se è possibile trovare una costante positiva p ed una successione infinita di punti $z_n = r_n e^{i\varphi_0}$ ($n = 1, 2, \dots$) con $\lim r_n = +\infty$, in modo tale che la diseuguaglianza*

$$(5) \quad \log |\pi_2(z) - \pi_1(z)| < -pr_n^{\rho(r_n)}$$

sia verificata in tutti i punti dei cerchi $C_n: |z - z_n| \leq r_n \text{ sen } \delta$ ($n = 1, 2, \dots$).

Ciò posto, dimostreremo il teorema seguente:

TEOREMA I. — *Abbiassi una funzione $f(z)$, olomorfa e d'ordine precisato $\rho(r)$ in un settore che comprende la direzione $\arg z = \varphi_0$, per la quale $h(\varphi_0) = 0$, mentre $h(\varphi) > 0$ in uno almeno degli intervalli $(\varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{\rho})$ o $(\varphi_0 - \frac{\pi}{\rho}, \varphi_0)$ ⁽¹⁾; se, in queste condizioni, $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$ sono due funzioni che in un settore $\Sigma: (\varphi_0 - \delta \leq \arg z \leq \varphi_0 + \delta)$ sono d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$, allora, le due formole*

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N[f(z) - \pi_1(z); r]}{r^{\rho(r)}} = 0$$

$$(7) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N[f(z) - \pi_2(z); r]}{r^{\rho(r)}} = 0$$

possono essere verificate contemporaneamente, solo se le funzioni $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$ non sono sostanzialmente diverse in un certo settore $\Sigma': (\varphi_0 - \delta' \leq \arg z \leq \varphi_0 + \delta')$ interno al settore Σ .

Pertanto, se esiste una funzione $\pi_1(z)$, d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore Σ , per la quale la formola (6) è soddisfatta, allora, per ogni funzione $\pi_2(z)$, d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ in Σ , e sostanzialmente diversa

(1) Se uno di questi intervalli non fosse interamente compreso nel intervallo in cui $h(\varphi)$ è definita (il quale corrisponde al settore in cui $f(z)$ è d'ordine precisato $\rho(r)$), si dovrebbe prendere in considerazione soltanto l'intervallo parziale che appartiene per intero all'intervallo di definizione di $h(\varphi)$.

da $\pi_1(z)$ in un settore Σ' interno a Σ , si deve avere

$$(8) \quad \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{N[f(z) - \pi(z); r]}{r^{\rho(r)}} > 0.$$

Dopo di aver svolto la dimostrazione di questo teorema, mostreremo come esso permette di giungere alla conclusione già annunciata, in merito all'esistenza o meno dei valori eccezionali α_π che, secondo il teorema di VALIRON-CARTWRIGHT, potrebbero corrispondere alle varie funzioni $\pi(z)$.

3. Per non interrompere dopo i ragionamenti, sarà utile di far precedere alla dimostrazione propriamente detta del teorema I alcune considerazioni sul comportamento della differenza $\pi_0(z) = \pi_2(z) - \pi_1(z)$ di due funzioni sostanzialmente diverse $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$, d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$. Nel fare ciò, possiamo ammettere, senza menomare la generalità del ragionamento, che $\varphi_0 = 0$. Ciò posto, possiamo enunciare il seguente lemma:

LEMMA I. — *Se le funzioni $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$, d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore $\Sigma: |\arg z| \leq \delta$, sono sostanzialmente diverse in un certo settore $\Sigma': |\arg z| \leq \delta'$ interno al settore Σ , e se $\Sigma'': |\arg z| \leq \delta''$ denota un settore qualsiasi interno al settore Σ , allora la funzione $\pi_0(z) = \pi_2(z) - \pi_1(z)$ soddisfa alle condizioni seguenti:*

1) *indicato con $n_0(r)$ il numero degli zeri di $\pi_0(z)$ situati nel campo $|z| \leq r, |\arg z| \leq \delta''$, si ha*

$$\lim_{r=\infty} \frac{n_0(r)}{r^{\rho(r)}} = 0;$$

2) *ad ogni coppia di numeri positivi arbitrariamente piccoli ε, η si può far corrispondere un $R_0 = R_0(\varepsilon, \eta)$ in modo tale che, per ogni $R \geq R_0$, l'insieme dei punti $z = re^{i\varphi}$ del campo $R_0 \leq |z| \leq R, |\arg z| \leq \delta''$, nei quali non è verificata la diseuguaglianza*

$$\log |\pi_0(re^{i\varphi})| \geq -\varepsilon r^{\rho(r)},$$

possa essere incluso in un sistema di cerchi tali che la somma dei loro raggi non sorpassi ηR .

Questo lemma può essere dedotto senza difficoltà da un teorema che si ottiene da uno dei teoremi della sig-na M. L. CARTWRIGHT ⁽¹⁾ se, nella sua dimostrazione, si fa uso di un teorema di H. CARTAN ⁽²⁾ invece di un teo-

(1) CARTWRIGHT (l. c.).

(2) « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 45, 1928, p. 273.

rema analogo (ma meno preciso) di P. BOUTROUX (1). Siccome però la sig-na M. L. CARTWRIGHT non ha finora pubblicato che un sunto della dimostrazione di quel suo teorema, credo ch  non sar  inutile di dare qui una dimostrazione completa del lemma I (questa dimostrazione, salvo per quel che riguarda l'uso del teorema di H. CARTAN,   basata sulle idee espresse dalla sig-na M. L. CARTWRIGHT nel sunto sopracitato).

Ci  detto, enunciamo un altro lemma che anch'esso costituisce un addattamento al nostro caso di analoghi lemmi utilizzati da varii autori:

LEMMA II. — *Abbiassi una funzione $\Phi(u)$, olomorfa in un cerchio $|u| \leq R$; se questa funzione soddisfa alle condizioni seguenti:*

$$(9) \quad \log |\Phi(0)| \geq -A,$$

$$(10) \quad \log |\Phi(u)| \leq A \quad \text{per } |u| \leq R,$$

allora si pu  affermare che:

1) *ad ogni $\theta < 1$ corrisponde una costante $C(\theta)$ tale che il numero N degli zeri di $\Phi(u)$ situati nel cerchio $|u| \leq \theta R$ sia inferiore a $C(\theta)A$;*

2) *ad ogni coppia di numeri $\eta \leq \eta_0$, $\theta < 1$, corrisponde una costante positiva $K(\eta, \theta)$, tale che l'insieme dei punti del cerchio $|u| \leq \theta R$, nei quali non   verificata la diseuguaglianza*

$$\log |\Phi(u)| \geq -K(\eta, \theta)A,$$

possa essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi hanno una somma inferiore a ηR .

Il primo asserto   una conseguenza immediata della classica formola di JENSEN (2), la quale mostra che

$$N \log \frac{1}{\theta} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\Phi(Re^{i\omega})| d\omega - \log |\Phi(0)| \leq 2A;$$

si pu  dunque prendere $C(\theta) = \frac{3}{\log \frac{1}{\theta}}$.

Per dimostrare il secondo asserto, poniamo $\theta' = \theta + \frac{3}{4}(1 - \theta)$ ed indichiamo con u_1, u_2, \dots, u_m gli zeri di $\Phi(u)$ situati nel cerchio $|u| \leq \theta' R$. Poniamo inoltre

$$(11) \quad \Phi(u) = e^{\varphi(u)} \prod_{\nu=1}^{\nu=m} \left(1 - \frac{u}{u_\nu}\right).$$

(1) « Acta Math. », 1903.

(2) Cfr. p. es. VALIRON (op. c. a p. 173, p. 48).

Il teorema già citato di H. CARTAN permette di affermare che l'insieme dei punti nei quali si ha

$$\left| \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (u - u_\nu) \right| < \left(\frac{\eta R}{2e} \right)^m$$

può essere incluso in un sistema di non più di m cerchi, i cui raggi hanno una somma non superiore a ηR . Nei punti del cerchio $|u| \leq \theta' R$ che non appartengono a questi cerchi, deve essere

$$(12) \quad \left| \prod_{\nu=1}^{\nu=m} \left(1 - \frac{u}{u_\nu} \right) \right| \geq \left(\frac{\eta R}{2eR} \right)^m = \left(\frac{\eta}{2e} \right)^m.$$

Ammettiamo adesso che η sia scelto inferiore a $\frac{1}{8}(1 - \theta)$; se ciò non fosse, si potrebbe sempre sostituire ad η un numero più piccolo, in modo da soddisfare questa ipotesi. Ciò posto, si potrà definire un numero θ'' , compreso fra $\theta + \frac{1}{4}(1 - \theta)$ e $\theta + \frac{1}{2}(1 - \theta)$, e tale che la circonferenza $|u| = \theta'' R$ non seghi nessuno dei cerchi testè definiti. La diseuguaglianza (12) sarà allora verificata sopra tutta questa circonferenza; ne scende che, sulla medesima circonferenza, sarà soddisfatta la diseuguaglianza

$$(13) \quad \Re[\varphi(u)] < \log |\Phi(u)| + m \log \left(\frac{2e}{\eta} \right) \quad (1).$$

Abbiamo però visto che $m < C(\theta)A = C\left[\theta + \frac{3}{4}(1 - \theta)\right]A = C_1(\theta)A$; dunque, se si tien conto della (10), si vede che la diseuguaglianza (13) può essere sostituita dalla

$$\Re[\varphi(u)] < A\left[1 + C_1(\theta) \log \left(\frac{2e}{\eta} \right)\right] = K_1(\eta, \theta)A.$$

Notiamo adesso che la formola (11) mostra che la funzione $e^{\varphi(u)}$ è olomorfa e diversa da zero nel cerchio $|u| \leq \theta'' R < \theta' R$; ne scende che anche la funzione $\varphi(u)$ è olomorfa nel cerchio $|u| \leq \theta'' R$. Inoltre, la medesima formola (11) mostra che $\varphi(0) = \log \Phi(0)$; dalla (9) risulta dunque che $\Re[\varphi(0)] > -A$, e la (10) mostra d'altra parte che $\Re[\varphi(0)] < A$. In queste condizioni possiamo applicare alla funzione $\varphi(u)$ una nota formola di CARATHEODORY (2). Questa formola mostra che nel cerchio $|u| \leq \theta R$ deve essere

$$|\Re[\varphi(u)]| \leq [A + 2K_1(\eta, \theta)A] \frac{\theta'' + \theta}{\theta'' - \theta};$$

(1) $\Re(\xi)$ denota la parte reale di ξ .

(2) LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig, 1909, p. 299.

siccome però $\theta + \frac{1}{4}(1 - \theta) \leq \theta''$, si dovrà avere *a fortiori*

$$|\Re[\varphi(u)]| \leq \frac{8}{1-\theta} [A + 2K_1(\eta, \theta)A] = K_2(\eta, \theta)A.$$

Questa disequaglianza sarà verificata in tutto il cerchio $|u| \leq \theta R$. Dunque, nei punti di questo cerchio che non appartengono all'insieme di cerchi definito poc' anzi, deve essere

$$\begin{aligned} \log |\Phi(u)| = \Re[\varphi(u)] + \log \left| \prod_{v=1}^{v=m} \left(1 - \frac{u}{u_v}\right) \right| &\geq -K_2(\eta, \theta)A - m \log \left(\frac{2e}{\eta}\right) \geq \\ &\geq - \left[K_2(\eta, \theta) + C_1(\theta) \log \left(\frac{2e}{\eta}\right) \right] A = -K(\eta, \theta)A. \end{aligned}$$

Il lemma II è così completamente dimostrato ⁽¹⁾.

4. Facciamo adesso un'osservazione relativa alla funzione $\rho(r)$. Poniamo $R_1 = hR$ ($h > 1$); allora, possiamo scrivere

$$R_1^{\rho(R_1)} : R^{\rho(R)} = h^{\rho(R_1)} \cdot R^{\rho(R_1) - \rho(R)} = h^{\rho(R_1)} \cdot e^{\rho'(\xi)(h-1)R \log R} = h^{\rho(R_1)} \cdot e^{\rho'(\xi) \xi \log \xi \cdot \frac{(h-1)R \log R}{\xi \log \xi}},$$

ove ξ denota un certo numero compreso fra R e R_1 . Determiniamo un $r_0 = r_0(\varepsilon)$ tale che, per $r > r_0$, si abbia $|\rho(r) - \rho| < \varepsilon$ e $|\rho'(r)r \log r| < \varepsilon$. Allora, se $R > r_0$, si avrà

$$h^{\rho - \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon(h-1)}{h^2}} \leq R_1^{\rho(R_1)} : R^{\rho(R)} \leq h^{\rho + \varepsilon} e^{\varepsilon(h-1)}.$$

Ne scende che ad ogni numero positivo arbitrariamente piccolo α si può far corrispondere un $r_1 = r_1(\alpha)$ in modo tale che, per ogni $R > r_1$ e per ogni $h > 1$ siano verificate le disequaglianze

$$(14) \quad (1 - \alpha)h^\rho \leq (hR)^{\rho(hR)} : R^{\rho(R)} \leq (1 + \alpha)h^\rho.$$

Ciò posto, passiamo alla dimostrazione del lemma I. Cominceremo col dimostrare che, dalla supposizione che le funzioni $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$ sono sostanzialmente diverse nel settore Σ' : $|\arg z| \leq \delta' < \delta$, si può dedurre che ad ogni coppia di numeri arbitrariamente piccoli ε e η si può far corrispondere un $R_1 = R_1(\varepsilon, \eta)$ in modo tale che, per ogni $R \geq R_1$, l'intervallo dell'asse reale $R \leq r \leq R(1 + 2\eta)$ contenga dei punti, nei quali è soddisfatta la disequaglianza

$$(15) \quad \log |\pi_0(r)| > -\varepsilon r^{\rho(r)}.$$

⁽¹⁾ L'idea di ricorrere alla formola di CARATHÉODORY è dovuta (salvo errore) a G. VALIRON (cfr. op. cit. a p. 173, p. 89).

Dalla definizione delle funzioni sostanzialmente diverse risulta che ad ogni $\omega > 0$ si può far corrispondere un $R_0(\omega)$ tale che, per ogni $R \geq R_0$, il cerchio $C: |z - R| \leq R \operatorname{sen} \delta'$ contenga almeno un punto $z_1 = r_1 e^{i\varphi}$, nel quale si abbia

$$\log |\pi_0(z_1)| > -\omega r_1^{\rho(r_1)}.$$

Tracciamo il più grande cerchio Ω_1 di centro z_1 che si trovi per intero nel settore $\Sigma: |\arg z| \leq \delta$, nel quale le funzioni $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$ sono d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$. Indicando con $8q_1$ il raggio di questo cerchio Ω_1 , vedremo subito che $8q_1 = r_1 \operatorname{sen}(\delta - |\varphi|) \geq r_1 \operatorname{sen}(\delta - \delta') \geq R(1 - \operatorname{sen} \delta) \operatorname{sen}(\delta - \delta')$.

Ciò posto, possiamo ammettere che R_0 sia stato preso abbastanza grande perchè la diseuguaglianza

$$(16) \quad \log |\pi_0(re^{i\varphi})| < \omega r^{\rho(r)}$$

sia soddisfatta in ogni punto $z = re^{i\varphi}$ del campo $r \geq \frac{1}{2}R_0$, $|\varphi| \leq \delta$.

E se ammettiamo inoltre che anche le diseuguaglianze (14) sono già verificate (p. es. con $\alpha = \frac{1}{2}$) quando $R \geq \frac{1}{2}R_0$, vedremo che in ogni punto del campo $\frac{1}{2}R \leq |z| \leq \frac{3}{2}R$, $|\arg z| \leq \delta$ si dovrà avere

$$\log |\pi_0(z)| < 2^{\rho+1} \omega r_1^{\rho(r_1)}.$$

Ciò posto, tracciamo il segmento rettilineo L che congiunge il punto z_1 col punto R ed indichiamo con l_1 la lunghezza di questo segmento. Ammettiamo, per cominciare, che $l_1 > 6q_1$, ed applichiamo il lemma II alla funzione $\pi_0(z)$ ed al cerchio Ω_1 . Questo lemma ci permette d'affermare che esiste una costante numerica K ⁽¹⁾, per la quale la diseuguaglianza

$$(17) \quad \log |\pi_0(z)| > -2^{\rho+1} K \omega r_1^{\rho(r_1)}$$

è verificata in tutti i punti del cerchio $\Omega_1': |z - z_1| \leq 6q_1$, all'infuori tutt'al più di un insieme di punti che può essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi hanno una somma inferiore a q_1 . Ora, il cerchio Ω_1' sega sul segmento L un segmento parziale di lunghezza $6q_1$; e possiamo dire che l'insieme dei punti di quest'ultimo segmento, nei quali la diseuguaglianza (17) non è verificata, dovrà avere una misura lineare non superiore a $2q_1$. Ne scende che sul segmento L esiste un punto z_2 , nel quale la diseuguaglianza (17) è soddisfatta, e la cui distanza l_2 da R non è superiore a $l_1 - 4q_1$.

(1) Si può prendere p. es. $K = 8000$.

Denotiamo adesso con $8q_2$ il raggio del più grande cerchio di centro z_2 , che appartiene per intero al settore Σ . Possiamo ripetere per questo punto z_2 il ragionamento fatto or ora per il punto z_1 . Vedremo così che, se $l_2 > 6q_2$, si può determinare sul segmento L un punto z_3 , nel quale è soddisfatta la diseuguaglianza

$$\log |\pi_0(z_3)| > -2^{c+1} K^2 \omega r_1^{c(r_1)},$$

e la cui distanza dal punto R non è superiore a $l_2 - 4q_2$. Proseguendo così di seguito, potremo determinare una successione di punti z_1, z_2, \dots, z_{p-1} , che sono tutti situati sul segmento L , e che hanno le proprietà seguenti:

1) per ogni valore di $n < p$, si ha

$$\log |\pi_0(z_n)| > -2^{c+1} K^{n-1} \omega r_1^{c(r_1)};$$

2) chiamata l_n la distanza di z_n da R , ed indicato con $8q_n$ il raggio del più grande cerchio di centro z_n che appartiene per intero al settore Σ , si ha, per ogni $n < p$,

$$(18) \quad l_n > 6q_n \quad \text{e} \quad l_n \leq l_{n-1} - 4q_{n-1}.$$

È chiaro però che, per ogni n , si deve avere $8q_n \geq R(1 - \sin \delta) \sin(\delta - \delta')$. E siccome, d'altra parte, $l_1 \leq R \sin \delta'$, dalle (18) scende che, per ogni $n < p$, deve essere

$$l_n \leq R \left[\sin \delta' - \frac{n}{2} (1 - \sin \delta) \sin(\delta - \delta') \right].$$

Perchè questa diseuguaglianza possa essere compatibile colla prima delle (18) è necessario che si abbia

$$(19) \quad n < \frac{2 \sin \delta'}{(1 - \sin \delta) \sin(\delta - \delta')}.$$

Dobbiamo così concludere che, se p_0 denota un numero intero superiore al secondo membro della (19), sul segmento L esiste un punto z_p (con $p \leq p_0$), nel quale è soddisfatta la diseuguaglianza

$$\log |\pi_0(z_p)| > -2^{c+1} K^{p_0} \omega r_1^{c(r_1)},$$

e per il quale si ha inoltre $l_p \leq 6q_p$, ove l_p e q_p hanno un significato analogo a quello degli l_n e q_n precedenti.

Ciò posto, applichiamo il lemma II al cerchio $\Omega_p: |z - z_p| \leq 8q_p$. Questo lemma ci permette d'affermare che ad ogni numero positivo arbitrariamente piccolo η si può far corrispondere una costante $M(\eta)$, in modo tale che tutti i punti del cerchio $\Omega_p'': |z - z_p| \leq 7q_p$, nei quali non è soddisfatta la diseuguaglianza

$$(20) \quad \log |\pi_0(z)| > -2^{c+1} K^{p_0} M(\eta) \omega r_1^{c(r_1)},$$

possano essere inclusi in un sistema di cerchi, i cui raggi hanno una somma inferiore a ηq_p .

Ora, è chiaro che il segmento $(R, R + q_p)$ dell'asse reale deve essere compreso nel cerchio Ω_p'' ; dunque, l'insieme dei punti di questo segmento, nei quali la (20) non è soddisfatta, ha una misura lineare non superiore a $2\eta q_p$. D'altra parte q_p è certo inferiore a $\frac{1}{2}R$. Ne scende che sul segmento $[R, R(1 + 2\eta)]$ vi sono certamente dei punti r , nei quali la (20) è soddisfatta. E se si tien conto ancora una volta delle (14), si vede che in questi punti r deve pure essere verificata la disequaglianza

$$\log |\pi_0(r)| > -4^{\rho+1} K^{\rho_0} M(\eta) \omega r^{\rho(r)}.$$

Il ragionamento che ci ha condotto a questa conclusione è valido, comunque sia stato scelto il numero ω . Col variare di ω potrà solo variare il valore di R_0 . Ciò posto, possiamo far corrispondere ad ogni coppia di numeri positivi ε, η un $\omega = \omega(\varepsilon, \eta)$ in modo tale che si abbia

$$(21) \quad 4^{\rho+1} K^{\rho_0} M(\eta) \omega < \varepsilon.$$

Infatti K è una costante numerica, ρ è costante, e ρ_0 dipende solo da δ e da δ' .

Con ciò, vediamo che ad ogni coppia ε, η corrisponde un $R_0 = R_0[\omega(\varepsilon, \eta)] = R_0(\varepsilon, \eta)$ tale che, per ogni $R > R_0$, il segmento dell'asse reale $[R, R(1 + 2\eta)]$ contiene dei punti r , nei quali è soddisfatta la disequaglianza (15).

5. Per terminare adesso la dimostrazione del lemma I, indichiamo con δ'' un numero arbitrario inferiore a δ , e poniamo $\delta''' = \frac{1}{2}(\delta + \delta'')$. Ciò fatto, consideriamo il cerchio $|z - r| \leq r \operatorname{sen} \delta'''$, e siano z' e z'' ($z'' > z'$) i due punti d'intersezione di questo cerchio colla semi-retta $\arg z = \delta''$. I due rapporti $\beta = r/|z'|$ e $\xi^2 = z''/z'$ sono indipendenti dal valore di r . Pertanto, se dividiamo il settore $\Sigma'' : |\arg z| \leq \delta''$ in striscie circolari

$$(S_p) \quad \xi^{p-1} < |z| \leq \xi^p \quad |\arg z| \leq \delta'' \quad (p = 1, 2, \dots),$$

potremo affermare che, per ogni r dell'intervallo $\beta \xi^{p-2} < r < \beta \xi^{p-1}$, il cerchio $|z - r| \leq r \operatorname{sen} \delta'''$ comprende all'interno tutta la striscia (S_p) . Ne scende che, se poniamo $R_p = \beta \xi^{p-2}$, e se prendiamo η abbastanza piccolo perchè si abbia $1 + 2\eta < \xi$, potremo determinare un numero $p_1 = p_1(\varepsilon, \eta)$ in modo tale che, per $p \geq p_1$, l'intervallo $[R_p, R_p(1 + 2\eta)]$ comprenda almeno un punto r_p nel quale è soddisfatta la disequaglianza (15), e per il quale il

cerchio $C_p: |z - r_p| \leq r_p \text{ sen } \delta'''$ comprende all'interno la striscia (S_p) . Per ottenere questo, basterà scegliere p_1 in modo tale che si abbia $R_{p_1} \geq R_0$, ove R_0 ha lo stesso significato che nel numero precedente. D'altronde, il modo nel quale avevamo definito R_0 ci permette di affermare che, in ogni punto del cerchio $\Gamma_p: |z - r_p| \leq r_p \text{ sen } \delta$, sarà soddisfatta la disequaglianza (16); e pertanto, dalle disequaglianze (14) e (21) potremo dedurre che, in tutto il cerchio Γ_p , sarà soddisfatta anche la disequaglianza

$$\log |\pi_0(z)| < 2^{p+1} \omega r_p^{\rho(r_p)} < \varepsilon r_p^{\rho(r_p)}.$$

In queste condizioni, si può applicare il lemma II al cerchio Γ_p . Se prendiamo $\theta = \frac{\text{sen } \delta'''}{\text{sen } \delta}$, e se teniamo conto del fatto che la striscia (S_p) è compresa nel cerchio C_p , arriveremo così alla conclusione che:

1.° il numero degli zeri di $\pi_0(z)$, situati nella striscia (S_p) , non può essere superiore a $C(\theta) \varepsilon r_p^{\rho(r_p)}$, ove $C(\theta)$ è una costante che dipende solo da θ (cioè da δ e δ''');

2.° esiste una costante $K(\theta, \eta)$ che dipende solo da θ e η , per la quale l'insieme dei punti della striscia (S_p) , nei quali non è soddisfatta la disequaglianza

$$\log |\pi_0(z)| > -K(\theta, \eta) \varepsilon r_p^{\rho(r_p)},$$

può essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi hanno una somma inferiore a $\eta r_p \text{ sen } \delta$.

Utilizzando ancora una volta le (14), vedremo che l'ultima affermazione è valida anche per l'insieme dei punti di (S_p) , nei quali non è soddisfatta la disequaglianza

$$(22) \quad \log |\pi_0(r e^{i\varphi})| > -2^{p+1} K(\theta, \eta) \varepsilon r^{\rho(r)}.$$

Ne scende che, se p è determinato dalla condizione $\xi^{p-1} < r \leq \xi^p$, l'insieme dei punti del campo $\xi^{p_1} \leq |z| \leq r$, $|\arg z| \leq \delta''$, nei quali la disequaglianza (22) non è soddisfatta, può essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi abbiano una somma inferiore a

$$(23) \quad \eta \text{ sen } \delta \{ \xi^{p_1+1} + \xi^{p_1+2} + \dots + \xi^p \} \leq \eta r \xi \text{ sen } \delta \left\{ 1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \dots \right\} = \frac{\eta \xi^2 \text{ sen } \delta}{\xi - 1} r.$$

D'altra parte, il numero degli zeri di $\pi_0(z)$, situati nel medesimo campo $\xi^{p_1} \leq |z| \leq r$, $|\arg z| \leq \delta''$, deve essere inferiore a

$$C(\theta) \varepsilon \sum_{v=p_1}^{v=p} \xi^{v \rho(\xi^v)},$$

e dalle (14) si deduce che quest'espressione è inferiore a

$$(24) \quad 2\varepsilon C(\theta) \xi^{p\rho(\xi^p)} \left\{ \frac{1}{\xi^p} + \frac{1}{\xi^{2p}} + \dots \right\} \leq \frac{4C(\theta)\xi^p}{\xi^p - 1} \varepsilon r^{\rho(r)}.$$

Diamoci ora due numeri positivi arbitrariamente piccoli ε_0 e η_0 . Determiniamo η in modo tale che si abbia $\frac{\eta \xi^2 \text{sen } \delta}{\xi - 1} < \eta_0$, ciò che è certamente possibile. Poi determiniamo ε in modo tale che si abbia $2^{\rho+1} K(\theta, \eta) \varepsilon < \varepsilon_0$ e $\frac{4\varepsilon C(\theta)\xi^p}{\xi^p - 1} < \varepsilon_0$; anche questo è possibile, dato che θ e ξ sono completamente determinati quando sono fissati δ e δ'' .

Adesso possiamo applicare i risultati testè dimostrati dando a ε e η precisamente i valori ora determinati; infatti, i nostri risultati sono validi per ogni coppia di numeri ε e η , purchè p , sia scelto in relazione ai dati valori di ε e η . Procedendo così, renderemo i secondi membri delle (22), (23) e (24) rispettivamente inferiori a $-\varepsilon_0 r^{\rho(r)}$, $\eta_0 r$, $\varepsilon_0 r^{\rho(r)}$.

Ne scende che, per ogni r superiore a R_p ,

1) il numero degli zeri di $\pi_0(z)$, situati nel campo $\xi^p \leq |z| \leq r$, $|\arg z| \leq \delta''$, non è superiore a $\varepsilon_0 r^{\rho(r)}$;

2) i punti del medesimo campo, nei quali non è verificata la disegualianza

$$\log |\pi_0(re^{i\varphi})| > -\varepsilon_0 r^{\rho(r)},$$

possono essere inclusi in un sistema di cerchi, i cui raggi hanno una somma inferiore a $\eta_0 r$. Il lemma I è così completamente dimostrato.

6. Passiamo ora alla dimostrazione del teorema I, ed ammettiamo ancora che $\varphi_0 = 0$. Diamo a γ un valore positivo arbitrariamente piccolo (lo prenderemo in ogni caso inferiore a $\frac{1}{500} \delta$). Dai presupposti del teorema risulta che l'una della quantità $h(\gamma)$ e $h(-\gamma)$ deve essere positiva. Per fissare le idee, ammetteremo che $h(\gamma) > 0$; il caso di $h(-\gamma) > 0$ potrebbe essere trattato nello stesso modo e perciò noi ci limiteremo alla considerazione del caso $h(\gamma) > 0$. Poniamo $h(\gamma) = 5p$; p sarà allora un numero positivo, e siccome γ rimarrà fisso durante il ragionamento, così anche p sarà considerato come costante. Indichiamo poi con P un numero positivo superiore al massimo di $h(\varphi)$ per $|\varphi| \leq 4\gamma$; anche questo numero P potrà essere considerato come costante, perchè anch'esso può essere completamente fissato, non appena è fissato il valore di γ .

Ciò posto, possiamo definire sulla semi-retta $\arg z = \gamma$ una successione infinita di punti $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n = R_n e^{i\gamma}, \dots$ in modo tale che siano verificate le due condizioni

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$$

$$(26) \quad \log |f(\zeta_n)| > 4pR_n^{\rho(R_n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A ciascuno dei punti ζ_n , possiamo far corrispondere un cerchio $C^{(n)}$: $|z - \zeta_n| \leq \leq 360\gamma R_n$; ognuno di questi cerchi sarà compreso nel settore $|\arg z| < \frac{9}{10}\delta$.

Siano adesso $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$ due funzioni d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore $\Sigma: |\arg z| \leq \delta$, e sostanzialmente diverse in un settore più piccolo.

Se poniamo, come prima, $\pi_0(z) = \pi_2(z) - \pi_1(z)$, i risultati dei numeri precedenti saranno certo applicabili in ognuno dei cerchi $C^{(n)}$, almeno a cominciare da un certo valore di n .

Ciò detto, scegliamo un numero positivo ε arbitrariamente piccolo. Sarà allora possibile determinare un $R_0 = R_0(\varepsilon, \gamma)$ in modo tale che per ogni $R \geq R_0$, siano verificate le disequaglianze

$$(27) \quad \log |f(R)| < \varepsilon R^{\rho(R)},$$

$$(28) \quad \log |f(Re^{i\varphi})| < PR^{\rho(R)} \quad (|\varphi| < 4\gamma),$$

$$(29) \quad \log |\pi_n(Re^{i\psi})| < \varepsilon R^{\rho(R)} \quad (n = 0, 1, 2; |\psi| < \frac{9}{10}\delta),$$

e che inoltre si possa affermare

1) che il numero degli zeri di $\pi_0(z)$, situati nel campo $|z| < R$, $|\arg z| \leq \frac{9}{10}\delta$, è inferiore a $\varepsilon R^{\rho(R)}$,

2) che l'insieme dei punti del campo $R_0 \leq |z| \leq R$, $|\arg z| \leq \frac{9}{10}\delta$, nei quali non è soddisfatta la disequaglianza

$$(30) \quad \log |\pi_0(re^{i\varphi})| > -\varepsilon r^{\rho(r)},$$

può essere rinchiuso in un sistema di cerchi, i cui raggi hanno una somma inferiore a $\frac{1}{2}\gamma R$.

La possibilità di definire un tale R_0 risulta — per la disequaglianza (27) — dalla condizione del teorema per la quale $h(0) = 0$, — per la disequaglianza (28) — dalla definizione di P , — per la disequaglianza (29) — dal fatto che le funzioni $\pi_n(z)$ ($n = 0, 1, 2$) sono d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$, — e per le due ultime condizioni — dalla supposizione che le funzioni $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$ sono sostanzialmente diverse (v. n° 5).

Possiamo ancora ammettere (aumentando in caso di bisogno il valore di R_0) che, per $R > R_0$, sono verificate le disequaglianze (14) con $\alpha = \frac{1}{2}$.

Scegliamoci adesso uno qualsiasi dei cerchi $C^{(n)}$, situati fuori del cerchio $|z| \leq R_0$, e indichiamolo, per semplificare le notazioni, con la sola lettera C senza indici; nello stesso modo indichiamo con $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ il centro di C . Indichiamo infine con Γ la circonferenza $|z - z_1| = \gamma r_1$ e con C_1 il cerchio $|z - z_1| \leq 2\gamma r_1$.

La classica disequaglianza di JENSEN ⁽¹⁾ ci permette di affermare che si deve avere

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z_1 + \gamma r_1 e^{i\theta})| d\theta \geq \log |f(z_1)| > 4pr_1^{\rho(r_1)}.$$

D'altra parte, in ogni punto della circonferenza Γ la funzione $f(z)$ deve soddisfare alla disequaglianza (28); dalle (14) risulta allora che in ogni punto di questa circonferenza si avrà anche

$$(31) \quad \log |f(z)| < 2\rho^{+1} Pr_1^{\rho(r_1)}.$$

Pertanto, se indichiamo con $2\pi m \gamma r_1$ la misura lineare dell'insieme dei punti di Γ nei quali si ha

$$(32) \quad \log |f(z)| > 3pr_1^{\rho(r_1)},$$

potremo scrivere che

$$2\rho^{+1} Pr_1^{\rho(r_1)} m + 3pr_1^{\rho(r_1)} (1 - m) \geq 4pr_1^{\rho(r_1)};$$

ne scende che

$$m \geq \frac{p}{2\rho^{+1}P - 3p},$$

ed il secondo membro di questa disequaglianza è una costante positiva che può dipendere solo da γ ; possiamo indicarla con m_0 .

Vediamo così che l'insieme dei punti della circonferenza Γ , nei quali è soddisfatta la (32), ha una misura lineare superiore a $2\pi m_0 \gamma r_1$. Ne scende che l'insieme dei punti del cerchio C_1 , nei quali è soddisfatta la (32), non può essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi abbiano una somma non superiore a $\frac{1}{2} m_0 \gamma r_1$.

Introduciamo adesso la funzione

$$(33) \quad g(z) = \frac{A[\pi_2(z) - \pi_1(z)]}{f(z) - \pi_1(z)} = \frac{A\pi_0(z)}{f(z) - \pi_1(z)}, \quad \log A = 2\rho^{+3} \varepsilon r_1^{\rho(r_1)},$$

⁽¹⁾ Loc. cit. a p. 179.

che è evidentemente meromorfa nel settore Σ . Siccome in ogni punto del cerchio C_1 sono soddisfatte le disequaglianze (29), vi devono essere soddisfatte, in seguito alle (14), anche le disequaglianze

$$(34) \quad \log |\pi_0(z)| < 2^{\rho+1} \varepsilon r_1^{\rho(r_1)} \quad (n=0, 1, 2).$$

Ne scende che nei punti di C_1 , nei quali è soddisfatta la (32), deve essere soddisfatta anche la disequaglianza

$$(35) \quad \log |g(z)| < -pr_1^{\rho(r_1)},$$

purchè ε sia abbastanza piccolo rispetto a p (p. es., $\varepsilon < 2^{-(\rho+1)p}$). Possiamo dunque dire che l'insieme I_1 dei punti di C_1 , nei quali è soddisfatta la (35), non può essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi abbiano una somma non superiore a $\frac{1}{2}m_0\gamma r_1$.

D'altra parte, è facile assicurarsi che la medesima affermazione può essere fatta per l'insieme I_2 dei punti di C_1 , nei quali è soddisfatta la disequaglianza

$$(36) \quad \log |g(z)| > 2.$$

Infatti, il cerchio C_1 sega sull'asse reale un segmento L di lunghezza superiore a $3\gamma r_1$. L'insieme E dei punti del segmento L , nei quali è soddisfatta la disequaglianza

$$(37) \quad \log |\pi_0(z)| \geq -2^{\rho+1} \varepsilon r_1^{\rho(r_1)}$$

ha una misura lineare superiore a $2\gamma r_1$. Infatti, dalle (14) risulta che nei punti, nei quali la (37) non è soddisfatta, non può essere soddisfatta neppure la (30), e pertanto l'insieme di questi punti può essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi hanno una somma inferiore a $\frac{1}{2}\gamma r_1$. La misura lineare di questo insieme è dunque inferiore a γr_1 , e quella dell'insieme complementare E è superiore a $2\gamma r_1$. Siccome poi, in ogni punto di L devono essere soddisfatte le disequaglianze (34) e (27), e pertanto, in seguito alla (14), deve essere soddisfatta anche la disequaglianza

$$\log |f(r)| < 2^{\rho+1} \varepsilon r_1^{\rho(r_1)},$$

vediamo che in ogni punto di E è soddisfatta la (36). L'insieme E è dunque un insieme parziale dell'insieme I_2 , e pertanto quest'ultimo non può essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi abbiano una somma non superiore a γr_1 .

Dunque, nè l'insieme I_1 , nè l'insieme I_2 , può essere incluso in un si-

stema di cerchi, i cui raggi abbiano una somma non superiore a $\frac{1}{2} m_0 \gamma r_1$. In queste condizioni, un teorema di MILLOUX ⁽¹⁾ permette di affermare che la funzione $g(z)$ prende, nel cerchio C , almeno $Mpr_1^{\rho(r_1)}$ volte $\left[M = \frac{1}{100 \left(\log \frac{4e}{m_0} \right)^2} \right]$ ogni valore complesso, esclusi tutt'al più certi valori eccezionali che, sulla sfera di RIEMANN, possono essere inclusi in due cerchi di raggio non superiore a $e^{-pr_1^{\rho(r_1)}}$.

Ora, gli zeri di $g(z)$ coincidono con quelli di $\pi_0(z)$. Dunque, il valore zero è preso dalla funzione $g(z)$ nel cerchio C al massimo $2^{\rho+1} \varepsilon r_1^{\rho(r_1)}$ volte. Pertanto, se $\varepsilon < \frac{p}{2^{\rho+2} M}$, il punto zero è certamente compreso in uno dei due cerchi eccezionali che possono, secondo il teorema di MILLOUX, esistere sulla sfera di RIEMANN. In quanto al secondo possibile cerchio eccezionale, esso può avere una posizione qualunque sulla sfera di RIEMANN, ma è chiaro che esso non potrà contenere ambedue i punti ∞ e A . Infatti, la (33) mostra che, detta λ la distanza sferica di questi due punti, si avrà $\log \lambda > -2^{\rho+1} \varepsilon r_1^{\rho(r_1)} > > -pr_1^{\rho(r_1)}$. E nello stesso modo si vede che nessuno di questi due punti può essere contenuto nel cerchio eccezionale che comprende il punto zero. Vediamo dunque che uno almeno dei punti A e ∞ non appartiene a nessuno dei cerchi eccezionali, e pertanto l'uno almeno dei valori A e ∞ è preso dalla funzione $g(z)$ non meno di $Mpr_1^{\rho(r_1)}$ volte nel cerchio C . Ma, perchè si abbia $g(z) = A$, oppure $g(z) = \infty$, è necessario che si abbia rispettivamente $f(z) = \pi_2(z)$, oppure $f(z) = \pi_1(z)$. Arriviamo così alla conclusione che l'una almeno delle equazioni $f(z) - \pi_1(z) = 0$ e $f(z) - \pi_2(z) = 0$ possiede almeno $Mpr_1^{\rho(r_1)}$ radici nel cerchio C .

Questa conclusione è applicabile a tutti i cerchi $C^{(n)}: |z - \zeta_n| \leq 360 \gamma R_n$ ($\zeta_n = R_n e^{i\theta}$) a cominciare da un certo valore dell'indice n . Vediamo dunque che, in ogni cerchio $C^{(n)}$, a cominciare da un certo valore di n , l'una almeno delle funzioni $f(z) - \pi_1(z)$ e $f(z) - \pi_2(z)$ possiede più di $MpR_n^{\rho(R_n)}$ zeri. Ne scende che all'una almeno di queste funzioni corrisponde una successione infinita di cerchi $C^{(n)}$, in ciascuno dei quali essa si annulla più di $MpR_n^{\rho(R_n)}$ volte. Il teorema I è così dimostrato.

7. Passiamo adesso al teorema sulle direzioni non sinusoidali annunciato al principio della Memoria.

(1) « Proc. Phys. Math. Soc. Japan », t. 12, 1930, p. 18.

Indichiamo con $V(z)$ una funzione di z , olomorfa nel settore $|\arg z| \leq \frac{\pi}{\rho}$, e che soddisfa in questo settore alla condizione

$$(38) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(re^{i\varphi})}{r^{\rho(r)}} = e^{i\varphi\rho}.$$

G. VALIRON ha mostrato che, ad ogni ordine precisato $\rho(r)$, corrispondono simili funzioni (¹); inoltre, è chiaro che, nel caso $\rho(r) \equiv \rho$, si può prendere $V(z) = z^\rho$.

Ciò posto, possiamo dimostrare il teorema seguente:

TEOREMA II. — *Abbiassi una funzione $F(z)$, d'ordine precisato $\rho(r)$ in un settore S , e sia $\arg z = \varphi_0$ una direzione non sinusoidale (v. n.º 2) di questa funzione. Se $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$ sono due funzioni d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore $\Sigma: \varphi_0 - \delta \leq \arg z \leq \varphi_0 + \delta$ (δ -positivo arbitrariamente piccolo, ma fisso), e sostanzialmente diverse in un settore interno a Σ , allora la direzione $\arg z = \varphi_0$ è una direzione di Borel di tipo massimo per l'una almeno delle funzioni*

$$(39) \quad \begin{cases} \Psi_1(z) = F(z) - \pi_1(z)e^{[h(\varphi_0)+iq]V(ze^{-i\varphi_0})}, \\ \Psi_2(z) = F(z) - \pi_2(z)e^{[h(\varphi_0)+iq]V(ze^{-i\varphi_0})}, \end{cases}$$

ove q è una costante arbitraria e

$$(40) \quad h(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}.$$

Possiamo ammettere che $h(\varphi_0) > 0$, perchè nel caso $h(\varphi_0) = 0$ il teorema II si riduce al teorema di VALIRON-CARTWRIGHT. Ciò posto, vi sarà un intorno di φ_0 , nel quale $h(\varphi)$ sarà positiva. Dunque, se poniamo

$$\begin{aligned} f(z) &= F(z)e^{-[h(\varphi_0)+iq]V(ze^{-i\varphi_0})} \\ h_1(\varphi) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}, \end{aligned}$$

possiamo dedurre dalle (40) e (38) che, in un certo intorno di φ_0 , si ha

$$(41) \quad h_1(\varphi) = h(\varphi) - h(\varphi_0) \cos \rho(\varphi - \varphi_0) + q \operatorname{sen} \rho(\varphi - \varphi_0).$$

Ne scende, in primo luogo, che $h_1(\varphi_0) = 0$. Ma ne scende anche che, in ogni intorno di φ_0 , esistono dei valori di φ per i quali $h_1(\varphi) > 0$; infatti, dalla (41) risulta che, se ciò non fosse, dovrebbe esistere un intorno di φ_0 , nel quale

(¹) « Ann. Fac. Sc. de Toulouse », t. 5, 1913, pp. 230-232.

si avrebbe identicamente

$$h(\varphi) = h(\varphi_0) \cos \rho(\varphi - \varphi_0) - q \operatorname{sen} \rho(\varphi - \varphi_0),$$

e la direzione $\arg z = \varphi_0$ dovrebbe essere una direzione sinusoidale di $F(z)$. Dunque in uno degli intervalli $(\varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{\rho})$ o $(\varphi_0 - \frac{\pi}{\rho}, \varphi_0)$ (4) deve essere $h_1(\varphi) > 0$; e, per precisare, possiamo ammettere che questo capiti nell'intervallo $(\varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{\rho})$.

Ciò posto, vediamo che alla funzione $f(z)$ si possono applicare i ragionamenti del n.º 6. Se ne deduce che, comunque si scelga l'angolo arbitrariamente piccolo $\gamma > 0$, si può determinare una successione infinita di punti $\zeta_n = R_n e^{i(\varphi_0 + \gamma)}$, situati sulla semi-retta $\arg z = \varphi_0 + \gamma$, ed una costante N (che può dipendere da γ), in modo tale che in ognuno dei punti ζ_n si abbia

$$\log |f(\zeta_n)| > 4p R_n^{\rho(R_n)}, \quad \text{ove } p = \frac{1}{5} h_1(\varphi_0 + \gamma),$$

e che inoltre l'una almeno delle due funzioni $f(z) - \pi_1(z)$ o $f(z) - \pi_2(z)$ abbia non meno di $NR_n^{\rho(R_n)}$ zeri in ciascuno dei cerchi $C^{(m)}: |z - \zeta_n| \leq 360R_n$. Per precisare, possiamo ammettere che, fra le due funzioni $f(z) - \pi_1(z)$ e $f(z) - \pi_2(z)$, è la funzione $f(z) - \pi_1(z)$ quella che si annulla almeno $NR_n^{\rho(R_n)}$ volte in ciascuno dei cerchi $C^{(m)}$. Inoltre, se δ_0 è il più piccolo dei numeri δ e $\frac{\pi}{\rho}$, possiamo ammettere che γ sia stato preso inferiore a $\frac{\delta}{100000}$.

Ciò posto, consideriamo come si comporti nei cerchi $C^{(m)}$ la funzione $\Psi_1(z)$. Per far questo, determiniamo il numero R_0 nello stesso modo come l'abbiamo fatto nel n.º 6, e poi scegliamoci l'uno qualsiasi dei cerchi $C^{(m)}$ situati fuori del cerchio $|z| \leq R_0$, ed indichiamo semplicemente con C questo cerchio, e con $z_1 = r_1 e^{i(\varphi_0 + \gamma)}$ il suo centro $\zeta_n = R_n e^{i(\varphi_0 + \gamma)}$.

Nel punto z_1 sarà allora soddisfatta la diseuguaglianza

$$\log |f(z_1)| > 4pr_1^{\rho(r_1)}.$$

E siccome le (29) devono essere soddisfatte in ogni punto di C , dovremo avere anche

$$\log |f(z_1) - \pi_1(z_1)| > 3pr_1^{\rho(r_1)};$$

infine, essendo $h(\varphi_0) > 0$, si deduce dalle (39) e (38) che nel punto z_1 deve essere soddisfatta la diseuguaglianza

$$\log |\Psi_1(z_1)| > 3pr_1^{\rho(r_1)}.$$

(4) Vedi nota a p. 177.

Ne possiamo dedurre, esattamente come nel n.º 6, che l'insieme dei punti della circonferenza $\Gamma: |z - z_1| = \gamma r_1$, nei quali è soddisfatta la diseuguaglianza

$$(42) \quad \log |\Psi_1(z)| > 2pr_1^{(r_1)}$$

ha una misura lineare superiore a $2\pi m_1 \gamma r_1$, ove m_1 è una costante positiva che dipende solo da γ . Dunque, l'insieme J_1 dei punti del cerchio $C_2: |z - z_1| \leq 400\gamma r_1$, nei quali è soddisfatta la (42), non può essere incluso in un sistema di cerchi, i cui raggi hanno una somma non superiore a $\frac{1}{2} m_1 \gamma r_1$.

Sia adesso J_2 l'insieme dei punti del medesimo cerchio C_2 , nei quali è soddisfatta la diseuguaglianza

$$\log |\Psi_1(z)| < \frac{1}{2}.$$

Se non è possibile includere questo sistema J_2 in un sistema di cerchi, i cui raggi abbiano una somma non superiore a $\frac{1}{2} m_1 \gamma r_1$, si può applicare alla funzione $\frac{1}{\Psi_1(z)}$, ed al cerchio C_2 , il teorema di MILLOUX già usato nel n.º 6. Questo teorema ci permette di affermare che, nel caso considerato, la funzione $\frac{1}{\Psi_1(z)}$, e dunque anche la funzione $\Psi_1(z)$, prende, nel cerchio $C_3: |z - z_1| \leq 72000\gamma r_1$, almeno $N_1 r_1^{(r_1)}$ volte $\left[N = \frac{p}{100 \left(\log \frac{5000}{m_1} \right)^2} \right]$ ogni valore complesso,

esclusi tutt'al più certi valori eccezionali che, sulla sfera di RIEMANN, possono essere inclusi in due cerchi di raggio non superiore a $e^{-pr_1^{(r_1)}}$.

Se invece l'insieme J_2 può essere incluso in un sistema di cerchi i cui raggi hanno una somma non superiore a $\frac{1}{2} m_1 \gamma r_1$, allora si può definire all'interno del cerchio C_2 una curva chiusa Γ_2 che comprende all'interno tutto il cerchio C , ed in ogni punto della quale si ha

$$\log |\Psi_1(z)| \geq \frac{1}{2}.$$

Il teorema di ROUCHÉ mostra allora che le due equazioni $\Psi_1(z) = 0$ e $\Psi_1(z) - \frac{1}{4} = 0$ hanno lo stesso numero di radici entro la curva Γ_2 . E siccome questa curva comprende all'interno il cerchio C ed è compresa nel cerchio C_2 , e d'altra parte noi sappiamo che $f_1(z) - \pi_1(z)$ e dunque anche $\Psi_1(z)$ s'annulla almeno $Nr_1^{(r_1)}$ volte nel cerchio C , così possiamo concludere che la funzione $\Psi_1(z)$ prende nel cerchio C_2 almeno $Nr_1^{(r_1)}$ volte ciascuno dei va-

lori 0 e $\frac{1}{4}$. In queste condizioni, un altro teorema di MILLOUX ⁽¹⁾ permette di affermare che, nel cerchio $C_4: |z - z_1| \leq 8000\gamma r_1$, la funzione $\Psi_1(z)$ prende almeno $\frac{1}{100} N r_1^{\rho(r_1)}$ volte ogni valore complesso, esclusi tutt'al più certi valori eccezionali che, nella sfera di RIEMANN, possono essere inclusi in due cerchi di raggio inferiore a $e^{-N r_1^{\rho(r_1)}}$.

Vediamo così che, se N_2 è il più piccolo dei numeri N_1 e $\frac{1}{100} N$, la funzione $\Psi_1(z)$ prende *in ogni caso* nel cerchio C_3 almeno $N_2 r_1^{\rho(r_1)}$ volte ogni valore complesso, esclusi tutt'al più certi valori eccezionali che, sulla sfera di RIEMANN, possono essere inclusi in due cerchi di raggio inferiore a $e^{-N_2 r_1^{\rho(r_1)}}$ (N_3 è una costante che dipende solo da γ).

Ora, la funzione $\Psi_1(z)$ è oloomorfa nel cerchio C_3 , perchè questo cerchio è compreso tanto nel settore $\Sigma: \varphi_0 - \delta \leq \arg z \leq \varphi_0 + \delta$, quanto nel settore $\varphi_0 - \frac{\pi}{\rho} \leq \arg z \leq \varphi_0 + \frac{\pi}{\rho}$. Dunque, uno almeno dei due possibili cerchi eccezionali deve effettivamente esistere, e deve comprendere il punto ∞ . In quanto all'altro possibile cerchio eccezionale, la sua esistenza è facoltativa.

Consideriamo ora tutti i cerchi $C^{(m)}: |z - \zeta_n| \leq 360\gamma R_n$, ed a ciascuno di essi facciamo corrispondere il cerchio corrispondente $C_3^{(m)}: |z - \zeta_n| \leq 72000\gamma R_n$. Il ragionamento precedente sarà applicabile a tutti questi cerchi, ed in ciascuno dei cerchi $C_3^{(m)}$, la funzione $\Psi_1(z)$ prenderà almeno $N_2 R_n^{\rho(R_n)}$ volte ogni valore complesso, esclusi solo i valori che si trovano, sulla sfera di RIEMANN, in un cerchio $\gamma_1^{(m)}$ di raggio $2e^{-N_2 R_n^{\rho(R_n)}}$ e di centro ∞ , e quelli che eventualmente si trovano in un altro cerchio $\gamma_2^{(m)}$ di uguale raggio. Ora, è chiaro che l'unico punto comune a tutti i cerchi $\gamma_1^{(m)}$ ($n \rightarrow \infty$) è il punto ∞ ; d'altra parte, vi può esistere al massimo un solo punto a_π che appartiene a tutti i cerchi $\gamma_2^{(m)}$. Possiamo dunque concludere che, per ogni a diverso da questo possibile valore eccezionale a_π , la funzione $\Psi_1(z) - a$ si annulla almeno $N_2 R_n^{\rho(R_n)}$ volte in ogni cerchio $C_3^{(m)}$, a cominciare da un certo valore di n . E questo dimostra che la direzione $\arg z = \varphi_0$ è una direzione di BOREL di tipo massimo per la funzione $\Psi_1(z)$. Il teorema II è così dimostrato.

8. Il teorema II giustifica l'affermazione (fatta al principio di questa Memoria), secondo la quale le direzioni non-sinusoidali sono, *in generale*, delle direzioni di BOREL di tipo massimo. Crediamo però che non sarà inutile aggiungere al teorema II un altro teorema, che, pur essendo compreso

(1) Op. cit. a p. 190, p. 15.

nel teorema II ed avendo una portata minore di esso, dà all'affermazione precedente una giustificazione molto più intuitiva (per quanto meno larga).

Consideriamo un settore Δ di apertura superiore a $\frac{\pi}{\rho}$. Un teorema di MILLOUX, migliorato dalla sig-na CARTWRIGHT, permette di affermare che, se $\pi(z)$ è una funzione olomorfa e d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore Δ , allora in ogni settore d'apertura $\frac{\pi}{\rho}$, interno al settore Δ , si può definire una curva che si estende all'infinito e sulla quale il rapporto

$$\frac{\log |\pi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}$$

tende al limite zero, quando $z = re^{i\varphi}$ cresce all'infinito (¹). Da questo teorema risulta che, se $\pi_1(z)$ e $\pi_2(z)$ sono ambedue d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore Δ , queste funzioni sono sostanzialmente diverse in ogni settore interno al settore Δ (vedi lemma I).

Chiamiamo adesso con (π_Δ) lo spazio funzionale che comprende tutte le funzioni che sono olomorfe e d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore Δ . Ciò posto, abbiamo il teorema seguente:

TEOREMA III. — *Abbiassi una funzione $F(z)$ d'ordine precisato $\rho(r)$ in un settore S che comprende una direzione $\arg z = \varphi_0$, non sinusoidale per la funzione $F(z)$; sia inoltre Δ un settore d'apertura superiore a $\frac{\pi}{\rho}$ e comprendente la direzione $\arg z = \varphi_0$. In queste condizioni, se la funzione $\pi(z)$ percorre tutto lo spazio funzionale (π_Δ) corrispondente al settore Δ , allora fra tutte le funzioni*

$$(43) \quad \Psi(z) = F(z) + \pi(z)e^{[h(\varphi_0)+iq]V(ze^{-i\varphi_0})},$$

ove q e $h(\varphi)$ hanno lo stesso significato che nel teorema II, vi può esistere una sola, per la quale la direzione $\arg z = \varphi_0$ non è una direzione di Borel di tipo massimo, mentre per tutte le altre funzioni (43) la direzione $\arg z = \varphi_0$ è certamente una direzione di Borel di tipo massimo.

Questo teorema non è che un caso particolare del teorema II. Infatti, noi sappiamo che due qualsiasi funzioni dello spazio funzionale (π_Δ) sono sostanzialmente diverse in ogni settore interno al settore Δ , e pertanto esse sono sostanzialmente diverse nel settore Σ che interviene nel testo del teorema II se δ è abbastanza piccolo perchè il settore Σ sia interno al settore Δ . Il teorema II mostra dunque che, prese ad arbitrio due funzioni (43), la

(¹) MILLOUX (« Acta Math. », t. 52, 1928, p. 251) e CARTWRIGHT (l. c.).

direzione $\arg z = \varphi_0$ è certamente una direzione di BOREL di tipo massimo per l'una almeno di queste funzioni. Ora, i casi sono due: oppure la direzione $\arg z = \varphi_0$ è una direzione di BOREL di tipo massimo per *tutte* le funzioni (43), oppure esiste una funzione (43) per la quale questa direzione non è una direzione di BOREL di tipo massimo. Ma nell'ultimo caso risulta da quanto abbiamo detto or ora che la direzione $\arg z = \varphi_0$ dovrà essere necessariamente una direzione di BOREL di tipo massimo per *tutte le altre* funzioni (43). Infatti, se esistesse una seconda funzione (43) per la quale la direzione $\arg z = \varphi_0$ non fosse una direzione di BOREL di tipo massimo, si potrebbero scegliere due funzioni (43) per nessuna delle quali la direzione $\arg z = \varphi_0$ sarebbe direzione di BOREL di tipo massimo; e questo è in contraddizione col teorema II, come l'abbiamo constatato un momento fa.

