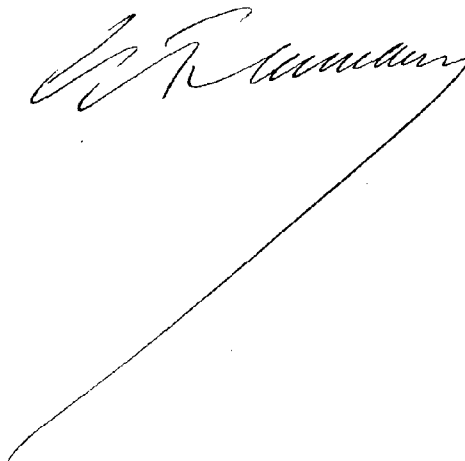


ENCYCLOPÉDIE DES TRAVAUX PUBLICS



# HYDRAULIQUE

*Tous les exemplaires de l'HYDRAULIQUE de M. Flamant  
devront être revêtus de la signature de l'auteur.*

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'M. Flamant', with a long, sweeping underline that extends diagonally across the page.

ENCYCLOPÉDIE

DES

TRAVAUX PUBLICS

Fondée par **M.-C. LECHALAS**, Inspecteur général des Ponts et Chaussées

*Médaille d'or à l'Exposition universelle de 1889*

---

# HYDRAULIQUE

PAR

**A. FLAMANT**

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES

---

SECONDE ÉDITION

**Considérablement augmentée**

---

PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, CH. BÉRANGER, ÉDITEUR

Successeur de BAUDRY & C<sup>e</sup>

15, Rue des Saints-Pères

MÊME MAISON A LIÈGE, 21, RUE DE LA RÉGENCE

---

1900

Tous droits réservés





## AVANT-PROPOS

---

Ainsi que les autres sciences appliquées, l'*hydraulique* n'était, à ses débuts, qu'un art purement empirique. Les auteurs des remarquables ouvrages d'aménagement et de conduite des eaux exécutés dans l'antiquité et au moyen âge se guidaient par des règles que la tradition leur avait transmises, qu'ils perfectionnaient sans doute peu à peu, mais qui ne sont pas arrivées jusqu'à nous. A la fin du siècle dernier, ces traditions étaient perdues et la science n'était pas encore établie, l'ignorance était complète. Voici ce que Du Buat écrivait en 1786, dans le *Discours préliminaire de ses Principes d'hydraulique*.

« On sait que jusqu'à présent nos connaissances en  
« hydraulique sont extrêmement bornées ; car, quoique  
« de grands génies s'y soient appliqués en différents  
« temps, nous sommes encore, depuis tant de siècles,  
« dans une ignorance presque absolue des vraies lois  
« auxquelles le mouvement de l'eau est assujetti ; à  
« peine, depuis cent cinquante ans, a-t-on découvert, à  
« l'aide de l'expérience, quelle est la durée, la quantité  
« et la vitesse de l'écoulement de l'eau par un orifice  
« quelconque .

« Tout ce qui concerne le cours uniforme des eaux qui  
« arrosent la surface de la terre nous est inconnu ; et,  
« pour se faire une idée du peu que nous savons, il suffit  
« de jeter un coup d'œil sur ce que nous ignorons. Faut-  
« il apprécier la vitesse d'un fleuve dont on connaît la  
« largeur, la profondeur et la pente ; déterminer à quelle

« hauteur il élèvera ses eaux, s'il vient à recevoir un  
 « autre fleuve dans son lit ; prévoir de combien il bais-  
 « sera si on lui fait une saignée ; fixer la pente qui con-  
 « vient à un aqueduc, pour conserver à ses eaux une  
 « vitesse donnée, ou la capacité du lit qui lui convient  
 « pour amener dans une ville, avec une pente donnée,  
 « une quantité d'eau qui suffise à ses besoins ; tracer les  
 « contours d'une rivière de telle sorte qu'elle ne travaille  
 « point à changer le lit dans lequel on l'a enfermée ;  
 « prévoir l'effet d'un redressement, d'une coupure, d'un  
 « réservoir ; calculer la dépense d'un tuyau de conduite  
 « dont la longueur, le diamètre et la charge sont don-  
 « nés ; déterminer de combien un pont, une retenue,  
 « une vanne feront hausser les eaux d'une rivière ; mar-  
 « quer jusqu'à quelle distance ce remous sera sensible  
 « et prévoir si le pays n'en deviendra pas sujet aux inon-  
 « dations ; calculer la longueur et les dimensions d'un  
 « canal destiné à dessécher des marais perdus depuis  
 « longtemps pour l'agriculture ; assigner la forme la plus  
 « convenable aux entrées des canaux, aux confluent ou  
 « aux embouchures des rivières ; déterminer la figure la  
 « plus avantageuse à donner aux vaisseaux ou aux ba-  
 « teaux, pour fendre l'eau avec le moindre effort ; calcu-  
 « ler en particulier la force nécessaire pour mouvoir un  
 « corps qui flotte sur l'eau ; toutes ces questions et une  
 « infinité d'autres du même genre sont encore insolubles.  
 « Le croirait-on ? On ignore presque encore à quoi est  
 « égal le choc de l'eau, quand elle frappe directement un  
 « plan ; à plus forte raison quand elle se meut contre  
 « des surfaces convexes de toute espèce.

« Tout le monde raisonne sur l'hydraulique, mais il est  
 « peu de personnes qui l'entendent. »

Si j'ai donné à cette citation un aussi grand dévelop-  
 pement, c'est que la nomenclature des questions qui s'y  
 trouvent posées constitue à peu près le programme du

présent ouvrage : on verra, en le parcourant, comment les travaux exécutés depuis un siècle permettent de répondre d'une façon plus ou moins complète à chacune d'elles. Les travaux de Du Buat, ceux de Prony, d'Eytelwein, de d'Aubuisson et d'un grand nombre d'autres savants ou expérimentateurs ont contribué à l'établissement des principes fondamentaux de la science. Plus récemment, ceux de Darcy et surtout ceux de M. Bazin, au point de vue expérimental, et ceux de M. Boussinesq pour la théorie, ont ouvert la véritable voie dans laquelle il convient de s'engager pour la perfectionner.

Assurément il reste encore bien des incertitudes, et les solutions ne peuvent être considérées comme rigoureuses ni définitives ; mais elles sont en général suffisantes pour les besoins de la pratique, si elles sont judicieusement appliquées. Nulle part comme en hydraulique il n'est plus important de bien se rendre compte des conditions dans lesquelles on peut employer les formules : ces conditions sont tellement variées que l'on ne peut en envisager, dans les solutions, qu'un petit nombre à la fois ; et il est nécessaire d'avoir toujours présentes à l'esprit les hypothèses simplificatives que l'on a été obligé de faire pour obtenir les formules dont on veut se servir. On s'expose, autrement, à commettre les erreurs les plus graves.

Il ne faut, le plus souvent, prendre les résultats des formules que comme de premières indications qui doivent être interprétées, rectifiées ou complétées par la considération des circonstances spéciales relatives au cas particulier que l'on a en vue.

Ce que je viens de dire des formules peut se dire aussi des coefficients numériques, déduits de l'expérience, dont on les affecte.

Mais alors, dans le choix à faire entre les divers coefficients proposés, on ne peut plus se laisser guider par le

seul raisonnement : c'est la pratique, et seulement une longue pratique, qui peut indiquer les corrections à faire subir à ces coefficients et les meilleures valeurs qu'il convient de leur attribuer dans les diverses circonstances. Aussi ai-je donné un grand nombre de ces coefficients et même de tables numériques correspondant à diverses formules. Peut-être trouvera-t-on que j'ai manqué, à cet égard, de précision ; mais c'est avec intention que je me suis abstenu de conclure et que je ne me suis pas borné à une seule formule ni à une seule table. Chacun choisira, d'après les faits qu'il aura pu constater, celle qui répondra le mieux aux conditions particulières du problème qu'il aura à traiter ; l'état de nos connaissances n'est pas encore assez avancé pour que l'on puisse faire ce choix d'une façon générale et certaine.

Voici maintenant comment se répartissent entre les dix chapitres de l'ouvrage, les différentes matières qui y sont traitées. Je dois déclarer, tout d'abord, que l'on n'y trouvera rien, ou presque rien d'original ; tout est emprunté aux travaux des nombreux savants, hydrauliciens et ingénieurs qui, depuis un siècle, ont apporté leur contingent à l'avancement de cette science. Indépendamment de ceux que j'ai déjà cités plus haut, je mentionnerai plus spécialement St-Venant, Dupuit, Dausse, Kleitz, Graëff, M. Lechallas et M. Fargue, sans préjudice de tous ceux dont les travaux, d'une importance moindre, sont signalés au fur et à mesure, aux divers articles où il en est parlé. Mais à défaut d'originalité, j'espère que l'on me saura gré d'avoir recueilli et réuni tout ce qui m'a paru de nature à intéresser les ingénieurs dans les très nombreux travaux qui ont été publiés depuis un siècle sur les questions d'hydraulique.

Le premier Chapitre est consacré à résumer sommairement les principes généraux de l'*Hydrostatique* ou de l'équilibre des fluides, dont la connaissance est nécessaire

pour l'étude de leur mouvement. Ces premières notions, qui se trouvent aussi dans la plupart des traités de mécanique générale et de physique, ont été rendues aussi succinctes que possible : on doit admettre qu'elles sont déjà familières au lecteur. A propos de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, on trouvera dans ce chapitre une démonstration, due à Rankine, de la propriété principale du métacentre, et qui m'a semblé plus simple, bien qu'un peu moins générale peut-être, que celle que l'on en donne ordinairement. Les applications aux prismes carrés, encore que très connues, et pour ainsi dire classiques, m'ont paru bonnes à rappeler.

Avec le Chapitre II commence l'étude du mouvement des liquides et des conditions générales de ce mouvement. Après les équations générales de l'hydrodynamique, on y trouvera l'équation fondamentale de l'hydraulique de laquelle se déduit immédiatement, pour le mouvement permanent, le théorème de Bernoulli. L'étude du mouvement uniforme, qui vient ensuite, a donné l'occasion de définir le frottement intérieur des liquides et de rappeler une remarquable expérience faite par M. Couette, rapportée par lui dans sa thèse de doctorat du 30 mai 1890, et qui est de nature à apporter une vive lumière sur les conditions, encore si peu connues, de ce frottement. L'expression du coefficient du frottement intérieur, donné par M. Boussinesq, sert ensuite à établir les formules générales du mouvement uniforme dans une section circulaire ou demi-circulaire, ainsi que dans une section rectangulaire très large.

Après toutes ces généralités sur le mouvement des liquides vient l'étude des circonstances accidentelles de ce mouvement, qui constitue le Chapitre III que l'on pourrait intituler : *étude des points singuliers des courants liquides*. On y trouve d'abord les lois de l'écoulement par des orifices en mince paroi ou en paroi épaisse, avec les

coefficients de débit qui ont été proposés soit par Poncelet et Lesbros, soit par M. Gracff, soit en dernier lieu par M. Halmiton Smith, ingénieur américain qui a publié en 1886 un important ouvrage où sont discutées toutes les expériences connues, y compris les plus récentes, sur ce sujet. Les diverses causes de perte de charge : l'élargissement brusque de la section d'écoulement, le passage à travers une section rétrécie, l'entrée dans un tuyau, le passage dans les coudes, forment un paragraphe spécial de ce chapitre, qui comprend ensuite l'étude de l'écoulement par les ajutages, puis par les déversoirs.

Pour le paragraphe relatif aux déversoirs j'ai emprunté la théorie aux travaux les plus récents de M. Boussinesq qui est parvenu, au moyen d'une hypothèse simple mais assez plausible sur la forme des trajectoires des filets liquides, à donner une explication parfaite de l'écoulement par un déversoir en mince paroi. Les expériences nombreuses et précises de M. Bazin ont confirmé ces vues théoriques jusque dans leurs plus petits détails. M. Bazin a en outre fait une étude expérimentale très complète des nappes déversantes dont les résultats ont été publiés dans les Annales des ponts et chaussées. De cette étude il résulte que le coefficient de débit des déversoirs varie dans des limites beaucoup plus étendues qu'on ne supposait et que, par suite, les débits que l'on calculait avec un coefficient unique sont souvent fort éloignés de la réalité.

Après quelques exemples d'application des formules établies dans les paragraphes précédents, je continue l'étude des points singuliers des cours d'eau par celle du ressaut superficiel, d'après les travaux de M. Bazin et ceux de M. Boussinesq. La division des cours d'eau en deux catégories, les rivières et les torrents, s'y trouve faite d'après la distinction qui a été établie par ce savant, dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Le

Chapitre III se termine par une étude très sommaire des tourbillons liquides d'après M. Boussinesq.

Le Chapitre IV est consacré aux tuyaux de conduite. L'étude de l'écoulement dans les tuyaux est relativement simple, elle ne donne lieu à aucune particularité intéressante ; la seule difficulté consiste à choisir une formule qui donne la vitesse moyenne en fonction du diamètre et de la charge. Je cite un grand nombre de celles qui ont été proposées, avec les coefficients correspondants. En France on se sert, presque exclusivement, soit de celle de Prony, soit de celle de Darcy, ou des tables qui en ont été déduites. A l'étranger, au contraire, c'est la formule et les tables de Weisbach qui sont le plus usitées. J'en propose une autre, qui donnera le plus souvent des résultats intermédiaires entre celles-là ; elle présente, en apparence, plus de complication, mais son emploi est rendu facile par les tables numériques que j'en ai déduites.

La résolution de quelques-uns des problèmes les plus ordinaires auxquels donne lieu l'établissement des tuyaux de conduite forme la partie la plus importante de ce chapitre qui se termine par une étude très sommaire des conditions de l'écoulement, c'est-à-dire de la répartition des vitesses dans un tuyau circulaire.

L'étude des cours d'eau commence avec le Chapitre V. Elle se divise en deux parties principales, la première s'applique aux canaux découverts ou aux cours d'eau de section transversale et de pente constantes contenus dans un lit de forme invariable. Après y avoir donné les formules du mouvement uniforme, j'y étudie, d'après M. Bazin et M. Cunningham, la loi de la répartition des vitesses aux divers points de la section transversale, et, après quelques applications des formules spéciales, je considère le mouvement permanent varié, je donne d'après M. Boussinesq, les équations générales de ce mouvement

en tenant compte de la courbure des filets liquides. J'aborde ensuite la théorie des remous d'exhaussement et d'abaissement ; j'emprunte à Dupuit une grande partie de ce paragraphe, ainsi que du suivant où sont calculés les effets d'un étranglement ou d'un élargissement du lit.

La seconde partie de l'étude des cours d'eau, consacrée aux cours d'eau naturels, forme le Chapitre VI. Par opposition aux canaux qui font l'objet du chapitre précédent, je considère alors les cours d'eau à fond mobile et les conditions nouvelles qui résultent de la mobilité du lit. Des généralités empruntées à un mémoire de M. Lokhtine forment le début de ce chapitre. Après avoir rappelé ensuite la loi primordiale exprimant l'équilibre des matériaux du fond, déjà énoncée par Guglielmini, je donne une explication sommaire de l'entraînement et de la suspension de ces matériaux, puis une théorie de l'équilibre des rivières à fond de sable d'après M. Lechallas. Abordant la question de l'influence de la forme des rives, je résume les importants travaux de M. Fargue sur ce sujet. Je ne pouvais avoir la prétention, dans ce seul paragraphe d'un ouvrage dont le programme comprend tant d'autres sujets, de traiter d'une manière complète et détaillée l'importante question de l'amélioration des rivières ; M. Lechallas a écrit, sur l'*Hydraulique fluviale*, un volume tout entier de l'Encyclopédie, et M. Guillemain a aussi traité la question dans son *Cours de navigation intérieure*. Je devais donc, sous peine de reproduire ce qui avait déjà été publié par ces deux savants ingénieurs, me borner à des considérations générales, en quelque sorte théoriques, résumant, autant que possible, les lois applicables à tous les cours d'eau à fond mobile.

J'ai donc simplement constaté que la correction des rivières par l'établissement de digues longitudinales a les conséquences suivantes : l'abaissement des hauts



fonds du thalweg ; la diminution de la pente et l'abaissement de l'éliage vers l'amont.

Cet abaissement peut produire en amont, ou la chute des rives, si elles ne sont pas suffisamment protégées, ou bien desrapides raccordant l'ancien niveau avec le niveau abaissé. Ces désordres ne peuvent être évités que si l'on établit, dans le lit, des barrages de soutènement, ou seuils résistants, en des points convenablement choisis. La construction de ces seuils, dans le lit, peut d'ailleurs être complétée par l'établissement de hausses ou barrages mobiles augmentant le tirant d'eau et les chutes à racheter par des écluses.

Chacun de ces barrages de soutènement du lit localise en un point l'effet de la diminution de pente produite par le règlement des rives. Quand la pente est faible, on peut arriver à une solution définitive, sans écluses, en maintenant ainsi la pente naturelle dans chaque section de rivière après avoir régularisé les rives. Si au contraire la pente est forte, on laisse le nouveau tracé des rives produire son effet sur des sections séparées par de véritables barrages créant des chutes où l'on établit des écluses. Mais si, dans un cours d'eau à forte pente, on place ces barrages qui, construits d'ordinaire sur une partie seulement de la largeur et alternativement sur chaque rive, portent alors le nom d'épis-noyés, assez près les uns des autres pour que le fond conserve sa pente générale, on arrive à créer une vitesse moyenne trop grande qui peut rendre le cours d'eau impraticable à la remonte.

A la suite de cet exposé sommaire, je donne, d'après Dupuit, dans un court paragraphe, les lois de l'écoulement souterrain, ou à travers des terrains perméables, et enfin, je termine ce chapitre, consacré aux cours d'eau naturels, par l'indication des méthodes de jaugeage.

Le Chapitre suivant est consacré aux crues des cours d'eau, ou plus généralement au mouvement non perma-

ment. Après avoir donné les équations générales de ce mouvement je résume les travaux de M. Kleitz sur les crues, et j'indique les méthodes approximatives qu'il a employées sur le Rhône pour l'étude de ces phénomènes. Je passe ensuite à la prévision des crues et, après avoir rappelé sommairement les travaux de Belgrand, j'indique les méthodes proposées et adoptées pour la prévision des crues. Enfin je donne quelques idées générales sur la question de l'atténuation des effets des crues par des réservoirs, digues submersibles ou insubmersibles.

Le Chapitre VIII traite des mouvements ondulatoires, dont l'étude théorique élémentaire est aujourd'hui possible, grâce aux travaux de M. Boussinesq, dont les résultats se sont accordés d'une manière si remarquable avec les recherches expérimentales de M. Bazin sur la propagation des ondes. J'étudie d'abord les ondes de translation de forme quelconque, puis l'onde solitaire qui seule se propage sans se déformer. Je donne ensuite, d'après Gerstner, une théorie élémentaire des ondes d'oscillation ou de la houle, avec quelques indications sommaires sur le clapotis. J'ai rattaché à ce chapitre les mouvements oscillatoires de l'eau dans les tubes et les colonnes liquides oscillantes proposées pour économiser l'eau dans les écluses de navigation. Le dernier paragraphe est consacré aux mouvements de la marée, dans la mer et dans les estuaires. J'ai pu profiter des importants et intéressants travaux publiés récemment par mon regretté camarade et ami Bourdèlles à qui j'ai fait de très larges emprunts. J'ai également résumé quelques-unes des idées antérieures sur le même sujet : celles de M. Comoy, les méthodes données par M. Lechâlas pour déterminer la vitesse moyenne, à un instant quelconque, dans l'une des sections transversales du fleuve, dans la partie soumise à l'action de la marée ; et j'ai donné aussi le résumé d'un travail de M. le professeur Cauthorne Unwin relatif au mouvement

des eaux dans les estuaires et à la manière dont s'y mélangent les eaux de diverses provenances. Le chapitre se termine par quelques considérations générales sur l'amélioration des estuaires des fleuves à marée, empruntées en partie à M. le professeur Franzius.

C'est là que se termine, à proprement parler, l'hydraulique, ou l'étude du mouvement de l'eau.

Le Chapitre IX, qui suit, est relatif aux fluides élastiques. Il est impossible d'établir une théorie des mouvements de ces fluides sans s'appuyer sur les principes de la thermodynamique et, d'autre part, il m'était difficile de donner, dans un traité d'hydraulique où les fluides élastiques ne figurent que d'une façon accessoire, un exposé complet de la théorie mécanique de la chaleur. J'ai essayé d'en établir d'une façon simple, qui sera peut-être trouvée peu rigoureuse, les équations générales nécessaires à l'objet spécial que j'avais en vue : l'étude du mouvement des gaz parfaits.

Après avoir donné ces formules générales, je les applique aux réservoirs d'air en communication avec les conduites d'eau et à l'étude du mouvement des gaz. D'après M. Haton de la Goupillière, j'indique la loi du mouvement varié d'un gaz remplissant un réservoir et j'aborde ensuite le problème, plus important, de l'écoulement des gaz par longues conduites. Les travaux de M. Arson sur le gaz d'éclairage servent encore aujourd'hui de règle aux ingénieurs qui s'occupent de la distribution du gaz ; mais il semble que les coefficients numériques qu'il a déduits de ses expériences et les tables qu'il a calculées ne sont pas applicables au transport de l'air comprimé. C'est du moins ce qu'il résulte d'expériences faites d'abord par M. Stockalper, puis par M. Kraft et en dernier lieu par M. Riedler. Ces expériences paraissent encore trop peu nombreuses et trop peu précises pour que l'on puisse en déduire de nouveaux coefficients et une nouvelle formule ; et

je me borne à conseiller provisoirement, d'après l'avis de M. Kraft, l'usage des tables numériques dressées pour le calcul des conduites d'eau, qui fournira tout au moins une approximation. Pour la question de l'écoulement d'un gaz par un orifice, je donne les coefficients de débit déduits des expériences de M. George Wilson, ainsi que les remarques qu'il a cru pouvoir formuler à la suite de ses observations.

Enfin le Chapitre X et dernier est relatif à la résistance des fluides, question encore très obscure sur laquelle la théorie et l'expérience font également défaut. La théorie ne donne un résultat positif que pour le problème de l'impulsion d'une veine fluide contre un plan indéfini ; lorsqu'il s'agit au contraire d'un solide soumis à l'action d'un courant indéfini, elle ne peut plus fournir que des aperçus qui doivent être complétés ou rectifiés par l'observation des faits. J'indique les tentatives théoriques de Poncelet et de Saint-Venant ; puis j'emprunte à Du Buat des renseignements expérimentaux et en même temps des vues qui, pour avoir été négligées pendant un siècle, ne me paraissent pas moins devoir conduire à la route sur laquelle on aura le plus de chances de trouver une solution satisfaisante. Je termine par le résumé des résultats des expériences de M. de Mas sur le matériel de la batellerie, qui lui ont permis de poser des conclusions importantes au point de vue pratique.

On voit, d'après ces indications sommaires, que la plupart des problèmes que Du Buat proposait dans son discours préliminaire se trouvent aujourd'hui, sinon définitivement résolus, au moins pourvus d'une solution à peu près suffisante pour les besoins de la pratique. Toutefois, dans bien des cas encore, les formules ne sont guère qu'un masque qui recouvre notre ignorance ; il faut donc éviter de les employer sans discernement, ce qui n'a pas toujours eu lieu, et l'on pourrait peut-être, en paraphrasant

la dernière proposition de Du Buat, dire aujourd'hui :  
« Tout le monde applique les formules de l'hydraulique,  
« mais bien peu de personnes les entendent. »

Le présent ouvrage est destiné aux ingénieurs, et l'un des problèmes les plus délicats qu'ils aient à résoudre est celui de la répartition des eaux d'irrigation. J'ai cru devoir donner, comme annexes, quelques documents législatifs ou administratifs sur cette question ainsi que quelques exemples d'ouvrages destinés au partage des eaux.

Un ouvrage d'hydraulique doit nécessairement être complété par des tables numériques ; les formules, si peu exactes qu'elles soient, sont presque toujours trop compliquées pour les besoins de la pratique ; leur emploi donne souvent lieu à des tâtonnements ou à des pertes de temps par suite desquels elles sont abandonnées dès qu'elles ne sont pas très simples. Les tables calculées à l'avance, fournissant immédiatement, sans travail et surtout sans erreur, les solutions dont on a besoin, sont la seule forme sous laquelle les formules un peu compliquées puissent se faire accepter.

Je ne donne pas moins de 19 tables numériques, dont quelques-unes sont entièrement nouvelles. Même dans celles dont les chiffres ont été empruntés à d'autres ouvrages, on trouvera des dispositions qui m'ont paru plus commodes, et qui sont destinées à en rendre l'emploi plus facile et plus expéditif ; j'espère qu'elles seront bien accueillies.

Dans le même ordre d'idées, je donne, pour le calcul des distributions d'eau, un abaque imaginé par M. le chef de bataillon Bertrand et qui me paraît d'un usage facile et pratique.

Je dois en terminant, exprimer mes remerciements à tous les ingénieurs qui ont bien voulu me fournir des documents et dont les noms se trouvent cités dans le cours de l'ouvrage. Mais je dois en outre un témoignage de

reconnaissance tout spécial à M. Lechalas dont la collaboration m'a été précieuse. Sa connaissance approfondie des questions d'hydraulique fluviale, dont il m'a obligeamment fait profiter, m'a été de la plus grande utilité, ainsi que les renseignements bibliographiques nombreux et détaillés qu'il a bien voulu me fournir. Grâce à lui j'ai pu, malgré mon inexpérience de ce sujet, écrire sur les cours d'eau naturels un chapitre entier où j'ai cherché à condenser le plus possible tout ce qu'il m'a appris concernant cette importante application des principes de l'hydraulique à l'art de l'ingénieur.

Dans un ouvrage où tant de sujets divers sont traités, il est difficile d'avoir des notations spéciales pour chaque objet : l'alphabet n'y suffirait pas. On trouvera, en général, au commencement de chaque chapitre ou de chaque paragraphe la signification des notations qui y sont employées. Toutefois, il y a certaines lettres auxquelles j'ai conservé, autant que possible, la même signification dans toute l'étendue du volume, sauf quelques exceptions pour lesquelles il ne peut y avoir d'ambiguïté.

Je désigne donc en général par :

$g$ , l'accélération due à la pesanteur,

$\pi$ , le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre,

$\Pi$ , un poids spécifique,

$\rho$ , une densité,

$p$ , une pression,

$v$ ,  $V$ , des vitesses (ou des volumes dans le chapitre IX),

$u$ ,  $U$ , des vitesses moyennes,

$h$ ,  $H$ , des hauteurs verticales, ou des profondeurs de cours d'eau,

$i$ , la pente du lit d'un cours d'eau,

$I$ , la pente superficielle,

$J$ , la perte de charge par unité de longueur dans les tuyaux de conduite,

Q, le débit total d'un cours d'eau ou d'une conduite,  
 q, le débit par unité de largeur d'un cours d'eau,  
 L, la longueur d'un courant, suivant la direction du  
 mouvement,

l, la largeur dans une direction perpendiculaire,

D, le diamètre d'une conduite,

$\omega$ , l'aire d'une section transversale,

$\chi$ , le périmètre mouillé,

R, le rayon moyen d'un courant,  $R = \frac{\omega}{\chi}$ ; (par exception,  
 R représente quelquefois le rayon d'un cercle dans les  
 premiers chapitres; dans les chapitres IX et X, R a des  
 significations spéciales),

log., le logarithme vulgaire ou décimal,

Log., le logarithme naturel ou népérien,

sh., le sinus hyperbolique :  $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,

coh., le cosinus hyperbolique :  $\text{coh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,

tah., la tangente hyperbolique :  $\text{tah } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ,

Les valeurs de ces fonctions hyperboliques, pour di-  
 verses valeurs de leur argument, sont données dans la  
 table XVI.

La lettre  $\pi$ , placée devant une quantité variable,  
 représente la moyenne des valeurs de cette quantité.

A. F.





## CHAPITRE PREMIER

# HYDROSTATIQUE

---

§ 1. *Généralités.* — § 2. *Équilibre des fluides.* — § 3. *Équilibre des corps immergés.*

### § 1.

#### GÉNÉRALITÉS

**1. Fluides.** — On donne, en général, le nom de fluide à un corps qui n'offre aucune résistance appréciable aux déformations, ou qui prend, de lui-même, la forme des corps solides avec lesquels il est en contact.

Si, à travers un pareil corps, on imagine une surface plane le séparant en deux parties, l'effort nécessaire pour faire glisser l'une de ces deux parties sur l'autre sera extrêmement faible.

On désigne sous le nom de *fluide parfait* un fluide idéal, dans lequel cet effort serait rigoureusement nul : il n'existe pas, dans la nature, de fluides parfaits, pas plus qu'il n'existe de solides indéformables. Il est cependant utile de considérer et d'étudier les lois de l'équilibre et du mouvement de ces corps fictifs, auxquels les corps naturels peuvent être assimilés avec une approximation qui, dans un certain nombre de questions, est suffisante. Il est toutefois à remarquer que les fluides naturels diffèrent, du fluide parfait que l'on vient de définir, assez notablement pour que l'assimilation dont il s'agit ne puisse se faire que dans des cas assez restreints. Lorsqu'il s'agit d'en étudier le mouvement, il est presque toujours indispensable, à moins que l'on n'ait à considérer que des mouvements

très lents ou très limités, de faire entrer en ligne de compte l'effort qui serait nécessaire pour faire glisser l'une sur l'autre deux parties séparées par une surface plane fictive, menée à travers le fluide.

**2. Viscosité.** — Cet effort est ce que l'on appelle souvent la *viscosité* du fluide. Il peut être considéré comme une résistance tangentielle, située dans le plan de glissement, et dirigée en sens inverse du mouvement. Il a donc une grande analogie avec le *frottement* des corps solides ; cette même dénomination de frottement lui est attribuée en même temps que celle de viscosité, et c'est celle dont nous nous servons de préférence, bien que le *frottement* d'un fluide sur lui-même soit différent, à certains égards, de celui des solides.

**3. Liquides. Gaz.** — On sait qu'il y a, dans la nature, au moins deux espèces différentes de fluides : les liquides et les gaz. Les premiers sont caractérisés par l'incompressibilité et la constance du volume, à une température déterminée ; les autres, au contraire, sont compressibles et tendent à occuper toujours un espace plus grand, si l'on diminue la pression qui agit sur eux. On les appelle souvent, pour ce motif, fluides élastiques.

Nous nous occuperons d'abord exclusivement des fluides incompressibles, ou liquides. Un chapitre spécial est consacré aux fluides élastiques.

**4. Hydrostatique, hydrodynamique, hydraulique.** — L'étude de l'équilibre des liquides porte le nom d'hydrostatique ; celle de leur mouvement s'appelle hydrodynamique ; mais cette dernière dénomination s'applique surtout à l'étude analytique du mouvement. Lorsque l'on a en vue, comme dans cet ouvrage, les applications et les lois pratiques du mouvement des liquides, on en désigne l'ensemble sous le nom d'*hydraulique*.

Avant d'aborder l'étude de l'hydraulique proprement dite, nous rappellerons brièvement les principales notions les plus élémentaires de l'hydrostatique.

## § 2.

### ÉQUILIBRE DES FLUIDES

**5. Pression hydrostatique.** — Si, dans un fluide en équilibre, on considère un plan idéal quelconque, le divisant en deux

parties, et la résultante des actions qui s'exercent à travers ce plan, entre les molécules situées d'un côté sur celles de l'autre, cette résultante est la *pression* de l'une de ces parties sur l'autre. Et si, au lieu d'une surface indéfinie, on considère un élément plan infiniment petit, en un point M du fluide, la pression, rapportée à l'unité de surface, sur cet élément plan, est dite la *pression au point M*.

L'expérience montre que, dans les fluides naturels, le frottement intérieur est fonction de la vitesse de glissement, et s'annule avec elle. Il en résulte que, dans un fluide en équilibre, les vitesses relatives des diverses molécules étant égales à zéro, il ne s'exerce pas de frottement ou d'effort tangentiel sur un élément plan quelconque et que, par suite, le fluide naturel peut, dans toutes les questions d'équilibre, être assimilé rigoureusement à un fluide parfait. Et l'on peut énoncer ce théorème : *Dans un fluide naturel en équilibre, la pression en un point quelconque est normale à la surface sur laquelle elle s'exerce.*

Si, en un point M d'un fluide en équilibre, on mène trois plans rectangulaires quelconques et un quatrième plan oblique, la pression au point M, sur l'un quelconque de ces plans, sera normale à ce plan. Si, à une distance infiniment petite du plan oblique, on en mène un autre parallèle, interceptant, entre les trois plans rectangulaires, un tétraèdre infiniment petit, la pression, sur la base oblique du tétraèdre, devra faire équilibre aux autres forces qui agissent sur ce corps. Ces forces sont, d'une part, celles qui peuvent s'exercer sur sa masse, qui proviennent de causes extérieures et qui sont proportionnelles à cette masse, c'est-à-dire infiniment petites d'ordre supérieur par rapport aux pressions sur les faces ; et, d'autre part, ces pressions elles-mêmes qui, pour chacune des faces, sont proportionnelles à l'étendue de ces faces. Or, l'équilibre de ces quatre forces exige que les trois pressions sur les faces rectangulaires du tétraèdre soient respectivement les projections, sur leurs directions, de la pression sur la face oblique. D'un autre côté, les aires des faces rectangulaires sont les projections sur leurs plans respectifs de l'aire de la face oblique ; il en résulte que la pression, rapportée à l'unité de surface, sur l'une quelconque de ces faces rectangulaires, est la même que sur la face oblique, et par suite que *la pression au point M est la même sur tout élément de surface passant par ce point, quelle que soit sa direction.*

La pression en un point d'un fluide en équilibre est donc une quantité parfaitement définie et qui ne dépend que de la position de ce point. On l'appelle la *pression hydrostatique*.

**6. Equation d'équilibre d'un fluide.** — Soit toujours un fluide en équilibre, dont nous rapporterons les points à trois axes de coordonnées rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

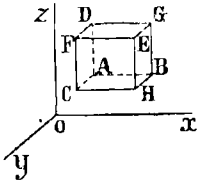


Fig. 1.

Considérons, dans ce fluide, un parallélépipède rectangle infiniment petit ABFE (fig. 1), ayant ses arêtes parallèles aux axes et respectivement égales à  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Écrivons les équations d'équilibre de ce parallélépipède, et pour cela, égalons à zéro les sommes des projections, sur les trois axes, des forces qui

agissent sur lui.

Ces forces sont, d'abord, les pressions sur les six faces, lesquelles sont respectivement parallèles aux axes, et ensuite les forces extérieures appliquées à la masse fluide, et dont nous appellerons  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  les sommes de composantes, rapportées à l'unité de masse, suivant les axes coordonnés, de telle sorte que,  $\rho$  étant la densité du fluide considéré,  $\rho dx dy dz$  la masse de l'élément parallélépipède, la composante, suivant les  $x$ , de ces forces extérieures sera  $\rho X dx dy dz$  et ainsi des autres. Appelons  $p$  la pression au point A; au point B,

elle sera  $p + \frac{dp}{dx} dx$ , et, les seules pressions ayant une projection sur l'axe des  $x$  étant celles qui s'exercent sur les faces AF et BE, lesquelles ont toutes deux pour surface  $dy dz$ , la somme des projections, sur l'axe des  $x$ , des pressions qui s'exercent sur les six faces de l'élément sera  $\left[ p - \left( p + \frac{dp}{dx} dx \right) \right] dy dz$  ou  $-\frac{dp}{dx} dx dy dz$ , et cette somme ajoutée à la composante  $\rho X dx dy dz$  des forces extérieures doit être égale à zéro, ce qui donne, après avoir divisé par  $dx dy dz$ , la première des trois équations suivantes dont les deux autres s'obtiennent en considérant de même les deux autres axes :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho X; \\ \frac{dp}{dy} &= \rho Y; \\ \frac{dp}{dz} &= \rho Z. \end{aligned}$$

Multiplions ces trois équations respectivement par  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ; ajoutons-les et remarquons que le premier membre devient alors la différentielle totale de la pression  $p$  considérée comme fonction des coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , nous obtiendrons l'équation générale de l'hydrostatique :

$$(1) \quad dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Si l'on imagine, à la place du fluide, un point mobile d'une masse égale à l'unité, parcourant l'espace occupé par le fluide et soumis, en chaque point, aux mêmes forces extérieures que ce fluide, la variation du potentiel de ce point, lorsqu'il passera d'une position à une autre, sera égale et de signe contraire à la différence de pression dans le fluide aux points correspondants.

**7. Surfaces de niveau.** — Par suite, les *surfaces de niveau* des forces extérieures agissant sur le liquide, définies par l'équation

$$(2) \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad \text{ou } dp = 0,$$

représentent les surfaces sur lesquelles la pression est la même en tous les points. Si, en particulier, on considère la surface *libre* d'un liquide, en tous les points de laquelle la pression est égale à la pression atmosphérique supposée constante, l'équation précédente définira la forme de cette surface libre ou le *niveau* du liquide en chaque point. C'est à cette propriété qu'est due la dénomination de surfaces de niveau, appliquée aux surfaces d'égal potentiel, et usitée en mécanique générale.

On sait qu'en tous leurs points les surfaces de niveau sont normales à la force extérieure, et que celle-ci est dirigée dans le sens vers lequel le potentiel diminue, ou bien vers lequel la pression augmente. La pression, comme le potentiel, est la même en tous les points d'une même surface de niveau, puisque l'équation de ces surfaces est  $dp = 0$ .

Nous supposons que le trinôme  $Xdx + Ydy + Zdz$  est la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées  $x, y, z$ , et nous laissons de côté le cas où cette condition ne serait pas satisfaite, lequel n'a pas d'applications pratiques. Si l'on a

$$Xdx + Ydy + Zdz = df(x, y, z),$$

on en déduit, d'après l'équation (1)

$$\rho = \frac{dp}{df}.$$

L'équation des surfaces de niveau est  $f(x, y, z) = C$ , la fonction  $f$ , comme la pression  $p$ , est constante sur une même surface de niveau et varie d'une surface à une autre. Ces deux quantités sont ainsi fonction l'une de l'autre, et par suite  $\rho$  ne peut être que constant ou fonction de  $p$ . Dans les liquides homogènes,  $\rho$  est constant ; il

est fonction de  $p$  dans les fluides élastiques à température constante où l'on a, en supposant exacte la loi de Mariotte,  $p = k\rho$ .

La densité  $\rho$  étant constante tout le long d'une même surface de niveau, il en résulte que les surfaces de séparation des couches de densités différentes coïncident avec les surfaces de niveau. Il est du reste facile de vérifier que si l'on a un fluide de densité variable, ou des fluides de densités différentes, l'équilibre ne peut être stable que si les densités vont en croissant dans le sens dans lequel est dirigée la force extérieure qui agit sur le fluide ; il est instable dans le cas contraire.

**8. Application aux fluides pesants.** — Si l'on considère un fluide pesant soumis uniquement à l'action de la pesanteur, et si l'on prend l'axe des  $z$  vertical et dirigé de bas en haut, on aura

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g;$$

et par suite l'équation (1) devient

$$(3) \quad dp + \rho g dz = 0.$$

L'équation (2), des surfaces de niveau, se réduit à  $dz = 0$ , ou  $z = \text{const}$  : les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.

Examinons d'abord le cas d'un liquide, dans lequel la densité  $\rho$  est constante.

L'équation (3) intégrée depuis une limite inférieure  $(z_0, p_0)$  jusqu'à un point quelconque  $(z, p)$ , donne

$$(4) \quad p - p_0 = -\rho g (z - z_0) = -\Pi (z - z_0),$$

en désignant par  $\Pi$  le poids spécifique du liquide. *La différence de pression entre deux points est égale au poids d'une colonne liquide ayant une section horizontale égale à l'unité, et une hauteur égale à la différence de niveau des deux points considérés.*

Nous avons vu, n° 6, que cette différence de pression était égale au signe près à la variation du potentiel d'un point mobile d'une masse égale à l'unité et soumis aux mêmes forces que celles qui agissent sur le liquide. Le poids de la colonne liquide dont il s'agit est donc aussi la mesure de cette différence de potentiel.

L'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$z + \frac{p}{\Pi} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} = H,$$

en appelant  $H$  une quantité constante. La quantité  $\frac{p}{\Pi}$ , rapport de la pression au poids spécifique du liquide, est dite la *hauteur repré-*

sentative de la pression  $p$ . Si en chaque point d'un liquide pesant en équilibre, on élève une verticale égale à la hauteur représentative de la pression en ce point, les extrémités de toutes ces verticales se trouveront dans un même plan horizontal, défini par l'ordonnée  $H$ . Ce plan s'appelle le *plan de charge*. On voit que si le liquide pouvait s'élever jusqu'à ce plan de charge, la pression sur sa surface libre serait nulle. Si  $p_0$  représente la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface libre réelle, le plan de charge est placé à une hauteur  $\frac{p_0}{\Pi}$  au dessus de cette surface.

NN' (fig. 2) représentant la surface libre d'un liquide, HH' le plan de charge, si, aux différents points tels que M d'une verticale ABC, on mène des horizontales MP proportionnelles aux pressions en ces points, c'est-à-dire à MA, le lieu des points P sera une droite AD, dont l'inclinaison sur la verticale dépendra du rapport que l'on aura adopté entre MP et MA. Ce mode de représentation des pressions est fréquemment employé. Le plus ordinairement on représente par les horizontales telles que MP non pas la pression totale mais l'excès, sur la pression atmosphérique, de la pression au point M. La droite oblique part alors du point B. Si, de plus on prend pour la longueur de MP la hauteur représentative de la pression qu'elle mesure, cette ligne oblique est inclinée à 45 degrés sur la verticale.