Diciamo adesso ancora qualche parola sulla portata del teorema I. Se $\pi(z)$ è una funzione qualsiasi, d'ordine precisato inferiore a $\rho(r)$ nel settore Σ , e se $a_1 \neq a_2$, le funzioni $\pi(z) - a_1$ e $\pi(z) - a_2$ sono certo sostanzialmente diverse nel settore Σ . Pertanto, dal teorema I risulta che ad ogni funzione $\pi(z)$, d'ordine inferiore a $\rho(r)$ in Σ , può corrispondere al massimo un valore a_π per il quale è soddisfatta la formola (3) del n.º 2, mentre per ogni $a \neq a_\pi$ deve essere soddisfatta la diseuguaglianza (4) del medesimo n.º 2. Ora, questo è precisamente la conclusione del teorema di VALIRON-CARTWRIGHT. Il nostro teorema I comprende dunque il teorema di VALIRON-CARTWRIGHT come caso particolare. Ma esso permette anche di affermare che, *in generale*, il valore eccezionale a_π non esiste, e che le funzioni $\pi(z)$, alle quali un tale valore eccezionale corrisponde effettivamente, sono, esse medesime, delle funzioni eccezionali. Infatti, sia Δ un settore d'apertura superiore a $\frac{\pi}{\rho}$ che comprende all'interno il settore Σ . Se chiamiamo $(\pi_{\Delta'})$ lo spazio funzionale che comprende tutte le funzioni dello spazio (π_{Δ}) all'infuori di quelle che si riducono ad una costante, e se alla funzione $\pi_0(z)$ corrisponde un valore eccezionale a_{π_0} , allora il teorema I permette di affermare che un tale valore eccezionale non potrà corrispondere a nessuna delle funzioni che si ottengono mediante l'addizione alla funzione $\pi_0(z)$ di una qualsiasi funzione dello spazio funzionale $(\pi_{\Delta'})$.

Sur les courbes de convergence des séries de polynomes à une variable complexe et leur application à la détermination des fonctions holomorphes dans des domaines donnés.

par N. ABRAMESCO (Cluj-Roumanie).

INTRODUCTION

Les séries de polynomes à une variable complexe, $\Sigma A_n P_n(x)$, $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$, apparaissent comme une généralisation des séries $\Sigma A_n x^n$, $\Sigma \frac{A_n}{x^n}$. En commençant par les séries $\Sigma A_n P_n(x)$, on peut faire l'étude de ces séries à deux points de vue. Premièrement, étant donnée une fonction $f(x)$, régulière dans un domaine limité par la courbe (C) , trouver le développement de $f(x)$ en série de polynomes, $f(x) = \Sigma A_n P_n(x)$, valable seulement à l'intérieur de la courbe (C) . Ce problème a été résolu par M. FABER ⁽¹⁾, qui a montré que les polynomes $P_n(x)$ dépendent seulement de contour (C) et les coefficients A_n dépendent de la courbe (C) et de la fonction $f(x)$.

Un autre point de vue de l'étude des séries de polynomes $\Sigma A_n P_n(x)$ est le suivant. On donne les polynomes $P_n(x)$ de degrés égaux aux indices et les coefficients A_n , et on demande les courbes de convergence de ces séries. Ce problème inverse a été abordé, il y a 50 ans, par DARBOUX ⁽²⁾ et POINCARÉ ⁽³⁾. Dans ce qui suit nous considérons les cas où les polynomes $P_n(x)$ sont donnés par des relations de récurrence de Poincaré pour lesquelles on trouve $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n}$, ou quand on connaît $\lim \sqrt[n]{P_n(x)}$. Nous construisons,

⁽¹⁾ FABER, *Ueber polynomische Entwicklungen* (« Math. Annalen », Bd. 57, 1903, p. 389; Bd. 64, 1907, p. 118). Voir aussi, P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*.

⁽²⁾ DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en séries* (« Journal de Math. pures et appliquées », t. IV, 1878, p. 411).

⁽³⁾ POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (« American Journal of Math. », vol. VII, 1884, p. 261).

comme application, des fonctions holomorphes dans des domaines limités par de courbes données.

Les séries $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$ suivant les inverses de polynômes donnés, rencontrées par MM. GUILLET et AUBERT ⁽⁶⁾, ont été étudiées en premier lieu par M. APPELL ⁽⁷⁾. Nous étudions les courbes de convergence dans les cas où les polynômes $P_n(x)$ sont donnés par de relations de récurrence de Poincaré, ou quand on connaît $\lim \sqrt[n]{\overline{P_n(x)}}$; de même pour les séries $\Sigma A_n P_n(x) + \Sigma \frac{B_n}{P_n(x)}$ ⁽⁸⁾.

Les séries $\Sigma A_n P_n(x)$.

1. Les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$, les polynômes $P_n(x)$ étant liés par de relations de récurrence de Poincaré. Séries de Poincaré. — Considérons la série

$$(1) \quad \Sigma A_n P_n(x),$$

les polynômes $P_n(x)$ étant liés par la relation de récurrence de Poincaré

$$(2) \quad R_k P_{n+k} + R_{k-1} P_{n+k-1} + \dots + R_0 P_n = 0,$$

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ étant donnés tels que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{l}$$

et R_q de fonctions qui dépendent de x et de rang n . Ces séries ont été considérées premièrement par POINCARÉ ⁽³⁾, ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾. On sait que le rapport $P_{n+1} : P_n$

⁽⁴⁾ S. PINCHERLE, *Sui sistemi di funzioni analitiche...* (» *Annali di Matematica* », II, vol. XII).

⁽⁵⁾ E. PICARD, *Cours d'Analyse supérieure de la Sorbonne*, en 1912, 1918. Les séries de DARBOUX et de POINCARÉ ont été considérées par M. PICARD dans son *Traité d'Analyse*, t. III, p. 419.

⁽⁶⁾ GUILLET et AUBERT, « *Comptes Rendus* », t. 155, 1912, pp. 139, 204, 708, 820.

⁽⁷⁾ P. APPELL, *Sur les développements en séries suivant les inverses de polynômes donnés* (« *Comptes Rendus* », t. 157, 1913, pp. 5, 1042); « *Bulletin des Sciences Math.* », 2^e série, t. 37, 1913, p. 345; « *Bulletin de la Société Math. de France* », t. 48, 1920, pp. 1-8).

⁽⁸⁾ Voir mes Notes: *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa. Le serie di Darboux* (« *Annali di Mat. pura ed applicata* », serie III, t. XXXI, 1922, p. 207); *Sur les séries de polynômes à une variable complexe* (« *Journal de Math. pures et appliquées* », 9^e série, t. I, 1922, p. 77); *Sur les courbes de convergence des séries procédant suivant les inverses de polynômes donnés* (« *Comptes Rendus* », t. 180, 1925, p. 566); *Sulle relazioni ricorrenti di ordine infinito* (« *Bollettino dell'Unione Mat. Italiana* », anno IV, n. 4, 1925, p. 155); *Nouvelle méthode pour l'étude des régions de convergence des séries de polynômes*

tend, en général, vers la racine $p(x)$ de plus grand module de l'équation

$$(3) \quad F(\lambda) = C_k \lambda^k + \dots + C_0 = 0, \quad C_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_s}{R_k}.$$

Pour trouver les courbes de convergence de ces séries, considérons la série

$$A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n + \dots,$$

dont le rayon de convergence est l . Supposons premièrement $|p(x)| < l$ et considérons un nombre l_1 tel que $|p| < l_1 < l$. On a

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = p(x), \quad \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| < l_1 < l,$$

et si, pour fixer les idées, on suppose que l'on a cette inégalité en partant de $n = 0$, nous aurons

$$\left| \frac{P_1}{P_0} \right| < l_1, \quad \left| \frac{P_2}{P_1} \right| < l_1, \dots, \quad \left| \frac{P_n}{P_{n-1}} \right| < l_1, \\ |P_n| < |P_0| l_1^n, \quad |A_n P_n| < |P_0| \cdot |A_n l_1^n|.$$

Donc, si $|p(x)| < l$, la série (1) est convergente, comme ayant les modules de ses termes plus petits que ceux de la série convergente $\Sigma A_n l_1^n$, $l_1 < l$.

Supposons, au contraire, que $|p(x)| > l$, et que $|p| > l_2 > l$. Nous aurons

$$\left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| > l_2, \quad |P_n| > |P_0| l_2^n, \quad |A_n P_n(x)| > |P_0| \cdot |A_n l_1^n|.$$

Donc, si $|p(x)| > l$, la série (1) est divergente, comme ayant les modules de ses termes plus grands que ceux d'une série divergente, $\Sigma A_n l_2^n$, $l_2 > l$.

Il en résulte que la courbe de convergence de la série de Poincaré, $\Sigma A_n P_n(x)$, où les polynomes $P_n(x)$ sont donnés par la relation de récurrence (2), est donnée par l'équation $|p(x)| = l$, $p(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation (3) et $\frac{1}{l} = \overline{\lim}^n \sqrt{|A_n|}$. La série est valable seulement à l'intérieur de la courbe $|p(x)| = l$, $x = X + iY$.

2. Exemples. — 1° $P_n(x)$ les polynomes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

orthogonaux (« Bulletin des Sciences Math. », t. LIV, nov. 1930); *Sur le facteur de convergence uniforme de M. Leja d'une série de polynomes* (« Comptes Rendus », t. 193, 1931, p. 984); *Sur la détermination de fonctions holomorphes dans des domaines donnés* (« Comptes Rendus », t. 194, 1932, p. 163); *Les polynomes orthogonaux* (« Annales de Toulouse », t. 21, 1932, pp. 67-87).

la relation (2) et l'équation (3) sont

$$nP_n - (2n + 1)xP_{n-1} + (n - 1)P_{n-2} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0.$$

La courbe de convergence de la série $\Sigma A_n P_n(x)$, $\frac{1}{l} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|}$, est donnée par $|p(x)| = l$, $p(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation $\lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0$, qu'on peut écrire

$$x = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Donc, la courbe de convergence est donnée par

$$x = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| = l,$$

et en posant $\lambda = le^{i\theta}$, $x = X + iY$, on a

$$X = \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{l}\right) \cos \theta, \quad Y = \frac{1}{2}\left(l - \frac{1}{l}\right) \sin \theta,$$

ce qui montre que cette courbe est l'ellipse

$$\frac{4X^2}{\left(l + \frac{1}{l}\right)^2} + \frac{4Y^2}{\left(l - \frac{1}{l}\right)^2} = 1,$$

de foyers -1 et $+1$, et la série est valable seulement à l'intérieur de cette ellipse.

2° *Considérons la série $\Sigma A_n P_n(x)$, les polynômes $P_n(x)$ étant donnés par*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}, \quad y = \frac{1}{1+x^2},$$

et qui vérifient la relation de récurrence

$$P_n + 2nxP_{n-1} + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2} = 0.$$

Changeant n en $n+2$, cette relation devient

$$P_{n+2} + 2(n+2)xP_{n+1} + (n+2)(n+1)(1+x^2)P_n = 0.$$

Les coefficients R_q de cette relation de récurrence n'étant pas de même degré, posons $P_n = (n!)^q P'_n$ et l'on a (*)

$$(4) \quad (n+2)^q (n+1)^q P'_{n+2} + 2(n+2)(n+1)^q x P'_{n+1} + (n+2)(n+1)(1+x^2)P'_n = 0,$$

(*) Les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P'_n$ sont les mêmes que celles des séries $\Sigma A_n P_n$.

et la relation de récurrence générale (2) devient

$$P'_{n+k} + \frac{S_{k-1}}{(n+k)^\mu} P'_{n+k-1} + \frac{S_{k-2}}{[(n+k)(n+k-1)]^\mu} P'_{n+k-2} + \dots = 0.$$

Il faut déterminer μ tel que pour $n \rightarrow \infty$, les expressions

$$\left[\frac{(n+i)!}{(n+k)!} \right]^\mu S_i$$

soient finies. Dans notre cas, il suffit de prendre $\mu = 1$, et la relation (4) devient

$$P'_{n+2} + 2xP'_{n+1} + (1+x^2)P'_n = 0.$$

L'équation qui donne la limite du rapport $P'_{n+1}:P'_n$ est

$$\lambda^2 + 2\lambda x + 1 + x^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = -x \pm i.$$

Si $x = X + iY$, on a

$$\begin{aligned} \lambda' &= -x + i = -X + i(1 - Y), & \lambda'' &= -x - i = -X - i(1 + Y), \\ |\lambda'|^2 &= X^2 + (1 - Y)^2, & |\lambda''|^2 &= X^2 + (1 + Y)^2, & |\lambda''| &> |\lambda'|. \end{aligned}$$

Les courbes de convergence sont les cercles

$$|\lambda''| = l = \text{const.}, \quad X^2 + (1 + Y)^2 = l^2.$$

3° *Considérons la série* $\sum A_n P_n(x)$, $P_n(x)$ *étant les polynomes de Laguerre, qui admettent la fonction génératrice*

$$e^{\frac{x}{1-\alpha}} = (1-\alpha) \sum \alpha^n P_n(x).$$

Prenant la dérivée par rapport à α , on trouve

$$\frac{e^{\frac{x}{1-\alpha}}}{1-\alpha} \frac{x}{1-\alpha} = (1-\alpha) \sum n \alpha^{n-1} P_n(x) - \sum \alpha^n P_n(x),$$

$$\sum \alpha^n P_n \frac{x}{1-\alpha} = (1-\alpha) \sum n \alpha^{n-1} P_n - \sum \alpha^n P_n,$$

$$x \sum \alpha^n P_n = (1-\alpha)^2 \sum n \alpha^{n-1} P_n - (1-\alpha) \sum \alpha^n P_n.$$

Égalant les coefficients de α^n , on trouve la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1} - (x+2n+1)P_n + nP_{n-1} = 0.$$

Changeant n en $n+1$, on a

$$(5) \quad (n+2)P_{n+2} - (x+2n+3)P_{n+1} + (n+1)P_n = 0.$$

Pour $n \rightarrow \infty$, $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lambda$, $F(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda = 1$, $F(1) = 0$,
 $\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} = 0$, $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1$, indépendante de x .

En désignant par l le rayon de convergence de la série $\Sigma A_n x^n$, si $l > 1$
 $\left[\lim \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| = \lambda = 1\right]$ la série $\Sigma A_n P_n(x)$ est toujours convergente; si ce rayon
 $l = 1$, le critérium fondé sur la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est en défaut. On peut
 employer le critère imaginé par Poincaré. En écrivant le rapport sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n},$$

on cherche la limite β de β_n pour $n \rightarrow \infty$. Si cette limite a sa partie réelle
 plus grande que 1, la série Σu_n est convergente, si cette partie réelle est
 plus petite que 1, la série est divergente.

Cela posé, trouvons les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$,
 pour lesquelles

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1, \quad \lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1.$$

Posant

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n}, \quad \lim \beta_n = \beta, \quad \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 - \frac{\gamma_n}{n}, \quad \lim \gamma_n = \gamma,$$

on a

$$\frac{A_{n+1} P_{n+1}}{A_n P_n} = \left(1 - \frac{\gamma_n}{n}\right) \left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right) = 1 - \frac{\beta_n + \gamma_n}{n} + \frac{\beta_n \gamma_n}{n^2},$$

et en appliquant le critère de convergence employé, on trouve que la condition
 de convergence de la série $\Sigma A_n P_n$ est donnée par la relation: la partie
 réelle de $(\beta + \gamma) > 1$. Comme seulement β dépend de x , les courbes de con-
 vergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$ sont données par: la partie réelle de $\beta = \text{const.}$

Dans le cas des polynômes de Laguerre, pour lesquels $F(\lambda) = \lambda^2 -$
 $- 2\lambda + 1 = 0$, $F(1) = 0$, $\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} = 0$, il faut substituer

$$P_{n+1} = P_n \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\delta_n}{n}\right), \quad P_{n+2} = P_n \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} - \frac{\delta_{n+1}}{n+1}\right) \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\delta_n}{n}\right),$$

et la relation de récurrence (5) devient

$$\begin{aligned} (n+2) \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} - \frac{\delta_{n+1}}{n+1}\right) \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\delta_n}{n}\right) - \\ - (x + 2n + 3) \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\delta_n}{n}\right) + n + 1 = 0, \\ (\beta^2 - x) + (\delta_{n+1} - \delta_n) + H = 0. \end{aligned}$$

Si $\lim \delta_n = \delta$, la dernière parenthèse est nulle, donc, pour $n \rightarrow \infty$, il reste $\beta^2 - x = 0$, car H est la somme des termes qui s'annulent avec $\frac{1}{n}$. Donc $\beta^2 = x$. Les courbes de convergence sont données par: la partie réelle de $\beta = \text{const.}$

Posant $\beta = u + iv$, $x = X + iY$, on a, de $\beta^2 = x$,

$$X = u^2 - v^2, \quad Y = 2uv, \quad Y^2 + 4u^2X - 4u^4 = 0,$$

et comme u la partie réelle de β est une constante, il résulte que les courbes de convergence des séries de polynomes de Laguerre, $\Sigma A_n P_n(x)$, avec $\lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1$, sont les paraboles $Y^2 + 4u^2X - 4u^4 = 0$, avec le foyer en origine.

3. Les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$ pour lesquelles on connaît $\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = |p(x)|$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{l}$. — I) Supposons d'abord $|p(x)| < l$. On peut trouver p_1 et l_1 , tels que

$$|p(x)| < p_1 < l_1 < l.$$

On a

$$|A_n| < \frac{1}{l_1^n}, \quad |P_n(x)| < p_1^n, \quad |A_n P_n(x)| < \left(\frac{p_1}{l_1}\right)^n,$$

et donc la série est valable, car ses termes sont en valeur absolue plus petits que les termes d'une série convergente. Supposons, au contraire, $|p(x)| > l$. On peut trouver p_2 et l_2 , tels que

$$|p(x)| > p_2 > l_2 > l.$$

On a

$$|A_n| > \frac{1}{l_2^n}, \quad |P_n(x)| > p_2^n, \quad |A_n P_n(x)| > \left(\frac{p_2}{l_2}\right)^n,$$

et la série diverge.

Donc, la courbe de convergence de la série $\Sigma A_n P_n(x)$ est donnée par $|p(x)| = l$, et la série est valable dans la région intérieure à cette courbe.

II) Considérons le cas où les suites

$$(6) \quad \sqrt[n]{|A_n|} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{|P_n(x)|}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

ne tendent pas vers de limites uniques pour $n \rightarrow \infty$, quand la région de convergence de la série $\Sigma A_n P_n(x)$ ne dépendra seulement en général des limites supérieures des suites (6), mais aussi des autres points limites de

ces mêmes suites, ce qu'on voit dans l'exemple suivant communiqué par M. Karamata. Considérons dans la série $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x)$, où les polynômes $P_n(x)$ sont de la forme

$$P_n(x) = [x + (-1)^n]^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

séparément les sommes $S_1(x)$ des termes de rang pair et $S_2(x)$ des termes de rang impair. La série $S(x)$ convergera dans le domaine (D) intérieur aux cercles

$$|x + 1| = l_1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|A_{2n}|} = \frac{1}{l_1},$$

$$|x - 1| = l_2, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|A_{2n+1}|} = \frac{1}{l_2}.$$

D'autre part,

$$|p(x)| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x + (-1)^n|,$$

donc le domaine (D) $|p(x)| < l$, où $\frac{1}{l} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|}$, est la partie commune aux deux cercles

$$|x + 1| = l, \quad |x - 1| = l,$$

et puisque, dans le cas général, $l < l_1$, $l < l_2$, le domaine (D) sera contenu dans le domaine (D) . Les deux cercles $|x + 1| = l$, $|x - 1| = l$ se coupent si leur rayon $l > 1$, ou ce qui revient au même si la série $\sum A_n$ est convergente.

Ainsi que, dans le cas général, du fait que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n P_n(x)|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{1}{l} |p(x)|,$$

la série $S(x)$ convergera toujours à l'intérieur du domaine (D) défini par $|p(x)| = l$, mais $|p(x)| = l$ ne sera pas en général la courbe limitant le domaine de convergence de la série $S(x)$. Cependant, si l'une des deux suites (6) tendent vers une limite déterminée pour $n \rightarrow \infty$, la série $S(x)$ converge seulement à l'intérieur de cette courbe.

Des exemples de séries de polynômes offrant de singularités de convergence plus profondes ont été données par M. HELGE VON KOCH ⁽¹⁰⁾.

⁽¹⁰⁾ HELGE VON KOCH, *Remarques sur quelques séries de polynômes* (« Bulletin de la Société Math. de France », t. XXXIV, 1906, pp. 269-274).

4. Les séries de polynomes orthogonaux. — I) Supposons que $P_n(x)$ soient les polynomes orthogonaux, donnés par

$$\int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \leq n, \quad \int_a^b \varphi(x) P_n^2(x) dx = I_n = \text{const.}$$

On sait (8) que

$$\lim^n \sqrt{|P_n(x)|} = \frac{b-a}{4} |z|,$$

z étant la racine de plus grand module de l'équation

$$(7) \quad z^2 - \frac{4}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) z + 1 = 0.$$

Les courbes de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x)$, $\frac{1}{l} = \lim^n \sqrt{|A_n|}$, sont données par $\frac{b-a}{4} |z| = l$, avec la relation (7), ou par

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad |z| = l \frac{4}{b-a},$$

et sont des ellipses de foyers a et b .

II) *Remarque relative à la relation de récurrence entre trois polynomes orthogonaux consécutifs.* On sait (8) que les polynomes orthogonaux

$$P_n(x) = c_{n,n} x^n + c_{n,n-1} x^{n-1} + \dots + c_{n,0}, \quad c_{n,n} = 1,$$

vérifient la relation de récurrence

$$(8) \quad P_{n+1}(x) - (x - u_n) P_n(x) + v_n P_{n-1}(x) = 0,$$

$$u_n = c_{n,n-1} - c_{n+1,n} = \frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-1} & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n-1} & g_{2n+1} \end{vmatrix}}{D_n(\varphi)} - \frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-2} & g_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-3} & g_{2n-1} \end{vmatrix}}{D_{n-1}(\varphi)},$$

$$v_n = \frac{I_n}{I_{n-1}}, \quad I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \quad D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n} \end{vmatrix}, \quad g_s = \int_a^b \varphi(t) t^s dt.$$

Le développement $\Sigma A_n P_n(x)$ étant valable dans la région de convergence trouvée, et $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lambda$ étant la racine de l'équation

$$(9) \quad \lambda^2 - (x - u)\lambda + v = 0,$$

qu'on obtient (n° 1) de (8), il suit que $\lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| = \lim \sqrt[n]{|P_n|}$, et donc $\lambda = \frac{b-a}{4} |z|$, z étant la racine de l'équation (7); donc $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lambda$ est la racine de l'équation

$$\lambda^2 - \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \lambda + \left(\frac{b-a}{4} \right)^2 = 0,$$

et en comparant avec (9), on trouve

$$u = \lim u_n = \frac{a+b}{2}, \quad v = \lim v_n = \left(\frac{b-a}{4} \right)^2.$$

III) Comme *cas particuliers* des polynomes orthogonaux sont les polynomes de Legendre, pour lesquels $\varphi(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, les polynomes de Jacobi, où

$$\varphi(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu, \quad \lambda + 1 > 0, \quad \mu + 1 > 0;$$

les polynomes qui résultent de la série hypergéométrique, considérés par DARBOUX (*),

$$\varphi(x) = x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-\alpha}, \quad \gamma > 0, \quad \alpha - \gamma + 1 > 0, \quad \alpha = 0, \quad b = 1.$$

Un cas intéressant des polynomes orthogonaux est donné par les *polynomes de Laguerre*, qui peuvent être obtenus de la manière suivante. En posant

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n,$$

considérons l'intégrale

$$(10) \quad I(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} P_n(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_0^\infty e^{-x} x^{y+i-1} dx.$$

On sait que

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, \quad \Gamma(a+n) = a(a+1) \dots (a+n-1) \Gamma(a).$$

Donc

$$I(y) = \sum \alpha_i \Gamma(y+i),$$

$$I(y) = \Gamma(y) \sum_{i=0}^n \alpha_i y(y+1) \dots (y+i-1).$$

L'intégrale $I(y)$ est nulle quand

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i y(y+1) \dots (y+i-1) = 0,$$

ou

$$(11) \quad Q(y) = \alpha_n y(y+1) \dots (y+n-1) + \alpha_{n-1} y(y+1) \dots (y+n-2) + \dots + \alpha_0 = 0.$$

Écrivons que les polynomes $P_n(x)$ sont orthogonaux, c'est-à-dire

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k P_n(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ces conditions expriment que l'intégrale (10) $I(y) = 0$ pour $y = 1, 2, \dots, n$, et comme $I(y) = 0$ est donnée par la relation (11), il suit que l'équation (11) a pour racines $1, 2, \dots, n$. Donc, les coefficients a_0, a_1, \dots, a_n se trouvent en écrivant que l'équation (11) a pour racines $1, 2, \dots, n$, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$(12) \quad (y-1)(y-2) \dots (y-n) = a_n y(y+1) \dots (y+n-1) + \\ + a_{n-1} y(y+1) \dots (y+n-2) + \dots + a_0.$$

Pour trouver ces coefficients, considérons les identités (la première est la dérivée avec la formule de Leibniz)

$$\frac{d^n(u^n u^{-y})}{du^n} = (-y)(-y-1) \dots (-y-n+1) u^{-y} + \\ + n C_n^1 (-y)(-y-1) \dots (-y-n+2) u^{-y} + \dots + n! u^{-y}, \\ \frac{d^n(u^{n-y})}{du^n} = (n-y)(n-y-1) \dots (-y+1) u^{-y}.$$

En identifiant ces expressions multipliées par $(-1)^n$ et en simplifiant avec u^{-y} , on a

$$(y-1)(y-2) \dots (y-n) = y(y+1) \dots (y+n-1) - \\ - n C_n^1 y(y+1) \dots (y+n-2) + \dots + (-1)^n n!.$$

En comparant avec (12), il suit

$$a_{n-i} = (-1)^{n+i} n(n-1) \dots (n-i+1) C_n^i,$$

de sorte que l'expression des polynomes de Laguerre est

$$P_n(x) = (-1)^n [x^n - n C_n^1 x^{n-1} + n(n-1) C_n^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n n!] = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

et satisfait à l'équation différentielle $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$.

Ces polynomes, utilisés dans la théorie de l'atome d'hydrogène dans la Mécanique ondulatoire, étant orthogonaux, donnés par

$$\int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \leq n; \quad \varphi(x) = e^{-x}, \quad a = 0, \quad b = \infty, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} P_n^2(x) dx = (n!)^2,$$

on sait que les courbes de convergence des séries de polynomes orthogonaux sont des ellipses de foyers a et b , qui dans le cas des polynomes de Laguerre ($b \rightarrow \infty$) sont des paraboles avec le foyer à l'origine ($a = 0$), de sorte que nous retrouvons le résultat obtenu (n° 2, 3°).

5. Détermination des fonctions holomorphes dans des domaines limités par des courbes données. — On représente une fonction holomorphe dans un domaine (D) par une série entière, $f(z) = \sum \alpha_n z^n$, sans donner une expression d'où l'on pourrait voir que cette fonction est valable seulement dans ce domaine. Dans ce qui suit, nous construisons une fonction holomorphe représentée par une série de polynômes, qui est valable seulement à l'intérieur d'un contour (D) limité par une courbe (C).

Soit

$$(13) \quad z = \frac{\alpha}{Z} + \varphi(Z), \quad \varphi(Z) = a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n + \dots,$$

la transformation conforme qui fait correspondre le domaine extérieur à la courbe donnée (C) au domaine intérieur du cercle de rayon $|Z| = r$, la fonction $\varphi(Z)$ étant holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon r , donné par $\frac{1}{r} = \overline{\lim}^n \sqrt{|\alpha_n|}$. Considérons les polynômes $P_n(x)$ donnés par les relations de récurrence d'ordre infini

$$(14) \quad \begin{aligned} \alpha P_{n+1} &= x P_n - a_1 P_{n-1} - \dots - a_{n-1} P_1 + (n+1) a_n, \\ P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = -\frac{x}{\alpha}, \quad \alpha P_2 - x P_1 = 2a_1, \dots \end{aligned}$$

Il résulte que x appartenant à une certaine région de convergence, la série en Z ,

$$(15) \quad P_1 + Z P_2 + \dots + Z^n P_{n+1} + \dots,$$

est le quotient des deux séries

$$(16) \quad \frac{c_1 + c_2 Z + \dots + c_{n+1} Z^n + \dots}{b_1 + b_2 Z + \dots + b_{n+1} Z^n + \dots} = P_1 + Z P_2 + \dots + Z^n P_{n+1} + \dots, \quad b_1 \leq 0.$$

D'où, par identification, les relations trouvées

$$P_1 b_1 = c_1, \quad P_2 b_1 + P_1 b_2 = c_2, \quad P_3 b_1 + P_2 b_2 + P_1 b_3 = c_3, \dots$$

doivent être les relations (14). Donc

$$\begin{aligned} c_1 &= -x, \quad c_2 = 2a_1, \quad c_3 = 3a_2, \dots, \quad c_{n+1} = (n+1)a_n, \dots \\ b_1 &= a, \quad b_2 = -x, \quad b_3 = a_1, \dots, \quad b_{n+1} = a_{n-1}, \dots \end{aligned}$$

et les séries $\sum c_n Z^n$, $\sum b_n Z^n$ ont le même cercle de convergence de rayon r , et donc la série (15), qui est le quotient des ces deux séries, a un rayon de convergence $|Z| \leq r$.

Remplaçant en (16) les valeurs de c_s et b_s , on a

$$(17) \quad \frac{Z\varphi'(Z) + \varphi(Z) - x}{a + Z\varphi(Z) - Zx} = P_1 + Z P_2 + \dots,$$

ou

$$(18) \quad \frac{-\frac{a}{Z^2} + \varphi'(Z)}{\frac{a}{Z} + \varphi(Z) - x} = -\frac{1}{Z} + P_1(x) + ZP_2(x) + \dots$$

En posant

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z),$$

nous aurons le développement

$$(19) \quad \frac{z'}{z-x} = -\frac{1}{Z} + P_1(x) + ZP_2(x) + \dots$$

Or, la série $P_1(x) + ZP_2(x) + \dots$, ou $\Sigma Z^n P_n(x)$, a pour rayon de convergence $|Z| = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|P_n(x)|}}$, et le développement (19) est valable seulement

pour $|x| < |z|$, c'est-à-dire pour les points x intérieurs à la courbe (C) obtenue par la transformation conforme (13)

$$z = \frac{a}{Z} + \varphi(Z).$$

Donc

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{1}{Z}, \quad x = \frac{a}{Z} + \varphi(Z), \quad \varphi(Z) = a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots$$

Considérons une série de polynomes, $\Sigma A_n P_n(x)$, les polynomes $P_n(x)$ étant donnés par les relations (14), ou par la fonction génératrice (17) ou (18), et les coefficients A_n tels que $\frac{1}{r} = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|A_n|}$. On sait (n° 3) que la courbe de convergence de cette série est donnée par $|p(x)| = r$, ou

$$x = \frac{a}{Z} + \varphi(Z), \quad \frac{1}{|Z|} = r,$$

c'est-à-dire la courbe donnée (C), et la série est valable seulement à l'intérieur de cette courbe. Donc la série $\Sigma A_n P_n(x)$ représente une fonction holomorphe seulement à l'intérieur de la courbe (C).

EXEMPLES. — 1° Considérons l'ellipse

$$x = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right), \quad |Z| = \frac{1}{l}.$$

On a $x = \frac{a}{Z} + \varphi(Z)$, $a = \frac{1}{2}$, $\varphi(Z) = \frac{1}{2}Z$, et donc la fonction génératrice (17),

pour les polynomes attachés à cette transformation, est

$$\begin{aligned} \frac{Z\varphi'(Z) + \varphi(Z) - x}{a + Z\varphi(Z) - Zx} &= -\sum Z^n P_{n+1} \\ \frac{2Z - 2x}{1 - 2xZ + Z^2} &= \frac{1}{Z - (x + \sqrt{x^2 - 1})} + \frac{1}{Z - (x - \sqrt{x^2 - 1})} = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} -P_n(x) &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n} + \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n} \\ &= (x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n, \end{aligned}$$

les polynomes de TCHEBISCHEF. La fonction $f(x) = \sum A_n P_n(x)$ est holomorphe seulement à l'intérieur de cette ellipse $\left(\frac{1}{l} = \lim^n \sqrt{|A_n|}\right)$.

2° Considérons les ovals de Cassini

$$x = \frac{\sqrt{1 + Z^2}}{Z}, \quad |Z| = \frac{1}{l}; \quad \sqrt{|x - 1||x + 1|} = \frac{1}{|Z|} = l,$$

pour les quelles on a

$$x = \frac{a}{Z} + \varphi(Z) = \frac{\sqrt{1 + Z^2}}{Z}, \quad a = 1, \quad \varphi(Z) = \frac{1}{Z}(\sqrt{1 + Z^2} - 1)$$

et donc avec la relation (17) on peut former la fonction génératrice des polynomes $P_n(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{Z}{\sqrt{1 + Z^2}} - x}{\sqrt{1 + Z^2} - xZ} &= P_1 + ZP_2 + \dots = \\ &= \frac{-x + Z - \frac{Z^3}{2} + \frac{1 \cdot 3 Z^5}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 Z^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \dots}{1 - xZ + \frac{Z^2}{2} - \frac{1 \cdot 1 Z^4}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 Z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} - \dots} \end{aligned}$$

Identifiant, on trouve

$$\begin{aligned} P_1 &= -x, \\ P_2 - xP_1 &= 1, \\ P_3 - xP_2 + \frac{1}{2}P_1 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

et de même les coefficients a_n de

$$\varphi(Z) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+Z^2} - 1) = \frac{Z}{2} - \frac{1 \cdot 1 Z^3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 Z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} - \dots;$$

on peut donc former une fonction, $f(x) = \Sigma A_n P_n(x)$, holomorpe seulement à l'intérieur de cette courbe ⁽¹⁴⁾.

En général, la fonction $f(x) = \Sigma A_n P_n(x)$, $\frac{1}{l} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|}$, est holomorpe à l'intérieur du domaine limité par la courbe

$$(20) \quad |p(x)| = l, \quad x = \varphi(Z), \quad |Z| = \text{const.},$$

quand on connaît

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = |p(x)|, \quad \text{ou} \quad \lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| = |p(x)|,$$

comme nous avons vu dans le cas des polynômes orthogonaux (n° 4), la courbe (20) étant une ellipse, ou pour les polynômes de Laguerre (n° 2, 3°), la courbe (20) étant une parabole.

Les séries $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$ de M. Appell.

6. Les courbes de convergence des séries $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$, les polynômes $P_n(x)$ étant donnés par de relations de récurrence. — Considérons les polynômes $P_n(x)$ donnés par la relation de récurrence

$$(21) \quad R_k P_{n+k}(x) + R_{k-1} P_{n+k-1}(x) + \dots + R_0 P_n(x) = 0,$$

k étant un nombre donné et R_s de fonctions données qui dépendent de x et du rang n . On sait que le rapport $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ tend, en général, vers la racine $p(x)$ de plus grand module de l'équation

$$(22) \quad \lambda^k + C_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + C_0 = 0, \quad C_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_s}{R_k}.$$

⁽¹⁴⁾ On peut encore obtenir un développement $\Sigma (z_n x + \beta_n) [(x-a)(x-b)]^n$ à l'intérieur d'une ovale de CASSINI. Voir A. KIENAST, *Ueber die Darstellung der analytischen Funktionen durch Reihen die nach Potenzen eines Polynoms...* (« Inaugural Dissertation, Universität Zürich », 1906). Voir aussi ma Note, *Sur le développement d'une fonction suivant les puissances d'un polynôme donné* (Congrès des math. roumains à T. Severin, 8 Mai 1932).

Pour trouver la région de convergence d'une série $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$ suivant les inverses de polynomes donnés de M. Appell, pour laquelle $\overline{\lim}^n \sqrt[n]{|A_n|} = l$, supposons premièrement $|p(x)| > l$, et considérons un nombre l_1 , tel que $l < l_1 < |p|$. Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = p(x), \quad \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| > l_1 > l,$$

et si, pour fixer les idées, nous supposons que l'on ait cette inégalité à partir de $n = 0$, nous aurons

$$\left| \frac{P_1}{P_0} \right| > l_1, \quad \left| \frac{P_2}{P_1} \right| > l_1, \dots, \left| \frac{P_n}{P_{n-1}} \right| > l_1;$$

$$|P_n| > |P_0| l_1^n, \quad \left| \frac{A_n}{P_n} \right| < \frac{1}{|P_0|} \frac{|A_n|}{l_1^n}.$$

Donc, si $|p(x)| > l$, la série de M. Appell est valable, comme ayant les modules de ses termes plus petits que ceux de la série convergente $\Sigma \frac{A_n}{z^n}$, à l'extérieur de cercle $|z| = l$, $l_1 > l$.

Supposons, au contraire, que $|p(x)| < l$ et que $|p| < l_2 < l$. Nous aurons

$$\left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| < l_2 < l, \quad |P_n| < |P_0| l_2^n, \quad \left| \frac{A_n}{P_n} \right| > \frac{1}{|P_0|} \frac{|A_n|}{l_2^n}.$$

Donc, si $|p(x)| < l$, la série de M. Appell est divergente, comme ayant les modules de ses termes plus grands que ceux d'une série divergente $\Sigma \frac{A_n}{l_2^n}$, $l_2 < l$.

Il en résulte que la courbe de convergence de la série de M. Appell, où les polynomes $P_n(x)$ sont liés par la relation de récurrence (20), est donnée par l'équation $|p(x)| = l$, $p(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation (22). La courbe $|p(x)| = l$, ($x = X + iY$), du plan XOY , sépare le plan en deux régions, l'une intérieure à la courbe, l'autre extérieure où se trouvent les points à l'infini.

Pour une de ces régions, on a $|p(x)| - l > 0$, pour l'autre $|p(x)| - l < 0$; donc, d'après ce que nous avons vu, dans la première région, $|p(x)| - l > 0$, la série de M. Appell converge, dans l'autre diverge. Or, ces séries convergent pour x tendant vers l'infini, qui est dans la région extérieure à la courbe, et donc la série sera convergente dans la région extérieure à la courbe, et donc la série sera convergente dans la région extérieure à la courbe $|p(x)| = l$, qui est en même temps extérieure à la courbe où se trouvent les racines des polynomes $P_n(x)$.

EXEMPLES. — 1° Considérons les polynomes électrosphériques $P_n(x)$ qui admettent la fonction génératrice (6)

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum t^n P_n(x).$$

Ces polynomes ont été rencontrés par MM. Guillet et Aubert dans leurs recherches sur l'attraction mutuelle des deux sphères électrisées, ou d'une sphère et d'un plan; la capacité commune des deux armateurs en présence est donnée, à un facteur près, par la série de M. Appell $\sum \frac{1}{P_n(x)}$. La relation de récurrence entre ces polynomes est

$$P_{n+1} - 2xP_n + P_{n-1} = 0$$

et on voit, de cette relation, que la suite de Sturm: $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$, devient pour -1 et 1

$$1, \quad 2, 3, \dots, (-1)^n(n+1); \quad 1, 2, 3, \dots, (n+1),$$

donc la suite perd, entre -1 et 1 , n variations, et donc les polynomes $P_n(x)$ ont leurs racines réelles sur le segment $(-1, +1)$. L'équation (22) est $\lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0$, et la région de convergence de la série $\sum \frac{1}{P_n(x)}$, où $\lim^n \sqrt{|A_n|} = 1$, est limité par le segment $(-1, +1)$, $x = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$, $|Z| = 1$, et donc cette série est valable dans tout le plan XOY ($x = X + iY$), sauf la coupure $(-1, +1)$.

2° Supposons que $P_n(x)$ soient les polynomes de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

qui ont toutes leurs racines réelles sur le segment $(-1, +1)$. La courbe de convergence de la série de M. Appell, $\sum \frac{A_n}{P_n(x)}$, est l'ellipse

$$x = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right), \quad |Z| = l,$$

et la région de convergence est le domaine extérieur à cette ellipse.

7. Les courbes de convergence des séries $\sum \frac{A_n}{P_n(x)}$, pour lesquelles $\lim^n \sqrt{|P_n(x)|} = |p(x)|$, $\lim^n \sqrt{|A_n|} = l$. — Supposons d'abord $|p(x)| > l$. On

peut trouver l_1 et p_1 , tels que $l < l_1 < p_1 < |p(x)|$. On a

$$|A_n| < l_1^n, \quad |P_n(x)| > p_1^n, \quad \left| \frac{A_n}{P_n(x)} \right| < \left(\frac{l_1}{p_1} \right)^n,$$

donc la série est valable, car ses termes sont en module plus petits que ceux d'une série convergente. Supposons au contraire, $|p(x)| < l$. On peut trouver l_2 et p_2 , tels que $|p(x)| < p_2 < l_2 < l$. On a

$$|A_n| > l_2^n, \quad |P_n(x)| < p_2^n, \quad \left| \frac{A_n}{P_n(x)} \right| > \left(\frac{l_2}{p_2} \right)^n,$$

et la série de M. Appell diverge. Donc, la courbe de convergence de cette série est donnée par $|p(x)| = l$, et la région où la série est valable est extérieure à cette courbe et extérieure à la courbe où sont les racines des polynomes $P_n(x)$.

EXEMPLE. — $P_n(x)$ étant les polynomes orthogonaux, on sait (n° 4) que

$$\lim \sqrt[n]{|P_n(x)|} = \frac{b-a}{4} |z|,$$

z étant la racine de plus grand module de l'équation

$$z^2 - \frac{b-a}{4} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) z + 1 = 0.$$

La courbe de convergence de la série de M. Appell, $\Sigma \frac{A_n}{P_n(x)}$, est l'ellipse

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad |z| = \frac{4}{b-a} l,$$

et la série est valable dans la région extérieure à cette courbe et extérieure à la courbe où sont les racines des polynomes $P_n(x)$, le segment ab .

8. **La région de convergence des séries $\Sigma A_n P_n(x) + \Sigma \frac{B_n}{P_n(x)}$.** — Supposons que $\overline{\lim} \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{l}$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|B_n|} = l'$, et que l'on connaît, soit $\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = p(x)$, ou $\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} = |p(x)|$, et soient (Γ) et (Γ') les courbes $|p(x)| = l$, $|p(x)| = l'$. La série considérée est valable dans la région intérieure à la courbe (Γ) , extérieure à la courbe (Γ') et extérieure à la courbe (C) où sont les racines des polynomes $P_n(x)$.

Dans le cas des polynomes orthogonaux, le domaine de convergence de la série est une couronne formée par deux ellipses homofocales.

APPLICATION. — Soient $P_n(x)$ les polynomes attachés à la transformation (n° 5)

$$z = \frac{\alpha}{Z} + \varphi(Z), \quad \varphi(Z) = a_1 Z + \dots + a_n Z^n + \dots$$

et (Γ) , (Γ') les courbes correspondant aux valeurs

$$|Z| = \frac{1}{l}, \quad |Z| = \frac{1}{l'},$$

$$\overline{\lim}^n \sqrt[n]{|A_n|} = \frac{1}{l}, \quad \overline{\lim}^n \sqrt[n]{|B_n|} = l', \quad \lim^{\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \frac{1}{r}.$$

La fonction

$$f(x) = \Sigma A_n P_n(x) + \Sigma \frac{B_n}{P_n(x)}$$

est holomorphe dans la région intérieure à la courbe (Γ) , extérieure à la courbe (Γ') et extérieure à la courbe (c) où sont les racines des polynomes $P_n(x)$.

Connexion projective et déplacement projectif.

Par V. HLAVATY (à Prague).

AVANT-PROPOS

La géométrie projective différentielle dans l'espace plan ⁽¹⁾ peut être définie comme l'étude des invariants différentiels du groupe projectif. Elle résulte ainsi complètement encadrée dans le programme de KLEIN. Quant à la généralisation de cette discipline pour les espaces courbes, son encadrement dans le programme mentionné présente bien des difficultés. Mais on a résolu le problème de « l'espace projectif courbe » en partant d'un autre point de vue, initié par les travaux de BELTRAMI ⁽²⁾. En effet, si l'on traduit dans le langage moderne de la Science les résultats de ce géomètre, on peut dire que le point essentiel de sa découverte est l'étude des invariants isohodologiques ⁽³⁾ différentiels des connexions à courbure constante.

Ce point de vue, repris par les géomètres modernes, inaugura l'étude qui a mené à la notion de l'espace projectif courbe. Au lieu de baser l'étude sur le groupe projectif de l'espace plan, on a commencé à chercher les invariants (différentiels) isohodologiques d'une connexion. C'est ainsi que M. WEYL a découvert son « tenseur projectif de courbure » ⁽⁴⁾ en ouvrant de telle manière l'horizon à beaucoup de questions connexes. On est parvenu aux résultats ⁽⁵⁾ concernant la structure de l'espace projectif courbe (sans être en possession d'une connexion projective proprement dite), résultats qui trouvent aujourd'hui leur place naturelle dans le cadre de la connexion projective.

Grâce aux travaux de l'école de Princeton, fondée par MM. VEBLEN et EISENHART, on est parvenu à la notion cherchée de la connexion projective

⁽¹⁾ Voir (22) et (23) de l'index bibliographique, ajouté à la fin du travail.

⁽²⁾ Voir (2), (3), (4).

⁽³⁾ Nous entendons par cela les changements de la connexion en question qui conserve ses courbes géodésiques.

⁽⁴⁾ Voir (78), (15), (16), (20), (66).

⁽⁵⁾ Voir (1), (7), (21), (26), (27), (29), (42), (50), (52), (56), (57).

de l'espace courbe à n dimensions, en employant une coordonnée surnuméraire x^0 , qui tout en restant inconnue, (où plus précisément: arbitraire) ne se manifeste dans cette théorie que par son mode de transformation ⁽¹⁾.

D'autre part, M. CARTAN a fondé la théorie des espaces courbes projectifs sur la notion du raccordement projectif des espaces (locaux) tangents ⁽²⁾. C'est MM. SCHOUTEN et GOLAB qui ont réussi à démontrer que les théories mentionnées, envisagées d'un point de vue plus général, ne sont que deux aspects différents d'une seule théorie ⁽³⁾. L'état actuel de la théorie projective des espaces courbes est par conséquent le suivant: On est maintenant en possession de la connexion projective de l'espace courbe qui permet l'étude de l'espace ambiant dans ce sens qu'elle nous présente les moyens d'en trouver les invariants (différentiels) isohodoïques. Cela n'exclue pas naturellement les questions plus ou moins axiomatiques concernant l'espace projectif courbe, si brillamment résolues par MM. WEYL et ROBERTSON ⁽⁴⁾.

En comparant ces résultats à ceux de la géométrie projective différentielle de l'espace plan, on voit que la théorie des espaces projectifs courbes n'est qu'au premier pas. En effet, on n'est parvenu ici qu'à l'étude *de la structure* de l'espace ambiant courbe, en laissant complètement à côté l'étude des figures y plongées ⁽⁵⁾, tandis que dans la géométrie différentielle projective dans l'espace plan c'est justement cette partie de la théorie qui — grâce à l'école FUBINI-CECH — est admirablement développée.

Cela posé, il est bien naturel d'envisager aussi les propriétés des figures plongées dans l'espace projectif courbe, dont on connaît déjà la structure. Une telle question se réduit à la recherche des invariants (différentiels) isohodoïques des courbes et des hypersurfaces, situées dans l'espace projectif courbe. C'est ce que je veux faire dans ce Mémoire.

La solution du problème ainsi conçu sera facilitée par la connaissance de l'interprétation géométrique des grandeurs projectives moyennant les grandeurs jusqu'alors employées dans le calcul différentiel absolu (vectoriel). C'est ainsi que l'on peut aborder p. ex. la question concernant les invariants isohodoïques d'une hypersurface dans l'espace courbe en question et de les

⁽¹⁾ Voir (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (31), (35), (36), (37), (43), (56), (57), (58), (59), (60), (61), (62), (64), (65), (66), (67), (68), (69), (70), (71), (72), (73), (74), (75), (80), (81), (82).

⁽²⁾ Voir (10), (12). Cfr. aussi (9), (41), (47), (48), (49), (51), (85).

⁽³⁾ Voir (54)_a et (54)_b. Cfr. aussi (9).

⁽⁴⁾ Voir (44) et (79). En ajoutant dans ce dernier travail trois postulats (concernant l'espace tangent) à la méthode de M. CARTAN, l'auteur la réduit à celle de M. J. Y. THOMAS.

⁽⁵⁾ à l'exception des courbes géodésiques. Cfr. aussi la remarque (à la fin de l'avant-propos) concernant le travail de M. v. DANTZIG.

comparer aux résultats connus du calcul vectoriel. D'autre part, l'interprétation purement projective des grandeurs employées me semble plus appropriée à l'étude des courbes dans l'espace projectif courbe. Or, le lecteur trouvera les deux interprétations dans la première partie (Algèbre) de ce Mémoire. En l'élaborant, je me suis aperçu de l'avantage que présente la *définition* de la coordonnée surnuméraire x^0 , laquelle jusqu'alors ne se manifestait que par son mode de transformation, en restant inconnue et exigeait par ce fait quelques conventions, dont le formalisme n'était justifié que par la volonté de l'auteur. La définition mentionnée ne dépasse pas naturellement le cadre des données, mais d'autre part, la coordonnée x^0 résulte ainsi définie à moins d'une fonction arbitraire additive près et justifie ainsi les résultats du formalisme, dont nous venons de parler.

La seconde partie (Analyse) est consacrée à l'étude de la connexion projective. En laissant complètement à côté le développement « historique » je n'y présente que les résultats définitifs, c'est-à-dire la construction de la connexion projective en partant des changements isohodiques d'une connexion vectorielle. Je saisis cette occasion pour généraliser légèrement les résultats connus, en construisant la connexion projective, basée sur une connexion vectorielle *non symétrique* et, par conséquent, il m'est indispensable — sans venir au large du développement — de montrer la manière, dont je me suis servi en suivant l'école de Princeton. Cela fait, j'arrive à la notion du *déplacement projectif*, qui présente la plus naturelle généralisation du déplacement par parallélisme d'après M. LEVI-CIVITA.

Cette notion, qui me semble nouvelle, exige la connaissance de la *différentielle projective* dont l'existence est due à la définition de la coordonnée surnuméraire. Quoique cette coordonnée ne soit définie qu'à une fonction arbitraire additive près, le déplacement projectif résulte intrinsèque (c'est-à-dire indépendant du choix de cette fonction).

La troisième partie (Applications) s'occupe avant tout des applications de la différentielle projective à la théorie des courbes dans l'espace projectif courbe \mathbb{P}_n à n dimensions. Grâce à cette notion, j'arrive à fixer la fonction arbitraire (en ne partant que des données de la question) qui figure dans la définition de x^0 et je réussis ainsi à trouver $n - 1$ invariants différentiels isohodiques (courbures projectives) de la courbe en question. Le lecteur trouvera aussi dans cette partie l'étude plus détaillée des cas particuliers $n = 2, 3$, dont les résultats sont analogues à ceux de la géométrie différentielle projective d'après MM. FUBINI et CECH dans le plan et dans l'espace projectif. (L'étude de la conique osculatrice locale, du complexe linéaire osculateur local, etc.). Néanmoins, il faut remarquer que la théorie

exposée diffère de celle-ci que nous venons de mentionner par le fait que le facteur de proportionnalité reste complètement arbitraire dans celle-là (cfr. n.º 23). Cela est dû à ce que le groupe projectif local (dans l'espace tangent du point en question) est plus restreint dans ce Mémoire que dans la théorie de l'espace projectif plan. (Il conserve le point en question, mais — contrairement au cas du groupe local du calcul vectoriel — il ne donne pas lieu à la notion de l'hyperplan « fuyant »).

La dernière partie des applications emploie des résultats déduits pour en tirer l'avantage quant à la théorie des hypersurfaces à m dimensions dans \mathbb{P}_n . Cette théorie étant maîtrisée par « l'équation fondamentale » (d'où l'on déduit non seulement la généralisation projective du « theorema egregium » mais aussi la généralisation des équations de MAINARDI-CODAZZI et de KUEHNE), je me suis contenté, après les préliminaires nécessaires, d'en trouver la forme.

REMARQUE. — Après avoir fini la seconde esquisse de ce Mémoire, j'ai reçu par l'amabilité de MM. SCHOUTEN et van DANTZIG le manuscrit d'un Mémoire de ce dernier sur la « Theorie des projektiven Zusammenhanges n — dim. Räume » (4). Dans ce travail, l'auteur a l'ingénieuse idée de généraliser les résultats de l'école de Princeton en introduisant les coordonnées « homogènes » curvilignes. Ces résultats, (dont je me sers à présent dans mon Mémoire) apparaissent ainsi encadrés dans la théorie plus générale de M. van DANTZIG. Or, les résultats de mon Mémoire — dont le but principal est l'étude *détaillée* des espaces \mathbb{P}_m dans \mathbb{P}_n ($m < n$) — peuvent être sans doute considérés comme conséquences particulières de la théorie de M. van DANTZIG qui embrasse aussi la théorie de \mathbb{P}_m dans \mathbb{P}_n . D'autre part, le lecteur trouve dans mon Mémoire beaucoup d'applications ainsi que d'interprétations géométriques complètement nouvelles.

INTRODUCTION (2)

1. *a*) Imaginons un espace à n dimensions X_n , repéré à un système (x^i) des coordonnées x^i (3). La transformation générale des coordonnées x^i

$$(1,1) \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n)$$

(4) Cfr. (86).

(2) Pour l'étude plus détaillée des notions introduites ici, voir (46).

(3) Les indices latins parcourent — sauf l'avis contraire -- les chiffres 1, ..., n .

au jacobien

$$\Delta = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| \neq 0$$

sert à la définition des grandeurs algébriques dans X_n :

Le scalaire est un invariant absolu du groupe (1,1).

La densité scalaire du poids p est un invariant relatif du poids $-p$ par rapport au groupe (1,1). En le désignant par \mathfrak{v} (dans le système (x^i)) et par $\bar{\mathfrak{v}}$ (dans le système (\bar{x}^i)) on a

$$(1,2) \quad \bar{\mathfrak{v}} = \Delta^{-p} \mathfrak{v},$$

Le vecteur contrevariant (covariant) est l'ensemble de n fonctions qui pendant une transformation (1) se transforment d'après

$$(1,3) \quad v^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j \quad \text{resp.} \quad \bar{w}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} w_i.$$

L'affineur r -fois contrevariant et s -fois covariant est l'ensemble des fonctions qui se transforment d'après

$$(1,4) \quad \bar{v}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{a_r}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{b_s}}{\partial \bar{x}^{j_s}} v_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}.$$

La densité affnorielle du points p , r -fois contrevariants et s -fois covariante est l'ensemble des fonctions qui se transforment comme le produit $\mathfrak{v}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, savoir

$$(1,5) \quad \bar{\mathfrak{v}}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{a_r}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{b_s}}{\partial \bar{x}^{j_s}} \Delta^{-p} \mathfrak{v}_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}.$$

Parmi les affineurs, il y en a un privilégié, à savoir l'affineur unité aux composantes

$$(1,6) \quad A_j^i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ 1 & \text{» } i = j \end{cases}.$$

Si l'on désigne par δ_j^i le symbole de KRONECKER (delta de KRONECKER) on peut écrire aussi

$$(1,7) \quad A_j^i = \delta_j^i,$$

car l'équation (1,6) est une équation covariante. Ce fait qui semble assez banal est très important dans l'analyse de la connexion affine.

Dans ce Mémoire, nous appliquerons aussi les paranthèses () et [] aux indices co-ou contrevariants:

$$\begin{aligned} \Phi_{[ab]} &= \frac{1}{2!} (\Phi_{ab} - \Phi_{ba}) \\ \Phi_{[abc]} &= \frac{1}{3!} (\Phi_{abc} + \Phi_{bca} + \Phi_{cab} - \Phi_{bac} - \Phi_{acb} - \Phi_{cba}) \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi_{(ab)} &= \frac{1}{2!} (\Phi_{ab} + \Phi_{ba}) \\ \Phi_{(abc)} &= \frac{1}{3!} (\Phi_{abc} + \Phi_{bca} + \Phi_{cab} + \Phi_{bac} + \Phi_{acb} + \Phi_{cba}) \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi^{[ab]} &= \frac{1}{2!} (\Phi^{ab} - \Phi^{ba}) \\ \Phi^{[abc]} &= \frac{1}{3!} (\Phi^{abc} + \Phi^{bca} + \Phi^{cab} - \Phi^{bac} - \Phi^{acb} - \Phi^{cba}) \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi^{(ab)} &= \frac{1}{2!} (\Phi^{ab} + \Phi^{ba}) \\ \Phi^{(abc)} &= \frac{1}{3!} (\Phi^{abc} + \Phi^{bca} + \Phi^{cab} + \Phi^{bac} + \Phi^{acb} + \Phi^{cba}) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Si $v^{i_1 \dots i_p}(v_{j_1 \dots j_p})$ est un affineur, nous dirons que $v^{[i_1 \dots i_p]}(v_{[j_1 \dots j_p]})$ est un p -vecteur contrevariant (covariant).

b) Imaginons données, dans X_n , n^3 fonctions Γ_{jk}^i qui se transforment d'après

$$(1,8) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \left(\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} \Gamma_{bc}^a + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \right).$$

Leur ensemble sera dit « la connexion Γ » et l'espace X_n , doué de cette connexion sera désigné par L_n . La connexion Γ donne naissance à « la dérivée covariante »: Si $v_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ est une densité du poids p , r -fois contrevariante, s -fois covariante,

$$(1,9) \quad \begin{aligned} \nabla_k v_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial}{\partial x^k} v_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_1^r \Gamma_{ak}^{i_u} v_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{u-1} a i_{u+1} \dots i_r} - \\ &\quad - \sum_1^s \Gamma_{jk}^a v_{j_1 \dots j_{u-1} a j_{u+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - p \Gamma_{ak}^a v_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \end{aligned}$$

appelée « la dérivée covariante de $\mathbf{v}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ » est à son tour une densité affinoérielle du poids p , r -fois contrevariante, $(s + 1)$ -fois covariante (4).