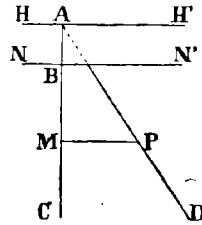


Fig. 2.

Si au lieu d'un liquide, nous avons un fluide élastique à température constante, dans lequel (n° 7) la densité soit liée à la pression par la relation  $p = k\rho$ , l'équation (3) devient, en divisant tous ses termes par  $p$  :

$$\frac{dp}{p} + \frac{g}{k} dz = 0 ;$$

ou bien, en l'intégrant entre les mêmes limites que ci-dessus :

$$\text{Log} \frac{p_0}{p} = \frac{g}{k} (z - z_0).$$

Cette équation, complétée pour tenir compte des variations de température, est employée, comme on sait, dans le nivellement barométrique.

### 9. Liquide pesant tournant autour d'un axe vertical.

— Considérons un liquide pesant animé d'un mouvement de rota-

tion uniforme autour d'un axe vertical que nous prendrons pour axe des  $z$ , et supposons ce liquide arrivé à sa position d'équilibre ou de repos relatif par rapport à des axes mobiles animés du même mouvement de rotation. Quel que soit le point M (fig. 3) dont nous

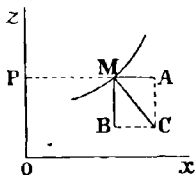


Fig. 3.

étudions l'équilibre, nous pouvons prendre pour plan des  $xz$  le méridien qui le contient, et le point M est en équilibre, dans ce plan, sous l'action de la force réelle, son poids, et de la force apparente due à l'inertie dans le mouvement d'entraînement. Les grandeurs de ces forces rapportées à l'unité de masse sont respectivement  $g$  et  $\omega^2 x$ , en appelant  $\omega$  la vitesse angulaire du mouvement de rotation et  $x$  la distance MP du point M à l'axe ; et elles sont dirigées suivant MB et MA. On a ainsi :

$$X = \omega^2 x, \quad Z = -g,$$

et l'équation (1) réduite à deux coordonnées  $x, z$ , devient

$$dp = \rho (\omega^2 x dx - g dz).$$

Les surfaces de niveau ont ainsi pour traces sur le plan méridien  $xz$  les courbes représentées par l'équation

$$\omega^2 x dx - g dz = 0,$$

ou bien

$$\omega^2 \frac{x^2}{2} - g z = C.$$

Ce sont des paraboles ayant pour axe vertical l'axe de la rotation. Les surfaces de niveau sont les paraboloides de révolution engendrés par le mouvement de ces courbes. Elles sont, en chaque point, normales à la résultante MC des deux forces MB =  $g$ , et MA =  $\omega^2 x$  appliquées à l'unité de masse au point M. Cette résultante a pour grandeur  $\sqrt{g^2 + \omega^4 x^2}$ , elle est toujours supérieure à  $g$  et la différence est d'autant plus grande que la vitesse angulaire de la rotation,  $\omega$ , est plus grande. L'élément de la masse liquide au point M, et en tous les points situés à la même distance  $x$  de l'axe, se trouve ainsi dans les mêmes conditions que si la gravité était accrue dans le rapport de  $g$  à  $\sqrt{g^2 + \omega^4 x^2}$ . Si deux de ces éléments ont des densités différentes, la différence des efforts qui agiront sur eux, à égalité de volume, sera également accrue dans le même rapport, et elle sera la même que si, dans un liquide en repos, la différence des densités était aussi augmentée dans la même proportion. Il en résulte que la séparation de liquides de densités peu différentes s'effectuera plus facilement et plus rapidement lorsqu'on les fera ainsi tourner



qu'en les laissant immobiles, ces liquides se plaçant d'ailleurs, pour la stabilité de l'équilibre, de telle façon que les densités aillent en croissant dans le sens MC, c'est-à-dire en s'éloignant de l'axe.

Cette propriété est usitée dans l'industrie et l'opération à laquelle elle conduit porte souvent le nom de *turbinage* : le vase animé d'un mouvement de rotation vertical étant appelé turbine. On applique le turbinage, notamment à la fabrication du beurre, opération qui n'est autre chose que la séparation des parties les plus denses du lait, à la filtration des eaux ou des liquides industriels, etc. Le turbinage du sucre, bien qu'étant opéré dans des appareils analogues, n'est que l'application de la force centrifuge : le paroi latérale de la turbine est percée de trous assez fins pour retenir les cristaux de sucre en laissant passer la mélasse qui s'écoule au dehors.

**10. Liquide pesant tournant autour d'un axe horizontal.** — Soit encore une masse liquide animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal projeté en O (fig. 4). Une molécule M décrit une circonférence MN d'un rayon  $r$ , avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . A la force réelle  $MB = g$  appliquée à l'unité de masse, nous devons encore ajouter, pour ramener cette question à un problème d'équilibre, la force apparente due à l'inertie du mouvement d'entraînement, laquelle, égale à  $\omega^2 r$ , est dirigée suivant MA, prolongement du rayon OM. La résultante de ces deux forces, MC, sera la normale à la surface de niveau du point M. Prolongeons cette normale MC jusqu'à sa rencontre en P avec la verticale du point O ; les deux triangles semblables MCB, PMO nous donnent :

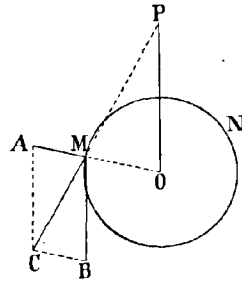


Fig. 4.

$$\frac{PO}{MB} = \frac{OM}{CB};$$

d'où :

$$PO = \frac{gr}{\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2}.$$

La position du point P est ainsi indépendante de celle du point M. Toutes les normales aux surfaces de niveau rencontrent le plan vertical passant par l'axe à une même hauteur au-dessus de cet axe.

Ces surfaces sont donc des cylindres à génératrices horizontales

parallèles à l'axe de rotation, ayant pour bases des circonférences décrites du point P comme centre. La distance verticale OP est inversement proportionnelle au carré de la vitesse angulaire  $\omega$  : lorsque cette vitesse est assez grande, OP devient très petit. Cela explique comment on peut faire tourner comme une fronde un vase en partie rempli d'eau, sans le renverser. Il est nécessaire, pour cela, que le point P soit à l'intérieur du cercle décrit par les molécules de la surface libre, ou que  $OP = \frac{g}{\omega^2}$  soit plus petit que  $OM = r$ . C'est aussi la condition pour que le vase, supposé relié au centre O par un fil flexible, décrive la circonférence entière sans cesser de tendre le fil.

## § 3.

## ÉQUILIBRE DES CORPS IMMERGÉS

**11. Pression d'un liquide pesant sur une surface plane** — La pression dans un liquide pesant et homogène, à une profondeur  $h$  mesurée de haut en bas, au-dessous du plan horizontal où la pression est nulle, est, d'après l'équation (4) du n° 8, dans laquelle on fait  $p_0 = 0$ , et  $h = -(z - z_0)$  :

$$p = \Pi h.$$

Le plan horizontal de pression nulle à partir duquel on mesure les profondeurs  $h$  sera le plan de charge défini au n° 8, ou bien la surface libre du liquide si l'on fait abstraction de la pression atmosphérique, en appelant alors  $p$  l'excès de la pression sur celle de l'atmosphère.

Si, dans ce liquide en équilibre, nous imaginons une aire plane AB, limitée par un contour quelconque et la droite MN (fig. 5) d'intersection du plan de cette aire avec

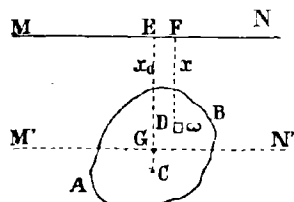


Fig. 5.

$h = x \sin \alpha$ , la pression sur l'élément  $\omega$  est  $\Pi h \cdot \omega = \Pi \omega x \sin \alpha$ , et

la pression totale  $P = \Sigma \Pi \omega x \sin \alpha = \Pi \sin \alpha \Sigma \omega x$ . La pression est, en chaque point, proportionnelle à la distance de ce point à la droite MN. Or, si l'on appelle  $x_0$  la distance GE du centre de gravité à la ligne MN et  $\Omega$  l'aire totale AB, on a  $\Sigma \omega x = \Omega x_0$  et par suite la pression totale  $P = \Pi \Omega x_0 \sin \alpha$  : Elle est égale au produit de l'aire  $\Omega$  par la pression au centre de gravité, laquelle est ainsi la pression moyenne.

Le point C, d'application de la résultante P, ou le centre de pression, sera à une distance  $x_1$ , de MN déterminée par l'équation suivante qui exprime l'égalité du moment par rapport à MN de la résultante et des pressions élémentaires :

$$Px_1 = \Sigma \Pi \omega x \sin \alpha \cdot x = \Pi \sin \alpha \Sigma \omega x^2.$$

Or,  $\Sigma \omega x^2$  est le moment d'inertie, par rapport à MN, de l'aire considérée, et si l'on appelle I le moment d'inertie de cette surface par rapport à une horizontale M'N' menée par le centre de gravité, l'on a :

$$\Sigma \omega x^2 = I + \Omega x_0^2;$$

$$\text{et par suite : } x_1 = \frac{Px_1}{P} = \frac{\Pi \sin \alpha \Sigma \omega x^2}{\Pi \sin \alpha \Sigma \omega x} = \frac{\Omega x_0^2 + I}{\Omega x_0} = x_0 + \frac{I}{\Omega x_0}.$$

Le centre de pression est donc toujours plus bas que le centre de gravité.

On reconnaît d'ailleurs l'identité du centre de pression ainsi défini avec celui dont il est question au n° 20 du *Traité de résistance des matériaux* (seconde édition) qui fait partie de l'*Encyclopédie*. Alors, sans qu'il soit nécessaire de reproduire la démonstration qui, en a été donnée, il suffira de rappeler que le centre de pression est l'anti-pôle, par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de l'aire considérée, de la ligne neutre laquelle est ici la ligne d'intersection MN de la surface plane avec la surface libre du liquide.

Lorsque l'aire plane dont on s'occupe a un diamètre de ses cordes horizontales, le centre de pression se trouve nécessairement sur ce diamètre ; et alors la formule ci-dessus, donnant sa distance  $x_1$  à la ligne MN, permettra d'en trouver la position.

Nous rappellerons seulement les résultats pour deux formes simples de l'aire plane pressée par un liquide.

1° *Rectangle ayant deux côtés horizontaux*. — Soit  $b$  la largeur horizontale,  $a$  la hauteur du rectangle ; on a  $\Omega = ab$  et  $I = \frac{a^3 b}{12}$ . On en déduit :

$$x_1 = x_0 + \frac{a^3 b}{12 ab x_0} = x_0 + \frac{a^2}{12 x_0}.$$

La distance du centre de pression au centre de gravité,  $x_1 - x_0$  est égale à  $\frac{a^2}{12 x_0}$  ; elle est inversement proportionnelle à  $x_0$ . Lorsque le côté supérieur du rectangle coïncide avec la surface libre, on a  $x_0 = \frac{a}{2}$  et  $x_1 - x_0 = \frac{a}{6}$  ; résultat que l'on a déjà trouvé dans la *Résistance des matériaux*.

2° *Cercle*. — Soit  $r$  le rayon du cercle :

$$\Omega = \pi r^2, I = \frac{1}{4} \pi r^4 ;$$

et l'on a

$$x_1 = x_0 + \frac{\pi r^4}{4 \pi r^2 x_0} = x_0 + \frac{r^2}{4 x_0} .$$

La distance du centre de pression au centre de gravité,  $x_1 - x_0$  est alors égale à  $\frac{r^2}{4 x_0}$  ou bien à  $\frac{(2r)^2}{16 x_0}$ . Si donc l'on compare une aire rectangulaire à une aire circulaire ayant pour diamètre la hauteur du rectangle, le centre de pression, dans le cercle, sera plus rapproché du centre de gravité que dans le rectangle.

**12. Pression d'un fluide sur une surface quelconque. Principe d'Archimède.** — *Quant une surface fermée se trouve soumise en tous ses points à une pression normale constante par unité superficielle, la résultante de toutes ces pressions élémentaires est nulle.*

Rapportons la surface à trois axes de coordonnées rectangulaires quelconques et divisons-la en prismes infiniment petits parallèles à l'un des axes,  $Ox$ , par exemple. La pression sur la base oblique  $M$  de l'un de ces prismes a pour valeur la pression  $p$  par unité de surface multipliée par l'étendue de cette base oblique. La projection de cette pression sur l'axe des  $x$  est égale au produit de  $p$  par l'aire de la section droite du prisme.

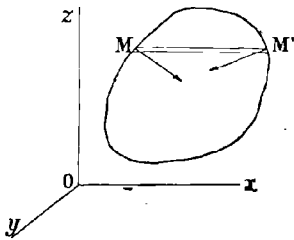


Fig. 6.

De même, la pression sur l'autre base  $M'$  du même prisme aura pour projection sur l'axe des  $x$  le produit de  $p$  par l'aire de la section droite, c'est-à-dire la même valeur que l'autre. La somme de ces deux projections égales et de sens contraire sera ainsi nulle et il en sera de même des projections des pressions sur les bases de

tous les autres prismes. La somme des projections sur l'axe des  $x$  des pressions qui s'exercent sur toute la surface fermée est donc égale à zéro; et comme on peut faire le même raisonnement pour les deux autres axes, on en conclut la nullité de la résultante elle-même.

Ce théorème donne le moyen de déterminer la résultante de pressions normales, constantes par unité superficielle, sur une surface irrégulière quelconque limitée à un plan. Soit  $AMB$  (fig. 7) cette surface limitée au plan  $AB$  et soumise en tous ses points à une pression normale  $p$ .

Si nous considérons le volume formé par cette surface et par le plan  $AB$  et si nous le supposons soumis en tous ses points à la pression normale  $p$ , il sera en équilibre. Il en résulte, par conséquent, que la pression  $p$  sur le plan  $AB$  fait équilibre à la pression  $p$  sur la surface  $AMB$ , ou bien que la résultante des pressions sur cette surface

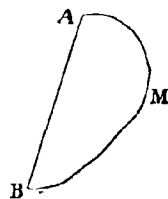


Fig. 7.

est la même que celle de la pression  $p$  sur le plan  $AB$ , laquelle est égale au produit de  $p$  par l'aire de cette surface  $AB$ , normale à  $AB$  et appliquée à son centre de gravité,

*Si un corps solide est plongé dans un fluide pesant en équilibre, la composante horizontale de la résultante des pressions qui s'exercent sur lui est nulle, c'est-à-dire que cette résultante est verticale.* Supposons le corps solide divisé en tranches horizontales infiniment minces par des plans horizontaux parallèles, la pression par unité superficielle sera la même en tous les points du contour de l'une de ces tranches, et en raisonnant comme nous venons de le faire, nous reconnaitrons que la somme des projections, sur deux axes horizontaux, des pressions qui s'exercent sur le contour de chacune des tranches est égale à zéro et qu'il en est de même, par suite, de la composante horizontale de la résultante de toutes les pressions. Celle-ci est donc verticale.

*Lorsqu'un corps solide est plongé dans un fluide pesant en équilibre, la résultante verticale des pressions qui s'exercent sur sa surface est égale au poids du fluide déplacé, et passe par le centre de gravité de ce fluide.*

Divisons le corps solide en prismes verticaux infiniment petits, et soit  $\omega$  la section droite de l'un de ces prismes  $MM'$  (fig. 8). Si  $p$  et  $p'$  sont les pressions par unité superficielle qui s'exercent en  $M$  et en  $M'$ , la somme des projections, sur un axe vertical, des pressions sur les bases obliques du prisme  $MM'$  sera  $p'\omega - p\omega$  ou  $(p' - p)\omega$ . Si  $h$  et  $h'$  sont les profondeurs des points  $M$  et  $M'$  au-dessous de la surface libre, on a (n° 11)

$$p = \Pi h, \quad p' = \Pi h' \quad \text{et} \quad (p' - p)\omega = \Pi (h' - h)\omega.$$

Or,  $h' - h = MM'$  ; on voit donc que la somme des projections, sur un axe vertical, des pressions qui s'exercent sur les bases M et M' est égale au poids de ce prisme supposé rempli du fluide dans lequel le corps est plongé et que la résultante verticale de ces pressions agit de bas en haut, ou en sens inverse de la pesanteur. En faisant le même raisonnement pour tous les autres prismes

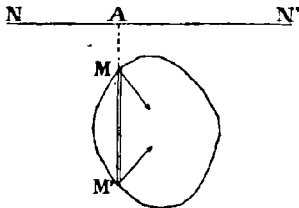


Fig. 8.

élémentaires on voit que la résultante totale des pressions sur la surface du solide est bien égale au poids du fluide qui remplirait le volume du solide et qu'elle passe par le centre de gravité du fluide déplacé, car les diverses pressions élémentaires qu'il faudra composer pour obtenir la résultante occupent exactement la position des prismes.

C'est ce théorème qui porte le nom de *principe d'Archimède*. La pression de bas en haut à laquelle sont soumis de la part d'un liquide les corps solides qui y sont plongés produit une diminution apparente de leur poids que l'on qualifie quelquefois de *perte de poids*.

Nous avons démontré ce principe dans l'hypothèse où le fluide a un poids spécifique constant. Il est également vrai lorsque le poids spécifique est variable, et il se démontre de la même manière. On peut d'ailleurs en reconnaître l'exactitude dans tous les cas par le raisonnement suivant : si l'on considère, dans un fluide en équilibre, la portion qui sera déplacée par le corps solide qu'on y plongera, cette portion supporte, de la part du fluide ambiant, une pression verticale, égale et directement opposée à son poids. Cette pression, qui est la résultante de celles qui s'exercent en tous les points de la surface de séparation, sera la même lorsque le solide aura remplacé le liquide puisque cette surface de séparation sera la même.

Le point d'application de cette résultante verticale, qui est le centre de gravité du liquide déplacé, s'appelle, lorsqu'il s'agit de corps flottants à la surface, le centre de *carène* ; on peut sans inconvénient étendre cette dénomination au cas d'un corps entièrement immergé.

### 13. Stabilité de l'équilibre des corps immergés. —

Un corps solide, entièrement immergé dans un liquide, est donc

soumis à deux forces : son poids, appliqué en son centre de gravité  $G$  ; la pression du fluide ambiant, égale au poids du fluide déplacé et appliquée au centre de carène  $C$ . Pour que le corps soit en équilibre sous l'action de ces deux forces, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées, c'est-à-dire que le poids du corps soit égal au poids du liquide qu'il déplace, et que le centre de gravité et le centre de carène soient sur la même verticale. Mais, pour que l'équilibre soit stable, il faut en outre que le centre de gravité soit placé au-dessous du centre de carène. On voit en effet qu'alors (fig. 9), si le corps solide subit un petit déplacement, les deux forces auxquelles il est soumis formeront un couple qui tendra à le ramener vers sa position d'équilibre. Il en serait autrement si le centre de gravité (fig. 10) était au-dessus du centre de carène : l'équilibre serait instable.

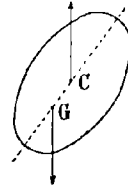


Fig. 9.

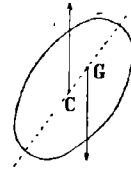


Fig. 10.

**14. Stabilité de l'équilibre des corps flottants. Métacentre.** — Lorsque le poids du corps solide est inférieur à celui du liquide qu'il déplacerait, s'il était entièrement plongé, il flotte à la surface en plongeant seulement d'une quantité suffisante pour déplacer un poids de liquide égal au sien. Alors la résultante des pressions du liquide peut faire équilibre à son poids, il suffit encore pour cela que le centre de gravité et le centre de carène soient sur une même verticale. Mais la condition de la stabilité de cet équilibre reçoit une forme nouvelle provenant de ce que, lorsque le solide subit un déplacement, la forme de la partie plongée change et que, par suite, la position du centre de carène change aussi dans l'intérieur du solide.

Soit  $G$  le centre de gravité d'un corps flottant,  $C$  le centre de carène correspondant à l'équilibre. Si l'on suppose que le corps flottant se soit déplacé de manière que la ligne  $GC$  (fig. 11) soit venue en  $GC'$ , le nouveau centre de carène sera venu quelque part en  $D_1$ , ou  $D_2$ . S'il est venu en  $D$ , c'est-à-dire s'il est resté sur la verticale du point  $G$ , les deux forces auxquelles est soumis le corps flottant (son poids et la pression du fluide) sont encore directement opposées ; le solide reste en équilibre, et cet équilibre est ainsi *indifférent* ; il subsiste quel que soit le déplacement attribué au solide. Si le centre de carène est

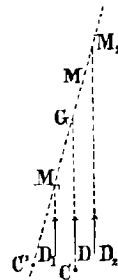


Fig. 11.

venu en  $D_1$ , le couple formé par les deux forces tend à écarter davantage le solide de sa position d'équilibre : l'équilibre est instable. Il ne peut être stable que si le nouveau centre de carène vient en  $D_2$ , au-delà de la verticale du point  $G$ , ou, ce qui revient au même, que si la verticale  $D_2 M_2$  du nouveau centre de carène rencontre la ligne  $C'G$  au-delà du point  $G$ .

La limite de la position du point  $M_2$  lorsque le déplacement du solide est infiniment petit, s'appelle le *métacentre*<sup>1</sup>  $M$ .

On énoncera donc la condition de la stabilité de l'équilibre en disant que pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable il faut que le métacentre soit au-dessus du centre de gravité.

Il reste à déterminer la position du métacentre. Soit un corps flottant dont le centre de gravité est  $G$  (fig. 12), soit  $DE$  la trace sur ce corps du plan de flottaison dans la position d'équilibre et  $C$  le centre de carène correspondant ; supposons ce corps déplacé d'une quantité très petite et soit  $AB$  la trace du plan de flottaison dans cette nouvelle position, et  $C'$  le nouveau centre de carène. Le métacentre est, par définition, la limite de la position du point  $M$ , intersection de la droite  $CG$  prolongée avec la verticale du point  $C'$ . Prenons pour plan de la figure un plan vertical

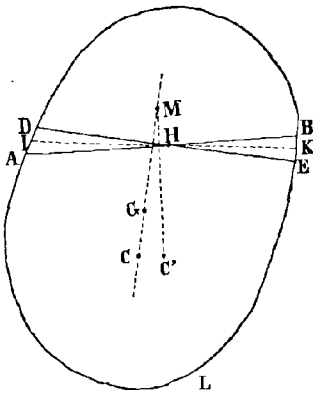


Fig. 12.

perpendiculaire à l'intersection des deux plans  $AB, DE$ . Si, comme nous le supposons, le déplacement du corps est très petit, les deux sections  $AB, DE$  différeront très peu l'une de l'autre et chacune d'elles sera à très peu égale à la section faite par le plan  $IK$  bissecteur de l'angle de ces deux plans, lequel contiendra ainsi les centres de gravité des deux fuseaux  $DHA$  et  $BHE$ , dont les volumes sont égaux puisque  $ALB, DLE$  le sont nécessairement, chacun d'eux déplaçant un volume de liquide dont le poids est égal à celui du corps flottant. Soit  $V$  ce volume.

Prenons les moments, par rapport à  $IK$ , des deux volumes  $DLE$  et  $ALB$ . Si nous supposons connu le premier de ces moments, pour

<sup>1</sup>. Le nom de métacentre a été donné à ce point par Bouguer, dans son *Traité du navire* de 1746. On trouvera aussi dans cet ouvrage la définition de la *courbe métacentrique*, dont le métacentre est le point de rebroussement.



en déduire le second, nous devons en retrancher le moment du fuseau DHA, lequel est nul puisque le centre de gravité de ce fuseau est sur IK, et y ajouter le moment du fuseau BHE qui est également nul. Les moments, par rapport à IK, des deux volumes considérés sont donc égaux, et puisque ces volumes sont égaux leurs centres de gravité sont à la même distance de IK, c'est-à-dire que le centre de carène C' se trouve sur une parallèle à IK menée par le point C.

Prenons ensuite les moments de ces deux mêmes volumes par rapport à une ligne perpendiculaire à IK ; ils différeront du produit de V par la distance CC'. Or nous pouvons encore passer du premier moment au second en y ajoutant le moment du fuseau BHE puis en retranchant celui du fuseau DHA. La différence des moments des deux volumes,  $V \times CC'$ , sera la même que celle des deux fuseaux et cette différence restera aussi la même quelle que soit la position de la ligne, perpendiculaire à IK, par rapport à laquelle on prendra les moments : supposons la passer par le point H, le moment de l'un des fuseaux sera négatif et l'autre positif, et leur différence algébrique sera leur somme arithmétique. Soit sur le plan IK, un élément infiniment petit  $\omega$  à une distance  $y$  de la ligne projetée en H. Cet élément peut être considéré comme la section droite d'un prisme tronqué limité aux deux plans AB et DE. En appelant  $\theta$  l'angle de ces deux plans, la hauteur de ce prisme sera  $2 y \sin \frac{\theta}{2}$  ; son volume,

$2 y \omega \sin \frac{\theta}{2}$ , ou bien, puisque l'angle  $\theta$  est supposé très petit,  $y\omega\theta$ .

Le moment de ce prisme par rapport à la droite projetée en H sera ainsi  $y^2\omega\theta$  et la somme des moments de tous les prismes constituant ensemble les deux fuseaux sera  $\Sigma y^2\omega\theta = \theta \Sigma \omega y^2$ , la somme étant étendue à tous les éléments  $\omega$  de la section IK.

Nous avons ainsi, d'après ce qui vient d'être dit,

$$V \times CC' = \theta \Sigma \omega y^2.$$

Or, l'angle CMC' étant égal à  $\theta$ , CC' est égal à  $2 MC \sin \frac{\theta}{2}$  ou à MC.  $\theta$ , ce qui donne, en substituant :

$$V \times MC. \theta = \theta \Sigma \omega y^2.$$

A la limite, la section IK se confond avec la section DE et la droite H passe par le centre de gravité de cette section

Désignons par I le moment d'inertie,  $\Sigma \omega y^2$ , par rapport à un axe mené par son centre de gravité, de la section DE faite dans le corps

flottant par la surface libre du liquide dans la position d'équilibre, l'équation précédente donnera :

$$MC = \frac{I}{V}.$$

Enfin, désignons par  $a$  la distance CG du centre de carène au centre de gravité dans la position d'équilibre, la distance MG du métacentre au centre de gravité du solide sera :

$$MG = \frac{I}{V} \mp a,$$

le signe + s'appliquant au cas où le centre de gravité G serait au-dessous du centre de carène C. Alors, pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit que MG soit positif et la grandeur de cette quantité MG mesure en quelque sorte la stabilité de l'équilibre ; elle est en effet, pour un même déplacement, proportionnelle au bras de levier du couple qui tend à ramener le solide dans sa position d'équilibre.

Le moment d'inertie I qui entre dans l'expression de MG doit être évidemment le plus petit des moments d'inertie de la section DE par rapport à tous les axes passant par son centre de gravité.

Le métacentre ainsi déterminé a une position définie indépendante de l'angle  $\theta$  lorsque cet angle est très petit. Mais si les oscillations du corps flottant ne sont pas très petites, il faut calculer la position du métacentre pour une inclinaison finie que l'on détermine d'après l'amplitude des oscillations auxquelles pourra être soumis le corps flottant <sup>1</sup>.

**15. Application aux prismes carrés.** — Considérons un prisme homogène à base carrée et de longueur indéfinie, flottant sur un liquide. Appelons  $a$  le côté de la base et  $d$  le rapport du poids spécifique du prisme à celui du liquide,  $d$  étant nécessairement plus petit que l'unité : ce sera le poids spécifique du prisme si celui du liquide est pris pour unité. On voit immédiatement que la première condition d'équilibre consistant en ce que le centre de gravité du solide et celui du volume déplacé se trouvent sur une même verticale

1. On démontre facilement que la période des oscillations qu'exécute ainsi un corps flottant écarté de sa position d'équilibre est égale à celle d'un pendule simple dont la longueur serait  $\frac{\rho^2}{GM}$ , en appelant  $\rho$  le rayon de giration

du corps solide par rapport à un axe longitudinal horizontal mené par son centre de gravité. Voir, sur ce sujet, le mémoire *Du roulis sur mer houleuse*, par de St. Venant, Société des sciences naturelles de Cherbourg, tome XVI.

peut être satisfaite pour deux positions du prisme : deux de ses faces étant parallèles à la surface du liquide (fig. 13) ; ou bien ses faces étant inclinées à 45 degrés (fig. 14). Dans cette dernière hypothèse, le prisme aura une seule arête ou trois arêtes dans le liquide suivant que son poids spécifique sera inférieur ou supérieur à 0,50. Il faut chercher laquelle de ces deux positions sera stable.

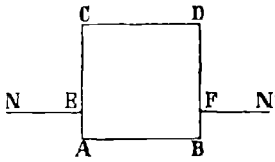


Fig. 13.

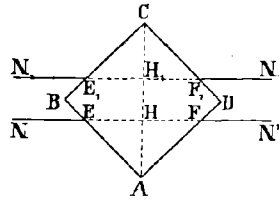


Fig. 14.

Dans le premier cas, représenté par la figure 13, appelons  $x$  la distance à la surface libre  $NN'$  de la face horizontale  $AB$  plongée dans le liquide, ou faisons  $x = AE = FB$  ; si nous supposons la longueur du prisme égale à l'unité, nous avons  $I = \frac{a^3}{12}$ ,  $V = ax$  et par suite  $\frac{I}{V} = \frac{a^2}{12x}$ . C'est la distance du métacentre au centre de carène et elle doit être supérieure à la distance du centre de gravité du solide à ce dernier point, ou à  $\frac{a-x}{2}$ . L'équilibre ne sera donc stable que si l'on a  $\frac{a^2}{12x} > \frac{a-x}{2}$ , ce qui exige que le rapport  $\frac{x}{a}$ , ou le poids spécifique  $d$  qui lui est égal, soit inférieur à  $\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,212$ , ou supérieur à  $\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,788$ . Il sera instable si le poids spécifique est compris entre ces deux limites.

Considérons alors le second cas, représenté par la figure 14, où, les faces étant inclinées à 45 degrés, une seule arête plonge dans le liquide, et appelons maintenant  $x$  la profondeur  $AH$  de cette arête au-dessous de la surface libre. Le volume du prisme étant toujours  $a^2$  et le volume déplacé  $V$  étant alors  $x^2$ , le poids spécifique  $d = \frac{2x^2}{a^2}$ . Le moment d'inertie  $I$  est  $\frac{(2x)^3}{12} = \frac{2x^3}{3}$  et le rapport  $\frac{I}{V}$  est égal à  $\frac{2}{3}x$ . Ce rapport doit être plus grand que la distance du centre du

prisme au centre de carène ou que  $\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}x$ . La condition de la stabilité de l'équilibre est ainsi  $\frac{2}{3}x > \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}x$ , ou  $\frac{8}{3}x > a\sqrt{2}$ . On en déduit  $\frac{x^3}{a^3}$  ou  $d > \frac{9}{32}$  ou 0,281. En examinant de même le cas où trois arêtes seraient plongées dans le liquide, on verrait que l'équilibre ne peut être stable que si l'on a  $d < \frac{23}{32} = 0,719$ .

Ainsi, en résumé, le prisme à base carrée flottera avec sa face supérieure horizontale lorsque son poids spécifique sera inférieur à 0,212 ou supérieur à 0,788. Il aura ses faces inclinées à 45 degrés lorsque son poids spécifique sera compris entre 0,281 et 0,719. On pourra donc, par exemple, au seul aspect d'une pièce de bois flottant sur l'eau, reconnaître si elle est en chêne ou en sapin : le poids spécifique du chêne étant environ 0,87, la pièce en chêne aura sa face supérieure horizontale, et celui du sapin étant environ 0,49, la pièce en sapin aura ses faces inclinées à 45 degrés.

Lorsque le poids spécifique du prisme flottant est compris entre 0,212 et 0,281 d'une part ou entre 0,719 et 0,788 de l'autre, l'équilibre ne peut être stable, ni dans l'une ni dans l'autre des deux positions que nous avons considérées. Le prisme prend alors des positions obliques intermédiaires en passant graduellement de l'une à l'autre à mesure que le poids spécifique varie. Par exemple, le prisme ayant une de ses faces horizontales au poids spécifique limite 0,212, si ce poids spécifique augmente, la face d'abord horizontale fera, avec la surface libre, un angle  $\alpha$  variable et lié au poids spécifique par la relation  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{12d - 12d^2 - 1}$ , jusqu'à ce que l'un des sommets plongés dans le liquide vienne affleurer la surface, ce qui aura lieu pour  $d = 0,25$ . A partir de ce moment, le poids spécifique continuant à augmenter, il n'y aura plus qu'un seul sommet dans le liquide et l'angle  $\alpha$  formé par la face supérieure avec l'horizon sera donnée par  $\sin 2\alpha = \frac{16d}{9 - 16d}$ , jusqu'à ce qu'il atteigne 45 degrés pour  $d = \frac{9}{32}$ .

Les mêmes phénomènes se reproduisent en sens inverse lorsque le poids spécifique varie de 0,719 à 0,788.

L'étude de la stabilité de l'équilibre des prismes rectangulaires flottants donne lieu à des considérations analogues.

## CHAPITRE II

# GÉNÉRALITÉS SUR LE MOUVEMENT DES LIQUIDES

---

§ 1. *Mouvement des liquides en général.* — § 2. *Mouvement permanent.* — § 3. *Mouvement uniforme.*

### § 1.

#### MOUVEMENT DES LIQUIDES EN GÉNÉRAL

##### **16. Equations générales de l'hydrodynamique.** —

Considérons un fluide parfait en mouvement et rapportons les positions de ses divers points à trois axes de coordonnées rectangulaires,  $x, y, z$ . Le mouvement de ce fluide sera complètement déterminé si, à une époque  $t$  quelconque nous connaissons, en grandeur et en direction, la vitesse  $V$  d'un point quelconque laquelle pourra être définie par ses trois projections  $u, v, w$ , sur les trois axes. L'état du fluide en chaque point sera, d'autre part, déterminé par la pression  $p$  et la densité  $\rho$ . Le problème comporte donc cinq quantités inconnues,  $u, v, w, p, \rho$ , à exprimer en fonction de quatre variables indépendantes  $x, y, z$  et  $t$ .

L'hypothèse de la fluidité parfaite est nécessaire pour ne pas compliquer outre mesure la question. C'est grâce à elle que la pression  $p$ , en un point donné, conserve une valeur unique parfaitement définie. Si, au lieu d'un fluide parfait, nous considérons un fluide naturel, nous aurions à faire intervenir les efforts tangentiels qui, sur un élément plan quelconque, sont alors, par unité de surface, proportionnels à la vitesse de glissement de l'une des parties limitées par cet élément sur l'autre<sup>1</sup>. La pression n'est plus normale à

1. Si, en un point quelconque, on considère trois éléments rectangulaires

l'élément plan sur lequel elle s'exerce ; elle n'a plus la même valeur, au même point, sur les éléments de directions diverses.

Nous supposons donc le fluide parfait.

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait au n° 6 pour écrire les conditions d'équilibre d'un parallélépipède rectangle, nous trouverons les équations exprimant l'équilibre dynamique d'un pareil élément et ces équations ne seront autre chose que celles de l'équilibre statique, trouvées à ce n° 6 (page 4), à la condition que nous ajoutions aux forces réelles, dont nous avons désigné les composantes suivant les trois axes par  $X, Y, Z$ , la force d'inertie de l'élément, c'est-à-dire que nous ajoutions à ces trois composantes celles, changées de signe, de l'accélération suivant les trois axes. Désignons donc par  $u', v', w'$  les projections, sur les trois axes, de l'accélération de l'élément considéré, lesquelles sont les dérivées par rapport au temps des projections  $u, v, w$  de la vitesse  $V$  du même élément sur les mêmes axes, nous aurons les trois équations d'équilibre dynamique :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = \rho (X - u'), \\ \frac{dp}{dy} = \rho (Y - v'), \\ \frac{dp}{dz} = \rho (Z - w'). \end{cases}$$

Les composantes  $u, v, w$  de la vitesse  $V$  sont des fonctions des coordonnées  $x, y, z$  et du temps  $t$  ; l'accroissement différentiel de l'une d'elles,  $u$  par exemple s'exprime par

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt ;$$

et sa dérivée par rapport au temps, que nous avons désignée par  $u'$ , s'obtiendra en divisant cet accroissement par  $dt$  ; nous aurons ainsi :

parallèles aux plans coordonnés, les composantes des vitesses de glissement qui sont deux à deux égales, ont, comme on sait, les valeurs suivantes :

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \quad , \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \quad , \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} ,$$

et l'effort tangentiel a pour composantes suivant les trois axes ces mêmes binômes, multipliés par un même coefficient  $\epsilon$  qui est à peu près indépendant de la pression normale  $p$ , mais qui dépend énormément de l'agitation qui règne au point considéré, lorsque  $u, v, w$  représentent, non pas les composantes réelles des vitesses des molécules, mais les composantes de la vitesse moyenne locale dont il sera question plus bas [après les équations (3)].

$$u' = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} + \frac{du}{dt}.$$

Mais les rapports  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  sont les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de la vitesse  $V$  ; en substituant, la valeur de  $u'$  devient :

$$(2) \quad u' = u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt},$$

et cette valeur portée dans la première équation (1) donne la première des suivantes dont les deux autres s'obtiennent de la même manière :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - u \frac{du}{dx} - v \frac{du}{dy} - w \frac{du}{dz} - \frac{du}{dt}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - u \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dy} - w \frac{dv}{dz} - \frac{dv}{dt}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - u \frac{dw}{dx} - v \frac{dw}{dy} - w \frac{dw}{dz} - \frac{dw}{dt}. \end{array} \right.$$

Ce sont les équations générales de l'hydrodynamique. Elles sont applicables, d'après ce qui vient d'être dit, aux mouvements réels des molécules d'un fluide parfait. Mais M. Boussinesq a montré (*Essai sur la théorie des Eaux courantes*, 1<sup>re</sup> partie) qu'elles s'appliquent aussi rigoureusement si, au lieu des mouvements réels, on considère les mouvements *moyens locaux* qui permettent de négliger les changements fréquents et rapides, les irrégularités locales que subissent les vitesses des différentes molécules.

M. Boussinesq a remarqué en effet que le mouvement des liquides est caractérisé par de pareils changements dans la grandeur et la direction de la vitesse en chaque point, mais que ces changements sont assujettis à une sorte de périodicité irrégulière en vertu de laquelle si l'on prend la moyenne des valeurs que reçoit, durant un temps assez court, la composante, parallèle à une direction donnée, de la vitesse en un point fixe, cette moyenne est fonction continue des coordonnées du point considéré. Elle est en outre indépendante du temps  $t$  lorsque le mouvement est dit *permanent*, et graduellement variable avec le temps dans le cas contraire.

Alors les équations (3) s'appliquent rigoureusement lorsque  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y représentent les valeurs moyennes des composantes de la vitesse ; et la résultante de ces trois moyennes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  est dite la *vitesse moyenne locale* au point considéré. Il est bien évident que cette vitesse moyenne locale est indépendante du choix des axes.

Désormais, ce sera toujours la vitesse moyenne locale, ou ses composantes, que nous aurons en vue.

Les équations (3) s'appliquent aussi d'une manière approximative aux fluidés naturels lorsque les mouvements sont lents, ou que l'on ne considère ces mouvements que dans une étendue restreinte de l'espace et du temps.

**17. Equation de continuité.** — Ces trois équations ne suffisent pas pour déterminer les cinq inconnues, il faut en trouver deux autres. La première se déduira de la nature même du fluide dont on étudie le mouvement. On aura, si c'est un liquide :

$$(4) \quad \rho = \text{constante},$$

et si c'est un fluide élastique :

$$(5) \quad \rho = Kp = \frac{kp}{1 + \alpha\theta},$$

$\alpha$  étant le coefficient de dilatation et  $\theta$  la température.

La dernière équation, dite de *continuité*, se trouvera en exprimant que le fluide reste continu, qu'il ne s'y forme pas de vides et que, pour chaque élément, la masse reste bien égale au produit du volume par la densité. On prendra pour cela, dans le fluide en mouvement, un volume en forme de parallélépipède rectangle,  $dx dy dz$ , ayant une position invariable et dont les faces sont traversées par le fluide qui entre et qui sort. Si l'on considère la face  $dy dz$  la plus rapprochée de l'origine,  $u$  étant la composante, normale à cette face, de la vitesse des molécules qui la traversent et  $\rho$  leur densité, la masse qui pénètre dans le parallélépipède à travers cette face, pendant le temps  $dt$ , est  $\rho u dy dz dt$  et la masse qui sort par la face opposée est égale à celle-ci augmentée de sa différentielle par rapport à  $x$ , ou bien à  $\left(\rho u + \frac{d\rho u}{dx} dx\right) dy dz dt$ . La masse comprise dans le parallélépipède s'est donc ainsi accrue de  $-\frac{d\rho u}{dx} dx dy dz dt$ . On peut appliquer le même calcul aux deux autres paires de faces, de sorte que l'accroissement de masse, pendant le temps  $dt$ , a en totalité pour valeur.

$$-\left(\frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz}\right) dx dy dz dt.$$

Le volume étant resté constant et égal à  $dx dy dz$ , cet accroissement de masse doit être égal au produit de ce volume par l'accrois-



sement de densité pendant le temps  $dt$ , lequel est  $\frac{d\rho}{dt} dt$ . Écrivant cette égalité et supprimant le facteur commun il reste l'équation de continuité :

$$(6) \quad \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} + \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

S'il s'agit d'un liquide, elle se simplifie en raison de ce que la densité  $\rho$  est constante. On a alors  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  et  $\rho$ , constant, sort du signe de différentiation en devenant facteur commun que l'on peut supprimer ; il reste ainsi

$$(7) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

pour l'équation de continuité applicable aux liquides.