Il s'ensuit en particulier

$$\nabla_k A_j^i = 0.$$

Or, si l'on adopte la règle

$$\nabla_k s = \frac{\partial s}{\partial x^k}$$

pour les scalaires, on en déduit aussitôt que l'équation covariante (1,7) est capable de la dérivation covariante. (Ce fait n'a pas toujours lieu, voir p. ex. p. 240). L'équation (1,8) nous apprend que

$$(1,10) \quad S_{jk}^i = \Gamma_{[jk]}^i = 1/2(\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i)$$

est un affineur, dit « l'affineur de torsion (2) ». Si en particulier

$$S_{jk}^i = S_{[j} A_{k]}^i,$$

S_j étant un vecteur covariant, nous dirons que L_n (ou bien la connexion Γ) est semisymétrique. Si $S_j = 0$, nous dirons que $L_n(\Gamma)$ est symétrique, ou sans torsion. Un autre affineur très important est « l'affineur de courbure » de L_n , aux composantes

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{lj}^i - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{lk}^i - \Gamma_{aj}^i \Gamma_{lk}^a + \Gamma_{ak}^i \Gamma_{lj}^a \quad (3).$$

Le vecteur covariant symbolique ∇_k donne naissance au scalaire symbolique

$$\delta = dx^k \nabla_k.$$

Celui-ci donne naissance à la différentielle covariante

$$\delta \mathbf{v}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = dx^k \nabla_k \mathbf{v}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}.$$

Si

$$\delta \mathbf{v}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = ds \mathbf{v}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

ds étant une fonction scalaire de position, nous dirons que $\mathbf{v}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ est déplacé

(4) Voir, pour $p \neq 0$, (30), (55), (76).

(2) Voir (11).

(3) $R_{jkl}^i = 0$ et $S_{jk}^i = 0$ sont les conditions d'intégrabilité du système

$$\nabla_j \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0.$$

parallèlement à lui-même le long de dx^k . Les courbes, dont le vecteur tangent est parallèle à lui-même seront dites « les courbes géodésiques » de $L_{..}$:

$$\frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ab}^k \frac{dx^b}{dt} v^a = s(t)v^k.$$

En tenant compte de ce que v^k est le vecteur tangent, on peut écrire ce système ainsi

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ab}^k \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt} = S(t) \frac{dx^k}{dt}.$$

ALGÈBRE

2. **Coordonnée surnuméraire x^o .** — Repérons l'espace $X_{..}$ au système (x^i) de coordonnées x^i . Le choix de ce système donne naissance à la densité e du poids -1 qui dans le système actuel (x^i) est égale à 1

$$(2,1) \quad e \stackrel{\bar{=}}{=} 1 \quad (1).$$

En introduisant un autre système (\bar{x}^i) de coordonnées \bar{x}^i tel que le jacobien

$$\Delta = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| \neq 0,$$

cette densité devient \bar{e}

$$(2,2) \quad \bar{e} = \Delta e.$$

D'autre part, le système (\bar{x}^i) donne naissance à la densité $\bar{\mathfrak{E}}$ du poids -1 , qui dans le système (\bar{x}^i) égale à 1 et par conséquent sa composante dans le système (x^i) est \mathfrak{E}

$$(2,3) \quad \mathfrak{E} = \Delta^{-1} \bar{\mathfrak{E}} \stackrel{\bar{=}}{=} \Delta^{-1},$$

de sorte que l'on peut « jauger » \mathfrak{E} par e

$$(2,4) \quad \mathfrak{E} = \Delta^{-1} e.$$

Cela étant, introduisons les expressions

$$(2,5) \quad \text{a) } x^o = \log e^{-n/c}, \quad \text{b) } X^o = \log \bar{\mathfrak{E}}^{-n/c}$$

(1) Nous employons le symbole $\stackrel{\bar{=}}{=}$ pour accentuer que l'équation en question n'est pas covariante.

où

$$n = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad c = \text{const. arb.} \neq 0,$$

et désignons par X^o ce que devient \bar{X}^o dans le système (x^i) . On a donc en raison de (2,4)

$$(2,6) \quad X^o = x^o + f,$$

où

$$(2,7) \quad f = \log \Delta^{n/c}.$$

D'autre part, en désignant par \bar{x}^o ce que devient x^o dans le système (\bar{x}^i) on a, à cause de (2,2)

$$(2,8) \quad \bar{x}^o = x^o - \log \Delta^{n/c}.$$

Nous dirons que x^o , définie par (2,5) a) est la *coordonnée surnuméraire*. On voit bien que cette notion dépend du choix du système coordonné. En effet, supposons que le repère original de l'espace X_n soit (\bar{x}^i) et introduisons après le système (x^i) . La coordonnée surnuméraire originale étant \bar{X}^o (définie par (2,5) b)), elle devient X^o dans (x^i) et celle-ci est liée à x^o (c'est-à-dire à la coordonnée surnuméraire *originale* du système (x^i)) par (2,6). On est donc parvenu, dans le système (x^i) à une autre coordonnée surnuméraire, qui est en général différente de la coordonnée originale surnuméraire du système (x^i) .

La transformation $x^i \rightarrow \bar{x}^i$ étant arbitraire, telle est aussi la fonction f dans (2,6) et par conséquent nous pouvons dire:

La coordonnée surnuméraire

$$(2,9) \quad x^o = \log e^{-n/c}$$

n'est définie qu'à une fonction arbitraire additive près

$$(2,6) \quad X^o = x^o + f.$$

Elle se transforme, pendant la transformation $x^i \rightarrow \bar{x}^i$ d'après (2,8).

Dès lors, en parlant du système (x^i) (1) nous entendrons par cela l'ensemble des coordonnées x^o, x^1, \dots, x^n .

3. Groupes de transformations. — Nous avons ainsi trois groupes différents de transformations, savoir le groupe V

$$(3,1) \quad V \dots \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n) \quad \text{avec} \quad \Delta = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| \neq 0,$$

(1) Les indices latins parcourent les chiffres 1, ..., n, tandis que les indices grecs parcourent les chiffres 0, 1, ..., n.

le groupe P

$$(3,2) \quad P \dots \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n), \quad \bar{x}^0 = x^0 - \log \Delta^{n/c} \quad (1)$$

et le groupe F

$$(3,3) \quad F \dots X^i = x^i, \quad X^0 = x^0 + f(x^1, \dots, x^n) \quad (1),$$

f étant une fonction analytique arbitraire $\neq 0$. Nous dirons que le groupe V est un groupe vectoriel, le groupe P est un groupe ponctuel, tandis que F est, d'après M. WHITEHEAD, « le changement du facteur » (2).

En parlant du groupe V , nous emploierons les coefficients

$$(3,4) \quad \overset{i}{V} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad \overset{i}{W} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}, \quad \left(\overset{i}{V} \overset{k}{W} = \overset{k}{V} \overset{i}{W} = \delta_j^i \right),$$

tandis que pour accentuer que nous avons affaire au groupe P nous écrirons

$$(3,5) \quad \overset{\alpha}{P} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}, \quad \overset{\alpha}{Q} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta}, \quad \left(\overset{\alpha}{P} \overset{\gamma}{Q} = \overset{\gamma}{P} \overset{\alpha}{Q} = \delta_\beta^\alpha \right).$$

Remarquons qu'en tenant compte des équations (3,1), (3,2) nous avons

$$(3,6) \quad \overset{o}{P} = 1, \quad \overset{o}{P} = -\frac{n}{c} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^i}, \quad \overset{i}{P} = 0, \quad \overset{i}{P} = \overset{i}{V}$$

$$\overset{o}{Q} = 1, \quad \overset{o}{Q} = \frac{n}{c} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \bar{x}^i}, \quad \overset{i}{Q} = 0, \quad \overset{i}{Q} = \overset{i}{W},$$

de sorte que les jacobiens des groupes V et P sont égaux

$$(3,7) \quad \left| \overset{\alpha}{P} \right| = \left| \overset{i}{V} \right| = \Delta \neq 0.$$

Quant au groupe F , nous nous en servons pour définir les notions intrinsèques:

N'importe quelle notion invariante par rapport au groupe F sera dite intrinsèque.

4. Pro-vecteurs contrevariants. — Imaginons l'ensemble des fonctions intrinsèques v^α

$$v^\alpha = v^\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

(1) Sans donner une interprétation à la coordonnée surnuméraire, M. T. Y. THOMAS introduit dans (62), (64) l'équation (3.2)b. Voir aussi HLAVATY (31).

(2) Sans donner une interprétation à la coordonnée surnuméraire M. WHITEHEAD introduit dans (80), (82) le groupe F sous le nom « le changement du facteur ».

qui pendant la transformation du groupe V deviennent

$$(4,1) \quad \begin{aligned} \bar{v}^i &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j \\ \bar{v}^0 &= v^0 - \frac{n}{c} v^i \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

et cherchons son interprétation géométrique moyennant le groupe V . Imaginons à cet effet l'espace plan à n dimensions, tangent à X_n au point $P(x^i = 0)$ et introduisons-y le groupe affine local de transformations aux coefficients $\overset{i}{V}(0)$.

Un tel espace plan sera dit l'espace local et désigné par E_n . Le point P et l'hyperplan fuyant de E_n sont les éléments absolus (reproduits par le groupe affine) de E_n et par conséquent on y peut introduire la notion ordinaire du vecteur contrevariant. Soit donc y^i un vecteur contrevariant intrinsèque et $m = m(x^1, \dots, x^n)$ une fonction scalaire. Les équations (4,1) nous apprennent que l'on peut trouver toujours un tel vecteur y^i et une telle fonction scalaire m que

$$(4,2) \quad v^i = y^i, \quad v^0 = m + v^i x_i^0, \quad \left(x_i^0 = \frac{\partial x^0}{\partial x^i} \right).$$

L'ensemble v^z est donc géométriquement caractérisé dans E_n par un vecteur y^i , affecté d'une « masse » scalaire m . Supposons maintenant que l'on ait effectué une transformation du groupe F . En désignant par V^z, Y^i, M ce que deviennent v^z, y^i, m dans le nouveau système on a avant tout, d'après la convention faite

$$V^i = v^i, \quad Y^i = y^i, \quad V^0 = M + V^i X_i^0 = m + v^i x_i^0$$

et par conséquent

$$(4,3)a \quad M = m - v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Or, contrairement au vecteur y^i , la masse m n'est pas intrinsèque en général. Exception fait le cas où $y^i = 0$

$$(4,3)b \quad v^i = 0, \quad v^0 = m,$$

car dans ce cas on a, en raison de (4,3)a $M = m$.

Cela posé, nous définissons:

L'ensemble des fonctions

$$(4,4) \quad v^z = v^z(x^1, \dots, x^n)$$

qui pendant la transformation du groupe V se transforment d'après (4,1) et sont intrinsèques sera dit « le vecteur projectif contrevariant intrinsèque ». Cet ensemble est géométriquement caractérisé par un vecteur intrinsèque contrevariant et une masse scalaire, non intrinsèque en général.

Si les fonctions v^z qui figurent dans cette définition ne sont pas intrinsèques nous dirons que leur ensemble définit « un vecteur projectif contrevariant non intrinsèque ». Tel est par exemple dx^z , tandis que

$$(4,5) \quad \underset{o}{e^i} = 0, \quad \underset{o}{e^o} = 1$$

est un vecteur projectif contrevariant intrinsèque, lequel est géométriquement caractérisé dans E_n par le point P lui-même, affecté de la masse 1.

Dorénavant, en parlant des « pro-vecteurs contrevariants » nous entendrons par cela les grandeurs intrinsèques, définies plus haut ⁽¹⁾.

D'après la définition, deux pro-vecteurs contrevariants v^z et λv^z ($\lambda \neq 0$) sont deux grandeurs différentes. Nous dirons que v^z et λv^z sont deux pro-vecteurs contrevariants homologues. Les pro-vecteurs $\underset{o}{e^z}$ et $\underset{o}{\lambda e^z}$ sont, en raison de (4,5), caractérisés géométriquement dans E_n par le point P lui-même, affecté des masses 1 resp. λ .

5. Pro-vecteurs covariants. — Imaginons l'ensemble des fonctions intrinsèques w_x

$$(5,1)a \quad w_x = w_x(x^1, \dots, x^n)$$

qui pendant la transformation du groupe V devient

$$(5,1)b \quad \bar{w}_i = w_o \frac{n}{c} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} w_j, \quad \bar{w}_o = w_o$$

et cherchons son interprétation géométrique moyennant le groupe V . Parce que le groupe affine local conserve dans E_n local l'hyperplan fuyant, on y peut introduire les vecteurs covariants (ces vecteurs étant caractérisés par deux hyperplans parallèles à $n - 1$ dimensions). Or, il s'ensuit immédiatement que l'ensemble w_x avec $w_o = 0$ est un vecteur covariant. D'autre part, en introduisant le vecteur covariant y de manière que

$$(5,2) \quad w_i \equiv y_i,$$

(1) Le pro-vecteur contrevariant est identique au vecteur projectif contrevariant dans (62), et au point contrevariant dans (24). Cfr. aussi (54). Une autre interprétation des pro-vecteurs contrevariants est donnée dans (70) resp. dans (71), (72). Voir aussi (34).

on peut poser pour w_x (même si $w_0 \neq 0$) en raison de (5,2)

$$(5,3) \quad w_i = y_i - mx_i^0, \quad w_0 = m.$$

Le vecteur y_i , contrairement à la « masse » m n'est pas ici une notion intrinsèque. En effet, si l'on désigne par W_x, Y_i, M ce que deviennent w_x, y_i, m dans le système (X') défini par F , on a selon les hypothèses faites

$$(5,4) \quad W_0 = w_0 = M = m, \quad W_i = Y_i - MX_i^0 = y_i - mx_i,$$

d'où il suit en raison de (2,6)

$$(5,5) \quad Y_i = y_i + m \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, nous définissons:

L'ensemble des fonctions intrinsèques (5,1)a qui se transforment d'après (5,1)b sera dit « le vecteur projectif covariant intrinsèque ». Cet ensemble est géométriquement caractérisé par un vecteur covariant non intrinsèque, défini par (5,2) et une masse scalaire intrinsèque $m = w_0$. Si $m = 0$, w_i définit un vecteur covariant intrinsèque.

Si les fonctions qui figurent dans cette définition ne sont pas intrinsèques, nous dirons que leur ensemble définit un « vecteur projectif covariant non intrinsèque ». Tel est par exemple

$$(5,6) \quad u_i = +x_i^0, \quad u_0 = -1,$$

tandis que, si \mathfrak{v} est une densité du poids $-n$

$$w_i = \frac{\partial \log \mathfrak{v}}{\partial x^i}, \quad w_0 = c$$

est un vecteur projectif covariant intrinsèque.

Dorénavant, en parlant des « pro-vecteurs covariants », nous entendrons par cela les grandeurs intrinsèques, définies plus haut (1). Deux pro-vecteurs covariants w_x et λw_x sont différents; nous les appellerons pro-vecteurs covariants homologues.

Etant donnés deux pro-vecteurs

$$(5,7) \quad v^i = y^i, \quad v^0 = m + y^i x_i^0, \quad w_i = y_i - \mu x_i^0, \quad w_0 = \mu$$

le scalaire intrinsèque $v^x w_x$ est

$$(5,8) \quad v^x w_x = y^i y_i + m\mu.$$

(1) Le pro-vecteur est identique au vecteur projectif covariant dans (62) et au point covariant dans (24), (54). Une autre interprétation des pro-vecteurs est dans (34).

Il s'ensuit: *La condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs y^i et y_i soient incidents est*

$$(5,8)a \quad v^x w_x = \mu.$$

Pour éviter tout malentendu, remarquons expressément que le changement du facteur nous mène au vecteur Y_i défini par (5,5) et par conséquent, si $\mu \neq 0$ et si (5,8)a est satisfaite,

$$(5,8)b \quad Y_i y^i = y_i y^i + \mu y^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \mu y^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \neq 0,$$

ainsi que les vecteurs y^i et Y_i ne sont plus incidents.

Exception fait le cas $\mu = 0$. Le cas échéant, l'équation (5,8)b devient

$$(5,8)c \quad Y_i y^i = y_i y^i = 0,$$

d'où le théorème suivant: *Etant donné un pro-vecteur contrevariant v^x et un vecteur w_i , $w_0 = 0$, les vecteurs v^i et w_i sont incidents si*

$$v^x v_x = w^i v_i = 0.$$

Ils restent même incidents pour n'importe quel changement du facteur.

REMARQUE. — La caractérisation géométrique des pro-vecteurs co-et contrevariants est la même dans le système actuel. En effet on a d'après (4,2), (5,3) et (2,1), (2,5)

$$(5,9) \quad \begin{aligned} v^i &= y^i, & v^0 &= m \\ w_i &= y_i, & w_0 &= m. \end{aligned}$$

6. Pro-affineurs. — Imaginons r pro-vecteurs contrevariants v^x, \dots, v^x et s pro-vecteurs covariants w_x, \dots, w_x . L'ensemble de fonctions

$$(6,1) \quad v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x^1, \dots, x^n)$$

qui pendant une transformation du groupe V se transforment comme le produit $v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ sera dit « l'affineur projectif intrinsèque, r -fois contrevariant et s -fois covariant »; plus court: « le pro-affineur ». On définit analogiquement les affineurs projectifs non intrinsèques. Si \mathfrak{v} est une densité intrinsèque du poids p , l'ensemble de fonctions qui se transforment comme le produit $\mathfrak{v} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ sera dit « la densité vectorielle projective intrinsèque », ou bien « la densité pro-vectorielle ».

Parmi les pro-affineurs il y en a un très important, savoir le pro-affineur unité, aux composantes

$$(6,2) \quad A_{\beta}^z = \delta_{\beta}^z.$$

En tenant compte de cette équation on déduit aussitôt

$$(6,3) \quad A_{\beta}^z = \delta_{\beta}^z.$$

Il s'ensuit que A_{β}^z peut être interprété ou bien comme un pro-affineur, ou bien comme l'ensemble des scalaires δ_{β}^z . Une chose analogue se présente pour A_o^z , qui admet trois interprétations, savoir

- a) comme appartenant à A_{β}^z
- b) comme l'ensemble des scalaires δ_o^z et enfin
- c) comme le pro-vecteur contrevariant, représenté géométriquement dans E_n par le point P lui-même, affecté de la masse 1 (voir (4,5))

$$(6,4) \quad A_o^z = e^z (= \delta_o^z).$$

On peut se persuader facilement que toutes ces interprétations sont covariantes, c'est-à-dire indépendantes du choix des coordonnées.

En suivant la méthode de M. T. Y. THOMAS (*) on peut démontrer le théorème suivant:

Seuls les pro-affineurs qui sont des comitants de A_{β}^z et de A_o^z jouissent de la propriété que leurs composantes soient invariantes par rapport aux transformations du groupe V .

Nous rencontrerons bientôt les conséquences de ce théorème dans l'analyse.

7. Repère pro-vectoriel. — Imaginons n pro-vecteurs contrevariants

$$(7,1) \quad e^i = y^i_j, \quad e^o = m_j + y^i x_i^o = m$$

caractérisés par n vecteurs contrevariants, linéairement indépendants y^i_j et ajoutons-y le pro-vecteur (4,5). Grâce à l'indépendance des vecteurs y^i_j , on a

$$(7,2) \quad \begin{vmatrix} e^o & \dots & e^n \\ o & & o \\ e^o & \dots & e^n \\ n & & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^1 & \dots & e^n \\ 1 & & 1 \\ e^1 & \dots & e^n \\ n & & n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous traduirons ce fait en disant que mêmes les pro-vecteurs e^{β} sont

(*) Voir (63). Cfr. aussi (38).

linéairement indépendants. Cela posé, nous pouvons trouver $n + 1$ pro-vecteurs linéairement indépendants covariants e_{β}^{α} qui satisfont à

$$(7,3)a \quad e_{\beta}^{\alpha} e_{\alpha}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\gamma}.$$

Il s'ensuit en particulier

$$(7,3)b \quad e_{\gamma}^{\alpha} e_{\beta}^{\gamma} = A_{\beta}^{\alpha}.$$

En écrivant pour ces pro-vecteurs

$$(7,4) \quad e_i^{\alpha} = y_i^{\alpha} - m x_i^{\alpha}, \quad e_o^{\alpha} = m^{\alpha}$$

on trouve, en raison de (5,8) et (7,3)a

$$(7,5) \quad \delta_{\beta}^{\gamma} = y_{\beta}^{\gamma} y^i + m m_{\beta}^{\gamma}, \quad (m_o = 1, y_o^i = 0)$$

c'est-à-dire

$$(7,6) \quad \begin{aligned} y_{\beta}^k y^i + m m_{\beta}^k &= \delta_{\beta}^k \\ y_{\beta}^o y^i + m m_{\beta}^o &= \delta_{\beta}^o. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(7,7) \quad a) m^k = 0$$

on en déduit

$$(7,7) \quad b) y_{\beta}^k y^i = \delta_{\beta}^k, \quad c) m_o = m^o = 1$$

$$d) y_{\beta}^o y^i + m = 0.$$

Cette dernière équation peut être écrite aussi, à cause de la première

$$(7,7) \quad e) y_i^o = -m y_i^k.$$

En résumant: *Étant donné un repère pro-vectoriel des pro-vecteurs linéairement indépendants (7,1) et (4,5), les pro-vecteurs covariants, qui satisfont à (7,3) sont géométriquement caractérisés par*

$$(7,8) \quad \begin{aligned} e_i^o &= y_i^o - x_i^o & e_i^k &= y_i^k \\ e_o^o &= 1 & e_o^k &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que e_i^k sont les vecteurs définis par (7,7)b, tandis que e_i^o est défini par (7,7)e.

REMARQUE. — On sait que

$$y_i = 0$$

est l'équation de l'hyperplan absolu de E_n , et par conséquent le pro-vecteur covariant

$$w_i = y_i - \mu \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad w_0 = \mu \neq 0, \quad y_i = 0$$

est caractérisé géométriquement dans le système actuel (x^2) par l'hyperplan absolu (à l'infini) de E_n (4). Cela posé, imaginons un pro-vecteur contrevariant v^z à la masse $m = 0$. Or, parce que $v^z w_z = 0$, on peut dire à cause de (5,8)a que le pro-vecteur v^z est représenté dans E_n , dans le système actuel (x^2) par la direction aux composantes $v^1 : v^2 : v^3 : \dots : v^n$, autrement dit par le vecteur qui joint le point P à un point dans l'hyperplan absolu de E_n . Or, en posant dans le paragraphe qui précède $m = 0$, on parvient à un repère défini dans le système actuel (x^2) par le point P et n points linéairement indépendants à l'infini (dans l'hyperplan absolu de E_n), tandis que e_x est, à cause de (7,7)e représenté par l'hyperplan absolu lui-même.

8. Autre interprétation. — Comme nous aurons plus tard l'occasion de constater (2), l'interprétation dans E_n , dont nous nous sommes servis jusqu'ici, n'est pas toujours possible. C'est pour cela que nous introduirons encore une autre interprétation fondée cette fois sur le groupe P . Imaginons à cet effet l'espace plan à n dimensions tangent à X_n au point $P(x^i = 0)$ et introduisons-y le groupe local de transformations projectives, aux coefficients $\overset{\alpha}{P}(0)$ resp. $\overset{\alpha}{Q}(0)$. L'espace tangent, doué de ce groupe restreint projectif sera dit l'espace projectif local et désigné par P_n . Il n'y a qu'un élément absolu (= reproduit par le groupe en question), savoir le point P lui-même. Il s'ensuit que le parallélisme (local) n'existe pas dans P_n , car

(4) Après avoir exécuté le changement du facteur, on obtient le vecteur Y_i défini par (5,5) (où l'on doit écrire μ au lieu de m) et par conséquent Y_i n'est plus l'hyperplan absolu de E_n . Néanmoins on a

$$W_i = Y_i - \mu \frac{\partial X^0}{\partial x^i} = y_i - \mu \frac{\partial x^0}{\partial x^i} = w_i$$

$$W_0 = w_0.$$

Il ne faut pas confondre ce pro-vecteur covariant, qui représente une grandeur intrinsèque, avec le vecteur projectif non intrinsèque u_z défini par (5,6). car celui-ci change en

$$U_i = X_i^0 = u_i + \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad U_0 = u_0.$$

(2) Cfr. le par. 21.

l'hyperplan absolu (fuyant) n'existe pas à son tour. Or, il n'y aura même des vecteurs covariants, ces vecteurs étant caractérisés par deux hyperplans parallèles, car cette caractérisation perd son sens.

Cela posé, remarquons avant tout que les équations (4,1) et (5,1)b peuvent être écrites à cause de (3,6) dans la forme

$$(8,1) \quad \bar{v}^\alpha = \bar{P}^\alpha_\beta v^\beta$$

$$\bar{w}_\alpha = \bar{Q}^\beta_\alpha w_\beta,$$

d'où nous tirons la définition suivante:

Le rapport des fonctions intrinsèques

$$(8,2) \quad v^\alpha = v^\alpha(x^1, \dots, x^n) \quad \text{resp.} \quad w_\alpha = w_\alpha(x^1, \dots, x^n)$$

qui pendant une transformation du groupe P se transforment d'après (8,1) sera dit le point contrevariant (resp. covariant) intrinsèque. Le point contrevariant intrinsèque est géométriquement représenté dans P_n par un point aux coordonnées projectives $v^\alpha(0)$, le point covariant intrinsèque est géométriquement représenté par l'hyperplan à $(n-1)$ dimensions, aux coordonnées projectives $w_\alpha(0)$.

Si les fonctions (8,2) ne sont pas intrinsèques, on parvient par la même définition aux points non intrinsèques. Dorénavant nous parlerons des contre-points, resp. des co-points toutes les fois quand nous aurons affaire aux points contrevariants intrinsèques resp. aux points covariants intrinsèques.

Dans cette interprétation les contre-points (co-points) v^α et λv^α (resp. w_α et λw_α) ne sont représentés que par un être géométrique (un point resp. un hyperplan). C'est par cette raison que nous dirons que v^α et λv^α (resp. w_α et λw_α) définissent le même contre-point (resp. co-point). D'autre part, nous dirons, analogiquement que dans la géométrie élémentaire projective, que le contre-point v^α est incident avec le co-point w_α si $v^\alpha w_\alpha = 0$. Il s'ensuit en particulier que les co-points w_α avec $w_0 = 0$ sont géométriquement représentés par les hyperplans passant par le point P lui-même (¹).

(¹) Étant donnés deux co-points w_α^1 et w_α^2 avec $w_0^1, w_0^2 \neq 0$, l'expression

$$\frac{\frac{1}{w_i^1} - \frac{2}{w_i^2}}{\frac{1}{w_0^1} - \frac{2}{w_0^2}}$$

se transforme comme un vecteur covariant. Nous renonçons à cette interprétation du « vecteur » covariant pour des raisons que nous constaterons plus tard. (Voir la fin du par. 12).

En partant de la notion d'un pro-affineur nous définissons: *Le rapport des fonctions intrinsèques* (6,1) sera dit le *projecteur r-fois contrevariant, s-fois covariant, intrinsèque*. Nous l'appellerons plus brièvement le projecteur en sousentendant le mot « intrinsèque ».

Dans ce qui suit nous ferons l'usage du symbole \propto qui veut dire « proportionnel à ». Ainsi par exemple le point P de l'espace P_n représente le contre-point aux composantes

$$e^x \propto \delta_0^x \quad (1).$$

9. **La dérivée $\frac{\partial}{\partial x^0}$.** — La forme spéciale du groupe F nous apprend que toute expression intrinsèque ne dépend pas de x^0 . (Voir (4,4), (5,1), (6,1), (8,2)). Il s'ensuit: Φ étant n'importe quelle fonction intrinsèque, on a

$$(9,1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} = 0 \quad (2)$$

ou bien, ce qui revient au même

$$(9,2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x^x} = \delta_x^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}.$$

Ce fait d'ailleurs assez banal, est très important pour l'analyse, comme nous aurons encore l'occasion de le constater.

ANALYSE

10. **Connexions isohodoïques.** — Étant donnée une connexion Γ_{jk}^i dans X_n , elle définit les courbes géodésiques de L_n

$$(10,1) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \rho(x) \frac{dx^i}{dt}.$$

Un calcul facile fait voir que même la connexion

$$(10,2) \quad * \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + A_j^i p_k + A_k^i q_j + G_{jk}^i$$

possède les mêmes géodésiques (10,1) pour n'importe quels vecteurs p_i , q_i (3)

(1) Pour une autre conception des grandeurs projectives voir (58).

(2) Dans les travaux de l'école de Princeton ainsi que dans (24), (54)_a, (54)_b cette équation n'a qu'une signification formelle.

(3) Pour $\Gamma_{[jk]}^i = G_{jk}^i = * \Gamma_{[jk]}^i = 0$ voir (78), (15).

pourvu que l'affineur G_{jk}^i soit antisymétrique $G_{jk}^i = G_{[jk]}^i$. C'est pour cette raison que nous dirons que les connexion (10,2) sont isohodoïques, en appelant cette équation « le changement isohodoïque » de la connexion.

Dans ce qui suit nous restreindrons la généralité du problème en supposant que G ait une forme spéciale

$$G_{jk}^i = A_j^i g_k - A_k^i g_j$$

de sorte que (10,2) se simplifie à

$$(10,3) \quad * \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + A_j^i P_k + A_k^i Q_j$$

P_i et Q_i étant deux vecteurs arbitraires. L'élimination de ces vecteurs de (10,3) nous montre que les expressions

$$(10,4) \quad \Phi_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \frac{1}{n^2 - 1} \{ A_j^i (\Gamma_{kl}^l - n \Gamma_{lk}^l) + A_k^i (\Gamma_{lj}^l - n \Gamma_{jl}^l) \} \quad (1)$$

sont invariantes par rapport au changement (10,3). Remarquons que l'on a aussi

$$(10,5) \quad \Phi_{ik}^i = \Phi_{ki}^i = 0.$$

Les coefficients Φ_{jk}^i se transforment pendant une transformation du groupe V d'après

$$(10,6) \quad \overline{\Phi}_{jk}^i = V \left(W W^c \Phi_{bc}^a + \frac{\partial}{\partial x^k} W^a \right) + n \left(A_k^i W^a + A_j^a W_k \right) \Delta_a, \quad \left(\Delta_a = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^a} \right),$$

Il s'ensuit aussitôt que

$$(10,7) \quad T_{jk}^i = \Phi_{[jk]}^i$$

est un affineur lequel, comme on s'en persuade facilement, peut être écrit

$$(10,8) \quad T_{jk}^i = S_{jk}^i + \frac{1}{n-1} (A_j^i S_{kl}^l - A_k^i S_{jl}^l) \quad (1),$$

où, comme à l'ordinaire S_{jk}^i est l'affineur de torsion de la connexion Γ_{jk}^i (voir (1,10)). T_{jk}^i est invariant par rapport à (10,3). Si en particulier L_n est (semi)-symétrique

$$(10,9) \quad S_{jk}^i = S_{[j}^i A_{k]} \quad S_j = \neq 0$$

(1) Voir (29). Pour le cas $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, l'équation (10,4) se réduit à

$$\Phi_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \frac{1}{n+1} (A_j^i \Gamma_{kl}^l + A_k^i \Gamma_{jl}^l).$$

Voir (59), (62).

on déduit de (10,8)

$$T_{jk}^i = \Phi_{[jk]}^i = 0 \quad (').$$

Dans ce cas et seulement dans ce cas les coefficients Φ_{jk}^i sont donc symétriques par rapport aux indices j, k .

Si l'on n'admet que les transformations « équivoluminaires », c'est-à-dire les transformations au jacobien constant, on a $\Delta_i = 0$ et par conséquent Φ_{jk}^i définissent une connexion, appelée par M. T. Y. THOMAS « la connexion équi-projective (') ». Son affineur de courbure est

$$(10,10) \quad \rho_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi_{lj}^i - \frac{\partial}{\partial x^j} \Phi_{lk}^i - \Phi_{mj}^i \Phi_{lk}^m + \Phi_{mk}^i \Phi_{lj}^m.$$

On en déduit l'affineur contracté

$$(10,11) \quad \rho_{kl} = \rho_{jkl}^j = - \frac{\partial}{\partial x^j} \Phi_{lk}^j + \Phi_{ik}^j \Phi_{lj}^i.$$

Ni ρ_{jkl}^i ni ρ_{kl} ne sont affineurs par rapport à une transformation générale du groupe V . Ainsi p. ex. ρ_{kl} se transforme d'après

$$(10,12) \quad \bar{\rho}_{kl} = \bar{W}_k^i \bar{W}_l^j \left[\rho_{ij} - \frac{n-1}{(n+1)} \left(\Phi_{ji}^m \Delta_m + n \Delta_j \Delta_i - \frac{\partial \Delta_i}{\partial x^j} \right) \right].$$

Nous utiliserons bientôt cette formule.

11. Méthode de M. T. Y. Thomas. — Retournons à cet effet à nos notions des pro-affineurs. Jusqu'ici nous n'avons étudié que l'algèbre de ces grandeurs. Pour les étudier du point de vue de l'analyse, remarquons encore une fois que les pro-vecteurs sont définis moyennant des transformations que l'on peut toujours écrire dans la forme (8,1). Or par analogie au calcul vectoriel, on est amené même ici à un système des fonctions $\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ qui pendant une transformation des coordonnées se transforment d'après

$$(11,1) \quad \bar{\Lambda}_{\beta\gamma}^\alpha = \bar{P}^\alpha \left(\bar{Q}^\xi \bar{Q}^\eta \Lambda_{\eta\zeta}^\xi + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \bar{Q}^\xi \right).$$

Si l'on réussit à trouver les fonctions Λ se transformant d'après (11,1) on peut introduire, moyennant ces fonctions, la notion de la connexion projective. En suivant cette idée de M. T. Y. THOMAS (2), nous définirons ces

(1) Voir (59), (61).

(2) Pour une connexion sans torsion voir (54), (60), (62), (65), (70), cfr. aussi (82).

coefficients de manière qu'ils soient indépendants des changements isohodiques (10,3). Remarquons à cet effet qu'en raison de (3,6)

$$(11,2) \quad \bar{P}_{\xi}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \bar{Q}_{\beta}^{\xi} = \bar{P}_{\xi}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\beta}} \bar{Q}_{\alpha}^{\xi} = 0$$

et par conséquent (11,1) peuvent être écrites de la manière suivante

$$(11,3) \quad \begin{aligned} \bar{\Lambda}_{\alpha\beta}^{\alpha} &= \bar{P}_{\xi}^{\alpha} \bar{Q}_{\beta}^{\xi} \Lambda_{\alpha\eta}^{\xi} \\ \bar{\Lambda}_{\beta\alpha}^{\alpha} &= \bar{P}_{\xi}^{\alpha} \bar{Q}_{\beta}^{\xi} \Lambda_{\eta\alpha}^{\xi} \\ \bar{\Lambda}_{i\gamma}^{\alpha} &= \delta_{\alpha}^{\gamma} \left\{ \bar{Q}_{i}^{\eta} \bar{Q}_{\gamma}^{\xi} \left(\Lambda_{\eta\xi}^{\alpha} - \frac{\mathbf{n}}{c} \Lambda_{\eta\xi}^j \Delta_j \right) + \frac{\mathbf{n}}{c} \delta_{\gamma}^j \bar{Q}_{i}^{\alpha} \bar{Q}_{j}^b \Delta_{ab} \right\} \\ &\quad + \delta_{k}^{\alpha} \bar{P}_{j}^k \left\{ \bar{Q}_{i}^{\eta} \bar{Q}_{\gamma}^{\alpha} \Lambda_{\eta\alpha}^j + \delta_{\gamma}^{\alpha} \left(\bar{Q}_{i}^l \bar{Q}_{\alpha}^j \Lambda_{\eta l} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \bar{Q}_{\alpha}^j \right) \right\}, \end{aligned}$$

d'où il suit en particulier que $\Lambda_{\alpha\beta}^{\alpha}$, $\Lambda_{\beta\alpha}^{\alpha}$ sont les affineurs, ce qui nous autorise à poser, d'après MM. SCHOUTEN et GOLAB (1)

$$(11,4) \quad \text{a) } \Lambda_{\alpha\beta}^{\alpha} = \Lambda_{\beta\alpha}^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} c.$$

D'autre part, en tenant compte des équations (10,6) et (10,12), on peut poser en raison de (3,6)

$$(11,4) \quad \begin{aligned} \text{b) } \Lambda_{jk}^i &= \Phi_{jk}^i \\ \text{c) } \Lambda_{jk}^{\alpha} &= \frac{1}{c(n-1)} \rho_{kj} \end{aligned} \left\{ \text{c'est-à-dire } \Lambda_{jk}^{\alpha} = \delta_i^{\alpha} \Phi_{jk}^i + \frac{\delta_{\alpha}^{\gamma}}{c(n-1)} \rho_{kj} \right. \quad (2).$$

Les équations (11,1) nous autorisent à l'assertion que

$$(11,5) \quad \text{a) } T_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Lambda_{[\beta\gamma]}^{\alpha}$$

est un pro-affineur. On a en particulier d'après (11,4)a), (11,4)c)

$$(11,5) \quad \text{b) } -T_{\beta\alpha}^{\alpha} = T_{\alpha\beta}^{\alpha} = 0, \quad T_{jk}^{\alpha} = \frac{1}{c(n-1)} \rho_{[kj]},$$

tandis que T_{jk}^i sont définies par (10,7) et (10,8). Le pro-affineur $T_{\beta\gamma}^{\alpha}$ est nul, si la connexion Γ_{jk}^i est (semi)-symétrique.

(1) Voir (24), (54)_{a, b}.

(2) Pour une connexion symétrique (sans torsion) voir les deux dernières remarques précédentes et (62, 70) (pour les valeurs spéciales de la constante c).

L'ensemble des fonctions $\Lambda_{\beta_r}^z$, définies par (11,4) sera dit « la connexion projective ». Cette connexion intrinsèque est invariante par rapport aux changements isohodoïques (10,3).

L'espace X_n , doué de cette connexion sera désigné par \mathbb{P}_n .

On peut s'en servir pour définir la dérivée pro-vectorielle covariante, en partant d'un pro-affineur donné $v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r}$

$$(11,6) \quad D_{\xi} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r} = \frac{\partial}{\partial x^{\xi}} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r} + \sum_1^r \Lambda_{z_{\xi}}^{z_u} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_{u-1} z_{u+1} \dots z_r} - \sum_1^s \Lambda_{\beta_{u\xi}}^{\beta} v_{\beta_1 \dots \beta_{u-1} \beta_{u+1} \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r}.$$

Le pro-affineur $D_{\xi} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r}$ est intrinsèque. Il s'ensuit en particulier

$$(11,7) \quad D_{\xi} A_{\beta}^z = 0$$

et aussi

$$(11,8) \quad D_{\xi} A_{[\beta_0 \dots \beta_n]}^{[z_0 \dots z_n]} = 0$$

et de plus, φ étant un scalaire intrinsèque

$$D_{\xi} \varphi A_{[\beta_0 \dots \beta_n]}^{[z_0 \dots z_n]} = A_{[\beta_0 \dots \beta_n]}^{[z_0 \dots z_n]} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\xi}}.$$

Or, si l'on adopte la loi

$$D_{\xi} \varphi A_{\beta}^z = (D_{\xi} \varphi) A_{\beta}^z + \varphi D_{\xi} A_{\beta}^z$$

on en déduit

$$(11,9) \quad D_{\xi} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\xi}} \left(= \delta_{\xi}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right)$$

pour n'importe quel scalaire intrinsèque. L'équation (11,6) nous permet aussi de démontrer la formule pour une densité pro-vectorielle du poids $-p$, p étant un nombre entier

$$(11,10) \quad D_{\xi} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r} = \frac{\partial}{\partial x^{\xi}} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r} + \sum_1^r \Lambda_{z_{\xi}}^{z_u} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_{u-1} z_{u+1} \dots z_r} - \sum_1^s \Lambda_{\beta_{u\xi}}^{\beta} v_{\beta_1 \dots \beta_{u-1} \beta_{u+1} \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r} + p \Lambda_{z_{\xi}}^z v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r} \quad (4).$$

Nous adoptons cette formule même pour n'importe quel $-p$. Il s'ensuit en particulier, à cause de (11,4)

$$(11,11) \quad D_0 v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r} = c(r - s + p(n + 1)) v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{z_1 \dots z_r}$$

(4) Pour la démonstration, qui est la même que dans le calcul vectoriel, voir (30), (55), (76).

et par conséquent, si

$$(11,12) \quad r - s + p(n + 1) = 0$$

on a

$$(11,13) \quad D_o \mathbf{v}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = 0.$$

Cette équation nous sera d'une grande utilité plus tard.

12. Ambiguïté dans la connexion projective. — Nous avons vu dans la partie algébrique que le pro-affineur unité A_β^α peut être interprété d'après le principe de KLEIN comme l'ensemble des scalaires

$$(6,3) \quad A_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha.$$

Cette interprétation est permise même au point de vue de la connexion projective. En effet on a non seulement (11,7) mais aussi, à cause de (11,9)

$$D_\xi \delta_\beta^\alpha = 0$$

ainsi que l'équation covariante (6,3) est capable de la dérivation covariante

$$D_\xi A_\beta^\alpha = D_\xi \delta_\beta^\alpha (= 0).$$

Il s'ensuit en particulier que même l'équation

$$(12,1) \quad A_o^\alpha = \delta_o^\alpha$$

admet cette opération. Mais il n'en est pas ainsi avec l'équation (6,4) car

$$D_\xi A_o^\alpha = 0, \quad D_\xi e_o^\alpha = \Lambda_{\beta\xi}^\alpha e_o^\beta = \Lambda_{o\xi}^\alpha (= cA_\xi^\alpha)$$

de manière que

$$(12,2) \quad D_\xi e_o^\alpha - D_\xi A_o^\alpha = \Lambda_{o\xi}^\alpha \neq 0.$$

Or, l'équation (6,4) n'est pas capable de la dérivation pro-vectorielle covariante. En tenant compte des résultats du § 6 on peut dire:

Toutes les équations covariantes où intervient $A_o^\alpha = e_o^\alpha$ ne sont pas capables de la dérivation pro-vectorielle covariante. (C'est toujours $\Lambda_{o\xi}^\alpha \neq 0$ qui donne naissance aux ambiguïtés). Nous en voulons donner encore un exemple. Étant donné un pro-vecteur covariant w_x on a

$$A_o^\alpha w_x = w_o = e_o^\alpha w_x.$$

Or, si l'on envisage la 0-composante comme le produit $A_o^\alpha w_x$ on obtient

$$D_\xi w_o = \frac{\partial w_o}{\partial x^\xi} - \Lambda_{o\xi}^\alpha w_x = \frac{\partial w_o}{\partial x^\xi} - c w_\xi$$

tandis que si on l'envisage comme un scalaire $m = w_\alpha e^\alpha = w_o$ on a

$$D_{\xi}m = \frac{\partial m}{\partial x^{\xi}},$$

de sorte que l'équation $w_o = m$, qui est une équation covariante, n'est pas capable de la dérivation pro-vectorielle covariante

$$D_{\xi}w_o - D_{\xi}m = -cw_{\xi} \neq 0.$$

Or en tenant strictement au principe de KLEIN quant à la classification des grandeurs, nous ne pouvons pas nier l'ambiguïté qui se présente dans la notion de la connexion pro-vectorielle (4). Mais d'autre part on peut l'éviter par une convention purement formaliste à savoir: l'application de l'opérateur D_{ξ} dépend des indices de la co-ou contrevariance. Ainsi p. ex. $D_{\xi}w_o$ signifiera pour nous toujours la dérivée

$$A_o^{\alpha} D_{\xi}w_{\alpha} = \frac{\partial m}{\partial x^{\xi}} - \Lambda_{o\xi}^{\alpha} w_{\alpha}$$

tandis que

$$D_{\xi}m = D_{\xi}e^{\alpha} w_{\alpha} = \frac{\partial m}{\partial x^{\xi}} \quad (2).$$

Même en adoptant cette convention, on doit être très prudent quant à l'application du symbole D_{μ} , car il y a des cas où l'on ne voit pas aussitôt l'influence de l'équation covariante $A_o^{\nu} = e^{\nu}$ qui est la cause de l'ambiguïté, dont nous venons de parler. En voici deux exemples:

a) On a, à cause de (7,3)b et (7,8):

$$A_o^{\nu} = e^{\nu}_{\beta} e_o^{\beta} = e^{\nu}_o e_o^o.$$

L'équation covariante

$$A_o^{\nu} = e^{\nu}_o e_o^o$$

n'est pas capable de la dérivation covariante

$$D_{\mu}A_o^{\nu} = 0 \neq D_{\mu}e^{\nu}_o e_o^o = \left(A_{\mu}^{\nu} - e^{\nu}_{\mu} e_o^o \right) c.$$

(4) Dans les travaux qui me sont connus on tient toujours à ce principe. C'est ainsi — pour en citer quelques exemples — que MM. SCHOUTEN et GOLAB. parlent dans (54)_a du scalaire w_o (page 200: « Jedem kovarianten Punkt (Hyperebene) w_{α} ist in eindeutiger Weise ein Skalar mit der Bestimmungszahl w_o zugeordnet ») ou bien M. VEBLEN introduit dans (72) (page 64) le vecteur projectif g_{oi} , $g_{\alpha\beta}$ étant (dans notre langage) un pro-affineur. Une chose analogue se présente à l'occasion de l'équation (11,4)a. Cfr. aussi (93).

(2) Pour l'étude plus détaillée voir (25).

b) En posant

$$B_{\lambda}^{\nu} = e^{\nu}_{\Xi} e_{\lambda}^{\Xi} \quad (\Xi = 0, \dots, m < n)$$

on a

$$B_o^{\nu} = e^{\nu}_{\Xi} e_o^{\Xi} = e^{\nu}_o e_o^o$$

et par conséquent

$$B_o^{\nu} = A_o^{\nu},$$

mais cette équation n'admet pas la dérivation covariante:

$$D_{\mu} A_o^{\nu} = 0 \neq D_{\mu} B_o^{\nu} = (A_{\mu}^{\nu} - B_{\mu}^{\nu}) c$$

Même ces ambiguïtés sont causées par $\Lambda_{o\mu}^{\nu} \neq 0$.

L'ambiguïté, dont nous venons de parler, nous empêche aussi d'introduire dans nos considérations les vecteurs covariants, mentionnés dans la remarque à la fin du par. 8.

13. **Remarque.** — On pourrait enlever cette difficulté, mentionnée plus haut, en renonçant à la connexion projective intrinsèque et en introduisant une connexion vectorielle *non intrinsèque*, invariante par rapport aux changements isohodologiques (10,3). Une telle connexion est facile à construire, si l'on tient compte de la coordonnée surnuméraire. Ses coefficients sont

$$(13,1) \quad \gamma_{jk}^i = \Phi_{jk}^i + (A_j^i x_k^o + A_k^i x_j^o) c.$$

Quoique non intrinsèque, cette connexion donne naissance aux grandeurs intrinsèques, invariantes par rapport aux changements isohodologiques (4). Nous ne voulons pas nous occuper ici de cette connexion et remarquons plutôt que si par hasard une densité quelconque était connue, cette connaissance nous permettrait de construire une connexion vectorielle *intrinsèque*.

En effet, le cas échéant, on pourrait construire une densité du poids 1, en partant de la densité connue et introduire ainsi la coordonnée surnuméraire *qui ne serait plus non intrinsèque*. Cela étant, les coefficients (13,1) nous donneraient la connexion cherchée.

Dans ce cas l'étude des invariants différentiels, invariants par rapport à (10,3) se réduit à l'étude des invariants différentiels de la connexion (13,1), de sorte que *toutes les notions nouvelles, introduites dans la première partie*

(4) Pour l'étude plus détaillée de cette connexion voir (29). Pour l'étude du rapport de la connexion projective à la connexion affine voir (87).

(c'est-à-dire « les pro-affineurs » ainsi que « les projecteurs ») *seraient superflues*. On parviendrait au but en n'employant que les affineurs.

C'est cette remarque même, d'ailleurs évidente, qui justifie notre point de départ. Car, remarquons-le expressément, pour déduire la connexion projective, nous sommes partis des notions qui ne sont pas des densités, (ce qui ne nous a pas empêché de construire même les dérivées covariantes des densités). Autrement dit, pour déduire la connexion projective, qui nous mènera aux notions indépendantes de (10,3), nous n'avons pas eu besoin des densités.

Supposons maintenant qu'on ait construit une connexion projective en partant des densités. Or, ou bien on ne connaît *pratiquement* aucune densité et par conséquent la notion déduite de la dérivée covariante d'une densité ne nous sert *pratiquement* à rien, ou bien on connaît au moins *une* densité et le cas échéant l'étude des invariants différentiels, invariants par rapport à (10,3) n'exige pas l'introduction des pro-affineurs (et des projecteurs), car on parvient au but moyennant la connexion (13,1), où maintenant x_i^0 serait à envisager comme fixée (par le procédé mentionné plus haut).

Malgré cette objection (qui n'est pour ainsi dire qu'une objection personnelle, laquelle ne doit que justifier notre point de départ et n'est aucunement dirigée contre les théories qui se sont servies des densités pour la construction de la connexion projective) (1) qui probablement se présente à chaque auteur d'un traité sur cette matière, il y a beaucoup de travaux employant les densités pour la déduction de la connexion projective. La raison en est, à mon avis, l'équation (11,13) comme nous aurons encore l'occasion de la constater (§ 15).

Encore une remarque: Nous avons supposé jusqu'ici que les changements isohodologiques (10,3) soient les plus généraux possibles, en particulier $Q_i \neq 0$.

Mais si l'on ne fait entrer en compte que les transformations restreintes

$$(13,2) \quad * \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + A_j^i P_k \quad (2),$$

l'étude des invariants différentiels, invariants par rapport à (13,2) s'effectue moyennant la connexion

$$(13,3) \quad \Gamma_{jk}^i - \frac{2}{n-1} A_j^i S_{lk}^l$$

(1) Voir (24), (54)_{a, b}, (70).

(2) Voir p. ex. (6), (7), (21), (57).

invariante par rapport à (13,2), de sorte que dans ce cas spécial on n'aurait pas besoin d'avoir recours aux notions des pro-affineurs et des projecteurs.

14. **Courbure de la connexion projective.** — Les conditions d'intégrabilité de l'équation

$$(14,1) \quad \frac{\partial v^x}{\partial x^j} = -\Lambda_{\beta j}^x v^\beta$$

sont (pour v^x arbitraire)

$$(14,2) \quad P_{\xi\eta\beta}^z = 0.$$

Ici

$$P_{\xi\eta\beta}^z = \frac{\partial}{\partial x^\eta} \Lambda_{\beta\xi}^z - \frac{\partial}{\partial x^\xi} \Lambda_{\beta\eta}^z - \Lambda_{\gamma\xi}^z \Lambda_{\beta\eta}^\gamma + \Lambda_{\gamma\eta}^z \Lambda_{\beta\xi}^\gamma = -P_{\eta\xi\beta}^z$$

est le *pro-affineur de courbure* de la connexion projective (11,4). Si (14,2) sont satisfaites, nous dirons que \mathbb{P}_n est « l'espace projectif plan » (1). Dans ce qui suit nous supposerons, sauf l'avis contraire, que (14,2) ne soient pas satisfaites. Le pro-affineur $P_{\xi\eta\beta}^z$ intervient dans les « identités de Ricci » pour n'importe quels pro-vecteurs v^x, w_β

$$(14,3) \quad \begin{aligned} \text{a) } 2D_{[\xi} D_{\eta]} v^x &= -P_{\xi\eta\beta}^z v^\beta + 2T_{\xi\eta}^\beta D_\beta v^x \\ \text{b) } 2D_{[\xi} D_{\eta]} w_\beta &= P_{\xi\eta\beta}^z w_x + 2T_{\xi\eta}^z D_x w_\beta. \end{aligned}$$

Puisque pour $v^x = e^x$

$$(14,4) \text{ a) } \quad D_\eta e^x = cA_\eta^z \quad \text{de sorte que} \quad D_\xi D_\eta e^x = 0$$

on déduit de (14,3) a) en y substituant $v^x = e^x$

$$(14,4) \text{ b) } \quad P_{\xi\eta 0}^z = 2cT_{\xi\eta}^z.$$

Puisque d'autre part

$$D_\xi D_0 v^x = \frac{\partial}{\partial x^\xi} D_0 v^x - \Lambda_{0\xi}^\beta D_\beta v^x + \Lambda_{\beta\xi}^z D_0 v^\beta = 0 \quad (2),$$

et d'après (11,13)

$$D_0 D_\eta v^x = 0,$$

(1) Voir (71), (80), (82).

(2) Quoique $D_0 v^x = cv^x$ soit une équation covariante, elle n'est pas capable de la dérivation covariante. En effet on a

$$D_\xi D_0 v^x = A_0^\beta D_\xi D_\beta v^x \neq D_\xi \left(\underset{0}{e}^\beta D_\beta v^x \right) = D_\xi cv^x.$$

on en tire en raison de (11,5) b) et (14,3) a)

$$(14,5) \quad - P_{\delta\xi\beta}^z = P_{\xi\delta\beta}^z = 0.$$

Il n'y a donc d'après (14,4), (14,5) et (11,5) que les composantes $P_{jk\beta}^z$ qui soient en général différentes de zéro et par conséquent

$$(14,6) \quad P_{\xi\eta\beta}^z = \delta_{\xi}^i \delta_{\eta}^k P_{jk\beta}^z.$$

En exprimant les Λ en fonctions de Φ , on trouve à cause de (10,10) et (10,11)

$$(14,7) \quad P_{jkl}^i = \rho_{jkl}^i - \frac{2}{n-1} A_{[j\rho_{kl]l}^i}^{(1)}.$$

Tandis que T_{jk}^i est un affineur, P_{jkl}^i ne l'est pas en général. En effet les composantes P_{jkl}^i se transforment à cause de (14,4) d'après

$$(14,8) \quad \bar{P}_{jkl}^i = \begin{matrix} i & a & b & c \\ V & W & W & W \\ d & j & k & l \end{matrix} P_{abc}^d + 2 \begin{matrix} i & a & b & c \\ V & W & W & W \\ d & j & k & l \end{matrix} T_{ab}^d \Delta_c,$$

d'où le théorème suivant: *Si la connexion Γ_{jk}^i est (semi)-symétrique et seulement dans ce cas P_{jkl}^i est un affineur, appelé « l'affineur de M. Weyl » (2).*

Mais en tout cas P_{jkl}^i donne naissance à un affineur, à savoir P_{ikl}^i qui est identiquement nul

$$P_{ikl}^i = \rho_{ikl}^i - \rho_{ikl}^i = 0 \quad (3).$$

Remarquons que l'on a aussi, à cause de (10,5) et (11,4)

$$(14,9) \quad P_{\xi\eta\alpha}^z = 0 \quad (4).$$

15. Différentielle pro-vectorielle covariante. — D_{ξ} est un pro-vecteur covariant intrinsèque symbolique, tandis que dx^{ξ} est un vecteur projectif contrevariant non intrinsèque. Il s'ensuit que

$$(15,1) \quad \mathfrak{D} = dx^{\xi} D_{\xi}$$

est un symbole scalaire non intrinsèque. Nous sommes ainsi parvenus à la notion de la « différentielle pro-vectorielle covariante » laquelle, en général, n'est pas intrinsèque. En effet, si l'on désigne par Θ ce que devient \mathfrak{D} pen-

(1) Voir (29).

(2) Voir (78).

(3) Voir (12), (24), (50), (51), (54)_{a, b}.

(4) P_{pqs}^0 correspond à Π_{spq} (à un facteur constant près) dans (17) et à r_{pqs} (à un facteur constant près) dans (75). Cfr. aussi (9).

dant une transformation du groupe F (voir (3,3)) on obtient

$$(15,2) a) \quad \Theta = \mathfrak{D} + (df)D_0.$$

Or si $\mathfrak{V}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ est une densité pro-vectorielle du poids $-p$ qui satisfait à (11,12) on a à cause de (11,13)

$$(15,2) b) \quad \Theta \mathfrak{V}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \mathfrak{D} \mathfrak{V}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}.$$

La connexion projective donne naissance à la différentielle pro-vectorielle covariante qui en général n'est pas intrinsèque. Fait exception le cas de la différentielle pro-vectorielle covariante de n'importe quelle densité pro-vectorielle du poids $-p$, qui est r -fois contrevariante et s -fois covariante, (les nombres p, r, s étant liés par (11,12)), dont la différentielle mentionnée est intrinsèque.