Dans le cas d'un liquide, les équations (3), (4) et (7) ; dans le cas d'un gaz, les équations (3), (5) et (6), donnent les cinq équations cherchées entre les cinq inconnues,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$  et les variables indépendantes.

L'équation de continuité (7) peut se mettre sous une forme un peu différente lorsqu'il s'agit d'un *courant* liquide caractérisé par ce fait, que les molécules liquides qui traversent une section transversale plane ont toutes des vitesses normales à cette section et égales entre elles. Soit  $\omega$  l'aire de cette section transversale,  $U$  la vitesse commune de toutes les molécules qui la traversent et  $q = U\omega$  le débit ou la *dépense* d'eau du courant, à travers cette section, par unité de temps. Le volume entré par cette section dans le temps  $dt$  est  $qdt$ , le volume sorti par la section suivante, distante de  $ds$  de la première, est  $\left(q + \frac{dq}{ds} ds\right) dt$ , de sorte que le volume compris entre ces deux sections infiniment voisines a augmenté, pendant le même temps, de  $-\frac{dq}{ds} dsdt$ . Cette augmentation de volume ne peut être que le résultat de l'accroissement de la section transversale  $\omega$  laquelle est devenue  $\left(\omega + \frac{d\omega}{dt} dt\right)$ , ce qui correspond à une augmentation de volume de  $\frac{d\omega}{dt} dt ds$ . Égalant ces deux expressions, supprimant le facteur commun  $dt ds$ , il vient

$$(8) \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{dq}{ds} = 0,$$

qui exprime sous une nouvelle forme la condition de continuité et qui s'applique à divers problèmes sur les cours d'eau.

**18. Autre forme des équations générales.** — L'équation de continuité (7) permet de donner aux équations générales (3) une forme plus commode pour les applications. Dans l'expression (2) de l'accélération  $u'$ , remplaçons  $\frac{du}{dx}$  par sa valeur tirée de l'équation de continuité (7) ou par  $-\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$ , nous obtenons :

$$u' = \frac{du}{dt} - u\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}.$$

Mais, nous avons, identiquement :

$$u \frac{dv}{dy} - v \frac{du}{dy} = u^2 \frac{d \cdot \frac{v}{u}}{dy}, \text{ et } u \frac{dw}{dz} - w \frac{du}{dz} = u^2 \frac{d \cdot \frac{w}{u}}{dz};$$

Il en résulte, pour  $u'$  la valeur :

$$u' = \frac{du}{dt} - u^2 \left( \frac{d \cdot \frac{v}{u}}{dy} + \frac{d \cdot \frac{w}{u}}{dz} \right),$$

et cette valeur, portée dans la première équation (1) donne la première des suivantes, dont les deux autres s'obtiennent par un calcul absolument identique :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - \frac{du}{dt} + u^2 \left( \frac{d \cdot \frac{v}{u}}{dy} + \frac{d \cdot \frac{w}{u}}{dz} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - \frac{dv}{dt} - u^2 \frac{d \cdot \frac{v}{u}}{dx} + v^2 \frac{d \cdot \frac{v}{u}}{dy}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - \frac{dw}{dt} - u^2 \frac{d \cdot \frac{w}{u}}{dx} + w^2 \frac{d \cdot \frac{w}{u}}{dz}. \end{array} \right.$$

Lorsqu'il s'agit d'un courant liquide caractérisé par ce fait que les vitesses des diverses particules sont sensiblement parallèles, les

composantes  $v$  et  $w$  de la vitesse sont petites par rapport à la composante  $u$  dirigée dans le sens du mouvement, de sorte que leurs carrés  $v^2$  et  $w^2$  peuvent être négligés par rapport à  $u^2$ . Le dernier terme de chacune des deux dernières équations (9) peut alors être supprimé avec approximation suffisante.

**19. Equation fondamentale de l'hydraulique.** — On peut, comme nous l'avons fait au n° 6, réunir en une seule les trois équations générales (1) du n° 16 (p. 22). Il suffit, pour cela, de les additionner après les avoir multipliées respectivement par  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ; mais, au lieu de prendre quelconques ces trois multiplicateurs, on peut les prendre précisément égaux aux projections du déplacement réel que subit une molécule pendant le temps  $dt$ , c'est-à-dire prendre  $dx = udt$ ,  $dy = vdt$ ,  $dz = wdt$ . On trouve ainsi :

$$\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) - \rho (uu' + vv' + ww') dt.$$

Le premier membre n'est plus, ici, la différentielle totale  $dp$  de la pression  $p$ , car cette pression est fonction, à la fois, du temps  $t$  et des trois coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et l'on a

$$dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz + \frac{dp}{dt} dt;$$

ce premier membre est donc égal à  $dp - \frac{dp}{dt} dt$ . D'autre part, on a  $u'dt = du$ ,  $v'dt = dv$ ,  $w'dt = dw$ , de sorte qu'en substituant, on obtient

$$\frac{1}{\rho} \left( dp - \frac{dp}{dt} dt \right) = Xdx + Ydy + Zdz - (udu + vdv + wdw).$$

Puisque  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont les projections de la vitesse  $V$  sur les trois axes, on a  $u^2 + v^2 + w^2 = V^2$  ce qui donne  $udu + vdv + wdw = VdV$  et par suite :

$$(10) \quad \frac{1}{\rho} \left( dp - \frac{dp}{dt} dt \right) = Xdx + Ydy + Zdz - VdV,$$

équation analogue à l'équation générale (1) de l'hydrostatique.

On peut donner, à cette équation générale (10) une autre forme quelquefois plus commode à employer. Si l'on convient que les caractéristiques  $d$  de différentiation représentent, non pas les différentielles totales des quantités  $p$ ,  $V$ , fonctions des quatre variables

$x, y, z$ , et  $t$ , mais les différentielles par rapport aux trois variables  $x, y, z$  seulement, la notation  $dp$  exprimera ce qui se trouve dans la parenthèse du premier membre. c'est-à-dire la différentielle totale de  $p$  diminuée de  $\frac{dp}{dt} dt$ . Inversement, la notation  $dV$  n'exprimera plus la différentielle totale de la vitesse, qui figure dans le dernier terme, mais, avec cette nouvelle notation, cette différentielle totale devra être écrite  $dV + \frac{dV}{dt} dt$ , puisque  $dV$  n'exprime plus que la différentielle par rapport aux trois variables  $x, y, z$ . Avec ces notations, la formule fondamentale (10) devient :

$$\frac{1}{\rho} dp = Xdx + Ydy + Zdz - V \left( dV + \frac{dV}{dt} dt \right),$$

ou bien, en effectuant le produit indiqué et remarquant que  $Vdt$  n'est autre chose que l'élément d'arc  $ds$  de la trajectoire d'une molécule :

$$(10 \text{ bis}) \quad \frac{1}{\rho} dp = Xdx + Ydy + Zdz - VdV - \frac{dV}{dt} ds.$$

Mais lorsqu'on emploie cette équation, il convient de se rappeler la signification particulière des notations  $dp$  et  $dV$  qui y figurent.

L'équation qui précède, sous sa forme primitive (10) ou sous la forme (10 bis), est l'équation fondamentale de l'hydraulique ; avec l'équation de continuité (7), elle permet de résoudre tous les problèmes relatifs aux mouvements des liquides, lorsqu'on y fait abstraction des frottements.

## § 2.

### MOUVEMENT PERMANENT

**20. Mouvement permanent.** — On dit que le mouvement d'un fluide est *permanent* lorsque les molécules qui se succèdent en un point donné quelconque y sont toutes animées de la même vitesse en grandeur et en direction, y sont soumises à la même pression et y ont la même densité. Cela veut dire que les quantités  $V, u, v, w, p, \rho$  sont indépendantes du temps et ne dépendent plus que des coordonnées des divers points.

Il suffit, pour rendre les équations applicables au mouvement

permanent, d'y faire égales à zéro les dérivées par rapport à  $t$  de ces six quantités. L'équation fondamentale (10) devient ainsi :

$$(11) \quad \frac{dp}{\rho} - (Xdx + Ydy + Zdz) + VdV = 0.$$

Si on l'applique, par exemple, à un fluide élastique pesant, l'axe des  $z$  étant pris vertical et dirigé de bas en haut, on a d'abord, d'après (5),  $\rho = kp$ , et  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -g$ . Elle devient :

$$\frac{dp}{kp} + g dz + VdV = 0,$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{k} \text{Log } p + gz + \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

S'il s'agit d'un liquide pesant,  $\rho$  est constant et l'on a

$$(12) \quad \frac{dp}{\rho} + g dz + VdV = 0,$$

ou bien

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

**21. Théorème de Bernoulli. Plan de charge. Niveau piézométrique.** — Divisons par  $g$  tous les termes de cette équation, désignons par  $H$  la constante qui se trouvera alors dans le second membre et remplaçons par  $\Pi$  le produit  $\rho g$ , nous aurons

$$(13) \quad z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = H.$$

Cette équation constitue le théorème de Bernoulli. Elle est susceptible, comme l'équation analogue du n° 8, d'une interprétation géométrique. Si, en chaque point d'un liquide parfait en mouvement permanent, on élève une ordonnée verticale égale à la hauteur  $\frac{p}{\Pi}$  représentative de la pression qui s'y exerce, puis une autre ordonnée égale à la hauteur  $\frac{V^2}{2g}$  due à la vitesse de cette molécule, les extrémités supérieures de toutes ces ordonnées se trouveront dans un même plan horizontal défini par l'ordonnée  $H$  et que l'on appelle le

*plan de charge*. Il serait sans doute préférable de l'appeler plan de charge *dynamique* pour le distinguer du plan de charge *statique* ou d'équilibre que nous avons considéré au n° 8 ; mais cette dénomination n'est pas en usage. La somme  $\left(z + \frac{p}{\Pi}\right)$  des deux premiers termes de l'équation (13) est la hauteur, au-dessus du plan de comparaison, du niveau *piézométrique*.

Si l'on suppose placé, dans le liquide en mouvement, un tube vertical AB (fig. 15) ouvert aux deux bouts, appelé *piézomètre*, le niveau dans ce tube s'élèvera à une hauteur telle que la pression due à cette colonne liquide au point A, placé à une hauteur  $z$  au-dessus du plan de comparaison, équilibre la pression  $p$  qui existe en ce même point du liquide en mouvement. L'extrémité supérieure B du liquide dans ce tube sera donc, au-dessus du plan de comparaison, à une hauteur  $z + \frac{p}{\Pi}$  c'est-à-dire au niveau piézométrique. La colonne AB qui mesure effectivement la pression au point A s'appelle la *colonne piézométrique* et sa hauteur est égale à  $\frac{p}{\Pi}$ .

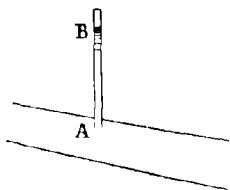


Fig. 15.

Deux tubes piézométriques, réunis à leur partie supérieure, permettent d'évaluer la différence de pression entre deux points voisins, ils constituent le piézomètre différentiel de Bélanger.

Si l'on représente par une seule lettre  $h$  la hauteur du niveau piézométrique, qui est constante dans un liquide en équilibre, mais qui est variable dans un liquide en mouvement, l'équation (13) devient  $h + \frac{V^2}{2g} = H$  ; et en se reportant à ce qui a été dit aux nos 6 et 8, on reconnaîtra que si l'on considère un point matériel d'un poids égal à l'unité, soumis aux mêmes forces que le fluide et occupant successivement les positions d'une même molécule liquide avec les mêmes vitesses, l'énergie actuelle ou cinétique de ce point étant égale à  $\frac{V^2}{2g}$ , son énergie potentielle sera proportionnelle à la hauteur piézométrique  $h$ , telle qu'elle vient d'être définie.

Si la section du courant liquide varie comme elle ferait, par exemple, si l'écoulement avait lieu dans un conduit de dimension variable, la vitesse du liquide doit, en chaque point, se modifier de telle manière que le volume débité à travers chacune des sections

transversales, dans l'unité de temps, soit le même partout. La vitesse varie donc en sens inverse de l'aire de la section transversale ; elle est moindre dans la section la plus large B (fig. 16) que dans les sections plus étroites A, C. Si donc l'on place des piézomètres aux points A, B, C, le niveau piézométrique en B sera plus élevé qu'en A et en C. L'écoulement étant supposé avoir lieu dans le sens de la flèche, le liquide qui va de A vers B rencontre devant lui une pression plus grande qu'à l'arrière et il ne surmonte cette différence de

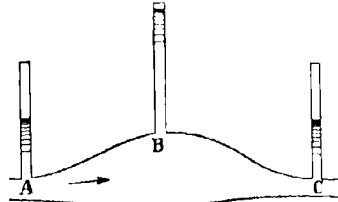


Fig. 16.

pression qu'en perdant un peu de sa vitesse : une portion de son énergie actuelle se transforme en énergie potentielle. L'effet contraire se produit lorsque le liquide va de B vers C ; la pression qu'il a devant lui est moindre que celle qui le pousse, sa vitesse augmente, et cette augmentation de son énergie actuelle ou cinétique est due à la diminution de la pression ou de son énergie potentielle.

La façon dont nous avons démontré l'équation fondamentale (10) du n° 19 (page 27), en prenant pour  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  les projections du déplacement réel d'une molécule pendant le temps  $dt$ , nous montre que cette équation, et par suite celle de Bernoulli (13) que nous en avons déduite, n'est applicable qu'à un même *filet* liquide, c'est-à-dire aux points situés sur la trajectoire d'une même molécule liquide.

Ces équations sont encore applicables lorsque, au lieu des vitesses réelles des molécules, on considère leurs vitesses moyennes locales définies comme plus haut. Alors, ce que l'on appelle *filet* liquide, ce n'est plus la trajectoire réelle d'une molécule, qui présenterait des sinuosités nombreuses et des changements brusques de direction, mais c'est une courbe telle qu'en tous ses points elle soit tangente à la direction de la vitesse moyenne locale en ce point.

C'est toujours ce que nous aurons en vue lorsque nous parlerons de *filet* liquide ; et nous assimilerons toujours le mouvement réel du liquide à son mouvement moyen en admettant, pour simplifier le langage, que les molécules suivent effectivement les filets liquides tels qu'ils viennent d'être définis.

Le théorème de Bernoulli, qui est d'une grande utilité en hydraulique, peut être démontré directement au lieu d'être déduit, comme ci-dessus, des équations générales de l'hydrodynamique. C'est, en somme, une application du théorème des forces vives, et il peut se

déduire simplement de ce théorème de mécanique générale. Soit MN la trajectoire d'une molécule liquide ; par le point M (fig. 17), menons-lui un plan normal dans lequel nous prendrons une aire AB ayant son centre de gravité en M.

Nous admettrons que dans l'étendue très petite (ou même infiniment petite) de l'aire AB les vitesses soient normales à ce plan et



Fig. 17.

que les trajectoires s'écartent très peu de la ligne MN de manière à former une sorte de cylindre à section transversale très petite et ayant pour axe cette ligne MN. Le liquide

contenu dans ce cylindre sera ce que nous avons appelé un filetage liquide.

Prenons une autre section CD de ce filetage au point N, et appliquons, au liquide compris entre AB et CD, le théorème des forces vives.

Soient  $V_0$  et  $p_0$ ,  $V$  et  $p$  la vitesse et la pression dans la section AB et dans la section CD, dont nous désignerons les aires respectivement par  $\omega_0$  et  $\omega$ . Considérons le mouvement pendant un temps infiniment petit  $dt$  au bout duquel le volume liquide d'abord placé en ABCD sera venu en A'B'C'D'. Le mouvement étant, par hypothèse, permanent, toutes les molécules comprises entre les plans A'B' et CD auront les mêmes vitesses au commencement et à la fin de l'intervalle de temps, de sorte que l'accroissement de la force vive du système proviendra seulement de la différence entre les forces vives des portions CDC'D' et ABA'B'. Si nous appelons  $m$  la masse de chacune d'elles, l'accroissement de demi-force vive sera  $\frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2)$ .

De même dans le calcul du travail de la pesanteur nous n'aurons pas à tenir compte de la partie commune A'BCD, et le travail de la pesanteur sera le même que si la masse liquide ABA'B' était venue en CDC'D'. Le fluide étant incompressible et ayant, par suite, conservé le même volume, le travail des forces intérieures est nul si nous supposons d'ailleurs la fluidité parfaite. Il en est de même du travail des forces extérieures sur le contour du filetage ABCD puisque les pressions sont normales aux déplacements.

Il reste donc à évaluer le travail de la pesanteur et celui des pressions sur les faces extrêmes AB, CD. En appelant  $x_0$  et  $x$  les hauteurs des points M et N au-dessus d'un plan horizontal inférieur, le travail de la pesanteur sera égal au poids du volume ABA'B' multiplié par  $x_0 - x$ . Or, ce volume a pour expression  $V_0 \omega_0 dt$  ou  $V \omega dt$



suivant qu'on le mesure en ABA'B' ou en CDC'D'. On en déduit d'abord

$$V_0 \omega_0 = V \omega.$$

La masse de ce volume étant  $m$ , son poids est  $mg$  et le travail de la pesanteur est  $mg(x_0 - x)$ . La pression totale sur AB est  $p_0 \omega_0$  et son travail, lorsque AB venant en A'B' se déplace de  $V_0 dt$ , est  $p_0 \omega_0 V_0 dt$ ; or,  $V_0 \omega_0 dt$  est égal au volume ABA'B' et par conséquent à  $\frac{mg}{\Pi}$ , le travail de la pression  $p_0$  est ainsi  $p_0 \frac{mg}{\Pi}$ ; de même, le travail de la pression  $p$  sur CD est égal à  $-p \omega V dt = -p \frac{mg}{\Pi}$ . Il en résulte l'équation

$$\frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2) = mg(x_0 - x) + (p_0 - p) \frac{mg}{\Pi}.$$

En divisant par  $mg$  et groupant les termes à même indice, nous obtenons

$$x + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = x_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{V_0^2}{2g} = \text{const.}$$

c'est-à-dire l'équation (13) ou l'équation de Bernoulli.

**22. Extension de ce théorème.** — Le théorème de Bernoulli n'est applicable qu'au fluide parfait, dans lequel les actions tangentielles ou frottements des molécules les unes sur les autres n'existent pas. Dans tous les fluides naturels, où ces frottements ne sont pas négligeables, il ne donne qu'une approximation qui est généralement éloignée de la vérité, mais qui, cependant, s'en rapproche assez, dans quelques cas particuliers, pour qu'on puisse l'appliquer alors aux problèmes pratiques.

En général, ces frottements des molécules liquides les unes sur les autres produisent un travail négatif ou résistant qui devrait figurer dans le second membre de l'équation des forces vives que l'on vient d'écrire, et dont l'addition aurait pour conséquence de donner à la vitesse  $V$  au point N une valeur inférieure à celle qui résulterait de cette équation. Il s'en suit que la somme  $x + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g}$ , au lieu d'être constante, va en diminuant progressivement à mesure qu'on s'éloigne en suivant la trajectoire. On peut écrire alors

$$x + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = F(s).$$

La hauteur du plan de charge n'est plus la même en tous les points, elle est exprimée par  $F(s)$ . La différence de hauteur du plan de charge en deux points  $F(s_0) - F(s)$  est dite la *perte de charge* entre ces deux points. On voit que la perte de charge mesure la portion d'énergie absorbée par les frottements.

Il y a certaines circonstances où cette perte de charge est très petite et peut être négligée, mais elle n'en existe pas moins et ce n'est jamais que d'une façon approximative que l'on applique le théorème de Bernoulli aux fluides naturels lorsque l'on n'en tient pas compte.

Lorsque, par exemple, les mouvements sont très lents, l'effort tangentiel de frottement, qui est proportionnel à la vitesse relative, est très faible et il en est de même du travail de cette résistance passive. C'est ce que l'on exprime en disant que dans un liquide ou dans une portion de liquide où les mouvements sont lents, la pression varie à très peu près suivant la loi hydrostatique. Il en est de même, quelles que soient les vitesses des molécules, lorsqu'elles sont toutes égales et parallèles entre elles ; la vitesse relative de deux molécules quelconques est nulle et par suite les efforts tangentiels n'existent pas, la pression est, en chaque point, normale à la section sur laquelle elle s'exerce, ce qui caractérise l'état hydrostatique.

Il peut arriver que, sur tout le pourtour d'un filet liquide dont les molécules sont animées de vitesses parallèles, la pression soit la même ; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque ce filet s'écoule à travers l'atmosphère sous la forme de ce que l'on appelle une *veine* liquide. On admet alors, avec une approximation suffisante, que la pression est la même et égale à celle de l'atmosphère en tous les points d'une même section transversale normale aux vitesses.

C'est à la faveur de ces approximations que l'on peut appliquer quelquefois le théorème de Bernoulli au mouvement des liquides naturels, mais on ne peut le faire, entre deux points donnés, qu'après s'être assuré qu'entre ces deux points, il n'y a pas de cause spéciale de *perte de charge* appréciable et que l'effet des frottements intérieurs peut être négligé.

**23. Généralités sur le mouvement permanent des courants liquides.** — L'équation fondamentale (10) ou (10 bis) établie au n° 19 (page 27), de même que les équations (3), desquelles on l'a déduite, s'applique aux mouvements quelconques d'un fluide parfait, c'est-à-dire à tous les mouvements fluides dans lesquels on peut faire abstraction des frottements. Ces équations s'appliqueront

de même aux fluides naturels si l'on fait entrer, dans les composantes des forces qui y figurent, celles des forces de frottement tant intérieur qu'extérieur du liquide sur lui-même ou sur les parois solides avec lesquelles il est en contact.

Les mouvements liquides les plus ordinaires ou tout au moins ceux dont l'étude a le plus d'applications pratiques sont ceux dans lesquels les diverses molécules ont des vitesses moyennes locales à peu près parallèles ; l'écoulement se fait alors par filets fluides. Ce genre de mouvement se produit, par exemple, dans un tuyau dont l'axe est rectiligne ou très peu courbe, dans les canaux découverts dont l'axe est à peu près rectiligne et dont la section transversale reste à peu près constante. C'est à ce genre de masse liquide en mouvement que l'on donne le nom de *courant liquide*, et il est intéressant d'en faire une étude spéciale.

**24. Quantité de mouvement et force vive d'un courant liquide en fonction de la vitesse moyenne.** — Soit, dans un pareil courant,  $\omega$  l'aire de la section transversale,  $d\omega$  son élément,  $u$  la vitesse moyenne locale correspondant à cet élément, supposée parallèle à la direction du mouvement, et  $U$  la vitesse moyenne dans toute la section, définie par l'équation

$$\mathfrak{N}u = U = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} u d\omega,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments  $d\omega$  de la section transversale, et  $\mathfrak{N}$  désignant la moyenne de la quantité qui suit cette lettre. Appelons encore  $Q$  le débit du courant liquide ou le volume écoulé dans l'unité de temps et  $dQ$  son élément, ou bien posons

$$dQ = u d\omega$$

et 
$$Q = U\omega = \int_{\omega} u d\omega.$$

Proposons-nous de comparer la quantité de mouvement et la force vive réelles du courant liquide à ce qu'elles seraient si tous les filets avaient, au lieu de leurs vitesses individuelles  $u$ , la vitesse moyenne  $U$ . En appelant toujours  $\Pi$  le poids de l'unité de volume du liquide, la masse écoulée pendant l'unité de temps à travers l'élément  $d\omega$  est  $\frac{\Pi}{g} dQ$ , la quantité de mouvement et la demi-force vive correspondant au liquide ayant passé par cet élément seront respectivement

$$\frac{\Pi}{g} dQ \cdot u \quad \text{et} \quad \frac{\Pi}{g} dQ \cdot \frac{u^2}{2}.$$

En faisant la somme des quantités analogues pour tous les éléments  $d\omega$ , nous aurons la quantité de mouvement et la demi-force vive réelles du courant liquide, qui seront, après avoir remplacé  $dQ$  par sa valeur  $u d\omega$  :

$$\frac{\Pi}{g} \int_{\omega} u^2 d\omega \quad \text{et} \quad \frac{\Pi}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega.$$

Si tous les filets liquides avaient la vitesse moyenne  $U$ , les quantités correspondantes seraient  $\frac{\Pi}{g} QU$  et  $\frac{\Pi}{g} Q \frac{U^2}{2}$ , ou bien, en mettant pour  $Q$  sa valeur  $U\omega$  :

$$\frac{\Pi}{g} U^2 \omega \quad \text{et} \quad \frac{\Pi}{2g} U^3 \omega.$$

Nous avons ainsi à comparer, pour les quantités de mouvement, les quantités  $\int_{\omega} u^2 d\omega$  et  $U^2 \omega$ , et pour les forces vives  $\int_{\omega} u^3 d\omega$  et  $U^3 \omega$ .

Or, désignons par  $u_1$  l'excès, positif ou négatif, de la vitesse individuelle  $u$  d'un filet liquide quelconque sur la vitesse moyenne  $U$ , ou posons

$$u = U + u_1$$

nous en déduirons successivement

$$u^2 = U^2 + 2Uu_1 + u_1^2$$

$$\text{et} \quad u^3 = U^3 + 3U^2u_1 + 3Uu_1^2 + u_1^3.$$

Multiplions par  $d\omega$  chacun des termes de ces trois équations et intégrons-les dans toute l'étendue de la section transversale  $\omega$  ; la première, vu que  $\int d\omega = \omega$ , nous donne

$$\int u d\omega = U\omega + \int u_1 d\omega ;$$

ce qui, eu égard à la définition de la vitesse moyenne  $U$ , nous conduit à

$$\int u_1 d\omega = 0.$$

Les deux autres équations, intégrées en tenant compte de ce résultat, fournissent

$$\int u^2 d\omega = U^2 \omega + \int u_1^2 d\omega,$$

$$\int u^3 d\omega = U^3 \omega + 3U \int u_1^2 d\omega + \int u_1^3 d\omega.$$

Par conséquent, le rapport de la quantité de mouvement réelle à la quantité de mouvement correspondant à la vitesse moyenne est

$$\frac{\int u^2 d\omega}{U^2 \omega} = 1 + \frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2 \omega},$$

et le rapport des forces vives

$$\frac{\int u^3 d\omega}{U^3 \omega} = 1 + 3 \frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2 \omega} + \frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3 \omega}.$$

Quel que soit le signe de  $u_1$ , le carré  $u_1^2$  est toujours positif et l'intégrale  $\int u_1^2 d\omega$  est toujours différente de zéro et positive. Il en résulte que la quantité de mouvement réelle *dépasse toujours* la quantité de mouvement correspondant à la vitesse moyenne, et si l'on pose

$$\eta = \frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2 \omega},$$

le rapport de ces deux quantités de mouvement sera  $1 + \eta$ , le nombre désigné par  $\eta$  étant toujours positif.

On peut, eu égard à la signification donnée plus haut à la lettre  $\mathfrak{R}$ , exprimer ce résultat de la manière suivante :

$$\mathfrak{R}u^2 = (1 + \eta) U^2.$$

En ce qui est du rapport des forces vives, nous pouvons remarquer que le dernier terme  $\frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3 \omega}$  est toujours petit par rapport au précédent  $\frac{\int u_1^2 d\omega}{U^2 \omega}$ , car, d'abord,  $u_1$  est généralement une petite fraction de  $U$ , et la première de ces deux expressions est de l'ordre de  $\left(\frac{u_1}{U}\right)^3$ , tandis que la seconde n'est que de l'ordre de  $\left(\frac{u_1}{U}\right)^2$ ; mais, de plus, les valeurs de  $u_1$  sont tantôt positives et tantôt négatives, puisque  $\int u_1 d\omega = 0$ , l'intégrale  $\int u_1^3 d\omega$  comprend donc des ter-

mes positifs et des termes négatifs, tandis que les éléments de  $\int u_1^2 d\omega$  sont tous de même signe. Pour ces deux motifs le terme  $\frac{\int u_1^3 d\omega}{U^3 \omega}$  est négligeable devant les autres et le rapport des forces vives se réduit approximativement à

$$\frac{\int u^2 d\omega}{U^3 \omega} = 1 + 3\eta.$$

Nous le désignerons par une seule lettre  $\alpha = 1 + 3\eta$  et nous voyons déjà que le rapport des forces vives, toujours plus grand que l'unité, comme celui des quantités de mouvement, diffère de l'unité d'une quantité égale au triple de celle dont cet autre rapport la dépasse.

Ce nouveau résultat s'exprimera aussi simplement par la relation :

$$\mathfrak{M}u^3 = \alpha U^3.$$

Ainsi, et c'est là un fait remarquable sur lequel on ne saurait trop attirer l'attention, par le seul fait de l'inégalité des vitesses dans un courant liquide, la quantité de mouvement et la force vive de ce courant sont *toujours plus grandes* que ce qu'elles seraient si tous les filets liquides avaient la vitesse moyenne.

Quant aux valeurs des coefficients  $\eta$  et  $\alpha = 1 + 3\eta$ , on conçoit qu'elles varient : elles dépendent, en effet, du degré d'inégalité des vitesses du courant ; et l'on trouvera plus loin, au n<sup>o</sup> 108, leurs expressions en fonction de l'excès, sur l'unité, du rapport de la vitesse maximum à la vitesse moyenne. M. Bazin a trouvé <sup>1</sup>  $\alpha = 1,038$  pour un courant s'effectuant dans un canal en planches très unies, et  $\alpha = 1,122$  dans un canal en planches recouvertes de liteaux espacés de 0<sup>m</sup>,05 et destinés à constituer une paroi très rugueuse. Ces valeurs correspondent à  $\eta = 0,013$  et  $\eta = 0,41$ . On admet ordinairement, en moyenne, pour les conditions ordinaires, la valeur  $\eta = 0,037$  ou  $\alpha = 1,111 = \frac{10}{9}$ , mais ce n'est évidemment qu'une approximation destinée à suppléer à l'ignorance où l'on est, le plus ordinairement, de la véritable valeur de ce rapport.

Dans bien des cas, aussi, on ne tient aucun compte des différences qui viennent d'être évaluées et l'on suppose  $\eta = 0$  ou  $\alpha = 1$ .

### 25. Equation générale du mouvement permanent.

— Proposons-nous, maintenant, d'étudier le mouvement permanent

1. Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts.

d'un courant liquide défini comme au n° 23, c'est-à-dire présentant une section transversale constante ou très lentement variable, et un axe rectiligne ou très peu courbe de manière que toutes les vitesses individuelles des divers filets liquides puissent être regardées comme parallèles.

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ ; plaçons l'origine en un point quelconque de la section transversale et dirigeons l'axe des  $x$  parallèlement à la direction commune de toutes les vitesses des molécules liquides, ou perpendiculairement au plan de la section transversale; menons, dans cette section, l'axe des  $y$  horizontal et l'axe des  $z$  perpendiculaire aux deux autres. Désignons, comme plus haut, par  $u, v, w$  les composantes, suivant les trois axes, de la vitesse d'une molécule quelconque; d'après ce que nous venons de supposer, les composantes  $v$  et  $w$  seront nulles ou négligeables; il en sera de même des dérivées, par rapport à la coordonnée  $x$ , de ces mêmes composantes. Toutes les dérivées par rapport au temps  $t$  sont nulles puisque le mouvement est permanent. Il en résulte que  $v'$  et  $w'$  sont également nulles ou négligeables et que les équations (1) du n° 16, page 22, deviennent

$$(14) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = (X - u) \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z. \quad 1$$

1. Ces équations (14) supposent, comme les équations (1) du n° 16 desquelles elles sont déduites, le fluide parfait, c'est-à-dire qu'elles font abstraction du frottement. Ce n'est donc que d'une façon qui peut paraître abusive qu'on les applique, ici, en  $y$  faisant entrer, après coup, le frottement des molécules liquides les unes sur les autres et sur les parois. Il serait beaucoup plus correct, mais moins simple, d'établir des équations générales en tenant compte immédiatement de cette résistance. Je vais essayer d'indiquer, d'après M. Boussinesq, la marche qu'il conviendrait de suivre.

Si l'on considère, dans un fluide quelconque en mouvement, un parallélépipède élémentaire  $dx dy dz$ , et si, conformément aux notations de Lamé, devenues classiques et adoptées dans toutes les questions analogues, on appelle  $N_1, N_2, N_3$  les trois composantes normales,  $T_1, T_2, T_3$  les trois composantes tangentielles égales deux à deux, des forces exercées sur les faces de ce parallélépipède par le corps dont il fait partie (on peut, pour la définition de ces forces  $N$  et  $T$  se reporter, par exemple à l'ouvrage, intitulé *Résistance des Matériaux*, 2<sup>e</sup> édition, que j'ai publié dans l'Encyclopédie des Travaux publics), les équations d'équilibre dynamique de ce parallélépipède seront :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_2}{dy} + \frac{dT_3}{dz} + \rho (X - u) &= 0 \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \rho (Y - v) &= 0 \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + \rho (Z - w) &= 0 \end{aligned}$$

X, Y, Z représentent les projections, sur les trois axes, des forces extérieures agissant sur la molécule liquide. Ces forces sont la pesanteur et le frottement. Or, les trajectoires étant supposées sensiblement parallèles à l'axe des  $x$ , l'effort de frottement, dû à la vitesse relative ou à la différence des vitesses de deux molécules voisines, sera lui-même dirigé en sens inverse de cette vitesse relative, c'est-à-dire à très peu près parallèlement à l'axe des  $x$ . Ses projections, sur les axes des  $y$  et des  $z$ , seront donc nulles, ou négligeables par rapport à sa projection sur l'axe des  $x$  que nous appellerons — F. Si nous désignons par I l'inclinaison de l'axe des  $x$  sous l'horizon, les composantes de la pesanteur suivant les trois axes seront  $g \sin I$ , 0,  $g \cos I$ , et les équations (14) deviendront :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = g \sin I - F - u' \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = 0 \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = g \cos I.$$

Multiplions les deux dernières respectivement par  $\rho dy$  et  $\rho dz$ , ajoutons-les et intégrons dans l'étendue d'une même section trans-

Quant aux forces N, T, il a été dit, au n° 16 (en note) que les efforts tangentiels T étaient égaux aux produits des composants de vitesses de glissement par un coefficient de frottement  $\varepsilon$  dont il sera parlé plus loin. Par conséquent :

$$T_1 = \varepsilon \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \quad , \quad T_2 = \varepsilon \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \quad , \quad T_3 = \varepsilon \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)$$

Pour les forces normales N, on démontre facilement qu'elles ont pour expression :

$$N_1 = -p + 2\varepsilon \frac{du}{dx} \quad , \quad N_2 = -p + 2\varepsilon \frac{dv}{dy} \quad , \quad N_3 = -p + 2\varepsilon \frac{dw}{dz}.$$

$p$  étant la pression au point considéré. Ces valeurs sont indépendantes du choix des axes. Lorsqu'il s'agit d'un courant liquide et que l'on prend, comme d'usage, l'axe des  $x$  suivant la direction du courant, les dérivées de  $v$  et de  $w$  sont négligeables, et on peut même laisser de côté le produit, par  $\varepsilon$  de la dérivée  $\frac{du}{dx}$ , laquelle, en vertu de l'équation (7) page 25 est du même ordre que les deux autres que l'on néglige. Alors ces expressions se réduisent à :

$$N_1 = N_2 = N_3 = -p \quad , \quad T_1 = 0 \quad , \quad T_2 = \varepsilon \frac{du}{dx} \quad , \quad T_3 = \varepsilon \frac{du}{dy}$$

et les trois équations générales ci-dessus deviennent :

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{d}{dy} \varepsilon \frac{du}{dy} + \frac{d}{dx} \varepsilon \frac{du}{dx} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - u' \quad ;$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - v' \quad ; \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = Z - w'$$

c'est le premier terme de la première que nous appelons simplement F dans le texte ci-dessus.



versale, depuis le point où cette section est percée par l'axe des  $x$ , où l'on a  $y = 0, z = 0$ , et où il existe une pression que nous appellerons  $p_0$ , jusqu'à un point quelconque où la pression est  $p$ ; nous aurons :

$$(15) \quad p = p_0 + \rho g z \cos I.$$

Cette formule montre que la pression varie, dans une même section normale aux trajectoires, suivant la loi hydrostatique, et que, par suite, s'il y a une surface libre, son profil en travers est horizontal.

Elle donne aussi  $\frac{dp}{dx} = \frac{dp_0}{dx}$ , et en portant cette valeur dans la première des trois équations précédentes, nous obtenons :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} = g \sin I - F - u'.$$

Appelons  $d\omega$  un élément superficiel quelconque, multiplions tous les termes de cette équation par  $d\omega$  et faisons la somme de toutes les équations semblables écrites pour les divers éléments  $d\omega$  de la section totale  $\omega$ ; nous aurons, en remarquant que  $\frac{dp_0}{dx}$  et  $\sin I$  sont des facteurs constants :

$$\omega \left( g \sin I - \frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} \right) = \int_{\omega} F d\omega + \int_{\omega} u' d\omega.$$

$F$  étant l'effort du frottement pour l'unité de masse,  $F d\omega$  est l'effort sur le filet de section  $d\omega$  et sur une longueur égale à l'unité. Les efforts sur les divers filets étant réciproques et s'exerçant d'un filet sur l'autre, la somme de leurs projections sur l'axe des  $x$  est nulle à l'exception de celles des frottements qui proviennent de la paroi, dont chacun, s'exerçant sur un élément  $d\chi$  du périmètre mouillé, est proportionnel au carré de la vitesse  $u_0$  de la molécule en ce point<sup>1</sup> et peut être représenté par  $g B u_0^2 d\chi$ , en appelant  $B$  un coefficient numérique à déterminer. On a ainsi :

$$\int_{\omega} F d\omega = \int_{\chi} g B u_0^2 d\chi.$$

1. La proportionnalité de l'effort de frottement au carré,  $u_0^2$ , de la vitesse des molécules liquides qui passent contre la paroi peut se justifier en remarquant que cet effort doit être proportionnel au nombre de ces molécules qui viennent heurter la paroi dans un temps donné, et à la vitesse  $u_0$  avec laquelle elles la rencontrent. Le nombre des molécules étant lui-même proportionnel à  $u_0$ , l'effort se trouve être proportionnel à  $u_0^3$ .

Ce coefficient B lui-même n'est probablement pas constant. Mais, au lieu de prendre la vitesse à la paroi  $u_0$ , on peut la remplacer par une certaine fonction de la vitesse moyenne U, ou, plus généralement, si l'on suppose calculée dans chaque section l'intégrale

$\int_{\chi} B u_0^2 d\chi$  et qu'on en divise la valeur par le périmètre mouillé  $\chi$ , on pourra considérer le quotient comme étant une fonction  $\varphi(U)$  de la vitesse moyenne U, et écrire par conséquent :

$$\int_{\omega} F d\omega = g\chi \cdot \varphi(U).^1$$

Reste à calculer l'intégrale  $\int_{\omega} u' d\omega$ . On a  $u' = \frac{du}{dt}$  et  $u = \frac{dx}{dt}$ , d'où, en éliminant  $dt$  :  $u' = u \frac{du}{dx}$  et  $u' d\omega = \frac{u du d\omega}{dx} = \frac{(u d\omega) du}{dx}$ . Mais, le débit  $u d\omega$  d'un filet fluide étant constant tout le long de ce filet, ce débit peut entrer sous le signe de différentiation par rapport à  $x$  et l'on a

$$u d\omega = \frac{d(u^2 d\omega)}{dx},$$

et par suite

$$\int_{\omega} u' d\omega = \frac{d}{dx} \int_{\omega} u^2 d\omega.$$

La vitesse moyenne U étant définie par  $U = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} u d\omega$ , ou  $U = \mathfrak{N}u$ , posons, comme plus haut,

$$(16) \quad 1 + \eta = \int_{\omega} \frac{u^2 d\omega}{U^2 \omega} \quad \text{ou} \quad \int_{\omega} u^2 d\omega = (1 + \eta) U^2 \omega$$

ou encore

$$\mathfrak{N}u^2 = (1 + \eta) U^2;$$

nous aurons, en substituant :

1. On voit combien est peu rigoureux le raisonnement qui conduit à la forme du second membre de cette équation. Il n'est pas du tout démontré que la vitesse moyenne U doive y figurer à l'exclusion de la vitesse à la paroi  $u_0$ ; ce n'est qu'une présomption ou une approximation. C'est sous cette réserve, qu'il ne faut pas perdre de vue, que l'expression du frottement prend la forme usuelle  $g\chi \cdot \varphi(U)$ .

$$\int_{\omega} u' d\omega = \frac{d}{dx} [(1 + \tau_1) U^2 \omega];$$

et, en considérant que le produit  $U\omega$ , qui est le débit  $Q$  du courant liquide, est constant ou indépendant de  $x$  et peut sortir du signe de différentiation, nous écrirons

$$\int_{\omega} u' d\omega = U\omega \frac{d}{dx} [(1 + \tau_1) U],$$

c'est-à-dire :

$$\mathfrak{N}u' = U \frac{d}{dx} [(1 + \tau_1) U].$$

Si nous supposons, approximativement, que le coefficient  $\tau_1$  est aussi indépendant de  $x$ , si nous désignons alors par une seule lettre  $\alpha'$  le coefficient  $(1 + \tau_1)$  ainsi supposé constant, et si nous remarquons que le produit  $\frac{UdU}{dx}$  équivaut à  $\frac{1}{2} \frac{d(U^2)}{dx}$  nous aurons en définitive :

$$\int_{\omega} u' d\omega = \frac{1}{2} \alpha' \omega \frac{d(U^2)}{dx}; \quad \text{ou bien :} \quad \mathfrak{N}u' = \alpha' \frac{d}{dx} \left( \frac{U^2}{2} \right).$$

et par suite l'équation générale précédente devient, en divisant tous ses termes par  $g\omega$ , et remplaçant  $dx$  par  $ds$ , élément de la trajectoire :

$$(17) \quad \sin I - \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0}{ds} = \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right).$$

Nous pourrions regarder cette équation (17) comme fondamentale dans l'étude du mouvement permanent des courants liquides tels que nous les avons décrits. Il doit rester entendu, comme il vient d'être dit en note, que  $\varphi(U)$  est une forme approximative qui gagnerait peut être en exactitude si l'on y remplaçait la vitesse moyenne par la vitesse à la paroi.<sup>1</sup>

1. Nous renverrons à l'Essai sur la théorie des eaux courantes de M. Bousinesq, pages 67 à 112, et à un mémoire posthume de Saint-Venant : *Des diverses manières de poser les équations du mouvement varié des eaux courantes* publié dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1887, 1<sup>er</sup> semestre, p. 148, pour l'établissement plus rigoureux de cette formule fondamentale. On y verra notamment comment la substitution faite plus loin, à la fonction  $\varphi(U)$ , de celle  $bU^3$  qui correspond au régime uniforme, équivaut à négliger un terme en  $\frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right)$ , de sorte qu'en définitive, ce qu'il y a d'inexact dans cette simplification peut être corrigé par une augmentation convenable du coefficient appelé  $\alpha'$ .