Nous pouvons maintenant facilement comprendre l'avantage qui se présente dans le cas de la connexion projective, construite moyennant des densités. En partant de ces notions on envisage avant tout les cas spéciaux

$$r = 1, s = 0, p = -\frac{1}{n+1}$$

$$r = 0, s = 1, p = \frac{1}{n+1},$$

c'est-à-dire les densités pro-vectorielles v^α, w_α du poids $+\frac{1}{n+1}$ resp. $-\frac{1}{n+1}$ et en construisant la connexion projective on constate l'existence de la dérivée pro-vectorielle covariante *ainsi que de la différentielle pro-vectorielle covariante* de ces grandeurs ⁽⁴⁾.

Quoique le symbole \mathfrak{D} ne soit pas intrinsèque, il donne naissance à un autre symbole intrinsèque, à savoir $\mathfrak{D}_{[1\ 2]}$.

$$\mathfrak{D}_{[1\ 2]} \mathfrak{D} = dx^\alpha D_\alpha dx^\beta D_\beta = \mathfrak{D}_{[1\ 2]} dx^\alpha D_\alpha + dx^\alpha dx^\beta D_\alpha D_\beta = dx^\alpha dx^\beta T_{\alpha\beta}^\gamma D_\gamma + dx^\alpha dx^\beta D_\alpha D_\beta$$

et par conséquent, en raison de (14,3) et (14,6)

$$(15,3) \quad 2\mathfrak{D}_{[1\ 2]} \mathfrak{D} v^\alpha = -dx^j dx^k P_{jk}^\alpha v^\beta, \quad 2\mathfrak{D}_{[1\ 2]} \mathfrak{D} w_\beta = dx^j dx^k P_{kj}^\alpha w_\alpha.$$

L'opérateur $\mathfrak{D}_{[1\ 2]}$ est toujours intrinsèque. Nous verrons plus tard que le symbole non intrinsèque nous permet d'introduire d'autres notions géomé-

(4) Voir p. ex. (24), (54)_{a, b}.

triques intrinsèques. Quant au vecteur ϑv^i , il n'est pas en général intrinsèque car, à cause de (15,2) et (11,11)

$$(15,4) \quad \Theta v^i = \vartheta v^i + cv^i df.$$

Fait exception le vecteur ϑe^i provenant du pro-vecteur $e^z = \delta_o^z$. En effet on a non seulement $e^z = E^z$, mais aussi en raison de (15,4)

$$(15,5) \quad \Theta e^i = \vartheta e^i + dfce^i = cdx^i.$$

Cette équation covariante nous permet la suivante interprétation géométrique intuitive: Si l'on se déplace du point P de \mathbb{P}_n au point infiniment voisin Q , les composantes $e^z(P)$ deviennent $e^z(Q)$

$$(15,6) \quad e^z(Q) = e^z(P) + (\vartheta e^z)_P$$

et par conséquent

$$(15,7) \quad e^i(Q) = e^i(P) + (\vartheta e^i)_P = e^i(P) + c(dx^i)_P.$$

16. Connexion projective et projecteurs. — Jusqu'ici nous n'avons parlé que des pro-affineurs, en excluant l'application de l'opérateur D_ξ aux projecteurs. Mais rien ne nous empêche de définir par (11,6) la dérivée projectorielle covariante du projecteur qui à son tour est défini par le rapport des composantes $v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$. Mais la difficulté consiste dans le fait que le même projecteur est défini aussi par le rapport des composantes $\lambda v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ ⁽¹⁾ et que les composantes $D_\xi v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ et $D_\xi \lambda v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ ne sont pas en général proportionnelles. Or, si l'on doit étudier un champ $v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ sous ce point de vue, on doit ou bien tenir compte des données de la question pour fixer le facteur de proportionnalité (comme on le fait dans la géométrie projective différentielle) ⁽²⁾ ou bien on doit se résigner à étudier les propriétés invariantes par rapport au changement du facteur de proportionnalité. Telles sont par exemple les propriétés déduites de $D_{[\xi} D_{\eta]} v^z$. En effet, on a

$$D_{[\xi} D_{\eta]} \lambda = T_{\xi \eta}^z D_z \lambda$$

(1) Puisqu'il ne s'agit que du rapport, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que λ ne soit pas une densité (scalaire). C'est aussi par cette raison que nous n'introduisons pas la dérivée covariante des densités ponctuelles, car même la définition d'une telle densité n'a pas lieu dans ces considérations.

(2) Voir (23).

et par conséquent, en raison de (14,3)

$$(16,1) \quad D_{[\xi}D_{\eta]}\lambda v^z = \lambda D_{[\xi}D_{\eta]}v^z, \quad D_{[\xi}D_{\eta]}\lambda w_\alpha = \lambda D_{[\xi}D_{\eta]}w_\alpha.$$

En résumé: Φ étant un projecteur (intrinsèque) la dérivée covariante $D_{[\xi}\Phi$ dépend du facteur de proportionnalité, tandis que le projecteur $D_{[\xi}D_{\eta]}\Phi$ en est indépendant.

Quant à la différentielle \mathfrak{D} , elle ne présente pas de difficulté. En effet si l'on change en même temps le facteur de proportionnalité et « le facteur » (ce dernier changement étant défini par le groupe F) on obtient

$$(16,2) \quad \begin{aligned} \Theta \lambda \mathbf{v}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \mathfrak{D} \lambda \mathbf{v}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + \lambda \mathbf{v}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \text{cdf}(r - s + p(n + 1)) = \\ &= \lambda \mathfrak{D} \mathbf{v}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + \mathbf{v}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} (d \log \lambda + \text{cdf}(r - s + p(n + 1)))\lambda, \end{aligned}$$

d'où le théorème suivant: Φ étant n'importe quel projecteur, $\lambda\Phi$ définit le même projecteur, ($\lambda \neq 0$). Si l'on effectue une transformation du groupe F en choisissant en même temps le facteur de proportionnalité λ d'après

$$(16,3) \quad d \log \lambda + \text{cdf}(r - s + p(n + 1)) = 0$$

on a

$$(16,4) \quad \Theta \lambda \Phi = \lambda \mathfrak{D} \Phi \quad (4).$$

En résumant, on peut dire (moins précisément): Tandis que la dérivée covariante de n'importe quel pro-affineur est intrinsèque, sa différentielle n'existe pas en général (c'est-à-dire n'est pas intrinsèque). Contrairement, la dérivée covariante d'un projecteur n'existe pas (c'est-à-dire n'est pas indépendante du facteur de proportionnalité) tandis que sa différentielle covariante n'en dépend pas (au sens mentionné plus haut).

17. Coordonnées locales. — Dans ce paragraphe nous étudierons quelques systèmes privilégiés des coordonnées, en tenant compte des résultats déjà déduits. Retournons à cet effet aux considérations du n.º 7 et cherchons un tel système de coordonnées, dans le quel *au point* P

$$\bar{e}_j^o(P) = 0.$$

Soit C_{jk}^i un système de constantes

$$C_{jk}^i = C_{(jk)}^i$$

(4) C'est pour cette raison que nous avons appelé les transformations du groupe F « le changement du facteur » en empruntant ce nom à (80), (82).

et

$$(17,1) \quad \bar{x}^i = x^i + \frac{1}{2} C_{jk}^i x^j x^k$$

une transformation du groupe V . Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que P soit le point $x^i = \bar{x}^i = 0$, de manière qu'en P

$$(17,2) \quad \bar{V}_j^i = W_j^i = \delta_j^i, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{V}_j^i = C_{kj}^i.$$

D'autre part, si l'on désigne par

$$(17,3) a) \quad \Delta_k = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}$$

la dérivée du jacobien, on a en P

$$(17,3) b) \quad \Delta_k = \bar{W}_i^j \frac{\partial}{\partial x^k} \bar{V}_j^i = C_{ki}^i.$$

Cela posé, remarquons que e_j^o se transforme d'après

$$\bar{e}_j^o = e_j^o - \frac{n}{c} e_j^k \Delta_k,$$

de sorte que

$$\bar{e}_j^o e_l^j = e_l^j e_j^o - \frac{n}{c} \Delta_l.$$

Or si l'on choisit les constantes d'après

$$C_{ki}^i = \frac{c}{n} e^o(P) e_k^i(P)$$

on obtient en P

$$\bar{e}_j^o(P) e_l^j(P) = 0,$$

d'où il suit, les vecteurs e_l^j étant linéairement indépendants,

$$\bar{e}_j^o(P) = 0.$$

On peut toujours choisir un tel système de coordonnées dans lequel les 0-composantes des pro-vecteurs linéairement indépendants sont nulles au point P général.

Un autre système privilégié se présente surtout dans \mathbb{P}_n , sans torsion

$$(17,4) \quad T_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0.$$

Si cette équation est satisfaite, nous pouvons trouver un tel système pour lequel

$$\Lambda_{jk}^{\alpha}(P) = 0.$$

Imaginons à cet effet l'ensemble de constantes $\Omega_{jk}^i, \Omega_{jkl}^i$, telles que

$$\Omega_{jk}^i = \Omega_{(jk)}^i, \quad \Omega_{jkl}^i = \Omega_{(jkl)}^i$$

et construisons la transformation suivante du groupe V

$$(17,5) \quad \bar{x}^i = x^i + \frac{1}{2} \Omega_{jk}^i x^j x^k + \frac{1}{3!} \Omega_{jkl}^i x^j x^k x^l.$$

Un calcul facile nous montre qu'en P

$$(17,6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} V &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} W = \delta_j^i \\ \frac{\partial}{\partial x^k} V &= - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} W = \Omega_{jk}^i, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} V = \Omega_{jkl}^i. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$(17,7) \quad \Delta_k = W \frac{\partial}{\partial x^k} V, \quad \frac{\partial \Delta_k}{\partial x^l} = \frac{m}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} V \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^m} W + W \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} V,$$

de sorte qu'en P

$$\Delta_k = \Omega_{ik}^i, \quad \frac{\partial \Delta_k}{\partial x^l} = \Omega_{ikl}^i - \Omega_{jk}^i \Omega_{li}^j.$$

Or si l'on pose

$$\Omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^i(P)$$

ce qui est toujours possible à cause de (17,4) on a en P , à cause de (11,4) b) et (10,5)

$$(17,8) \quad \Delta_k = 0, \quad \frac{\partial \Delta_k}{\partial x^l} = - \Lambda_{jk}^i(P) \Lambda_{li}^j(P) + \Omega_{ikl}^i$$

et par conséquent, à cause de (11,3), (11,4) et (17,6)

$$(17,9) \quad \bar{\Lambda}_{jk}^i(P) = \Lambda_{jk}^i(P) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} W = 0$$

$$\bar{\Lambda}_{jk}^o(P) = \Lambda_{jk}^o(P) + [\Omega_{ikl}^i - \Lambda_{jk}^i(P) \Lambda_{li}^j(P)] \frac{n}{c}.$$

Nous choisirons Ω_{jkl}^i jusqu'ici arbitraire de manière que l'on ait $\bar{\Lambda}_{jk}^o(P) = 0$. Pour cela il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$-\Omega_{ikt}^i = \frac{c}{n} \Lambda_{kl}^o(P) - \Lambda_{jk}^i(P) \Lambda_{it}^i(P).$$

Cette équation est satisfaite par

$$(17,10) \quad \Omega_{jkl}^i = \frac{3}{n+2} \left(\Lambda_{m(k}^a \delta_j^i \Lambda_{l)a}^m - \frac{c}{n} \Lambda_{(jk}^o \delta_{l)}^i \right)_P.$$

En substituant cette valeur dans (17,8), on obtient en P

$$(17,11) \quad \frac{\partial \Delta_k}{\partial x^l} = -\frac{c}{n} \Lambda_{kl}^o,$$

d'où il suit dans le voisinage suffisamment petit du point P

$$(17,12) \quad \begin{aligned} \log \Delta &= (\log \Delta)_P + x^k \Delta_k(P) + \frac{1}{2!} x^k x^l \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Delta_k \right)_P + \dots \\ &= (\log \Delta)_P - \frac{c}{n} x^k x^l \Lambda_{kl}^o(P) + \dots \end{aligned}$$

Il s'ensuit, en raison de (3,2):

$$\bar{x}^o = x^o + \frac{1}{2!} \Lambda_{kl}^o(P) x^k x^l + \dots$$

Ces résultats peuvent être condensés dans le théorème suivant:

Si (17,4) est satisfaite (c'est-à-dire si la connexion Γ_{jk}^i est (semi)-symétrique) le système (\bar{x}^z) des coordonnées, donné par le développement

$$(17,13) \quad \bar{x}^z = x^z + \frac{1}{2!} \Lambda_{jk}^z(P) x^j x^k + \frac{1}{3!} \frac{3\delta_i^z}{n+2} \left(\Lambda_{m(j}^a \delta_k^i \Lambda_{l)a}^m - \frac{c}{n} \Lambda_{(jk}^o \delta_{l)}^i \right)_P x^j x^k x^l + \dots$$

dans le voisinage suffisamment petit du point général P est privilégié dans ce sens que

$$(17,14) \quad \bar{\Lambda}_{jk}^z(P) = 0.$$

REMARQUE. — La transformation (17,13) n'altère pas, à cause de (17,8) la 0-composante d'un pro-vecteur contrevariant. Or si le système (x^z) qui figure dans (17,13) est tel que

$$e_j^o(P) = 0$$

on obtient l'équation analogue dans le système (\bar{x}^z) , défini par (17,13)

$$\bar{e}_j^z(P) = 0.$$

Nous aurons bientôt l'occasion d'employer ces résultats (4).

18. Déplacement projectif. — Nous avons vu que le symbole \mathfrak{D} n'est pas intrinsèque et par conséquent, si Φ est n'importe quel pro-affineur (intrinsèque), l'équation

$$(18,1) \quad \mathfrak{D}\Phi = 0$$

n'est pas intrinsèque à son tour. Si au contraire Φ est un projecteur (intrinsèque) l'équation (18,1) (et (16,3)) a pour conséquence

$$(18,2) \quad \Theta\lambda\Phi = 0.$$

Mais en adoptant l'interprétation projective des grandeurs, nous excluons naturellement les grandeurs définies par le rapport $0 : 0 : 0 : \dots : 0$.

Or, dans cette interprétation, l'équation (18,1) resp. (18,2) n'a pas lieu. C'est par ces raisons que nous sommes forcés d'introduire, au lieu de (18,1) resp. (18,2), l'équation

$$\mathfrak{D}\Phi = a\Phi$$

où $a = a(x^1, \dots, x^n)$ est n'importe quelle fonction scalaire de position différente de zéro. On peut se persuader facilement que cette équation est intrinsèque. Cela posé, nous introduirons la notion « du déplacement projectif » par la définition suivante:

N'importe quel pro-vecteur $v^z \neq e^z$ (ou bien n'importe quel vecteur w_j) est déplacé projectivement à lui-même si

$$(18,3) \quad \mathfrak{D}v^i = av^i, \quad \mathfrak{D}w_j = aw_j$$

a étant n'importe quelle fonction intrinsèque de position, $\neq 0$.

N'importe quel contre-point v^z (co-point w_α) est déplacé projectivement à lui-même si

$$(18,4) \quad \mathfrak{D}v^z = av^z, \quad \mathfrak{D}w_\alpha = aw_\alpha.$$

a étant n'importe quelle fonction intrinsèque de position, $\neq 0$.

La définition du déplacement projectif est intrinsèque et de plus, dans le second cas, indépendante du facteur de proportionnalité.

On peut introduire analogiquement le déplacement projectif des grandeurs à plusieurs indices.

(4) Pour une autre méthode concernant ces coordonnées voir (13), (18), (61), (64), (74), (75), (80), (82).

Le déplacement projectif d'un pro-vecteur contrevariant (d'un contre-point) peut être conçu aussi de cette manière: Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que les pro-vecteurs e^z , v^z , $v^z = v^z + \vartheta v^z$ soient linéairement dépendants. Cette condition est, comme on sait

$$e^{[z} v^{\beta} v^{\gamma]} = e^{[z} v^{\beta} \vartheta v^{\gamma]} = 0.$$

En tenant compte de ce que $e^z = \delta^z$ (resp. $e^z \sim \delta^z$) on peut l'écrire

$$v^{[i} \vartheta v^{j]} = 0$$

et cette équation est équivalente à (18,3) a: Si v^z est déplacé projectivement à lui-même, les pro-vecteurs (où bien les contre-points)

$$e^z, v^z, v^z + \vartheta v^z$$

sont linéairement dépendants.

Interprétons géométriquement le déplacement projectif en restreignant en même temps la généralité du problème par la supposition que (17,4) soit satisfaite.

Les résultats du n.º 17 nous permettent de supposer que l'on ait choisi un tel système privilégié des coordonnées dans lequel

$$(18,5) \quad v^o(P) = 0, \quad \Lambda_{ij}^z(P) = 0.$$

Cela étant, désignons par $v^z(P)$ les coordonnées locales de la grandeur v^z dans l'espace tangent du point P ⁽¹⁾ et par

$$(18,6) \quad v^z(Q) = v^z(P) + (dv^z)_P$$

les coordonnées locales de v^z dans l'espace tangent du point Q , infiniment voisin à P . En tenant compte de (18,5) on trouve

$$(18,7) \quad (\vartheta v^z)_P \overline{=} (dv^z + \delta_k^z dx^o v^k c)_P.$$

Or si le pro-vecteur v^z est déplacé projectivement à lui-même on trouve en raison de (18,7) et (18,3)

$$(dv^z)_P \overline{=} v^z(P)(a - dx^o c)_P$$

de sorte que

$$(18,8) \text{ a) } \quad v^z(Q) = v^z(P) + (dv^z)_P \overline{=} (a - dx^o c + 1)_P v^z(P).$$

(1) Cet espace est ou bien E_n , si nous avons affaire au pro-vecteur v^z , ou bien P_n si nous avons affaire au contre-point v^z .

Si au contraire nous avons affaire au contre-point v^x , déplacé projectivement à lui-même, nous obtenons par la même méthode

$$v^x(Q) \overline{=} \delta_k^x(a - dx^0c + 1)_P v^k(P)$$

ou bien à cause de $v^x(P) = 0$

$$(18,8) \text{ b) } \quad v^x(Q) \overline{=} (a - dx^0c + 1)_P v^x(P).$$

En tenant compte des équations (18,8), nous pouvons dire :

Si l'on déplace un $\left\{ \begin{array}{l} \text{pro-vecteur} \\ \text{contre-point} \end{array} \right. v^x$ projectivement à lui-même du point P au point infiniment voisin Q , on peut choisir un tel système des coordonnées que les coordonnées locales du $\left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur } v^x(Q) \\ \text{contre-point } v^x(Q) \end{array} \right.$ dans l'espace tangent de Q soient $\left\{ \begin{array}{l} \text{proportionnelles à } v^x(P) \\ \text{les mêmes que } v^x(Q) \text{ (}^1\text{)}. \end{array} \right.$

Il nous reste maintenant à interpréter le déplacement projectif d'un pro-vecteur covariant (d'un co-point) w_x sous la même supposition que (17,4) soit satisfaite. La méthode que nous venons d'employer nous donne pour le vecteur w_j

$$(18,9) \text{ a) } \quad w_j(Q) \overline{=} (a + cdx^0 + 1)_P w_j(P),$$

et pour le co-point w_x

$$(18,9) \text{ b) } \quad w_x(Q) \overline{=} (a + cdx^0 + 1)_P w_x(P) + \delta_x^0 c(w_j dx^j)_P$$

d'où il suit :

a) Dans le système privilégié, employé plus haut, les coordonnées locales $w_j(Q)$ du vecteur covariant, déplacé projectivement à lui-même du point P au point Q (infiniment voisin à P) sont proportionnelles aux coordonnées locales $w_j(P)$.

b) En déplaçant projectivement à lui-même un co-point w_x incident avec le point P lui-même ($w_0(P) = 0$), du point P au point infiniment voisin Q , situé dans le même co-point w_x , les coordonnées locales $w_x(Q)$ dans l'espace tangent du point Q sont — dans le système privilégié — les mêmes que les coordonnées locales $w_x(P)$ dans l'espace tangent du point P (²).

On dit, dans la géométrie projective élémentaire, que deux grandeurs sont projectives, si les coordonnées de la première par rapport à un repère

(¹) Nous entendons ici par « les coordonnées » du contre-point le rapport $v^0 : v^1 : v^2 : \dots : v^n$, comme dans la géométrie projective élémentaire.

(²) De même ici nous entendons par « les coordonnées » le rapport $w_0 : \dots : w_n$.

fixe sont les mêmes (= proportionnelles) que celles de la deuxième par rapport à un autre repère fixe. La même chose se présente ici: Le contre-point v^ν a, dans le repère appartenant au point P , les coordonnées (locales) $v^\nu(P)$ et dans le repère correspondant au point Q les coordonnées $v^\nu(Q) = \lambda v^\nu(P)$, le facteur de proportionnalité étant $\neq 0$. Le même est valable (sous certaines conditions restrictives) pour le co-point w_λ , déplacé projectivement à lui-même. C'est ce fait qui justifie le nom du « déplacement projectif » que nous avons choisi pour le déplacement étudié, en l'adoptant aussi dans le cas que $T_{\lambda\mu}^\nu \neq 0$.

Le parallélisme (généralisé) d'après M. LEVI-CIVITA (4) n'a pas donc lieu dans l'étude des projecteurs. Nous lui avons substitué la notion du déplacement projectif des projecteurs. Quant aux pro-affineurs, la définition (18,3) donne naissance au parallélisme (généralisé) d'après M. LEVI-CIVITA qui résulte ici aussi comme une notion intrinsèque. Mais on ne peut pas en déduire la notion de l'équipollence, correspondant au cas $\alpha = 0$ dans (18,3), car cette notion n'est pas intrinsèque. Dans ce qui suit, nous parlerons toujours du « déplacement projectif » en tenant compte de ses deux interprétations possibles (5).

19. **Interprétation de $T_{\lambda\mu}^\nu$.** — Nous avons interprété le déplacement projectif en supposant que (17,4) soit satisfaite. Il nous reste ainsi à interpréter $T_{\lambda\mu}^\nu$ dans le cas contraire. Imaginons à cet effet le point P représenté par le contre-point $e^\nu \circ \delta_\nu^o$ et construisons les contre-points

$$(19,1) \quad e^\nu = e^\nu + dx^\nu, \quad e^\nu = e^\nu + dx^\nu \quad (3)$$

tels que $e^{[\nu} e^{\lambda} e^{\mu]} \neq 0$. Cela étant, déplaçons projectivement à lui-même le contre-point $e^\nu(e^\nu)$ le long de $dx^\nu(dx^\nu)$

$$(19,2) \quad \begin{aligned} e^\mu D_{\mu 2} e^\nu &= d e^\nu + \Lambda_{\lambda\mu}^\nu e^\lambda e^\mu = \alpha e^\nu \\ e^\mu D_{\mu 1} e^\nu &= d e^\nu + \Lambda_{\lambda\mu}^\nu e^\lambda e^\mu = \alpha e^\nu. \end{aligned}$$

(4) Voir (39), (40).

(5) Pour une autre méthode de déplacement dans P_n voir (7), (9), (12), (27), (34), (51), (71), (72).

(3) On a $dx^0 = 0, dx^0 = 0$.

Le contre-point résultant est donc d'après ces équations

$$(19,3) \quad \begin{aligned} u^{\nu} &= e^{\nu} + e^{\nu} + (e^{\nu} + d e^{\nu}) = e^{\nu} + e^{\nu} + e^{\nu} + a e^{\nu} - \Lambda_{\lambda\mu}^{\nu} e^{\lambda} e^{\mu} \\ &\quad \substack{1 \\ 0} \quad \substack{2 \\ 1} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{1 \\ 2} \\ u^{\nu} &= e^{\nu} + e^{\nu} + (e^{\nu} + d e^{\nu}) = e^{\nu} + e^{\nu} + e^{\nu} + a e^{\nu} - \Lambda_{\lambda\mu}^{\nu} e^{\lambda} e^{\mu}. \\ &\quad \substack{2 \\ 0} \quad \substack{1 \\ 1} \quad \substack{2 \\ 1} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{0 \\ 1} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{2 \\ 1} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{2 \\ 1} \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$u^{\nu} - u^{\nu} = a e^{\nu} - a e^{\nu} - 2T_{\lambda\mu}^{\nu} e^{\lambda} e^{\mu}$$

$$\substack{1 \\ 2} \quad \substack{2 \\ 1} \quad \substack{1 \\ 2} \quad \substack{1 \\ 2}$$

et cette équation interprète $T_{\lambda\mu}^{\nu}$.

20. **Courbes géodésiques.** — Supposons donnée une courbe C aux équations

$$(20,1) \quad x^i = x^i(t), \quad x^0 = 0$$

et construisons les trois contre-points suivants

$$(20,2) \quad \begin{aligned} e^{\nu} &\propto \delta_o^{\nu} \\ e^{\nu} &= \frac{\partial}{\partial t} e_o^{\nu} \\ e^{\nu} &= \frac{\partial}{\partial t} e_1^{\nu}, \end{aligned}$$

dont seulement le premier est un contre-point intrinsèque. Mais en tout cas, comme on peut s'en persuader facilement, le projecteur

$$e^{\nu\lambda\mu} = e_o^{\nu} e_1^{\lambda} e_2^{\mu}$$

est intrinsèque. Cela posé, nous définissons :

Une courbe C est dite géodésique, si les contre-points (20,2) sont situés sur sa tangente $e_o^{\nu} e^{\lambda}$. La condition nécessaire et suffisante pour que C soit géodésique est donc $e^{\nu\lambda\mu} = 0$, c'est-à-dire une équation intrinsèque qui à son tour est équivalente à

$$(20,3) \quad e_1^{\lambda} e_2^{\mu} = \frac{\partial}{\partial t} e_o^{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} e_1^{\mu} = 0$$

où bien (λ étant une fonction arbitraire)

$$(20,4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{dx^i}{dt} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Lambda_{\lambda\mu}^i \frac{dx^{\lambda}}{dt} \frac{dx^{\mu}}{dt} = \lambda \frac{dx^i}{dt}.$$

D'autre part, en tenant compte de (10,4) et (11,4) nous pouvons écrire pour (20,4)

$$(20,5) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \left\{ \lambda + \frac{2}{n+1} S_{kl}^i \frac{dx^k}{dt} - 2c \frac{dx^0}{dt} \right\} = \sigma \frac{dx^i}{dt}$$

d'où il suit que *les espaces aux connexions*

$$\Lambda_{\beta\gamma}^z \text{ resp. } \Gamma_{jk}^i \text{ resp. } \Gamma_{(jk)}^i$$

ont les mêmes courbes géodésiques.

REMARQUE. — L'équation (20,4) nous fait voir que la connexion aux coefficients

$$' \Lambda_{z\beta}^o = \Lambda_{z\beta}^o, \quad ' \Lambda_{z\beta}^i = \Lambda_{z\beta}^i + A_z^i \pi_\beta + A_\beta^i \omega_z$$

nous mène aux courbes géodésiques, définies par (20,4). D'autre part ces coefficients ne définissent une connexion que si indépendamment du choix des variables

$$\pi_o = \omega_o = 0$$

c'est-à-dire

$$(20,6) \quad ' \Lambda_{z\beta}^o = \Lambda_{z\beta}^o, \quad ' \Lambda_{o\beta}^z = ' \Lambda_{\beta o}^z = \Lambda_{o\beta}^z = \Lambda_{\beta o}^z, \quad ' \Lambda_{jk}^i = \Lambda_{jk}^i + A_j^i \pi_k + A_k^i \omega_j.$$

En effet ce n'est que dans ce cas que même les $' \Lambda$ peuvent se transformer comme Λ d'après (11,1). Mais d'autre part si l'on élimine π_k et ω_k on trouve à cause de (10,5)

$$\begin{aligned} \Lambda_{jk}^i + \frac{1}{n^2 - 1} \{ A_j^i (\Lambda_{kl}^l - \Lambda_{lk}^l n) + A_k^i (\Lambda_{lj}^l - \Lambda_{jl}^l n) \} &= \Lambda_{jk}^i = ' \Lambda_{jk}^i + \\ &+ \frac{1}{n^2 - 1} \{ A_j^i (\Lambda_{kl}^l - n' \Lambda_{lk}^l) + A_k^i (\Lambda_{lj}^l - n' \Lambda_{jl}^l) \}. \end{aligned}$$

Or si l'on veut étudier les invariants différentiels des transformations isohodologiques, il suffit d'employer la connexion $\Lambda_{\beta\gamma}^z$ sans tenir compte des transformations (20,6) (4).

APPLICATIONS I.

Courbes.

21. **Densité intrinsèque.** — Imaginons donnée dans \mathbb{P}_n une courbe C aux équations paramétriques

$$(21,1) \quad x^i = x^i(t), \quad x^o = x^o(t) = 0$$

(4) Le point de vue employé ici par nous correspond à celui dans (12). Un autre point de vue se manifeste dans (14), (56), (59), (61), (66), (74), (75).

et construisons les pro-vecteurs

$$(21,2) \quad a^x_o = \delta^x_o, \quad a^x_1 = \frac{\partial}{\partial t} a^x_o, \quad a^x_2 = \frac{\partial}{\partial t} a^x_1, \dots, \quad a^x_n = \frac{\partial}{\partial t} a^x_{n-1}.$$

Cela étant, désignons par A^x_β ce que devient a^x_β pendant une transformation du groupe F . Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} A^x_o &= a^x_o \\ A^x_1 &= \frac{\Theta}{\Theta t} A^x_o = a^x_1 + c \frac{df}{dt} a^x_o \\ A^x_2 &= \frac{\Theta}{\Theta t} A^x_1 = a^x_2 + 2c \frac{df}{dt} a^x_1 + \left(c^2 \left(\frac{df}{dt} \right)^2 + c \frac{d^2 f}{dt^2} \right) a^x_o \\ &\dots \end{aligned}$$

et en général

$$(21,3) \quad A^x_\beta = a^x_\beta + b^x_{\beta-1}$$

le pro-vecteur $b^x_{\beta-1}$ étant une combinaison linéaire de $a^x_o, \dots, a^x_{\beta-1}$ (et $b^x_o = 0$).

Or, en désignant par $a^{x_o \dots x_n}$ resp. $A^{x_o \dots x_n}$ les pro- n -vecteurs

$$(21,4) \quad a^{x_o \dots x_n} = a^{[x_o \dots x_n]}, \quad A^{x_o \dots x_n} = A^{[x_o \dots x_n]}$$

on a

$$(21,5) \quad a^{x_o \dots x_n} = A^{x_o \dots x_n}.$$

L'unique composante (au signe près) du pro- n -vecteur $a^{x_o \dots x_n}$ resp. $A^{x_o \dots x_n}$ qui peut être différente de zéro est une densité \mathfrak{a} (resp. \mathfrak{A}) du poids -1

$$(21,6) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{A}.$$

Étant donnée une courbe (21,1) dans \mathbb{P}_n , on peut lui toujours adjoindre une densité intrinsèque du poids -1 .

Dans ce qui suit, nous supposons, sauf l'avis contraire, $\mathfrak{a} \neq 0$.

Puisque d'après (15,2), (21,6) et (3,3)

$$\begin{aligned} (21,7) \quad \frac{\Theta}{\Theta t} \mathfrak{A} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{a} + \frac{df}{dt} D_o \mathfrak{a} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{a} + \frac{df}{dt} c(n+1) \mathfrak{a} = \\ &= \mathfrak{a} \left(\frac{d \log \mathfrak{a}}{dt} + \frac{c}{n} \frac{dX^0}{dt} \right) \end{aligned}$$

on peut fixer la coordonnée surnuméraire de manière que résulte

$$(21,8) \quad \frac{\Theta}{\Theta t} \mathfrak{A} = 0.$$

Pour cela il suffit de choisir X^o d'après

$$(21,9) \quad \frac{dX^o}{dt} = -\frac{n}{c} \frac{d \log a}{dt} \left(= \frac{dx^o}{dt} + \frac{df}{dt} = \frac{df}{dt} \right).$$

Nous sommes ainsi parvenus à fixer (à une constante additive près) la coordonnée surnuméraire en ne faisant entrer en compte que les données du problème:

On peut toujours choisir la coordonnée surnuméraire de manière que la densité adjointe intrinsèque soit « \mathbb{P}_n -constante » le long de la courbe donnée ⁽¹⁾. (Voir (21, 8-9)).

Dès lors, nous supposons que l'on ait fait le choix convenable (21,9) de cette coordonnée (en la désignant de nouveau par x^o et en écrivant \mathfrak{d} au lieu de Θ pour le symbole de la différentielle correspondante). Ce fait a beaucoup d'avantages mais aussi un inconvénient, à savoir: La coordonnée x^o , maintenant fixée n'est qu'une fonction du paramètre t , ainsi que $\frac{\partial}{\partial x^i} x^o = x_i^o$ est un symbole dépourvu du sens et par conséquent le même est valable pour les équations (4,2) et (5,3). Autrement dit, l'interprétation des grandeurs moyennant les pro-affineurs n'a pas maintenant lieu. C'est pour cette raison que nous emploierons l'autre interprétation, moyennant le groupe projectif P , qui n'exige pas la connaissance de x_i^o .

22. Arc projectif. — Si l'on veut se servir du groupe P , on doit partir du contre-point a^z , défini par $a^z \circ \delta_o^z$, ou bien, ce qui revient au même, par

$$(22,1) \quad u^z = r(t)a^z = r(t)\delta_o^z,$$

$r(t)$ étant un facteur arbitraire de proportionnalité. D'autre part, nous introduirons, à côté du paramètre t , un autre paramètre s , moyennant les équations

$$(22,2) \quad s = s(t), \quad t = t(s),$$

en nous réservant le droit de choisir plus tard convenablement la fonction $s(t)$.

(1) Voir (55), cfr. aussi (34).

Cela étant, construisons les contre-points

$$(22,3) \quad u^x = r(t) a^x, \quad u^x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^x, \dots, \quad u^x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^x.$$

Ceux-ci sont liés aux contre-points a^x, \dots, a^x par

$$(22,4) \quad u^x = \left(\frac{dt}{ds}\right)^j r a^x + v^x,$$

le contre-point v^x étant une combinaison linéaire de a^x, \dots, a^x . Il s'ensuit

$$u^{[x_0 \dots x_n]} = u^{x_0 \dots x_n} = r^{n+1} \left(\frac{dt}{ds}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{x_0 \dots x_n}.$$

Nous n'admettons que de tels paramètres s pour lesquels

$$(22,5) \quad r(t) = \left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^{n/2},$$

d'où

$$(22,6) \quad u^{x_0 \dots x_n} = a^{x_0 \dots x_n}.$$

On a donc à cause de (21,6), (22,3) et (21,8) (en écrivant \mathfrak{D} au lieu de Θ dans cette dernière équation)

$$(22,7) \quad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^{y_0 \dots y_n} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^{[y_0 \dots y_n]} = u^{[y_0 y_1 \dots y_{n-1}]} \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^{y_n} = 0.$$

Or, le contre-point $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^y$ est une combinaison linéaire des contre-points u^y, \dots, u^y

$$(22,8) \quad u^y = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^y = \omega_{oo} u^y + \omega_{11} u^y + \dots + \omega_{n-1, n-1} u^y$$

avec les scalaires $\omega_{oo}, \dots, \omega_{n-1, n-1}$ faciles à construire. Remarquons expressément que la même méthode nous donne en même temps

$$(22,9) \quad a^y = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t} a^y = \alpha_{oo} a^y + \alpha_{11} a^y + \dots + \alpha_{n-1, n-1} a^y$$

avec une autre série de scalaires $\alpha_{oo}, \dots, \alpha_{n-1, n-1}$.

Cela posé, nous exprimerons ω en fonction de $\alpha_{oo}, \dots, \alpha_{n-1, n-1}$. On trouve faci-

lement (pour $R = 1/r$)

$$\alpha_z^y = \frac{d^z R}{dt^z} u^y + \dots + R \left(\frac{ds}{dt} \right)_z^z u^y, \quad (z = 1, \dots, n + 1)$$

les membres omis n'étant qu'une combinaison linéaire de u^y, \dots, u^y (mais non de u^y).

En substituant dans la dernière de ces équations ($z = n + 1$) les valeurs tirées de (22,8), (22,9) on trouve, à cause de ces équations mêmes, pour $z = 1, \dots, n$

$$u^y \left(\alpha_o R + \alpha_1 \frac{dR}{dt} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} R}{dt^{n-1}} \right) + P^y = \left(R \left(\frac{ds}{dt} \right)^{n+1} \omega_o + \frac{d^{n+1} R}{dt^{n+1}} \right) u^y + Q^y.$$

Ici P^y et Q^y sont des combinaisons linéaires de u^y, \dots, u^y qui ne nous intéressent pas. En tenant compte de (22,5), on tire de cette dernière équation

$$(22,10) \quad \omega_o = R^{\frac{n+2}{n}} \left(\alpha_o R + \alpha_1 \frac{dR}{dt} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} R}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n+1} R}{dt^{n+1}} \right).$$

Dans ce qui suit, nous fixons une fois pour toutes le facteur $r(t)$ jusqu'ici arbitraire d'après

$$(22,11) \quad 0 = \alpha_o \frac{1}{r} + \alpha_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\frac{1}{r} \right)$$

d'où il suit, en raison de (22,5)

$$(22,12) \quad s = \int_{t_0}^t (r(t))^{2/n} dt.$$

Le paramètre s ainsi défini sera dit *l'arc projectif de C*.

Le choix (22,11) du facteur $r(t)$ nous donne d'après (22,10)

$$(22,13) \quad \omega_o = 0.$$

En écrivant k_1, \dots, k_{n-1} pour les autres scalaires ω , exprimés en fonction de l'arc projectif, nous obtenons de (22,8) et (22,13)

$$(22,14) \quad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^x = \frac{\mathfrak{D}^{n+1}}{\mathfrak{D}s^{n+1}} u^x = k_{11} u^x + k_{22} u^x + \dots + k_{n-1, n-1} u^x.$$

Les scalaires k_1, \dots, k_{n-1} seront dits « les courbures projectives » de C (4).

(4) Les équations (22,14) ressemblent formellement aux équations déduites pour une courbe dans L_n . Cfr. (32), (33).

23. Changement du facteur. — La méthode qui nous a mené au courbures projectives est analogue à celle, employée dans la géométrie différentielle projective de MM. FUBINI et CECH ⁽¹⁾ pour $n = 2, 3$ de l'espace plan projectif. Mais il y a une grande différence entre ces deux méthodes, à savoir: Dans la théorie de MM. FUBINI et CECH la notion des courbures projectives (et de l'arc projectif) est intimement liée au choix du facteur ⁽²⁾ tandis qu'ici le facteur de proportionnalité ne joue qu'un rôle secondaire. En effet, les résultats du n.º 16 et en particulier l'équation (16,4) nous permettent de choisir arbitrairement le facteur de proportionnalité *pourvu que l'on fixe d'une manière convenable la coordonnée surnuméraire*. Posons

$$(23,1) \quad U^{\alpha} = \lambda(s)u^{\alpha}$$

et écrivons U^{α} pour ce que devient u^{α} après une transformation du groupe F . Nous obtenons ainsi

$$\frac{\Theta}{\Theta s} U^{\alpha} = U^{\alpha} = \lambda u^{\alpha} + u^{\alpha} \lambda \left(\frac{d \log \lambda}{ds} + c \frac{df}{ds} \right).$$

Or, si l'on choisit la fonction arbitraire $f(s)$ (ce qui revient au choix de la coordonnée surnuméraire) d'après

$$(23,2) \quad \frac{1}{c} \frac{d \log \lambda}{ds} = - \frac{df(s)}{ds},$$

on obtient

$$(23,3) \text{ a) } \quad U^{\alpha} = \lambda u^{\alpha}.$$

En tenant compte des résultats du n.º 16, on déduit de (23,3) a)

$$(23,3) \text{ b) } \quad \frac{\Theta^j}{\Theta s^j} U^{\alpha} = U^{\alpha} = \frac{\mathfrak{J}^j}{\mathfrak{J} s^j} U^{\alpha} = \lambda u^{\alpha}$$

⁽¹⁾ Voir (23).

⁽²⁾ D'ailleurs différent du choix, employé par nous. Mais il y a encore une différence à mentionner: Les équations analogues à (22,14) dans l'espace projectif plan P_n ($n = 2, 3$) ont chez MM. FUBINI et CECH $k = 0$, $k \neq 0$. Ce fait est causé par un autre choix de « l'arc projectif ». Nous l'avons choisi d'après (22,11), (22,12) et par conséquent il dépend encore des constantes arbitraires (d'intégration). D'autre part le choix actuel a l'avantage de nous rendre les équations (22,14) *complètement* analogues à celles de la géométrie différentielle affine, (cfr. (84)) ce qui est important surtout dans les applications (qui suivent). Pour l'étude des invariants projectifs d'une courbe qui ne dépendent ni du facteur de proportion, ni du choix de l'arc projectif voir (89)-(92).

et en particulier à cause de (23,1-3)

$$(23,4) \quad \frac{\Theta}{\Theta s} U^x = U^x = \lambda u^x = \lambda \begin{matrix} k & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & k \\ & & & & & n-1 & n-1 \end{matrix} u^x = \begin{matrix} k & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & k \\ & & & & & n-1 & n-1 \end{matrix} U^x.$$

On est donc parvenu aux mêmes courbures que dans (22,14):

En choisissant arbitrairement le facteur λ dans (23,1) et la coordonnée surnuméraire $X^0 = x^0 + f^{(1)}$ d'après (23,2) on parvient non seulement aux mêmes contre-points u^x ⁽²⁾ mais aussi aux mêmes courbures projectives.

La différence qui existe entre cette méthode et la méthode des MM. FUBINI et CECH s'explique facilement par le fait que la base de notre théorie est un groupe (local) spécial projectif P (voir (3,6)) tandis que la méthode mentionnée se sert du groupe projectif général (dans l'espace plan ambiant).

Dans ce qui suit, nous tiendrons compte de ces résultats en ne faisant entrer en compte que les équations (22,14) et en négligeant les équations (23,4).

Cas spécial I: $n = 2$.

24. Le projecteur $g_{x\beta}$. — Si $n = 2$, les équations (22,3) et (22,14) se réduisent à

$$(24,1) \quad u^x = \frac{\partial}{\partial s} u^x, \quad u^x = \frac{\partial}{\partial s} u^x, \quad \frac{\partial}{\partial s} u^x = k u^x.$$

Cela posé, construisons le projecteur symétrique $g_{x\beta} = g_{\beta x}$, intégrale de

$$(24,2) \quad \frac{\partial}{\partial s} g_{x\beta} = a(s)g_{x\beta},$$

$a(s)$ étant une fonction arbitraire de position. Le champ $g_{x\beta}$ est donc projectif à lui-même le long de la courbe C en question (voir le par. 18).

Si P est un point général de \mathbb{P}_2 , $g_{x\beta}(P)$ est géométriquement représenté par une conique dans P_2 tangent en P . Cette conique n'est pas dégénérée.

Pour le faire voir, remarquons que le déterminant de $g_{x\beta}$, c'est-à-dire g est une densité du poids +2 et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial s} g = \frac{d}{ds} g - 2\Lambda_{x\beta}^x \frac{dx^\beta}{ds} g = g \left(\frac{d \log g}{ds} - 2c(n+1) \frac{dx^0}{ds} \right).$$

(1) La coordonnée x^0 qui figure dans cette équation est déjà fixée par le procédé du n.º (21).

(2) N'oublions pas qu'un contre-point est défini par le rapport de ses composantes.

D'autre part, si l'on écrit

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{a}(t(s)),$$

on a, à cause de (21,9) (en écrivant dans cette équation x^o pour X^o) et (24,2)

$$(24,3) \quad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} \mathfrak{g} = 3a\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \frac{d \log \mathfrak{g} \mathfrak{b}^2}{ds},$$

d'où il suit

$$(24,4) \quad \mathfrak{g} = \frac{\text{const } e^{\int a(s) ds}}{\mathfrak{b}^2} \quad (\text{const} \neq 0)$$

Cette équation nous apprend que dans un point général P

$$\mathfrak{g}(P) \neq 0, \quad \text{Q. E. D.}$$

Nous nous servirons de ce fait en cherchant la condition nécessaire pour que la conique $g_{\alpha\beta}(P)$ passe par le point P . La droite polaire du contrepoint $u^\alpha(P)$ par rapport à cette conique est

$$u^\alpha(P) g_{\alpha\beta}(P) = u_\beta(P).$$

Elle ne passe pas par P que si $u_o(P) = 0$. (Voir la fin du par. 8).

En tenant compte de ce que $u^\alpha \propto \delta_\alpha^z$ et de plus que P est un point général de la courbe en question, nous voyons, d'après l'équation précédente, que la condition nécessaire pour que la conique passe par le point P est

$$g_{oo} = 0 \quad \text{ou bien} \quad u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 0.$$

En introduisant les scalaires

$$(\xi, \eta) = u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} \quad (\xi, \eta = 0, \dots, 3)$$

cette condition peut être écrite aussi

$$(24,5) \quad (0, 0) = 0.$$

L'application successive de l'opérateur $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s}$ à cette équation nous donne en raison de (24,1) et (24,2)

$$(24,6) \quad \begin{aligned} (0, 1) &= 0 \\ (0, 2) + (1, 1) &= 0 \\ (0, 3) + 3(1, 2) &= 3(1, 2) = 0 \\ (1, 3) + (2, 2) &= -k(0, 2) + (2, 2) = 0. \end{aligned}$$

La dérivée covariante de cette équation nous donne

$$(24,7) \quad (0, 2) \frac{d}{ds} k = 0.$$

La conique $g_{\alpha\beta}$ n'étant pas dégénérée, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} (0, 0) & (0, 1) & (0, 2) \\ (1, 0) & (1, 1) & (2, 1) \\ (2, 0) & (2, 1) & (2, 2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & (0, 2) \\ 0 & -(0, 2) & 0 \\ (0, 2) & 0 & k(0, 2) \end{vmatrix} = (0, 2)^3 \neq 0$$

et par conséquent, d'après (24,7)

$$k = \text{const.}$$

La condition nécessaire pour que la conique $g_{\alpha\beta}(P)$ passe par le point général P de la courbe en question est que la courbure projective k de C soit constante.

Si la condition (24,5) est satisfaite, on a aussi à cause de (24,2)

$$(24,8) \quad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} g_{oo} = ag_{oo} = 0 = \frac{dg_{oo}}{ds} - 2\Lambda_{o\beta}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{ds} g_{\alpha o} = -2c \frac{dx^i}{ds} g_{io}.$$

On a donc

$$g_{\alpha o} u^{\alpha} = g_{io} u^i = c g_{io} \frac{dx^i}{ds} u^o = 0$$

et par conséquent aussi

$$g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = u^o g_{o\beta} u^{\beta} = 0$$

d'où il suit

$$u_{\beta} u^{\beta} = 0.$$

Parce que u_{β} est la droite polaire de la conique $g_{\alpha\beta}(P)$ par rapport au contre-point u^{α} et u^{α} est dans la direction tangente de C , la dernière équation nous apprend: *La conique mentionnée au théorème précédent est tangente à C au point P .*

25. Conique osculatrice. — L'ensemble de contre-points infiniment voisins

$$(25,1) \quad p^{\alpha} = + \sum_{\alpha}^q \frac{s^{\alpha}}{z^{\alpha} \alpha!} \left(\frac{\mathfrak{D}^{\alpha}}{\mathfrak{D}s^{\alpha}} u^{\alpha} \right)_P \quad (q = 0, \dots, r)$$

sera dit l'élément d'ordre $r+1$, adjoint au point P de C . L'élément d'ordre 5 définit dans P_2 du point P « la conique osculatrice », aux coefficients $c_{\alpha\beta}$.

En désignant par

$$(\lambda, \mu)' = c_{\alpha\beta} u^\alpha(P) u^\beta(P)$$

ses coordonnées locales par rapport au repère u^α , u^α , u^α et en tenant compte de ce que

$$\begin{aligned} p_1^\alpha &= u^\alpha(P) \\ p_2^\alpha &= u^\alpha(P) + s u_1^\alpha(P) \\ p_3^\alpha &= u^\alpha(P) + s u_1^\alpha(P) + s^2/2! u_2^\alpha(P) \\ (25,2) \quad p_4^\alpha &= u^\alpha(P) + u_1^\alpha(P) \left(s + \frac{s^3}{3!} k \right) + u_2^\alpha(P) s^2/2! \\ p_5^\alpha &= u^\alpha(P) + u_1^\alpha(P) \left(s + s^3/3! k + s^4/4! \frac{d}{ds} k \right) + u_2^\alpha(P) (s^2/2! + s^4/4! k) \\ p_6^\alpha &= u^\alpha(P) + u_1^\alpha(P) \left(s + s^3/3! k + s^4/4! \frac{d}{ds} k + s^5/5! \left(\frac{d^2}{ds^2} k + k^2 \right) \right) \\ &\quad + u_2^\alpha(P) \left(s^2/2! + s^4/4! k + 2s^5/5! \frac{d}{ds} k \right), \end{aligned}$$

on trouve facilement, en n'employant que les contre-points p_1, \dots, p_5

$$(25,3) \quad \begin{aligned} (0, 0)' &= (0, 1)' = (1, 2)' = 0 \\ (0, 2)' &= - (1, 1)', \quad (2, 2)' = - k(1, 1)'. \end{aligned}$$

En comparant ces équations aux (24,6) on constate leur équivalence. Cherchons maintenant la condition nécessaire pour que la conique (25,3) contienne encore l'élément adjoint d'ordre 6. En tenant compte de la dernière des équations (25,2) on trouve

$$c_{\alpha\beta} p_6^\alpha p_6^\beta = - \frac{1}{20} s^5 (0, 2)' \frac{d}{ds} k + s^6 (\dots)$$

d'où

$$(25,4) \quad 20 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c_{\alpha\beta} p_6^\alpha p_6^\beta}{s^5} = - (0, 2)' \frac{d}{ds} k.$$

Si la conique osculatrice n'est pas dégénérée (ce que nous voulons supposer) le contre-point p_6^α n'est situé sur elle que si

$$k = \text{const.}$$

La condition nécessaire pour que la conique osculatrice contienne encore l'élément adjoint d'ordre 6 est que la courbe en question ait la courbure projective constante.

En comparant ces résultats aux résultats du n.º précédent on trouve:

Si la conique $g_{z\beta}(P)$ est tangente à C , elle est identique à la conique osculatrice et la courbure projective de C est constante (¹).

26. **Autre interprétation de k .** — Construisons, dans P_2 les droites

D_1, \dots, D_4 joignant le contre-point $u^z(P) \equiv p^z$ aux points p^z, \dots, p^z :

$$\begin{aligned}
 (26,1) \quad & D_1 \dots u^{[z}(P)p^{\beta]} = u^{[z}(P)u^{\beta]}(P)s \\
 & D_2 \dots u^{[z}(P)p^{\beta]} = u^{[z}(P)u^{\beta]}(P)s + u^{[z}(P)u^{\beta]}(P)s^2/2! \\
 & D_3 \dots u^{[z}(P)p^{\beta]} = u^{[z}(P)u^{\beta]}(P)(s + s^3/3!k) + u^{[z}(P)u^{\beta]}(P)s^2/2! \\
 & D_4 \dots u^{[z}(P)p^{\beta]} = u^{[z}(P)u^{\beta]}(P) \left(s + s^3/3!k + s^4/4! \frac{d}{ds} k \right) \\
 & \quad + u^{[z}(P)u^{\beta]}(P)(s^2/2! + s^4/4!k).
 \end{aligned}$$

En désignant par $B(s)$ le birapport (D_1, D_2, D_3, D_4) on obtient

$$(26,2) \quad B(s) = 1/2 + s/4 \frac{d}{ds} \log k + s^2(\dots),$$

de sorte que

$$4 \left(\frac{dB(s)}{ds} \right)_{s=0} = \left(\frac{d}{ds} \log k \right)_{s=0}$$

et parce que le point $P(s=0)$ est un point général

$$(26,3) \quad 4 \frac{dB(s)}{ds} = \frac{d \log k}{ds}.$$

Nous avons réussi à interpréter ainsi la courbure projective moyennant le birapport des droites qui joignent le contre-point $u^z(P)$ aux contre-points p^z, \dots, p^z . Cette interprétation est naturellement valable même pour le cas du plan projectif.

Si en particulier la conique osculatrice contient l'élément d'ordre 6, on a $k = \text{const.}$ et par conséquent

$$B = \text{const.}$$

(¹) Cfr. (84) (pour le plan affine).

Cas spécial II: $n = 3$.

27. Le champ $V_{\alpha\beta}$. — Si $n = 3$, les équations (22,3) et (22,14) se réduisent à

$$(27,1) \quad \begin{aligned} u^x_1 &= \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^x_0, & u^x_2 &= \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^x_1, & u^x_3 &= \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^x_2, \\ \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} u^x_3 &= k u^x_{11} + k u^x_{22}. \end{aligned}$$

Cela posé, construisons l'intégrale $V_{\alpha\beta} = V_{[\alpha\beta]}$ du système

$$(27,2) \quad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} V_{\alpha\beta} = a(s) V_{\alpha\beta},$$

$a(s)$ étant une fonction arbitraire de position. Le champ $V_{\alpha\beta}$ est donc projectif à lui-même le long de la courbe en question. Si P est un point général de C , $V_{\alpha\beta}(P)$ est géométriquement caractérisé dans P_3 (tangent à \mathbb{P}_3 en P) par le complexe linéaire, aux composantes plückeriennes $V_{\alpha\beta}(P)$. Ce complexe n'est pas dégénéré en général. Pour le faire voir, introduisons le projecteur

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = V_{[\alpha\beta} V_{\gamma\delta]}.$$

On constate facilement que

$$W_{\alpha\beta\alpha\delta} = 0$$

de sorte que l'on a pour $W = W_{0123}$ d'après (27,2)

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} W &= 2a W = \frac{d}{ds} W - \frac{dx^\beta}{ds} (\Lambda_{0\beta}^\alpha W_{\alpha 123} + \Lambda_{1\beta}^\alpha W_{0\alpha 23} + \Lambda_{2\beta}^\alpha W_{01\alpha 3} + \Lambda_{3\beta}^\alpha W_{012\alpha}) = \\ &= \frac{d}{ds} W - \Lambda_{\alpha\beta}^\alpha W \frac{dx^\beta}{ds}. \end{aligned}$$

Mais en tenant compte de (21,9) (où l'on écrit x^o pour X^o) et en posant $\mathbf{b} = \mathbf{a}(t(s))$, on peut écrire pour la dernière équation

$$W \left(2a - \frac{d \log \mathbf{b} W}{ds} \right) = 0, \quad (\text{const} \neq 0)$$

de sorte que

$$W = \frac{e^{2 \int a ds} \text{const.}}{\mathbf{b}}.$$

Il s'ensuit en général pour le point P

$$3W_{0,123}(P) = V_{0,1}(P)V_{23}(P) + V_{0,2}(P)V_{3,1}(P) + V_{0,3}(P)V_{1,2}(P) \neq 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

Cherchons maintenant la condition nécessaire pour que la tangente de C

$$u^{\alpha\beta} = u^{\alpha}_0(P)u^{\beta}_1(P)$$

appartienne au complexe $V_{\alpha\beta}(P)$ (le long de C). En introduisant les coordonnées locales plückeriennes

$$(\alpha, \beta) = V_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu,$$

et en tenant compte de ce que le point P est un point général on peut écrire cette condition

$$(0, 1) = 0.$$

L'application successive de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial s}$ à cette équation nous donne

$$\begin{aligned} (27,3) \text{ a)} \quad & (0, 1) = (0, 2) = 0 \\ & (1, 2) + (0, 3) = 0 \\ & 2(1, 3) + k(0, 1) + k(0, 2) = 2(1, 3) = 0 \\ & (2, 3) + k(1, 2) = 0 \end{aligned}$$

$$(27,3) \text{ b)} \quad (2, 1)k + (1, 2) \frac{d}{ds} k + (1, 3)k = (1, 2) \left(\frac{d}{ds} k - k \right) = 0.$$

Le complexe n'étant pas dégénéré, on doit avoir

$$(0, 1)(2, 3) + (0, 2)(3, 1) + (0, 3)(1, 2) = - (1, 2)^2 \neq 0$$

et par conséquent, à cause de la dernière des équations (27,3)

$$(27,4) \quad k = \frac{d}{ds} k.$$

La condition nécessaire pour que la tangente de C appartienne (le long de C) au complexe mentionné est (27,4).