**26. Cas d'une section transversale circulaire ou demi-circulaire.** — Dans le cas d'une section circulaire, si  $D$  est le diamètre du cercle, la section  $\omega = \frac{\pi D^2}{4}$  et  $\chi = \pi D$ ; le rapport  $\frac{\chi}{\omega}$  qui figure dans le premier terme du second membre est  $= \frac{4}{D}$ . Il en est de même dans le cas d'une section demi-circulaire où l'aire  $\omega = \frac{1}{8} \pi D^2$  et le périmètre mouillé  $\chi = \frac{1}{2} \pi D$ . L'inverse de ce rapport, soit  $\frac{\omega}{\chi}$ , lequel vaut, dans ces deux cas,  $\frac{D}{4}$ , porte le nom de *rayon moyen* de la section transversale et cette dénomination s'applique à toutes les formes de section quelles qu'elles soient. La formule précédente devient alors, en y mettant  $\Pi$  au lieu de  $\rho g$  :

$$(18) \quad \sin I - \frac{1}{\Pi} \frac{dp_0}{ds} = \frac{4}{D} \varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right),$$

par les sections circulaires ou demi circulaires de diamètre  $D$ .

**27. Cas d'une section rectangulaire très large.** — Si le courant liquide a pour section transversale un rectangle très large dont le fond soit horizontal ou parallèle à la surface libre, ce qui se présente quelquefois dans certaines parties des *cours d'eau* naturels, la largeur de la section étant représentée par  $l$  et la profondeur par  $h$ , l'aire  $\omega$  de la section est  $lh$  et le périmètre mouillé  $\chi = l + 2h$ . Le rayon moyen  $\frac{\omega}{\chi}$  vaut alors  $\frac{lh}{l + 2h}$  et si, comme nous l'admettons,  $h$  est petit par rapport à  $l$ , on peut, au dénominateur, négliger  $2h$  devant  $l$ , de sorte que le rayon moyen est approximativement égal à la profondeur  $h$ . D'un autre côté, on peut placer l'axe des  $x$  ou des  $s$  à la surface libre, de manière à rendre constante et égale à la pression atmosphérique la pression  $p_0$ , ce qui annule  $\frac{dp_0}{ds}$ ; enfin, dans les *cours d'eau*, l'inclinaison  $I$  des trajectoires sous l'horizon est toujours très faible et l'on peut sans erreur sensible remplacer le sinus de  $I$  par cet angle lui-même. L'équation générale (17) se réduira ainsi, pour le cas d'une section rectangulaire très large, avec une surface libre, à la suivante applicable approximativement aux *cours d'eau* naturels, de forme régulière et de profondeur  $h$  :

$$(19) \quad I = \frac{\varphi(U)}{h} + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right),$$

dans laquelle  $I$  désigne la pente superficielle.

Lorsque la largeur de la section n'est pas très grande par rapport à la profondeur, le rayon moyen ne peut plus être considéré comme égal à  $h$  et l'équation doit être écrite :

$$(20) \quad I = \frac{(l + zh)}{lh} \varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right).$$

## § 3.

## MOUVEMENT UNIFORME

**28. Mouvement ou régime uniforme.** — Lorsque le régime est uniforme, c'est-à-dire lorsque la section transversale restant la même ou étant indépendante de  $s$ , la vitesse des molécules liquides, tout le long d'un même filet, est constante, les formules précédentes (17), (18), (19) et (20) se simplifient par la disparition du dernier terme de chacune d'elles, lequel dépend de la variation de la vitesse. L'équation générale (17) devient ainsi pour le mouvement uniforme :

$$\sin I - \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0}{ds} = \frac{\omega}{\chi} \varphi(U).$$

Lorsque, de plus, la section transversale affecte l'une des deux formes que nous venons d'examiner, de telle sorte que la position d'un point, dans chacune d'elles, est définie par une seule coordonnée, savoir  $x$  pour la section rectangulaire très large et  $r$  pour la section circulaire ou demi-circulaire, on peut étudier d'une manière plus complète ce qui se passe dans chaque section et déterminer, par exemple, la loi suivant laquelle varient les vitesses en fonction de  $x$  ou de  $r$ . La vitesse  $u_0$ , à la paroi, est alors la même en tous les points et l'effort de frottement par unité de surface de la paroi solide sur laquelle le liquide se meut et par unité de volume du liquide est exprimé par  $\rho g B u_0^2$ . Mais, comme le coefficient  $B$  peut avoir des valeurs différentes suivant la forme de la section, nous appellerons

$$\rho g B u_0^2$$

l'effort de frottement par unité de surface de la paroi mouillée de la section rectangulaire très large, de profondeur  $h$ , et

$$\rho g B' u_0^2$$

ce même effort dans la section circulaire de rayon  $R$ .

**29. Frottement intérieur des liquides.** — Quant au frottement du liquide sur lui-même, nous avons dit plus haut (n° 16, en note) qu'il était proportionnel à la vitesse relative des filets fluides. Si les parois du canal sont très lisses et si les mouvements intérieurs du fluide se réduisent à un simple glissement relatif et continu des couches les unes sur les autres, les vitesses réelles des molécules seront toujours parallèles à la direction générale de l'écoulement. Mais un pareil canal est irréalisable : toute paroi présente des aspérités plus ou moins apparentes, les filets fluides viennent s'y heurter et de ces chocs naissent des mouvements tourbillonnaires dont l'amplitude croît promptement avec la saillie des aspérités ; ces mouvements se propagent dans toute la masse et par leur passage à intervalles plus ou moins réguliers en un point donné de la section, donnent naissance à des vitesses constamment variables en grandeur et en direction.

« L'écoulement dans le canal le plus régulier est un phénomène « extrêmement complexe, dans lequel le simple glissement des « couches liquides ne joue qu'un rôle secondaire ; la masse du « courant est traversée sans cesse par des mouvements giratoires « partis de la paroi, qui en mélangent toutes les couches et viennent « même s'épanouir à la surface en donnant naissance à des ondu- « lations. Au premier abord, tout paraît confus et irrégulier, mais « ce désordre n'est qu'apparent, et si l'on fait, même pour un temps « assez court, les moyennes de toutes les vitesses qui se succèdent « en chaque point de la section, des lois précises se manifestent « bientôt ; ces moyennes prennent une valeur parfaitement déter- « minée autour de laquelle les vitesses instantanées oscillent avec « une sorte de périodicité <sup>1</sup>. »

Ce sont ces vitesses moyennes locales qui figurent dans les équations et dont les dérivées  $\frac{du}{dz}$ , par rapport à la profondeur dans le cas d'une section rectangulaire, ou  $\frac{du}{dr}$  par rapport au rayon dans le

1. Bazin, *Note sur la mesure des vitesses à l'aide du tube jaugeur. Annales des Ponts et Chaussées*, 1887, 1<sup>er</sup> semestre, p. 227.

cas d'une section circulaire, peuvent représenter les vitesses relatives des filets consécutifs. Mais, d'après ce qui vient d'être dit, les vitesses relatives réelles en sont bien différentes ; le coefficient par lequel on devra multiplier ces dérivées pour exprimer le frottement intérieur sera donc beaucoup plus grand que s'il ne s'agissait que de représenter le frottement de deux couches régulières ; il devra, en outre, tenir compte de toutes les pertes de force vive dues aux mouvements tourbillonnaires, de toutes les forces vives correspondant aux composantes transversales ou verticales des molécules. On peut englober toutes ces résistances dans un même coefficient  $\epsilon$  de frottement intérieur, mais il faudra alors, comme l'a remarqué M. Boussinesq<sup>1</sup>, que ce coefficient ne reste pas constant. Il devra dépendre de l'agitation moyenne en chaque point, laquelle enlève, au mouvement translatoire, une force vive d'autant plus considérable qu'elle a plus d'intensité ; et l'intensité de cette agitation dépend de la vitesse à la paroi  $u_0$  et de la grandeur relative de la section transversale par rapport à son périmètre mouillé, grandeur mesurée par le rayon moyen  $h$  ou  $\frac{R}{2}$ . Car, par exemple, pour une section rectangulaire, plus la profondeur est grande, plus les mouvements tumultueux et tourbillonnaires peuvent prendre de développement et donner lieu à des vitesses transversales plus grandes. De plus, dans le cas de la section circulaire de rayon  $R$ , l'agitation, partant de la paroi et se propageant vers le centre, doit être, en chaque point situé à une distance  $r$  du centre, d'autant plus prononcée que ce point en est plus rapproché, puisque la même énergie due à une cause d'agitation donnée se répartit sur des couches de masses décroissantes avec leur rayon. Pour ces motifs, le coefficient  $\epsilon$  pourra vraisemblablement s'exprimer par

$$\epsilon = \rho g A h u_0, \text{ dans le cas de la section rectangulaire ;}$$

$$\text{et } \epsilon = \rho g A \frac{R}{2} u_0 \frac{R}{r}, \text{ dans le cas de la section circulaire.}$$

Dans ce dernier cas, cette loi simple d'accroissement de  $\epsilon$  vers l'axe, exprimée par le dernier facteur  $\frac{R}{r}$ , ne peut plus s'appliquer aux petites distances  $r$  de l'axe où elle conduirait à supposer une agitation presque infinie, physiquement inadmissible. Mais elle n'y donne aucun frottement très grand par unité d'aire, vu que la vitesse

1. *Essai sur la théorie des eaux courantes*, § III.

relative du glissement des couches y décroît jusqu'à zéro, par raison de continuité et de symétrie. Aussi, n'en résulte-t-il, dans le mode de distribution des vitesses qu'une altération locale à peine perceptible <sup>1</sup>.

Pour une autre section transversale, de forme quelconque, définie par une équation en  $y$  et  $x$ , ou plutôt par une relation donnée entre les rapports  $\frac{xy}{\omega}$ ,  $\frac{xz}{\omega}$ , des coordonnées  $y$ ,  $x$ , de leurs divers points au rayon moyen  $\frac{\omega}{z}$ , ce qui rend applicables les formules à toutes les sections semblables, on peut, par un raisonnement analogue à celui qui précède, montrer que l'agitation en un point quelconque de la section dépend encore de la vitesse à la paroi, laquelle est elle-même variable, mais peut être regardée comme liée par une fonction de

1. Toutefois M. Boussinesq, dans sa *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section* (Paris, 1897), a essayé de corriger cette loi trop simple de la proportionnalité inverse de  $\varepsilon$

au rapport  $\frac{r}{R}$ , ce qu'il a fait par la substitution à ce rapport d'une fonction

un peu différente:  $\frac{r}{R} + \psi\left(\frac{r}{R}\right)$  où la petite partie  $\psi\left(\frac{r}{R}\right)$  reste finie et distincte de zéro sur l'axe. Il écrit donc, pour le cas de la section circulaire ou demi-circulaire:

$$\varepsilon = \frac{\rho g A' \frac{R}{z} u_0}{\frac{r}{R} + \psi\left(\frac{r}{R}\right)}.$$

Les expériences très précises de M. Bazin lui ont même permis de donner la forme suivante au dénominateur de cette expression:

$$\frac{r}{R} + \psi\left(\frac{r}{R}\right) = 0,576 - 1,131 \left(\frac{r}{R}\right) + 6,744 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 15,213 \left(\frac{r}{R}\right)^3 + 10,738 \left(\frac{r}{R}\right)^4.$$

Moyennant ces valeurs numériques, la loi de la répartition des vitesses dans une section circulaire se trouve concorder, aussi exactement que possible, avec les résultats des expériences.

Il en résulte que, dans une pareille section, le coefficient de frottement intérieur,  $\varepsilon$ , ne serait guère, à la paroi, que les  $\frac{10}{17}$  de la valeur  $\varepsilon_0$  qu'il prend dans une section rectangulaire très large; mais il grandit très vite à partir de la paroi, au point d'atteindre  $\varepsilon_0$  vers le premier dixième de la longueur des rayons et d'excéder  $2 \varepsilon_0$  sur un certain parcours depuis leur premier quart jusque vers leur milieu. Au-delà, il décroît légèrement vers le centre autour duquel il se maintient, sur le dernier tiers des rayons, assez voisin de  $1,9 \varepsilon_0$ .



$y$  et de  $z$ , à la vitesse minimum, que nous désignerons par  $u_0$  et qui se produira en un point déterminé, probablement au point le plus bas, du contour de la section transversale. L'agitation augmente encore en fonction du rayon moyen  $\frac{\omega}{\chi}$ , et l'on est fondé à admettre, pour l'expression du coefficient de frottement intérieur, en un point quelconque défini par les coordonnées  $y, z$ , une expression de la forme

$$\varepsilon = \frac{\rho g}{k} \sqrt{B_0} \frac{\omega}{\chi} u_0 F\left(\frac{\chi y}{\omega}, \frac{\chi z}{\omega}\right);$$

la fonction  $F$ , constamment positive, ayant une forme déterminée pour chaque forme de la section transversale et restant la même pour des formes semblables.

À la paroi, on peut même supposer, pour plus de généralité, que le coefficient désigné dans cette formule par  $B_0$  varie d'un point à l'autre en même temps que la vitesse. Et alors, si l'on appelle  $u$  la vitesse d'un filet en un point quelconque du contour mouillé et  $B$  la valeur correspondante du coefficient qui a la valeur  $B_0$  au point où la vitesse est  $u_0$ , on peut admettre que l'on connaisse, en fonction des coordonnées  $y, z$  des points du contour de la section, le rapport  $\frac{Bu^2}{B_0u_0^2}$  qui, dans les sections circulaire et rectangulaire très large considérées plus haut était égal à l'unité. Alors, si  $f$  représente une fonction supposée connue on pourra écrire

$$\frac{Bu^2}{B_0u_0^2} = f\left(\frac{\chi y}{\omega}, \frac{\chi z}{\omega}\right)$$

ou bien

$$Bu^2 = B_0u_0^2 f\left(\frac{\chi y}{\omega}, \frac{\chi z}{\omega}\right)$$

ce qui déterminera le frottement en tous les points du contour. À la surface libre, la fonction  $f$  s'annule évidemment.

**30. Expérience de M. Couette.** — Ces expressions du coefficient du frottement intérieur des liquides, sont applicables seulement lorsque la vitesse moyenne acquiert une certaine valeur, d'autant plus grande que les dimensions transversales du courant sont plus petites. Au-dessous de cette limite,  $\varepsilon$  a une valeur constante, beaucoup plus faible. Ce fait a été mis en évidence par une expérience remarquable de M. Couette, rapportée dans sa thèse de

doctorat du 30 mai 1890. Un réservoir plein d'eau est percé d'un orifice fermé par un bouchon, dans lequel on a mis un tube de verre de 2 millim. 6 de diamètre et de 278 millim. de longueur. Quand le réservoir est plein jusqu'au haut, la veine qui jaillit du tube est trouble ; son amplitude décroît d'une manière lente et continue en même temps que la charge. Quand la charge devient inférieure à 0 m. 75 environ, la veine éprouve des soubresauts de plus en plus marqués qui se produisent à des intervalles de temps irréguliers et pendant lesquels elle devient lisse et se relève au-dessus de sa position habituelle. Quand la charge est d'environ 50 centimètres, la veine oscille continuellement entre deux positions qui se partagent le temps à peu près également ; elle est lisse pour la plus grande amplitude, trouble pour la petite. Lorsque la charge devient inférieure à 35 centimètres environ, les soubresauts cessent et la veine est parfaitement lisse et calme. Les mêmes phénomènes se reproduisent en sens inverse quant on remplit progressivement le réservoir au lieu de le laisser se vider. De cette expérience caractéristique et d'un grand nombre d'autres décrites dans sa thèse, M. Couette conclut que le mouvement des liquides présente deux régimes différents : dans le second, le frottement est fonction de la vitesse moyenne et s'exprime assez bien par une fonction linéaire de cette vitesse ; le premier régime, où le frottement est beaucoup moindre, se produit seul pour les vitesses les plus faibles, le coefficient  $\epsilon$  de frottement intérieur est alors constant. Pour les vitesses intermédiaires, les deux régimes se présentent alternativement. La vitesse moyenne minima pour laquelle le second régime commence à se manifester dans les tubes est en raison inverse de leurs diamètres.

Ces lois semblent une confirmation évidente de l'influence prépondérante que prend l'intensité de l'agitation tourbillonnaire sur la valeur du coefficient de frottement intérieur des liquides. Tant que la vitesse est faible et que le liquide s'écoule dans un espace restreint, cette agitation ne peut se produire, le frottement intérieur n'a qu'une faible valeur. Dès que la vitesse dépasse une certaine limite ou bien que le liquide s'écoule dans un espace plus large, l'agitation commence, les filets liquides, au lieu de couler parallèlement, se croisent, s'entrechoquent, et la perte de force vive ou le frottement intérieur prend une plus grande importance.

Si l'on admet comme s'appliquant aux grands diamètres la dernière des lois qui viennent d'être citées, on remarquera que, dans l'expérience de M. Couette, le second régime commençait à se manifester dès que la charge atteignait 0 m. 35 environ ou bien que

la vitesse moyenne de sortie était de 2 m. 16 environ, dans un tube de 0 m. 0026 de diamètre. Ce serait donc à partir de la vitesse de 0 m. 216 que le second régime se manifesterait dans un tube de 0 m. 026 de diamètre et, dans un tuyau de 0 m. 26 de diamètre, on ne pourrait constater le premier régime que pour des vitesses inférieures à 0 m. 02 par seconde. C'est ce qui explique pourquoi ces faits sont restés si longtemps inaperçus. Les formules de deuxième approximation données par M. Boussinesq en 1897 et dont il est question à la note du numéro précédent sont de nature à donner une explication suffisante du phénomène.

**31. Autres observations.** — Un fait remarquable observé par M. de Caligny (*Hydraulique*, 1<sup>re</sup> partie, page 94), semble se rattacher à la même cause, bien qu'il n'en soit qu'une manifestation beaucoup moins apparente. Un tube vertical, ouvert aux deux bouts, est plongé verticalement dans un réservoir à niveau constant où l'eau est immobile ; on ferme, avec la main par exemple, l'extrémité supérieure du tube et on l'enfonce d'une certaine quantité dans le liquide, puis on ouvre brusquement l'extrémité fermée. Le niveau, à l'intérieur, d'abord abaissé par la pression de l'air emprisonné, s'élève au-dessus de celui du réservoir. M. de Caligny a observé, et c'est là ce qui est digne de remarque, que dans certaines limites la colonne d'eau partant du repos, à un certain niveau au-dessous de celui du réservoir, monte cependant plus haut au-dessus de ce niveau que lorsqu'on la fait partir de plus loin et qu'elle passe, au point où elle était en repos dans le premier cas, animée déjà d'une vitesse notable qu'elle a acquise en partant de plus bas. Il y a certainement, dans les deux cas, une différence notable dans l'action du frottement du liquide sur les parois du tube <sup>1</sup>.

Il semble aussi que certaines anomalies apparentes des expériences de Darcy sur les tuyaux de petit diamètre ne peuvent s'expliquer que par la cause mise en évidence par M. Couette, et en admettant le passage d'un régime à l'autre.

M. Couette a observé d'ailleurs que les oscillations de la veine liquide, dans son expérience, étaient d'autant plus amples que le tube était plus long. Cela est facile à comprendre quand on remarque que le régime, et par suite la loi de la perte de charge par unité de longueur, sont modifiés dans le tube tout entier.

1. « On voit, dit M. de Caligny, après avoir cité ce fait et d'autres analogues, avec quelle extrême réserve il faut accueillir les recherches purement théoriques qui peuvent être présentées sur des phénomènes aussi peu connus que ceux du frottement des liquides ».

Les expressions précédentes du coefficient de frottement intérieur, données par M. Boussinesq, se trouvent ainsi justifiées pour toutes les vitesses réellement pratiques lorsqu'il s'agit des tubes ou de canaux qui ne sont pas très petits transversalement.

**32. Formules pour la section rectangulaire très large et pour la section circulaire et demi-circulaire.**

— Si, alors, nous considérons, dans la section rectangulaire, une tranche de hauteur  $z$  mesurée depuis la surface libre, de longueur et de largeur égales à l'unité dont la composante du poids, suivant la direction du mouvement, sera  $\rho g z I$ , cette composante devant, puisque le mouvement est uniforme, être équilibrée par le frottement sur l'unité de surface qui est égal à  $-\varepsilon \frac{du}{dz} = -\rho g A u_0 h \frac{du}{dz}$ , nous aurons l'égalité :

$$(21) \quad zI = A h u_0 \frac{du}{dz}.$$

Multiplions par  $dz$  les deux membres, et intégrons depuis  $z = h$ , où  $u = u_0$ , jusqu'à une valeur  $z$  quelconque, nous trouvons :

$$I \left( \frac{h^2 - z^2}{2} \right) = A h u_0 (u - u_0).$$

L'équilibre de la tranche totale, d'épaisseur  $h$ , dont la composante du poids est  $\rho g h I$ , et qui est soumise au frottement à la paroi  $\rho g B u_0^2$ , s'exprimera de même par l'équation :

$$hI = B u_0^2, \quad \text{ou} \quad I = \frac{B u_0^2}{h};$$

substituant dans la précédente, elle devient :

$$\frac{B u_0^2}{2h} (h^2 - z^2) = A h u_0 (u - u_0).$$

On en déduit :

$$(22) \quad u = u_0 \left[ 1 + \frac{B}{2A} \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \right].$$

*Dans une section rectangulaire très large, les vitesses, aux divers points d'une même verticale, varient donc comme les ordonnées d'une parabole du second degré.*

Opérons de même pour la section circulaire, nous aurons pour exprimer l'équilibre d'un cylindre liquide de rayon  $r$  et de longueur égale à l'unité, en appelant  $p$  et  $p'$  les pressions moyennes sur les deux bases de ce cylindre :

$$(p' - p) \pi r^2 + \rho g \pi r^2 \sin I = - \rho g A' \frac{R}{2} u_0 \frac{R}{r} \frac{du}{dr} \cdot 2\pi r.$$

Désignons, pour abrégier, par  $J$  la quantité  $\frac{p' - p}{\rho g} + \sin I$ , qui est la hauteur dont s'est abaissé le niveau piézométrique entre deux sections distantes de l'unité de longueur, le premier membre de cette équation s'écrira simplement  $\rho g \pi r^2 J$  et elle deviendra, après réduction :

$$(23) \quad r^2 J = - A' R^2 u_0 \frac{du}{dr}.$$

Intégrons de  $r = R$  à  $r$  quelconque, nous aurons :

$$J \left( \frac{R^3 - r^3}{3} \right) = A' R^2 u_0 (u - u_0).$$

D'autre part l'équilibre de l'ensemble du liquide s'exprime par l'équation :

$$(p' - p) \pi R^2 + \sin I \rho g \pi R^2 = \rho g B' u_0^2 \cdot 2\pi R; \quad \text{ou} \quad J = \frac{2B' u_0^2}{R}$$

ce qui, en éliminant  $J$ , donne :

$$\frac{2B' u_0^2}{R} \left( \frac{R^3 - r^3}{3} \right) = A' R^2 u_0 (u - u_0);$$

ou bien :

$$(24) \quad u = u_0 \left[ 1 + \frac{2B'}{3A'} \left( 1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \right].$$

*Dans une section circulaire ou demi-circulaire, les vitesses, aux divers points d'un même rayon, varient comme les ordonnées d'une parabole du 3<sup>e</sup> degré.*

Ces résultats ont été vérifiés expérimentalement par M. Bazin et par divers observateurs, ainsi que nous le verrons plus loin.

Connaissant la vitesse  $u$  de chaque filet, nous pouvons calculer la vitesse moyenne  $U$  de la section transversale ; nous avons, en effet, dans le cas de la section rectangulaire :

$$Uh = \int_0^h u dz,$$

et dans le cas de la section circulaire :

$$\pi R^2 U = \int_0^R u \cdot 2\pi r dr.$$

Substituons pour  $u$  respectivement les valeurs (23) et 24), effectuons les intégrations indiquées, nous aurons exprimé  $U$  en fonction de  $u_0$ , et si nous mettons à la place de  $u_0$ , ses valeurs en I et en J tirées des équations précédentes, il viendra simplement, en remplaçant aussi  $R$  par  $\frac{D}{2}$  :

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{1}{\sqrt{B'}} \left[ 1 + \frac{B}{3A} \right] \sqrt{hI}, \text{ pour la section rectangulaire,} \\ U = \frac{1}{\sqrt{B'}} \left[ 1 + \frac{2B'}{5A'} \right] \sqrt{\frac{D}{4} J}, \text{ pour la section circulaire.} \end{array} \right.$$

En élevant au carré, et désignant par  $b$  et  $b_1$  deux coefficients numériques qui dépendront de  $A$ ,  $B$ , ou de  $A'$  et  $B'$  et qui pourront être, comme ces quantités elles-mêmes, légèrement variables avec les dimensions de la section transversale, mais qui seront surtout fonction du plus ou moins de rugosité de la paroi, on trouvera les formules classiques :

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} hI = b U^2, \text{ pour les sections rectangulaires.} \\ \frac{1}{4} DJ = b_1 U^2, \text{ pour les sections circulaires.} \end{array} \right.$$

On remarquera d'ailleurs, par la comparaison des deux équations (25) que la valeur de  $b_1$  pour les sections circulaires doit être, toutes choses égales d'ailleurs, un peu plus petite que celle de  $b$  pour les sections rectangulaires si, comme il paraît naturel de l'admettre, le rapport  $\frac{A}{B}$  est égal au rapport  $\frac{A'}{B'}$  et si  $B$  est voisin de  $B'$ .

Nous reprendrons ces formules générales lors de l'étude spéciale du mouvement uniforme dans les tuyaux et dans les canaux découverts, qui fera l'objet des chapitres IV et V.

Après avoir établi, comme nous venons de le faire, les formules

générales du mouvement permanent et du mouvement uniforme, nous allons étudier l'écoulement sur de très petites longueurs dans lesquelles la forme de la masse liquide en mouvement varie plus ou moins rapidement et rechercher si, dans ces parties, la fonction  $F(s)$  que nous avons considérée au n° 22, page 33, et qui exprime la perte de charge, varie avec continuité ou bien d'une façon discontinue, et nous essaierons alors, d'après l'observation, de déterminer cette perte de charge.

Ces parties, dans lesquelles la masse liquide en mouvement change brusquement de forme constituent les orifices et les déversoirs et c'est par elles que nous allons commencer, dans le chapitre III, l'étude de l'écoulement de l'eau.

---





## CHAPITRE III

# CIRCONSTANCES ACCIDENTELLES DU MOUVEMENT

§ 1. *Orifices.* — § 2. *Etude détaillée de l'écoulement.* — § 3. *Causes de perte de charge.* — § 4. *Ajutages.* — § 5. *Déversoirs.* — § 6. *Etude des nappes déversantes.* — § 7. *Application des formules.* — § 8. *Ressaut.* — § 9. *Tourbillons.*

### § 1

#### ORIFICES

**33. Ecoulement par un orifice en mince paroi.** — **Théorème de Torricelli.** — Considérons (fig. 18) un vase rempli d'un liquide pesant et homogène jusqu'à un certain niveau constant AB; supposons que dans la paroi BC de ce vase on pratique une ouverture DE par laquelle le liquide s'écoulera sans toucher les parois de l'orifice autrement que par une arête, ce qui se produit lorsque, cet orifice ayant la forme cylindrique, l'épaisseur de la paroi est inférieure à la moitié de la plus petite dimension de l'ouverture,

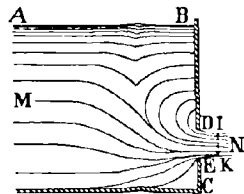


Fig. 18.

comme dans la figure 19, ou mieux encore lorsque, comme dans la figure 20, l'orifice est taillé suivant une forme légèrement conique. L'orifice est dit alors en *mince paroi*. A la sortie, les filets sont d'abord convergents, mais à une certaine distance ON égale à peu près à la moitié du diamètre de l'orifice, s'il est circulaire, il deviennent sensiblement parallèles en traversant une section IK ayant une aire notablement plus petite que celle de sortie DE, et la veine fluide a subi une *contraction* entre DE et IK. Si l'on suppose que le vase soit assez grand pour que le mouvement des molé-

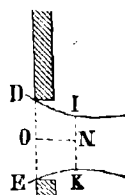


Fig. 19.

cules liquides y soit insensible, le théorème de Bernoulli pourra être appliqué au trajet de l'une de ces molécules, depuis son point de départ M où sa vitesse était nulle, jusqu'au moment où elle traverse la section IK dans laquelle on peut admettre que toutes les vitesses sont égales. Désignons par U cette vitesse commune, par  $p_0$  la pression sur la surface libre AB, par  $p_1$  la pression du milieu dans lequel débouche la veine fluide, ou, d'après ce que l'on vient de dire, la pression en tous les points de la section IK. Le plan de charge, pour le point M, est

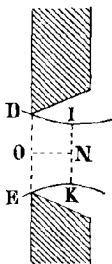


Fig. 20. à une hauteur  $\frac{p_0}{\Pi}$  au-dessus de AB. Pour la section IK,

il est à une hauteur  $\frac{p_1}{\Pi} + \frac{U^2}{2g}$  au-dessus de cette section. Appelons  $h$  la profondeur verticale de cette section, ou de son centre de gravité, au-dessous de la surface libre AB, nous aurons, en exprimant que ces deux plans de charge sont à la même hauteur :

$$\frac{p_0}{\Pi} + h = \frac{p_1}{\Pi} + \frac{U^2}{2g};$$

d'où

$$(1) \quad U^2 = 2g \left( h + \frac{p_0 - p_1}{\Pi} \right).$$

Si la veine liquide débouche dans l'atmosphère et si la surface libre est elle-même soumise à la pression atmosphérique,  $p_1 = p_0$ , et l'on a simplement

$$(2) \quad U = \sqrt{2gh};$$

La vitesse des molécules, dans la section contractée, est égale à la vitesse qui serait due à la hauteur de la surface libre au-dessus du centre de gravité de cette section. C'est le théorème de *Torricelli*.

#### 34. Débit d'un orifice. — Coefficient de débit. —

Puisque nous avons admis que toutes les molécules traversant la section IK avaient des vitesses égales entre elles et normales à son plan, le volume d'eau débité par unité de temps sera le produit de la vitesse commune  $U = \sqrt{2gh}$  par l'aire  $\omega$  de cette section, laquelle en raison de la contraction de la veine, n'est qu'une fraction  $m\omega_0$  de la section  $\omega_0$  de l'orifice en mince paroi DE. Nous aurons ainsi, en appelant Q le débit :

$$(3) \quad Q = m\omega_0 \sqrt{2gh};$$

Le coefficient  $m$  est souvent appelé le coefficient de contraction de la veine liquide. Il serait plus exact et plus rationnel de l'appeler le *coefficient de débit*.

Sa valeur, déterminée expérimentalement d'abord par MM. Poncelet et Lesbros, puis par d'autres observateurs et en dernier lieu par M. Bazin <sup>1</sup>, a été obtenue en effet en divisant le débit  $Q$  mesuré, par le produit de la section  $\omega_0$  de l'orifice et par la vitesse théorique  $\sqrt{2gh}$ . Elle varie avec la forme et les dimensions de l'orifice et, dans une certaine mesure, avec la charge  $h$ . Elle diminue, en général, lorsque la charge augmente, pour devenir sensiblement constante quand  $h$  surpasse 0<sup>m</sup>50. Lorsqu'il s'agit d'un orifice percé dans une paroi verticale, le coefficient de débit, correspondant à des charges comprises entre 0<sup>m</sup>80 et 1<sup>m</sup>00, a été trouvé :

Pour un orifice carré de 0<sup>m</sup>20 de côté  $m = 0,606$

Pour un orifice rectangulaire de 0<sup>m</sup>20 de hauteur  
sur 0<sup>m</sup>80 de largeur  $m = 0,627$

Pour un orifice circulaire de 0<sup>m</sup>20 de diamètre  $m = 0,598$

Sous la même charge de 1 m., le coefficient de débit de l'orifice circulaire vertical est de 0,600 lorsque le diamètre de l'orifice n'est que de 0<sup>m</sup>05 et il atteint 0,627 quand le diamètre est réduit à 0<sup>m</sup>006.

Les données expérimentales sont moins nombreuses en ce qui concerne les orifices pratiqués dans une paroi horizontale. La moyenne des résultats que l'on possède, pour des charges variant de 0<sup>m</sup>80 à 5<sup>m</sup>70 s'écarte peu de 0,600.

La charge  $h$  qui figure dans la formule (3) est la profondeur, au-dessous de la surface libre, du centre de l'orifice. Il est probable que la même formule est applicable à un orifice de forme quelconque en y mettant alors, pour  $h$ , la profondeur du centre de gravité de l'orifice.

**35. Coefficients de débit pour des orifices carrés et circulaires.** — Les valeurs précédentes du coefficient de débit  $m$  ne s'appliquent qu'à des exemples particuliers ; elles sont susceptibles de varier dans des limites assez étendues comme le montreront les tableaux suivants, qui sont extraits d'un ouvrage, publié en 1886 <sup>2</sup>, par M. Hamilton Smith et dans lequel il a résumé par une

1. *Expériences sur la contraction des veines liquides et sur la distribution des vitesses dans leur intérieur*, par M. Bazin. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, tome XXXII, n<sup>o</sup> 4.

2. *The flow of water through orifices and over weirs, and through open conduits and pipes*, by Hamilton Smith, London and New-York, 1886.

discussion approfondie les résultats obtenus par divers expérimentateurs et par lui-même <sup>1</sup>.

*Valeurs du coefficient de débit m, pour des orifices de forme carrée, en mince paroi verticale.*

Charge sur le centre de l'orifice	Côté du carré					
	0 <sup>m</sup> 005	0 <sup>m</sup> 015	0 <sup>m</sup> 03	0 <sup>m</sup> 06	0 <sup>m</sup> 18	0 <sup>m</sup> 30
0 <sup>m</sup> 12	»	0.637	0.621	»	»	»
0.15	»	0.633	0.619	0.605	0.597	»
0.18	0.660	0.630	0.617	0.605	0.598	»
0.21	0.656	0.628	0.616	0.605	0.599	0.596
0.24	0.652	0.625	0.615	0.605	0.600	0.597
0.27	0.650	0.623	0.614	0.605	0.601	0.598
0.30	0.648	0.622	0.613	0.605	0.601	0.599
0.40	0.642	0.618	0.610	0.605	0.602	0.601
0.60	0.637	0.615	0.608	0.605	0.604	0.602
0.90	0.632	0.612	0.607	0.605	0.604	0.603
1.20	0.628	0.610	0.606	0.605	0.603	0.602
1.80	0.623	0.609	0.605	0.604	0.603	0.602
2.40	0.619	0.608	0.605	0.604	0.603	0.602
3.00	0.616	0.606	0.604	0.603	0.602	0.601
6.00	0.606	0.603	0.602	0.602	0.601	0.600
30.00	0.599	0.598	0.598	0.598	0.598	0.598

*Valeurs du coefficient de débit m pour des orifices de forme circulaire, en mince paroi verticale.*

Charge sur le centre de l'orifice	Diamètre					
	0 <sup>m</sup> 006	0 <sup>m</sup> 015	0 <sup>m</sup> 03	0 <sup>m</sup> 06	0 <sup>m</sup> 18	0 <sup>m</sup> 30
0 <sup>m</sup> 12	»	0.631	0.618	»	»	»
0.15	»	0.627	0.615	0.600	0.592	»
0.18	0.655	0.624	0.613	0.601	0.593	»
0.21	0.651	0.622	0.611	0.601	0.594	0.590
0.24	0.648	0.620	0.610	0.601	0.594	0.591
0.27	0.646	0.618	0.609	0.601	0.595	0.591
0.30	0.644	0.617	0.608	0.600	0.595	0.591
0.40	0.638	0.613	0.605	0.600	0.596	0.593
0.60	0.632	0.610	0.604	0.599	0.597	0.595
0.90	0.627	0.606	0.603	0.599	0.597	0.597
1.20	0.623	0.605	0.602	0.599	0.598	0.596
1.80	0.618	0.604	0.600	0.598	0.597	0.596
2.40	0.614	0.603	0.600	0.598	0.596	0.596
3.00	0.611	0.601	0.598	0.597	0.596	0.595
6.00	0.601	0.598	0.596	0.596	0.596	0.594
30.00	0.593	0.592	0.592	0.592	0.592	0.592

1. Les chiffres de ces tables se rapportent à l'écoulement de l'eau à la tem-

On voit qu'en général le coefficient  $m$  diminue à mesure que les dimensions de l'orifice augmentent, et aussi à mesure que la charge augmente. La dernière ligne de chacun des tableaux, relative à la charge de 30 mètres, a été calculée par extrapolation et n'est pas aussi exacte que les autres ; toutefois, M. Graëff a constaté que le coefficient de débit reste à peu près constant pour les grandes pressions. D'après les tableaux précédents, il serait alors de 0,592 pour les orifices de forme circulaire, de 0,598 pour ceux de forme carrée et M. Smith ajoute que, pour les orifices de forme rectangulaire dont la largeur est égale à six fois la hauteur, il aurait la valeur 0,61. Il n'a pas trouvé dans les expériences de données suffisantes pour construire une table applicable à ce genre d'orifices.

**36. Coefficients de débit pour les orifices rectangulaires.** — On peut alors avec une approximation qui sera ordinairement suffisante, soit prendre les chiffres de la table de la page 60 pour les orifices carrés en les augmentant de 0,012 à 0,015, soit adopter comme applicables à toutes les formes rectangulaires ceux de la table suivante extraite des résultats donnés par MM. Poncelet et Lesbros, d'après leurs expériences.

*Valeurs approximatives du coefficient de débit  $m$ , pour des orifices de forme rectangulaire, en mince paroi verticale.*

Charge sur le sommet de l'orifice	Hauteur de l'orifice					
	0 <sup>m</sup> 01	0 <sup>m</sup> 02	0 <sup>m</sup> 03	0 <sup>m</sup> 05	0 <sup>m</sup> 10	0 <sup>m</sup> 20
0 <sup>m</sup> 01	0.701	0.660	0.630	0.607	»	»
0.02	0.694	0.659	0.634	0.615	0.596	0.572
0.03	0.688	0.659	0.638	0.620	0.600	0.578
0.04	0.683	0.658	0.640	0.623	0.603	0.582
0.05	0.679	0.658	0.640	0.625	0.605	0.585
0.06	0.676	0.657	0.640	0.627	0.607	0.587
0.08	0.670	0.656	0.638	0.629	0.610	0.589
0.10	0.666	0.654	0.637	0.630	0.611	0.592
0.14	0.660	0.651	0.635	0.630	0.613	0.595
0.20	0.655	0.648	0.633	0.630	0.615	0.598
0.30	0.650	0.644	0.632	0.629	0.616	0.600
0.50	0.644	0.640	0.630	0.628	0.617	0.603
1.00	0.632	0.633	0.628	0.626	0.615	0.605
1.50	0.615	0.619	0.620	0.620	0.611	0.602
2.00	0.611	0.612	0.612	0.613	0.607	0.601
3.00	0.609	0.610	0.608	0.606	0.603	0.601

température de 10 degrés centigrades environ. Ils subissent, avec la température, de légères variations dont la loi n'est pas bien déterminée.

Pour le mercure, ces chiffres doivent être diminués de 0,03 à 0,04 ; pour l'huile à graisser, au contraire, on doit les augmenter d'environ 0,09.