28. Complexe osculateur. — Introduisons, à côté de l'élément adjoint d'ordre $r + 1$

$$(28,1) \quad p^\nu = \sum_0^q \frac{s^z}{z!} \left(\frac{\partial^z}{\partial s^z} u^\nu \right)_P, \quad (q=0, \dots, r)$$

l'élément adjoint « plückerien » d'ordre $r + 1$

$$(28,2) \quad p^{\nu\lambda} = \sum_0^q \frac{s^z}{z!} \left(\frac{\partial^z}{\partial s^z} u^\nu u^\lambda \right)_P. \quad (q=0, \dots, r)$$

L'élément plückerien d'ordre 5 définit dans P_3 (tangent à \mathbb{P}_3 dans P) un complexe linéaire, dit « complexe osculateur », dont nous désignerons les composantes par $C_{2,3}$. Pour trouver ses coordonnées locales, introduisons avant tout la notation

$$u^{\nu\lambda} = u^{\nu} u^{\lambda}$$

$$\alpha\beta \quad \alpha \quad \beta$$

et calculons $p^{\nu\lambda}$. En tenant compte de ce que

$$(28,3) \quad \begin{aligned} p &= u, & p &= u + su \\ p &= u + su + s^2/2!(u + u) \\ p &= u(1 + s^3/3!k) + u(s + s^3/3!k) + u s^2/2! \\ &\quad + u s^2/2! + 2u s^3/3! \\ p &= a u + b u + u(s^2/2! + s^4/4!k) + u(s^2/2! + 3s^4/4!k) \\ &\quad + c u + 2u s^4/4! \\ p &= a u + b u + u(s^2/2! + s^4/4!k + s^5/5!(2 \frac{d}{ds} k + k)) \\ &\quad + u(s^2/2! + 3s^4/4!k + s^5/5!(4 \frac{d}{ds} k - k)) \\ &\quad + c u + 2s^4/4! u \end{aligned}$$

et en introduisant les coordonnées locales plückeriennes

$$(\alpha, \beta)' = C_{\lambda\mu} u^{\lambda} u^{\mu}$$

$$\alpha \quad \beta$$

on trouve à cause des cinq premières équations (28,3)

$$(28,4) \quad \begin{aligned} (0, 1)' &= (0, 2)' = (1, 3)' = 0 \\ (0, 3)' + (1, 2)' &= 0 \\ (2, 3)' + k(1, 2)' &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations, (équivalentes aux équations (27,3) a)) définissent le complexe linéaire osculateur. Cherchons maintenant la condition nécessaire pour que ce complexe contienne encore l'élément plückerien d'ordre 6. En tenant

(4) Nous supprimons ici les indices de contrevariance; a, \dots, c, a, \dots, c sont les coefficients scalaires qui ne nous intéressent pas.

compte de la dernière des équations (28,3) on trouve

$$C_{x_2} p^{x_2} = 2s^5/5! (1, 2)' \left(\frac{d}{ds} k - k \right) + s^6(\dots)$$

et par conséquent

$$(28,5) \quad \frac{5!}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_{x_2} p^{x_2}}{s^5} = (1, 2)' \left(\frac{d}{ds} k - k \right).$$

Or, si le complexe osculateur n'est pas dégénéré (ce que nous voulons supposer) on doit avoir

$$(0, 1)'(2, 3)' + (0, 2)'(3, 1)' + (0, 3)'(1, 2)' = - (1, 2)'^2 \neq 0$$

et par conséquent le complexe osculateur ne contient l'élément plückerien d'ordre 6 que si (27,4) est satisfaite. On a donc les théorèmes suivants:

La condition nécessaire pour que le complexe osculateur contienne encore l'élément plückerien adjoint d'ordre 6 est l'équation (27,4). Si la tangente de C appartient au complexe linéaire $V_{x_2}(P)$ pour chaque point P de C. ce complexe est identique au complexe osculateur et de plus, l'équation (27,4) est satisfaite (1).

29. Autre interprétation des courbures projectives — Construisons dans P_3 les plans P_1, \dots, P_4 définis par la droite tangente et le contre-point resp. p_3, \dots, p_6 de l'élément adjoint (28,1).

Un calcul facile nous donne à cause de (27,1)

$$(29,1) \quad \begin{aligned} P \dots u^{[x_2 u^2 p^r]} &= u^{[x_2 u^2 u^r]} s^2 / 2! \\ P \dots u^{[x_2 u^2 p^r]} &= u^{[x_2 u^2 u^r]} s^2 / 2! + u^{[x_2 u^2 u^r]} \frac{s^3}{3!} \\ P \dots u^{[x_2 u^2 p^r]} &= u^{[x_2 u^2 u^r]} (s^2 / 2! + k s^4 / 4!) + u^{[x_2 u^2 u^r]} s^3 / 3! \\ P \dots u^{[x_2 u^2 p^r]} &= u^{[x_2 u^2 u^r]} \left(s^2 / 2! + k s^4 / 4! + s^5 / 5! \left(k + \frac{d}{ds} k \right) \right) \\ &\quad + u^{[x_2 u^2 u^r]} (s^3 / 3! + s^5 / 5! k) \end{aligned}$$

de sorte que l'on trouve pour le birapport $B(s) = (P_1, P_2, P_3, P_4)$

$$(29,2) \quad B(s) = \frac{2}{5} + s \frac{k + \frac{d}{ds} k}{5k} + s^2(\dots).$$

(1) Cfr. (84) (pour l'espace plan affine).

Il s'ensuit

$$(29,3) \quad 5 \frac{dB}{ds} = \frac{k + \frac{d}{ds} k}{\frac{k}{2}}.$$

Nous avons réussi ainsi à interpréter un certain birapport moyennant les courbures projectives.

Cas spécial III: $\mathbf{a}(t(s)) = 0$ ($n > 2$).

30. **Cas particulier.** — Jusque là, nous avons supposé que la densité $\mathbf{a}(t(s)) = \mathbf{b}(s)$ soit différente de zéro. Maintenant, nous voulons étudier ce cas particulier. Comme nous avons vu, la densité $\mathbf{a}(t)$ nous a permis de construire la coordonnée surnuméraire et par conséquent aussi de fixer le symbole \mathfrak{D} qui n'était plus une notion non intrinsèque. Puisque nous supposons maintenant $\mathbf{a} = 0$, nous ne pouvons pas employer \mathbf{a} pour en déduire le symbole \mathfrak{D} . Cela nous contraint à supposer de nouveau que \mathfrak{D} ne soit pas intrinsèque. Cela étant, construisons les contre-points

$$(30,1) \quad e^x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t_0} e^x, \quad e^x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t_1} e^x, \dots, \quad e^x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t_{n-1}} e^x,$$

en partant pour le moment du contre-point

$$(30,2) \quad e^x = \delta_o^x.$$

Parce que $\mathbf{a}(t) = 0$ on a

$$e^{[\alpha_0 e^{x_1} \dots e^{x_n}]} = 0.$$

Le cas échéant on a pour un certain nombre $m < n$

$$e^x = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t_m} e^x = \varepsilon_{00} e^x + \varepsilon_{11} e^x + \dots + \varepsilon_{mm} e^x.$$

Remarquons expressément que non seulement le contre-point e^x mais aussi e^x les contre-points e^x, e^x, \dots, e^x résultent en combinaison linéaire de e^x, \dots, e^x .

Ce fait est invariant par rapport au changement du facteur, défini par le groupe F . En effet si l'on pose

$$E^x = e^x, \quad E^x = \frac{\Theta}{\Theta t_1} E^x, \quad E^x = \frac{\Theta}{\Theta t_1} E^x, \dots, \quad E^x = \frac{\Theta}{\Theta t_{n-1}} E^x,$$

on trouve sans difficulté

$$(30,3) \quad E^x = e^x + ac \frac{df}{dt} e^x + V^x, \quad (a = 1, \dots, m)$$

où V^x est une combinaison linéaire de e^x, \dots, e^x et par conséquent aussi

$$(30,4) \quad \begin{aligned} E^x &= \left(\varepsilon + c(m+1) \frac{df}{dt} \right)_m e^x + W^x & (e = m+2, \dots, n) \\ E^x &= \overset{f}{R} e^x & (f = 0, \dots, m) \end{aligned}$$

W^x étant une combinaison linéaire de e^x, \dots, e^x . Il sensuit en particulier

$$(30,5) \quad \begin{aligned} E^x &= \left(\varepsilon + c(m+1) \frac{df}{dt} \right)_m E^x + W'^x, & (e = m+2, \dots, n) \\ E^x &= \overset{f}{R'} E^x, & (f = 0, \dots, m) \end{aligned}$$

où W'^x est une combinaison de E^x, \dots, E^x et $\overset{f}{R'}$ sont les scalaires faciles à construire. L'équation (30,5) justifie notre assertion.

Dans ce qui suit nous choisirons la fonction f d'après

$$(30,6) \quad \frac{df}{dt} = - \frac{\varepsilon}{c(m+1)},$$

d'où il suit

$$(30,7) \quad E^x = \overset{\mathfrak{D}}{dt} E^x = \underset{0}{E} E^x + \underset{1}{E} E^x + \dots + \underset{m-1}{E} E^x.$$

En tenant compte de ce que

$$X^o = x^o + f$$

nous avons en même temps, avec f , choisi aussi la coordonnée surnuméraire X^o . Dans ce qui suit nous écrirons de nouveau x^o pour cette coordonnée fixée et \mathfrak{D} pour le symbole de la dérivée covariante projective correspondante.

Le symbole \mathfrak{D} résulte ainsi complètement défini.

31. Arc projectif. — Introduisons maintenant le facteur de proportionnalité $r = r(t)$ en changeant en même temps le paramètre t en $s = s(t)$. Si l'on pose

$$(31,1) \quad U^x = r \underset{0}{E} E^x, \quad U^x = \overset{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} U^x, \dots, \quad U^x = \overset{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} U^x$$

on trouve

$$(31,2) \quad U \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_m] \\ 0 \quad m \end{matrix} = r^{m+1} \left(\frac{dt}{ds} \right)^{\frac{m(m+1)}{2}} E \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_m] \\ 0 \quad m \end{matrix}.$$

Nous n'admettons que les changements du paramètre pour lesquels

$$(31,3) \quad r \left(\frac{dt}{ds} \right)^{\frac{m}{2}} = 1,$$

(en nous réservant le droit de choisir convenablement le facteur de proportionnalité r) d'où il suit

$$(31,4) \quad U \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_m] \\ 0 \quad m \end{matrix} = E \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_m] \\ 0 \quad m \end{matrix}$$

et par conséquent, à cause de (30,7) et (31,1)

$$\frac{\partial}{\partial t} E \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_m] \\ 0 \quad m \end{matrix} = \frac{ds}{dt} \frac{\partial}{\partial s} U \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_m] \\ 0 \quad m \end{matrix} = \frac{ds}{dt} U \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_{m-1}] \\ 0 \quad m-1 \end{matrix} \frac{\partial}{\partial s} U \begin{matrix} [\alpha_m] \\ m \end{matrix} = 0.$$

Or, le contre-point U^z est une combinaison linéaire de $U \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_m] \\ 0 \quad m \end{matrix}, \dots, U \begin{matrix} [\alpha_0 \dots \alpha_{m-1}] \\ 0 \quad m-1 \end{matrix}$

$$(31,5) \quad \frac{\partial}{\partial s} U^z = \Omega \begin{matrix} U^z \\ 0 \quad 0 \end{matrix} + \Omega \begin{matrix} U^z \\ 1 \quad 1 \end{matrix} + \dots + \Omega \begin{matrix} U^z \\ m-1 \quad m-1 \end{matrix}.$$

Une méthode analogue à celle que nous avons employée au n.º 22 nous donne la relation entre Ω et E

$$\Omega = r \left(\frac{dt}{ds} \right)^{m+1} \left(E \begin{matrix} R \\ 0 \end{matrix} + E \begin{matrix} \frac{dR}{dt} \\ 1 \end{matrix} + E \begin{matrix} \frac{d^2 R}{dt^2} \\ 2 \end{matrix} + \dots + E \begin{matrix} \frac{d^{m-1} R}{dt^{m-1}} \\ m-1 \end{matrix} - \frac{d^{m+1} R}{dt^{m+1}} \right), \quad (R = 1/r).$$

Nous fixons le facteur r une fois pour toutes d'après

$$(31,6) \quad E \begin{matrix} R \\ 0 \end{matrix} + E \begin{matrix} \frac{dR}{dt} \\ 1 \end{matrix} + E \begin{matrix} \frac{d^2 R}{dt^2} \\ 2 \end{matrix} + \dots + E \begin{matrix} \frac{d^{m-1} R}{dt^{m-1}} \\ m-1 \end{matrix} = \frac{d^{m+1} R}{dt^{m+1}},$$

d'où il suit

$$\Omega = 0.$$

Cela étant, nous introduisons l'arc projectif par

$$s = \int r(t)^{2/m} dt.$$

Les équations (31,1) et (31,5) se réduisent donc à

$$U^x_0 = r\delta^x_0, \quad U^x_1 = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} U^x_0, \dots, \quad U^x_m = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} U^x_{m-1}$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} U^x_m = K_{11} U^x_1 + K_{22} U^x_2 + \dots + K_{m-1, m-1} U^x_{m-1}$$

où K_1, \dots, K_{m-1} sont les courbures projectives de la courbe en question.

Dans ce qui précède, nous avons supposé $m < n$, mais rien ne nous empêche de supposer $m = n$, ainsi que la méthode que nous venons d'employer peut servir aussi pour le cas général.

Nous croyons avoir suffisamment démontré la portée de la notion de la différentielle covariante projective quant à la théorie des courbes. Dans les paragraphes qui suivront, nous nous occuperons de la théorie des hypersurfaces.

HYPERSURFACES

32. Repère pro-vectoriel. — Dans cette partie nous étudierons les hypersurfaces X_m à m dimensions

$$(32,1) \quad x^i = x^i(y^1, \dots, y^m), \quad x^0 = 0$$

plongées dans \mathbb{P}_n . Comme on aura l'occasion de le constater, il sera préférable d'employer dans la suite la première interprétation des grandeurs, à savoir celle où une telle grandeur est définie par les composantes et *non* par le rapport des composantes. Or, dans ce qui suit nous ne parlerons que des *pro-affineurs*, en supposant de nouveau que la coordonnée surnuméraire change suivant la loi du groupe F .

Cela posé, remarquons que les vecteurs

$$e^i_A = \frac{\partial x^i}{\partial y^A} \quad (1)$$

linéairement indépendants sont tangents à X_m . Chacun de ces vecteurs donne naissance à un pro-vecteur

$$(32,2) \quad e^x = \frac{\partial x^x}{\partial y^A}$$

(1) Dans cette partie les indices grecs minuscules latins minuscules parcourent, comme à l'ordinaire, les symboles $0, \dots, n$, tandis que les indices grecs majuscules latins majuscules allemands parcourent les symboles $0, \dots, m$, $1, \dots, m$, $m + 1, \dots, n$.

Puisque

$$e^o_A = \frac{\partial x^o}{\partial y^A} = x_i^o \frac{\partial x^i}{\partial y^A} = e^i_A x_i^o, \quad \left(x_i^o = \frac{\partial x^o}{\partial x^i} \right)$$

on voit que la masse m_A du provecteur e^z_A égale à zéro. Cela étant, imaginons à côté des pro-vecteurs e^z_A , $n - m$ pro-vecteurs linéairement indépendants

$$e^i_a, \quad e^o_a = e^i_a x_i^o$$

tels que les vecteurs e^i_a sont hors de X_m . Comme on voit, la masse m_a du pro-vecteur e^z_a égale à zéro. En tenant compte des résultats du n.º 7 et en particulier de la fin de ce paragraphe, nous pouvons dire que les pro-vecteurs e^z_k , linéairement indépendants, sont représentés géométriquement par n points linéairement indépendants dans P_n (tangent à X_n au points P), lesquels points, dans le système actuel (x^z) , sont à l'infini et en particulier, les points dans les directions des vecteurs e^i_A dans l'hyperplan tangent à X_m , les autres, dans les directions des vecteurs e^i_a , hors de cet hyperplan tangent. Ajoutons à ce système pro-vectoriel le pro-vecteur $e^z_o = \delta^z_o$ qui représente le point P lui-même. Les provecteurs e^v_λ , linéairement indépendants nous per-

mettent de construire $n + 1$ pro-vecteurs covariants e^v_λ linéairement indépendant suivant la règle

$$(32,3) \quad e^z_\lambda = A^z_\lambda, \quad \text{où bien} \quad e^z_\lambda e^z_\lambda = \delta^z_\lambda.$$

On a donc d'après (7,8)

$$(32,4) \quad e^k_o = 0, \\ e^o_j = -m^k_j e^k_j - x_j^o = 0, \quad e^o_o = 1.$$

Il s'ensuit que e^k_λ sont représentés par les vecteurs covariants, tandis que e^o_λ est, dans le système actuel (x^z) , l'hyperplan à l'infini de P_n .

33. Les X_m -composantes. — Nous nous servons du repère déduit e^v_λ , pour la construction des pro-affineurs

$$33,1) \quad B^v_\lambda = e^E_\lambda e^E_\lambda, \quad C^v_\lambda = e^a_\lambda e^a_\lambda$$

qui jouissent des propriétés suivantes

$$(33,2) \quad \begin{aligned} A_\lambda^\nu &= B_\lambda^\nu + C_\lambda^\nu \\ B_\alpha^\nu C_\lambda^\alpha &= B_\lambda^\alpha C_\alpha^\nu = 0. \end{aligned}$$

Plus tard, nous aurons encore besoin de la formule qui exprime $B_j^o + C_j^i x_i^o$.
On a

$$(33,3) \quad \begin{aligned} B_j^o + C_j^i x_i^o &= e_o^o e_j + e_o^A e_j + x_i^o e^i e_j = \\ &= - \left(m e_j + x_j^o \right) + \left(e^i x_i^o + m \right) e_j + x_i^o e^i e_j = \\ &= - m e_j (\overline{=} 0). \end{aligned}$$

En tenant compte de (32,4) on trouve aussi

$$(33,4) \quad B_o^\nu = A_o^\nu, \quad C_o^\nu = 0.$$

On a à peine besoin d'accentuer le caractère covariant des équations (33, 2-4).

Nous dirons qu'un provecteur $v^\nu(w_\lambda)$ est situé dans X_m si

$$v^\nu = B_\lambda^\nu v^\lambda, \quad w_\lambda = B_\lambda^\nu w_\nu.$$

Il s'ensuit en particulier que e_x^{Ξ} (e_β^{Ξ}) sont dans X_m . En général, nous dirons qu'un pro-affineur $v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ est situé dans X_m , si

$$(33,5) \quad v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r} = B_{\alpha_1}^{\nu_1} \dots B_{\alpha_r}^{\nu_r} B_{\lambda_1}^{\beta_1} \dots B_{\lambda_s}^{\beta_s} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}.$$

Si $w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ est n'importe quel pro-affineur, nous dirons que

$$(33,6) \quad w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r} = B_{\alpha_1}^{\nu_1} \dots B_{\alpha_r}^{\nu_r} B_{\lambda_1}^{\beta_1} \dots B_{\lambda_s}^{\beta_s} w_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$$

est sa X_m -composante.

L'ensemble des pro-vecteurs e_x^{Ξ} définit le long de X_m un espace non holonome que nous désignerons par X_p^n ($p = n - m$), en changeant légèrement la notation de M. VRANCEANU et de M. SCHOUTEN (1). Nous dirons qu'un pro-vecteur $v^\alpha(w_\alpha)$ est dans X_p^n , on bien qu'il est pseudonormal à X_m , si

$$v^\nu = C_\lambda^\nu v^\lambda, \quad w_\lambda = C_\lambda^\nu w_\nu.$$

(1) Voir (53), (77), cfr. aussi (83).

Il s'ensuit en particulier que e^ν (e_λ^a) sont dans X_p^n . En général, nous dirons qu'un pro-affineur $v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ est dans X_p^n , si

$$(33,7) \quad v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r} = C_{\alpha_1}^{\nu_1} \dots C_{\alpha_r}^{\nu_r} C_{\lambda_1}^{\beta_1} \dots C_{\lambda_s}^{\beta_s} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}.$$

Si $w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ est n'importe quel pro-affineur, nous dirons que

$$w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r} = C_{\alpha_1}^{\nu_1} \dots C_{\alpha_r}^{\nu_r} C_{\lambda_1}^{\beta_1} \dots C_{\lambda_s}^{\beta_s} w_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$$

est sa X_p^n -composante. Or $w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ ($w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$) se trouve dans X_m (dans X_p^n).

Nous voulons trouver maintenant la signification géométrique des X_m -composantes ainsi que des X_p^n -composantes. Imaginons à cet effet n'importe quel pro-vecteur v^ν . Sa X_m -composante est un pro-vecteur v^ν défini par

$$(33,8) \quad v^i = B_\lambda^i v^\lambda = B_j^i v^j, \quad v^o = B_x^o v^x = v^o + B_j^o v^j.$$

Puisque

$$B_j^i = e_A^i e_j^A = e^i e_j^A$$

et e_A^i, e_j^A sont des vecteurs, B_j^i est l'affineur-unité de X_m et par conséquent v^i est la X_m -composante du vecteur v^i . En posant

$$v^o = m + v^i x_i^o, \quad v^o = m' + v^i x_i^o$$

on trouve d'après (33,8)

$$m' + v^i x_i^o = m + v^i x_i^o + B_j^o v^j.$$

Il s'ensuit à cause de (33,3)

$$(33,9) \quad m' = m + (B_j^o + C_j^i x_i^o) v^j = m - m e_j^o v^j \stackrel{a}{=} m.$$

Or la masse m' de la X_m -composante du pro-vecteur v^ν n'est pas égale en général à la masse m de ce pro-vecteur. Quant à la X_p^n -composante v''^i , on trouve sans difficulté par cette méthode

$$v''^i = C_j^i v^j, \quad m'' = v^j m e_j^a \stackrel{a}{=} 0$$

de sorte que non seulement

$$v^\nu = v^\nu + v''^\nu,$$

mais aussi

$$m = m' + m''.$$

Imaginons maintenant un pro-vecteur covariant w_λ et construisons sa X_m -composante w'_λ . On a

$$w'_j = B_j^0 w_0 + B_j^i w_i, \quad w'_0 = B_0^0 w_0 + B_0^i w_i = w_0.$$

Or, en posant

$$\begin{aligned} w_j &= y_j - m x_j^0, & w'_j &= y'_j - m' x_j^0 \\ w_0 &= m, & w'_0 &= m' \end{aligned}$$

on a avant tout

$$m = m'$$

et par conséquent, d'après les équations précédentes,

$$(33,10) \quad y'_j = B_j^i y_i - m m e_j^a \overline{\overline{B_j^i}} y_i.$$

Or, le vecteur y'_j est en général différent de la X_m -composante vectorielle $B_j^i y_i$. Quant à la X_p^n -composante, si l'on pose

$$w''_j = y''_j - m'' x_j^0, \quad w''_0 = m''$$

on trouve par la même méthode

$$(33,11) \quad m'' = 0, \quad y''_j = C_j^i y_i + m m e_j^a \overline{\overline{C_j^i}} y_i,$$

de sorte que non seulement

$$w_\lambda = w'_\lambda + w''_\lambda,$$

mais aussi

$$m = m' + m'', \quad y_j = y'_j + y''_j.$$

La première des équations (33,11) nous montre que la X_p^n -composante de n'importe quel pro-vecteur covariant est un vecteur covariant. Le vecteur (intrinsèque) y''_j est en général différent de la X_p^n -composante du vecteur (non intrinsèque) y_j .

34. Connexions induites. — Imaginons donné, le long de X_m un champ pro-vectoriel v^ν (w_λ) et construisons les scalaires

$$v = v^\alpha e_\alpha, \quad w = w_\beta e^\beta$$

et

$$(34,1) \quad \overline{\overline{L}}_{\beta\alpha} = e_\beta^\alpha e_\alpha^\mu D_\mu e^\lambda = \delta_{\beta\alpha}^{\lambda\alpha} e_\lambda^\beta \frac{\partial e^\lambda}{\partial y^A} + e_\beta^\alpha e^\omega e^\mu \Lambda_{\omega\mu}^\lambda,$$

lesquels nous permettent de construire les suivantes fonctions scalaire

$$(34,2) \text{ a) } \begin{aligned} D_{\Xi}^{\alpha} v &= \delta_{\Xi}^A \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial y^A} + \tilde{L}_{\beta \Xi}^{\alpha} v^{\beta} \quad (1) \\ D_{\Xi \beta} w &= \delta_{\Xi}^A \frac{\partial w^{\beta}}{\partial y^A} - \tilde{L}_{\beta \Xi}^{\alpha} w_{\alpha} \end{aligned}$$

Un calcul facile nous montre aussitôt

$$(34,3) \quad \begin{aligned} D_{\Xi}^{\alpha} v &= e^{\mu} e_{\nu} D_{\mu} v^{\nu}, \\ D_{\Xi \beta} w &= e^{\mu} e^{\lambda} D_{\mu} w_{\lambda}. \end{aligned}$$

En général, si $v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ est n'importe quel pro-affineur (intrinsèque) et

$$v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = e_{\nu_1}^{\alpha_1} \dots e_{\nu_r}^{\alpha_r} e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_s} v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$$

on a pour

$$(34,2) \text{ b) } D_{\Xi \beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \delta_{\Xi}^A \frac{\partial v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}}{\partial y^A} + \sum_u^r L_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_u \alpha_1 \dots \alpha_{u-1} \alpha_{u+1} \dots \alpha_r} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \sum_u^s L_{\beta_u \Xi \beta_1 \dots \beta_{u-1} \beta_{u+1} \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$$

l'expression suivante

$$(34,4) \quad D_{\Xi \beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = e^{\mu} e_{\nu_1}^{\alpha_1} \dots e_{\nu_r}^{\alpha_r} e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_s} D_{\mu} v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}.$$

Cela étant, nous introduirons la notion de la *connexion projective induite dans X_m par \mathbb{P}_n* . Si $v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ est n'importe quel pro-affineur situé dans X_m , nous avons d'après (34,4)

$$(34,5) \quad D_{\Xi \Psi_1 \dots \Psi_s}^{\Lambda_1 \dots \Lambda_r} v_{\Psi_1 \dots \Psi_s}^{\Lambda_1 \dots \Lambda_r} = e^{\mu} e_{\nu_1}^{\Lambda_1} \dots e_{\nu_r}^{\Lambda_r} e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_s} D_{\mu} v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$$

et nous introduirons le symbole D_{μ}' de la connexion induite dans X_m moyen-

(1) Le pro-vecteur v^{ν} (w_{λ}) ainsi que les pro-vecteurs e_{λ}^{ν} , e_{λ} étant intrinsèques, tels sont aussi les scalaires v_{λ}^{ν} (w), (34,2) a).

nant l'équation

$$D_\mu' v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r} = e_\mu \begin{matrix} \Xi \\ \Lambda_1 \dots \Lambda_r \end{matrix} e^{\nu_1} \dots e^{\nu_r} \begin{matrix} \Psi_1 & \Psi_s \\ e_{\lambda_1} \dots & e_{\lambda_s} \end{matrix} D \begin{matrix} \Lambda_1 \dots \Lambda_r \\ \Xi \\ \Psi_1 \dots \Psi_s \end{matrix} v$$

qui est équivalente, à cause de (34,5) et (33,1). à

$$(34,6) \quad D_\mu' v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r} = B_\mu^\omega B_{\alpha_1}^{\nu_1} \dots B_{\alpha_r}^{\nu_r} B_{\lambda_1}^{\beta_1} \dots B_{\lambda_s}^{\beta_s} D_\omega v_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}.$$

L'hypersurface X_m , douée de cette connexion sera désignée par \mathbb{P}_m .

Une méthode analogue à celle que nous venons d'employer nous permet d'introduire même dans X_p^n une connexion induite. En désignant par D_μ'' son symbole, nous obtiendrons pour n'importe quel pro-affineur $w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ dans X_p^n

$$(34,7) \quad D_\mu'' w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r} = B_\mu^\omega C_{\alpha_1}^{\nu_1} \dots C_{\alpha_r}^{\nu_r} C_{\lambda_1}^{\beta_1} \dots C_{\lambda_s}^{\beta_s} D_\omega w_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}.$$

Tandis que $D_\mu' v_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ est dans X_m , $D_\mu'' w_{\lambda_1 \dots \lambda_s}^{\nu_1 \dots \nu_r}$ est par les indices $\nu_1 \dots \nu_r$, et $\lambda_1 \dots \lambda_s$ dans X_p^n et par μ dans X_m . Cela nous contraint à définir encore l'application du symbole D_μ'' aux grandeurs situées non seulement dans X_p^n mais aussi dans X_m . Si $V_{\omega\mu}^{\lambda\nu}$ est une telle grandeur

$$V_{\omega\mu}^{\lambda\nu} = B_\omega^\alpha B_\beta^\nu C_\mu^\gamma C_\delta^\lambda V_{\alpha\gamma}^{\delta\beta}$$

on a

$$(34,8) \quad \begin{aligned} D_\mu'' V_{\omega\mu}^{\lambda\nu} &= \delta_\Xi^A \frac{\partial V}{\partial y^A} - \frac{\omega}{a\Xi} \frac{c\Phi}{\Psi a} V - \frac{\Gamma}{\Psi\Xi} \frac{c\Phi}{\Gamma a} V + \frac{c}{\omega\Xi} \frac{w\Phi}{\Psi a} V + \frac{\Phi}{\Xi\Gamma} \frac{c\Gamma}{\Psi a} V = \\ &= e^\rho e^\omega e^\mu e_\lambda e_\nu D_\rho V_{\omega\mu}^{\lambda\nu}. \end{aligned}$$

Cela étant, nous définissons

$$D_\rho'' V_{\omega\mu}^{\lambda\nu} = e_\rho e_\omega e_\mu e^\lambda e^\nu D_\rho V_{\omega\mu}^{\lambda\nu},$$

d'où il suit

$$(34,9) \quad D_\rho'' V_{\omega\mu}^{\lambda\nu} = B_\rho^\xi B_\omega^\alpha B_\beta^\nu C_\mu^\gamma C_\delta^\lambda D_\xi V_{\alpha\gamma}^{\delta\beta}.$$

X_p^n douée de cette connexion sera désignée par \mathbb{P}_p^n . Il est à remarquer que le symbole D_μ'' s'attache à la dérivation à *travers* \mathbb{P}_p^n , tandis que D_μ' définit la dérivée *le long de* \mathbb{P}_m . Il s'ensuit que la notion de la connexion induite dans X_p^n n'est pas analogue à celle que l'on introduit ordinairement

en étudiant une hypersurfaces non-holonome dans le calcul vectoriel, car la dérivation dans cette connexion s'effectue *le long* de l'hypersurface en question (4).

Suivant les définitions, on a en particulier

$$(34,10) \quad D_\mu' B_\lambda^\nu = D_\mu'' C_\lambda^\nu = 0.$$

Les connexions induites ne dépendent pas du choix particulier du repère pro-vectoriel e_λ^ν , pourvu que (33.1) soient satisfaites.

35. Pro-affineurs $H_{\lambda\mu}^\nu$, $L_{\lambda\mu}^\nu$ et $T_{\lambda\mu}^{\nu\sigma}$. — En tenant compte de (11,7) et (33,2) on trouve

$$(35,1) \quad B_\mu^\xi D_\xi B_o^\alpha = -B_\mu^\xi D_\xi C_o^\alpha = c C_\xi^\alpha B_\mu^\xi = 0.$$

D'autre part, on a d'après (11,13)

$$(35,2) \quad D_o B_\xi^\alpha = D_o C_\xi^\alpha = 0.$$

Cela posé. nous introduirons les pro-affineurs

$$(35,3) \quad \begin{aligned} H_{\mu\lambda}^\nu &= B_\mu^\alpha B_\lambda^\beta D_\alpha B_\beta^\nu = -B_\mu^\alpha B_\lambda^\beta D_\alpha C_\beta^\nu \\ L_{\mu\lambda}^\nu &= B_\mu^\alpha B_\beta^\nu D_\alpha B_\lambda^\beta = -B_\mu^\alpha B_\beta^\nu D_\alpha C_\lambda^\beta. \end{aligned}$$

En tenant compte de (35,1-2) on peut écrire aussi

$$(35,4) \quad \begin{aligned} H_{\mu\lambda}^\nu &= B_\mu^i B_\lambda^j D_i B_j^\nu = -B_\mu^i B_\lambda^j D_i C_j^\nu \\ L_{\mu\lambda}^\nu &= -B_\mu^i B_\beta^\nu D_i C_\lambda^\beta = B_\mu^i C_\lambda^\beta D_i B_\beta^\nu = B_\mu^i C_\lambda^j D_i B_j^\nu = \\ &= -B_\mu^i B_j^\nu D_i C_\lambda^j = B_\mu^i B_j^\nu D_i B_\lambda^j. \end{aligned}$$

D'autre part, si l'on tient compte de la notion de la connexion induite dans X_m , on obtient d'après (34,10) et (33,4)

$$(35,5) \quad \begin{aligned} H_{\mu\lambda}^\nu &= B_\mu^\gamma B_\lambda^\alpha B_\beta^\nu D_\alpha B_\beta^\gamma + C_\gamma^\nu B_\mu^\alpha B_\lambda^\beta D_\alpha B_\beta^\gamma = D_\mu' B_\lambda^\nu + \\ &+ C_\gamma^\nu B_\mu^\alpha B_\lambda^\beta D_\alpha B_\beta^\gamma = C_\gamma^k B_\mu^i B_\lambda^j D_i B_j^k \\ L_{\mu\lambda}^\nu &= B_\lambda^i B_\mu^\alpha B_\beta^\nu D_\alpha B_\gamma^\beta + C_\lambda^i B_\mu^\alpha B_\beta^\nu D_\alpha B_\gamma^\beta = D_\mu' B_\lambda^\nu + \\ &+ C_\lambda^k B_\mu^\alpha B_\beta^\nu D_\alpha B_\gamma^\beta = C_\lambda^k B_\mu^i B_j^\nu D_i B_k^j, \end{aligned}$$

d'où il suit que $H_{\mu\lambda}^\lambda$ est avec l'indice ν et $L_{\mu\lambda}^\lambda$ avec l'indice λ dans \mathbb{P}_p^n .

Les équations (35,4) nous apprennent aussi à cause de (33,4)

$$(35,6) \quad H_{o\lambda}^\nu = H_{\mu o}^\nu = L_{\mu o}^\nu = L_{o\lambda}^\nu = 0,$$

(4) Voir (53), (83).

de sorte que

$$(35,7) \quad \begin{aligned} H_{\mu\lambda}^\nu &= \delta_\mu^i \delta_\lambda^j B_i^k B_j^l D_k B_l^\nu \\ L_{\mu\lambda}^\nu &= \delta_\mu^i \delta_\lambda^j B_i^k B_l^l D_k B_j^l. \end{aligned}$$

On a donc en particulier

$$(35,8) \quad \begin{aligned} H_{ab}^c &= C_k^c B_a^i B_b^j D_i B_j^k = C_k^c B_a^i B_b^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} B_j^k + \Lambda_{\lambda i}^k B_j^\lambda - \Lambda_{ji}^\lambda B_\lambda^k \right) \\ &= C_k^c e_a^A B_b^j \frac{\partial}{\partial y^A} B_j^k + \Lambda_{ii}^k C_k^c B_a^i B_b^l. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de (10,3), (10,4) et (11,4) b) on peut écrire aussi

$$H_{ab}^c = C_k^c e_a^A B_b^j \frac{\partial}{\partial y^A} B_j^k + {}^* \Gamma_{ii}^k C_k^c B_a^i B_b^l.$$

pour n'importe quelle connexion (10,3). En désignant par ${}^* \nabla$ le symbole de la dérivée covariante de cette connexion et par ∇ celui de la connexion Γ , on a, à cause de la dernière équation :

$$(35,9) \quad H_{ab}^c = C_k^c B_a^i B_b^j {}^* \nabla_i B_j^k = C_k^c B_a^i B_b^j \nabla_i B_j^k.$$

Puisque $B_e^l (C_e^l)$ est l'afineur-unité de $\mathbb{P}_m (\mathbb{P}_p^n)$, l'équation (35,9) montre que H_{ab}^c est l'afineur, introduit par M. SCHOUTEN sous le nom de « *Krümmungsaffinor* » (4). Cet affineur qui fait une partie du pro-affineur $H_{\lambda\mu}^\nu$ est donc invariant par rapport aux changements isohodoïques (10,3).

Remarquons encore que grâce aux équations (35,1), les pro-affineurs $H_{\mu\lambda}^\nu$ et $L_{\mu\lambda}^\nu$ peuvent être écrits

$$(35,10) \quad \begin{aligned} H_{\mu\lambda}^\nu &= e^\nu D_{\mu'}^{\Xi} e_\lambda^\Xi + B_{\mu'}^{\alpha\Xi} e_\lambda^\alpha D_\alpha e^\nu \\ L_{\mu\lambda}^\nu &= - e^\nu D_{\mu''}^a e_\lambda^a - B_{\mu''}^{\alpha a} e_\lambda^\alpha D_\alpha e^\nu. \end{aligned}$$

Il s'ensuit en particulier

$$H_{[\mu\lambda]}^\nu = e^\nu D_{[\mu}^{\Xi} e_{\lambda]}^\Xi + B_{[\mu}^{\alpha\Xi} e_{\lambda]}^\alpha D_\alpha e^\nu.$$

Mais

$$B_{[\mu}^{\alpha\Xi} e_{\lambda]}^\alpha D_\alpha e^\nu = B_{[\mu}^{\alpha o} e_{\lambda]}^\alpha D_o e^\nu + B_{[\mu}^{\alpha A} e_{\lambda]}^\alpha D_A e^\nu$$

(4) Voir (46) page 159. Pour les affineurs H_{ab}^c et L_{ab}^c dans L_n (nonsymétrique) voir (28), (5) et pour les cas plus généraux, cfr. (8).

et

$$B_{[\mu}^{\alpha} e_{\lambda]} D_{\alpha} e^{\nu} = B_{[\mu}^{\alpha} e_{\lambda]} c A_{\alpha}^{\nu} = B_{[\mu}^{\alpha} e_{\lambda]} c$$

$$B_{[\mu}^{\alpha} e_{\lambda]} D_{\alpha} e^{\nu} = B_{[\mu}^{\alpha} B_{\lambda]}^{\beta} \Lambda_{\beta \alpha}^{\nu} - B_{[\mu}^{\alpha} e_{\lambda]} c = B_{\mu}^{\alpha} B_{\lambda]}^{\beta} T_{\beta \alpha}^{\nu} - B_{[\mu}^{\alpha} e_{\lambda]} c$$

de sorte que

$$(35,11) \quad H_{[\mu \lambda]}^{\nu} = e^{\nu} D'_{[\mu} e_{\lambda]} + B_{\mu}^{\alpha} B_{\lambda]}^{\beta} T_{\beta \alpha}^{\nu}.$$

Cela posé, introduisons le pro-affineur

$$(35,12) \quad T''_{\mu \lambda} = \underset{\Phi \Xi}{\overset{\Psi}{L}} e_{[\mu} e_{\lambda]} e^{\nu},$$

lequel, à cause de (34,1), peut être écrit aussi

$$(35,13) \quad T''_{\mu \lambda} = B_{\mu}^{\alpha} B_{[\lambda}^{\beta} e_{\mu]} D_{\alpha} e^{\beta},$$

ou bien, en raison de (33,1) et (34,10)

$$(35,14) \quad T''_{\mu \lambda} = e_{[\mu} D'_{\lambda]} e^{\nu} = - e^{\nu} D'_{[\lambda} e_{\mu]}.$$

En comparant cette équation à (35,11) on trouve

$$(35,15) \quad B_{\mu}^{\alpha} B_{\lambda]}^{\beta} T_{\beta \alpha}^{\nu} = H_{[\mu \lambda]}^{\nu} + T''_{\mu \lambda}$$

et par conséquent

$$(35,16) \quad B_{\mu}^{\alpha} B_{\lambda]}^{\beta} B_{\gamma}^{\nu} T_{\beta \alpha}^{\nu} = T''_{\mu \lambda}.$$

Le pro-affineur $T''_{\lambda \mu}$, qui est le *pro-affineur de torsion de \mathbb{P}_m* , est donc la X_m -composante du pro-affineur $T''_{\lambda \mu}$, lequel est le pro-affineur de torsion de \mathbb{P}_n . Celui-ci ne s'annule que si la connexion vectorielle est (semi)-symétrique. (Voir l'équation (10,9)). Dans ce cas on a à cause de (35,15)

$$H_{[\mu \lambda]}^{\nu} = T''_{\mu \lambda}.$$

Mais le pro-affineur T'' étant dans \mathbb{P}_m , on en déduit à cause de (35,5)

$$H_{[\mu \lambda]}^{\nu} = 0.$$

Si la connexion vectorielle est (semi)-symétrique, le pro-affineur $H_{\mu \lambda}^{\nu}$ est symétrique dans ces indices covariants (').

(') Un cas analogue se présente aussi pour la connexion vectorielle. Cfr. (28) et pour le cas plus général (8).

Remarquons encore que grâce aux équations

$$H_{\mu\lambda}^\nu = \delta_\mu^i \delta_\lambda^j H_{ij}^\nu, \quad T_{\mu\lambda}^\nu = \delta_\mu^i \delta_\lambda^j T_{ij}^\nu$$

on a aussi en raison de (35,15)

$$(35,17) \quad T_{\mu\lambda}^\nu = \delta_\mu^i \delta_\lambda^j T_{ij}^\nu.$$

36. Applications. — Imaginons donné un champ $v^\nu (w_\lambda')$ dans \mathbb{P}_m et construisons les expressions $B_\mu^\alpha D_\alpha v^\nu (B_\mu^\alpha D_\alpha w_\lambda')$ en tenant compte de la définition du symbole D_α' (34,6). On trouve ainsi

$$(36,1) \quad \begin{aligned} B_\mu^\alpha D_\alpha v^\nu &= B_\mu^\alpha (B_\beta^\nu + C_\beta^\nu) D_\alpha v'^\beta = D_\mu' v^\nu - v'^\beta B_\mu^\alpha D_\alpha C_\beta^\nu = D_\mu' v^\nu + v'^\lambda H_{\mu\lambda}^\nu \\ B_\mu^\alpha D_\alpha w_\lambda' &= B_\mu^\alpha (B_\lambda^\beta + C_\lambda^\beta) D_\alpha w_{\beta'} = D_\mu' w_\lambda' - w_{\beta'} B_\mu^\alpha D_\alpha C_\lambda^\beta = D_\mu' w_\lambda' + w_\nu' L_{\mu\lambda}^\nu. \end{aligned}$$

Analoguement, on trouve pour n'importe quel pro-vecteur $v''^\nu (w_\lambda'')$ pseudonormal à \mathbb{P}_m

$$(36,2) \quad \begin{aligned} B_\mu^\alpha D_\alpha v''^\nu &= D_\mu'' v''^\nu - L_{\mu\lambda}^\nu v''^\lambda \\ B_\mu^\alpha D_\alpha w_\lambda'' &= D_\mu'' w_\lambda'' - H_{\mu\lambda}^\nu w_\nu''. \end{aligned}$$

Ces équations nous permettent de décomposer les expressions telles que $B_\mu^\alpha D_\alpha v^\nu (B_\mu^\alpha D_\alpha w_\lambda)$ pour n'importe quel pro-vecteur $v^\nu (w_\lambda)$. En décomposant ce pro-vecteur lui-même d'après

$$v^\nu = v'^\nu + v''^\nu, \quad w_\lambda = w_\lambda' + w_\lambda''$$

on obtient, grâce aux équations (36,1-2)

$$(36,3) \quad \begin{aligned} B_\mu^\alpha D_\alpha v^\nu &= D_\mu' v^\nu + D_\mu'' v''^\nu + v^\lambda (H_{\mu\lambda}^\nu - L_{\mu\lambda}^\nu) \\ B_\mu^\alpha D_\alpha w_\lambda &= D_\mu' w_\lambda' + D_\mu'' w_\lambda'' + w_\nu (L_{\mu\lambda}^\nu - H_{\mu\lambda}^\nu). \end{aligned}$$

Ces équations nous mènent aussi à la notion des champs projectifs à eux-mêmes dans \mathbb{P}_m resp. \mathbb{P}_p^n . Imaginons à cet effet un pro-vecteur v^ν (un vecteur w_j) qui au point P de \mathbb{P}_m est dans \mathbb{P}_m

$$(36,4) \quad (v^\nu)_P = (v'^\nu)_P, \quad (w_j)_P = (w_j')_P,$$

et déplaçons-le projectivement à lui-même le long de \mathbb{P}_m

$$(36,5) \quad \begin{aligned} dx^\alpha D_\alpha v^i &= \mathfrak{D}v^i = av^i \\ dx^\alpha D_\alpha w_j &= \mathfrak{D}w_j = aw_j. \end{aligned}$$

En introduisant les scalaires symboliques

$$\mathfrak{D}' = dx^\alpha D_\alpha', \quad \mathfrak{D}'' = dx^\alpha D_\alpha''$$

on obtient à cause de (36,3) et (36,5)

$$\begin{aligned}\partial v^i &= \partial' v^i + \partial'' v''^i + v^j dx^k (H_{kj}^i - L_{kj}^i) \\ \partial w_j &= \partial' w_j' + \partial'' w_j'' + w_i dx^k (L_{kj}^i - H_{kj}^i).\end{aligned}$$

Or, le vecteur $(v^i + \partial v^i)$, $(w_j + \partial w_j)$ peut être décomposé en deux composantes, à savoir; la X_p^n -composante

$$(v^j + \partial v^j) C_j^i, \quad (w_k + \partial w_k) C_j^k$$

et la X_m -composante

$$\begin{aligned}(v^j + \partial v^j) B_j^i &= v^i + \partial' v^i - v^j dx^k L_{kj}^i \\ (w_k + \partial w_k) B_j^k &= w_j' + \partial' w_j' - w_i dx^k H_{kj}^i,\end{aligned}$$

d'où il suit en P , à cause de (36,4)

$$\begin{aligned}(v^j + \partial v^j) B_j^i &= v^i + \partial' v^i \\ (w_k + \partial w_k) B_j^k &= w_j' + \partial' w_j'.\end{aligned}$$

En comparant ces équations à (36,5) on trouve en P

$$(36,6) \quad \partial' v^i = \alpha v^i, \quad \partial' w_j' = \alpha w_j'.$$

Nous dirons que ladite X_m -composante est un vecteur déplacé *dans* \mathbb{P}_m *projectivement* à lui-même.

On peut définir analoguement le déplacement projectif dans \mathbb{P}_p^n . Imaginons à cet effet un pro-vecteur v^i (un vecteur w_j) qui au point examiné est dans \mathbb{P}_p^n et déplaçons-le projectivement à lui-même *dans* \mathbb{P}_p^n le long de \mathbb{P}_m . En construisant la X_p^n -composante du vecteur déplacé, on trouve à cause de (36,3)

$$(36,7) \quad \partial'' v''^i = \alpha v''^i, \quad \partial'' w_j'' = \alpha w_j''.$$

On voit donc que la définition analytique du déplacement projectif dans \mathbb{P}_m resp. \mathbb{P}_p^n est analogue à celle du déplacement projectif dans \mathbb{P}_n . D'autre part, cette définition est la plus naturelle généralisation du déplacement parallèle introduit par M. LEVI-CIVITA dans une variété riemannienne V_m , plongée dans l'espace euclidien R_n ⁽¹⁾.

Remarquons expressément qu'un pro-vecteur projectif à lui-même dans \mathbb{P}_m (\mathbb{P}_p^n) ne l'est pas en général dans \mathbb{P}_n ce qui suit des équations déduites de (36,1-2)

$$(36,8) \quad \begin{aligned}\partial v^i &= \partial' v^i + dx^k v^j H_{kj}^i, & \partial v''^i &= \partial'' v''^i - L_{kj}^i v''^j dx^k \\ \partial w_j &= \partial' w_j' + dx^k w_i' L_{kj}^i, & \partial w_j'' &= \partial'' w_j'' - H_{kj}^i w_i'' dx^k.\end{aligned}$$

(1) Voir (39) et (40). Cfr. aussi (28) pour les cas plus généraux.

Or, si v^ν est projectif à lui-même dans \mathbb{P}_m il ne l'est pas dans \mathbb{P}_n , que si

$$v^j dx^k H^i_{kj} = 0.$$

En tenant compte de ce que H^i_{kj} est le « Krümmungsaffinor » de la connexion vectorielle induite dans X_m , on peut dire: « Un champ pro-vectoriel général v^ν dans \mathbb{P}_m , qui est projectif à lui-même dans \mathbb{P}_m ne l'est dans \mathbb{P}_n , que si X_m est géodésique dans X_n , donnée de n'importe quelle des connexions vectorielles (10,3) ».

Ce théorème peut être envisagé comme la généralisation du théorème bien connu de M. SEVERI, suivant lequel un champ vectoriel dans V_m , parallèle à lui-même dans V_m , n'est parallèle à lui-même dans V_n (où V_m est plongée) que si V_m est géodésique dans V_n (1) (2). Un théorème analogue est valable pour w_j'' projectif à lui-même dans \mathbb{P}_p^n .

37. Équation fondamentale. — Imaginons donné un pro-vecteur v^ν (v_λ') dans \mathbb{P}_m et calculons les dérivées $D'_{[\omega} D'_{\mu]} v^\nu$ ($D'_{[\omega} D'_{\mu]} v_\lambda'$). En posant

$$(37,1) \quad \frac{1}{2} P^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = e_{[\omega} e_{\mu]} e_\lambda^\nu \frac{\Xi \Phi \psi}{\Pi} \left(\partial_\Phi^A \frac{\partial}{\partial y^A} \frac{\Pi}{\psi \Xi} \frac{\Gamma}{\Gamma \Phi} \right),$$

on trouve facilement « les identités de RICCI », à savoir

$$(37,2) \quad \begin{aligned} 2D'_{[\omega} D'_{\mu]} v^\nu &= -P^{\nu}_{\omega\mu\lambda} v^\lambda + 2T'^{\alpha}_{\omega\mu} D'_\alpha v^\nu \\ 2D'_{[\omega} D'_{\mu]} v_\lambda' &= P^{\nu}_{\omega\mu\lambda} v_\nu' + 2T'^{\alpha}_{\omega\mu} D'_\alpha v_\lambda'. \end{aligned}$$

Le pro-affineur $P^{\nu}_{\omega\mu\lambda}$ sera dit « le pro-affineur de courbure de \mathbb{P}_m ». Parce que

$$D'_\mu e^\nu = B^\alpha_\mu B^\nu_\beta D'_\alpha e^\beta = cB^\nu_\mu,$$

on a à cause de (34,10)

$$D'_{[\omega} D'_{\mu]} e^\nu = cD'_{[\omega} B^\nu_{\mu]} = 0$$

(1) Voir (45) et pour les cas plus généraux (28).

(2) On suppose naturellement que dx^k soit un vecteur *arbitraire* dans \mathbb{P}_m , car si p. ex. $m = n - 1$ et $v^i \propto dx^i$, l'équation

$$v^j dx^k H^i_{kj} = 0$$

peut être satisfaite même si \mathbb{P}_m n'est pas géodésique au sens mentionné plus haut. Le cas échéant, chaque courbe définie par cette dernière équation est une courbe asymptotique (non-seulement dans X_m douée d'une connexion vectorielle induite par n'importe quelle des connexions (10,3), mais aussi) dans \mathbb{P}_m .

et par conséquent, en raison de (37,2)

$$P''_{\omega\mu\sigma} = 2cT''_{\omega\mu}.$$

On a obtenu ainsi une équation analogue à (14,4). D' autre part, si v''^{ν} (w''_{λ}) est un pro-vecteur dans \mathbb{P}_p^n on trouve pour lui

$$(37,3) \quad \begin{aligned} D''_{[\omega} D''_{\mu]} v''^{\nu} &= -P''_{\omega\mu\lambda} v''^{\lambda} + 2T''_{\omega\mu} D''_{\alpha} v''^{\nu} \\ D''_{[\omega} D''_{\mu]} w''_{\lambda} &= P''_{\omega\mu\lambda} w''_{\nu} + 2T''_{\omega\mu} D''_{\alpha} w''_{\lambda}, \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{2} P''_{\omega\mu\lambda} = e_{[\omega}^{\bar{x}} e_{\mu]}^{\Phi} e_{\lambda}^a e_{\epsilon}^{\nu} \left(\partial_{\Phi}^A \frac{\partial}{\partial y^A} \frac{\epsilon}{L} + \frac{\bar{k}}{L} \frac{\epsilon}{L} \right)$$

est « le pro-affineur de courbure de \mathbb{P}_p^n ». Remarquons expressément que l'on a

$$(37,4) \quad P''_{\omega\mu\lambda} = B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} B_{\lambda}^{\gamma} B_{\delta}^{\nu} P''_{\alpha\beta\gamma}, \quad P''_{\omega\mu\lambda} = B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} C_{\lambda}^{\gamma} C_{\delta}^{\nu} P''_{\alpha\beta\gamma}$$

et de plus

$$(37,5) \quad P''_{\omega\mu\sigma} = 0.$$

Cela posé, introduisons les pro-affineurs

$$(37,6) \quad \begin{aligned} H''_{\omega\mu\lambda} &= B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} B_{\lambda}^{\gamma} D_{\alpha} H''_{\beta\gamma} \\ L''_{\omega\mu\lambda} &= B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} C_{\lambda}^{\gamma} D_{\alpha} L''_{\beta\gamma}, \end{aligned}$$

et calculons $H''_{[\omega\mu]\lambda}$, $L''_{[\omega\mu]\lambda}$. En tenant compte de (35,10), (35,15) et (37,2) on trouve par un calcul assez long, mais covariant

$$(37,7) \quad \begin{aligned} \text{a) } 2H''_{[\omega\mu]\lambda} &= P''_{\omega\mu\lambda} - B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} B_{\lambda}^{\gamma} P''_{\alpha\beta\gamma} + 2T''_{\omega\mu} H''_{\alpha\lambda} \\ \text{b) } 2L''_{[\omega\mu]\lambda} &= -P''_{\omega\mu\lambda} + B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} C_{\lambda}^{\gamma} P''_{\alpha\beta\gamma} + 2T''_{\omega\mu} L''_{\alpha\lambda}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$(37,8) \quad B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} P''_{\alpha\beta\lambda} = P''_{\omega\mu\lambda} + P''_{\omega\mu\lambda} - 2T''_{\omega\mu} (L''_{\alpha\lambda} - H''_{\alpha\lambda}) + 2(L''_{[\omega\mu]\lambda} - H''_{[\omega\mu]\lambda}).$$

Cette équation contient toutes les équations fondamentales de la théorie de \mathbb{P}_m dans \mathbb{P}_n , comme nous aurons occasion de le démontrer. C'est pour cela que nous l'appellerons « l'équation fondamentale ». J'ai déduit l'équation analogue (pour le calcul vectoriel) sous une autre forme dans un travail antérieur ⁽¹⁾.

Ici, je me suis servi du pro-affineur $P''_{\omega\mu\lambda}$ analogue à un affineur dans le calcul vectoriel, où il fut introduit par M. BORTOLOTTI ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Voir (28), cfr. (5) et (88).

⁽²⁾ Voir (8).

En posant $\lambda = 0$ dans (37,8) on obtient, à cause de (37,5)

$$B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} P_{\omega\mu\sigma}^{\nu} = P_{\omega\mu\sigma}^{\nu} + 2(L_{[\omega\mu]\sigma}^{\nu} - H_{[\omega\mu]\sigma}^{\nu}).$$

Mais puisque

$$H_{[\omega\mu]\sigma}^{\nu} = B_{[\omega}^{\alpha} B_{\mu]}^{\beta} B_{\sigma}^{\gamma} D_{\alpha} H_{\beta\gamma}^{\nu} = B_{[\omega}^{\alpha} B_{\mu]}^{\beta} D_{\alpha} H_{\beta\sigma}^{\nu} = -c H_{[\omega\mu]\sigma}^{\nu}$$

$$L_{[\omega\mu]\sigma}^{\nu} = B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} C_{\sigma}^{\gamma} D_{\alpha} L_{\beta\gamma}^{\nu} = 0$$

on en déduit

$$B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} P_{\alpha\beta\sigma}^{\nu} = P_{\omega\mu\sigma}^{\nu} - 2c H_{[\omega\mu]\sigma}^{\nu}$$

et cette équation est une autre forme de l'équation déjà déduite (35,15).

D'autre part, (37,8) contient « theorema egregium » de GAUSS, à savoir

$$(37,9) \quad B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} B_{\lambda}^{\gamma} B_{\delta}^{\nu} P_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = P_{\omega\mu\lambda}^{\nu} - 2B_{\delta}^{\nu} H_{[\omega\mu]\lambda}^{\delta}$$

les équations de CODAZZI

$$(37,10) \quad \begin{aligned} B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} B_{\lambda}^{\gamma} C_{\delta}^{\nu} P_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} &= 2T_{\omega\mu}^{\alpha} H_{\alpha\lambda}^{\nu} - 2H_{[\omega\mu]\lambda}^{\delta} C_{\delta}^{\nu} \\ B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} C_{\lambda}^{\gamma} B_{\delta}^{\nu} P_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} &= -2T_{\omega\mu}^{\alpha} L_{\alpha\lambda}^{\nu} + 2L_{[\omega\mu]\lambda}^{\delta} B_{\delta}^{\nu}. \end{aligned}$$

et les équations de KUEHNE

$$(37,11) \quad B_{\omega}^{\alpha} B_{\mu}^{\beta} C_{\lambda}^{\gamma} C_{\delta}^{\nu} P_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = P_{\omega\mu\lambda}^{\nu} + 2L_{[\omega\mu]\lambda}^{\delta} C_{\delta}^{\nu}.$$

Toutes ces équations peuvent être déduites directement de (37,7) a), b).

L'équation fondamentale une fois trouvée, on peut s'en servir pour étudier les invariants différentiels de \mathbb{P}_m dans \mathbb{P}_n , qui, cela va sans dire, ne dépendent pas des changements isohodographiques (10,3).

Prague, décembre, 1931, Université Charles.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

BACH R.

- 1 - *Zur Weyl'schen Relativitätstheorie und der Weyl'schen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffes.* « Math. Ztschr », 9, 1921, 110-136.