**37. Cas d'une contraction incomplète, ou de parois épaisses.** — Tous les coefficients contenus dans les tables précédentes s'appliquent au cas où la contraction de la veine est *complète*, c'est-à-dire se produit sur tout le contour de l'orifice, et il faut, pour cela, que la distance entre cet orifice et le fond ou les parois du vase soit au moins égale à une fois et demie ou deux fois sa plus petite dimension. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, la contraction se trouve atténuée, ou même supprimée. Par exemple, si la partie inférieure d'un orifice rectangulaire (fig. 21) coïncide avec la paroi horizontale

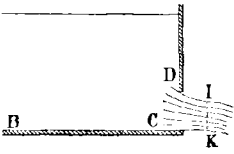


Fig. 21

du réservoir, on voit que les filets liquides inférieurs arriveront à l'orifice avec une direction normale à sa section et n'auront aucune tendance à se dévier; la contraction sera supprimée sur la partie inférieure de l'orifice. Si l'on désigne par  $\theta$  la fraction, nécessairement comprise entre 0 et 1, du périmètre de l'orifice sur laquelle la contraction se trouve ainsi supprimée, il résulte des expériences de Bidone que le coefficient  $m'$  applicable au cas de la contraction incomplète est lié, au coefficient  $m$  des tableaux précédents, par la relation approximative:

$$m' = m (1 + 0,15 \theta),$$

lorsque l'orifice est rectangulaire, et

$$m' = m (1 + 0,13 \theta)$$

lorsqu'il est circulaire.

Il convient toutefois de remarquer que ces deux formules devraient donner  $m' = 1$  pour  $\theta = 1$  c'est-à-dire lorsque la contraction est supprimée sur la totalité du contour de l'orifice. Cela exigerait qu'elles fussent écrites:

$$m' = m (1 + 0,64 \theta)$$

pour l'orifice rectangulaire, et

$$m' = m (1 + 0,56 \theta)$$

pour l'orifice circulaire. La différence avec les chiffres de Bidone est assez grande pour motiver de nouvelles expériences à ce sujet.

On dit quelquefois que la contraction est supprimée à un orifice lorsque l'on a donné à cet orifice la forme de la veine contractée. On comprend, en effet, que si la paroi traversée par la veine fluide est taillée exactement suivant cette forme de manière que CD (fig. 22) soit la section contractée, le débit de l'orifice sera  $Q =$

$CD \times \sqrt{2gh}$ , sans coefficient de réduction ; mais il en serait autrement si l'on rapportait le débit à la section d'origine AB. Entre cette forme exacte de la veine contractée que l'on peut donner à la paroi de l'orifice et la forme cylindrique AA' BB', pour laquelle le coefficient de débit est 0,62 environ, il peut y avoir une foule de formes intermédiaires correspondant à des valeurs du coefficient  $m$  comprises entre 0,62 et l'unité. Ainsi, M. Graëff donne une table, dont j'ai extrait la suivante, des valeurs du coefficient de réduction de dépense  $m$ , pour diverses dispositions d'orifices rectangulaires, savoir :

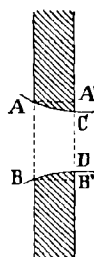


Fig. 22.

A : Orifice en mince paroi entièrement isolé du fond et des parois du réservoir (cas de la contraction complète) ;

B : Orifice en mince paroi dans lequel la contraction est supprimée sur les bords verticaux (cas où les bords verticaux de l'orifice sont dans le prolongement des parois du réservoir, le sommet et la base étant biseautés comme dans la fig. 20, page 58 ;

C : Orifice en mince paroi dans lequel la contraction est supprimée sur la base (cas où le seuil est au niveau du fond) ;

D : Orifice en mince paroi dans lequel la contraction est supprimée sur les bords et sur la base, le sommet seul restant biseauté ;

E : Orifices de 0 m. 04 à 0 m. 05 d'épaisseur, non biseautés, isolés du fond et des parois du réservoir (cas des vannages ordinaires en bois) ;

F : Mêmes orifices dans lesquels la contraction latérale est supprimée (cas où les bords verticaux de l'orifice sont dans le prolongement des parois du canal) ;

G : Mêmes orifices dans lesquels la contraction est nulle à la fois sur les bords et sur la base.

Les coefficients de dépense  $m$ , ont été mesurés par M. Graëff pour ces dispositifs dans deux conditions différentes : 1° les orifices débouchant librement à l'air, et 2° les orifices étant prolongés par des canaux de même largeur qu'eux mais trop courts pour que le régime uniforme puisse s'y établir. Dans les deux cas, il a trouvé, pour les petits orifices, des nombres assez différents de ceux qui conviennent aux grands pour qu'il ait cru devoir donner des coefficients différents pour les premiers, limités à 0 m. 03 de hauteur, et pour les autres, présentant une hauteur supérieure à 0 m. 03. Les coefficients, comme ceux des tableaux qui précèdent, sont d'ailleurs variables avec la

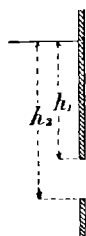


Fig. 23.

charge sur le sommet de l'orifice, désignée (fig. 23), par  $h_1$  ou plus exactement avec le rapport  $\frac{h_1}{h_2 - h_1}$  de la charge sur le sommet à la hauteur  $h_2 - h_1$  de l'orifice. On remarque que les coefficients donnés par M. Graëff pour les orifices en mince paroi ne concordent pas exactement avec ceux qui ont été trouvés dans les mêmes conditions par MM. Poncelet et Lesbros. La loi de variation du coefficient en sens inverse de la charge paraît en défaut lorsque celle-ci est très petite.

*Coefficients applicables aux orifices rectangulaires.*

Valeurs du rapport $\frac{h_1}{h_2 - h_1}$ de la charge sur le sommet à la hauteur de l'orifice.	Grands orifices ayant plus de 0 <sup>m</sup> ,03 de hauteur							Petits orifices ayant moins de 0 <sup>m</sup> ,03 de hauteur						
	Valeurs du coefficient $m$ pour les dispositifs							Valeur du coefficient $m$ pour les dispositifs						
	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G
	<b>1. Orifices débouchant librement à l'air.</b>													
4	0.61	0.65	0.67	0.70	0.65	0.68	»	0.67	0.70	0.71	0.72	0.71	0.75	»
10	0.62	0.64	0.67	0.69	0.67	0.70	»	0.66	0.66	0.70	0.71	0.70	0.74	»
20	0.62	0.63	0.67	0.69	0.68	0.71	»	0.65	0.65	0.69	0.70	0.70	0.74	»
40	0.61	0.63	0.66	0.68	0.68	0.71	»	0.64	0.65	0.69	0.70	0.70	0.74	»
400	0.61	0.62	0.66	0.68	0.68	0.70	»	0.63	0.64	0.69	0.69	0.69	0.73	»
1000	0.60	0.60	0.66	0.68	0.66	0.69	»	0.61	0.63	0.68	0.68	0.69	0.72	»
et au delà.	0.60	0.60	0.65	0.67	0.66	0.68	»	0.60	0.63	0.68	0.68	0.68	0.71	»
<b>2. Orifices prolongés par des canaux.</b>														
4	0.57	0.64	0.60	0.60	0.62	0.65	»	0.65	0.67	0.67	0.69	0.68	0.70	»
5	0.61	0.64	0.62	0.64	0.63	0.66	»	0.64	0.66	0.67	0.68	0.67	0.71	»
10	0.61	0.63	0.63	0.65	0.64	0.67	»	0.64	0.65	0.67	0.68	0.67	0.71	»
20	0.61	0.63	0.63	0.65	0.65	0.67	»	0.63	0.64	0.66	0.68	0.67	0.70	»
40	0.61	0.62	0.63	0.65	0.64	0.66	»	0.62	0.63	0.66	0.67	0.66	0.70	»
100	0.60	0.60	0.62	0.64	0.63	0.65	0.84	0.61	0.62	0.65	0.67	0.66	0.69	0.86
400	0.60	0.60	0.62	0.63	0.63	0.64	0.81	0.60	0.61	0.65	0.66	0.65	0.68	0.84
1000	0.60	0.60	0.62	0.63	0.63	0.64	0.80	0.60	0.61	0.64	0.66	0.65	0.67	0.81
et au delà.														

**38. Orifice noyé.** — Il peut arriver que la veine liquide, au lieu de déboucher dans l'atmosphère, débouche dans un autre vase rempli d'eau à un niveau constant. Alors la pression  $p_1$ , qui figure dans l'équation (1), est mesurée par la profondeur du centre de l'ori-



fice au-dessous de la surface libre du vase inférieur. Si  $h_1$  est cette profondeur,  $h$  étant toujours celle de l'orifice au-dessous du niveau d'amont, de telle sorte que la différence de niveau des deux vases soit  $h - h_1$ , la pression  $p_1$  sera égale à  $p_0 + \Pi h_1$ , et, en substituant dans l'équation (1), on aura, pour la vitesse de l'écoulement dans ces conditions

$$(6) \quad U = \sqrt{2g(h - h_1)}$$

quelle que soit la position de l'orifice dans la paroi de séparation des deux masses liquides.

§ 2.

ÉTUDE DÉTAILLÉE DE L'ÉCOULEMENT

**39. Variation de la pression dans le voisinage de l'orifice.** — Voici un raisonnement au moyen duquel M. Collignon a pu se rendre compte de l'étendue dans laquelle la pression,

au pourtour de l'orifice, varie autrement que suivant la loi hydrostatique. Soit AB (fig. 24) la paroi du vase où se trouve percé l'orifice CD de section  $\omega$ , EF la section contractée  $m\omega$ , et enfin HL l'étendue de la paroi où les vitesses sont appréciables; désignons cette étendue par  $K\omega$ , K étant plus grand que l'unité. Considérons dans le liquide un cylindre fictif ABA'B'

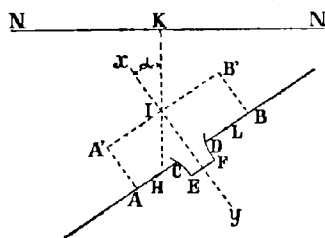


Fig. 24.

ayant pour base, sur la paroi AB, une surface  $AB = A$  plus grande que HL ou que  $K\omega$ , et une hauteur  $AA' = l$  suffisante pour que les vitesses des molécules liquides, à travers la section A'B', soient négligeables comme celles des molécules qui traversent le contour latéral du cylindre. Appliquons à la masse liquide contenue dans ce cylindre le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe  $xy$  perpendiculaire au plan de l'orifice et faisant un angle  $\alpha$  avec la verticale. La quantité de mouvement étant considérée comme nulle sur tout le pourtour du cylindre, et le mouvement, à l'intérieur, étant supposé permanent, l'accroissement de quantité de mouvement, pendant l'unité de temps, sera simplement celle qui sera acquise par la masse liquide passée par la section EF. La vitesse

de sortie étant  $U$ , et  $\Pi$  le poids spécifique du liquide, la masse écoulee dans l'unité de temps est  $\frac{\Pi U m \omega}{g}$  et la quantité de mouvement acquise est  $\frac{\Pi U^2 m \omega}{g}$ . Cette quantité doit être égale à la somme des impulsions des forces. Soit  $p_0$  la pression atmosphérique que nous supposons s'exercer en tous les points de la section contractée  $EF$ , dans laquelle les filets coulent parallèlement, aussi bien que sur le contour  $CE, DF$  de la veine liquide. La résultante des pressions  $p_0$  sur tout ce contour sera la même que celle d'une pression égale à  $p_0$  s'exerçant sur la section  $CD$  ou  $\omega$  et l'impulsion de cette force, négative, a pour expression  $-p_0 \omega$ . La hauteur du centre de gravité de  $CD$  au-dessous de la surface libre étant toujours représentée par  $h$  et la hauteur, au-dessous de ce même niveau, du centre de la section  $A'B'$  étant  $z$ , nous avons entre ces quantités, la relation

$$z + l \cos \alpha = h.$$

La pression sur la surface  $A'B'$ , d'étendue  $A$ , sera  $(p_0 + \Pi z)A$  et l'impulsion de cette force est positive. Les pressions sur la surface latérale du cylindre, étant normales à  $xy$ , auront une projection nulle sur cette direction. La pression sur la portion  $AH, LB$  de la paroi, variant, par hypothèse, suivant la loi hydrostatique, aura pour valeur  $(p_0 + \Pi h)(A - K\omega)$  car cette portion a, comme  $A'B'$ , son centre de gravité sur  $xy$  et sa surface est  $A - K\omega$ . L'impulsion de cette force sera négative. Si la pression sur  $HC, DL$ , dont l'étendue est  $\omega(K - 1)$  variait suivant la loi hydrostatique, elle serait  $p_0 + \Pi h$ ; on peut, en appelant  $f$  un coefficient numérique à déterminer, la représenter, en moyenne, par  $p_0 + f\Pi h$  et alors l'impulsion négative correspondante sera  $-(p_0 + f\Pi h)\omega(K - 1)$ . Enfin il reste à évaluer l'impulsion de la pesanteur. Le poids de la masse liquide considérée est  $\Pi A l$  et son impulsion est  $\Pi A l \cos \alpha$  ou bien, d'après l'équation ci-dessus,  $\Pi A (h - z)$ . Réunissant ces diverses quantités et écrivant l'équation, il vient :

$$\frac{\Pi U^2 m \omega}{g} = -p_0 \omega + (p_0 + \Pi z)A - (p_0 + \Pi h)(A - K\omega) - (p_0 + f\Pi h)\omega(K - 1) + \Pi A (h - z)$$

Remplaçant  $U^2$  par  $2gh$  et réduisant, il reste simplement :

$$2m = f + K - fK.$$

Si la surface  $HC, DL$  était nulle, c'est-à-dire si la pression variait jusqu'au bord de l'orifice conformément à la loi hydrostatique, ce

qui arrive lorsque les vitesses sont nulles dans toute l'étendue de la paroi et ce que l'on peut réaliser au moyen d'un ajutage rentrant, comme on le verra plus loin, la valeur de  $K$  serait égale à l'unité et l'on trouverait alors pour le coefficient  $m$  :

$$m = \frac{1}{2},$$

ainsi que nous l'établirons directement. Mais, en général,  $m$  dépend de  $K$  et de  $f$ . On peut établir, entre ces deux variables, une relation au moins approximative en admettant que la pression, sur tous les points de cette surface annulaire HC, DL, varie uniformément, à mesure qu'on s'éloigne du centre, depuis  $p_0$  au bord de l'orifice jusqu'à  $p_0 + \Pi h$  à l'extrémité. Si  $r_0$  et  $r_1$  désignent les distances au centre de l'orifice de deux points tels que C et H et  $r$  celle d'un autre point quelconque, entre les deux, sur le même rayon vecteur, la pression en ce point sera  $p_0 + \Pi h \frac{r - r_0}{r_1 - r_0}$ , et la pression totale sur un secteur infiniment petit  $d\theta$  sera  $\int_r^{r_1} r dr d\theta \left( p_0 + \Pi h \frac{r - r_0}{r_1 - r_0} \right)$ . La pression moyenne étant par hypothèse  $p_0 + f\Pi h$ , et la surface de ce secteur  $\int_{r_0}^{r_1} r dr d\theta = d\theta \frac{r_1^2 - r_0^2}{2}$ , on a, en écrivant l'égalité et faisant disparaître le facteur commun  $d\theta$  :

$$\int_{r_0}^{r_1} \left( p_0 + \Pi h \frac{r - r_0}{r_1 - r_0} \right) r dr = (p_0 + f\Pi h) \frac{r_1^2 - r_0^2}{2}.$$

Effectuant l'intégration et réduisant, il vient :

$$f = \frac{2r_1 + r_0}{3(r_1 + r_0)}.$$

D'autre part, les figures  $\omega$  et  $K\omega$  étant semblables, le rapport  $K$  est égal à  $\frac{r_1^3}{r_0^3}$ , ce qui donne  $\frac{r_1}{r_0} = \sqrt[3]{K}$  et :

$$f = \frac{2\sqrt[3]{K} + 1}{3(\sqrt[3]{K} + 1)}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de  $m$  on obtient enfin

$$m = \frac{K + \sqrt[3]{K} + 1}{6}.$$

La valeur  $K = 1$  correspond à  $m = \frac{1}{2}$  comme nous venons de le dire. Le coefficient de contraction  $m$  ayant, en général, dans les orifices en mince paroi, une valeur voisine de 0,62, il en résulte que  $K$  vaut à peu près 1,50 ; c'est-à-dire que la surface sur laquelle les vitesses des molécules deviennent appréciables, autour d'un orifice, ne dépasse pas la moitié de celle de l'orifice, en dehors de celui-ci. Par exemple, s'il s'agit d'un orifice circulaire, les vitesses ne commenceraient à être sensibles, ou non négligeables, qu'à une distance inférieure au quart de son rayon. Toutefois il convient de remarquer que le raisonnement qui précède suppose que la pression, aux bords de l'orifice, aux points C, D est égale à  $p_0$  ; cela semble probable à cause de la présence de l'atmosphère tout près de ces points, mais on n'est pas certain que la pression n'y varie assez rapidement sur une petite étendue. Cela pourrait, en tout cas, n'être plus vrai pour le filet qui ne serait pas directement en contact avec l'atmosphère.

**40. Vitesse des molécules fluides à l'intérieur du réservoir.** — La théorie analytique complète de l'écoulement d'un liquide par un orifice a été ébauchée par M. Boussinesq dans la première note complémentaire de son Essai sur la théorie des eaux courantes, pages 530 à 569. Il est arrivé très facilement et très simplement à déterminer les vitesses des particules liquides à l'intérieur du vase dans la paroi duquel l'orifice est percé. Il a démontré que la vitesse de chaque molécule du réservoir est proportionnelle à l'attraction newtonienne (en raison inverse du carré de la distance) exercée sur cette molécule par un corps placé au centre de l'orifice, et qu'elle a aussi la même direction que cette force d'attraction. Tous les mouvements convergent donc rectilignement vers le centre.

On trouvera aux Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences des 3, 10 et 24 avril 1882, dans une note de St-Venant, une démonstration tout à fait simple de ce résultat, ainsi que le tracé graphique et l'équation analytique des curieuses courbes transformées des lignes fluides formées par les molécules dans l'intérieur du réservoir d'où l'eau s'écoule d'une manière permanente ou non permanente, et, dans une autre note de MM. de St-Venant et Flamant, en date des 12 et 19 novembre 1883, quelques résultats numériques relatifs au même objet et surtout une méthode approximative simplifiée pour les obtenir. Je me bornerai à y renvoyer le lecteur.

Mais les résultats ainsi obtenus ne sont exacts qu'à la condition de négliger les frottements du liquide sur lui-même et sur les parois du vase.

Cette approximation est très suffisante tant que l'on considère les vitesses des molécules liquides dans l'intérieur du vase, au delà d'une petite distance de l'orifice, mais elle ne l'est plus lorsque l'on arrive à l'orifice lui-même. Cependant M. Boussinesq est arrivé à établir théoriquement la valeur  $\frac{\pi}{5} = 0,628$  pour le coefficient de débit d'un orifice rectangulaire et celle  $\frac{21 \times 25}{16 \times 157} \pi = 0,657$  pour un orifice circulaire. La première de ces valeurs s'accorde bien avec l'observation, la seconde est un peu trop forte.

**41. Particularités diverses.** — Un phénomène curieux, qui accompagne toujours l'écoulement par des orifices de forme carrée est celui de l'*inversion* de la veine. Si ABCD (fig. 25), représente un orifice vertical, on voit à une petite distance la veine devenir d'abord octogonale, les angles du carré étant abattus par de petits pans coupés  $aa'$ ,  $bb'$ , ... ; puis un peu plus loin, ces pans coupés, en forme de courbes légèrement concaves, donnent à la veine une forme sensiblement carrée EFGH

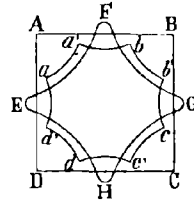


Fig. 25.

dont les angles et les côtés sont disposés d'une façon *inverse* de ceux de l'orifice. Les veines de forme rectangulaire présentent des phénomènes analogues mais beaucoup moins accentués.

Dans son mémoire cité plus haut, auquel est emprunté ce qui suit, M. Bazin fait remarquer que ses expériences ne lui ont pas donné lieu de constater, ce que l'on admet généralement, l'existence d'une section contractée, si l'on donne à cette expression le sens de *section minimum*. En réalité, la veine, après s'être rapidement contractée au sortir de l'orifice, continue toujours à se contracter, beaucoup plus lentement, mais constamment, à mesure qu'on s'en éloigne.

L'absence d'un minimum de section n'est pas douteuse pour les veines issues d'orifices circulaires et rectangulaires ; quant à celles qui sortent d'un orifice carré, les résultats des expériences sont moins nets, mais cette circonstance est due à la forme compliquée de la veine et à son instabilité qui rendent très difficile la mesure de sa surface.

La veine qui sort d'un orifice circulaire vertical, au contraire, reste régulière, sa section transversale, d'abord exactement circulaire, s'ovalise ensuite en s'aplatissant légèrement dans le sens vertical.

Si l'on relève les courbes des centres des sections successives de la veine et si on les compare à la parabole que décrirait un mobile pesant, partant du centre de l'orifice avec la vitesse horizontale  $v = \sqrt{2gh}$ , on trouve que la courbe des centres des sections diffère peu de la parabole, mais qu'elle se tient au-dessous en s'en écartant progressivement à mesure que l'on s'éloigne de l'orifice. La différence peut sans doute être attribuée à la résistance de l'air.

La veine s'amincit donc en s'éloignant de l'orifice ; sa section diminue et la vitesse moyenne  $U$ , égale au quotient du débit par cette section, augmente par suite de l'accélération résultant de la chute. Si l'on pose  $U = K \sqrt{2g(h+y)}$ ,  $y$  représentant l'abaissement du centre de la section au-dessous de celui de l'orifice, le coefficient  $K$  est légèrement inférieur à l'unité dans le cas de l'orifice horizontal ; il surpasse au contraire l'unité pour l'orifice vertical. Dans l'un et l'autre cas, il paraît aller en croissant jusqu'à une certaine distance de l'orifice, où il atteint un maximum, et diminue ensuite progressivement. Ce maximum ne serait que de quelques millièmes au-dessous de l'unité pour un orifice circulaire horizontal ; il pourrait atteindre 1,03 ou 1,04 pour des orifices verticaux, en variant du reste suivant leur forme et suivant la charge.

Ce résultat, dit M. Bazin, paraît au premier abord en contradiction avec les principes fondamentaux de l'hydraulique. Quand il s'agit d'un filet unique ou d'un ensemble de filets animés de vitesses égales, on trouve bien pour  $K$  des valeurs un peu inférieures à l'unité par suite des frottements intérieurs du liquide. Ce cas est à peu près réalisé par l'orifice circulaire horizontal : la différence  $1 - K$  est toutefois très faible, l'action des frottements étant peu appréciable. Il en serait probablement ainsi pour un orifice vertical si la charge était très grande par rapport à ses dimensions, ce qui égaliserait les vitesses initiales. Mais la question est beaucoup plus complexe lorsque la charge n'est pas très grande ; les vitesses des différents filets sont inégales, leurs directions dépendent de la configuration du contour de l'orifice, et la formule  $U = \sqrt{2g(h+y)}$  n'est plus, au point de vue théorique, rigoureusement exacte <sup>1</sup>.

1. On pourrait être tenté de chercher une explication de l'anomalie signalée par M. Bazin dans le fait de l'inégalité de vitesse des divers filets fluides. Si, pour fixer les idées, on prend un orifice rectangulaire percé dans une paroi verticale et d'une largeur horizontale que l'on peut prendre égale à l'unité et si, comme dans la figure 23, page 63, on appelle  $h_1$  et  $h_2$  les profondeurs, au-dessous de la surface libre, des bords supérieur et inférieur de cet orifice,  $x$  étant la profondeur d'un filet quelconque, la vitesse individuelle de ce filet étant  $\sqrt{2gx}$ , le débit correspondant sera  $\sqrt{2gx}$ , et la vitesse moyenne  $U_m$  aura pour expression :

M. Bazin a pu constater que les vitesses individuelles des divers filets sont inégales. Pour les orifices circulaires ouverts dans une paroi horizontale, la vitesse dans le plan de l'orifice est minimum au centre, mais à mesure qu'on s'éloigne, les vitesses s'égalisent rapidement et deviennent bientôt uniformes dans toute l'étendue de la section transversale. Dans le cas des orifices ouverts dans une paroi verticale, on constate de même, dans le plan de l'orifice, un point où la vitesse est minimum et qui se trouve un peu au-dessus du centre de gravité de la section. En s'éloignant de l'orifice, ce minimum disparaît bientôt, mais les vitesses ne s'égalisent pas; celles de la partie inférieure de la veine restent plus grandes que celles de la partie supérieure.

L'étude de la pression aux différents points de la veine fluide a permis à M. Bazin de rectifier le résultat d'une expérience de Lajerjelm, cité depuis 1826, qui n'avait jamais été vérifié, et d'après lequel

$$U_m = \frac{\int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2gx} \cdot dx}{h_2 - h_1} = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot \frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1}$$

or, la vitesse moyenne, que l'on compare aux résultats de l'observation est calculée par la formule  $U = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{2}}$  et cette valeur est toujours plus grande que la précédente. La différence est faible, et elle diminue très rapidement lorsque la chute augmente. Même lorsque la charge est la plus petite possible, que la surface libre est au sommet de l'orifice, ou que  $\frac{h}{h_1 - h_2} = 0,5$ , le rapport  $\frac{U}{U_m}$  n'est que de 1,06. Aussitôt que la charge devient un peu grande, par exemple, pour  $\frac{h}{h_2 - h_1} = 2$ , le rapport des vitesses n'est déjà plus que de 1,003. En tout cas puisque la valeur calculée pour  $U$  au moyen de la charge moyenne  $h$  est plus faible que celle que donne l'observation, il en serait à plus forte raison de la valeur  $U_m$  calculée d'après les vitesses individuelles.

D'autre part, nous avons vu plus haut que du seul fait de l'inégalité des vitesses des filets fluides, la force vive de la veine est plus grande que celle qui correspondrait à la vitesse moyenne  $U$ : Elle est représentée par  $\alpha U^2$  en appelant  $\alpha$  un coefficient plus grand que l'unité. On devrait donc écrire  $\alpha U^2 = 2gh$ , ce qui donnerait pour  $U$  une valeur inférieure à  $\sqrt{2gh}$ .

Dans l'état actuel de nos connaissances, ce n'est donc pas l'inégalité de vitesse des filets fluides qui peut expliquer la valeur, plus grande que l'unité, du coefficient  $K$ .

Il faut sans doute y voir un effet de la présence de l'atmosphère. Sous une veine *large* qui s'écoule par un orifice rectangulaire vertical, l'air entraîné par le mouvement éprouve une certaine difficulté à se renouveler dans l'angle dièdre aigu qui se trouve sous la veine, entre celle-ci et la paroi verticale. Il en résulte un effet de trompe ou une diminution de la pression atmosphérique sur la veine liquide. Et cela peut suffire, d'après M. Boussinesq, pour expliquer l'augmentation de vitesse constatée.

la pression au centre d'un orifice ouvert dans une paroi horizontale serait précisément égale à la charge  $h$  en ce point, ce qui aurait pour conséquence une vitesse nulle du filet central. L'expérience, entourée de toutes les précautions nécessaires et dégagée de toutes les causes de perturbation, a montré que la pression était inférieure à la charge et que le rapport était d'environ 0,59 ce qui correspond à une vitesse égale à  $0,64 \sqrt{2gh}$ . Or, c'est précisément 0,62 ou  $0,64 \sqrt{2gh}$  que M. Bazin a trouvé pour la vitesse minimum au centre de l'orifice.

L'inégalité constatée des vitesses des filets fluides qui sortent d'un orifice donnerait lieu, d'ailleurs, à l'application de la remarque générale du n° 24, à savoir que la force vive de la veine fluide est supérieure à  $U^2$ . On devrait donc, comme je l'ai dit plus haut en note, écrire l'équation relative à cet écoulement

$$\alpha U^2 = 2gh, \quad \text{ou} \quad h = \frac{\alpha U^2}{2g}$$

en désignant  $\alpha$  par un coefficient toujours plus grand que l'unité. La hauteur de charge, correspondant à une vitesse moyenne  $U$  est donc toujours légèrement plus grande que celle qui résulte de la règle ordinaire, ou de la table I *bis*, à la fin de ce volume. La différence peut atteindre et même dépasser un dixième. Elle n'est donc pas toujours négligeable.

### § 3.

#### CAUSES DE PERTE DE CHARGE

**42. Agitation tourbillonnaire.** — Les causes qui produisent la perte de charge, dans le mouvement des liquides, bien que provenant toutes de l'effet du frottement des molécules liquides soit les unes sur les autres, soit sur les solides avec lesquels elles sont en contact, sont cependant nombreuses et variées. L'une des plus importantes est celle qui est due à ce que l'on appelle l'*agitation tourbillonnaire*, ou plus généralement aux mouvements irréguliers, *non-translatatoires* des molécules liquides. Si l'on imagine une portion de liquide en mouvement au milieu d'une autre en repos, l'extrême mobilité des molécules d'une part, et leur frottement mutuel de l'autre, auront pour effet d'entraîner les parties immobiles auxquelles sera communiquée une partie du mouvement ou de



la force vive du liquide. Cet effet se produit toutes les fois que deux filets liquides voisins sont animés de vitesses différentes ; le fait même de la différence de ces deux vitesses a pour conséquence une impulsion latérale qui tend à écarter l'une de l'autre les deux files de molécules supposées parallèles. Il en résulte des mouvements obliques, compliqués, qui peuvent devenir tumultueux. Les parties du fluide, au lieu d'avoir des vitesses régulièrement croissantes d'un point à l'autre, semblent se séparer par morceaux qui tournent les uns devant les autres, le fond renvoie des masses qui surgissent à la surface, etc.

Dans les endroits où les mouvements sont accompagnés de tourbillonnements nombreux, compliqués et rapides, comme par exemple lors de l'augmentation brusque ou rapide des sections d'écoulement, il se développe des frottements extraordinaires dont le travail constitue la perte de force vive ou perte de charge qu'il s'agit d'évaluer.

#### 43. Elargissement brusque ou rapide de la section d'un courant liquide.

— Soit un courant liquide s'écoulant dans un tuyau à section d'abord constante AABB (fig. 26) et présentant en BB, un élargissement brusque BCBC ; les filets liquides pénétrant dans la partie élargie CDCD s'épanouissent suivant des courbes telles que BDBD et il se produit, dans les angles, des mouvements tourbillonnaires qui absorbent une certaine quantité de force vive. Si l'on considère la section transversale BB, avant l'élargissement, et une autre section DD, un peu après, à une distance suffisante pour que les vitesses de tous les filets soient redevenues parallèles, le théorème de Bernoulli ne sera pas applicable à la trajectoire d'une molécule entre ces deux sections : à cause de la perte de force vive dont il s'agit, le plan de charge pour la section DD sera plus bas que celui de la section BB et la différence constitue la *perte de charge* due à l'élargissement brusque.

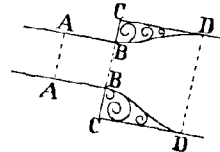


Fig. 26.

Admettons, pour simplifier, que toutes les molécules traversant la section BB aient une vitesse commune  $U_0$ , que, de même, lorsqu'elles traversent la section DD elles aient une même vitesse  $U$  ; désignons par  $p_0$  la pression moyenne sur la section BB, par  $p$  celle sur la section DD ; par  $\omega_0$  et  $\omega$  les aires de ces deux sections, et par  $z_0$  et  $z$  les hauteurs de leurs centres de gravité au-dessus d'un plan horizontal inférieur. Les hauteurs des plans de charge respectifs, au-dessus de ce même plan de comparaison, seront :

$$z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} \quad \text{et} \quad z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g},$$

et pour comparer ces hauteurs, nous allons chercher, entre les diverses quantités qui y figurent, une relation mécanique, en appliquant au liquide en mouvement le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe. La masse liquide qui se trouve dans les parties BCD, n'est animée que d'un mouvement mal défini constitué par des oscillations peu sensibles. Il y a, dans la partie élargie du tuyau, une portion *vive* formée de la veine liquide animée d'un mouvement translatatoire et une portion dite *morte* qui ne sert en rien à l'alimentation et qui n'est animée que de mouvements non-translatatoires. On peut supposer, approximativement, que cette portion dite *morte* est immobile et que la pression y varie suivant la loi hydrostatique, c'est-à-dire que la pression sur la section CC soit égale au produit de l'aire de cette section par la pression en son centre de gravité; de sorte que si  $h$  est la hauteur du centre de gravité de la section BB, où la pression est  $p_0$ , au-dessus du centre de gravité de la section CC, la pression moyenne sur cette dernière sera  $p_0 + \Pi h$ .

Le mouvement étant supposé permanent, l'accroissement de la quantité de mouvement projetée sur une parallèle aux vitesses  $U_0$  et  $U$  sera dû simplement à la différence des quantités de mouvement des tranches infiniment petites et égales, l'une, entrée en BB avec une vitesse  $U_0$ , l'autre, sortie en DD avec une vitesse  $U$ . La masse écoulée dans l'unité de temps étant  $\rho U_0 \omega_0 = \rho U \omega$ , l'accroissement de la quantité de mouvement sera ainsi  $\rho U \omega (U - U_0)$ ; et cet accroissement est égal à la somme des projections des forces sur la direction du mouvement. Les forces sont : 1° la pesanteur qui a pour valeur  $\Pi \omega \times CD$  et dont la projection sur la direction du mouvement sera le produit de  $\Pi \omega$  par la projection de CD sur la verticale ou par  $z_0 - z - h$ , c'est-à-dire  $\Pi \omega (z_0 - z - h)$ ; 2° les pressions. Celles qui s'exercent sur le contour CDCD sont supposées normales et ont une projection nulle; celles qui s'exercent sur BC et DD ont respectivement pour valeur  $\omega (p_0 + \Pi h)$  et  $-\omega p$  et elles se projettent en vraie grandeur. On a ainsi l'équation

$$\rho U \omega (U - U_0) = \Pi \omega (z_0 - z - h) + \omega (p_0 + \Pi h) - \omega p;$$

Divisons par  $\Pi \omega$  et remplaçons  $\frac{\rho}{\Pi}$  par  $\frac{1}{g}$ , nous aurons :

$$\frac{U(U - U_0)}{g} = z_0 - z + \frac{p_0}{\Pi} - \frac{p}{\Pi},$$

ce qui peut s'écrire :

$$(7) \quad z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} + \frac{(U_0 - U)^2}{2g}.$$

Cela montre que le plan de charge en DD est au-dessous du plan de charge en BB de la quantité  $\frac{(U_0 - U)^2}{2g}$  qui représente la perte de charge due à l'élargissement brusque de la section. Cette perte de charge est ainsi la hauteur due à la vitesse perdue par le liquide.

Ce résultat peut être démontré plus simplement en considérant que, d'après ce que nous avons dit à propos du théorème de Bernoulli, la charge en un point est proportionnelle à l'énergie totale au point correspondant. Remarquons alors que les pressions sur la portion DCBBD varient de la même manière que si elles agissaient sur un liquide en équilibre, que par conséquent elles font équilibre à la pesanteur et donneront avec celle-ci un travail total nul pour tout déplacement virtuel attribué à la masse liquide. Cela posé, écrivons l'équation des forces vives, non plus pour les mouvements réels de cette masse, mais pour ses mouvements relatifs à celui du liquide qui coule après DD ou à un système invariable possédant une vitesse uniforme égale et parallèle à  $U$  ; nous ne changerons rien aux mouvements relatifs des molécules ni aux travaux des forces intérieures que nous avons à évaluer. D'autre part, le travail de la pression  $p$  est nul puisque son point d'application est en repos relatif ; le travail des forces intérieures est ainsi égal à la variation de force vive. Or, la force vive est nulle à la sortie puisque les vitesses relatives sont nulles. A l'entrée en BB les vitesses sont  $U_0 - U$  et la force vive est  $\frac{\Pi \omega (U_0 - U)^2}{g \cdot 2}$  ce qui donne pour la variation de force vive par unité de poids du liquide ou pour la perte de charge  $\frac{(U_0 - U)^2}{2g}$ , comme nous venons de le trouver autrement.

Cette démonstration s'étend au cas où l'élargissement, au lieu d'être brusque, c'est-à-dire formé par une paroi BCBC normale à la direction du mouvement, est graduel ou évasé, à la condition que dans toute son étendue les pressions s'y règlent comme si le liquide était en repos. Mais elle suppose comme la précédente la presque stagnation du liquide dans la partie évasée, ce qui n'est pas absolument vérifié par l'expérience ; elle suppose aussi que les vitesses  $U_0$  et  $U$  sont communes à tous les filets qui traversent les sections BB et DD, hypothèse absolument contraire aux faits qui démontrent,

comme nous aurons occasion de le dire plus loin, que la vitesse va en croissant du périmètre au centre de la section ; enfin, le calcul de la perte de charge néglige le travail du frottement sur les parois, et du frottement mutuel des molécules liquides dans toute la partie *vive* de la veine, entre BB et DD. On tient compte dans une mesure suffisante, de ces différences entre la théorie et les faits en ajoutant à la perte de charge  $\frac{(U_0 - U)^2}{2g}$  un terme correctif complémentaire dont la valeur doit être fixée, d'après des expériences de Borda, interprétées par St-Venant <sup>1</sup>, à 0,111  $\frac{U^2}{2g} = \frac{1}{9} \frac{U^2}{2g}$ . De sorte que la perte de charge due à un élargissement brusque ou rapide de la section transversale d'un courant serait à peu près <sup>2</sup> :

$$(8) \quad \frac{(U_0 - U)^2}{2g} + \frac{1}{9} \frac{U^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{U_0}{U} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right] = \frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right].$$

**44. Passage dans une section rétrécie.** — Lorsqu'un courant arrive dans une section rétrécie, il se produit en général un phénomène analogue à celui de l'écoulement par un orifice en mince paroi : et nous avons vu plus haut (n° 33), qu'il n'y a pas alors de perte de charge. Les frottements intérieurs et extérieurs qui se produisent en effet jusqu'à la section contractée sont négligeables et si, à partir de cette section, le courant liquide conservait une section constante, il n'y aurait d'autre perte de charge que celle qui provien-

1. Mémoire sur la perte de force vive d'un liquide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement (*Mémoires de l'Institut*, T. XLIV).

2. Le terme correctif  $\frac{1}{9} \frac{U^2}{2g}$  ne provient qu'en partie de l'excès de la quantité de mouvement du volume liquide traversant la section dans l'unité de temps sur ce que serait cette quantité de mouvement si tous les filets liquides avaient la vitesse commune  $U$ . Cet excès ne dépasse guère  $\frac{1}{15} \frac{U^2}{2g}$  et il y aurait lieu d'ailleurs de tenir compte en sens inverse d'une correction correspondante pour le liquide traversant la section BB avec la vitesse moyenne  $U_0$ , en sorte qu'au total la correction  $\frac{1}{15} \frac{U^2 - U_0^2}{2g}$  serait négative. Mais c'est par suite de compensations d'erreurs ou d'approximations et de l'intervention de causes de pertes de charge négligées que l'on peut adopter avec assez d'exactitude le terme correctif  $\frac{1}{9} \frac{U^2}{2g}$ . Ce terme est d'ailleurs fort petit. Pour une vitesse de 3 mètres qui est à peu près le maximum de celles que l'on donne à l'eau dans les tuyaux de conduite, il n'a qu'une valeur de 0 m. 05. Il est donc la plupart du temps négligeable.

draît du frottement sur les parois, que nous étudierons plus loin et qui est toujours très petite lorsqu'il s'agit d'une faible longueur. Mais si, après avoir été contractée, la veine liquide trouve à s'épanouir dans une section plus grande, cet élargissement brusque ou rapide donnera lieu à la perte de charge qui vient d'être évaluée. Il peut alors se présenter deux cas distincts ; ou bien la section rétrécie n'a qu'une très faible longueur dans le sens du courant et constitue, en quelque sorte, une mince paroi, comme le serait un diaphragme percé d'un orifice et placé transversalement au courant, ou bien, au contraire, la section rétrécie forme une sorte de tuyau où elle reste constante sur une certaine longueur.

Dans le premier cas, si  $AB$  (fig. 27) est la section rétrécie en mince paroi dont nous désignerons l'aire par  $\omega_0$ , le courant après l'avoir traversée se contracte jusqu'en  $CD$  où il n'a plus qu'une section égale au produit de  $\omega_0$  par un coefficient de contraction  $m$ . Puis le courant s'épanouit jusqu'à la section  $EF$  dont nous désignerons l'aire par  $\omega$ , et alors, d'après la formule (8), la perte de charge due à l'élargissement brusque de la section depuis la valeur  $m\omega_0$  jusqu'à la valeur  $\omega$  sera, en appelant  $U$  la vitesse moyenne à travers la section  $EF$  :



Fig. 27.

$$\frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{\omega}{m\omega_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right].$$

Au moyen de cette expression de la perte de charge, on peut calculer la vitesse  $U$  correspondant à une charge donnée  $h$ .

Pour plus de généralité, représentons par une lettre le coefficient de correction numérique  $\frac{1}{9}$  que nous avons indiqué comme déduit de l'expérience, et considérant qu'il représente, à peu près, l'excès sur l'unité du coefficient que nous avons appelé plus haut  $\alpha$  et qui exprime le rapport de la force vive réelle d'un courant liquide à celle qui correspondrait à sa vitesse moyenne, remplaçons  $\frac{1}{9}$  par  $(\alpha - 1)$ , l'équation du mouvement s'écrira <sup>1</sup> :

$$h = \frac{\alpha U^2}{2g} + \left[ \left( \frac{\omega}{m\omega_0} - 1 \right)^2 + (\alpha - 1) \right] \frac{U^2}{2g}.$$

Enfin, admettons encore qu'avant de s'écouler dans l'atmosphère,

1. Je ne me fais aucune illusion sur le peu de rigueur de ce raisonnement, mais le lecteur qui voudra être édifié sur ce point pourra consulter l'Essai sur la théorie des Eaux courantes de M. Boussinesq, n° 53 et suivants.

la veine fluide parcourt, après la section EF, une certaine longueur de tuyau, et que le frottement sur les parois occasionne une nouvelle perte de charge que nous représenterons par  $\frac{\beta \cdot U^2}{2g}$ , le coefficient  $\beta$  dépendant de la longueur du tuyau qui existera après la section EF, l'équation s'écrira

$$h = \left[ (2\alpha + \beta - 1) + \left( \frac{\omega}{m\omega_0} - 1 \right)^2 \right] \frac{U^2}{2g}$$

Et si nous voulons calculer la vitesse moyenne maximum, qui se produit dans la section contractée CD et que nous appellerons  $U_0$ , nous écrivons

$$m\omega_0 U_0 = \omega U$$

ou bien, en posant, pour simplifier

$$m' = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \text{d'où} \quad U = mm' U_0$$

nous obtiendrons

$$h = \left[ (2\alpha + \beta - 1) m^2 m'^2 + (1 - mm')^2 \right] \frac{U_0^2}{2g}.$$

La parenthèse du second membre de cette équation, lorsque le produit  $mm'$  varie, devient minimum, et par conséquent  $U_0$  devient maximum, lorsque  $\frac{1}{mm'} = 2\alpha + \beta$ . Cette valeur est toujours supérieure à 2, même pour un ajustage dont le coefficient de résistance  $\beta$  est insensible. Pour une section circulaire, M. Boussinesq a montré que  $\alpha$  pouvait atteindre et même dépasser 1,14. Alors  $2\alpha$  vaut environ 2,3.

Péclet, dans ses expériences sur l'écoulement des gaz, a trouvé que la valeur du rapport  $\frac{1}{mm'}$ , pour laquelle la vitesse  $U_0$  devient maximum, est comprise entre 2 et 3 et que  $U_0$  dont le maximum est :

$$\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2\alpha + \beta}}}$$

a toujours été, dans ces expériences, supérieur à  $1,37 \sqrt{2gh}$ ; ce qui montre que  $\alpha$  a toujours été plus grand que 1,07.

Le second cas (fig. 28), où la section rétrécie présente une grande longueur, se ramène au précédent en observant que la section EF est alors égale à  $\omega_0$ , et que le rapport  $\frac{\omega}{m\omega_0}$  devient  $\frac{1}{m}$ . Il en résulte que la perte de charge correspondante est

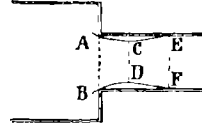


Fig. 28.

$$\frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right].$$

La valeur du coefficient  $m$  qui figure dans cette formule est indéterminée. Il est d'usage de le prendre égal à 0,62, c'est-à-dire de l'assimiler au coefficient de débit d'une veine en mince paroi. Alors, la perte de charge a pour valeur :

$$\frac{U^2}{2g} [0,38 + 0,11] = 0,49 \frac{U^2}{2g} \quad , \quad \text{soit environ } \frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{2g}.$$

Dans ses expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux, M. Bazin a trouvé, pour la perte de charge dont il s'agit, la valeur  $0,30 \frac{U^2}{2g}$ . Mais il constate que le tuyau de 0<sup>m</sup>80 de diamètre sur lequel il opérait ne se trouvait qu'à 0<sup>m</sup>12 au-dessus du fond de la rigole qui le précédait, de sorte que la contraction n'était sans doute pas complète; les parois de la même rigole, qui n'étaient distantes du bord du tuyau que de 0<sup>m</sup>40, ont pu exercer quelque influence dans le même sens. Le coefficient 0,62 doit donc, dans ce cas, être légèrement augmenté, et en le portant à 0,70, ce qui est très admissible, on trouve le chiffre  $0,30 \frac{U^2}{2g}$  observé par M. Bazin.

Le calcul de la vitesse  $U$  en fonction de la charge se ferait comme dans le cas précédent. On aurait alors, en remplaçant encore  $\frac{1}{9}$  par  $(\alpha - 1)$ :

$$h = \frac{U^2}{2g} \left[ (2\alpha + \beta - 1) + \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 \right];$$

ce qui, en supposant un ajustage très court où le coefficient  $\beta$  soit négligeable et en faisant  $\alpha = 1,11$ ,  $m = 0,62$ , donne :

$$h = 1,60 \frac{U^2}{2g}$$

ou bien

$$U = \sqrt{\frac{2gh}{1,60}} = 0,79 \sqrt{2gh}.$$

**45. Perte de charge due aux coudes.** — Lorsque le courant liquide doit suivre une trajectoire courbe qui lui est imposée par la forme des corps solides avec lesquels il est en contact, il en résulte encore une perte de charge dont il est facile d'apercevoir la cause.

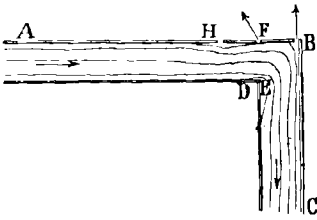


Fig. 29.

Soit, par exemple (fig. 29), un tuyau présentant un coude brusque ABC. On conçoit qu'après le coude les filets liquides, obligés de se courber brusquement, produisent, en E, un phénomène analogue à celui de la contraction de la veine qui s'observe après un rétrécissement brusque ; mais la perturbation de l'écoulement paraît s'étendre même dans la branche AB, avant le coude et du côté opposé à l'angle rentrant D. Les expériences citées par M. de Caligny (*Hydraulique*, page 247) montrent que si, sur la paroi AB du tuyau supposée horizontale, on a percé trois petits trous, le premier B, tout à fait à l'angle, le second F, à une distance égale à peu près au diamètre, et le troisième H à même distance du second, ces trous pouvant à volonté être ouverts ou fermés avec de la cire, de l'orifice B sort un jet normal à la direction du tuyau ; de l'orifice F, un jet oblique vers l'arrière, et de l'orifice H il ne sort rien. Cette expérience montre que l'écoulement dans un coude s'effectue suivant des lois assez compliquées, et qu'on essaierait en vain, dans l'état actuel de la science, de l'étudier théoriquement. La perte de charge, dont l'évaluation a seule un intérêt pratique, a été déterminée expérimentalement. Pour un coude à angle droit, elle est d'environ  $\frac{1}{4} \frac{U^2}{2g}$ , en appelant U la vitesse moyenne de l'eau.

Si le coude est arrondi, les filets liquides, qui sont d'abord parallèles, et qui, en vertu de l'inertie, tendent à rester rectilignes, viennent se réfléchir successivement sur la paroi concave et se croisent ensuite en s'enchevêtrant dans tous les sens. Dans la figure 30, les lignes pleines montrent les trajectoires que suivraient les filets liquides s'ils étaient isolés et si chacun d'eux pouvait, indépendamment des autres, continuer sa marche rectiligne et venir se réfléchir successivement sur les parois courbes. Du Buat a établi, dans cette hypothèse, un essai de théorie de l'écoulement dans les courbes. En réalité, la marche des filets liquides est bien différente : chacun d'eux est influencé par son voisin et suit une trajectoire courbe présentant sans doute une courbure un peu plus grande que celle du coude, à peu près comme l'indiquent les lignes pointillées. La vitesse



moyenne restant la même si la section est constante, la répartition des vitesses est très différente de ce qu'elle est dans une partie recti-

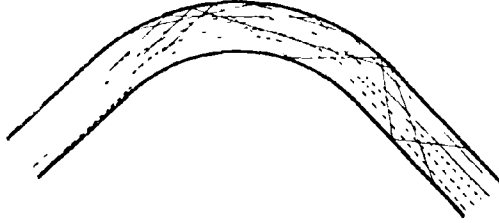


Fig. 30.

ligne. L'effet du coude est, dans une certaine mesure, assimilable à celui d'un étranglement de la section transversale ; la perte de charge dépend donc alors de la vitesse. Mais elle doit aussi dépendre encore de l'angle de contingence du coude, ou du rapport  $\frac{L}{r}$  de la longueur  $L$  de la courbe, mesurée sur le filet moyen, au rayon de courbure  $r$  de ce filet, et dans une certaine mesure aussi du diamètre  $D$  du tuyau. En discutant une formule empirique déduite par Du Buat de ses expériences, de St-Venant<sup>1</sup> a reconnu que la perte de charge dont il s'agit pouvait être représentée par la formule suivante dans laquelle les trois quantités  $L$ ,  $D$ ,  $r$ , qui viennent d'être définies, ainsi que la vitesse  $U$ , sont exprimées en mètres :

$$0,096 \frac{U^2 L}{2g r} \sqrt{\frac{D}{r}} = 0,005 U^2 \frac{L}{r} \sqrt{\frac{D}{r}}.$$

On peut se contenter, en général, de prendre approximativement, pour cette perte de charge, la valeur :

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{U^2}{2g} \text{ ou } \frac{1}{200} U^2;$$

ce qui revient à remplacer par l'unité le produit  $\frac{L}{r} \sqrt{\frac{D}{r}}$ .

La perte de charge due aux coudes est souvent négligée dans les calculs. Il en est de même d'ailleurs des autres pertes de charge que nous venons d'évaluer.

1. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 6 janvier 1862.

## § 4.

## AJUTAGES

**46. Écoulement par des orifices munis d'ajutages.**

— On appelle *ajutage* un tuyau de faible longueur placé à la suite d'un orifice par lequel s'écoule un liquide. Un orifice qui n'est pas en mince paroi peut être considéré comme muni d'un ajutage. Les ajutages peuvent être cylindriques ou coniques et leur présence modifie les conditions de l'écoulement, comme nous allons le voir en examinant les diverses formes qu'ils peuvent présenter.

**47. Ajutage cylindrique rentrant, ou de Borda. —**

L'orifice peut être muni d'un ajutage cylindrique situé du côté de l'intérieur du vase (fig. 31). Cette disposition a pour objet de rendre sensiblement immobile le liquide qui se trouve en contact avec la paroi LM dans laquelle se trouve percé l'orifice, de sorte que les pressions s'y répartissent suivant la loi hydrostatique de la même manière que sur toutes les autres parois, et que, abstraction faite de l'orifice CD, les pressions sur toutes les parois varient suivant cette loi hydrostatique. Si l'on considère le contour IK intercepté sur la paroi opposée par le prolongement de l'ajutage, il y aura équilibre entre toutes les pressions exercées sur le liquide par les parois, à l'exception de celle qui correspond à la portion IK, laquelle n'aura pas de contre-partie sur la paroi opposée. Cela étant, appliquons à l'écoulement le théorème des quantités de mouvement projetées sur l'horizontale ; soit G le centre de gravité de la section contractée et  $h$  sa profondeur au-dessous de la surface libre. En admettant même que cette surface libre se soit abaissée, pendant l'unité de temps, d'une quantité appréciable, la quantité de mouvement qui en résulte a une projection nulle sur l'horizontale puisque les vitesses des différents points ont été verticales. L'accroissement de la quantité de mouvement est dû à la masse liquide écoulée par la section G, d'aire  $\omega'$ , avec la vitesse U. Cette masse est  $\rho\omega'U$ , et la quantité de mouvement correspondante,  $\rho\omega'U^2$ , doit être égale à la somme des projections des forces sur l'horizontale. A l'exception

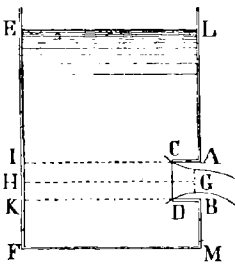


Fig. 31.

des forces qui agissent sur IK et CGD, ces projections sont nulles. Si  $\omega$  est l'aire de la section CD ou de IK, la projection sur GH de la pression sur IK sera  $(p_0 + \Pi h) \omega$ , en appelant  $p_0$  la pression atmosphérique qui s'exerce sur la surface libre et sur le contour de la veine CGD. La pression sur cette veine est égale (n° 12, p. 13) à  $p_0 \times CD$  ou à  $p_0 \omega$ ; la somme des projections des forces est ainsi  $(p_0 + \Pi h) \omega - p_0 \omega = \Pi h \omega$  et elle doit être égale à  $\rho \omega' U^2$ . Remplaçons  $\Pi$  par  $\rho g$ , puis  $U^2$  par  $2gh$  et écrivons cette égalité, il vient,

$$\rho gh \omega = \rho \omega' \cdot 2gh \text{ ou } \omega = 2\omega', \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{2}.$$

Le coefficient de contraction est, dans ce cas, égal à  $\frac{1}{2}$ , et ce résultat a été vérifié par l'expérience. Le débit de cet ajutage est donc  $Q = \frac{1}{2} \omega \sqrt{2gh}$ .

**48. Ajutage cylindrique extérieur.** — Si le tuyau formant ajutage a une longueur égale à une fois et demie au moins la plus grande dimension de l'orifice, on constate que la veine fluide, après avoir subi une contraction à l'entrée jusqu'à une section CD (fig. 32) s'épanouit ensuite, vient remplir le tuyau et sort à *gueule-bée*, c'est-à-dire par toute la section terminale EF. La perte de charge est alors, d'après ce qui vient d'être dit au numéro 44 page 79, égale à :

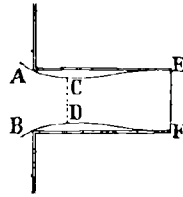


Fig. 32.

$$\frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right],$$

en appelant  $U$  la vitesse moyenne de sortie et  $m$  le coefficient de contraction. Appliquons le théorème de Bernoulli à une molécule quelconque, depuis l'instant où sa vitesse était nulle jusqu'au moment où elle traverse la section EF avec une vitesse  $U$ , en appelant comme plus haut  $h$  la profondeur du centre de gravité de cette section au-dessous de la surface libre et  $p_0$  la pression atmosphérique, que nous supposons agir sur la surface libre et sur la veine liquide à sa sortie. Le plan de charge au départ sera, au-dessus de la surface libre, à une hauteur  $\frac{p_0}{\Pi}$ ; dans la section EF le plan de

charge sera au-dessus de cette section à une hauteur  $\frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\Pi}$  et ce plan est plus bas que le premier de  $\frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right]$ . On a ainsi :

$$\frac{p_0}{\Pi} + h = \frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right];$$

d'où l'on tire :

$$U = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{10}{9}}};$$

ce qui, avec la valeur  $m = 0,62$ , donne  $U = 0,82 \sqrt{2gh}$ .

Comme la section où se produit la vitesse moyenne  $U$  est égale à la section  $\omega$  de l'orifice, le débit  $Q$  est égal à  $0,82 \omega \sqrt{2gh}$  et il est supérieur, par conséquent, au débit de l'orifice en mince paroi qui n'est que  $0,62 \omega \sqrt{2gh}$ . La vitesse de sortie est inférieure mais la section est augmentée.

L'augmentation de débit est le résultat d'une diminution de la pression sur la section contractée CD. Il suffit, pour la calculer, d'appliquer le théorème de Bernoulli depuis le point de départ d'une molécule jusqu'à la section CD, trajet dans lequel il n'y a pas de perte de charge. En appelant  $p_1$  la pression inconnue et  $U_1$  la vitesse dans cette section, on a l'équation :

$$\frac{p_0}{\Pi} + h = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Pi},$$

et en écrivant que les vitesses  $U_1$  et  $U$  sont en raison inverse des sections  $m\omega$  et  $\omega$  ou que  $U_1 m \omega = U \omega$ , c'est-à-dire en remplaçant  $U_1$  par  $\frac{U}{m}$  ou par  $\frac{0,82}{0,62} \sqrt{2gh}$ , il vient

$$\frac{p_0 - p_1}{\Pi} = h \left[ \left( \frac{0,82}{0,62} \right)^2 - 1 \right] = \frac{3}{4} h = 0,75 h.$$

Cette diminution de pression a été constatée par une expérience célèbre de Venturi.

La charge totale,  $h$ , peut être considérée comme formée de deux parties ; l'une, égale à  $(0,82)^2 = 0,6724$  ou à peu près à  $\frac{2}{3} h = \frac{U^2}{2g}$ , correspond à la vitesse  $U$  communiquée à l'eau à la sortie ; l'autre, égale à peu près à  $\frac{1}{3} h$  représente la perte de charge. Il en résulte

que, dans l'étendue de l'ajutage, le plan de charge s'abaisse de  $\frac{1}{3} h$  ou de 0,49 soit  $\frac{1}{2} \frac{U^2}{2g}$ .

Ce même abaissement du plan de charge se produit, bien entendu, à l'entrée de tout tuyau dont l'origine peut être assimilée à un ajutage.

Par conséquent, la consommation totale de charge, à l'entrée d'un tuyau, est égale à  $\frac{3}{2} \frac{U^2}{2g}$  savoir :  $\frac{1}{2} \frac{U^2}{2g}$  pour la perte calculée comme à la fin du n° 44, page 79, et  $\frac{U^2}{2g}$  pour la hauteur nécessaire à la production de la vitesse.

**49. Ajutages coniques.** — Les ajutages coniques peuvent être convergents ou divergents. Les ajutages convergents ne présentent rien de particulier : très peu convergents, ils sont assimilables aux ajutages cylindriques ; très convergents, au contraire, ils produisent des phénomènes analogues à ceux d'une mince paroi, la veine se contracte à la sortie. Si l'inclinaison du cône est exactement celle qui correspondrait au contour de la veine contractée sortant d'un orifice, il ne se produit pas de perte de charge. Dans tous les autres cas, il y en a une plus ou moins grande : la vitesse de sortie n'est donc qu'une fraction de  $\sqrt{2gh}$ , soit  $\mu \sqrt{2gh}$  ; la section contractée étant toujours  $m\omega$ , le débit est  $\mu m\omega \sqrt{2gh}$  et dépend du produit des deux coefficients de réduction  $\mu$  et  $m$ , tous deux variables et inférieurs à l'unité. L'expérience a montré que le débit était maximum lorsque l'angle au sommet du cône atteignait 12 degrés environ et que sa valeur était alors  $0.94 \omega \sqrt{2gh}$ .

Si l'ajutage est divergent et si la divergence est assez faible pour que les filets liquides en mouvement restent constamment en contact avec les parois, sans interposition d'aucune partie morte, il n'y a pas de perte de charge appréciable, ou tout au moins susceptible d'être calculée comme dans le cas de l'ajutage cylindrique. La vitesse de sortie est donc alors, théoriquement, égale à  $\sqrt{2gh}$  quelle que soit la grandeur de l'orifice EF (fig. 33). Il en résulterait que le débit pourrait être augmenté indéfiniment par un allongement suffisant de l'ajutage. Mais ce raisonnement paradoxal

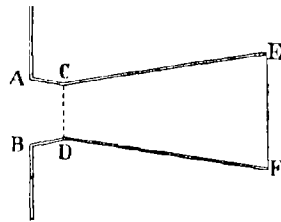


Fig. 33.

est inexact. Il se produit en réalité des pertes de charge, difficiles à évaluer, mais que l'expérience a toujours révélées. En outre, la vitesse  $U = \sqrt{2gh}$  à travers l'orifice EF de section  $\omega$  a pour conséquence dans la section CD, d'aire  $\omega_1$ , une vitesse  $U_1 = \frac{U\omega}{\omega_1}$  d'autant plus grande que le rapport  $\frac{\omega}{\omega_1}$  est plus grand, et cette vitesse  $U_1$  ne peut se produire, d'après le principe de Bernoulli, que si la pression, dans la section CD, diminue dans une proportion convenable.

Représentons par  $p_1$  la pression dans cette section, nous aurons, comme plus haut entre  $p_1$  et la vitesse  $U_1$  correspondante, la relation

$$\frac{p_0}{\Pi} + h = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Pi}$$

ou bien

$$U_1^2 = 2g \left( h + \frac{p_0 - p_1}{\Pi} \right).$$

La pression  $p_1$  ne peut être indéfiniment diminuée ; non seulement elle ne peut devenir négative, ni même s'annuler, mais elle ne peut, lorsqu'il s'agit d'un écoulement d'eau, descendre au-dessous d'une certaine fraction (la moitié ou le tiers, par exemple) de la pression atmosphérique  $p_0$ . Au delà de cette limite, l'air contenu en dissolution dans l'eau se dégage et l'écoulement devient tumultueux. Lorsque l'ajutage débouche dans l'atmosphère, la valeur de  $\frac{p_0}{\Pi}$  étant d'environ 10 mètres, le terme  $\frac{p_0 - p_1}{\Pi}$  ne peut ainsi, pratiquement dépasser 5 à 7 mètres. En admettant, à l'extrême limite, que la pression  $p_1$  soit diminuée jusqu'à zéro, la vitesse maximum  $U_1$  que l'on peut obtenir ne peut dépasser

$$U_1 = \sqrt{2g(h + 10^m)}$$

Par conséquent, lorsqu'il s'agit d'ajutages débouchant dans l'atmosphère, il n'y a aucune utilité à ce que le rapport  $\frac{\omega}{\omega_1}$  des sections EF et CD dépasse la valeur correspondante, c'est-à-dire

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{U_1}{U} = \frac{\sqrt{2g(h + 10)}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{1 + \frac{10^m}{h}}.$$

Une valeur plus grande de ce rapport ne peut donner un écoulement régulier et ne produit plus qu'une augmentation de débit absolument illusoire.

Le débit d'un ajutage conique divergent appliqué à une section rétrécie  $\omega_1$  sous une charge  $h$  se trouve ainsi limité pratiquement au maximum

$$\omega_1 U_1 = \omega_1 \sqrt{2g(h + 10^m)};$$

et pour n'avoir aucun mécompte, il sera prudent de mettre sous le radical  $h + 7^m$  au lieu de  $h + 10^m$ .

Pour obtenir l'augmentation de débit que l'on peut attendre de cette disposition, il faut que l'ajutage divergent ne laisse pas pénétrer l'air et que la pression atmosphérique ne puisse pas s'exercer sur la veine fluide. S'il en était autrement, ainsi que l'a montré Venturi en perçant de petits trous la paroi d'un pareil ajutage, on ne constaterait plus aucune augmentation du débit.

L'ajutage conique divergent a été appliqué, par M. Jandin, aux appareils de chasse destinés au dévasement des réservoirs. Il présente, sur les appareils ordinaires, l'avantage d'un débit bien supérieur, à égalité de dimensions des vannes, qui sont placées dans la section contractée CD. Des appareils de ce système fonctionnent notamment aux barrages de la Djidiouïa et du Hamiz (Algérie).

**50 Compteur Venturi.** — Cet ajutage a reçu dans ces dernières années une autre application industrielle intéressante : il a été proposé, par M. Clémens Herschell <sup>1</sup>, comme compteur, ou appareil destiné à mesurer le volume débité par un tuyau. L'appareil établi suivant les idées de ce savant ingénieur, et auquel il a donné le nom de *compteur Venturi* (Venturi Meter) est basé sur ce fait que la différence des pressions dans la section AB, précédant le rétrécissement, et dans la section la plus rétrécie CD varie avec la vitesse. Il suffit donc, avec un appareil bien calibré, d'observer cette différence, ou la hauteur d'eau correspondante, pour en déduire la vitesse et par suite le débit.

Cette différence de pression se mesure directement, au moyen de tubes piézométriques mis en communication avec l'intérieur du tube, au droit des sections AB et CD (fig. 34). Pour la section AB, qui dans l'appareil fait suite à une conduite de même diamètre, l'installation de ce tube n'a rien de particulier ; il est simplement vissé sur une petite ouverture pratiquée dans la paroi de la conduite. Quant à celui qui doit mesurer la pression dans la section rétrécie CD, il n'est pas placé directement sur le tuyau, mais sur une cham-

<sup>1</sup>. Mémoire lu à la Société Américaine des Ingénieurs civils, le 21 décembre 1887.

bre annulaire qui l'entoure et qui communique avec l'intérieur de la conduite par quatre orifices très petits percés aux extrémités de deux diamètres rectangulaires. Le tube piézométrique, recourbé en

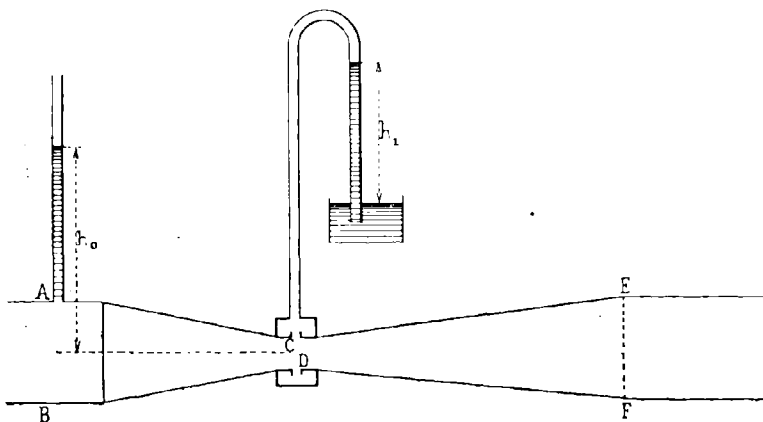


Fig. 34.

siphon, plonge par son extrémité dans un bassin plein d'eau, et la diminution de pression en CD aspire cette eau et la fait s'élever dans le tube à une certaine hauteur  $h_1$  au-dessus du niveau du bassin. Si l'on a mesuré en même temps la hauteur  $h_0$  au-dessus de l'axe du tuyau, à laquelle le niveau s'est élevé dans le tube piézométrique placé en AB, la pression, dans cette section, sera  $p_0 + \Pi h_0$  et dans la section CD, elle sera  $p_0 - \Pi h_1$  en appelant toujours  $p_0$  la pression atmosphérique. Ecrivant l'équation de Bernoulli, en négligeant la perte de charge insignifiante qui peut se produire entre les deux sections, on a, en appelant  $U_0$  et  $U_1$  les vitesses moyennes respectives :

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p_0}{\Pi} + h_0 = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_0}{\Pi} - h_1$$

D'autre part,  $\omega_0$  et  $\omega_1$  étant les superficies des deux sections transversales on a aussi, en appelant  $Q$  le débit :

$$\omega_0 U_0 = \omega_1 U_1 = Q$$

D'où l'on déduit facilement :

$$Q = \frac{\omega_0 \omega_1}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}} \sqrt{2g (h_0 + h_1)}$$



Pour tenir compte de la perte de charge, on peut affecter cette formule d'un coefficient numérique  $k$  un peu inférieur à l'unité, et écrire

$$Q = k \cdot \frac{\omega_0 \omega_1}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}} \sqrt{g(h_0 + h_1)}.$$

Les sections transversales de l'appareil sont très exactement calibrées et mesurées, on peut donc déterminer, avec une approximation aussi grande qu'on le veut, le terme  $\frac{\omega_0 \omega_1}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}}$ . Dans les appareils en usage, le rapport  $\frac{\omega_0}{\omega_1}$  est pris aussi exactement que possible égal à 9 de sorte que ce terme vaut  $\frac{9\omega_1}{\sqrt{80}} = 1.0062 \omega_1$ . D'autre part, les expériences ont montré que le coefficient correctif  $k$  varie de 0,95 à 0,99. De sorte que l'on peut prendre, avec une approximation souvent suffisante :

$$Q = \omega_1 \sqrt{2g(h_0 + h_1)}.$$

La somme  $(h_0 + h_1)$ , qui est en réalité une différence entre les hauteurs  $h_0$  et  $-h_1$ , se mesure au moyen de flotteurs auxquels sont attachés des fils passant sur des poulies dont les axes portent des aiguilles indicatrices. On comprend que la graduation des cadrans sur lesquelles se meuvent ces aiguilles puisse donner, à la lecture, le débit  $Q$  correspondant à une hauteur  $(h_0 + h_1)$  constatée par l'appareil. Mais, de plus, le *Venturi Meter*, tel qu'il est livré dans le commerce, est muni d'un mouvement d'horlogerie qui additionne automatiquement les débits constatés pendant chaque unité de temps et qui met en mouvement les aiguilles d'un compteur sur lequel on lit immédiatement le volume total écoulé dans l'appareil depuis le commencement de l'expérience.

On trouve des compteurs de ce genre, de toutes les dimensions, pour tous les débits, depuis les plus petits jusqu'aux plus grands. Ils paraissent donner de très bons résultats.

1. La section rétrécie CD présente la forme cylindrique sur une longueur égale au tiers de son diamètre. En prenant cette longueur pour unité, les diamètres AB et EF sont, l'un et l'autre, égaux à 3, le diamètre CD étant 1. Les hauteurs des troncs de cône, mesurées sur l'axe, sont, pour le cône convergent, 17,09 et pour le cône divergent 69,80 de sorte que la distance totale entre les sections extrêmes est de 87,89. Les angles à la base des deux cônes sont respectivement de  $79^\circ,30'$  et de  $87^\circ,30'$ .

## § 5.

## DÉVERSOIRS

**51. Écoulement par déversoir.** — On appelle déversoir un orifice superficiel ouvert à sa partie supérieure. La forme des déversoirs est généralement rectangulaire ; leur *seuil* est horizontal et leurs *joues* sont verticales. La largeur du déversoir est la distance entre les joues.

Le seuil d'un déversoir présente toujours une saillie sur le fond du cours d'eau et c'est cette saillie qui constitue même, à proprement parler, le déversoir. Le niveau de l'eau, en aval, doit, pour que l'orifice fonctionne véritablement comme déversoir, se trouver au-dessous du niveau du seuil ; autrement le déversoir est noyé.

La théorie de l'écoulement par déversoir a été longtemps imparfaite, mais depuis les travaux théoriques de M. Boussinesq <sup>1</sup> et les remarquables expériences de M. Bazin <sup>2</sup> on peut donner une explication suffisante du phénomène.

Si l'on considère l'écoulement au-dessus d'un déversoir en mince paroi (fig. 35), on constate que le niveau d'amont, supposé d'ailleurs

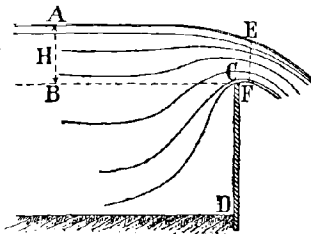


Fig. 35.

maintenu constant, s'abaisse à une certaine distance en avant de l'orifice et que l'épaisseur de la lame d'eau déversante n'est qu'une fraction de la hauteur verticale H de ce niveau au-dessus du seuil. Lorsque le mouvement est permanent, l'épaisseur  $h$  de la lame déversante se règle de telle façon que, pour la hauteur H donnée supposée constante, le débit du déversoir soit maximum ; car le régime d'un cours d'eau ne peut être stable qu'autant que la masse liquide y coule partout le plus bas possible ; la hauteur sur le déversoir est donc minimum pour une valeur donnée du débit Q, ou, inversement, Q est maximum <sup>3</sup> pour une valeur donnée de l'épaisseur  $h$ .

1. Voir les comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, années 1887, 1888 et 1889.

2. Voir les *Annales des Ponts et Chaussées*, années 1890 et 1891.

3. On peut justifier ce principe du maximum du débit d'une manière plus rigoureuse. Le débit Q est nécessairement une fonction de la charge H sur le

**52. Déversoir à crête épaisse.** — Ce principe étant admis, le calcul du débit d'un déversoir devient facile. Supposons d'abord, comme on le faisait généralement avant d'avoir la théorie du déversoir en mince paroi, que le seuil du déversoir ait une épaisseur suffisante pour que la lame déversante (fig. 36) y coule, sur une certaine longueur, de façon à ce que tous les filets fluides aient des trajectoires horizontales, et soient H et h les hauteurs sur le seuil du niveau d'amont et de la lame déversante ; admettons que la vitesse U

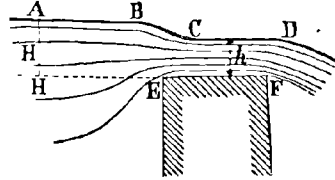


Fig. 36.

des filets fluides soit la même pour tous, et appliquons le théorème de Bernoulli à une molécule partant du repos en amont et traversant le déversoir avec la vitesse U : nous aurons en faisant abstraction de la pression atmosphérique qui est constante :

$$\frac{U^2}{2g} = H - h \quad \text{ou} \quad U = \sqrt{2g(H - h)}.$$

Alors, la largeur du déversoir étant l, la section d'écoulement est lh et le débit Q a pour valeur :

$$Q = lh \sqrt{2g(H - h)},$$

en ne tenant pas compte de la contraction latérale que peuvent produire les joues du déversoir, c'est-à-dire en admettant que le débit soit constant par unité de longueur du seuil. Ce débit  $\frac{Q}{l}$ , par

seuil du déversoir et de l'épaisseur h de la lame déversante :  $Q = f(H, h)$ . Imaginons que, le débit étant constant, le niveau d'aval ait été d'abord tenu assez haut pour noyer le déversoir puis abaissé peu à peu jusqu'à production sur le barrage, du régime désormais invariable que nous étudions. L'approche de cet état-limite, où s'évanouit l'influence sur H du niveau d'aval, doit être annoncée par une atténuation indéfinie de cette influence, non seulement entre l'aval et la section contractée, mais aussi entre la section contractée et l'amont du déversoir. Elle est donc caractérisée par ce fait qu'une diminution — dh de l'épaisseur de la lame déversante n'aura plus produit qu'un abaissement — dH, infiniment plus faible, de la hauteur H ; c'est-à-dire que le rapport  $\frac{dH}{dh}$  sera nul au moment où s'établira le régime dont nous cherchons la loi.

Mais la relation  $Q = f(H, h) = \text{const.}$  donne  $\frac{dQ}{dH} dH + \frac{dQ}{dh} dh = 0$ , ou bien, puisque le rapport  $\frac{dH}{dh}$  est nul :  $\frac{dQ}{dh} = 0$ . Ce qui montre que Q est maximum pour une valeur donnée de h.

unité de longueur, que nous désignerons par  $q$ , doit être tel que le dérivée  $\frac{dQ}{dh}$  soit nulle, ou être maximum pour une valeur donnée de  $h$ . Nous avons alors :

$$\frac{dQ}{dh} = l\sqrt{2g} \left[ \sqrt{H-h} - \frac{h}{2\sqrt{H-h}} \right];$$

et cette dérivée, égale à zéro, nous donne :

$$h = \frac{2}{3}H = 0,667 H.$$

Portant cette valeur dans l'expression du débit, nous trouvons, pour le débit par unité de longueur :

$$\frac{Q}{l} = q = \frac{2}{3} H \sqrt{\frac{2}{3}gH} = 0,385 H \sqrt{2gH}.$$

Les expériences de Lesbros dont les conditions se rapprochent le plus de celles qui ont été supposées ci-dessus ont donné, pour la valeur du coefficient numérique, 0,35 au lieu de 0,385. La différence tient évidemment à une petite perte de charge qui n'a pas été évaluée.

### 53. Déversoir en mince paroi ou à crête mince. —

On a fréquemment, en pratique, l'occasion de se servir d'un déversoir en mince paroi. Alors, la vitesse des molécules fluides qui viennent de la partie postérieure, produit (fig. 37), comme dans le cas

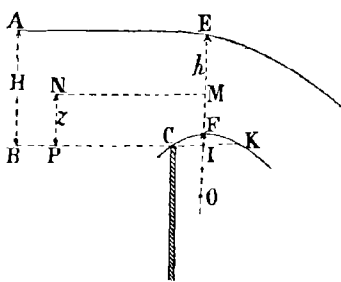


Fig 37.

de l'orifice ordinaire, une contraction de la veine, ou un relèvement au-dessus du seuil des filets liquides inférieurs. Désignons par  $\varepsilon$  ce relèvement au point F où il est maximum, et supposons encore que les filets traversent la section contractée EF avec des vitesses sensiblement parallèles et admettons, de plus, que dans cette section leurs trajectoires aient même

centre de courbure O. Si alors  $R_0$  désigne le rayon de courbure OF du filet le plus bas,  $\varepsilon$  la hauteur d'un filet quelconque M au-dessus du seuil, le rayon de courbure OM de ce filet sera  $R = R_0 + \varepsilon - \varepsilon$ . Sa vitesse étant V, l'équation exprimant son équilibre dynamique sera d'après celles (1) qui ont été établies page 22, n° 16 :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - w' = -g + \frac{V^2}{R}.$$

Si d'un autre côté nous supposons le théorème de Bernoulli applicable à la trajectoire d'une molécule, il nous donnera  $z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = H$ , ou bien différentiant :  $1 + \frac{dp}{\Pi dz} + \frac{VdV}{gdz} = 0$  ; d'où nous tirons, en multipliant par  $g$  et tenant compte de ce que  $\Pi = \rho g$  :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g - \frac{VdV}{dz}.$$

Egalant cette valeur à la précédente, il vient simplement

$$-\frac{VdV}{dz} = \frac{V^2}{R}.$$

Divisant par  $V$  et remarquant que  $dz = dR$ , nous trouvons

$$\frac{V}{R} + \frac{dV}{dR} = 0 \quad \text{ou} \quad RdV + VdR = 0 ;$$

d'où

$$VR = V(R_0 + z - \varepsilon) = \text{const.}$$

Appelons  $V_0$  la vitesse du filet inférieur,  $V_1$  celle du filet supérieur,  $h$  l'épaisseur de la lame déversante mesurée dans la section contractée, cette équation donne

$$V_0 R_0 = V_1 (R_0 + h).$$

Mais, si nous admettons que l'écoulement ait lieu à l'air libre, la pression sur les filets extrêmes, dont les vitesses sont  $V_0$  et  $V_1$ , n'est autre chose que la pression atmosphérique, et, en appliquant à ces filets l'équation de Bernoulli ci-dessus, et y faisant disparaître la lettre  $p$  qui y représente l'excès de la pression sur celle de l'atmosphère, nous avons, en remarquant que  $z = \varepsilon$  pour le filet inférieur et  $\varepsilon + h$  pour le filet supérieur :

$$V_0 = \sqrt{2g(H - \varepsilon)}, \quad V_1 = \sqrt{2g(H - \varepsilon - h)}$$

Appelons, pour abrégier,  $k$  le rapport des vitesses  $\frac{V_1}{V_0}$ , nous aurons :

$$k = \frac{V_1}{V_0} = \frac{R_0}{R_0 + h} = \frac{\sqrt{2g(H - \varepsilon - h)}}{\sqrt{2g(H - \varepsilon)}} = \frac{\sqrt{H - \varepsilon - h}}{\sqrt{H - \varepsilon}},$$

d'où nous déduirons :

$$R_0 = \frac{kh}{1 - k}, \quad 1 - k^2 = \frac{h}{H - \varepsilon}, \quad R_0 = k(1 + k)(H - \varepsilon) ;$$

ce qui nous donnera la vitesse  $V$  d'un filet à la hauteur  $x$  :

$$V = \frac{V_0 R_0}{R} = \sqrt{2g(H-\varepsilon)} \frac{R_0}{R_0+x-\varepsilon},$$

et par suite le débit  $q$ , par unité de longueur du déversoir :

$$q = \int_{\varepsilon}^{h+\varepsilon} V dx = R_0 \sqrt{2g(H-\varepsilon)} \int_{\varepsilon}^{h+\varepsilon} \frac{dx}{R_0+x-\varepsilon} = R_0 \sqrt{2g(H-\varepsilon)} \text{Log} \frac{R_0+h}{R_0};$$

ou bien, en mettant pour  $R_0$  sa valeur en fonction de  $k$  :

$$q = \sqrt{2g} (H-\varepsilon)^{\frac{3}{2}} (k+k^2) \text{Log} \frac{1}{k}.$$

Ce débit est ainsi exprimé en fonction de  $k$ , quantité qui est elle-même fonction de l'épaisseur  $h$  de la lame déversante, et, d'après ce qui vient d'être dit, cette épaisseur se règle de manière que le débit soit maximum. Or, la valeur de  $k$  qui rend maximum la fonction  $(k+k^2) \text{Log} \frac{1}{k}$  est fournie par l'équation :

$$(1+2k) \text{Log} \frac{1}{k} - (1+k) = 0;$$

qui, résolue, donne  $k = 0,46854\dots$  et par suite :

$$h = 0,7805 (H-\varepsilon),$$

$$q = 0,5216 \sqrt{2g} (H-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}.$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme :

$$q = 0,5216 \left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}} H \sqrt{2gH} = mH \sqrt{2gH},$$

en désignant par  $m$  le coefficient :

$$m = 0,5216 \left(1 - \frac{\varepsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or les observations de M. Bazin ont montré que le relèvement  $\varepsilon$  de la partie inférieure de la nappe déversante était sensiblement proportionnel à  $H$  et en était, en moyenne, les 0,13. On a ainsi  $1 - \frac{\varepsilon}{H} = 0,87$ . La valeur théorique de  $m$  serait ainsi

$$0,5216 \times (0,87)^{\frac{3}{2}} = 0,423.$$

Les expériences de MM. Poncelet et Lesbros ainsi que celles de M. Bazin ont donné pour la valeur de ce coefficient des nombres variant de 0,39 à 0,44. L'accord est donc tout-à-fait satisfaisant <sup>1</sup>.