BELTRAMI

- 2 - *Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano*
« Annali Mat. », VII, 1865, 185-204.
3 - *Teoria fondamentale degli iperspazi di curvatura costante.* Ibid., 1868. 232-255.
4 - *Saggio di una interpretazione della geometria non-euclidea.* « Giorn. di Mat. », 6, 1868, 284-312.

BORTOLOTTI E.

- 5 - *Spazi subordinati, equazioni di Gauss e Codazzi.* « Boll. Unione Mat. », 6, 1927, 134-137.
6 - *Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariante delle trasformazioni che conservano il parallelismo.* « Annali di Mat. », ser. IV, tomo VIII, 1930-1931, 53-101.

- 7 - *Differential invariants of direction and point displacement.* « Annals of Math. », 32, 1931, 361-377.
 8 - *Sulle varietà subordinate.* « Ist. Lombardo », 64, 1931, 1-23.
 9 - *Connessioni Proiettive.* « Boll. Unione Mat. », 9, 1930, 288-294, 10, 1931, 83-90.

CARTAN E.

- 10 - *Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité.* « Comptes Rendus », Paris, 174, 1922, 734-737.
 11 - *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisés.* « Annales de l'École Norm. Sup. », 40, 1923, 325-412. Prem. partie.
 12 - *Sur les variétés à connexion projectives.* « Bull. Soc. Mat. de France », 52, 1924, 205-241.

CHURCH A.

- 13 - *On the form of differential equations of a system of paths.* « Annals of Math. », 28, 1927, 629-630.

DOUGLAS J.

- 14 - *The general geometry of paths.* « Annals of Math. », (2), 29, 1926, 143-168.

EISENHART L. P.

- 15 - *Spaces with corresponding paths.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 8, 1922, 233-238.
 16 - *Affine geometries of paths possessing an invariant integral.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 9, 1923, 4-7.
 17 - *Non Riemannian Geometry.* « Amer. Math. Soc. Colloquium Public », VIII, New York 1927.
 18 - *Projective normal coördinates.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 16, 1930, 731-740.

EISENHART L. P. - KNEBELMAN M. S.

- 19 - *Displacement in a geometry of paths which carries paths into paths.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 13, 1927, 38-42

EYRAUD H.

- 20 - *Sur le caractère riemannien projectif du champ gravifique électromagnétique.* « Comptes Rendus », Paris, 180, 1925, 127-130.

FRIESECKE H.

- 21 - *Vektoruebertragung, Richtungsuebertragung, Metrick.* « Math. Ann. », 94, 1925, 101-118.

FUBINI G. - CECH E.

- 22 - *Geometria proiettiva differenziale.* Bologna, 1926-27, Zanichelli.
 23 - *Géométrie projective différentielle.* Paris, Gauthier-Villars, 1931.

GOLAB ST.

- 24 - *Ueber verallgemeinerte projektive Geometrie.* « Prace mat.-fizyczne », XVII, 1939, 91-153.

GOLAB ST. - HLAVATY V.

- 25 - *Vektorübertragung und Punktübertragung.* « Prace mat.-fizyczne », Sous presse.

HESSENBERG G.

- 26 - *Beispiele zur Richtungsübertragung*. « J. der. Deutsch. Mat. Verein. », 33, 1924, 93-95.

HLAVATY V.

- 27 - *Sur le déplacement linéaire du point*. « Vestník Kr. České Spol. Nauk », Prague, 2, 1924, 13, 8 p.
 28 - *Contribution au calcul différentiel absolu*. « Vestník Kr. České Spol. Nauk », Prague, 2, 1926, 1-12.
 29 - *Sur les déplacements isohodiques*. « L'enseignement math. », 26, 1927, 84-97.
 30 - *Théorie des densités dans le déplacement général*. « Annali di Mat. », (4), 5, 1927-1928, 73-83.
 31 - *Bemerkung zur Arbeit von Herren T. Y. Thomas...* « Mat. Ztschr », 28, 1928, 142-146.
 32 - *Proprietà differenziali delle curve in uno spazio a connessione lineare generale*. « Rend. Circ. Palermo », 53, 1929, 1-24.
 33 - *Ancora sulle proprietà delle curve...* « Ibid ».
 34 - *Projektive Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve*. « Math. Ztschr », 34, 1931, 56-73.

HOFFMANN B.

- 35 - *Projective Relativity and the Quantum Field*. « Phys. Review », 37, 1931, 88-89.

KNEBELMAN M. S.

- 36 - *Groups of collineations in a space of paths*. « Proc. Nat. Ac. Sc. », 13, 1927, 396-400.
 37 - *Collineations of projectively related affine connections*. « Ann. of Math. », 29, 1928, 389-394.
 38 - *Tensors with invariant components*. « Ann. of Math », 30, 1929, 339-344.

LEVI-CIVITA T.

- 39 - *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*. « Rend. Circ. Palermo », 42, 1917, 173-205.
 40 - *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. « Raccolte e compilate dal dott. E. Persico », Roma, 1925, A. Stock.

MICHAL A. D.

- 41 - *Projective integral invariants attached to the trajectories of differential systems*. « Bull. of the Amer. Math. Soc. », 1931, 447-454.

NEWMAN M. H. A.

- 42 - *A gauge-Invariant Tensor Calculus*. « Proc. Royal Soc. », 116, 1927, 693-623.

ROBERTSON H. P.

- 43 - *Note on projective coördinates*. « Proc. Nat. Acad. », 14, 1928, 153-154.

ROBERTSON H. P. - WEYL H.

- 44 - *On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry*. « Bull. Am. Math. Soc. », 35, 1929, 686-690.

SEVERI F.

- 45 - *Sulla curvatura della superficie e varietà.* « Rend. Circolo Mat. Palermo », XLII, 1917, 227-259.

SCHOUTEN J. A.

- 46 - *Der Ricci-Kalkül.* Berlin, Springer, 1924.
 47 - *Sur les connexion conformes et projectives de M, Cartan.* « Comptes Rendus », Paris, 178, 1924, 2044-2046.
 48 - *Over de plaats der conforme en projectieve meetkunde ...* « Kon. Ak. van Wet. », XXXIII, 1924, 401-418.
 49 - *Projectieve en konforme invarianten bij kalfsymmetrische overbrenging.* « Kon. ak. van Wet. », XXXIV, 1925, 1300-1302.
 50 - *On the condition of integrability of covariant differential equations.* « Transactions of Am. Math. Soc. », 27, 1925, 441-473.
 51 - *Erlanger Programm und Uebertragungslehre...* « Rend. Circolo Mat. Palermo », 50, 1926, 142-169.
 52 - *Ueber die Projektivkrümmung und Konformkrümmung halbsymmetrischer Uebertragungen.* « In Memoriam N. I. Lobacevski », vol. II, 1926, 90-98.
 53 - *Ueber nicht-holonome Uebertragungen in einer L_n .* « Math. Ztschr. », 30, 1929, 149-172.

SCHOUTEN J. A. - GOLAB ST.

- 54_a - *Ueber projektive Uebertragungen und Ableitungen, I.* « Maht. Ztschr. », 32, 1930, 192-214.
 54_b - *Ueber projektive Uebertragungen und Ableitungen.* « Annali di Math. », (4), 8, 1930-31, 141-157.

SCHOUTEN J. A. - HLAVATY V.

- 55 - *Zur Theorie der allgemeinen linearen Uebertragung.* « Math. Ztschr. », 30, 1929, 414-432.

THOMAS J. M.

- 56 - *Note on the projective geometry of paths.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 11, 1925, 207-209.
 57 - *Asymetric displacement of a vector.* « Transactions Am. Math. Soc. », 28, 1926, 658-670.

THOMAS T. Y.

- 58 - *Note on the projective geometry of paths.* « Bull. Am. Math. Soc. », 31, 1925, 318-322.
 59 - *On the projective and equiprojective geometries of paths.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 11, 1925, 199-203.
 60 - *Announcement of a proj. Theory of affinely connected Manifolds.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 11, 1925, 588-589.
 61 - *On the equi-projective geometry of paths.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 11, 1925, 592-594.
 62 - *A projective theory of affinely connected manifolds.* « Math. Ztschr. », 25, 1926, 723-733.
 63 - *Tensors whose components are absolute constants.* « Ann. of Math. », 27, 1926, 548-550.
 64 - *The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths.* « Ann. of Math. », 28, 1927, 549-561.
 65 - *Concerning the *G group of transformations.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 14, 1928, 728-734.

VEBLEN O.

- 66 - *Projective and affine geometry of paths.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 8, 1922, 347-350.
 67 - *Equi-affine geometry of paths.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 9, 1923, 3-4.

- 68 - *Remarks on the Foundation of geometry.* « Bull. Am. Math. Soc. », 31, 1925, 121-141.
 69 - *Differential invariants and geometry.* « Atti Congr. Int. Math. », Bologna, I, 181-189.
 70 - *Proj. Tensors and connections.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 14, 1928, 154-166.
 71 - *Generalized projective geometry.* « Journal of London Math. Soc. », 4, 1929, 140-160.
 72 - *A generalization of the quadratic differential form.* « The quarterly Journal of Math. », 1, 1930, 60-76.

VEBLEN O. - HOFFMANN B.

- 73 - *Projective Relativity.* « Physical Review », 36, 1930, 810-822.

VEBLEN O. - THOMAS J. M.

- 74 - *Projective normal coordinates for the geometry of paths.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 11, 1925, 204-207.
 75 - *Projective Invariants of affine geometry of paths.* « Ann. of Math. », 27, 1925-26, 279-295.

VEBLEN O. - THOMAS T. Y.

- 76 - *Extensions of relative tensors.* « Transactions Am. Math. Soc. ». 26, 1924, 373-377.

VRANCEANU G.

- 77 - *Studio geometrico dei sistemi anolonomi.* « Ann. di Mat. », (4), 6, 1929, 9-43.

WEYL H.

- 78 - *Zur Infinitesimalgeometrie. Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.* « Goett. Nachrichten », 1921, 213-228.
 79 - *On the foundations of general infinitesimal geometry.* « Bull. Am. Math. Soc. », 1929, 716-725.

WHITEHEAD J. H. C.

- 80 - *On a class of projectively flat affine connections.* « Proc. London Math. Soc. », 32, 1929, 93-112.
 81 - *A method of obtaining normal representations for a projective connection.* « Proc. Nat. Ac. Sc. », 16, 1930, 754-760.
 82 - *The representation of projective spaces.* « Ann. of Math. », 32, 1931, 327-360.

WUNDHEILER A.

- 83 - *Ueber die Variationsgleichungen für affine geodaetische Linien....* « Prace mat.-fizyczne », XVIII, 1931, 1-19.

Supplément ajouté à l'occasion de l'épreuve :

BLASCHKE W.

- 84 - *Vorlesungen ueber Differentialgeometrie... II.* (Berlin, 1923).

BORTOLOTTI E.

- 85 - *Spazi proiettivamente piani.* « Ann. Mat. pura appl. », s. IV, 11, 1932, 111-134.

DANTZIG van D.

- 86 - *Theorie des projektiven Zusammenhänge n -dimensionaler Räume.* « Mathem. Annalen », Bd. 106, 1932, 400-454.
 87 - *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie I et II.* « Proceedings Kon. Akademie Wetensch », XXXV, 1932, 524-534 et 535-542.

DIENES P.

- 88 - *On the fundamental formulae of the geometry of tensor submanifolds.* « J. Math. pures et appl. », s. IX, 11, 1932, 255-282.

HLAVATY V.

- 89 - *Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} .* « Atti Acc. Naz. Lincei Rend. », s. VI, 16, 1932, 109-114.
 90 - *Encore sur les invariants projectifs....* « Dtto », 1932, 206-211.
 91 - *Courbures projectives d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} .* « Dtto », 1932, 299-304.
 92 - *Système complet des invariants différentiels projectifs d'une courbe dans l'espace projectif courbe.* (A paraître dans les « Abhandlungen des Moskauer Seminars für Tensoranalysis », T. II).

VEBLEN O.

- 93 - *Projektive Relativitätstheorie.* « Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete », B. II, 1933.

Su un teorema di Tchebychef-Nagel.

Memoria di GIOVANNI RICCI (a Pisa).

Sunto. - Si dimostra che: Se $F(x)$ è un polinomio in x , di grado $g > 1$, a coefficienti interi, irriducibile, e P_x denota il massimo divisore primo del prodotto $F(1)F(2) \dots F(x)$ risulta

$$\max \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{P_x} \leq \frac{g}{g-1},$$

e se $F(x)$ è un polinomio pari anche $\max \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{P_x} \leq \frac{g}{2(g-1)}$. Si migliora così un risultato di T. NAGEL che assegna rispettivamente i valori $g^2, \frac{g^2}{2}$.

1. Sia $F(x)$ un polinomio in x a coefficienti razionali interi e denotiamo con P_x il massimo fattore primo del prodotto $F(1)F(2) \dots F(x)$, che supponiamo non nullo. P. TCHEBYCHEF dimostrò il notevole teorema ⁽¹⁾ che tanto per $F(x) = 1 + x^2$, quanto per $F(x) = 1 + 4x^2$ si ha

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{P_x} = 0.$$

I. I. IVANOFF ⁽²⁾ e G. PÓLYA ⁽³⁾ estesero la proposizione, il primo ai polinomi della forma $F(x) = a + x^2$ ($a \geq 1$) e il secondo ai polinomi $F(x) = \Pi (x - \rho)$, in cui ρ percorre le $\varphi(n)$ radici primitive n -esime dell'unità ($n \geq 3$). Finalmente T. NAGEL ⁽⁴⁾ ha generalizzato il teorema estendendolo a tutti i polinomi $F(x)$ aventi almeno uno zero irrazionale, dimostrando per di più che vale la relazione

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \log^{1-\varepsilon} x}{P_x} = 0,$$

⁽¹⁾ E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig (1909) p. 559, p. 901; T. NAGEL, *Généralisation d'un théorème de Tchebychef*, « Journal de Mathématiques », 8 série, t. 4 (1921), pp. 343-356.

⁽²⁾ E. LANDAU, op. cit., p. 562, p. 901.

⁽³⁾ G. PÓLYA, *Généralisation d'un théorème de M. Störmer*, « Archiv for Mathematik og Nat. », t. 35, Kristiania (1917).

⁽⁴⁾ T. NAGEL, op. cit.

essendo ε un numero positivo qualunque. Anzi quest'ultimo autore ha ulteriormente dimostrato il seguente teorema ⁽⁵⁾.

« Sia $F(x)$ una funzione razionale intera a coefficienti interi, irriducibile, di grado g , $g > 1$; e siano inoltre ε un qualunque numero positivo e δ un qualunque numero positivo minore di $\frac{1}{g^2}$. Allora il prodotto $F(1)F(2)\dots F(x)$ possiede più di δx fattori primi distinti maggiori di $x \log^{1-\varepsilon} x$, a condizione di assumere $x > x_0$, dove x_0 dipende da ε e da δ . Per $F(x) = ax^2 + b$, si può sostituire $\frac{1}{2}$ in luogo di $\frac{1}{g^2}$ ».

Scopo della presente Nota è di apportare un miglioramento a quest'ultima proposizione di NAGEL sostituendo al valore numerico $\frac{1}{g^2}$ che limita δ , l'altro $\frac{g-1}{g}$. Veniamo così a dimostrare in sostanza la proposizione seguente:

Sia $F(x)$ una funzione di x razionale intera a coefficienti interi, irriducibile di grado g , $g > 1$, e sia δ un qualunque numero positivo minore di $\frac{g-1}{g}$. Il numero $N_\delta(x)$ degli interi primi distinti maggiori di $\delta x \log x$ che dividono il prodotto

$$(3) \quad F(1)F(2)F(3)\dots F(x)$$

soddisfa alla limitazione

$$(4) \quad N_\delta(x) \geq \frac{1}{g} \left(\frac{g-1}{g} - \delta \right) x + o(x).$$

Se $F(x)$ è un polinomio pari questa proposizione vale per $\delta < \frac{2(g-1)}{g}$ e nella (4) si può sostituire $\frac{1}{g} \left\{ \frac{2(g-1)}{g} - \delta \right\}$ al coefficiente $\frac{1}{g} \left(\frac{g-1}{g} - \delta \right)$.

OSSERVAZIONE. — Dando a P_x il significato che ha nella (1), questo teorema permette di sostituire, alla (1) stessa, la seguente limitazione

$$\max \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \log x}{P_x} \leq \frac{g}{g-1}$$

ove al secondo membro si può porre $\frac{g}{2(g-1)}$ pei polinomi $F(x)$ pari.

⁽⁵⁾ T. NAGEL, *Zur Arithmetik der Polynome*, « Abhandlungen a. d. Mathem. Seminar d. Hamburg. Univ. », I Bd (1922), pp. 179-194.

2. Da questo teorema seguirà come corollario il seguente:

Detto $A(x)$ il numero dei divisori primi distinti del prodotto (3), valgono le limitazioni

$$(5) \quad \frac{g-1}{g^2} x + o(x) \leq A(x) \leq (g-1)x + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

e quando $F(x)$ è un polinomio pari anche

$$\frac{2(g-1)}{g^2} x + o(x) \leq A(x).$$

3. Per dimostrare ciò che ci proponiamo ci baseremo su tre lemma, dei quali i primi due hanno servito appunto a NAGEL⁽⁶⁾.

Denotiamo con D il discriminante (non nullo) di $F(x)$, e con $h(m)$ il numero delle radici distinte secondo (mod m) della congruenza $F(x) \equiv 0 \pmod{m}$; allora:

1°) Se l'intero primo p non divide D risulta $h(p^c) = h(p) \leq g$ per qualunque intero positivo c ; se l'intero primo p divide D (e del resto in ogni caso) risulta $h(p^c) \leq g|D|^2$ per qualunque intero positivo c .

2°) Se $F(x)$ è irriducibile risulta

$$(6) \quad \sum_{p \leq x} \frac{h(p) \log p}{p} = \log x + O(1).$$

3°) Se $F(x)$ è irriducibile risulta

$$(7) \quad \sum_{p < x} h(p) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Andiamo a dimostrare la proposizione 3°). Sia

$$H(x) = x^g + c_1 x^{g-1} + \dots + c_{g-1} x + c_g$$

una funzione razionale intera irriducibile in x a coefficienti razionali interi dei quali il primo sia 1, e consideriamo il corpo algebrico generato da una radice α dell'equazione $H(x) = 0$. Denotiamo con $h(p, r)$, ($r = 1, 2, \dots, g$), il numero degl'ideali primi diversi di grado r che dividono l'ideale principale $[p]$ generato dal numero razionale primo p . Denotiamo con \mathfrak{p}_r gl'ideali primi di grado r del corpo algebrico in questione ($N\mathfrak{p}_r = p^r$).

È noto⁽⁷⁾ che il numero $\pi(\xi)$ degl'ideali primi di un corpo algebrico

(6) T. NAGEL, op. cit. in (1), pp. 346-352.

(7) E. LANDAU, *Einführung in die elementare und analytische theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Leipzig, 1918. p. 111.

aventi norma non superiore a ξ è dato dalla formula

$$(8) \quad \pi(\xi) = \sum_{Np \leq \xi} 1 = \frac{\xi}{\log \xi} + O\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right);$$

d'altra parte, poichè $h(p, r) \leq g$ risulta:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{Np_i \leq \xi}^{p_i} 1 = \sum_{p \leq \xi} h(p, 1) \\ \sum_{Np_i \leq \xi}^{p_i} 1 = \sum_{p^i \leq \xi} h(p, i) \leq g \sum_{p^i \leq \xi} 1 = \frac{ig \xi^{\frac{1}{i}}}{\log \xi} + o\left(\frac{\xi^{\frac{1}{i}}}{\log \xi}\right) = o\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right) \end{array} \right. \\ (i = 2, 3, \dots, g).$$

Tutte le volte che p non divide l'indice dell'intero α del corpo algebrico da esso generato si ha $h(p, 1) = h(p)$, essendo $h(p)$ il numero delle radici distinte (mod p) della congruenza $H(x) \equiv 0 \pmod{p}$ (DEDEKIND) ⁽⁸⁾.

Il numero degl'interi razionali primi che dividono l'indice di α è finito, quindi sommando membro a membro le (9) otteniamo

$$\pi(x) = \sum_{p \leq \xi} h(p, 1) + o\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right) = \sum_{p \leq \xi} h(p) + o\left(\frac{\xi}{\log^2 \xi}\right).$$

Da questa e dalla (8) segue la (7), valevole pel polinomio $H(x)$. Ma la (7) vale in generale poichè posto

$$F(x) = a_0 x^g + a_1 x^{g-1} + \dots + a_g, \quad z = a_0 x$$

risulta

$$a_0^{g-1} F(x) = z^g + c_1 z^{g-1} + \dots + c_g = H(z), \quad (c_i = a_i a_0^{i-2})$$

ed esclusi gl'interi razionali primi che dividono a_0 (in numero finito) le due congruenze $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$, $H(z) \equiv 0 \pmod{p}$ hanno un egual numero di radici distinte (mod p).

4. Si può supporre $a_0 > 0$. Fissato un numero positivo $\alpha < a_0$ si può determinare un numero reale e positivo ξ_0 abbastanza grande da avere per ogni $\xi > \xi_0$

$$(10) \quad \alpha \xi^g < F(\xi) < (\alpha_0 + 1) \xi^g$$

e inoltre per ogni $0 < \xi' < \xi$

$$(11) \quad |F(\xi')| < F(\xi).$$

⁽⁸⁾ Ved. p. es. L. BIANCHI, *Teoria dei numeri algebrici*, Pisa 1923, p. 404.

In ogni caso si assume $\xi_0 \geq 3$. Posto

$$\Phi(\xi) = \log |F(1)F(2) \dots F([\xi])| = \sum_{n=1}^{\xi} \log |F(n)|,$$

per la prima delle (10) risulta

$$\Phi(\xi) \geq \sum_{n=\xi_0}^{\xi} \log(\alpha n^g) = g \sum_{n=\xi_0}^{\xi} \log n + [\xi - \xi_0 - 1] \log \alpha.$$

ed essendo ⁽⁹⁾

$$\sum_{n=\xi_0}^{\xi} \log n \geq \xi \log \xi + O(\xi), \quad [\xi - \xi_0 - 1] \log \alpha = O(\xi),$$

risulta

$$(12) \quad \Phi(\xi) \geq g\xi \log \xi + O(\xi).$$

Cerchiamo adesso di ottenere per altra via un'espressione maggiorante per $\Phi(\xi)$. Cominciamo col valutare l'esponente $l(p)$ della massima potenza di un numero primo p che divide il prodotto

$$(13) \quad F(1)F(2) \dots F([\xi]).$$

Degli $[\xi]$ fattori di questo prodotto, quelli divisibili per p^c sono in numero minore o al più uguale a

$$h(p^c) \left(\left\lfloor \frac{[\xi]}{p^c} \right\rfloor + 1 \right) \leq h(p^c) \left(\frac{\xi}{p^c} + 1 \right)$$

e inoltre la massima potenza di p che divide ciascun fattore dello stesso prodotto non supera, per la (11), $\left\lfloor \frac{\log F([\xi])}{\log p} \right\rfloor$ e quindi, per la seconda delle (10), non supera

$$(14) \quad k = k(p, \xi) = \left\lfloor \frac{g \log \xi + \log(\alpha_0 + 1)}{\log p} \right\rfloor.$$

Dunque per l'esponente $l(p)$ vale la limitazione

$$(15) \quad \begin{aligned} l(p) &\leq h(p) \left(\frac{\xi}{p} + 1 \right) + h(p^2) \left(\frac{\xi}{p^2} + 1 \right) + \dots + h(p^k) \left(\frac{\xi}{p^k} + 1 \right) \\ &\leq \xi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(p^i)}{p^i} + \sum_{i=1}^k h(p^i). \end{aligned}$$

⁽⁹⁾ E. LANDAU, op. cit. in (4), p. 73.

Per il lemma 1°) abbiamo $h(p^i) \leq g |D|^2$, quindi per la (14)

$$\begin{aligned}
 u(p) &\leq g |D|^2 \xi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} + g |D|^2 k(p, \xi) \\
 &\leq \frac{g |D|^2}{p-1} \xi + g |D|^2 \frac{g \log \xi + \log(\alpha_0 + 1)}{\log p} \\
 (16) \quad &= O(\xi).
 \end{aligned}$$

Fissati comunque un numero finito di interi primi p_1, p_2, \dots, p_r e detto $d(\xi)$ il massimo divisore del prodotto (13) che si compone esclusivamente di tali fattori primi, risulta

$$(17) \quad \log d(\xi) = \sum_{i=1}^r u(p_i) \log p_i = \sum_{i=1}^r \log p_i O(\xi) = O(\xi).$$

Diciamo p' un qualunque intero primo che supera $g |D|$, per ogni $p > p'$ è, per il lemma 1°), $h(p^c) = h(p)$; e quindi dalla (15)

$$\begin{aligned}
 u(p) &\leq \frac{h(p)}{p-1} \xi + h(p) k(p, \xi) \\
 (18) \quad &\leq \frac{h(p)}{p} \xi + \frac{h(p)}{p(p-1)} \xi + h(p) \frac{g \log \xi + \log(\alpha_0 + 1)}{\log p}.
 \end{aligned}$$

Per la (17) abbiamo

$$\Phi(\xi) = O(\xi) + \sum_{p > p'} u(p) \log p.$$

Siano ξ e η due numeri reali maggiori di ξ_0 e di p' ; in seguito fisseremo η come funzione di ξ indefinitamente crescente con ξ , opportunamente scelta. Per adesso conviene supporli indipendenti. Denotiamo con $M(\xi, \eta)$ il numero degli interi primi distinti maggiori di η che dividono il prodotto (13) e andiamo a valutare le due somme che figurano al secondo membro dell'uguaglianza

$$(19) \quad \Phi(\xi) = O(\xi) + \sum_{p' < p \leq \eta} u(p) \log p + \sum_{p > \eta} u(p) \log p$$

che si deduce dalla precedente. Risulta per la (18)

$$\begin{aligned}
 \sum_{p' < p \leq \eta} u(p) \log p &\leq \xi \sum_{p \leq \eta} \frac{h(p) \log p}{p} + \xi \sum_{p \leq \eta} \frac{h(p) \log p}{p(p-1)} + \\
 &\quad + \{g \log \xi + \log(\alpha_0 + 1)\} \sum_{p \leq \eta} h(p)
 \end{aligned}$$

e per le (6) e (7), osservando inoltre che la serie $\sum_p \frac{\log p}{p(p-1)}$ è convergente,

$$(20) \quad \leq \xi \log \eta + O(\xi) + g \log \xi \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right) + \log \xi o\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right).$$

Analogamente

$$(21) \quad \sum_{p>\eta} \mathcal{U}(p) \log p \leq \xi \sum_{p>\eta} \frac{h(p) \log p}{p} + \xi \sum_{p>\eta} \frac{h(p) \log p}{p(p-1)} + \{g \log \xi + \log(a_0 + 1)\} \sum_{p>\eta} h(p)$$

e, risultando $h(p) \leq g, \frac{\log p}{p-1} < \frac{\log \eta}{\eta}$ e $M(\xi, \eta)$ il numero dei termini di ciascuna somma, abbiamo per $\eta \geq \xi$

$$(22) \quad \leq \left\{ g \xi \frac{\log \eta}{\eta} + g^2 \log \xi + O(1) \right\} M(\xi, \eta) + O(\xi).$$

Le (19), (20) e (22) ci forniscono un'espressione maggiorante per $\Phi(\xi)$

$$(23) \quad \Phi(\xi) \leq O(\xi) + \xi \log \eta + g \log \xi \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right) + \log \xi o\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right) + \left\{ g \xi \frac{\log \eta}{\eta} + g^2 \log \xi + O(1) \right\} M(\xi, \eta).$$

Poniamo adesso

$$\eta = \delta \xi \log \xi; \quad \left(0 < \delta < \frac{g-1}{g}, \quad \xi > e^{\frac{1}{\delta}} \right),$$

risulta $\eta > \xi$, $\log \eta = \log \xi + \log \log \xi + \log \delta$, quindi

$$\xi \log \eta = \xi \log \xi + o(\xi \log \xi), \quad \log \xi \frac{\eta}{\log \eta} = \delta \xi \log \xi + o(\xi \log \xi),$$

$$O\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right) = o(\xi \log \xi), \quad \log \xi o\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right) = o(\xi \log \xi),$$

$$\xi \frac{\log \eta}{\eta} = \frac{1}{\delta} + o(1), \quad M(\xi, \eta) = N_\delta(\xi).$$

La (23) assume la forma

$$\Phi(\xi) \leq (1 + \delta g) \xi \log \xi + o(\xi \log \xi) + N_\delta(\xi) \{ g^2 \log \xi + O(1) \}$$

e dal confronto di questa con la (12) risulta

$$N_\delta(\xi) \geq \frac{1}{g} \left(\frac{g-1}{g} - \delta \right) \xi + o(\xi),$$

cioè la (4).

5. Sia adesso $F(x)$ un polinomio pari; ad ogni radice x_0 della congruenza $F(x) \equiv 0 \pmod{p^c}$ vi corrisponde la radice $p^c - x_0$, e nella (15) che limita $l(p)$ si può sostituire $\frac{h(p^i)}{2}$ in luogo di $h(p^i)$ tutte le volte che sia $p^i \geq 2\xi + 1$; quindi posto

$$c = c(p, \xi) = \left\lfloor \frac{\log \xi + \log 3}{\log p} \right\rfloor, \quad k = k(p, \xi) = \left\lfloor \frac{g \log \xi + \log(\alpha_0 + 1)}{\log p} \right\rfloor$$

in luogo della (15) possiamo sostituire la limitazione

$$(15') \quad l(p) \leq \xi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(p^i)}{p^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^c h(p^i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k h(p^i)$$

e supposto $p > p'$ da questa si ricava

$$(18') \quad l(p) \leq \frac{h(p)}{p} \xi + \frac{h(p)}{p(p-1)} \xi + \frac{h(p)}{2} \frac{\log \xi + \log 3}{\log p} + \frac{h(p)}{2} \frac{g \log \xi + \log(\alpha_0 + 1)}{\log p}.$$

Supposto $p' < \xi < 3\xi < \eta$ in luogo della (19) consideriamo:

$$(19') \quad \Phi(\xi) \leq O(\xi) + \sum_{p' < p \leq 3\xi} l(p) \log p + \sum_{3\xi < p \leq \eta} l(p) \log p + \sum_{p > \eta} l(p) \log p$$

e procedendo come per la (19) si ricava subito la limitazione

$$(23') \quad \Phi(\xi) \leq O(\xi) + \xi \log \eta + \frac{g}{2} \log \xi \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right) + \log \xi o\left(\frac{\eta}{\log \eta}\right) + \frac{g}{2} \left\{ \xi \frac{\log \eta}{\eta} + g \log \xi + O(1) \right\} M(\xi, \eta).$$

Posto

$$\eta = \delta \xi \log \xi, \quad \left(0 < \delta < \frac{2(g-1)}{g}\right)$$

si può supporre ξ_0 abbastanza grande, in guisa che per $\xi \geq \xi_0$ sia $\eta > 3\xi$. La (23') con tale posizione assume la forma

$$\Phi(\xi) \leq \left(1 + \frac{g}{2} \delta\right) \xi \log \xi + o(\xi \log \xi) + N_\delta(\xi) \left\{ \frac{g^2}{2} \log \xi + O(1) \right\},$$

e dal confronto di questa con la (12) si ricava

$$N_\delta(\xi) \geq \frac{1}{g} \left\{ \frac{2(g-1)}{g} - \delta \right\} \xi + o(\xi).$$

Il teorema del n. 1 risulta così dimostrato.

6. La proposizione del n. 2 è immediata conseguenza della precedente. Infatti il numero degl'interi primi distinti che non superano $(a_0 + 1)\xi$ è $O\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right)$, e ciascun fattore del prodotto (13), almeno da un certo posto in poi, si compone con al più $g - 1$ fattori primi distinti maggiori di $(a_0 + 1)\xi$. Dunque

$$A(\xi) \leq (g - 1)\xi + O\left(\frac{\xi}{\log \xi}\right).$$

D'altronde, qualunque sia δ , è $A(\xi) \geq N_\delta(\xi)$, e, comunque piccolo si scelga il numero positivo ε , per la (4) risulta

$$A(\xi) \geq \frac{g-1}{g^2} \xi - \varepsilon \xi + o(\xi);$$

si conclude che vale la prima delle (5).

Lo stesso dicasi nel caso di $F(x)$ pari.

7. OSSERVAZIONE. — Il teorema del n. 1 si può estendere in modo ovvio al prodotto

$$F([\varepsilon x] + 1) \cdot F([\varepsilon x] + 2) \dots F(x), \quad (0 \leq \varepsilon < 1)$$

e si giunge alle analoghe disuguaglianze (con notazioni evidenti)

$$N_{\delta, \varepsilon}(x) \geq \frac{1}{g} \left\{ \frac{(1 - \varepsilon)(g - 1)}{g} - \delta \right\} x + o(x), \quad N_{\delta, \varepsilon}(x) \geq \frac{1}{g} \left\{ \frac{2(1 - \varepsilon)(g - 1)}{g} - \delta \right\} x + o(x)$$

delle quali la seconda valida pei polinomi $F(x)$ pari.

Sur les équations aux différences finies (*).

par M. GHERMANESCO (a Bucarest).

La théorie des équations aux différences finies qui a fait l'objet des préoccupations de nombre de mathématiciens, parmi lesquels je citerai EULER, LAGRANGE, LAPLACE, GUICHARD, HURWITZ, APPELL, PINCHERLE etc. a fait d'appréciables progrès depuis les travaux de M. NÖRLUND, qui lui a imprimé une allure moderne, grâce à l'introduction des formules sommatoires, un peu oubliées, et dont il a su faire un si merveilleux usage.

M. NÖRLUND s'est attaché surtout à l'étude des équations particulières (1)

$$f(x) \pm f(x + \omega) = g(x)$$

et de celles obtenues par l'itération de l'opération indiquée dans le premier membre.

Plus tard M. R. RACLIS étend (2) la théorie de M. NÖRLUND à l'équation

$$f(x) + kf(x + \omega) = (k + 1)g(x) \quad k \neq -1$$

qui n'est qu'une forme particulière de l'équation

$$(A) \quad f(x) - \lambda f(x + \omega) = g(x)$$

et enfin, M. S. BOCHNER s'occupe (3) de l'équation

$$A_0 f(x) + A_1 f(x + \omega_1) + \dots + A_p f(x + \omega_p) = g(x)$$

dont nous nous sommes nous-même occupé à diverses reprises (4).

Les formules obtenues par les auteurs cités donnent la solution des équations considérées sous une forme très générale, moyennant certaines conditions imposées à la fonction donnée $g(x)$. Cependant, un point de vue remarquable échappe à cette théorie: la solution ainsi obtenue n'a pas de sens pour toute valeur de λ .

C'est donc du point de vue des valeurs possibles de λ , qu'on doit diriger les recherches: c'est ce qui forme l'objet de ce petit mémoire.

(*) Le résumé de ce Mémoire a l'annoncé dans « C. R. », Paris (1933), t. 197, p. 805.

(1) « Acta Mathematica », t. 43, 44.

(2) Idem, t. 55.

(3) « Acta Mathematica », t. 51.

(4) « Acta Mathematica », t. 62.

J'y suis parvenu à des résultats d'une frappante analogie avec ceux fournis par la théorie de FREDHOLM pour l'équation intégrale qui porte son nom,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = f(x),$$

ce qui m'avait tenté de chercher à ramener l'étude de l'équation aux différences finies (A) à celle d'une équation intégrale du type de FREDHOLM : la chose est aisée si l'on se place dans le champ des variables complexes et si l'on suppose la fonction donnée $g(x)$, holomorphe dans un domaine D , arbitrairement grand, mais fini; la formule classique de CAUCHY change l'équation aux différences (A) dans l'équation intégrale suivante

$$(B) \quad f(x) - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_D \frac{f(s) ds}{s - x - \omega} = g(x)$$

et il paraît qu'on n'a qu'à énoncer les trois théorèmes de FREDHOLM pour résoudre la question! C'est dans une telle conclusion que réside une erreur fondamentale: la théorie de FREDHOLM ne s'applique pas, mot à mot, dans le domaine complexe. Déjà, M. R. BADESCO ⁽⁵⁾, croyant pouvoir réduire l'équation fonctionnelle classique d'ABEL à une équation intégrale de la forme (B) ou presque, avait remarqué toutefois que le troisième théorème de FREDHOLM est assez restrictif, puisque toute une classe de solutions — non uniformes, il est vrai — lui échappait. Je suis arrivé, dans cet ordre d'idées, à la conclusion surprenante qu'on obtient toujours une solution pour λ égal à une valeur singulière.

J'ai trouvé aussi des exemples où la solution, loin d'être méromorphe, est à *coupure essentielle* en λ — λ étant une variable complexe — ce qui est en contradiction cette fois, avec, le premier théorème de FREDHOLM.

Ce qui marque encore le désaccord, c'est le résultat encore plus surprenant, à savoir que les valeurs singulières ne dépendent pas seulement du noyau, mais surtout de la fonction donnée, $g(x)$.

J'avais toujours pensé qu'il en est ainsi pour toute équation de FREDHOLM et un commencement de preuve à cette affirmation peut être trouvé en ce que, si λ_1 est une valeur caractéristique, d'ordre p de multiplicité du noyau $N(x, y)$, la solution de l'équation intégrale

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b N(x, s) \psi(s) ds = g_1(x),$$

(5) « Mathematica », t. VI, p. 36 et suiv.

avec

$$g_1(x) = \int_a^b N(x, s)g(s)ds - \frac{1}{\lambda_1} g(x),$$

admet cette valeur singulière avec l'ordre de multiplicité $(p - 1)$ et cependant les deux équations intégrales écrites plus haut possèdent le même noyau!

C'est un fait sur lequel je reviendrai à une autre occasion.

Pour ce qui concerne l'objet de ces lignes, c'est à dire l'équation aux différences finies (A), j'ai été obligé de l'étudier directement. Je suis parvenu à énoncer, entre autres, trois théorèmes, analogues à ceux de FREDHOLM, dont les deux premiers sont presque identiques, à la différence près de la provenance des valeurs singulières de la solution.

Je donne aussi quelques critères, permettant de trouver le nombre et l'ordre de multiplicité des valeurs singulières et ces valeurs singulières elles-mêmes.

Je termine en indiquant brièvement quelques extensions, soit dans le cas d'une seule variable, soit dans le cas de plusieurs.

1. Considérons l'équation aux différences finies

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda} Ef(x) = f(x) - \lambda f(x + \omega) = g(x)$$

dans laquelle ω est une constante positive ou à partie réelle positive, ce qu'on peut toujours avoir par un simple changement de variable; $g(x)$ est une fonction donnée, soumise à la condition que la limite

$$(2) \quad \mu_1(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x + \overline{n+1}\omega)}{g(x + n\omega)}$$

existe.

Cela posé, cherchons à satisfaire à l'équation fonctionnelle (1) par le développement formel

$$(3) \quad f(x) = f_0(x) + \lambda f_1(x) + \lambda^2 f_2(x) + \dots$$

On aura, pour déterminer les approximations successives $f_n(x)$, les relations

$$(4) \quad f_0(x) = g(x), \quad f_n(x) = f_{n-1}(x + \omega)$$

de sorte que la solution formelle de l'équation aux différences finies (1) sera donnée par le développement,

$$(5) \quad f(x) = g(x) + \lambda g(x + \omega) + \lambda^2 g(x + 2\omega) + \dots + \lambda^n g(x + n\omega) + \dots$$

Il s'agit de déterminer les conditions de convergence de ce développement. On aura

$$\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x + \overline{n+1\omega})}{g(x + n\omega)} < 1$$

ou

$$\lambda < \frac{1}{\mu_1(\omega)}.$$

Si $\mu_1(\omega) = 0$, le développement (5) converge pour toute valeur de λ , de sorte que la solution de l'équation fonctionnelle (1) est une fonction entière en λ .

Si $\mu_1(\omega) = \infty$, le cercle de convergence de la série (5) se réduit à son centre: la série est divergente et par suite l'équation fonctionnelle (1) n'est pas soluble, du moins par les approximations successives.

Un exemple pour le cas $\mu_1(\omega) = 0$ est fourni par la fonction $g(x) = e^{-x^2}$, cas où l'on a

$$\mu_1(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-(x+\overline{n+1\omega})^2}}{e^{-(x+n\omega)^2}} = e^{-(2\omega x + x^2)} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2n\omega^2} = 0.$$

Tout au contraire, la fonction $g(x) = e^{x^2}$ nous fournit un exemple pour le deuxième cas, parce que

$$\mu_1(\omega) = e^{2x\omega + x^2} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n\omega^2} = \infty.$$

Ces deux cas laissés de côté, nous nous occuperons seulement des cas où $\mu_1(\omega)$ est finie et *différente de zéro*.

Dans ces conditions, la série (5) est en général divergente pour

$$(7) \quad \lambda = \frac{1}{\mu_1(\omega)} = \lambda_1.$$

Dans ce cas λ_1 est une valeur *singulière* pour la solution de l'équation (1); pour décider de la nature de cette singularité, il faudra voir d'abord s'il y a un entier positif p , tel que le produit

$$(8) \quad F_1(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p f(x)$$

soit régulier pour $\lambda = \lambda_1$. Le cas échéant, λ_1 sera un pôle d'ordre de multiplicité p pour la solution de l'équation (1); sinon, on aura affaire à une singularité de nature spéciale, comme nous en verrons dans les quelques exemples qui suivront.

Pour $p = 1$, on a

$$(9) \quad F_1(x) = g(x) + \lambda \left[g(x + \omega) - \frac{1}{\lambda_1} g(x) \right] + \lambda^2 \left[g(x - 2\omega) - \frac{1}{\lambda_1} g(x + \omega) \right] + \dots \\ \dots + \lambda^n \left[g(x + n\omega) - \frac{1}{\lambda_1} g(x + \overline{n-1}\omega) \right] + \dots$$

ou encore

$$F_1(x) = g(x) - \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_1} [E[g(x) + \lambda g(x + \omega) + \dots]].$$

Deux cas sont à considérer:

a) La fonction $g(x)$ satisfait à l'équation,

$$(10) \quad \frac{1}{\lambda_1} E g(x) = g(x) - \lambda_1 g(x + \omega) = 0,$$

tous les termes du développement (9) s'évanouissent, à partir du second, de sorte que la solution de l'équation fonctionnelle (1) est dans ce cas

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}}.$$

Tel est le cas de la fonction e^{kx} ou de $g(x) = \text{const.}$ Pour e^{kx} on obtient le pôle simple $\lambda_1 = e^{-k\omega}$ et pour la constante, le pôle également simple $\lambda_1 = 1$.

b) La fonction $g(x)$ ne satisfait pas à l'équation (10). Il faut étudier alors la convergence du développement (9). Si

$$\mu_2(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x + \overline{n+1}\omega) - \frac{1}{\lambda_1} g(x + n\omega)}{g(x + n\omega) - \frac{1}{\lambda_1} g(x + \overline{n-1}\omega)} = \mu_2(\omega)$$

et si cette série (9) est encore divergente pour $\lambda = \lambda_1$, il faudra que la série

$$F_2(x) = \left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) F_1(x) = g(x) + \lambda \left[g(x + \omega) - \frac{2}{\lambda_1} g(x) \right] + \\ + \lambda^2 \left[g(x + 2\omega) - \frac{2}{\lambda_1} g(x + \omega) + \frac{1}{\lambda_1^2} g(x) \right] + \dots \\ \dots + \lambda^n \left[g(x + n\omega) - \frac{2}{\lambda_1} g(x + \overline{n-1}\omega) + \frac{1}{\lambda_1^2} g(x + \overline{n-2}\omega) \right] + \dots$$

ait un rayon de convergence supérieur à λ_1 , pour pouvoir affirmer que λ_1 est un pôle — simple dans ce cas — de la solution de l'équation (1).

Si $\mu_2(\omega) < \mu_1(\omega)$ — le cas $>$ étant exclu — on peut affirmer que λ_1 est un pôle simple de la fonction (5) et si la série (9) est divergente pour $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2(\omega)}$, on réitérera le procédé pour décider de la nature de la valeur singulière λ_2 .

Quoique d'un maniement plus difficile, on peut — comme nous l'avons déjà dit — considérer le produit

$$(11) \quad F_p(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p f(x) = g(x) + \lambda \left[g(x + \omega) - \frac{C_{p^1}}{\lambda_1} g(x) \right] + \\ + \lambda^2 \left[g(x + 2\omega) - \frac{C_{p^1}}{\lambda_1} g(x + \omega) + \frac{C_{p^2}}{\lambda_1^2} g(x) \right] + \dots \\ \dots + \lambda^m \left[\sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{C_{p^i}}{\lambda_1^i} g(x + m + i\omega) \right] + \dots + \left(\frac{-1}{\lambda_1}\right)^p \left[\lambda^p \frac{p}{\lambda_1} g(x) + \lambda^{p+1} \frac{p}{\lambda_1} g(x + \omega) + \dots \right]$$

$w < p$

avec

$$\frac{p}{\lambda_1} E = E \left(\frac{p-1}{\lambda_1} \right).$$

On commence par chercher si la fonction $g(x)$ satisfait à une équation aux différences finies de la forme

$$(12) \quad \frac{p}{\lambda_1} E g(x) = 0.$$

Le cas échéant, la *résolvante* (5) admet le pôle unique λ_1 , d'ordre de multiplicité p et la *résolvante* de l'équation (1) est dans ce cas,

$$(13) \quad f(x) = \frac{F_p(x)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p}$$

$F_p(x)$ étant donnée par (11).

Si la fonction $g(x)$ ne satisfait pas à une équation de la forme (12), on détermine p de façon que la série (11) soit convergente pour $\lambda = \lambda_1$. Deux cas peuvent se présenter:

a) La série (11) a un rayon de convergence plus grand que λ_1 ; dans ce cas, λ_1 est un pôle multiple, d'ordre p , de la *résolvante* (5) et alors, on continue le procédé pour déterminer les autres pôles.

b) La série (11) est divergente pour toute valeur de λ , égale ou supérieure à λ_1 ; dans ce cas le cercle $|\lambda| = \lambda_1$ est une *coupure essentielle* pour la *résolvante* (5), si λ est complexe ou, la *résolvante* n'existe que dans la région du plan $\lambda < \lambda_1$.

Pour donner quelques exemples, considérons le cas $g(x) = x^m$, m étant entier et positif. La résolvante (5) admet le pôle $\lambda = 1$; comme on a

$${}_{\lambda_1}^{m+1} E x^m = 0,$$

il s'ensuit que $\lambda = 1$ est le pôle unique, d'ordre de multiplicité $m + 1$, de la résolvante (5), qui est dans ce cas un polynôme du degré m en x .

Prenons $g(x) = x e^{kx}$. On a $\lambda_1 = e^{-k\omega}$ et comme

$${}_{\lambda_1}^2 E g(x) = 0,$$

$\lambda_1 = e^{-k\omega}$ sera le pôle double, unique, de la résolvante (5), qui y est

$$f(x) = \frac{x e^{kx} + \lambda(\omega - x) e^{k(x+\omega)}}{(1 - \lambda e^{k\omega})^2}.$$

La fonction $g(x) = x^m e^{kx}$ conduit également à une résolvante, ayant le pôle unique $\lambda_1 = e^{-k\omega}$, de l'ordre $m + 1$.

Prenons maintenant quelques autres exemples spéciaux. Soit $g(x) = \frac{1}{x}$; grâce à l'identité

$$\frac{1}{a+p} = \frac{C_p^1}{a+p-1} + \dots + \frac{(-1)^p C_p^p}{a} = \frac{(-1)^p p!}{a(a+1)\dots(a+p)}$$

le terme général de la série (11) devient, au signe près,

$$(14) \quad \frac{\lambda^{n+p} p! \omega^{p+1}}{(x+n\omega)(x+n+1\omega)\dots(x+n+p\omega)}$$

et il suffit de prendre $p=1$, pour que la série converge pour $\lambda=1$. Comme la série diverge pour $\lambda > 1$, quel que soit p , nous avons affaire à une singularité particulière pour $\lambda=1$.

De même, pour $g(x) = \log x$, on trouve le point singulier $\lambda=1$ et la série (11) converge pour $\lambda=1$ si $p=2$, car on a

$$F_2(x) = \log x + \lambda \log \frac{(x+\omega)}{x^2} + \lambda^2 \log \frac{x(x+2\omega)}{(x+\omega)^2} + \dots \\ \dots + \lambda^{n+1} \log \frac{(x+n+1\omega)(x+n-1\omega)}{(x+n\omega)^2} + \dots$$

avec

$$\log \frac{(x+n+1\omega)(x+n-1\omega)}{(x+n\omega)^2} = \log \left[1 - \frac{\omega^2}{(x+n\omega)^2} \right] \sim \frac{k}{(x+n\omega)^2}$$

de sorte que $F_2(x)$ converge pour $|\lambda| = 1$, mais diverge pour toute valeur de $|\lambda| > 1$.

De la même manière se comporte la résolvante de l'équation fonctionnelle (1), lorsque

$$g(x) = \frac{1 - a^x}{1 + a^x}, \quad a \geq 1.$$

Ces exemples sont à considérer surtout dans le champ des variables complexes.

De ce qui précède, on peut tirer le théorème suivant

I. THÉORÈME A. — *L'équation aux différences finies*

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = g(x)$$

dans laquelle ω est à partie réelle positive, est résoluble par les approximations successives pour toute valeur de λ , à l'exception d'un ensemble fini ou dénombrable de valeurs.

La solution, ainsi obtenue, est une fonction en général méromorphe en λ , admettant ces valeurs exceptionnelles comme pôles, si la limite

$$\frac{1}{\lambda_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x + \overline{n + 1\omega})}{g(x + n\omega)}$$

est finie et si l'on peut déterminer un entier positif p , tel que la série

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p f(x)$$

admette un cercle de convergence de rayon supérieur à λ_1 . Si la limite considérée est nulle, la solution est alors une fonction entière en λ .

2. Soit λ_1 un pôle d'ordre p de multiplicité de la résolvante (5); la fonction

$$F_p(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p f(x)$$

est alors régulière pour $\lambda = \lambda_1$. L'équation aux différences finies (1) devient

$$F_p(x) - \lambda F_p(x + \omega) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p g(x)$$

et en y faisant $\lambda = \lambda_1$,

$$F_p(x) - \lambda_1 F_p(x + \omega) = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème,

II. THÉORÈME B. — *Pour les valeurs exceptionnelles de λ , c'est l'équation*

sans second membre

$$(15) \quad f(x) - \lambda_1 f(x + \omega) = 0$$

qui admet une solution.

3. Etudions maintenant la structure de la résolvante (5) par rapport aux pôles λ_k .

Supposons donc, qu'elle admette les pôles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, en nombre fini ou non, de multiplicités respectives p_1, p_2, \dots, p_n et désignons par $\Phi_k(x, \lambda, \lambda_k)$ la partie principale de la résolvante, correspondant au pôle λ_k ,

$$\Phi_k(x, \lambda, \lambda_k) = \frac{\varphi_{k,1}(x)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}} + \frac{\varphi_{k,2}(x)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^2} + \dots + \frac{\varphi_{k,p_k}(x)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{p_k}},$$

On aura

$$f(x) = \bar{f}(x) + \Phi_1(x, \lambda, \lambda_1) + \Phi_2(x, \lambda, \lambda_2) + \dots + \Phi_n(x, \lambda, \lambda_n) + \dots$$

$\bar{f}(x)$ désignant la partie entière de $f(x)$; on aura encore

$$(16) \quad f(x) = \Phi_k(x, \lambda, \lambda_k) + \Psi_k(x, \lambda, \lambda_k)$$

$\Psi_k(x, \lambda, \lambda_k)$ désignant visiblement la somme des parties, correspondant aux pôles λ_i , autres que λ_k .

Prenons $k = 1$ et remplaçons dans l'équation (1) la fonction $f(x)$ par son expression (16); on a, après avoir multiplié les deux membres par $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{p_1}$,

$$(17) \quad \begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{p_1} [\Phi_1(x, \lambda, \lambda_1) - \lambda \Phi_1(x + \omega, \lambda, \lambda_1)] = \\ & = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{p_1} [g(x) - \Psi_1(x, \lambda, \lambda_1) + \lambda \Psi_1(x + \omega, \lambda, \lambda_1)]. \end{aligned}$$

Faisons $\lambda = \lambda_1$ dans cette relation; il reste

$$(18) \quad \varphi_{1,p_1}(x) - \lambda_1 \varphi_{1,p_1}(x + \omega) = 0.$$

Remplaçons dans (17) $\varphi_{1,p_1}(x + \omega)$ par $\frac{\varphi_{1,p_1}(x)}{\lambda_1}$ et faisons-y de nouveau $\lambda = \lambda_1$, après avoir simplifié par $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)$ dans les deux membres; il reste,

$$(19) \quad \varphi_{1,p_1-i}(x) - \lambda_1 \varphi_{1,p_1-i}(x + \omega) + \lambda_1 \varphi_{1,p_1}(x + \omega) = 0.$$

En itérant le procédé, on obtient en général

$$(20) \quad \varphi_{1,p_1-i}(x) - \lambda_1 \varphi_{1,p_1-i}(x + \omega) + \lambda_1 \varphi_{1,p_1-i+1}(x + \omega) = 0,$$

la dernière étant

$$(21) \quad \varphi_{1,1}(x) - \lambda_1 \varphi_{1,1}(x + \omega) + \lambda_1 \varphi_{1,2}(x + \omega) = 0.$$

Les relations (18), (19), (20) et (21) permettent d'exprimer les fonctions $\varphi_{1,i}(x)$ à l'aide de l'une d'entre elles; en écrivant d'abord (20) sous la forme

$$(22) \quad \lambda_1 \varphi_{1,p_1-i+1}(x + \omega) = -\frac{1}{\lambda_1} E \varphi_{1,p_1-i}(x),$$

ou plutôt,

$$(23) \quad \lambda_1 \varphi_{1,p_1-i+1}(x) = -\frac{1}{\lambda_1} E \varphi_{1,p_1-i}(x - \omega),$$

on a successivement,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{p_1-i} \varphi_{1,p_1-i+1}(x) &= -\lambda_1^{p_1-i-1} \frac{1}{\lambda_1} E[\lambda_1 \varphi_{1,p_1-i}(x - \omega)] = \lambda_1^{p_1-i-2} \frac{2}{\lambda_1} E \varphi_{1,p_1-i-1}(x - 2\omega) \\ &= -\lambda_1^{p_1-i-3} \frac{3}{\lambda_1} E \varphi_{1,p_1-i-2}(x - 3\omega) = \dots = (-1)^k \lambda_1^{p_1-i-k} \frac{i}{\lambda_1} E \varphi_{1,p_1-i-k+1}(x - k\omega) \end{aligned}$$

ou, en posant $p_1 - i = m$,

$$(24) \quad \lambda_1^m \varphi_{1,m+1}(x) = (-1)^k \lambda_1^{m-k} \frac{k}{\lambda_1} E \varphi_{1,m-k+1}(x - k\omega)$$

qui, pour $m = k$, donne

$$(25) \quad \lambda_1^m \varphi_{1,m+1}(x) = (-1)^m \frac{m}{\lambda_1} E \varphi_{1,1}(x - m\omega) \quad m = 1, 2, \dots, p_1 - 1.$$

relation qui permet d'exprimer les fonctions $\varphi_{1,m}(x)$ à l'aide de $\varphi_{1,1}(x)$.

Inversement, en faisant $m = p_1 - 1$, $k = p_1 - j$, dans (24), on obtient la relation

$$(26) \quad \frac{p_1-j}{\lambda_1} E \varphi_{1,j}(x) = (-\lambda_1)^{p_1-j} \varphi_{1,p_1}(x + \overline{p_1 - j\omega})$$

qui constitue une équation aux différences finies, d'ordre $p_1 - j$ et dont la résolution fera connaître $\varphi_{1,j}(x)$ en fonction de $\varphi_{1,p_1}(x)$.

En définitive, il suffit de connaître l'une seulement des fonctions $\varphi_{1,i}(x)$ pour les avoir toutes.

Remarquons encore que de la relation (26) on déduit, tenu compte de (18),

$$(27) \quad \frac{p_1-j+1}{\lambda_1} E \varphi_{1,j}(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p_1,$$

de sorte qu'on peut énoncer,

III. THÉORÈME. — *Les composantes $\varphi_{i,j}$ de la partie principale, relativement au pôle λ_1 , de la résolvante de l'équation aux différences finies*

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = g(x)$$

satisfont aux équations

$$\frac{E^{p_i-j+1}}{\lambda_i} \varphi_{i,j}(x) = 0 \quad j=1, 2, \dots, p_i$$

et sont liées par les relations

$$\varphi_{i,j}(x) - \lambda_i \varphi_{i,j}(x + \omega) + \lambda_i \varphi_{i,j+1}(x + \omega) = 0,$$

p_i étant l'ordre de multiplicité du pôle λ_i .