Dans la pratique, toutes les fois que l'on n'a pas de renseignements certains sur la forme du déversoir et de la nappe déversante, on peut, en se conformant à un usage ancien, adopter pour le coefficient  $m$  la valeur moyenne 0,40 et écrire simplement la formule du débit, en effectuant le produit  $m \sqrt{2g}$  :

$$(9) \quad q = 1,77 H \sqrt{H}.$$

On va voir, par des exemples de la valeur de  $m$  et par des indications sur les limites entre lesquelles varie ce coefficient, que les résultats de cette formule (9) ne doivent être pris qu'à titre de première indication souvent très inexacte.

**54. Déversoirs inclinés.** — M. Bazin n'a pas seulement étudié les déversoirs ordinaires, à paroi postérieure verticale, il a aussi observé les circonstances de l'écoulement sur des déversoirs dont la paroi postérieure est inclinée vers l'aval (fig. 38) ou vers l'amont (fig. 39), et les résultats de ces observations ont confirmé la



Fig. 38.



Fig. 39.

formule donnée par M. Boussinesq,  $m = 0,5216 \left(1 - \frac{\epsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}$ , tant que l'inclinaison vers l'aval n'atteint pas  $\frac{1}{2}$  (un de hauteur pour 2 de

1. Toutefois, en serrant la question de plus près, M. Boussinesq a été amené à compléter les formules que l'on vient d'établir et à donner, pour l'écoulement par déversoir en mince paroi, les formules suivantes de deuxième approximation. En désignant par  $c$  le rapport  $\frac{\epsilon}{h + \epsilon}$ , il a reconnu que l'on avait

$$k = 0,4685 + 0,2027 c ;$$

$$m = 0,5216 \left(1 - \frac{\epsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}} (1 - 0,1424 c^2).$$

et ce coefficient ainsi rectifié s'est accordé de la façon la plus exacte et la plus remarquable avec les expériences plus précises de M. Bazin. Il en a été de même de l'épaisseur  $h$  de la lame déversante qui s'est trouvée exactement de 0,668 H comme le donne cette théorie rectifiée que nous nous bornons à indiquer. L'épaisseur  $h$ , calculée par la formule de première approximation serait :

$$h = 0,7805 H (1 - 0,13) = 0,87 \times 0,7805 H = 0,679 H, \text{ au lieu de } 0,668 H.$$

base); mais alors l'écoulement n'a plus lieu en mince paroi, la veine liquide reste en contact avec le plan incliné qui constitue la paroi d'amont du barrage et le rapport  $\frac{\epsilon}{H}$  devient très petit. Au contraire, si la paroi postérieure est inclinée vers l'amont comme dans la fig. 39, le rapport  $\frac{\epsilon}{H}$  augmente. La théorie de M. Boussinesq lui assigne la valeur limite 0,20. M. Bazin a pu faire croître ce rapport jusqu'à 0,19 en armant la crête de ses déversoirs de plaques disposées de manière à rejeter vers l'amont les filets fluides : l'écoulement est alors fort tourmenté et la nappe liquide violemment agitée. La valeur expérimentale du coefficient  $m$  concorde parfaitement, dans toute cette étendue, avec celle que donne la formule.

Voici les valeurs qui ont été trouvées pour le rapport  $\frac{\epsilon}{H}$  :

Inclinaison vers l'amont			Paroi postérieure verticale	Inclinaison vers l'aval			
$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$		$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\epsilon}{H} = 0,159$	0,150	0,136	0,112	0,089	0,061	0,041	0,015

Il en résulte, pour le coefficient  $m$ , les valeurs suivantes :

$$m = 0,402 \mid 0,409 \mid 0,419 \mid 0,437 \mid 0,454 \mid 0,470 \mid 0,490 \mid 0,511$$

**55. Influence de la hauteur du déversoir.** — Ces résultats ont été obtenus sur un déversoir faisant saillie de 1<sup>m</sup>13 sur le fond du canal d'amont et avec des charges  $H$  variant de 0<sup>m</sup>10 à 0<sup>m</sup>45. La formule de M. Boussinesq suppose que la profondeur  $CD$ , en amont du déversoir, (fig. 40) que M. Bazin a désignée par  $p$ , est indéfinie, et il est intéressant de savoir comment cette dimension peut influencer sur le coefficient  $m$ .

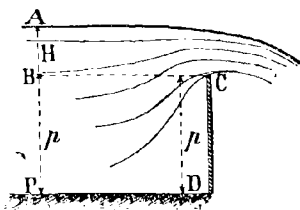


Fig. 40.

M. Bazin a fait, dans ce but, des expériences dans lesquelles la profondeur  $p$  était inférieure à 1<sup>m</sup>13 et s'abaissait jusqu'à 0,35 et même à 0,24 ; il a constaté que le débit, toutes choses égales d'ailleurs, aug-

1. Voir, pour plus de détails, les Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences du 17 juin 1889, tome CVIII, page 1233, et surtout les *Annales des ponts et chaussées*, 1890, 1<sup>er</sup> semestre, page 9.



mentait à mesure que cette profondeur diminuait, ou, ce qui revient au même, à mesure que le rapport  $\frac{H}{p}$  augmentait. Ce résultat était prévu. La théorie exposée plus haut, dans l'hypothèse d'une profondeur  $p$  indéfinie, suppose que la vitesse des molécules fluides est nulle en amont du déversoir ; or, la hauteur de la surface libre au-dessus du fond étant  $H + p$ , ces molécules y sont, en réalité, animées d'une vitesse moyenne  $\frac{q}{H + p}$  d'autant plus grande que  $p$  est plus petit. Si l'on appelle  $U$  cette vitesse moyenne, on peut en tenir compte, dans le calcul du débit du déversoir, en admettant qu'elle a pour effet d'augmenter la charge  $H$  d'une quantité proportionnelle à  $\frac{U^2}{2g}$  et l'on peut même prévoir que l'augmentation de la charge sera probablement plus grande que  $\frac{U^2}{2g}$ , car les filets liquides qui passent sur le déversoir sont surtout ceux qui étaient primitivement à la partie supérieure de la section d'amont et ils avaient une vitesse plus grande que la vitesse moyenne  $U$ . Si l'on admet, ce qui sera justifié plus loin, que la vitesse superficielle soit à peu près les  $\frac{5}{4}$  de la vitesse moyenne, l'augmentation de charge correspondant à cette vitesse serait  $\frac{(1,25 U)^2}{2g}$  soit environ  $1,56 \frac{U^2}{2g}$ , et alors, en désignant par  $\alpha$  ce coefficient numérique valant à peu près 1,56, et par  $\mu$  la valeur spéciale du coefficient  $m$  pour ce cas particulier, la formule du débit d'un déversoir serait

$$q = \mu \left( H + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) \sqrt{2g \left( H + \alpha \frac{U^2}{2g} \right)},$$

ou bien

$$q = \mu H \sqrt{2gH} \left( 1 + \alpha \frac{U^2}{2gH} \right)^{\frac{3}{2}},$$

ou bien encore lorsque, comme il arrive presque toujours,  $\frac{U^2}{2gH}$  est

une très petite fraction :

$$q = \mu H \sqrt{2gH} \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{U^2}{2gH} \right).$$

Cette formule, en posant pour abrégier

$$m = \mu \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{U^2}{2gH} \right),$$

prend la forme générale donnée précédemment

$$(10) \quad q = mH \sqrt{2gH}.$$

Des expériences faites en Amérique par MM. Fteley et Stearns, par le général Ellis, par M. Francis et d'autres observateurs, et discutées par M. Smith dans son ouvrage déjà cité ont conduit ce dernier à proposer pour  $\alpha$  des valeurs variant de 1,33 à 1,40 ; mais les nombreuses et très précises expériences de M. Bazin<sup>1</sup> lui ont montré que le coefficient devait avoir, en moyenne, la valeur  $\frac{5}{3} = 1,667$ . La différence est peu importante en pratique, car  $\frac{U^2}{2gH}$  dépasse rarement quelques centièmes.

L'usage de la formule précédente suppose connue la vitesse  $U$  et par suite le débit  $q$ , lequel au contraire est souvent ce que l'on cherche à déterminer. Il y a donc intérêt à l'éliminer, ce que l'on peut faire en portant dans l'expression  $\frac{U^2}{2gH}$  la valeur de  $U$  en fonction de  $q$  ; cela donne

$$\frac{U^2}{2gH} = \frac{q^2}{2gH (H + p)^2} = m^2 \left( \frac{H}{H + p} \right)^2,$$

ou, en appelant  $K$  un nouveau coefficient égal à  $\frac{3}{2} \alpha m^2$  :

$$m = \mu \left[ 1 + K \left( \frac{H}{H + p} \right)^2 \right].$$

Les expériences de M. Bazin l'avaient conduit à adopter pour  $K$  la valeur moyenne 0,55. M. Boussinesq, par une analyse dont on trouvera le résumé aux comptes rendus des séances de l'Académie des sciences des 17 et 24 septembre 1888 a été conduit à poser, pour un déversoir vertical,  $K = 0,42$ <sup>2</sup>. D'autre part le coefficient  $\mu$  est

1. *Annales des ponts et chaussées*, 1888, 2<sup>e</sup> trimestre, page 303.

2. Si l'on remarque que  $K = \frac{3}{2} \alpha m^2$  et que  $\alpha$ , d'après M. Bazin, est à peu près  $\frac{5}{3}$ , comme  $m$  vaut environ 0,41, ce nouveau coefficient  $K$  doit valoir  $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \times 0,41^2 = 0,42$ .

celui qui avait été précédemment désigné par  $m$ , dans le cas d'une vitesse d'amont nulle et il est lié au relèvement  $\epsilon$  par la relation

$\mu = 0,5216 \left(1 - \frac{\epsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}}$ ; de sorte que le coefficient pratique à adopter, pour calculer le débit d'un déversoir, par la formule (10)

$$q = m H \sqrt{2gH},$$

est en définitive :

$$(11) \quad m = 0,5216 \left(1 - \frac{\epsilon}{H}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + 0,42 \left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right].$$

Il reste, dans cette formule, la quantité  $\epsilon$  dont le mesurage ne peut pas s'opérer facilement. Dans les expériences de M. Bazin, le rapport  $\frac{\epsilon}{H}$  a varié, pour un déversoir vertical, depuis 0,097 lorsque  $p$  était égal à 0,35 jusqu'à 0,112 pour  $p = 1,13$ . Lorsque  $p$  est grand, ce rapport est à peu près indépendant de la charge  $H$ ; mais, déjà pour la valeur  $p = 0,35$ , on voit qu'il diminue progressivement quand le rapport  $\frac{H}{p}$  va en croissant. Et ce fait a été constaté non seulement pour le déversoir vertical, mais encore pour tous ceux dont l'inclinaison était dirigée vers l'amont. On comprend, en effet, que l'augmentation du rapport  $\frac{H}{p}$ , par la diminution proportionnelle de la profondeur  $p$ , correspond à une vitesse d'arrivée plus grande qui a pour effet de s'opposer davantage à la convergence des filets fluides et par suite de diminuer proportionnellement la contraction inférieure mesurée par  $\epsilon$ . L'effet contraire peut s'observer dans les déversoirs inclinés vers l'aval. Si la profondeur  $p$  y est grande et si l'inclinaison est faible, le courant liquide acquiert une vitesse dirigée suivant cette inclinaison; cette vitesse s'y ralentit d'une manière sensible par suite du frottement, et elle arrive au sommet suffisamment réduite pour ne pouvoir s'opposer à l'action horizontale des filets supérieurs, laquelle a pour effet de diminuer  $\epsilon$ .

Si la profondeur est moindre, la vitesse oblique n'a pas subi l'influence retardatrice du frottement; elle arrive au sommet du déversoir avec une grandeur à peu près égale à celle des filets horizontaux et s'oppose à leur action. Il en résulte une augmentation proportionnelle du relèvement inférieur  $\epsilon$ .

C'est en effet ce que M. Bazin a trouvé : la diminution de  $\frac{\varepsilon}{H}$  coïncidant avec l'accroissement du rapport  $\frac{H}{p}$ , constatée dans les déversoirs verticaux ou inclinés vers l'amont, cesse de se produire dès que l'inclinaison vers l'aval atteint 45 degrés. Lorsque les inclinaisons sont plus faibles, une augmentation de  $\frac{H}{p}$  produit une légère augmentation de  $\frac{\varepsilon}{H}$ .

**56. Coefficients de débit.** — Jusqu'à ce que les lois de la variation de  $\frac{\varepsilon}{H}$  avec le rapport  $\frac{H}{p}$  et avec l'inclinaison du déversoir aient pu être établies d'une manière rationnelle, on peut se servir de la formule empirique suivante, donnée par M. Bazin pour le déversoir vertical, dans laquelle le coefficient de débit est représenté par  $m'$  au lieu de  $m$ , et dont les résultats s'accordent très sensiblement avec ceux de ses expériences et par suite avec la formule théorique de la page 99, qui les suit exactement <sup>1</sup>.

$$(12) \quad m' = \left[ 0,405 + \frac{0,003}{H} \right] \left[ 1 + 0,55 \left( \frac{H}{H+p} \right)^2 \right];$$

ou bien, chercher, dans le tableau suivant, les valeurs de  $m'$  déterminées par cette formule <sup>2</sup>.

1. Le coefficient donné par cette formule s'applique aux nappes libres, c'est-à-dire s'écoulant dans l'atmosphère de telle façon que la pression atmosphérique s'exerce librement sur leur face inférieure comme sur leur face supérieure. Ces nappes libres constituent le type auquel ont été comparées toutes les autres, comme on le verra aux nos 57 et suivants. Le coefficient de débit, pour ces diverses nappes, s'obtiendra en multipliant celui des nappes libres, donné ici, par un facteur variable. Et, afin de réserver au coefficient de débit définitif, pour chaque nappe, la lettre  $m$  habituellement usitée, M. Bazin a désigné celui des nappes libres par la lettre  $m'$ .

2. Les chiffres de ce tableau varient de 0,40 à 0,50; suivant l'inclinaison du déversoir on doit les multiplier, comme il sera dit, par des coefficients de correction pouvant varier de 0,93 à 1,09. Enfin, suivant la forme des lames déversantes, il pourra encore être nécessaire de les multiplier par un autre coefficient correctif s'élevant jusqu'à 1,28. La valeur du coefficient  $m$  peut donc varier de 0,36 à 0,70, et l'on voit quelle erreur on s'expose à commettre en adoptant simplement les résultats de la formule (9).

Charges H	Valeurs du coefficient $m'$ pour les hauteurs suivantes du déversoir au-dessus du fond du canal									
	0m20	0m30	0m40	0m50	0m60	0m80	1m00	1m50	2m00	infini
0m05	0.458	0.453	0.451	0.450	0.449	0.449	0.449	0.448	0.448	0.448
0.06	0.456	0.450	0.447	0.445	0.445	0.444	0.443	0.443	0.443	0.443
0.08	0.456	0.447	0.443	0.441	0.440	0.438	0.438	0.437	0.437	0.436
0.10	0.459	0.447	0.442	0.439	0.437	0.435	0.434	0.433	0.433	0.432
0.12	0.462	0.448	0.442	0.438	0.436	0.433	0.432	0.430	0.430	0.429
0.14	0.466	0.450	0.443	0.438	0.435	0.432	0.430	0.428	0.428	0.427
0.16	0.471	0.453	0.444	0.438	0.435	0.431	0.429	0.427	0.426	0.425
0.18	0.475	0.456	0.445	0.439	0.435	0.431	0.428	0.426	0.425	0.423
0.20	0.480	0.459	0.447	0.440	0.436	0.431	0.428	0.425	0.423	0.421
0.22	0.484	0.462	0.449	0.442	0.437	0.431	0.428	0.424	0.423	0.420
0.24	0.488	0.465	0.452	0.444	0.438	0.432	0.428	0.424	0.422	0.419
0.26	0.492	0.468	0.455	0.446	0.440	0.432	0.429	0.424	0.422	0.419
0.28	0.496	0.472	0.457	0.448	0.441	0.433	0.429	0.424	0.422	0.418
0.30	0.500	0.475	0.460	0.450	0.443	0.434	0.430	0.424	0.421	0.417
0.35	»	0.482	0.465	0.455	0.447	0.437	0.431	0.424	0.421	0.416
0.40	»	0.489	0.472	0.459	0.451	0.440	0.433	0.424	0.421	0.414
0.45	»	0.495	0.477	0.464	0.455	0.442	0.435	0.425	0.421	0.413
0.50	»	»	0.482	0.468	0.459	0.445	0.437	0.426	0.421	0.412
0.60	»	»	0.490	0.476	0.466	0.451	0.441	0.427	0.421	0.409
0.70	»	»	0.498	0.484	0.473	0.456	0.446	0.430	0.423	0.408

Les valeurs de  $m'$  données par ce tableau et mises dans la formule :

$$q = m' H \sqrt{2gH}$$

feront connaître le débit d'une nappe libre par unité de longueur d'un déversoir vertical.

**57. Corrections à faire subir à ces coefficients. —**

S'il s'agit d'un déversoir incliné, comme on en rencontre parfois dans les vannages d'usines, dans les hausses mobiles de barrages, etc., il conviendra de multiplier la valeur de  $m'$  donnée dans la table précédente par les coefficients suivants :

Inclinaison vers l'amont			Déversoir vertical	Inclinaison vers l'aval				
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$		$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0,93	0,94	0,96	1,00	1,04	1,07	1,10	1,12	1,09

On trouvera dans les mémoires de M. Bazin, et en particulier dans

celui des *Annales des Ponts et chaussées* 1890, 1<sup>er</sup> semestre, des renseignements détaillés sur la manière dont il a obtenu ces divers coefficients, des représentations à grande échelle de la forme des nappes déversantes pour les diverses inclinaisons, et une étude sur la distribution des vitesses et des pressions dans l'intérieur des nappes libres. Cette étude vérifie très exactement les formules établies par M. Boussinesq.

Le débit  $q$  calculé par la formule précédente, et avec les coefficients ainsi déterminés, sera celui de l'unité de longueur de déversoir, en supposant qu'il n'y ait pas de contraction latérale aux extrémités, c'est-à-dire que les joues verticales du déversoir soient exactement dans le plan des parois également verticales du canal d'amont. Bien souvent, il n'en est pas ainsi, et le déversoir n'occupe qu'une fraction de la largeur du cours d'eau. Il se produit alors une convergence horizontale des filets liquides, ou une contraction latérale, qui paraît atteindre son maximum lorsque la distance de chacune des joues du déversoir à la rive voisine est au moins égale à trois fois la charge  $H$ . L'effet de cette contraction est de diminuer la largeur utile de l'écoulement, de telle sorte que le débit, au lieu d'être exprimé par  $ql$ , sera inférieur à ce produit.

Les nombreuses expériences de M. Francis, relatées dans son ouvrage « *Lowell hydraulic Experiments* », publié à New-York en 1868, et qui sont réputées en Amérique comme méritant la plus grande confiance, l'ont autorisé à admettre que l'influence de cette contraction latérale avait pour effet de diminuer la longueur utile d'environ  $\frac{1}{10}H$  à chaque extrémité où cette contraction se produit.

Par conséquent, le débit d'un déversoir de longueur  $l$ , établi de manière que la contraction existe à ses deux extrémités, sera représentée par :

$$(13) \quad Q = q \left( l - \frac{2H}{10} \right) = m' \left( l - 2 \frac{H}{10} \right) H \sqrt{2gH}.$$

Si la contraction ne se produit qu'à l'une des extrémités et se trouve supprimée à l'autre, on mettra  $\frac{H}{10}$  au lieu de  $\frac{2H}{10}$ . Ce mode de réduction ne s'applique, bien entendu, qu'aux déversoirs assez longs pour que  $H$  ne soit qu'une fraction de  $l$ ; elle donnerait un résultat erroné si la longueur  $l$  était inférieure à trois ou quatre fois  $H^1$ .

1. Il n'est peut-être pas sans intérêt, ne serait-ce qu'à un point de vue rétrospectif, de rappeler ici comment on arrivait autrefois à établir la for-

**58. Profil d'un cours d'eau en amont d'un déversoir.**

— De tous les faits expérimentaux qui ont servi à établir les résultats théoriques et pratiques qui viennent d'être rappelés, je me bornerai

mule de l'écoulement par un déversoir et à justifier une valeur voisine de 0,42 pour le coefficient numérique qui y figure.

Imaginons, au-dessus de la crête du déversoir, une mince paroi verticale, dépassant le niveau d'amont et percée, à une hauteur  $x$  au-dessus de la crête, d'une fente horizontale infiniment étroite, de hauteur  $dx$ . Le volume  $dq$  qui s'écoulera par cette fente, d'une longueur horizontale égale à l'unité et considérée comme un orifice en mince paroi, sera, en appelant  $m_1$  le coefficient de débit correspondant :

$$dq = m_1 dx \sqrt{2g(H-x)}.$$

Supposons toute la paroi percée d'une infinité de fentes semblables, c'est-à-dire supprimée, ce qui correspond au déversoir, le débit total, en supposant que  $m_1$  soit le même pour toutes les tranches, sera :

$$q = \int_0^H dq = m_1 \int_0^H dx \sqrt{2g(H-x)} = \frac{2}{3} m_1 H \sqrt{2gH}.$$

Le coefficient  $m_1$ , pour un orifice rectangulaire où la contraction est supprimée sur les deux côtés verticaux, aurait une valeur voisine de 0,63 et l'on trouverait ainsi, pour le débit du déversoir en mince paroi :

$$q = 0,42H \sqrt{2gH},$$

c'est-à-dire à très peu près ce que donnent la théorie et les expériences.

Pour estimer, par un raisonnement analogue, l'influence de la vitesse d'amont, que nous avons désignée plus haut par  $U$ , appelons  $H_1$  la hauteur due à cette vitesse  $U$ , c'est-à-dire posons :

$$\frac{U^2}{2g} = H_1 \quad \text{ou} \quad U = \sqrt{2gH_1},$$

Nous pouvons admettre, approximativement, que la vitesse du liquide qui s'écoule à travers chacune des fentes élémentaires de hauteur  $dx$ , que l'on suppose percées dans la paroi fictive surmontant le déversoir, est due à la charge réelle  $(H-x)$  augmentée de cette charge  $H_1$  due à la vitesse moyenne d'amont  $U$ ; le débit élémentaire se trouverait alors exprimé par :

$$dq = m_1 dx \sqrt{2g(H-x+H_1)},$$

et le débit total par :

$$q = m_1 \int_0^H dx \sqrt{2g(H-x+H_1)} = \frac{2}{3} m_1 \sqrt{2g} \left[ (H+H_1)^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}} \right]$$

Cette formule, ainsi établie, a été adoptée par M. Francis et s'est trouvée d'accord avec ses expériences.

On sait que la différence  $a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}$ , des puissances  $\frac{3}{2}$  de deux nombres  $a$  et  $b$ , dont la différence  $a - b$  est assez petite par rapport à leur somme  $a + b$  pour que les puissances du rapport  $\frac{a-b}{a+b}$  supérieures à la première puissent être

à citer une seule observation faite en 1883 par M. Clemens Herschel, ingénieur de la Water Power Company de Holyoke, Massachusetts, sur la rivière Connecticut passant par dessus le barrage de Holyoke. La forme de la courbe affectée par la surface libre était celle que présente le croquis ci-dessous (fig. 41).

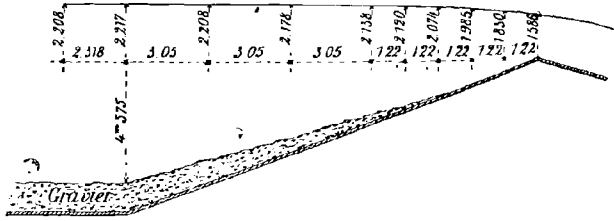


Fig. 41.

La surface libre présente son élévation maximum à quinze mètres environ en amont de la crête du déversoir, au-delà, elle s'abaisse un peu ; en-deçà, au contraire, en s'approchant de la crête, son abaissement suit une loi bien régulière. Le barrage dont il s'agit, en bois, a environ 360 mètres de longueur. C'est, à ma connaissance, la seule observation qui ait été faite sur une aussi grande échelle<sup>1</sup>. L'épaisseur de la lame déversante est d'environ les 0,72 de la hauteur H.

négligées devant l'unité, est très approximativement égale à  $\frac{3}{2} (a - b) \sqrt{\frac{a + b}{2}}$ .

En effectuant cette simplification on peut donc écrire :

$$q = m_1 \sqrt{2g} \left[ H \sqrt{\frac{H}{2} + H_1} \right] = \frac{m_1}{\sqrt{2}} H \sqrt{2g (H + 2H_1)};$$

et, comme lorsque  $H_1$  est petit par rapport à H, l'on a à peu près :

$$H \sqrt{H + 2H_1} = H \sqrt{H} \left( 1 + \frac{H_1}{H} \right),$$

et que  $\frac{m_1}{\sqrt{2}}$  vaut à peu près 0,44, on arrive à la formule :

$$q = 0,44 H \sqrt{2g H} \left( 1 + \frac{U^2}{2gH} \right);$$

c'est-à-dire à la formule donnée dans le texte, page 97, mais avec un coefficient numérique différent pour  $\frac{U^2}{2gH}$ .

1. Elle est relatée dans l'ouvrage déjà cité de M. Hamilton Smith.



Les expériences montrent que la hauteur  $H$  devient difficile à mesurer exactement lorsqu'elle est inférieure à 0 m. 04 ou 0 m. 05 ; les résultats expérimentaux présentent alors des divergences nombreuses qu'il faut attribuer aux erreurs d'observation. Il est donc prudent, lorsque l'on cherche des résultats exacts, de ne pas se servir, pour mesurer le débit, de déversoir dans lequel la charge  $H$  serait inférieure à 0 m. 05 ; il est préférable, toutes les fois que cela est possible, de limiter cette dimension à 0 m. 10 au moins.

## § 6.

## ÉTUDE DES NAPPES DÉVERSANTES

**59. Formes diverses des nappes déversantes.** —

Lorsque la veine qui s'écoule par dessus un déversoir est exactement comprise entre des parois étanches, de telle manière que l'air ne puisse pénétrer au-dessous, les molécules d'eau, dans leur mouvement, entraînent peu à peu l'air qui se trouve enfermé en avant du déversoir ; lorsque la plus grande partie de cet air a été ainsi enlevée, la veine se trouve poussée contre la paroi d'aval du déversoir et y reste appliquée par la pression atmosphérique. Mais la diminution de pression, qui s'est produite ainsi à la partie inférieure, a pour conséquence d'augmenter, dans une proportion notable, le débit du déversoir. Ce phénomène, qui avait déjà été observé auparavant, a fait l'objet de la part de M. Bazin d'expériences dont il a rendu compte dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1891. Voici comment il en résume les résultats, pour un déversoir de 0 m. 75 de hauteur établi dans un canal rectangulaire dont les parois verticales se continuaient sans interruption en aval comme en amont du déversoir.

Si l'on commence par un faible débit et si on l'augmente progressivement, les transformations successives de la nappe déversante comprennent trois périodes distinctes :

**60. Nappes déprimées.** — 1° Petites charges jusqu'à 0<sup>m</sup>235.

— Il reste, sous la nappe, un certain volume d'air dont la pression est inférieure à celle de l'atmosphère. L'eau d'aval s'élève sous la nappe au-dessus de son niveau dans le canal de fuite ; en même

temps, l'excès de pression sur la face externe de la nappe la rapproche du barrage (fig. 42). Ces deux effets croissant avec la charge, la nappe se déprime en s'écartant peu à peu de la forme plus allongée

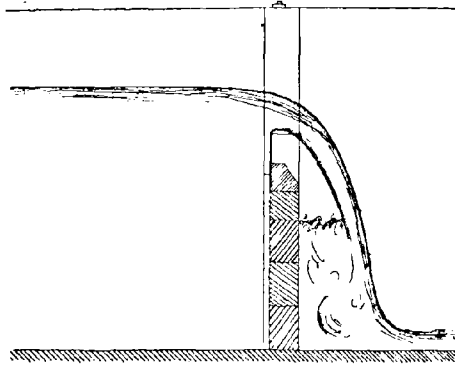


Fig. 42.

qu'elle affecte lorsque sa face inférieure est librement soumise à la pression atmosphérique. M. Bazin lui donne, par suite, le nom de nappe *déprimée*, réservant celui de nappe *libre* à celle sous laquelle l'accès de l'air est librement assuré, cas auquel se rapportent les valeurs des coefficients numériques données précédemment.

Ce changement de forme de la nappe est accompagné d'une augmentation graduelle du coefficient de débit, et si l'on représente par  $m'$  celui de la nappe libre, le nouveau coefficient varie depuis  $m = m'$  pour les très petites charges jusqu'à  $m = 1,08 m'$  pour la charge limite  $H = 0^m235$ .

**61. Nappes adhérentes.** — 2° Charges comprises entre  $0^m210$  et  $0^m295$ . — En approchant de la charge  $0^m235$ , l'élimination de l'air s'achève rapidement, et la nappe subit tout à coup une modification des plus remarquables. Son pied se retire vers le barrage au point de passer en arrière du plan vertical correspondant à sa partie supérieure (fig. 43 et 44) ; sa surface devient verticale et se couvre de cannelures imitant les plis d'une draperie (fig. 45 et 46) ; en même temps, le coefficient  $m$  passe de  $1,08 m'$  à  $1,28 m'$ . Cette augmentation énorme donne lieu à un abaissement du niveau d'amont qui, par le seul effet du changement de forme de la nappe et sans que le débit ait été modifié, s'abaisse de  $0^m235$  à  $0^m210$ . On observe donc, en franchissant le point de passage, ce fait singulier

qu'une petite augmentation de débit amène un abaissement très notable du niveau en amont du barrage.

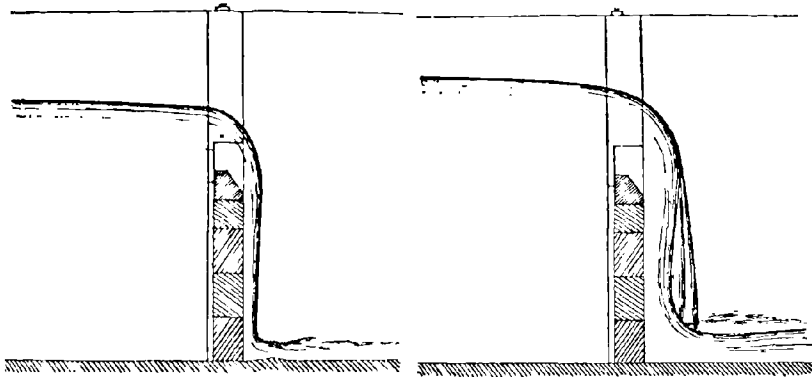


Fig. 43.

Fig. 44.

M. Bazin désigne cette nouvelle forme sous le nom de nappe *adhérente*. La nappe adhérente, une fois établie, persiste jusqu'à la charge  $0^m,290$  à  $0^m,295$  ; elle se reforme si on la détruit momentan-

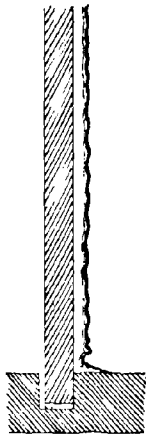


Fig. 45.

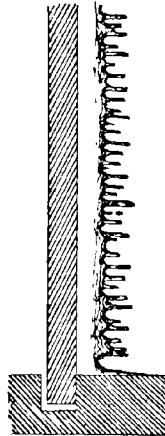


Fig. 46.

nément en introduisant de l'air en arrière. Le coefficient  $m$  reste lui-même presque constant et égal à  $1,28 m'$  jusqu'à ce que l'on atteigne un deuxième point de transformation.

**62. Nappes noyées en dessous.** — 3° Charges supérieures à  $0^m310$ . — En approchant de la limite  $H = 0^m,295$ , la nappe adhérente devient instable et fait place à une forme plus allongée bien connue : c'est la nappe noyée en dessous (fig. 47). Le coefficient  $m$  subit en même temps une réduction importante : il redescend de  $1,28 m'$  à  $1,19 m'$  et, et par suite, le niveau en amont du barrage se relève de  $0^m,295$  à  $0^m,310$ . Si l'on continue à augmenter le débit, la nappe s'allonge peu à peu tandis que  $m$  décroît lentement ; pour la charge de  $0^m40$  on a  $m = 1,12 m'$ .

Tel est l'ensemble des phénomènes observés lorsqu'on élève graduellement la charge de  $0^m05$  à  $0^m40$ . Si ensuite on diminue le débit de manière à repasser en sens inverse par les mêmes états, on voit

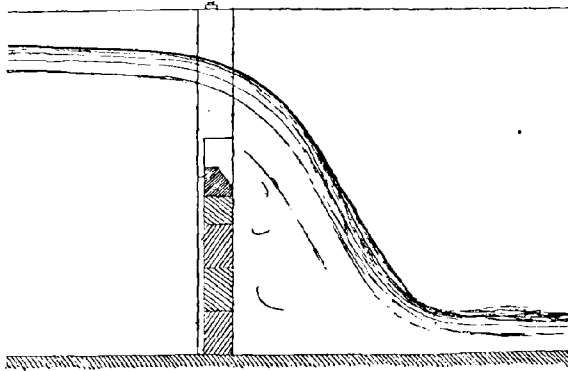


Fig. 47.

bien la nappe noyée en dessous faire place à la nappe adhérente qui reparait à la charge limite correspondante, mais celle-ci persiste jusqu'aux plus petites charges à moins qu'on n'y introduise de l'air ; alors la nappe déprimée précédemment décrite se reproduit dans les conditions indiquées. On peut également, avec des débits croissants, obtenir la nappe adhérente dès les plus petites charges en procédant avec quelque précaution et en augmentant le débit sans secousse. La série des coefficients pour cette forme de nappes doit donc s'étendre jusqu'aux plus faibles charges. D'un autre côté, le point de passage de l'une à l'autre des deux formes (adhérente ou noyée) n'est pas absolument déterminé ; aux environs de ce point, elles peuvent exister toutes deux pour un même débit et la substitution d'une forme à l'autre, entre certaines limites du débit, s'opère quelquefois subitement et sans cause visible. Ce point de passage correspond à peu près à une charge  $H$  égale aux deux cinquièmes de la hauteur  $p$

de la crête du déversoir au-dessus du fond du canal en aval. Quand la charge descend au-dessous de cette limite, l'air rentre sous la nappe qui se détache du barrage et revient à la forme déprimée.

Le coefficient de débit  $m$ , dans ces conditions, est lié à celui qui correspond à la nappe libre, que nous avons appelé  $m'$  par la formule

$$(14) \quad \frac{m}{m'} = 0,878 + 0,128 \frac{P}{H}.$$

Les valeurs de  $m$  s'obtiendront en combinant les indications de cette formule avec le tableau de la page 101.

On pourra, plus simplement, les obtenir directement par la formule suivante (15) qui résulte de la combinaison des formules (12) et (14):

$$(15) \quad m = 0,470 + 0,0075 \frac{P^2}{H^2}$$

et qui, pour les valeurs du rapport  $\frac{P}{H}$  comprises entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{5}{2}$ , donne des résultats qui s'écartent peu de ceux de l'observation.

M. Bazin a mesuré aussi la pression sous les nappes déprimées ou adhérentes. Il a trouvé que la différence entre cette pression et celle de l'atmosphère, qu'il appelle la non-pression et qu'il désigne par  $P_0$ , augmente avec la charge. Le rapport  $\frac{P_0}{H}$  varie de 0,72 pour la charge de 0<sup>m</sup>,05 à 1,77 pour la charge 0<sup>m</sup>25. Il atteint alors son maximum, qui correspond à peu près à la charge limite à partir de laquelle la nappe adhérente se transforme en nappe noyée en dessous.

**63. Nappes adhérentes modifiées par une retenue d'aval.** — Dans les expériences qui viennent d'être citées, l'écoulement était libre en aval; la nappe, après avoir atteint le fond du canal, s'y étalait en un rapide au-delà duquel se formait, à une distance plus ou moins grande de son pied, un ressaut (voir ci-après n° 71) ramenant le plan d'eau à sa hauteur normale. C'est dans ces conditions qu'a été déterminé le point de transformation de la nappe adhérente en nappe noyée en dessous. Mais si on relève par une retenue le niveau d'aval, la transformation de la nappe peut, moyennant un relèvement convenable de ce niveau, s'opérer à une charge quelconque. Par exemple, dans le déversoir de 0<sup>m</sup>75, l'écoulement étant libre et la lame d'eau qui forme le rapide au pied de la nappe n'ayant qu'une faible épaisseur, la transformation a lieu lorsque la charge est de 0<sup>m</sup>29.

Si on relève peu à peu le niveau d'aval, le point de transformation se déplace progressivement et la nappe noyée en dessous paraît plus tôt, c'est-à-dire pour une charge moindre. Le champ de la nappe adhérente se réduit successivement et, en même temps, le coefficient de débit qui lui est propre diminue, à mesure que le niveau d'aval se rapproche de la crête du déversoir. Il existe ainsi, pour chaque valeur du débit, une limite supérieure du niveau d'aval au-dessus de laquelle la nappe noyée est seule possible ; mais si, après avoir légèrement dépassé cette limite A (fig. 48) et produit la

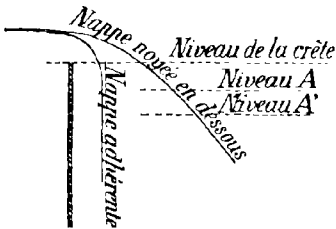


Fig. 48.

transformation de la nappe, on arrête le mouvement ascendant du plan d'eau d'aval et qu'on l'abaisse de nouveau peu à peu, la nappe adhérente ne reparaitra pas immédiatement ; il faudra, pour la reproduire, redescendre à un niveau A' inférieur au niveau A. Au-dessous de cette nouvelle limite A', la nappe adhérente sera

seule possible et, dans l'intervalle AA', on pourra, suivant le sens dans lequel a varié le plan d'eau d'aval, obtenir à volonté l'une ou l'autre des deux formes. Il existe donc une sorte d'inertie en vertu de laquelle une forme de nappe, une fois constituée par la modification progressive d'une des données de l'écoulement, subsiste lors même que l'on réduit, dans une certaine mesure, l'importance de la modification qui l'avait fait apparaître. On comprend du reste, dit M. Bazin, qu'il doive en être ainsi ; au changement de forme de la nappe correspond dans son intérieur une nouvelle répartition des vitesses et des pressions, et le passage subit d'un état à l'autre exige l'intervention d'une action extérieure dont l'intensité ne saurait être négligeable.

Cette observation est générale et s'applique à tous les changements de régime qui peuvent être constatés dans l'écoulement des liquides. La limite à laquelle s'effectue la transformation n'est pas la même suivant qu'elle se produit dans un sens ou dans l'autre. Il existe toujours une zone mixte dans laquelle les deux régimes sont possibles et dans laquelle continue à se produire celui qui existait avant que les conditions de l'écoulement n'aient été modifiées de manière à correspondre à la zone dont il s'agit.

Le coefficient de débit d'un déversoir dont la nappe se trouve modifiée par une retenue d'aval varie avec l'importance de cette retenue. Si l'on désigne par  $H_1$  la hauteur du niveau d'aval au-dessous

de la crête du déversoir, de manière que la différence entre les niveaux d'amont et d'aval soit  $H + H_1$ , ce dernier étant mesuré après le ressaut, au point où l'écoulement est redevenu régulier, les expériences de M. Bazin montrent que le coefficient de débit  $m$  est plus grand que celui qui correspond à la nappe libre et que nous avons désigné par  $m'$ . On a, avec une approximation suffisante :

$$(16) \quad \frac{m}{m'} = 1,05 + 0,15 \frac{H_1}{H}.$$

Il y a lieu de remarquer que  $H_1$  ne peut pas dépasser  $H$  sans que la nappe cesse d'être adhérente et se détache du déversoir : la formule ne s'applique donc qu'aux valeurs de  $H_1$  inférieures ou au plus égales à  $H$ , et pour cette valeur limite elle donne  $m = 1,20 m'$ .

En réalité le rapport  $\frac{m}{m'}$  dépend aussi, comme  $m'$  lui-même, de la valeur du rapport  $\frac{H}{p}$  et aussi de  $\frac{H'}{p}$  ; mais l'écart entre la formule ci-dessus et les résultats des observations est toujours très faible et ne dépasse pas 0,02.

**64. Déversoirs à seuil épais.** — Tout ce qui précède s'applique aux déversoirs en mince paroi ; mais en pratique, on rencontre le plus souvent des déversoirs à seuil épais dont le profil présente des dispositions très diverses. Un genre fort usité est le barrage à poutrelles dont les deux parements d'amont et d'aval sont plans et verticaux et dont la crête présente une surface horizontale égale à l'équarrissage des poutrelles. Cette circonstance modifie les conditions de l'écoulement, et si ce déversoir est facile à installer, il peut donner lieu à des erreurs de jaugeage considérables.

Les nappes libres franchissant un pareil déversoir se présentent sous deux formes distinctes : soit appliquées sur le seuil horizontal du barrage, soit détachées à partir de l'arête d'amont de manière à franchir le seuil sans toucher l'arête d'aval. Dans ce second cas, l'influence du seuil disparaît évidemment, et l'écoulement a lieu comme sur un déversoir en mince paroi ; ce cas se réalise spontanément dès que la charge dépasse le double de la largeur  $c$  de la crête (mesurée dans le sens de l'écoulement) ; mais il peut se produire plus tôt, dès que  $H$  surpasse  $\frac{3}{2}c$ . Entre ces deux limites,  $\frac{3}{2}c$  et  $2c$ , la nappe est dans un état d'équilibre instable ; le détachement du seuil tend à se produire et se détermine sous l'influence d'une

perturbation extérieure quelconque, telle qu'une rentrée d'air, le passage d'un corps flottant, etc.