4. La relation (17) devient, en tenant compte des relations obtenues plus haut,

$$(28) \quad \Psi_i(x, \lambda, \lambda_i) - \lambda \Psi_i(x + \omega, \lambda, \lambda_i) = g(x) - \lambda_i \varphi_{i,1}(x + \omega)$$

Supposons, pour le moment, que λ_i soit le seul pôle de la résolvante (5); on a dans ce cas $\Psi_i \equiv \bar{f}(x)$, de sorte que la relation (28) devient

$$(29) \quad \bar{f}(x) - \lambda \bar{f}(x + \omega) = g(x) - \lambda_i \varphi_{i,1}(x + \omega),$$

ou, en posant

$$(30) \quad g(x) = g_i(x) + \lambda_i \varphi_{i,1}(x + \omega),$$

$$(31) \quad \bar{f}(x) - \lambda \bar{f}(x + \omega) = g_i(x).$$

Comme la résolvante de cette équation n'a aucun pôle, on doit avoir, comme nous l'avons déjà remarqué à l'occasion du théorème A,

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i(x + \overline{n+1}\omega)}{g_i(x + n\omega)} = 0.$$

Dans le cas d'un pôle unique, la fonction $g(x)$ se compose d'une partie satisfaisant à la relation (31) et d'une autre, qui est solution d'une équation aux différences finies de la forme (27).

La réciproque est encore vraie car, en supposant la fonction $g(x)$ de la forme (30), on résoudra les équations fonctionnelles

$$\begin{aligned} f_1(x) - \lambda f_1(x + \omega) &= g_1(x) \\ f_2(x) - \lambda f_2(x + \omega) &= \lambda_i \varphi_{i,1}(x + \omega). \end{aligned}$$

La première admet comme solution une fonction entière en λ ; la deuxième admet une solution de la forme

$$\frac{\varphi(x, \lambda)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{p_i}},$$

de sorte que la solution de l'équation (1), qui est égale à $f_1(x) + f_2(x)$, est bien de la forme voulue.

Or la proposition est générale: isolons dans (28) la partie principale relativement au pôle λ_2 , en posant

$$\Psi_1(x, \lambda, \lambda_1) = \Phi_2(x, \lambda, \lambda_2) + \Psi_{1,2}(x, \lambda, \lambda_1, \lambda_2),$$

l'équation (28) devient

$$(33) \quad \Phi_2(x, \lambda, \lambda_2) - \lambda \Phi_2(x + \omega, \lambda, \lambda_2) = g(x) - \lambda_1 \varphi_{1,1}(x + \omega) - \Psi_{1,2}(x, \lambda, \lambda_1, \lambda_2) + \lambda \Psi_{1,2}(x + \omega, \lambda, \lambda_1, \lambda_2).$$

En procédant avec cette équation comme avec (17), on établit les relations entre les fonctions $\varphi_{2,i}(x)$, analogues aux (25), (26), (27) etc. et on arrive finalement à l'équation

$$(34) \quad \Psi_{1,2}(x, \lambda, \lambda_1, \lambda_2) - \lambda \Psi_{1,2}(x, \lambda, \lambda_1, \lambda_2) = g(x) - \lambda_1 \varphi_{1,1}(x + \omega) - \lambda_2 \varphi_{2,1}(x + \omega),$$

dont la résolvante n'admet plus les pôles λ_1, λ_2 . Si la résolvante de l'équation (1) n'admet que les pôles λ_1, λ_2 , de multiplicités respectives p, r , alors, en posant

$$g(x) = g_1(x) + \lambda_1 \varphi_{1,1}(x + \omega) + \lambda_2 \varphi_{2,1}(x + \omega),$$

on aura, puisque $\Psi_{1,2}$ doit se réduire dans ce cas à $\bar{f}(x)$,

$$\bar{f}(x) - \lambda \bar{f}(x + \omega) = g_1(x)$$

c'est à dire à l'équation (31), dont la résolvante est sans valeur caractéristique et, par suite, $g_1(x)$ satisfait à la condition (32).

Procédons avec l'équation (34) comme on a fait avec (17) et (28), jusqu'à ce qu'on ait écarté tous les pôles de la résolvante de (1): il nous reste l'équation finale

$$(35) \quad \bar{f}(x) - \lambda \bar{f}(x) = g(x) - \lambda_1 \varphi_{1,1}(x + \omega) - \lambda_2 \varphi_{2,1}(x + \omega) - \dots - \lambda_n \varphi_{n,1}(x + \omega) - \dots;$$

qui montre qu'on a

$$(36) \quad g(x) = g_1(x) + \lambda_1 \varphi_{1,1}(x + \omega) + \lambda_2 \varphi_{2,1}(x + \omega) + \dots + \lambda_n \varphi_{n,1}(x + \omega) + \dots,$$

$g_1(x)$ étant sans valeur caractéristique et pourvu que la série du second membre converge uniformément.

Inversement, supposons, dans (1), que la fonction $g(x)$ soit de la forme (36), les fonctions $\varphi_{i,1}(x)$ satisfaisant à des équations aux différences finies, telles que (27); la résolution de l'équation fonctionnelle (1) sera ramenée à celle de l'équation (31) et des suivantes

$$(37) \quad f_i(x) - \lambda f_i(x + \omega) = \lambda_i \varphi_{i,1}(x + \omega).$$

La résolvante de l'équation (31) ne donne aucune valeur caractéristique; quant à celles des équations (37), chacune aura respectivement λ_i pour valeur caractéristique, avec l'ordre de multiplicité p_i ; en faisant leur somme

$$(38) \quad f(x) = \bar{f}(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

on obtient la solution de l'équation aux différences finies (1), admettant les pôles λ_i , avec les ordres de multiplicité p_i , pourvu que la série du second membre de (38) soit uniformément convergente.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant

IV. THÉORÈME. — *Pour que la résolvante de l'équation aux différences finies,*

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = g(x)$$

admette les pôles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, en nombre fini ou non, de multiplicités respectives p_1, p_2, \dots, p_n , il faut et il suffit que la fonction donnée $g(x)$ soit décomposable en une somme, finie ou non, de fonction $\varphi_i(x)$, solutions des équations aux différences finies de la forme

$$\frac{p_i}{\lambda_i} E \varphi_i(x) = 0$$

et une fonction $g_i(x)$, satisfaisant à la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i(x + \overline{n+1}\omega)}{g_i(x + n\omega)} = 0,$$

la fonction $g_i(x)$ pouvant même être nulle.

5. Pour donner quelques exemples, prenons d'abord $g(x) = \sin x$. On a

$$g(x) = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix} = \frac{e^{-i\omega}}{2i} e^{i(x+\omega)} - \frac{e^{i\omega}}{2i} e^{-i(x+\omega)}$$

avec $g_i(x) \equiv 0$. Puisque la solution de l'équation

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = e^{tx}$$

est

$$f(x) = \frac{e^{tx}}{1 - \lambda e^{t\omega}},$$

on aura

$$f_1(x) = \frac{e^{ix}}{1 - \lambda e^{i\omega}}, \quad f_2(x) = \frac{e^{-ix}}{1 - \lambda e^{-i\omega}}$$

de sorte que la solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = \sin x$$

est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2i} [f_1(x) - f_2(x)] = \frac{\sin x - \lambda \sin(x - \omega)}{1 - 2\lambda \cos \omega + \lambda^2}.$$

On traite de la même manière les cas $g(x) = \sin^m x$, $\sin mx$, etc. Prenons $g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$. On a

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$

et de l'exemple précédent on déduit que la solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = \frac{1}{e^x - 1}$$

est donnée par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - \lambda e^{-\omega}} + \frac{e^{-2x}}{1 - \lambda e^{-2\omega}} + \dots + \frac{e^{-nx}}{1 - \lambda e^{-n\omega}} + \dots$$

Elle admet l'infinité dénombrable de pôles simples $\lambda = e^{n\omega}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Prenons encore $g(x) = \frac{1}{e^x - x}$. On a $g_1(x) \equiv 0$, ensuite

$$(39) \quad \frac{1}{e^x - x} = \frac{e^{-x}}{1 - xe^{-x}} = e^{-x} + xe^{-2x} + x^2e^{-3x} + \dots + x^{n-1}e^{-nx} + \dots$$

et, puisque l'équation fonctionnelle

$$f_m(x) - \lambda f_m(x + \omega) = x^{m-1}e^{tx}$$

admet une solution de la forme

$$f_m(x) = \frac{\varphi_m(x, \lambda)}{(1 - \lambda e^{-t\omega})^m},$$

on aura pour la résolvante de l'équation fonctionnelle

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = \frac{1}{e^x - x},$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x, \lambda)}{(1 - \lambda e^{-m\omega})^m},$$

qui admet l'infinité dénombrable de pôles $e^{m\omega}$, de multiplicités respectives m , ($m = 1, 2, \dots$). L'exemple est bien remarquable.

Nous déterminerons plus loin les fonctions $\varphi_m(x, \lambda)$.

6. Il a été question, dans le paragraphe précédent, de la décomposition de la fonction $g(x)$ en une somme, finie ou non, de fonctions, satisfaisant à des conditions données. Il est aisé de montrer que cette décomposition est unique. En effet, supposons l'existence de deux développements

$$(40) \quad \begin{aligned} g(x) &= g_1(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots \\ g(x) &= g_1(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_n(x) + \dots \end{aligned}$$

les fonctions $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ satisfaisant à l'équation unique

$$(41) \quad \frac{p_i}{\lambda_i} E f = 0.$$

La solution d'une telle équation se compose d'une partie, que nous désignerons d'après M. NÖRLUND sous le nom de *solution principale* et d'une autre partie qui est solution d'une équation de la forme (41) mais qui correspond à un p inférieur à p_i . Nous écarterons cette partie et quand nous dirons solution de l'équation (41), nous sous-entendrons toujours la solution principale. Or la solution d'une équation aux différences finies, telle que (41), s'obtient en y cherchant p_i solutions particulières de la forme $t^{\frac{x}{\omega}}$, t étant une quantité à déterminer. On trouve pour l'équation (41) que t doit être racine de l'équation *caractéristique*

$$(42) \quad (1 - t\lambda_i)^{p_i} = 0$$

de sorte que l'équation aux différences (41) admet les p_i solution particulières

$$(43) \quad \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\frac{x}{\omega}}, x\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\frac{x}{\omega}}, x^2\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\frac{x}{\omega}}, \dots, x^{p_i-1}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\frac{x}{\omega}}$$

dont seulement la dernière est la *principale*. Nous prendrons par conséquent

$$(44) \quad \varphi_i(x) = C_i x^{p_i-1} \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\frac{x}{\omega}}, \quad \psi_i(x) = C'_i x^{p_i-1} \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\frac{x}{\omega}},$$

C_i , C'_i étant des constantes ou des fonctions, admettant la période ω .

La comparaison de deux développements (40) — tenu compte de (44) — montre qu'on a $C_i \equiv C'_i$, donc $\varphi_i(x) \equiv \psi_i(x)$.

7. Lorsque la fonction $g(x)$ peut être mise sous la forme (36), la connaissance des diverses fonctions $\varphi_{i,j}(x)$ est facile. En effet, la relation (36) même nous donne les fonctions $\varphi_{i,j}(x)$; la relation (21) et les analogues nous

font connaître les fonctions $\varphi_{i,2}(x)$ et, de proche en proche, à l'aide de la relation (20), on remonte à toute fonction $\varphi_{i,j}(x)$.

Mais si la décomposition de la fonction $g(x)$ n'est pas aisée, on doit employer d'autres procédés pour arriver à la même fin. L'équation aux différences (27) et les analogues ne sauraient y suffire parce que la solution, obtenue comme nous l'avons indiqué plus haut, comprend nombre de fonctions arbitraires, même si l'on s'astreint à la solution principale, qui comprend l'arbitraire d'une constante ou d'une fonction de période ω .

On peut alors recourir à des passages à la limite: en effet, soit λ_i un pôle d'ordre p_i de la résolvante; l'expression (16) de celle-ci nous montre qu'on a

$$(45) \quad \varphi_{i,p_i}(x) = \lim_{\lambda=\lambda_i} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{p_i} f(x).$$

Une fois déterminée la fonction $\varphi_{i,p_i}(x)$, on passe à la suivante $\varphi_{i,p_i-1}(x)$ également par un passage à la limite, car on a

$$(46) \quad \varphi_{i,p_i-1}(x) = \lim_{\lambda=\lambda_i} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{p_i-1} \left[f(x) - \frac{\varphi_{i,p_i}(x)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{p_i}} \right].$$

En général, on aura

$$(47) \quad \varphi_{i,p_i-k}(x) = \lim_{\lambda=\lambda_i} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{p_i-k} \left[f(x) - \frac{\varphi_{i,p_i}(x)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{p_i}} - \frac{\varphi_{i,p_i-1}(x)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{p_i-1}} - \dots - \frac{\varphi_{i,p_i-k+1}(x)}{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{p_i-k+1}} \right].$$

On pourra procéder encore autrement: après avoir déterminé les fonctions $\varphi_{i,p_i}(x)$, on déterminera les suivantes, $\varphi_{i,p_i-1}(x)$ à l'aide de l'équation aux différences (23) et ses analogues; on finit, de proche en proche, par déterminer les fonctions finales $\varphi_{i,1}(x)$. Mais comme les équations aux différences (23) sont d'un caractère spécial, nous nous en occuperons plus loin.

Dans la pratique, il faut commencer par déterminer les fonctions correspondant au plus petit pôle, soit λ_1 , puisque pour $\lambda > \lambda_1$, la série (5), qui représente la résolvante de l'équation fonctionnelle (1), diverge et on risque d'aboutir ainsi à des résultats faux.

Soit donc λ_1 le plus petit pôle de la résolvante (5), de multiplicité p et désignons par $S_n(\lambda)$ la somme des $(n+1)$ termes du développement (11), c'est à dire, y compris ceux en λ^n . On aura

$$(48) \quad \begin{aligned} S_n(\lambda_1) = & \lambda_1^n g(x+n\omega) + \lambda_1^{n-1} (1 - C_p^1) g(x + \overline{n-1}\omega) + \\ & + \lambda_1^{n-2} (1 - C_p^1 + C_p^2) g(x + \overline{n-2}\omega) + \dots \\ \dots + & \lambda_1^{n-p+1} (1 - C_p^1 + C_p^2 - \dots + (-1)^{p-1} C_p^{p-1}) g(x + \overline{n-p+1}\omega) \end{aligned}$$

et à cause de la convergence pour $\lambda = \lambda_1$ du développement (11),

$$(49) \quad \varphi_{1,p}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\lambda_1).$$

Le problème se simplifie de beaucoup lorsque λ_1 est un pôle simple; on a en effet,

$$(50) \quad \varphi_{1,1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n g(x + n\omega).$$

Ainsi, prenons le cas $g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$. Nous avons vu que la résolvante de l'équation fonctionnelle (1) correspondante admet l'infinité dénombrable de pôles simples $e^{n\omega}$, $n = 1, 2, \dots$.

En prenant $\lambda_1 = e^\omega$, on a

$$\varphi_{1,1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n\omega}}{e^{x+n\omega} - 1} = e^{-x}$$

résultat déjà trouvé. On a ensuite

$$f_1(x) = f(x) - \frac{e^{-x}}{1 - \lambda e^{-x}} = \sum_0^\infty \lambda^n \left[\frac{1}{e^{x+n\omega} - 1} - \frac{1}{e^{x+n\omega}} \right] = \sum_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-x-n\omega}}{e^{x+n\omega} - 1}.$$

Considérons le deuxième pôle $\lambda_2 = e^{2\omega}$; on a

$$(1 - \lambda e^{-2\omega})f_1(x) = \frac{e^{-x}}{e^x - 1} + \sum_1^\infty \lambda^n \left[\frac{e^{-x-n\omega}}{e^{x+n\omega} - 1} - \frac{e^{-x-(n+1)\omega}}{e^{x+(n-1)\omega} - 1} \right].$$

Prenons les premiers $(n+1)$ termes de cette série, convergente pour $\lambda = e^{2\omega}$ et faisons-y $\lambda = e^{2\omega}$; on aura

$$\varphi_{2,1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x+n\omega}}{e^{x+n\omega} - 1} = e^{-2x}$$

et ainsi de suite.

8. La relation (49) est encore remarquable à un autre point de vue: elle nous permet de déterminer le plus petit pôle de la résolvante de l'équation aux différences (1), ainsi que son ordre de multiplicité. En effet, si λ_1 est le pôle envisagé, ayant l'ordre de multiplicité p , le développement (11) doit être — comme nous l'avons déjà remarqué — régulier pour $\lambda = \lambda_1$ et par suite la limite (49) existe et est en même temps différente de zéro. Il s'ensuit que, pour déterminer le plus petit pôle de la résolvante, ainsi que son ordre de multiplicité, il faut et il suffit de pouvoir déterminer l'entier positif p et le nombre λ_1 , tels que la limite

$$(51) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\lambda_1)$$

— $S_n(\lambda_1)$ ayant l'expression (48) — existe et soit différente de zéro.

Pour en donner un exemple simple, considérons la cas $g(x) = e^x$. On a

$$S_n(\lambda_1) = e^{x(\lambda_1 e^\omega)^n} \left[1 + \frac{1 - C_p^1}{\lambda_1 e^\omega} + \frac{1 - C_p^1 + C_p^2}{(\lambda_1 e^\omega)^2} + \dots + \frac{1 - C_p^1 + \dots (-1)^{p-1} C_p^{p-1}}{(\lambda_1 e^\omega)^{p-1}} \right].$$

Pour que $S_n(\lambda_1)$ ait une limite finie et différente de zéro, il faut la condition première $\lambda_1 = e^{-\omega}$; on a ensuite

$$1 + (1 - C_p^1) + (1 - C_p^1 + C_p^2) + \dots + [1 - C_p^1 + \dots (-1)^{p-1} C_p^{p-1}] = \\ C_p^1 - 2C_p^2 + 3C_p^3 - \dots + (-1)^{p-1} p C_p^p$$

et la dernière somme est nulle si $p > 1$. La résolvante admet ainsi le pôle simple $\lambda_1 = e^{-\omega}$.

Prenons encore $g(x) = x^2$. On a

$$S_n(\lambda_1) = \lambda_1^n (x + n\omega)^2 \left[1 + \frac{(1 - C_p^1)}{\lambda_1} + \frac{(1 - C_p^1 + C_p^2)}{\lambda_1^2} + \dots \right] \\ - 2\lambda_1^{n-1} \omega (x + n\omega) \left[1 - C_p^1 + \frac{1 - C_p^1 + C_p^2}{\lambda_1} + \dots \right] \\ + \lambda_1^{n-1} \omega^2 \left[1 - C_p^1 + 2^2 \frac{1 - C_p^1 + C_p^2}{\lambda_1} + \dots \right].$$

Les deux premières parenthèses s'anulent pour $\lambda_1 = 1$, quel que soit l'entier positif p ; pour que la troisième soit différente de zéro, il faut prendre $p = 3$. La résolvante admet donc le pôle triple $\lambda_1 = 1$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

V. THÉORÈME. — *Pour que la résolvante de l'équation aux différences finies*

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = g(x),$$

soit une fonction méromorphe en λ , il faut et il suffit qu'on puisse déterminer l'entier positif p et le nombre λ_1 , tels que la limite de l'expression

$$S_n(\lambda_1) = \lambda_1^n g(x + n\omega) + \lambda_1^{n-1} (1 - C_p^1) g(x + \overline{n-1}\omega) + \dots \\ \dots + \lambda_1^{n-p+1} (1 - C_p^1 + C_p^2 + \dots (-1)^{p-1} C_p^{p-1}) g(x + \overline{n-p+1}\omega),$$

pour n infini, existe et soit différente de zéro.

Dans ce cas, λ_1 en sera le plus petit pôle, p étant son ordre de multiplicité.

9. Considérons maintenant l'équation aux différences

$$(52) \quad f(x) - \lambda_1 f(x + \omega) = g(x)$$

dans laquelle λ_1 désigne un pôle, d'ordre quelconque p , de la résolvante de l'équation fonctionnelle (1). Evidemment, l'équation (52) ne peut être résolue

La résolution de ce système nous laisse arbitraire la constante ou la fonction périodique A_0 , dont on peut disposer pour imposer une condition supplémentaire à la fonction $f(x)$, solution de l'équation fonctionnelle (52). Cette circonstance particulière ne se présente pas dans la résolution de l'équation fonctionnelle (1).

Pour donner un exemple simple, considérons l'équation

$$(55) \quad \overset{1}{E}f(x) = f(x) - e^\omega f(x + \omega) = e^{-\alpha}.$$

On a

$$\overset{2}{E}f(x) = 0, \quad \lambda_1 = e^\omega.$$

La solution la plus générale de cette dernière équation étant

$$f(x) = e^{-\alpha(ax + b)},$$

elle satisfait aussi à l'équation (55) si $a\omega = -1$, de sorte que la solution la plus générale de l'équation aux différences (55), est

$$f(x) = -e^{-\alpha(x\omega - b)}$$

b étant une constante ou une fonction arbitraire, de période ω .

On voit sur cet exemple et encore davantage dans la marche suivie pour résoudre l'équation fonctionnelle (52), que sa résolvante ne présente plus le caractère de méromorphisme, accusé par la résolvante de l'équation aux différences finies (1).

10. Passons maintenant au cas général où la fonction $g(x)$ ne satisfait plus à l'équation fonctionnelle (12). Si l'on a

$$g(x) = g_1(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots$$

dans laquelle décomposition $g_1(x)$ satisfait à la condition (32), tandis que les fonctions $\varphi_i(x)$ vérifient des équations fonctionnelles telles que (27), la résolution de l'équation fonctionnelle (52) sera décomposée dans celle des suivantes

$$(56) \quad \bar{f}(x) - \lambda_1 \bar{f}(x + \omega) = g_1(x)$$

$$(57) \quad f_i(x) - \lambda_i f_i(x + \omega) = \varphi_i(x)$$

$$(58) \quad f_i(x) - \lambda_i f_i(x + \omega) = \varphi_i(x). \quad i = 2, 3, \dots$$

La résolvante de l'équation (56) est une fonction entière en λ_1 , l'équation (57) est justement de la forme (52), étudiée dans le § précédent, tandis que (58) sont des équations de la forme (1), dont les résolvantes ne possèdent

plus λ_1 , comme valeur caractéristique. La solution de l'équation aux différences finies (52) sera donnée ainsi par l'expression

$$(59) \quad f(x) = \bar{f}(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

à la condition expresse que la série du second membre converge uniformément. La solution, ainsi obtenue, dépend d'une fonction arbitraire, de période ω , pouvant se réduire même à une constante, qui s'y introduit pendant la résolution de l'équation fonctionnelle (57).

Nous pouvons énoncer donc, le théorème suivant

VI. THÉORÈME C. — *Lorsque la résolvante de l'équation aux différences finies*

$$f(x) - \lambda f(x + \omega) = g(x)$$

est une fonction méromorphe en λ , l'équation

$$f(x) - \lambda_1 f(x + \omega) = g(x)$$

— dans laquelle λ_1 est un pôle de la résolvante — est toujours résoluble et sa solution la plus générale, dépend d'une fonction arbitraire, de période ω .

11. Cette théorie de l'équation aux différences finies (1) s'étend facilement à des équations de même nature, mais plus générales. La généralisation la plus immédiate est fournie par les équations de même forme que (1), mais à plusieurs variables, dont nous considérerons le cas de deux variables;

$$(60) \quad f(x, y) - \lambda f(x + a, y + b) = g(x, y)$$

dans laquelle les constantes a et b sont supposées positives ou à partie réelle positive, ce qu'on peut toujours obtenir par des changements de variable. Les cas où $g(x, y) \equiv g(x + y)$ ou $g(x, y) = g_1(x) + g_2(y)$ sont à rejeter car ils se réduisent à celui d'une seule variable en posant, dans le premier $x + y = u$, $a + b = \omega$ et, dans le second $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$.

Ces cas particuliers laissés de côté, le cas général se traite d'une façon absolument analogue à celui d'une seule variable. Il y a à considérer la limite de l'expression

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x + na, y + nb)}{g(x + n - 1a, y + n - 1b)}.$$

C'est ainsi qu'on trouve pour l'équation

$$(61) \quad f(x, y) - \lambda f(x + a, y + b) = \frac{x^p y^r}{p! r!},$$

une résolvante qui est un polynome degré $p + r$ en x et y et admet le pôle $\lambda = 1$ avec l'ordre de multiplicité $(p + r + 1)$.

12. Une autre extension, dans le cas d'une seule variable et qui mériterait une étude à part, serait la considération du système d'équations aux différences finies

$$(62) \quad \varphi_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^p a_{ij} \varphi_j(x + \omega) = g_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

les a_{ij} étant des constantes à déterminant non nul.

La solution, obtenue à l'aide des approximations successives,

$$(63) \quad \varphi_i(x) = \varphi_{i_0}(x) + \lambda \varphi_{i_1}(x) + \lambda^2 \varphi_{i_2}(x) + \dots$$

dans laquelle

$$(64) \quad \varphi_{i_0}(x) = g_i(x)$$

$$(65) \quad \varphi_{i_n}(x) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \varphi_{j, n-1}(x)$$

s'étudie de la même façon.

13. Il y a à considérer enfin l'équation

$$(66) \quad f(x) - \lambda \sum_1^p A_i f(x + \omega_i) = g(x),$$

dont je me suis occupé, ainsi que M. S. BOCHNER ⁽⁶⁾, à d'autres points de vue, et à laquelle on peut étendre la théorie de l'équation (1), telle que nous l'avons envisagée dans ces lignes.

⁽⁶⁾ « Rendiconti Accad. Lincei », loc. cit. ⁽³⁾, mars 1933.

Gli scorrimenti nella Geometria non euclidea degli iperspazi ed alcune notevoli corrispondenze proiettive.

Memoria di BENIAMINO SEGRE (a Bologna) (1).

Sunto. - *Vengono studiati e completamente determinati i seguenti tipi di corrispondenze proiettive non singolari fra S_n sovrapposti (con applicazioni alla Geometria non euclidea di S_n): omografie di S_n per cui due punti omologhi qualunque sono congiunti da una retta unita; reciprocità non involutorie di S_n che posseggono un'unica quadrica d'incidenza; omografie di S_n che trasformano una quadrica Q in una quadrica Q' (eventualmente coincidente colla Q), associando fra loro punti di Q , Q' congiunti da rette in essi tangenti a tali quadriche.*

PREFAZIONE

È noto che in un S_n non euclideo esistono, per $n \geq 3$, coppie di rette senza punti a comune (perchè sghembe), ciascuna delle quali è luogo di punti aventi dall'altra una distanza costante: due rette siffatte diconsi fra loro *parallele nel senso di CLIFFORD*, e posson esser reali solo in geometria ellittica (ossia quando mancano le ordinarie parallele). Le numerose eleganti proprietà relative alle parallele di CLIFFORD in un S_3 non euclideo, son intimamente collegate all'esistenza di particolari *movimenti* dell' S_3 — detti dal CLIFFORD *scorrimenti* ed in certa guisa analoghi alle traslazioni di un S_3 euclideo — i quali *mutano ogni retta dello spazio nella retta medesima, od in un'altra ad essa parallela nel senso di CLIFFORD* (2).

In questo lavoro mi propongo anzitutto di indagare se in un qualunque S_n non euclideo esistano movimenti — da denominarsi ancora *scorrimenti* — che abbiano i suddetti requisiti; e, in caso affermativo, di determinarli tutti. La questione si riconduce subito alla seguente, ricorrendo

(1) Questa Memoria costituisce un capitolo del Corso di *Complementi di Geometria*, che sto svolgendo presso la R. Università di Bologna come introduzione alla Geometria superiore. Analoga origine didattica ha la Nota *Sui gruppi di S_k associati di un S_r* (« Rendic. R. Acc. delle Scienze di Bologna », Adunanza 12 novembre 1933), in cui estendo agli spazi superiori la nozione e le principali proprietà concernenti le quintuple di piani associati di S_4 .

(2) A tal proposito v. p. es. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, parte 2^a (Bologna, Zanichelli, 1924), pp. 515 e seg.¹; oppure F. KLEIN, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, bearb. von W. ROSEMAN, (Berlin, Springer, 1928), pp. 233 e seg.¹.

alla classica metrica non euclidea di CAYLEY-KLEIN avente per assoluto una quadrica Q non specializzata di S_n : *Costruire le omografie non identiche di S_n trasformanti in sè Q , e tali che due qualunque punti omologhi distinti di Q siano congiunti da una retta situata su Q .* Un'omografia siffatta, supposta esistente, verrà brevemente denominata un'omografia inerente alla quadrica Q .

Al n. 3 vien provato che un'omografia di S_n , inerente ad una quadrica non specializzata di questo spazio, è non singolare e lascia fissa ogni retta congiungente due punti omologhi distinti di S_n . Perciò iniziamo il lavoro collo studio delle omografie non singolari di S_n , che godono di quest'ultima proprietà, stabilendo fra l'altro (§ I) ch'esse sono soltanto quelle che chiamiamo *omografie biassiali d'indici (h, k) generali e speciali*, ossia le omografie di S_n , che — colla notazione di C. SEGRE — rispettivamente hanno per caratteristica

$$[(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{h+1}), (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{k+1})] \text{ o } [(\overbrace{2, 2, \dots, 2}^{h+1}), (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{k-h})],$$

con

$$k \geq h \geq 0, \quad h + k = n - 1 \quad (3).$$

Ne consegue (§ II) che le omografie di S_n inerenti ad una quadrica sono le omografie biassiali speciali col 1° indice dispari, alle quali si aggiungono, per n dispari, le omografie biassiali generali coi due indici uguali ad $\frac{1}{2}(n - 1)$. Per $n = 5$, l'interpretazione di questi risultati nella geometria della retta di S_3 mostra che non vi sono altre proiettività non identiche fra due S_3 sovrapposti, in cui due qualunque rette omologhe distinte sono incidenti, all'infuori delle omologie (generali e speciali). Per $n \geq 3$ arbitrario, poi, ciò che precede fornisce l'esistenza di un certo numero > 0 di classi di scorrimenti in sè di un S_n non euclideo; ciascuno di tali scorrimenti appartiene ad un determinato gruppo abeliano semplicemente infinito, tutto costituito da scorrimenti della medesima classe, ed avente come traiettorie ∞^{n-1} rette fra loro a due a due parallele nel senso di CLIFFORD. È infine da rilevare che esistono scorrimenti reali solo negli S_n ellittici di dimensione dispari; in uno spazio di questo tipo gli scorrimenti reali formano un sol sistema continuo o ne formano due, a seconda che $n - 1$ è o non è divisibile per 4 (4).

(3) Le omografie biassiali d'indici $(0, n - 1)$, non son altro che le omologie (generali e speciali).

(4) Quei sistemi sono dei gruppi per $n = 3$, e solo in tal caso.

Una parte degli sviluppi precedenti si connette strettamente al problema, finora non risoluto, di determinare le *reciprocità non involutorie nè singolari fra S_n sovrapposti, che ammettono un'unica quadrica d'incidenza non specializzata*. Il problema non ammette soluzioni per $n = 2$, ossia (n. 10) *condizione necessaria e sufficiente affinché una reciprocità piana non singolare sia una polarità rispetto ad una conica, è che le sue due coniche d'incidenza siano irriducibili e coincidenti*. Questo teorema non ha l'analogo nello spazio ordinario e neppure in alcun altro spazio superiore, e cioè esistono reciprocità del tipo suddetto per ogni valore di $n \geq 3$ ⁽⁵⁾. Precisamente (§ II) *si ottengono tutte e sole le reciprocità in discorso, moltiplicando la polarità rispetto ad una quadrica non specializzata di S_n per un'omografia non involutoria a questa inerente*.

Un ultimo problema, di cui si occupa il § IV, è la determinazione delle *omografie di S_n inerenti a due quadriche Q, Q' non specializzate di tale spazio: così denominiamo un'omografia di S_n che muti Q in Q' , in modo che due qualunque punti omologhi distinti delle due quadriche siano congiunti da una retta che in essi tocchi le Q, Q' . Quando Q coincide con Q' , le omografie richieste sono quelle studiate al § II. Invece omografie inerenti a due quadriche distinte, esistono solo negli spazi di dimensione dispari, $2p - 1$; ognuna di esse è generalmente *inerente ad ∞^{p-1} coppie di quadriche*, e può sempre decomporre (in un modo e quindi in generale, conseguentemente, in ∞^{p-1} modi) nel *prodotto della polarità rispetto ad una quadrica per una polarità nulla*, come pure nel *prodotto di una polarità nulla per la polarità rispetto ad una quadrica*; viceversa, *il prodotto di due qualunque polarità non singolari di nome diverso* (prese in ordine arbitrario) *dà un'omografia inerente a due quadriche*. Una siffatta omografia, inoltre, può venir altrimenti caratterizzata dalla possibilità di distribuire i suoi divisori elementari in coppie, tali che *elementi di una stessa coppia abbiano il medesimo esponente e si annullino in corrispondenza a valori fra loro opposti*. Le cose si presentano in modo particolarmente interessante nello spazio ordinario, come risulta dal n. 13.*

È superfluo rilevare che la traduzione analitica — che per brevità omettiamo — di molti dei risultati conseguiti in questo lavoro, fornirebbe senza sforzo la determinazione di estese classi di *sostituzioni lineari* e di *determinanti*, godenti di notevoli proprietà (v. nn. 6 e 9).

(5) Per $n = 3$, un esempio in proposito trovasi nella nota a pie' di p. 139 dell'*Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Messina, Principato, 1923) di E. BERTINI.

§ I. Le omografie biassiali di S_n .

1. Dalla teoria generale delle omografie fra spazi sovrapposti ⁽⁶⁾ seguono subito varie proprietà, nonchè le equazioni canoniche, di quelle che nella Prefazione abbiamo convenuto di chiamare le *omografie biassiali* di S_n ⁽⁷⁾, e fra le quali — come già si è avvertito — vi sono in particolare le *omologie*.

Un'omografia biassiale generale di S_n , d'indici (h, k) , possiede due spazi fondamentali indipendenti, S_h, S_k , con

$$(1) \quad h + k = n - 1, \quad k \geq h \geq 0,$$

ed un unico invariante assoluto, a (finito, non nullo e diverso da 1); due qualunque punti omologhi distinti (ossia non situati sugli spazi S_h, S_k , luoghi dei punti uniti), sono congiunti da una retta unita appoggiata ad S_h, S_k , e determinano coi relativi due punti d'appoggio *birapporto costante*, uguale ad a . Presi rispettivamente in S_h ed in S_k i punti fondamentali A_0, A_1, \dots, A_h ed $A_{h+1}, A_{h+2}, \dots, A_n$ delle coordinate proiettive omogenee (x_0, x_1, \dots, x_n) , le equazioni dell'omografia si riducono alla forma:

$$(2) \quad x_0 : x_1 : \dots : x_n : x_{h+1} : x_{h+2} : \dots : x_n = x'_0 : x'_1 : \dots : x'_h : ax'_{h+1} : ax'_{h+2} : \dots : ax'_n.$$

Un'omografia biassiale speciale di S_n , cogli indici (h, k) ancora soddisfacenti alle (1), ammette un solo spazio fondamentale, S_k , ed una sola stella fondamentale, il cui centro S_h appartiene ad S_k o, per $h = k$, coincide con questo spazio; due qualunque punti omologhi distinti (ossia non situati sullo spazio S_h , luogo dei punti uniti) sono congiunti da una retta unita appoggiata ad S_h , sulla quale l'omografia subordina una proiettività *parabolica*. Presi i vertici A_0, A_1, \dots, A_h della piramide fondamentale in S_h , e scelti inoltre per $k > h$ i vertici A_{h+1}, \dots, A_k (fuori di S_h) in S_k , le equazioni dell'omografia:

$$(3) \quad \rho x'_r = \sum_{s=0}^n a_{rs} x_s, \quad \text{ove } r = 0, 1, \dots, n \quad (\rho \neq 0, A \equiv |a_{rs}| \neq 0),$$

si semplificano, risultando com'è facile vedere

$$(4) \quad a_{00} = a_{11} = \dots = a_{nn} \neq 0, \quad a_{rs} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per } r \neq s, r > h; \\ \text{per } r \neq s, s \leq k \end{array} \right.$$

⁽⁶⁾ Ved. C. SEGRE, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, « Mem. R. Acc. dei Lincei », serie III, t. 19 (1884), p. 127; oppure E. BERTINI, Op. cit., cap. IV.

⁽⁷⁾ Questa convenzione non fa che estendere una terminologia parzialmente in uso nello spazio ordinario; cfr. p. es. A. COMESSATTI, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Parte II (Padova, Cedam, 1931), pp. 300 e 302.

in altri termini, nel determinante A della sostituzione lineare (3) si annullano tutti gli elementi, tranne quelli della diagonale principale, uguali fra loro, ed al più quelli del subdeterminante

$$(5) \quad \alpha = \begin{vmatrix} a_{0, k+1} & a_{0, k+2} & \dots & a_{0, n} \\ a_{1, k+1} & a_{1, k+2} & \dots & a_{1, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h, k+1} & a_{h, k+2} & \dots & a_{h, n} \end{vmatrix}$$

d'ordine $h + 1 = n - k$. Quest'ultimo potrebbe venir ulteriormente ridotto, disponendo opportunamente degli elementi fondamentali delle coordinate ancora arbitrari, d'accordo col fatto che l'omografia in discorso *non ha invarianti assoluti*; pel seguito tuttavia basta rilevare che è $\alpha \neq 0$, poichè la caratteristica del determinante

$$(6) \quad D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \rho & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \rho & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix}$$

deve precisamente valere $h + 1 = n - k$, quando per ρ si assuma l'unico valore

$$\rho = a_{00} = a_{11} = \dots = a_{nn}$$

che annulla $D(\rho)$.

Dalle equazioni (2) e dalle (3), (4) si deduce agevolmente che:

Un'omografia biassiale, generale o speciale, d'indici (h, k) di S_n , determina coll'identità un fascio di omografie del medesimo tipo, formanti un gruppo abeliano; tali omografie posseggono tutte le stesse ∞^{n-1} rette unite, costituenti le traiettorie del gruppo, il cui insieme verrà detto un sistema lineare (generale o speciale) di rette, d'indici (h, k).

Per ciò che precede, un sistema lineare generale di rette d'indici (h, k) non è altro che l'insieme delle rette che si appoggiano ad un S_h e ad un S_k sghembi fra loro. Si ottiene un sistema lineare speciale di rette d'indici (h, k), dando arbitrariamente una corrispondenza proiettiva non singolare fra i punti di un S_h e gli S_{k+1} di S_n ($n = h + k + 1$) passanti per un S_k fisso contenente S_h , e considerando le ∞^{n-1} rette di S_n , che sono incidenti ad S_h e stanno nell' S_{k+1} che corrisponde al relativo punto d'appoggio. Risulta poi che un'omografia biassiale speciale può ottenersi come limite da un'omografia biassiale generale cogli stessi indici, quando dei due spazi fondamentali di quest'ultima uno venga a contenere l'altro.

2. Invertendo un precedente risultato, stabiliremo ora che:

Un'omografia non singolare nè identica fra due spazi sovrapposti, che abbia unita ogni retta congiungente due punti omologhi distinti, è un'omografia biassiale.

Sia invero Ω un'omografia di S_n , di quel tipo, e P, P' due generici punti omologhi (distinti). È ben noto che la retta r che li congiunge si appoggia agli spazi sostegni delle stelle fondamentali d'iperpiani in punti distinti⁽⁸⁾; e poichè ciascuno di tali spazi è trasformato in sè dalla Ω , ed inoltre la retta r per ipotesi è unita, ne segue che i suddetti punti d'appoggio sono uniti. Ora, siccome la proiettività (non identica) subordinata su r dalla Ω ha due punti uniti distinti o coincidenti, si conclude che i centri delle stelle fondamentali, e quindi pure gli spazi fondamentali della Ω (che in ogni caso hanno significato duale e sono nello stesso numero di quelli), debbono essere due distinti o ridursi ad uno solo. Distinguiamo i due casi.

Se Ω possiede due spazi fondamentali, S_h ed S_k (con $k \geq h \geq 0$), questi sono certo indipendenti⁽⁹⁾; essi inoltre appartengono ad S_n — cioè sussistono le (1) — dovendo per ogni punto P generico di S_n passare una retta r unita e contenente due punti uniti distinti, eppertanto appoggiata sia ad S_h che ad S_k . Dunque Ω , nelle ipotesi attuali, è un'omografia generale coi due soli spazi fondamentali S_h, S_k , ossia è un'omografia biassiale generale d'indici (h, k) (10).

Supponiamo ora che Ω abbia una sola stella fondamentale, di centro S_h (con $h \geq 0$), e quindi pure un sol spazio fondamentale, S_k : fra h e k , intanto, deve notoriamente intercedere la prima delle (1). Per un punto P generico di S_n passa, come sappiamo, una retta r unita e contenente un punto unito, eppertanto appoggiata ad S_k ; dunque l' S_{k+1} congiungente S_k e P è unito, cioè Ω subordina nella stella di centro S_k la proiettività identica. Ma i soli iperpiani uniti di S_n sono quelli passanti per S_h , onde deve S_h appartenere ad S_k o coincidere con questo spazio, ed essere $k \geq h$.

Introduciamo in S_n un sistema di coordinate proiettive omogenee, in modo analogo a ciò che si è fatto pel 2° caso considerato al n. 1; l'omografia Ω si rappresenti colle (3) in coordinate di punto, e quindi colle

$$(7) \quad \sigma \xi_r = \sum_{s=0}^n a_{rs} \xi'_s, \quad \text{per } r=0, 1, \dots, n,$$

(8) Ved. C. SEGRE, Mem. cit. n. 10; E. BERTINI, Op. cit., p. 80.

(9) Cfr. C. SEGRE, Mem. cit., n. 14; E. BERTINI, Op. cit., p. 77.

(10) Ciò segue subito dal n. 1; ved. pure E. BERTINI, Op. cit., pp. 85-86.

in coordinate d'iperpiano. Dovendo Ω subordinare l'identità nello spazio fondamentale S_k (di equazioni $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$), in base alle (3) risulta:

$$a_{00} = a_{11} = \dots = a_{kk} \neq 0, \quad a_{rs} = 0 \quad \text{per } r \neq s, \quad s = 0, 1, \dots, k;$$

parimente, affinché Ω subordini l'identità nella stella di centro S_h (di equazioni $\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_h = 0$), in forza delle (7) dev'essere:

$$a_{h+1, h+1} = a_{h+2, h+2} = \dots = a_{nn} \neq 0, \quad a_{sr} = 0 \quad \text{per } r \neq s, \quad s = h+1, h+2, \dots, n.$$

Tenuto conto delle (1), di cui dianzi abbiamo stabilito la validità, le condizioni trovate equivalgono alle (4); e poichè, come subito è visto, il determinante (5) certo non si annulla, si conclude che nelle ipotesi attuali Ω è un'omografia biassiale speciale d'indici (h, k).

Col linguaggio dell'Algebra, il risultato conseguito può enunciarsi dicendo che:

Affinchè una sostituzione lineare invertibile su $n+1 \geq 3$ variabili, sia tale che risulti identicamente nulla la matrice avente per orizzontali $n+1$ numeri arbitrari ed i loro trasformati secondo la data sostituzione e secondo la sostituzione inversa, è necessario e sufficiente che i suoi divisori elementari siano tutti semplici e si annullino per due soli valori, oppure siano al più dei quadrati e si annullino tutti per il medesimo valore.

§ II. Le omografie inerenti ad una quadrica di S_n e gli scorrimenti nella Geometria non euclidea degli iperspazi.

3. Come già si è detto nella Prefazione, chiamiamo *inerente ad una quadrica Q* di S_n , un'omografia non identica di questo spazio trasformante in sè Q , e tale che due qualunque punti omologhi distinti di Q siano congiunti da una retta situata su Q . Ci proponiamo di stabilire che:

Un'omografia inerente ad una quadrica non specializzata è necessariamente un'omografia biassiale.

Sia Q una quadrica non specializzata di S_n , di equazione:

$$(8) \quad \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n c_{rs} x_r x_s = 0,$$

con:

$$(9) \quad c_{rs} = c_{sr} \quad \text{per } r, s = 0, 1, \dots, n, \quad C \equiv |c_{rs}| \neq 0.$$

Se le (3) rappresentano un'omografia Ω che muta in sè Q , disponendo del

fattore ρ di proporzionalità si può supporre risulti

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n c_{ik} a_{i,r} a_{k,s} x_r x_s \equiv \rho^2 \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n c_{ik} x'_i x'_k \equiv \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n c_{r,s} x_r x_s,$$

ossia:

$$(10) \quad \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n c_{ik} a_{i,r} a_{k,s} = c_{r,s}, \quad \text{per } r, s = 0, 1, \dots, n.$$

Da qui si trae $C \cdot A^2 = C$, $A^2 = 1$, onde intanto Ω è certo *non singolare*. Affinchè l'omografia Ω sia inerente a Q , è inoltre necessario e sufficiente vi sia una costante a per cui si abbia identicamente:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n c_{r,i} a_{i,s} x_r x_s \equiv \rho \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^n c_{r,i} x_r x'_i \equiv a \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n c_{r,s} x_r x_s,$$

e cioè, tenuto conto delle (9), valgano le:

$$(11) \quad \sum_{i=0}^n (c_{r,i} a_{i,s} + c_{s,i} a_{i,r}) = 2ac_{r,s}, \quad \text{per } r, s = 0, 1, \dots, n.$$

Posto per abbreviare:

$$(12) \quad \omega_{r,t} = 2aa_{r,t} - \sum_{i=0}^n a_{r,i} a_{i,t}, \quad \text{per } r, t = 0, 1, \dots, n,$$

incominciamo col provare che, in forza delle (9), (10), (11), è:

$$(13) \quad \omega_{tt} = 1, \quad \omega_{r,t} = 0 \quad \text{per } r \neq t \quad (r, t = 0, 1, \dots, n).$$

Invero, qualunque siano $s, t = 0, 1, \dots, n$, dalle (12) si deduce:

$$\sum_{r=0}^n c_{r,s} \omega_{r,t} = \sum_{r=0}^n 2ac_{r,s} a_{r,t} - \sum_{r=0}^n \sum_{i=0}^n c_{r,s} a_{r,i} a_{i,t};$$

da qui, scambiando nell'ultimo sommatorio gl'indici r, i ed applicando le (9), (11), si trae:

$$\sum_{r=0}^n c_{r,s} \omega_{r,t} = \sum_{r=0}^n \sum_{i=0}^n (c_{r,i} a_{i,s} + c_{s,i} a_{i,r}) a_{r,t} - \sum_{r=0}^n \sum_{i=0}^n c_{s,i} a_{i,r} a_{r,t},$$

ossia, semplificando e ricordando le (10),

$$\sum_{r=0}^n c_{r,s} \omega_{r,t} = c_{t,s}.$$

Se in questa relazione si tien fisso l'indice t e si danno ad s i valori $0, 1, \dots, n$, si ottengono $n+1$ equazioni lineari nelle $n+1$ quantità $\omega_{\cdot,t}$, $\omega_{1,t}, \dots, \omega_{n,t}$; il sistema da esse formato ammette una sola soluzione, essendo diverso da zero il determinante C dei coefficienti; e detta soluzione è precisamente quella fornita dalle (13), come subito si verifica.

Ciò premesso, e tenuto conto del § I, per dimostrare il teorema enunciato in principio basta far vedere che l'omografia Ω , inerente a Q , ammette come unita ogni retta congiungente due punti omologhi distinti di S_n ; il che equivale manifestamente a stabilire che, se Ω muta il punto $P(x)$ in $P'(x')$ ed il punto $P'(x')$ in $P''(x'')$, sempre i tre punti P , P' e P'' (supposti distinti) sono allineati. Ora infatti, avuto riguardo alle (3), alle formole analoghe

$$\rho x_r'' = \sum_{i=0}^n a_{r,i} x_i' \quad \text{per } r=0, 1, \dots, n,$$

ed alle (13), (12), si ha successivamente:

$$\begin{aligned} x_r - 2a\rho x_r' &= \sum_{t=0}^n \omega_{r,t} x_t - 2a\rho x_r' = \\ &= \sum_{t=0}^n (2aa_{r,t} - \sum_{i=0}^n a_{r,i} a_{it}) x_t - 2a \sum_{t=0}^n a_{r,t} x_t = - \sum_{i=0}^n \sum_{t=0}^n a_{r,i} a_{it} x_t = - \rho \sum_{i=0}^n a_{r,i} x_i' = \\ &= - \rho^2 x_r'', \end{aligned}$$

ossia:

$$x_r - 2a\rho x_r' + \rho^2 x_r'' = 0, \quad \text{per } r=0, 1, \dots, n;$$

e ciò prova l'asserto.

4. Poggiando sui precedenti risultati, possiamo agevolmente determinare tutte le omografie inerenti ad una quadrica Q non specializzata di S_n . Ciascuna Ω di esse, intanto, dev'essere un'omografia biassiale (n. 3), di cui h e k , soddisfacenti alle (1), denotino gl'indici; distinguiamo due casi, secondochè l'omografia Ω è generale o speciale.

Se Ω è generale, possiede un S_h ed un S_k fondamentali, e ∞^{n-1} rette unite incidenti a questi (n. 1); di tali rette, ∞^{n-2} stanno su Q , dato che per un punto P generico di Q passa una di dette rette giacenti su Q (quella che congiunge il punto P coll'omologo di P secondo Ω). Ciò esige che S_h ed S_k appartengano a Q ; poichè, se p. es. S_h non vi stesse e quindi contenesse solo ∞^{h-1} punti di Q , le suddette $\infty^{n-2} = \infty^{h+k-1}$ rette di Q si otterrebbero congiungendo ∞^{h-1} di questi punti con tutti i punti di S_k , onde Q sarebbe un S_k -cono, contro il supposto. In base ad una nota proposizione ⁽¹¹⁾, deve pertanto essere:

$$h \leq \frac{n-1}{2}, \quad k \leq \frac{n-1}{2},$$

e quindi, in forza della prima delle (1),

$$h = k, \quad n = 2h + 1.$$

⁽¹¹⁾ Ved. p. es. E. BERTINI, Op. cit., p. 150.

Si conclude che:

Tutte e sole le omografie generali inerenti ad una quadrica non specializzata, sono omografie biassiali generali ad indici uguali; di queste omografie ne esistono solo negli spazi di dimensione dispari, e ciascuna di esse è inerente alle infinite quadriche passanti per i suoi due spazi fondamentali.

Data in un S_{2h+1} una quadrica Q non specializzata, due qualunque suoi S_h sghembi appartengono notoriamente allo stesso sistema od a sistemi diversi secondo che h è dispari o pari ⁽¹²⁾, e sono fondamentali per ∞^1 omografie biassiali generali inerenti a Q , formanti un gruppo continuo del tipo considerato al n. 1. *Non vi sono altre omografie generali inerenti a Q oltre alle suddette*, le quali complessivamente — a seconda che h è pari o dispari — costituiscono uno o due sistemi distinti, di dimensione $h^2 + h + 1$; uno qualunque di tali sistemi è un insieme connesso, ma non chiuso (nel campo complesso), dovendo venir completato colle omografie particolari inerenti a Q (ved. n. seguente), se si vuol ottenere un sistema continuo: è poi facile provare che quest'ultimo risulta un gruppo solo per $h = 1$.

5. Supponiamo in secondo luogo che l'omografia Ω , considerata al principio del n. 4, sia un'omografia biassiale speciale. L' S_h luogo dei punti uniti e l' S_h involuppo degli iperpiani uniti di Ω debbono essere mutuamente polari rispetto a Q , dato che Ω muta in sè Q : dunque lo spazio S_h — che (n. 1) appartiene ad S_h — *sta sulla quadrica Q , ed ammette precisamente S_k come spazio tangente relativo*. Ne risulta, come pocanzi, che dev'essere

$$h \leq \frac{n-1}{2};$$

e si ha inoltre subito $h > 0$, poichè, se S_h fosse un punto, ogni altro punto di Q sarebbe ad esso congiunto da una retta di Q , e la quadrica Q sarebbe un S_0 -cono, contro il supposto.

Ad un qualunque S_{h+1} , passante per S_h corrisponde un punto P di S_h , per modo che le rette uscenti da questo punto e giacenti nell' S_{h+1} , sono unite per Ω (n. 1); d'altro canto, quella fra queste rette che contiene un qualsiasi punto di Q situato in S_{h+1} , deve stare tutta su Q (n. 3), per il che occorre e basta che S_{h+1} tocchi Q in P , ossia che P appartenga all' S_{h-1} (di S_h) polare di S_{h+1} rispetto a Q . Al variare dell' S_{h+1} attorno ad S_h , il punto P omologo in S_h gli corrisponde in una proiettività non singolare

(12) Cfr. p. es. E. BERTINI, Op. cit., p. 155.

(n. 1), ed un'altra proiettività non singolare intercede fra l' S_{h+1} ed il relativo S_{h-1} polare rispetto a Q ; dunque il punto P e lo spazio S_{h-1} variano in S_h sempre appartenendosi, e corrispondendosi in una reciprocità non singolare (prodotto di quelle due proiettività), la quale è pertanto una *polarità nulla non singolare*: ciò esige che h sia un numero dispari. Il ragionamento s'inverte e si ottiene che:

Un'omografia particolare inerente ad una quadrica non specializzata, è un'omografia biassiale speciale col 1° indice dispari. Viceversa, un'omografia Ω di S_n di questo tipo, di cui S_h ed S_k denotino lo spazio fondamentale ed il centro della stella fondamentale, è inerente a ciascuna delle infinite quadriche non specializzate di S_n , che — fra lo spazio S_h e la stella di centro S_k — subordinano la proiettività prodotta di una qualsiasi polarità nulla non singolare di S_h , per la corrispondenza proiettiva individuata da Ω fra tali forme.

Una quadrica Q non specializzata di S_n , qualunque sia $n > 2$, possiede sempre infinite omografie particolari ad essa inerenti, distribuite in $\left[\frac{1}{4}(n+1)\right] + 1$ sistemi continui diversi se è $n \equiv 3 \pmod{4}$ ed in $\left[\frac{1}{4}(n+1)\right]$ sistemi continui diversi negli altri casi. Precisamente, scelto comunque su Q un S_h , ove h può solo esser uguale ad uno degli $\left[\frac{1}{4}(n+1)\right]$ interi dispari che non superano $\frac{1}{2}(n-1)$, sia S_k (con $k = n - h - 1$) il relativo spazio polare (passante per S_h); si consideri in S_h una qualsiasi polarità nulla (non singolare), e la si moltiplichi per la proiettività subordinata da Q fra lo spazio S_h e la stella di centro S_k : si ottien così una corrispondenza proiettiva fra i punti di S_h e gli S_{k+1} per S_k , in relazione alla quale (giusta il n. 1) resta individuato un gruppo continuo ∞^1 di *omografie biassiali speciali* inerenti a Q . Non vi sono altre omografie particolari inerenti a Q , all'infuori di quelle che si determinano in tal guisa. La scelta di S_h dipende da $\frac{1}{2}(h+1)(2n-3h-2)$ parametri, S_h potendo variare in due diversi sistemi continui, aventi ambedue quella dimensione, se è $n = 2h + 1$, ed in un sol sistema negli altri casi ⁽¹³⁾; poichè una polarità nulla di S_h dipende da $\frac{1}{2}h(h+1) - 1$ parametri, così uno dei suddetti sistemi di omografie biassiali speciali d'indici (h, k) inerenti a Q ha la *dimensione* $(h+1)(n-h-1) = hk + k$.

⁽¹³⁾ Ved. p. es. E. BERTINI, Op. cit., p. 152.

6. Dal punto di vista analitico, gli sviluppi dei nn. 4 e 5 provano che:
Condizione necessaria e sufficiente affinché una sostituzione lineare su $n + 1$ variabili sia inerente ad una forma quadratica a discriminante non nullo, è ch'essa abbia caratteristica del tipo:

$$(14) \quad \left[\overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^{\frac{1}{2}(n+1)}, \overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^{\frac{1}{2}(n+1)} \right] \quad (n \text{ dispari}),$$

oppure:

$$(15) \quad \left[\overbrace{(2, 2, \dots, 2)}^{2p}, \overbrace{(1, 1, \dots, 1)}^q \right] \quad (p \geq 1, q \geq 0, 4p + q = n + 1).$$

Così, ad esempio, per trovare cosa sono le sostituzioni lineari (3) inerenti alla quadrica

$$(16) \quad \sum_{r=0}^n x_r^2 = 0,$$

basta porre:

$$c_{rr} = 1, \quad c_{rs} = 0 \quad \text{per } r \neq s \quad (r, s = 0, 1, \dots, n)$$

nelle formule del n. 3; con ciò le (10) diventano le condizioni di ortogonalità del determinante $A \equiv |a_{rs}|$, mentre le (11) si riducono a:

$$a_{rr} = a, \quad a_{rs} + a_{sr} = 0 \quad \text{per } r \neq s \quad (r, s = 0, 1, \dots, n).$$

Dunque le suddette sostituzioni lineari — la cui effettiva determinazione è implicita nei risultati dei nn. 1, 4, 5 — sono caratterizzate dal fatto che *tutti gli elementi principali del loro determinante A hanno uno stesso valore, a, ed inoltre tale determinante risulta in pari tempo ortogonale e pseudosimmetrico (od emisimmetrico per $a = 0$).*

Poichè, nelle ipotesi attuali, dalla (6) si ricava agevolmente:

$$D^2(\rho) = (\rho^2 - 2a\rho + 1)^{n+1},$$

così una di quelle sostituzioni lineari ha la caratteristica (14) o la (15), secondochè risulta $a^2 \neq 1$ o $a^2 = 1$; in particolare, per $a = 0$, si ottiene il teorema di FROBENIUS ⁽¹⁴⁾:

I divisori elementari di una sostituzione lineare in pari tempo ortogonale ed alternata, sono tutti semplici e si annullano metà pel valore $+i$, metà pel valore $-i$.

⁽¹⁴⁾ Ved. G. FROBENIUS, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, « Journ. für die reine und ang. Math. », t. 84 (1878), p. 26.

7. I risultati dei nn. 4 e 5 si verificano subito direttamente nello spazio ordinario. Per $n=4$ e per $n=5$ da essi si trae in particolare che:

Le omografie inerenti ad una quadrica non specializzata di S_4 , costituiscono un unico sistema continuo ∞^4 e sono tutte omografie biassiali speciali di indici (1, 2). Una quadrica Q non specializzata di S_5 , possiede, come omografie ad essa inerenti, soltanto ∞^7 omografie biassiali generali di indici (2, 2) ed ∞^6 omografie biassiali speciali di indici (1, 3).

È subito visto, tenendo conto dei nn. 4 e 5, che se i punti di Q rappresentano al modo solito le rette di un S_3 , le suddette omografie inerenti a Q corrispondono alle ∞^7 omologie generali ed alle ∞^6 omologie speciali di S_3 . Dunque, poichè notoriamente una trasformazione proiettiva di S_3 si rispecchia in un'omografia di Q in sè e viceversa, e due rette incidenti di S_3 hanno per immagini due punti congiunti da una retta giacente su Q , così si può dire che:

Nello spazio ordinario non v'è alcuna reciprocità in cui due qualunque rette omologhe siano incidenti, e le sole omografie che godano di tale proprietà sono le omologie.

8. Assunta una quadrica Q non specializzata di S_n , come assoluto di una metrica non euclidea di CAYLEY-KLEIN, due rette di S_n , sono *parallele nel senso di CLIFFORD*, quando i due punti ove una di esse incontra Q possono venir congiunti ai due punti analoghi dell'altra da due rette di Q ⁽¹⁵⁾.

Un movimento dell' S_n non euclideo — ossia un'omografia Ω dell' S_n , che muti in sè Q — si denominerà (come nella Prefazione) uno *scorrimento*, quando due qualunque rette distinte di S_n , che siano omologhe secondo Ω , risultano fra loro parallele nel senso di CLIFFORD. In altri termini, presi su Q due generici punti A, B , di cui A', B' siano gli omologhi secondo Ω (situati pure su Q), debbono le rette AA', BB' oppure le AB', BA' giacere su Q ; ma la seconda alternativa si esclude subito, in quanto A, B , e quindi pure A', B' , possono venir scelti arbitrariamente su Q ; resta solo la prima, la quale (n. 3) esprime che:

Gli scorrimenti in geometria non euclidea, non sono altro che le omografie inerenti all'assoluto.

I risultati dei nn. 4 e 5, forniscono perciò senz'altro tutti gli scorrimenti relativi alla geometria non euclidea di un iperspazio. Quando ci si voglia limitare agli scorrimenti reali, siccome l'assoluto non può contenere

(15) Cfr. p. es. L. BIANCHI, loc. cit. o F. KLEIN, loc. cit..

spazi lineari reali, restano intanto esclusi quelli contemplati dal n. 5; quelli del n. 4 esistono solo per $n = 2h + 1$: uno di essi — se è reale — ha due S_h fondamentali sghembi e situati su Q , che necessariamente sono complessi-coniugati. Dunque Q non ha punti reali, e si conclude che:

Le sole geometrie non euclidee che posseggano degli scorrimenti reali, sono le geometrie ellittiche degli spazi S_n di dimensione $n = 2h + 1$ dispari. Secondochè h è pari o dispari, gli scorrimenti in sè di un tale spazio costituiscono un solo o due distinti sistemi continui, di dimensione $h^2 + h + 1$; uno di questi sistemi risulta un gruppo solo per $h = 1$, ed i suoi scorrimenti si possono in ogni caso distribuire in $\infty^{h(h+1)}$ gruppi abeliani ∞^1 , ciascuno dei quali ammette come traiettorie ∞^{2h} rette fra loro a due a due parallele nel senso di CLIFFORD.

§ III. Le reciprocità non involutorie di S_n che ammettono una sola quadrica d'incidenza.

9. Una correlazione \mathfrak{R} non singolare di un S_n in sè, si rappresenta analiticamente con formule del tipo:

$$(17) \quad \rho \xi_r' = \sum_{s=0}^n a_{r,s} x_s, \quad \text{per } r=0, 1, \dots, n, \quad (\rho \neq 0, A \equiv |a_{r,s}| \neq 0),$$

equivalenti alle:

$$\sigma x_r = \sum_{s=0}^n A_{r,s} \xi_s', \quad \text{per } r=0, 1, \dots, n, \quad (\sigma \neq 0, A' \equiv |A_{r,s}| \neq 0),$$

in cui, secondo l'uso, $A_{r,s}$ denota il complemento algebrico dell'elemento $a_{r,s}$ nel determinante A . È noto ⁽¹⁶⁾, e risulta subito dalle precedenti equazioni, che — supposto \mathfrak{R} non sia una polarità nulla — il luogo dei punti dell'uno o dell'altro dei due spazi sovrapposti che giacciono nel rispettivo iperpiano omologo è una medesima quadrica-luogo, di equazione:

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n a_{r,s} x_r x_s = 0;$$

e, dualmente, gli iperpiani che passano pel punto omologo involuppano la

⁽¹⁶⁾ Cfr. p. es. E. BERTINI, Op. cit., p. 115.

quadrica di equazione:

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n A_{rs} \xi_r \xi_s = 0.$$

Le due quadriche suddette denominansi le *quadriche d'incidenza di \mathcal{R}* ; esse risultano indeterminate se \mathcal{R} è una polarità nulla, e solo in tal caso; mentre coincidono in un'unica quadrica non specializzata, se \mathcal{R} è una reciprocità involutoria di altro tipo (che allora precisamente si identifica colla polarità rispetto a tale quadrica). Quest'ultima proprietà non si inverte, tranne per $n = 2$; e qui appunto ci proponiamo di determinare (se esistono) le *reciprocità non involutorie di S_n che ammettono un'unica quadrica d'incidenza non specializzata*.

La questione, dal punto di vista analitico, può venir formulata così. Posto:

$$b_{rs} = b_{sr} = a_{rs} + a_{sr}, \quad B \equiv |b_{rs}|, \quad B_{rs}^* = B_{sr}^* = A_{rs} + A_{sr}, \quad B_0 \equiv |B_{rs}^*|,$$

in quali casi, supposto il determinante non nullo $A \equiv |a_{ik}|$ sia nè simmetrico, nè emisimmetrico e $BB_0 \neq 0$, risultano le B_{rs} uguali o proporzionali alle B_{rs}^ ?*

Si hanno subito esempi di determinanti A di quel tipo, di un ordine pari arbitrario, nel modo seguente. Denotiamo con $\{p\}^h$ la matrice quadrata d'ordine h , avente gli elementi della diagonale principale uguali a p ed i rimanenti tutti uguali a zero; il determinante

$$A \equiv \begin{vmatrix} \{0\}^h & \{p\}^h \\ \{q\}^h & \{0\}^h \end{vmatrix},$$

in cui p^2 e q^2 siano diversi fra loro e da zero, soddisfa alle condizioni volute, risultando per esso:

$$B \equiv \begin{vmatrix} \{0\}^h & \{p+q\}^h \\ \{p+q\}^h & \{0\}^h \end{vmatrix},$$

$$B_0 \equiv \begin{vmatrix} \{0\}^h & \{(-1)^h p^{h-1} q^{h-1} (p+q)\}^h \\ \{(-1)^h p^{h-1} q^{h-1} (p+q)\}^h & \{0\}^h \end{vmatrix}.$$

La completa determinazione di tutti i determinanti A aventi i suddetti requisiti si presenta come piuttosto ardua, quando si voglia affrontare la via analitica diretta; la si può invece ottenere in modo assai semplice poggiando sugli sviluppi geometrici del n. seguente, i quali mostrano fra l'altro che *esistono determinanti di quel tipo di ogni ordine $n + 1 \neq 3$, ma non ve n'è alcuno del 3° ordine*.

10. Sia \mathcal{R} una correlazione non singolare nè involutoria di un S_n , in sè, avente un'unica quadrica d'incidenza, Q , non specializzata; e denotiamo

con \mathcal{Q} la polarità rispetto a Q . Un punto P generico di Q si trasforma mediante \mathcal{R} in un iperpiano π passante per P (dato che P sta sulla quadrica-luogo d'incidenza di \mathcal{R}), il quale però non tocca Q in P (se no \mathcal{R} coinciderebbe con \mathcal{Q}); d'altronde π , contenendo il punto P che gli corrisponde in \mathcal{R}^{-1} , deve appartenere alla quadrica-inviluppo d'incidenza di \mathcal{R} , e cioè deve toccare Q : e sia $P' \neq P$ il relativo punto di contatto. La retta PP' sta su Q , poichè congiunge due punti coniugati di Q ; ed in definitiva risulta che l'omografia

$$(18) \quad \Omega = \mathcal{R}\mathcal{Q}$$

(la quale appunto trasforma P in P') è *inerente* a Q . È da rilevare che la reciprocità \mathcal{R} — trasformando in sè, come s'è visto, la quadrica Q — è permutabile colla polarità \mathcal{Q} , ossia nel 2° membro della (18) è indifferente l'ordine con cui si eseguisce il prodotto; dunque, essendo $\mathcal{Q}^2 = 1$, dalla (18) si ricava:

$$(19) \quad \mathcal{R} = \Omega\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\Omega.$$

Consideriamo reciprocamente una qualunque omografia Ω (non identica), inerente ad una quadrica Q non specializzata di S_n ; e denotiamo, come dianzi, con \mathcal{Q} la polarità rispetto a Q . L'omografia Ω muta in sè Q (ond'è permutabile con \mathcal{Q}), trasformando un generico punto P di Q in un punto $P' \neq P$ di Q , congiunto a P da una retta situata su Q ; dunque l'iperpiano π tangente in P' a Q passa per P , eppertanto la reciprocità \mathcal{R} definita dalla (19) fa corrispondere ad ogni punto P di Q un iperpiano π passante per P , mentre la sua inversa associa ad ogni iperpiano π che tocca Q , un punto P che gli appartiene. Ciò significa che la reciprocità \mathcal{R} suddetta, sempre che non sia una polarità nulla, ammette Q come unica *quadrica d'incidenza*.

Si noti subito che \mathcal{R} non è certo la polarità rispetto a Q , essendo Ω non identica; resta da vedere se e quando essa può risultare una polarità nulla. All'uopo occorre e basta esista in S_n un punto P non situato su Q , che appartenga all'iperpiano π che gli corrisponde secondo \mathcal{R} ; ossia che, detto P' il punto omologo di P in Ω , i punti P e P' siano coniugati rispetto a Q . Questi punti — certo distinti, dato che P non sta su Q — sono congiunti da una retta unita secondo Ω (n. 3), la quale incontra Q precisamente nei suoi punti d'appoggio agli spazi fondamentali di Ω . La condizione indicata equivale a ciò che P e P' formino con tali punti d'appoggio un gruppo armonico, e cioè Ω sia un'omografia biassiale armonica.

In definitiva risulta che:

Si ottengono tutte e sole le reciprocità non involutorie di S_n aventi una

sola quadrica d'incidenza non specializzata, moltiplicando (in ordine arbitrario) la polarità rispetto ad una quadrica non specializzata di S_n , per un'omografia a questa inerente che non sia un'omografia biassiale armonica.

La determinazione delle reciprocità richieste è con ciò effettuata in modo completo, ove si abbiano presenti i risultati dei nn. 4 e 5; e si vede così che per $n \geq 3$ esistono sempre infinite reciprocità del tipo suddetto, distribuite in un certo numero di classi. Per $n = 2$, invece, non ne esiste alcuna, poichè una conica irriducibile non ammette omografie che le siano inerenti; dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una reciprocità piana ammetta un'unica conica d'incidenza irriducibile, è ch'essa sia una polarità rispetto ad una conica.

§ IV. Le omografie inerenti a due quadriche distinte di S_n .

11. Ci proponiamo da ultimo di studiare le omografie inerenti a due quadriche, ossia le omografie che mutano una quadrica Q in una quadrica Q' , per modo che due qualunque punti omologhi distinti di Q , Q' siano congiunti da una retta che in essi tocchi le due quadriche. Quando Q e Q' coincidono, le suddette omografie sono quelle determinate nel § II: perciò in seguito escluderemo questo caso.

Consideriamo in S_n due quadriche, Q e Q' , distinte e non specializzate, le quali rispettivamente siano fondamentali per le polarità Ω , Ω' ; e supponiamo esista un'omografia Ω ad esse inerente. Poichè intanto Ω deve trasformare Q in Q' , dev'essere

$$\Omega' = \Omega^{-1}\Omega\Omega,$$

onde l'omografia Ω e la reciprocità

$$\mathfrak{R} = \Omega\Omega' = \Omega\Omega$$

necessariamente risultano non singolari. Siano P e P' due generici punti di Q , Q' , omologhi secondo Ω , e π , π' gli iperpiani in essi rispettivamente tangenti alle quadriche Q , Q' : per ipotesi, ciascuno di questi deve contenere tanto P che P' . Poichè la reciprocità $\mathfrak{R} = \Omega\Omega'$ muta P in π' e la sua inversa $\mathfrak{R}^{-1} = \Omega^{-1}\Omega$ trasforma P' in π , così il luogo dei punti d'incidenza relativi alla \mathfrak{R} (ed alla \mathfrak{R}^{-1}) comprende le due quadriche distinte Q e Q' : ne risulta (n. 9) che tale luogo è indeterminato, ossia \mathfrak{R} è una polarità nulla non singolare e necessariamente n è un numero dispari.

Viceversa, in uno spazio di dimensione dispari, consideriamo la polarità Ω rispetto ad una qualsiasi quadrica Q non specializzata, ed una qua-

lunque polarità nulla non singolare, \mathfrak{R} ; l'omografia

$$(20) \quad \Omega = \mathcal{Q}\mathfrak{R}$$

trasforma \mathcal{Q} nella polarità \mathcal{Q}' , rispetto ad un'altra quadrica \mathcal{Q}' non specializzata, definita dalla

$$\mathcal{Q}' = \Omega^{-1}\mathcal{Q}\Omega = \Omega^{-1}\mathfrak{R},$$

onde risulta altresì:

$$\Omega = \mathfrak{R}\mathcal{Q}';$$

ed è subito visto che l'omografia Ω è inerente alle quadriche \mathcal{Q} e \mathcal{Q}' . Si conclude che:

Esistono omografie inerenti ad una coppia di quadriche distinte non specializzate solo negli spazi di dimensione dispari; e le si ottengono tutte moltiplicando fra loro (in ordine arbitrario) due qualunque polarità non singolari di nome diverso (¹⁷).

Conservando le precedenti notazioni, si ha che il gruppo discontinuo di proiettività individuato dalle \mathcal{Q} , \mathfrak{R} è finito od infinito, secondochè l'omografia Ω è o non è ciclica. Precisamente, tenuto conto delle $\mathcal{Q}^2 = 1$, $\mathfrak{R}^2 = 1$ e della (20), risulta che ogni corrispondenza del gruppo suddetto si può porre sotto una delle forme seguenti:

$$\Omega^k, \quad \mathfrak{R}_k = \Omega^{-k}\mathfrak{R}\Omega^k, \quad \mathcal{Q}_k = \Omega^{-k}\mathcal{Q}\Omega^k \quad (k \text{ intero } \geq 0),$$

ed è rispettivamente un'omografia, una polarità nulla o la polarità rispetto ad una quadrica \mathcal{Q}_k . Qualunque sia k vale la formula:

$$\Omega = \mathcal{Q}_k\mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}_k\mathcal{Q}_{k+1},$$

la quale dimostra che l'omografia Ω è inerente a due qualunque quadriche consecutive della seguente successione (finita od infinita secondochè Ω è o non è ciclica):

$$\dots, \mathcal{Q}_{-2}, \mathcal{Q}_{-1}, \mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}', \mathcal{Q}_2, \dots$$

Le ∞^{n-1} rette congiungenti ogni punto della quadrica \mathcal{Q}_k coll'omologo (di \mathcal{Q}_{k+1}) secondo Ω , costituiscono in S_n un sistema, Σ_k , avente le quadriche $\mathcal{Q}_k, \mathcal{Q}_{k+1}$ come falde focali; ed è facile vedere che, per $n=3$, i sistemi Σ_k ($k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) sono congruenze di rette dello spazio

(¹⁷) Le suddette omografie — che verranno altrimenti caratterizzate nel n.º successivo — si sono già presentate incidentalmente al ROSATI, come immagini di corrispondenze emisimmetriche su di una curva algebrica: v. C. ROSATI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due*, « Annali di Mat. », serie III, t. 25 (1915), p. 1. § 3, n. 6.

ordinario costituenti una *successione di LAPLACE*. In ogni caso, poi, *gli spigoli di regresso situati su Q_k (o su Q_{k+1}) delle sviluppabili appartenenti a Σ_k sono curve W di KLEIN e LIE, in quanto ciascuno di essi è mutato in sè dall'omografia infinitesima del fascio individuato dalla Ω (o dalla Ω^{-1}) coll'identità ⁽¹⁸⁾.*

12. Stabiliamo ora che:

Affinchè un'omografia non singolare di S_{2p-1} sia inerente a due quadriche distinte e non specializzate, occorre e basta che i suoi divisori elementari si possano distribuire in coppie, tali che elementi di una stessa coppia abbiano il medesimo esponente e si annullino in corrispondenza a valori fra loro opposti; anzi, sotto tali ipotesi, l'omografia risulta in generale inerente ad ∞^{p-1} coppie di quadriche.

La necessità e la sufficienza delle condizioni enunciate si traggono facilmente da una nota proposizione, concernente i fasci di forme bilineari determinati da una forma simmetrica e da una forma alternata ⁽¹⁹⁾; esse però possono anche venir direttamente provate nel modo seguente. Sia Ω l'omografia prodotto della polarità nulla non singolare rappresentata dalle (17) — con A emisimmetrico ed $n = 2p - 1$ — per la polarità rispetto ad una quadrica non specializzata, la cui equazione si può sempre supporre ridotta alla forma (16). L'omografia Ω è allora precisamente rappresentata dalle (3); ed i suoi divisori elementari godono della proprietà indicata, in quanto, nelle ipotesi attuali, gli elementi del determinante (6) caratteristico non fanno che cangiar tutti di segno se si muta ρ in $-\rho$, purchè in pari tempo nel determinante stesso si scambino le orizzontali colle verticali. La sufficienza di dette condizioni risulterà fra breve per le omografie generali, e potrebbe venir estesa alle omografie particolari mediante opportune considerazioni di continuità.

Da quanto sopra si ha che, fra le ∞^{4p^2-1} omografie di S_{2p-1} , quelle inerenti a due quadriche sono solo ∞^{4p^2-p-1} ; poichè le coppie costituite da una polarità rispetto ad una quadrica e da una polarità nulla di S_{2p-1} sono $\infty^{p(2p+1)-1} \cdot \infty^{p(2p-1)-1} = \infty^{4p^2-2}$, tenuto conto del n. 11 si ha che *un'omografia di S_{2p-1} inerente a due quadriche, e cioè che sia decomponibile nel prodotto di due polarità di nome diverso, è generalmente decomponibile in tal guisa in ∞^{p-1} modi diversi, ossia risulta inerente ad ∞^{p-1} coppie di quadriche.*

⁽¹⁸⁾ Non mi soffermo su questo argomento nè su altre questioni che ad esso si collegano (come ad esempio lo studio delle omografie cicliche inerenti a due quadriche), poichè di ciò si occuperà un mio allievo.

⁽¹⁹⁾ Ved. P. MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, (Leipzig, Teubner, 1899), Anhang a p. 231.

Esaminiamo la cosa un po' più da vicino, limitandoci per semplicità alle omografie generali di S_{2p-1} . Se una siffatta omografia soddisfa alle condizioni enunciate in principio, le sue equazioni possono ridursi alla forma canonica:

$$\rho x'_{2i} = a_i x_{2i}, \quad \rho x'_{2i+1} = -a_i x_{2i+1}, \quad \text{per } i=0, 1, \dots, p-1 \quad (a_0 a_1 \dots a_{p-1} \neq 0);$$

si verifica subito ch'essa è inerente alle ∞^{p-1} coppie di quadriche non specializzate rappresentate, al variare dei parametri mai nulli b_i , dalle equazioni:

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i^2 b_i x_{2i} x_{2i+1} = 0, \quad \sum_{i=0}^{p-1} b_i x_{2i} x_{2i+1} = 0,$$

potendo corrispondentemente venir decomposta nel prodotto della polarità rispetto alla 1^a quadrica per la polarità nulla di equazione:

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_i b_i (x_{2i} x'_{2i+1} - x'_{2i} x_{2i+1}) = 0,$$

oppure nel prodotto di quest'ultima per la polarità rispetto alla 2^a quadrica; e si constata senza difficoltà che — nell'ipotesi che le a_i^2 siano p quantità diverse fra loro — non vi è alcun altro modo di decomporre la data omografia nel prodotto di due polarità di nome diverso.

Si rilevi infine che le due quadriche ultime considerate ammettono le seguenti 2^{p-1} omografie ad esse inerenti:

$$\rho x'_{2i} = \varepsilon_i a_i x_{2i}, \quad \rho x'_{2i+1} = -\varepsilon_i a_i x_{2i+1}, \quad \text{con } \varepsilon_i = \pm 1, \quad \text{per } i=0, 1, \dots, p-1;$$

queste sono a due a due permutabili, ed hanno tutte per quadrato l'omografia:

$$\rho x'_{2i} = a_i^2 x_{2i}, \quad \rho x'_{2i+1} = a_i^2 x_{2i+1}, \quad \text{per } i=0, 1, \dots, p-1.$$

Ne risulta che la successione di quadriche individuata da quelle due, giusta il n. 11, è relativa a 2^{p-1} gruppi di proiettività del tipo ivi indicato; in corrispondenza a questi ultimi si ottengono 2^{p-1} successioni di sistemi $\Sigma \infty^{2p-2}$ di rette, tutte inerenti alla suddetta successione di quadriche.

13. Particolare interesse offre il caso — già direttamente considerato dal BIANCHI — di $n=3$, $p=2$ ⁽²⁰⁾. Due quadriche dello spazio ordinario

⁽²⁰⁾ Ved. L. BIANCHI, *Ricerche sulla deformazione delle quadriche*, « Rendic. del Circolo Mat. di Palermo », t. 22 (1906), p. 75, § 12; la proprietà quivi stabilita rientra in una da noi ottenuta al n. 11, per n dispari qualunque. Sull'argomento cfr. pure M. PICONE, *Sulle congruenze rettilinee W*, ibid., t. 37 (1914), p. 212, § 4, n. 12, ed A. TERRACINI, *Sulle congruenze W di cui una falda focale è una quadrica*, « Scritti offerti ad E. d'OIDIO » (Torino, Bocca, 1918), p. 149, n. 4.

che ammettano un'omografia ad esse inerente, sono falde focali di una congruenza di rette che, ponendo fra esse la corrispondenza subordinata da quell'omografia, è una congruenza W . Viceversa, una congruenza W che abbia come falde focali due quadriche, stabilisce fra queste una corrispondenza trasformante algebricamente e biunivocamente (le asintotiche cioè) le rette dell'una nelle rette dell'altra, e che pertanto è una proiettività, ovviamente subordinata da un'omografia dello spazio inerente alle due quadriche.

È chiaro che due quadriche di S_3 , mutate l'una nell'altra da una polarità nulla, s'incontrano secondo 4 rette (distinte o parzialmente coincidenti), che sono le due coppie di generatrici che il complesso lineare individuato dalla polarità nulla, ha in comune colle due schiere della 1^a quadrica. Da qui, poggiando sui nn. 11, 12 e su semplici considerazioni analitiche, si trae che:

Due quadriche di S_3 che siano falde focali di una congruenza W , hanno sempre in comune due coppie di generatrici di schiere opposte, e sono generalmente falde focali di una 2^a congruenza W . Viceversa, la congruenza (4, 4) delle tangenti comuni a due quadriche di S_3 si spezza sempre in due congruenze W , se le due quadriche s'incontrano secondo 4 generatrici.

E precisamente, se queste 4 rette sono distinte, ambedue le congruenze W hanno indici (2, 2), e le corrispondenze ch'esse stabiliscono fra le due quadriche — loro falde focali — sono subordinate da due omografie generali dello spazio, inerenti alle due quadriche e fra loro permutabili; ciascuna delle congruenze W considerate è anzi una congruenza R , in quanto la successione di LAPLACE da essa individuata è tutta costituita da congruenze W : e le due successioni di LAPLACE che così si ottengono hanno le stesse falde focali, date da quadriche appartenenti al fascio delle prime due.

Quando 2 generatrici (della stessa schiera) fra le 4 suddette coincidono, una delle due congruenze W si riduce ad una congruenza lineare speciale (contata due volte), mentre l'altra stabilisce fra le due quadriche un'omografia particolare ad esse inerente.

Sur quelques types de conditions imposées à la structure d'un ensemble ponctuel.

Par LUCIEN CHAMARD (Poitiers-Francia).

1. Soit E un ensemble ponctuel borné et fermé. L'ensemble des points de E par lesquels passe la surface d'une sphère d'appui de E , constitue le front φ_ρ de E . Nous le noterons φ_ρ .

Tout point P de φ_ρ appartient évidemment à la frontière extérieure de E (que nous désignerons par e). De plus, il est l'origine d'un segment rectiligne de longueur ρ , dont tous les points, sauf P , sont extérieurs à E , et dont l'autre extrémité Q appartient à la frontière F de l'ensemble ouvert E_ρ obtenu en effectuant sur E la construction C. M. avec le rayon ρ .

Dans ce travail, suscité par les récentes recherches de M. M. GEORGES BOULIGAND et GASTON VERGNÈRES, je m'occuperai :

- I) Des figures généralisant les figures convexes;
- II) Des ensemble dont tout point extérieur appartient à la classe α ;
- III) De la détermination d'un ensemble E par des hypothèses sur son front φ_ρ .

I.

2. Appelons \mathcal{E} le complémentaire de $E_\rho + F$, c'est-à-dire l'ensemble (non borné) des points situés à une distance de E supérieure à ρ . La construction C. M. effectuée sur \mathcal{E} avec le rayon ρ fournit un ensemble ouvert \mathcal{E}_ρ de frontière \mathfrak{F} .

En tant que distant de \mathcal{E} de ρ au moins, E est contenu dans le complémentaire de \mathcal{E}_ρ . Le front φ_ρ de E n'est autre que l'ensemble des points communs à \mathfrak{F} et à la frontière de E (en fait, de la frontière extérieure e).

3. M. GEORGES DURAND a noté qu'en effectuant la construction C. M. avec le rayon ρ sur la frontière F , on obtient une nouvelle frontière C. M. qui se décompose ainsi :

- a) l'ensemble $F_{2\rho}$ des points dont la distance à E est 2ρ ;

b) le front φ_ρ de E :

c) un certain ensemble ψ (¹).

Comme nous faisons ici la construction C. M., non plus sur F , mais sur le complémentaire \mathcal{G} de $E_\rho + F$, l'ensemble $F_{2\rho}$ se trouve éliminé de nos considérations. Quant à l'ensemble ψ , il n'est autre que celui des points de \mathfrak{F} qui n'appartiennent pas à φ_ρ , ce qui s'exprime par

$$\psi = \mathfrak{F} - \varphi_\rho.$$

Nous trouverons plus loin (²) des ensembles qui satisfont à la condition $\psi = 0$ ou, ce qui revient au même, à $\varphi_\rho = \mathfrak{F}$ (³).

4 Un cas intéressant où la condition $\psi = 0$ est réalisée est celui où les points de E remplissent le complémentaire $C(\mathcal{G}_\rho)$ de \mathcal{G}_ρ , c'est-à-dire où l'on peut écrire symboliquement:

$$E = C(\mathcal{G}_\rho), \text{ ce qui entraîne } C(E) = \mathcal{G}_\rho.$$

Alors, la frontière totale de E qui s'exprime par $f(E) = \bar{E} \times \bar{C}(E)$ peut s'écrire $f(E)C(\bar{\mathcal{G}}_\rho) \times \bar{\mathcal{G}}_\rho = \mathfrak{F}$. Donc, la frontière totale de E coïncide avec celle de \mathcal{G}_ρ . D'ailleurs, par définition de \mathfrak{F} , par chaque point de $f(E)$ il passe une sphère d'appui de E ayant pour rayon ρ . Il en résulte que, d'une part, la frontière de E est purement extérieure (⁴), d'autre part, elle coïncide avec le front φ_ρ de E . En résumé:

THÉORÈME I. — \mathcal{G} désignant l'ensemble des points situés, par rapport à un ensemble borné et fermé E , à une distance supérieure à ρ , la condition $E = C(\mathcal{G}_\rho)$ entraîne pour E la propriété d'avoir une frontière purement extérieure coïncidant avec son front $-\rho$.

Notons que, si E est une figure convexe, on a toujours $E = C(\mathcal{G}_\rho)$.

5. M. G. BOULIGAND a bien voulu me signaler une difficulté qu'on rencontre dans un problème qui consisterait à généraliser la notion d'enveloppante convexe d'un ensemble E fermé et borné. Ce problème s'attache à considérer le complémentaire de la réunion des sphères ouvertes disjointes de E , le rayon commun étant égal à ρ . Cette réunion considérée par M. BOU-

(¹) G. DURAND, *Sur une généralisation des surfaces convexes*, « Journal de Math. », t. X, 1931, ou Thèse, Paris 1931, n.° 23.

(²) N.° 4 du présent Mémoire. Théorème I.

(³) M. G. BOULIGAND a montré (Note précédente, n.° 2) que, si F est exclusivement composé de points ordinaires, E jouit de cette propriété.

(⁴) Chacun de ses points est limite de points extérieurs de E .

LIGAND coïncide avec l'ensemble \mathcal{E}_ρ de n.º 2. Pour ρ infini, le complémentaire précédent (qu'on pourrait appeler l'enveloppante ρ) se réduirait à l'enveloppante convexe de E . La difficulté annoncée consiste en ce fait que, pour une valeur finie de ρ , si l'on n'a pas formulé sur E d'autre hypothèse, l'enveloppante ρ peut perdre un attribut essentiel de l'enveloppante convexe, à savoir la continuité: c'est ce qu'on aperçoit immédiatement quand E se réduit à deux points.

Une autre difficulté est la suivante: Si E est une figure convexe, son extérieur est connexe quel que soit ρ (ce qui exige que l'extérieur de $E_\rho + F$ le soit aussi). Au contraire, si E est seulement tel que \mathcal{E}_ρ ait un complémentaire connexe, \mathcal{E}_ρ peut avoir plus d'un constituant, comme il apparaît sur l'exemple d'un ensemble E constitué par la frontière d'une figure convexe prise isolément (1).

Remarquons enfin que, pour $\rho > p$ et E donné, $E_\rho \supset E_p$, ce qui entraîne $C(E_\rho) \subset C(E_p)$, puis $\mathcal{E}_\rho \subset \mathcal{E}_p$; il en résulte que: $C(\mathcal{E}_\rho) \supset C(\mathcal{E}_p)$.

Ce qui précède m'a conduit, aux notions suivantes (terminologie proposée par M. BOULIGAND):

DÉFINITION I. — On appelle dernière enveloppante — ρ d'un ensemble E fermé et borné, le complémentaire $C(\mathcal{E}_\rho)$ de la réunion de toutes les sphères ouvertes de rayon ρ disjointes de E , ρ ayant la plus petite des valeurs qui assurent la connexité de \mathcal{E}_ρ et de $C(\mathcal{E}_\rho)$.

DÉFINITION II. — On dit qu'un ensemble E est une figure de la classe ρ s'il coïncide avec sa dernière enveloppante — ρ , c'est-à-dire si l'on a $E = C(\mathcal{E}_\rho)$, E et \mathcal{E}_ρ étant connexes.

Dans le plan, voici un exemple de figure de la classe ρ : Sur l'ensemble $A + B + C$ des sommets d'un triangle équilatéral ABC , effectuons la construction C. M. plane avec le rayon ρ inférieur au rayon du cercle circonscrit; l'ensemble E des points du triangle ABC non recouverts par l'ensemble ouvert $(A + B + C)_\rho$ fournit l'exemple annoncé.

II.

6. Parallèlement à l'étude de M. G. BOULIGAND consacrée aux ensembles sans points intérieurs, exclusivement environnés de points ordinaires jusqu'à

(1) Signalons en passant que cet exemple a, en outre, l'avantage de montrer l'opportunité de la considération de deux fronts au moins si E est une coupure de l'espace: un front pour chaque domaine complémentaire.

la distance ρ , et basée sur l'hypothèse qu'ils constituent ou non, au point de vue local, une coupure de l'espace, proposons-nous de discriminer les continus qui ne sont pas des coupures (en grand) de l'espace, par des hypothèses sur la nature, au point de vue de la distance, des points extérieurs à ces continus.

Le problème suivant nous y conduit:

Rechercher les ensembles ne donnant lieu, à leur extérieur, qu'à des points de la classe α (').

7. Notons d'abord une condition nécessaire: *pour qu'un ensemble fermé et borné ne donne lieu, à son extérieur, qu'à des points (α), il faut qu'il soit continu.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait le décomposer en deux ensembles fermés disjoints A et B . Considérons un point M équidistant de A et de B . Par définition, il a au moins une projection P sur A et une projection Q sur B . C'est donc un point de multifurcation. Soit d la distance mutuelle des deux ensembles A et B . Il existe un point P dont la distance à chacun d'eux est $\frac{d}{2}$. Par ce point passent les surfaces deux sphères ouvertes disjointes ayant pour rayon $\frac{d}{2}$ et centrées respectivement sur A et sur B . Ces deux sphères sont forcément tangentes. De sorte que le point de contact P possède, relativement à $A + B = E$, au moins deux projetantes opposées: c'est un point (β). D'où le résultat annoncé.

8. Il reste donc à rechercher les continus bornés tels que tout point de leur extérieur appartienne à la classe α .

Supposons que E désigne un continu borné qui coupe l'espace, c'est-à-dire dont le complémentaire $C(E)$ est un ensemble ouvert ayant plus d'un constituant.

Il existe un constituant de $C(E)$ qui est borné. En effet, E étant borné, il est contenu dans une sphère Σ (frontière comprise). Tout constituant de $C(E)$ qui a un point hors de Σ contient tout l'extérieur de Σ (*), et de ce fait, ne peut pas être borné. Donc, si $C(E)$ a plus d'un constituant, il en possède un qui est tout entier à l'intérieur de Σ , c'est-à-dire borné. C. Q. F. D.

(') Dans ma Thèse, j'ai abordé ce problème par l'étude de cas particuliers. Voir Chap. III, n.º 48 à 52 inclusivement.

(*) Car l'extérieur d'une sphère est un ensemble connexe.

9. D'autre part, soit R un constituant borné du complémentaire $C(E)$, E désignant toujours un continu borné qui coupe l'espace, et considérons l'ensemble fermé que forme la fermeture \bar{R} de R . Or, on sait ⁽¹⁾ qu'il existe au moins une sphère (frontière comprise) qui est tout entière contenue dans R et dont le rayon r atteint son maximum ⁽²⁾. Une telle sphère qu'on note S_o^r (O est le centre) se nomme *sphère inscrite* dans \bar{R} .

La sphère inscrite S_o^r dans l'ensemble fermé et borné R , porte, à sa surface, des points de la frontière de \bar{R} , sans quoi son rayon ne serait pas le plus grand de ceux des sphères contenues dans R . La même raison veut que le surface de S_o^r porte des points de la frontière de R non localisables sur une calotte moindre qu'un hémisphère. En effet, supposons le contraire. En tant que produit de deux ensembles fermés, l'ensemble de ces points est fini ou lui-même fermé. Il existe donc un hémisphère H de S tout intérieur à R . Si l'on effectue sur H la construction C. M. avec un rayon ϵ assez petit, l'ensemble ouvert obtenu H_ϵ est tout entier intérieur à \bar{R} .

Appelons P le pôle de l'hémisphère H et soit O' le point du segment rectiligne OP situé à la distance ϵ de O . Considérons la sphère $S_{o'}^r$ de centre O' et de rayon r , sphère qui se déduit de S_o^r par la translation $\overrightarrow{OO'}$ d'amplitude ϵ .

Elle est toute située dans la réunion de H_ϵ et de l'intérieur de S_o^r . Elle n'est donc formée (frontière comprise) que de points intérieurs de R , ce qui l'empêche d'être la plus grande des sphères de centre O' qui soient contenues dans R , contrairement à l'hypothèse. Donc, *le point O a, relativement à la frontière de R , un faisceau de projetantes non strictement convexe.*

10. D'ailleurs, la frontière de \bar{R} est incluse dans la frontière de E (frontière purement extérieure, puisque E est fermé). On peut donc résumer ainsi les résultats des n.º 8, 9 et 10.

THÉORÈME II. — *Pour que l'ensemble E , borné et fermé, ne donne lieu, à son extérieur, qu'à des points (α), il faut:*

- 1º) qu'il soit continu;
- 2º) qu'il ne constitue pas une coupure de l'espace.

(1) L'existence d'un cercle inscrit dans un ensemble plan fermé et borné a été démontrée par M. BONNESEN dans son ouvrage de la Collection BOREL: *Les problèmes des Isopérimètres et des Isopiphanes*, Paris, Gauthier-Villars, 1929, Chap. III, n.º 24, pag. 43 et 44. L'existence d'une sphère inscrite dans un ensemble fermé et borné à trois dimensions se démontre de la même manière.

(2) Ce maximum existe grâce au fait que R est borné.

11. Mais il peut arriver qu'un ensemble soit un continu ne coupant pas l'espace et qu'il existe, hors de lui, des points qui n'appartiennent pas à la classe α . En voici deux exemples, le premier pris dans l'espace à trois dimensions, le second pris dans le plan.

EXEMPLE I. — Désignons par E le tore plein et soit O le centre de la circonférence lieu des centres des cercles méridiens. L'ensemble E est bien un continu ne coupant pas l'espace, mais O est relativement à E , un point (β) dont les projetantes, toutes coplanaires, remplissent un grand cercle de la sphère d'appui de E qui a pour centre O .

EXEMPLE II. — Dans le plan, considérons un arc de circonférence E supérieur à π . L'arc E est bien un continu ne coupant pas le plan, et pourtant, le centre O de la circonférence qui le porte est, relativement à lui, un point (γ) planaire, c'est-à-dire dont les projetantes forment un faisceau plan non convexe. Par rapport à une demi-circonférence E , le centre O est un point (β) planaire (à faisceau plan de projetantes largement convexe).

12. Notons que, pour toute distance r , le front de l'ensemble $E_\rho + F$, obtenu par la Construction C. M. effectuée avec le rayon ρ sur l'ensemble E , est exclusivement composé de points ordinaires de F . En effet, soit M un point de F appartenant au front φ_r de $E_\rho + F$. Il passe par M les surfaces de deux sphères ouvertes, l'une de rayon r disjointe de E_ρ , l'autre de rayon ρ contenue dans F_ρ . Ces sphères disjointes ne peuvent être que tangentes extérieurement en M ; les rayons de contact respectifs MP et MQ sont dans le prolongement l'un de l'autre.

De ce qui précède, il suit que MP est l'unique projection de M sur E (résultat annoncé). De plus, si Q est un point situé à la distance r de $E_\rho + F$, il est à la distance $\rho + r$ de E , et toute projetante QM sur $E_\rho + F$ est portée par une projetante QP de Q sur E .

D'où ce résultat qui nous sera utile:

THÉORÈME III. — Si le point Q situé à la distance $\rho + r$ de E est un point (α) relativement à cet ensemble, il appartient aussi à la classe α par rapport à $E_\rho + F$.

13. D'après ce qui précède, le Théorème II peut donc se compléter ainsi:

THÉORÈME IV. — Si E ne donne lieu qu'à des points (α), il en est de même de $E_\rho + F$, et il s'ensuit que $E_\rho + F$ est, comme E , un continu ne coupant pas l'espace.

14. Dans le but d'étudier dans le plan, les ensembles ne fournissant que des points (z), rappelons que :

1°) Un ensemble E est dit *continu unicohérent* ⁽¹⁾ si, d'abord, il est continu et si, de plus, pour toute décomposition de E en deux continus, le produit de ces derniers est aussi continu.

2°) Le plan jouit de la propriété de JANIZEWSKI, à savoir :

Si E est un continu qui ne coupe pas le plan, c'est un continu unicohérent ⁽²⁾.

D'après le théorème de PHRAGMEN-BROUWER, on sait que, dans le plan, K étant une région-composante du complémentaire $C(E)$ d'un continu borné E , la frontière de K , qui est incluse dans celle de E , est un continu ⁽³⁾.

Si E continu ne coupe pas le plan, c'est-à-dire si E est un continu unicohérent, son complémentaire n'a qu'une région composante dont la frontière coïncide avec celle de E . En d'autres termes, *la frontière d'un continu unicohérent est un continu*.

Enfin, si, avec M. HAUSDORFF ⁽⁴⁾ on appelle *ordre de connexion* d'un domaine plan, le nombre des constituants de sa frontière, on voit que, si la fermeture d'un domaine plan forme un continu unicohérent, ce domaine a pour ordre de connexion 1, on dit qu'il est à *connexion simple* ou *simplement connexe*.

15. Les notions et propositions que nous venons de rappeler permettent, dans le cas du plan, de particulariser le Théorème IV sous la forme suivante :

THÉOREME V. — *Dans le plan, si E ne donne lieu qu'à des points (α), il en est de même de $E_p + F$ et il s'ensuit que $E_p + F$ est, comme E , un continu unicohérent.*

De plus :

COROLLAIRE VI. — *Dans le plan, si E n'a à son extérieur que des points (z), la frontière de E est un continu ainsi que F .*

Ainsi, l'ensemble continu F divise le plan en deux régions E_p et $C(E_p + F)$ dont il est la frontière commune, c'est donc une courbe fermée de M. SCHOEN-

⁽¹⁾ Voir, par exemple, C. KURATOWSKI, *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, « *Fundamenta Mathematicae* », tome XII, 1928, p. 24.

⁽²⁾ Voir S. JANIZEWSKI, *Sur les coupures du plan faites par les continus*, « *Prace mat. fiz.* », 26 (1913), p. 55, Théorème B.

⁽³⁾ Voir: BROUWER, *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes*, « *Math. Ann.* », 69; PHRAGMEN, « *Acta Mathematica* », 1885.

⁽⁴⁾ F. HAUSDORFF, *Mengenlehre* (I. Leipzig, 1927), pages 152 et suivantes, ou bien, W. WILKOSZ, *Les propriétés topologique du plan euclidien*, « *Mémorial des Sc. Math.* », Paris, Gauthier-Villars, 1931, n.° 48, p. 38.

FLIES. De plus, chacun de ses points est accessible ⁽¹⁾ dans ces deux régions, puisqu'il passe les surfaces de deux sphères ouvertes respectivement situées dans E_ρ et dans $C(E_\rho + F)$. L'accessibilité des points d'une courbe fermée étant caractéristique pour les courbes simples de JORDAN (SCHOENFLIES), il s'ensuit que F est une courbe simple de Jordan fermée.

16. Ce qui précède conduit tout naturellement à ce résultat simple :

THÉOREME VIII. — *Si, dans le plan, un ensemble E ne donne lieu qu'à des points (α) , non seulement E est un continu unicohérent (en vertu du Théorème V) mais encore, sa frontière extérieure, continue, est à la fois ensemble d'accumulation et ensemble limite (au sens de Janiszewski) ⁽²⁾ d'au moins une suite de courbes simples de Jordan fermées.*

En effet, à partir d'une longueur ρ donnée, définissons une suite évanescence de longueurs $\frac{\rho}{1}, \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{3}, \dots, \frac{\rho}{n}, \dots$. Il y correspond une suite d'ensembles ouverts décroissants $\left\{ E_{\frac{\rho}{n}} \right\}$ dont les frontières F_n sont des courbes simples de JORDAN fermées (voir la fin du n.º 16). Je dis que la frontière extérieure de E est à la fois ensemble d'accumulation et ensemble limite J de la suite $\{F_n\}$.

Soit P un point quelconque de la frontière extérieure de E . Il est évident que toute sphère S_P^ϵ centrée en P et de rayon ϵ arbitrairement petit mais non nul finit par contenir des points d'une infinité de courbes F_n et qu'il n'existe qu'un nombre fini de telles courbes hors de S_P^ϵ , ce qui montre que la frontière extérieure de E appartient à l'ensemble limite J et à l'ensemble d'accumulation de la suite $\{F_n\}$.

Il reste à montrer que l'ensemble d'accumulation de la suite $\{F_n\}$ est situé, avec l'ensemble limite J qu'il inclut, sur la frontière extérieure de E . Pour cela, n'oublions pas que les courbes F_n sont toutes à l'extérieur de E , et considérons un point P non situé sur la frontière extérieure de E . Si P

⁽¹⁾ Rappelons que, selon SCHOENFLIES, un point M de la frontière d'un domaine est accessible (erreichbar) dans ce domaine, si, de chaque point intérieur au domaine part un arc simple de JORDAN aboutissant en M et dont tous les autres points sont intérieurs au domaine.

⁽²⁾ Rappelons qu'un point P appartient à l'ensemble d'accumulation d'une collection d'ensembles si la sphère S_P^ϵ contient des points d'une infinité d'ensembles de la collection, et que P appartient à l'ensemble limite J de la collection, s'il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles de la collection hors de S_P^ϵ . Voir G. BOULIGAND, *Géométrie Infinitésimale directe*, Ch. XV, 131, pp. 115 et 156.

est intérieur à E , il est centre d'une sphère contenue dans E , donc ne contenant aucun point des courbes F_n . Si P est extérieur à E , il peut être incorporé à un élément F_k de quelque suite $\{F_n\}$; alors il est centre d'une sphère ouverte, de rayon $\leq \frac{\rho}{k} - \frac{\rho}{k-1}$ et ne contenant aucun point des courbes F_n , autres que F_k . En résumé, tout point P qui n'appartient pas à la frontière extérieure de E est le centre d'une sphère ouverte n'incluant pas de points de plus d'une des courbes F_n . A ce titre, un tel point ne peut appartenir à l'ensemble d'accumulation et, par suite, à l'ensemble limite J de la suite $\{F_n\}$.

En définitive, la frontière extérieure de E est à la fois ensemble d'accumulation et ensemble limite J de la suite de courbes fermées simples $\{F_n\}$.

C. Q. F. D.

III.

17. Les points du front φ_ρ de E étant situés sur une frontière C. M. (celle que nous avons désignée par \mathfrak{F} au n.º 2), il est naturel de distinguer:

1º) Ceux qui sont des points (α) de \mathfrak{F} et que nous appellerons:

Points d'émission (α) ⁽¹⁾.

2º) Ceux qui sont des points (β) de \mathfrak{F} ; nous les nommerons:

Points d'émission (β) ⁽¹⁾.

3º) Ceux qui sont des points (γ) de \mathfrak{F} ; nous les nommerons:

Points d'émission (γ) ⁽¹⁾.

18. THÉORÈME IX. — Dans le cas où $E = C(\mathcal{E}_\rho)$, si, de plus, E possède au moins un point d'émission (α), il a des points intérieurs.

En effet, soit P un point d'émission (α) de E . En tant que point de \mathfrak{F} , P est le sommet d'un cône circulaire droit ouvert disjoint de \mathcal{E}_ρ . En vertu de l'hypothèse $E = C(\mathcal{E}_\rho)$, ce cône ouvert appartient à E . Donc E a des points intérieurs.

C. Q. F. D.

Mais E peut avoir des points intérieurs sans que son front φ_ρ soit

⁽¹⁾ Le mot « émission » évoque ici l'idée qu'une projetante est parcourue en s'éloignant de l'ensemble E , par opposition à l'idée première impliquée par la formule usuelle « distance d'un point (d'abord) à un ensemble (ensuite) ». A ce point de vue on pourrait, lors que la clarté l'exige, appeler *projetantes d'absorption* celles qu'on décrit en cheminant du point vers l'ensemble.

exclusivement composé de points d'émission (α), même tenant compte de l'hypothèse $E = C(\mathcal{E}_\rho)$. Un exemple suffira à le prouver.

EXEMPLE. — Considérons deux sphères tangentes de rayon ρ désignées par S_1 et S_2 et soit K l'enveloppante convexe de leur réunion. Prenant pour E la fermeture de l'ensemble des points de K qui n'appartiennent à aucune des deux sphères, on voit: d'une part que l'ensemble E a des points intérieurs, d'autre part, que le point de contact des deux sphères, qui appartient au front φ_ρ de E est un point d'émission (β) à deux projetantes opposées.

19. THÉORÈME X. — *Au cas où $E = C(\mathcal{E}_\rho)$ si, de plus, E n'a pas de points d'émission (α), il est dépourvu de points intérieurs.*

On a vu, au n.º 4, que la condition $E = C(\mathcal{E}_\rho)$ implique que la frontière totale de E coïncide avec le front φ_ρ de cet ensemble et avec \mathfrak{F} .

L'hypothèse que E n'a pas de point d'émission (α) équivaut à exclure le cas d'une frontière \mathfrak{F} portant des points (α).

Or, d'après un théorème de M. G. BOULIGAND, tout point-frontière extérieur de \mathcal{E}_ρ est limite, sur \mathfrak{F} , de points (α) ⁽¹⁾.

Donc, \mathfrak{F} est une frontière C. M. intérieure, c'est-à-dire dont chaque point n'est limite que de points de \mathcal{E}_ρ (extérieurs à E). En somme, les points frontières de E n'étant limite que de points extérieurs à E , E est dépourvu de points intérieurs.

Le Théorème IX constitue une réciproque du précédent.

20. Notons que, si le front φ_ρ de E est exclusivement composé de points d'émission (γ), non seulement E est dépourvu de points intérieurs, mais encore il est au plus dénombrable. Il est même fini, car sinon en vertu du Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, il aurait au moins un point d'accumulation; ce point d'accumulation ne pourrait être de la classe γ , cette classe ne comptant que des points isolés. ⁽²⁾. Or, le front φ_ρ de E est un ensemble

⁽¹⁾ Et même de points ordinaires. Voir G. BOULIGAND, *Introduction à la Géométrie Infinitésimale directe*, Paris, Vuibert, 1931, n.º 94, ou bien: G. BOULIGAND, *Sur la Construction de Cantor-Minkowski*, « Annales de la Société Polonaise de Mathématiques », t. IX, 1930.

⁽²⁾ On montre aisément qu'un point d'accumulation d'un ensemble de points (γ) appartient à la classe β . Il ne peut en effet appartenir à la classe (α) comme il découle du fait que l'ensemble des points (α) est ouvert (G. BOULIGAND) soit aussi bien de la proposition suivante que j'ai donnée dans ma Thèse de Doctorat: Tout élément d'accumulation d'un ensemble de faisceaux non strictement convexes est lui-même non strictement convexe. (Lemme XXXI, Ch. IV, n.º 79, p. 53).

fermé. Il ne serait donc pas exclusivement composé de points d'émission (γ), contrairement à l'hypothèse.

En résumé :

THÉORÈME XI. — *Si le front φ_ρ de E est exclusivement composé de points d'émission (γ), E est un ensemble fini.*

21. On voit aisément que les ensembles E dont le front φ_ρ ne contient aucun point (α), peuvent être dénombrables ou continus.

EXEMPLE I. — Soit, sur un demi-axe Ox , une suite de points $\{O_n\}$ l'abscisse de O_n étant $x_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) on voit aisément que l'ensemble $\{O_n\} + O$ est sans points intérieurs, qu'il coïncide avec son front φ_ρ pour ρ quelconque, tous ses points étant points d'émission (γ) à l'exception de O qui est de la classe β et enfin, qu'il est dénombrable.

EXEMPLE II. — Un segment de droite est un ensemble continu sans points intérieurs dont le front φ_ρ coïncide avec lui pour ρ quelconque et exclusivement composé de points d'émission (β).

A quelle condition E est-il continu? M. G. BOULIGAND a montré, dans la Note précédente, qu'il suffit de considérer E comme entièrement environné de points ordinaires pour assurer sa continuité. Il serait intéressant de rechercher les ensembles E continus qui tiennent cette propriété d'une hypothèse concernant exclusivement leur front φ_ρ (c'est-à-dire relative à tout ou partie de l'ensemble E lui-même). Dans sa généralité, ce problème paraît difficile. On pourrait peut-être l'aborder en se demandant *si E n'est pas un continu (sans points intérieurs) dès que le front φ_ρ est exclusivement composé: soit de points d'émission de 2 projetantes seulement, soit de points d'émission d'un faisceau plan non convexe de projetantes.*

On peut se demander si, dès que l'hypothèse $E = C(\mathcal{E}_\rho)$ tombe, la continuité de E reste conditionnée par celle de $C(\mathcal{E}_\rho)$.

22. Laissons de côté l'hypothèse restrictive $E = C(\mathcal{E}_\rho)$. Vu que φ_ρ est situé sur \mathfrak{F} , on peut réaliser l'étude au moyen des résultats présentés dans ma Thèse (Ch. IV) ⁽¹⁾ et des théorèmes de M. JEAN MIRGUET ⁽²⁾.

1°) Si le front φ_ρ de E est exclusivement composé de points (α), on

⁽¹⁾ LUCIEN CHAMARD, *Sur les Propriétés de la distance à un ensemble ponctuel*. Poitiers 1933 ou « Bull. de la Sc. Royale des Sciences » de Liège.

⁽²⁾ JEAN MIRGUET, *Sur le paratingent d'un ensemble ponctuel*, (« Comptes-Rendus », t. 195, 1932, p. 509).

peut le considérer comme localement situé sur une (ou plusieurs) surface à paratingent incomplet, surface qui n'est pas forcément la frontière extérieure e de E ou la frontière C. M. que nous avons désignée par \mathfrak{F} , du moins a priori.

2^o) Si le front φ_ρ de E ne porte aucun point d'émission (α), il est situé sur un ensemble dont le paratingent en chaque point est plan, ou se réduit à une droite, ou bien est vide.

En particulier, si le front φ_ρ de E est formé de points dont les R. A. (¹), relatifs à E , sont sur une droite, il est localement distribué sur une courbe à tangente continue, (résultat plus particulier que celui de M. G. BOULIGAND, amené d'une manière différente dans le précédent mémoire) (²).

Si E coïncide avec φ_ρ et est continu, il épuise les points d'une courbe à tangente continue.

(¹) Dans ma Thèse, j'appelle rayon attaché ou R. A. (relatif à un point extérieur à un ensemble) toute demi-droite issue du point et faisant, avec chacune de ses projetantes un angle au moins droit.

(²) N.° 8.

INDICE DEL TOMO XII DELLA SERIE 4^a

C. MIRANDA: Il problema di Dirichlet in campi dello spazio privi di punti esterni . pag.	1
A. D. MICHAL and J. L. BOTSFORD: Geometries involving affine connections and general linear connections »	13
F. J. DE WISNIEWSKI: Les probabilités à structure héréditaire et la statistique moléculaire »	33
L. ONOFRI: Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche »	41
A. FISCHER: Ueber die nomographische Lösung einer elementarmechanischen Extremumaufgabe »	57
U. BROGGI: Su di uno speciale problema dei momenti »	68
M. MANARINI: Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n e applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi »	75
G. D. BIRKHOFF and D. C. LEWIS Jr.: On the Periodic Motions Near a given Periodic Motion of a Dynamical System. »	117
K. BOHLIN: Sur la solution de l'équation générale du cinquième degré réduite à la forme libre »	135
E. T. DAVIES: On the infinitesimal deformations of a space »	145
S. CINQUINI: Sopra una formula di Curtiss »	153
V. BERNSTEIN: Sulle direzioni di Borel di funzioni olomorfe »	173
N. ABRAMESCO: Sur les courbes de convergence des séries de polynomes à une variable complexe et leur application à la détermination des fonctions holomorphes dans des domaines donnés »	197
V. HLAVATY: Connexion projective et déplacement projectif »	217
G. RICCI: Su un teorema di Tchebychef-Nagel »	295
M. GHERMANESCO: Sur les équations aux différences finies »	305
B. SEGRE: Gli scorrimenti nella Geometria non euclidea degli iperspazi ed alcune notevoli corrispondenze proiettive »	327
L. CHAMARD: Sur quelques types de conditions imposées à la structure d'un ensemble ponctuel »	349
<i>Indice</i> »	361

ERRATA-CORRIGE

T. XI, pag. 266 - 1. ^a colonna - in luogo di	10126	leggi	10125
2. ^a » »	- 0.166269	»	- 0.166262
4. ^a » »	- 0.076252	»	- 0.076152
id. » »	+ 0.001656	»	+ 0,001556
id. » »	- 0.010672	»	- 0.016668
id. pag. 275, formula (63), seconda riga; in luogo di	1	leggi	81
T. XII, pag. 136, linea 3, invece di	$-u + \sqrt{1-u^2}$	leggi	$u + i\sqrt{1+u^2}$
id. pag. 138, linea 2, »	3116	»	3196