Lorsque la nappe est nécessairement adhérente au seuil, c'est-à-dire tant que  $H$  est inférieur à  $\frac{3}{2}c$ , le coefficient  $\frac{m}{m'}$  dépend principalement du rapport  $\frac{H}{c}$  et peut être représenté par la formule

$$(17) \quad \frac{m}{m'} = 0,70 + 0,185 \frac{H}{c}.$$

Entre  $H = \frac{3}{2}c$  et  $H = 2c$ , le rapport  $\frac{m}{m'}$  peut, soit rester constant et égal à l'unité si la nappe est détachée du seuil, soit varier de 0,98 à 1,07 si elle est adhérente. On voit d'ailleurs que le coefficient  $m$  varie dans des limites étendues puisque, pour  $\frac{H}{c} = 0,50$ , ce qui n'a rien que de très ordinaire, on a seulement  $m = 0,79 m'$ . Les valeurs du coefficient  $m$  correspondant à des barrages à poutrelles s'obtiendront donc en combinant les indications de cette formule avec le tableau de la page 101. On trouvera ainsi des valeurs variant de 0,33 à 0,52, c'est-à-dire de plus de 50 pour 100, et cette variation montre quelle grossière erreur on est exposé à commettre lorsqu'on se contente de prendre au hasard un coefficient comme 0,40 par exemple.

Cette même formule reste applicable lorsque la largeur du seuil horizontal du déversoir devient très grande : un ou deux mètres par exemple. Un arrondissement de l'arête d'amont du seuil produit une augmentation du débit. M. Bazin, opérant sur deux déversoirs de 0<sup>m</sup>80 et de 2 mètres de largeur a trouvé<sup>1</sup> qu'en arrondissant l'arête d'amont suivant un rayon de 0<sup>m</sup>10, le débit était augmenté de 14 pour cent sur le premier de ces déversoirs et de 12 p. 100 sur le second.

Le déversoir à crête épaisse et à parois verticales peut, comme le déversoir en mince paroi, donner passage à des nappes libres comme celles dont il vient d'être question, à des nappes déprimées, auxquelles s'applique encore à peu près la formule (17), sauf pour les charges voisines de celle qui produit le détachement de la nappe, et à des nappes noyées en dessous, auxquelles on appliquera encore la formule (17) jusqu'à la valeur de  $H$  qui donnera la même valeur que la formule (14) ou la formule (16), suivant que la nappe sera à

1. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1896, 2<sup>e</sup> semestre, page 679.



ressaut éloigné ou influencée par l'aval. Pour les charges supérieures à cette limite, ce sera l'une de ces deux formules (14) ou (16) suivant le cas, qu'il conviendra d'adopter.

**65. Déversoirs à talus.** — M. Bazin (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1898, 2<sup>e</sup> trimestre) a étudié aussi l'écoulement sur des déversoirs qui, au lieu d'être limités par des parois verticales, le sont par des parois diversement inclinées. Ses expériences peuvent être groupées en trois séries principales :

1<sup>o</sup> Déversoirs dont le parement d'aval est vertical ou presque vertical, avec une inclinaison variable du côté d'amont ;

2<sup>o</sup> Déversoirs dont le parement d'amont est vertical ou presque vertical, avec une inclinaison variable du côté d'aval ;

3<sup>o</sup> Déversoirs dont les deux talus ont une inclinaison de 45° au plus sur l'horizontale.

Dans chacune de ces trois séries, il a étudié les déversoirs à crête à vive arête, ceux à seuil de 0<sup>m</sup>,10 de largeur, et ceux à seuil de 0,20 ; et même quelques déversoirs à crête de 0,40 de largeur.

La charge a varié, en général, de 0<sup>m</sup>,10 à 0<sup>m</sup>,40, et, pour toutes les séries, sauf quelques rares exceptions, le rapport  $\frac{m}{m'}$  a constamment augmenté avec la charge. Cependant on constate presque toujours que ce rapport reste constant ou diminue légèrement lorsque l'on passe de la charge de 0<sup>m</sup>,35 à celle de 0<sup>m</sup>,40, ce qui semble indiquer que l'augmentation constatée pour les charges inférieures ne se continuerait pas pour les grandes.

Voici, sommairement résumés, les résultats principaux de ces expériences. Les inclinaisons des talus sont indiquées par des fractions dont le numérateur est la hauteur verticale correspondant à la largeur de base indiquée par le dénominateur, c'est-à-dire égales aux tangentes des angles formés par le talus avec l'horizontale.

Lorsque le parement d'aval est vertical ou à peu près vertical, les phénomènes sont analogues à ceux que l'on observe sur les déversoirs verticaux en mince paroi, ou à crête large, avec cette différence que l'inclinaison du parement d'amont a pour effet d'augmenter la valeur des coefficients, surtout pour les nappes déprimées, où l'augmentation peut atteindre presque 10 pour 100 lorsque l'inclinaison du parement d'amont est  $\frac{1}{2}$ . Cette augmentation est au contraire à peine sensible lorsque les nappes sont noyées en dessous.

Le tableau suivant donne les valeurs du rapport  $\frac{m}{m'}$  pour les diver-

ses inclinaisons des talus d'amont et d'aval et pour les largeurs de seuil observées par M. Bazin, et pour quatre valeurs de la charge  $H$  respectivement égales à  $0^m,10$ ,  $0^m,20$ ,  $0^m,30$  et  $0^m,40$ . La hauteur  $p$  des déversoirs a été, en général de  $0^m,50$ ; toutefois, quelques séries ont été observées sur des déversoirs de  $0^m,75$  de hauteur.

Parement d'amont	Parement d'aval	Crête à vive arête	Seuil large de		
			$0^m,10$	$0^m,20$	$0^m,40$
$\frac{3}{1}$	vertical	1.035 1.180 1.110 1.065			
$\frac{1}{1}$	vertical		0.925 1.085 1.140 1.150		
$\frac{1}{2}$	vertical	1.145 1.195 1.160 1.130	0.945 1.065 1.105 1.110	0.890 0.970 1.025 1.055	
vertical	$\frac{3}{1}$	0.995 1.125 1.085 1.030	0.870 1.085 1.160 1.050		
vertical	$\frac{3}{2}$	" 1.180 1.080 1.030	0.875 1.075 1.195 1.060		
vertical	$\frac{1}{1}$	1.105 1.125 1.130 1.130	0.885 1.065 1.180 1.145		
vertical	$\frac{1}{2}$	0.990 1.015 1.020 1.025	0.865 0.995 1.060 1.040	0.745 0.855 0.950 1.010	0.750 0.770 0.820 0.865
vertical	$\frac{1}{3}$		0.850 0.960 0.985 0.985		

Parement d'amont	Parement d'aval	Crête à vive arête	Seuil large de		
			0m,10	0m,20	0m,40
vertical	$\frac{1}{5}$	0,880	0,825		
		0,900	0,890		
		0,910	0,905		
		0,905	0,905		
vertical	$\frac{1}{10}$	0,820			
		0,830			
		0,840			
		0,845			
$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{2}$	1,050		0,760	
		1,070		0,890	
		1,075		0,975	
		1,070		1,030	
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	1,065		0,800	0,785
		1,090		0,900	0,820
		1,090		0,990	0,870
		1,085		1,035	0,910
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$			0,795	
				0,890	
				0,950	
				0,990	
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{4}$				0,795
					0,825
					0,855
					0,880
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{5}$			0,805	
				0,870	
				0,920	
				0,940	
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{6}$				0,790
					0,830
					0,850
					0,870
$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$		0,910		
			1,085		
			1,130		
			1,145		

Parement d'amont	Parement d'aval	Crête à vive arête	Seuil large de		
			0 <sup>m</sup> ,10	0 <sup>m</sup> ,20	0 <sup>m</sup> ,40
$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$		0,940 1,085 1,170 1,145		
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	1,230 1,205 1,200 1,110	0,930 1,080 1,150 1,180	0,875 0,960 1,050 1,095	
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	1,095 1,110 1,125 1,125	0,915 1,040 1,100 1,135	0,875 0,950 1,020 1,055	
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}$	1,015 1,005 1,005 1,000	0,875 0,960 0,990 1,005	0,865 0,915 0,955 0,970	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	1,205 1,190 1,180 1,125	0,950 1,070 1,110 1,130	0,895 0,970 1,030 1,060	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1,110 1,120 1,135 1,135	0,950 1,045 1,090 1,115	0,895 0,960 1,015 1,050	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1,045 1,040 1,040 1,035	0,905 0,965 0,995 1,010	0,885 0,925 0,960 0,980	

Malgré l'étendue de ces tableaux, j'ai tenu à les reproduire en entier surtout pour montrer combien est délicate et difficile la question de l'évaluation du volume d'eau qui passe par-dessus un déversoir et quelle erreur on peut commettre en adoptant, au hasard, un coefficient de débit quelconque. J'ajouterai encore que la substitution d'arêtes arrondies aux arêtes vives des profils expérimentés peut influencer notablement sur le débit. Elle agit, en général, dans le sens d'une augmentation.

**66. Déversoirs noyés.** -- Lorsque le plan d'eau d'aval est plus haut que le seuil, le déversoir est *noyé*. Les lois qui régissent l'écoulement deviennent alors encore plus compliquées.

Pour les déversoirs en mince paroi, si l'on désigne par  $H_1$  la hauteur du niveau d'aval au-dessus du seuil du déversoir, de manière que la chute ne soit alors que  $H - H_1$ , et si  $p$  représente toujours la saillie du déversoir au-dessus du fond du canal, le coefficient  $m$  pourra se déduire de celui des nappes libres par la formule

$$(18) \quad \frac{m}{m'} = 1,05 \left( 1 + \frac{1}{5} \frac{H_1}{p} \right) \sqrt[3]{\frac{H - H_1}{H}}$$

Dans le cas particulier où  $H_1 = 0$ , cette formule donne  $\frac{m}{m'} = 1,05$  que donne aussi la formule (16) en y faisant de même  $H_1 = 0$  et qui est applicable aux retenues dont le niveau reste inférieur à la crête du déversoir. Voici une table à double entrée qui donne, toutes calculées, les valeurs de  $\frac{m}{m'}$  pour un certain nombre de valeurs de

$\frac{H_1}{p}$  et de  $\frac{H - H_1}{p}$ .

Valeurs de $\frac{H - H_1}{p}$	Valeurs de $\frac{H_1}{p}$										
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,50
0,05	0,84	0,74	0,68	0,64	0,58	0,54	0,50	0,47	0,45	0,44	0,43
0,10	0,93	0,85	0,80	0,76	0,70	0,66	0,61	0,58	0,57	0,55	0,54
0,15	0,96	0,90	0,86	0,82	0,77	0,74	0,69	0,66	0,64	0,63	0,61
0,20	0,98	0,94	0,90	0,87	0,82	0,79	0,74	0,71	0,69	0,68	0,67
0,30	1,01	0,97	0,94	0,92	0,88	0,85	0,81	0,79	0,77	0,76	0,75
0,40	1,02	0,99	0,97	0,95	0,92	0,90	0,87	0,84	0,83	0,82	0,81
0,50	1,03	1,01	0,99	0,98	0,95	0,93	0,90	0,89	0,87	0,87	0,86
0,60	1,03	1,02	1,00	0,99	0,98	0,96	0,93	0,92	0,91	0,90	0,89
0,70	1,04	1,02	1,01	1,00	0,99	0,98	0,96	0,94	0,94	0,93	0,92

La formule et le tableau qui précèdent ne s'appliquent qu'imparfaitement aux déversoirs à crête large, comme les barrages à poutrelles. Les expériences de M. Bazin ne permettent pas encore d'établir pour ces écoulements, une formule pratique. Tout ce que l'on peut dire, alors, c'est que, tant que la nappe reste adhérente au seuil du déversoir, on pourra se servir des formules qui s'appliquent aux déversoirs à poutrelles, en faisant abstraction de la retenue ; tandis que si la nappe se détache du seuil, on pourra se servir des formules

obtenues pour les minces parois. Ni les unes, ni les autres ne donneront un résultat parfaitement exact.

En présence de cette incertitude, il n'est peut-être pas inutile de rappeler les formules empiriques en usage :

C'est d'abord celle de Lesbros :

$$q = m H \sqrt{2g (H - H')}$$

avec  $m = 0,48$  environ. Elle paraît donner des résultats moins exacts que celle de Du Buat :

$$q = m \left( H + \frac{H'}{2} \right) \sqrt{2g (H - H')}$$

avec la valeur 0,40 à 0,42 pour le coefficient  $m$ . On peut aussi se servir de celle de M. Mary :

$$q = m H' \sqrt{2g (H - H' + h)}$$

avec la valeur  $m = 0,80$  environ, et dans laquelle  $h$  représente la hauteur due à la vitesse du courant, en amont du déversoir. Il est à remarquer que, dans cette dernière formule, c'est la hauteur  $H'$  qui figure en dehors du radical, et non la hauteur  $H$ , comme dans le déversoir ordinaire. Elle a été vérifiée par M. Salles (*ann. des P. et Ch.*, 1884, 2<sup>e</sup> semestre, page 305) au barrage du Bazacle sur la Garonne à Toulouse.

**67. Passage d'un écoulement par orifice à un écoulement par déversoir** <sup>(1)</sup>. — Lorsque l'on abaisse progressivement le niveau de l'eau en amont d'un orifice rectangulaire vertical à base horizontale, il vient un moment où le liquide se détache du bord supérieur de l'orifice qui devient alors un simple déversoir. Si  $a$  est la hauteur de l'orifice,  $h$  ou  $H$  la hauteur de l'eau au-dessus de l'arête inférieure et  $m$  et  $M$  les coefficients de débit correspondant à l'orifice et au déversoir, le débit par unité de largeur sera exprimé par

$$q = m a \sqrt{2g \left( h - \frac{a}{2} \right)},$$

pour l'orifice et par

$$q = MH \sqrt{2gH},$$

pour le déversoir.

(1) Ce paragraphe est extrait entièrement d'une note publiée par M. Hégly dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 27 avril 1896.

Si, dans une première approximation on suppose qu'au moment de la transformation  $H = h = a$ , on devrait avoir entre les coefficients  $m$  et  $M$  la relation simple :  $m = M \sqrt{2}$ .

Mais les choses ne se passent pas tout à fait ainsi et la transformation est accompagnée d'un changement subit du niveau d'amont. M. Hégly a constaté que sur un orifice rectangulaire de  $0^m,80$  de largeur et de  $0^m,20$  de hauteur, sans contraction latérale, lorsqu'on abaisse le plan d'eau d'amont, le détachement a lieu quand la charge, mesurée à cinq mètres en amont, est encore de  $0^m,028$  sur le sommet ou de  $0^m,228$  sur le seuil de l'orifice. Et en même temps que la transformation s'opère, le niveau s'abaisse légèrement d'une petite quantité  $\varepsilon$  qui n'a pas pu être mesurée. Si l'on admet que le débit se conserve dans le passage d'un régime à l'autre, on aurait alors :

$$\begin{aligned} \text{pour l'orifice :} & \quad q_1 = m. 0,20 \sqrt{2g \cdot 0,128} \\ \text{pour le déversoir :} & \quad q_1 = M (0,228 - \varepsilon) \sqrt{2g (0,228 - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

En mettant pour  $m$  et  $M$  les coefficients connus relatifs aux conditions d'écoulement, M. Hégly a calculé la valeur de  $\varepsilon$  qu'il a trouvée de  $0^m,005$ .

Si, ensuite, on relève le niveau, l'écoulement en déversoir disparaît quand la surface de l'eau affleure le bord supérieur de l'orifice. Alors, le niveau en amont est déjà plus haut que ce bord supérieur de  $0,034$ , c'est-à-dire que la charge sur le seuil est de  $0,234$ . Au moment où la transformation s'opère, le niveau se relève brusquement d'une petite quantité  $\varepsilon'$  qui n'a pas été mesurée non plus. Les deux formules de débit sont alors

$$\begin{aligned} \text{pour l'orifice :} & \quad q_2 = m. 0,20 \sqrt{2g (0,134 + \varepsilon')} \\ \text{pour le déversoir :} & \quad q_2 = M. 0,234 \sqrt{2g 0,234}, \end{aligned}$$

ce qui, avec les valeurs connues des coefficients  $m$  et  $M$ , donne  $\varepsilon' = 0,014$ .

Il résulte de ces constatations que suivant que l'on opère par abaissement du niveau ou par relèvement, entre les charges  $0^m,248$  et  $0,228$  sur l'orifice ou entre  $0^m,234$  et  $0,223$  sur le déversoir, ou ce qui revient au même suivant que le débit diminue ou augmente entre les limites de 221 litres et de 206 litres par mètre de largeur l'écoulement peut avoir lieu sous l'une ou l'autre des deux formes.

C'est un phénomène analogue à celui qui a été constaté sur les déversoirs dans le passage d'une nappe adhérente à une nappe noyée au-dessous ; il confirme l'observation générale qui a été faite à la page 110 ci-dessus.

Le fait qui vient d'être rapporté fournira peut-être, d'après M. Hégly, malgré l'incertitude qui reste sur la valeur des dénivellations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , une indication utile pour l'étude du phénomène de contraction des veines liquides. Les deux écoulements qui se succèdent ne sont pas de même nature ; si la surface inférieure de la nappe ne subit pas de changement de forme, il n'en est pas de même de la surface supérieure. Quand la nappe déversante arrive au contact du bord supérieur de l'orifice, la direction des filets liquides à l'amont est aussitôt modifiée et leur courbure, d'abord tournée vers le bas, se tourne vers le haut dans la partie avoisinant l'orifice ; il se produit en même temps, sur toute la surface de la nappe qui se trouve immédiatement en amont de l'orifice, une augmentation de pression due à la petite masse d'eau tourbillonnante qui s'y accumule. A l'aval, l'effet de cette augmentation de pression est d'augmenter la contraction et de diminuer le coefficient de débit.

## § 7.

## APPLICATION DES FORMULES

**68. Temps nécessaire à la vidange d'un réservoir par un orifice inférieur.** — Considérons un réservoir AB (fig. 49) percé à sa partie inférieure d'un orifice CD dont nous appellerons la section  $\omega$ . Supposons que ce réservoir ait une section horizontale que nous représenterons par A et qu'il soit rempli d'eau jusqu'à une hauteur  $h$  au-dessus de cet orifice. Admettons encore que la section A soit assez grande par rapport à  $\omega$  pour que les vitesses des molécules liquides à l'intérieur du réservoir soient toujours négligeables.

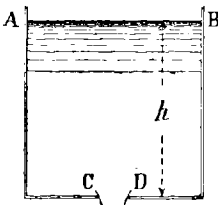


Fig. 49.

Lorsque la hauteur  $h$  sera devenue  $z$ , la vitesse d'écoulement, dans cette hypothèse, sera  $\sqrt{2gz}$ , le volume d'eau écoulé pendant l'unité de temps  $m\omega\sqrt{2gz}$ , et pendant le temps  $dt$  le produit de cette quantité par  $dt$ . Ce produit mesure ainsi le volume d'eau sorti du réservoir pendant le temps  $dt$ , et si  $dz$  désigne l'accroissement (négatif) de la hauteur  $z$  pendant le même



temps, ce même volume aura pour expression  $-Adz$ . Egalant ces deux expressions, nous trouvons l'équation :

$$m\omega \sqrt{2gz} dt = -Adz,$$

ou bien

$$-m\omega \sqrt{2g} \cdot dt = A \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Intégrons et supposons que le temps  $t$  soit compté depuis l'époque où l'écoulement a commencé, ou que  $z = h$  pour  $t = 0$ , nous obtenons, si  $A$  est une fonction donnée de  $z$  :

$$m\omega \sqrt{2g} \cdot t = \int_z^h A \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Cette équation fera connaître le temps nécessaire pour que le niveau atteigne une hauteur  $z$  quelconque au-dessus du fond. Si nous cherchons le temps  $T$  nécessaire à la vidange complète, il faudra y faire  $z = 0$ , ce qui donnera :

$$T = \frac{1}{m\omega \sqrt{2g}} \int_0^h A \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Si le réservoir est à section constante,  $A$  sort du signe d'intégration et l'on a, en appelant  $B$  le volume  $Ah$  du réservoir :

$$T = \frac{A}{m\omega} \sqrt{2gh} = \frac{2Ah}{m\omega \sqrt{2gh}} = 2 \frac{B}{m\omega \sqrt{2gh}}.$$

Cette durée totale  $T$  est ainsi exactement double de celle qui serait nécessaire si la vitesse d'écoulement restait constamment égale à ce qu'elle est au commencement, lorsque le réservoir est plein.

On trouve un résultat absolument identique lorsque l'on calcule le temps nécessaire au remplissage d'un réservoir, tel qu'un sas d'écluse, par un orifice inférieur alimenté par un bassin dans lequel le niveau se maintient constant et que l'on cherche la durée du remplissage total, c'est-à-dire jusqu'au moment où le niveau dans le sas atteint celui du bief alimentaire.

Si le réservoir a la forme d'un prisme triangulaire à arêtes horizontales, dont la section horizontale supérieure, à la hauteur  $h$ , soit appelée  $A_0$ , la section  $A$  à une hauteur  $z$  quelconque sera le produit de  $A_0$  par le rapport  $\frac{z}{h}$ , ou bien  $A = \frac{A_0}{h} z$  ; on obtient :

$$m\omega \sqrt{2g}. t = \frac{A_0}{h} \left[ \frac{2}{3} h \sqrt{h} - \frac{2}{3} z \sqrt{z} \right].$$

et la durée totale T de l'écoulement jusqu'à  $z = 0$  serait, en remarquant qu'alors le volume B du réservoir est égal à  $\frac{A_0 h}{2}$  :

$$T = \frac{2}{3} \frac{A_0 \sqrt{h}}{m\omega \sqrt{2g}} = \frac{4}{3} \frac{B}{m\omega \sqrt{2gh}}.$$

De même, si le réservoir a la forme d'une pyramide dont le sommet soit à l'orifice, de telle sorte que  $A = \frac{A_0 z^2}{h^2}$ , on obtient :

$$m\omega \sqrt{2g}. t = \frac{A_0}{h^2} \left[ \frac{2}{5} h^2 \sqrt{h} - \frac{2}{5} z^2 \sqrt{z} \right],$$

et, en remarquant que le volume B est alors égal à  $\frac{A_0 h}{3}$  :

$$T = \frac{2}{5} \frac{A_0 \sqrt{h}}{m\omega \sqrt{2g}} = \frac{6}{5} \frac{B}{m\omega \sqrt{2gh}}.$$

Dans ces deux derniers cas, l'hypothèse que nous avons faite, d'une section A toujours assez grande pour que les vitesses, à l'intérieur du réservoir, soient toujours négligeables n'est plus réalisée. Il en résulte que le temps calculé par la formule est plus grand que celui qui est réellement nécessaire à la vidange.

**69. Temps nécessaire à la vidange par un déversoir.**

— Mais le résultat est tout autre si l'on suppose que le réservoir se vide par un déversoir. Soit toujours un réservoir AB (fig. 5o) dont la section horizontale constante est égale à A, présentant dans une de ses parois, une coupure C d'une largeur  $l$ , formant déversoir et

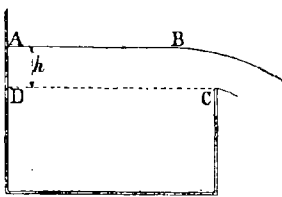


Fig. 5o.

située à une profondeur  $h$  au-dessous du niveau primitif. Cherchons le temps nécessaire pour que ce niveau s'abaisse jusqu'à la crête C de ce déversoir, en faisant la même hypothèse que précédemment, c'est-à-dire en admettant que les vitesses des molécules fluides dans la partie ABCD sont toujours négligeables.

Lorsque le niveau AB ne sera plus qu'à une hauteur  $z$  au-dessus de la crête, le débit du déversoir par unité de temps sera  $mlz \sqrt{2gz}$ , et le volume écoulé pendant le temps  $dt$  sera  $mlz \sqrt{2gz} dt$ . Egalant ce

volume, comme nous l'avons fait plus haut, au produit  $-Adz$  qui exprime la diminution de volume du réservoir due à l'abaissement  $-dz$  du niveau de la surface libre, nous obtenons l'équation :

$$mlz \sqrt{2gz} dt = -Adz,$$

ou bien

$$-\frac{ml}{A} \sqrt{2g} \cdot dt = \frac{dz}{z \sqrt{z}}.$$

Intégrons encore depuis l'époque  $t = 0$  où  $z = h$  jusqu'à une époque  $t$  quelconque, nous trouvons

$$\frac{ml}{A} \sqrt{2g} \cdot t = \frac{2}{\sqrt{z}} - \frac{2}{\sqrt{h}}.$$

Cette équation fera connaître le temps nécessaire pour que le niveau atteigne une hauteur  $z$  quelconque au-dessus de la crête du déversoir. Mais si nous cherchons le temps nécessaire à la vidange complète, il faut faire  $z = 0$ , ce qui donne  $t$  infini. Le réservoir ne pourra donc jamais se vider entièrement. Ce résultat paradoxal est dû à ce que nous avons négligé les vitesses des molécules à l'intérieur du réservoir qui, en réalité, sont différentes de zéro et représentent une certaine force vive qui active l'écoulement et le fait se terminer plus tôt que ne l'indique la formule.

Mais il résulte en tout cas de cette formule que la durée de la vidange complète, si elle n'est pas infinie, est très grande, c'est-à-dire qu'au dessous d'une certaine limite le niveau ne s'abaisse plus qu'avec une extrême lenteur. Cette propriété fait du déversoir un ouvrage précieux comme régulateur du niveau des réservoirs à alimentation variable.

On peut d'ailleurs, en mettant des chiffres dans la formule précédente, se rendre compte de la marche progressive de la vidange du réservoir et mettre en évidence le ralentissement qu'elle subit. Si, en vue de faciliter la comparaison, on prend pour unité de temps la durée nécessaire pour que le réservoir se vide aux trois quarts, ou pour que  $z$  atteigne la valeur  $\frac{1}{4}h$ , les temps nécessaires depuis l'origine de l'écoulement pour que le réservoir se vide de  $\frac{1}{10}, \frac{1}{4}$ , etc., ou pour que  $z$  prenne les valeurs  $\frac{9}{10}h, \frac{3}{4}h$ , etc., sont les suivants :

pour $\frac{z}{h} =$	1	0,9	0,75	0,50	0,25	0,10	0,01	0,001
$t = 0$		0,054	0,156	0,414	1,000	2,162	9,000	30,62

Après un temps trente fois plus long environ que celui qu'il aura fallu pour que le réservoir se vide aux trois quarts, le niveau se sera abaissé de telle manière que la hauteur sur la crête du déversoir ne sera plus que la millièrne partie de ce qu'elle était primitivement. Elle sera donc, au bout de ce temps, réduite par exemple à trois dixièmes de millimètre, si elle était au début de 0 m. 30. Elle aura été réduite à la centième partie de sa valeur primitive au bout d'un temps égal à neuf fois celui qui est pris pour unité. On voit donc que si la durée totale de la vidange est, théoriquement, infinie, la durée pratique ou effective est parfaitement limitée.

### 70. Calcul de la longueur à donner à un déversoir.

— Pour calculer la longueur que doit avoir un déversoir comme ouvrage régulateur, il faut connaître la loi suivant laquelle est alimenté le réservoir dont il s'agit de maintenir le niveau et se donner, par des considérations locales, le maximum de hauteur que ce niveau ne doit pas dépasser. Alors, le débit alimentaire  $Q$  étant supposé connu en fonction du temps,  $Q = f(t)$ , si l'on désigne par  $A$  comme plus haut l'aire horizontale du réservoir, ou l'aire de la surface libre de l'eau dont le niveau est maintenu par le déversoir,  $l$  la largeur cherchée,  $z$  la hauteur du niveau au-dessus de la crête à une époque quelconque  $t$ ; le volume d'eau entré pendant le temps  $dt$  sera  $Qdt$ ; le volume écoulé sera  $mlz\sqrt{2gz}dt$  et c'est la différence de ces deux volumes qui correspondra à la surélévation  $dz$  éprouvée par le niveau pendant le temps  $dt$ . On aura ainsi l'équation :

$$Qdt - mlz\sqrt{2gz}dt = Adz;$$

et la résolution du problème exigerait alors l'intégration de cette équation différentielle linéaire du premier ordre.

Ordinairement, dans les applications, on suppose  $Q$  constant. Le déversoir est calculé pour que, si le débit alimentaire atteint une certaine valeur maximum qu'il conserve pendant un temps donné, le niveau du réservoir ne s'élève pas au-dessus d'un point déterminé. Alors l'intégration se réduit à une quadrature, mais elle conduit encore à une formule bien compliquée, dont l'emploi ne saurait être recommandé<sup>1</sup>. On arrive à une approximation bien suffisante en

1. Si l'on pose pour abrégér  $y^2 = \frac{ml\sqrt{2g}}{Q}z$ , la relation entre  $t$  et  $z$  est donnée par

$$t = \frac{A}{Q} \left[ \frac{1}{6} \text{Log.} \frac{1+y+y^2}{(1-y)^2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{arc tang.} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right] + \text{constante.}$$

La constante se déterminerait par les conditions initiales; la hauteur  $z$  à l'époque  $t = 0$  par exemple.

cherchant quelle est la longueur  $l$  nécessaire pour que le déversoir débite le volume alimentaire  $Q$  lorsque le niveau atteindra la limite extrême  $z_1$ , qu'il ne lui est pas permis de dépasser. On aura ainsi :

$$l = \frac{Q}{m z_1 \sqrt{2g z_1}} ;$$

et l'on sera certain que la hauteur de l'eau au-dessus du déversoir n'atteindra jamais la limite  $z_1$  ; il faudrait pour cela que le débit maximum  $Q$  se maintint pendant une durée infinie. Le niveau s'approchera d'autant plus de la limite  $z_1$ , que le débit maximum  $Q$  aura duré plus longtemps ; il restera au contraire d'autant plus au-dessous que le débit maximum aura été plus éphémère.

Dans tous les problèmes relatifs aux déversoirs, la partie la plus délicate et la plus difficile sera toujours la détermination du coefficient de débit. Les développements donnés à ce sujet aux articles 54 à 65 montrent entre quelles limites étendues peut varier la valeur de ce coefficient et combien on peut se tromper en adoptant même une valeur moyenne.

Si, par exemple, on a un barrage formé de poutrelles de 0<sup>m</sup>20 d'équarrissage et présentant une hauteur d'un mètre au-dessus du fond du canal ( $c = 0^m20$ ,  $p = 1^m00$ ) et si l'on a observé une charge  $H = 0^m20$  sur ce déversoir, on devra, pour trouver le coefficient de débit se reporter d'abord au tableau du n° 56 qui donnera  $m' = 0,428$ . Si la nappe est libre, ce coefficient doit être rectifié par la formule

(17) dans laquelle on fera  $\frac{H}{c} = 1$ , c'est-à-dire qu'il devra être multiplié par 0,885 ce qui donnera

$$m = 0,378.$$

Si la nappe, au lieu d'être libre, s'écoule dans un bief retenu à une hauteur de 0<sup>m</sup>20 au-dessous du seuil du barrage, on devra appliquer la formule (16) dans laquelle on fera  $\frac{H_1}{H} = 1$ , ou bien multiplier le premier coefficient par 1,20, ce qui donnera

$$m = 0,524 ;$$

le débit sera donc augmenté de 40 pour cent.

Si la hauteur  $p$  du barrage au-dessus du fond n'était que de 0<sup>m</sup>40 au lieu de 1<sup>m</sup>00, le tableau du n° 56 fournirait  $m' = 0,447$  et la formule (14) dans laquelle on ferait  $\frac{p}{11} = 2$  conduirait à  $m = 1,144$   $m'$

ou bien

$$m = 0,511.$$

Au lieu d'un déversoir à poutrelles, on peut avoir, ce qui se rencontre assez fréquemment, un barrage en maçonnerie dont les deux parements seraient inclinés à 45 degrés. Supposons que, sur un pareil déversoir, formant une saillie de 0<sup>m</sup>50 sur le fond du lit, on observe le passage d'une couche d'eau sous une charge  $H = 0^m10$ . Le tableau du n° 56 donne alors  $m' = 0,439$  et celui du n° 65 montre que ce coefficient  $m'$  devra être multiplié par 1,230 si le barrage est à vive arête, c'est-à-dire si les deux parements inclinés se rencontrent au sommet du barrage ; alors  $m = 0,439 \times 1,230 = 0,540$ . Si au contraire le barrage présente une crête large de 0<sup>m</sup>20, on devra employer le multiplicateur 0,875, ce qui donnera à  $m$  la valeur

$$m = 0,384,$$

soit un peu plus des deux tiers de la précédente. Les débits varient naturellement dans le même rapport.

Pour en faciliter le calcul, j'ai donné dans la table II, à la fin du volume, les valeurs du débit d'un déversoir par mètre de longueur, pour diverses hauteurs de charge  $H$  comprises entre 0<sup>m</sup>05 et 3<sup>m</sup>00, et pour diverses valeurs du coefficient  $m$  comprises entre 0,35 et 0,70, ce qui comprend à peu près tous les cas de la pratique. Les débits correspondant aux valeurs intermédiaires, soit de la charge  $H$ , soit du coefficient de débit s'obtiendront facilement par interpolation.

## § 8

### RESSAUT

**71. Ressaut superficiel. Condition pour qu'il se produise.** — Il arrive quelquefois qu'un courant d'eau s'écoulant dans un lit prismatique régulier présente sur une très faible longueur une brusque variation de niveau. Ce phénomène, désigné sous le nom de *ressaut* superficiel, a été étudié par divers observateurs, en particulier par Bidone, Darcy, Baumgarten et M. Bazin. Nous allons en faire l'étude théorique et nous verrons plus loin dans quelles circonstances il se produit.

Soient, sur un cours d'eau prismatique, deux sections AB, CD (fig. 51), de part et d'autre du point où se produit le ressaut, et assez distantes de ce point pour que, dans chacune d'elles, les filets liquides puissent être considérés comme parallèles ; appelons Q le débit du cours d'eau,  $\omega_0, \omega_1$  les superficies des deux sections considérées,  $U_0, U_1$  les vitesses moyennes des filets qui les traversent et  $i$  la pente du lit. Nous aurons d'abord :

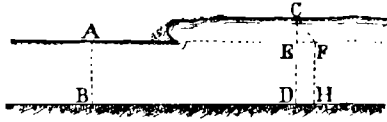


Fig. 51.

$$Q = \omega_0 U_0 = \omega_1 U_1.$$

Appelons encore  $h_0, h_1$  les profondeurs AB et CD et supposons que le lit soit, vers la partie supérieure, à peu près rectangulaire et de largeur  $l$ , de manière que l'on ait  $\omega_1 - \omega_0 = l(h_1 - h_0)$ . Écrivons l'équation d'équilibre dynamique de la masse liquide comprise entre AB et CD. La somme algébrique des projections, sur l'axe du canal, des pressions exercées sur les sections  $\omega_0$  et  $\omega_1$  est représentée par la surface CDHF obtenue en menant par le point C une ligne CF, inclinée à 45 degrés, jusqu'à sa rencontre en F avec la parallèle au fond du lit menée par le point A, puis la ligne FH parallèle à CD. Cette somme de projections, négative, est donc égale à

$$- \rho g [CEF + EFHD] =$$

$$- \rho g \left[ \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_0) (h_1 - h_0) \cos i + \omega_0 (h_1 - h_0) \cos i \right] = - \frac{1}{2} \rho g (\omega_1 + \omega_0) (h_1 - h_0) \cos i$$

ou bien, en mettant pour  $h_1 - h_0$  sa valeur  $\frac{\omega_1 - \omega_0}{l}$  :

$$= - \frac{1}{2} \rho g \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{l} \cos i.$$

A cette force doit s'ajouter le frottement de la masse dont il s'agit sur les parois du lit, ainsi que la composante du poids de cette masse liquide ; ces deux quantités peuvent être négligées avec une approximation suffisante <sup>1</sup>. Il y a donc à égaler la somme de projections qui précède à l'accroissement de la quantité de mouvement du liquide pendant l'unité de temps, lequel, si tous les filets liquides avaient la vitesse moyenne  $U_1$  ou  $U_0$ , aurait pour expression

1. On peut voir, dans l'Essai sur la théorie des Eaux courantes, de M. Bousinesq, pages 129 et suivantes, comment on pourrait tenir compte du frottement. Cela revient, en somme, à attribuer au coefficient que nous appelons plus bas  $\alpha$ , une valeur différente.

$\rho Q(U_1 - U_0)$ ; mais qui, en réalité, est un peu plus grand et peut être représenté par  $\rho Q \alpha (U_1 - U_0)$ , en appelant  $\alpha$  un coefficient qui tient compte de l'inégalité des vitesses des filets liquides (et aussi de l'influence du frottement, comme il vient d'être dit en note). Ecrivant cette égalité et supprimant le facteur commun  $\rho$ , on a l'équation :

$$(19) \quad Q \alpha (U_1 - U_0) = -\frac{g}{2l} (\omega_1^2 - \omega_0^2) \cos i ;$$

ou bien, en mettant  $\frac{Q}{\omega_1}$  au lieu de  $U_1$  et  $\frac{Q}{\omega_0}$  au lieu de  $U_0$  :

$$\frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i} (\omega_1 - \omega_0) = \omega_1 \omega_0 \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2}.$$

On peut diviser les deux membres par  $\omega_1 - \omega_0$  ce qui exclut la solution  $\omega_1 = \omega_0$ , laquelle correspond au mouvement uniforme ou graduellement varié. Il vient alors

$$\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} \omega_0 \omega_1 = \frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}.$$

Cette équation serait encore vérifiée par  $\omega_1 = \omega_0$  si l'on avait  $\omega_0 = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}}$ . Dans ce cas, le ressaut ne peut se produire. Résolue par rapport à  $\omega_1$ , elle donne deux valeurs, dont l'une, négative, est étrangère à la question ; l'autre est :

$$\omega_1 = \omega_0 \left( -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2\alpha Q^2 l}{\omega_0^3 g \cos i}} \right).$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître que  $\omega_1$  varie en sens inverse de  $\omega_0$  : sur un cours d'eau donné,  $\omega_1$  sera d'autant plus grand que  $\omega_0$  sera plus petit, pour un même débit bien entendu. Ces deux quantités,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ , sont toujours l'une plus grande et l'autre plus petite que la valeur commune pour laquelle l'équation serait vérifiée. On a donc nécessairement :

$$\text{soit } \omega_1 > \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}} > \omega_0, \quad \text{soit } \omega_1 < \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2 l}{g \cos i}} < \omega_0 ;$$

de sorte que les deux expressions :

$$1 - \frac{\alpha Q^2 l}{\omega_0^3 g \cos i} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{\alpha Q^2 l}{\omega_1^3 g \cos i}$$



sont toujours de signes contraires. On peut vérifier que lorsqu'elles diffèrent peu de zéro elles sont à peu près égales en valeur absolue. Dans le ressaut proprement dit (exhaussement) l'expression  $1 - \frac{\alpha Q^2 l}{\omega^3 g \cos i}$ , que l'on peut écrire  $1 - \frac{\alpha U^2}{g \cos i} \cdot \frac{l}{\omega}$  est négative avant le ressaut (pour  $U = U_0$ ,  $\omega = \omega_0$ ) et positive après (pour  $U = U_1$ ,  $\omega = \omega_1$ ). Le contraire aurait lieu dans le ressaut d'abaissement moins fréquent ou moins observé que le premier.

**72. Distinction des cours d'eau en deux catégories.** — Un cours d'eau est dit *tranquille* quand cette expression  $1 - \frac{\alpha U^2}{g \cos i} \cdot \frac{l}{\omega}$  est positive, et *torrentueux* quand elle est négative.

Dans un cours d'eau, un ressaut d'exhaussement se produit donc lorsqu'une partie tranquille fait suite à une partie torrentueuse.

Plus simplement, on appelle quelquefois *rivières* les cours d'eau tranquilles et *torrents* les autres. Les ressauts d'exhaussement ne peuvent ainsi se produire que dans les torrents qu'ils transforment en cours d'eau tranquilles ou rivières.

**73. Perte de charge due au ressaut.** — Le ressaut est accompagné d'une perte de charge qu'il est facile de calculer. Si tous les filets liquides traversant la section  $\omega_0$  avaient la vitesse moyenne  $U_0$ , la hauteur du plan de charge serait  $\frac{U_0^2}{2g}$  au-dessus de la surface libre A. Mais la force vive totale du liquide est en réalité un peu plus grande<sup>1</sup>, de sorte que si  $\alpha$  désigne un coefficient un peu plus grand que l'unité, cette hauteur pourra être exprimée par  $\alpha \frac{U_0^2}{2g}$ . De même, le plan de charge, dans la section  $\omega_1$  serait à une hauteur  $\alpha \frac{U_1^2}{2g}$  au-dessus de la surface libre C. S'il n'y avait pas exhaussement de la surface, la perte de charge serait donc simplement  $\frac{\alpha (U_0^2 - U_1^2)}{2g}$ . Mais l'exhaussement du niveau, qui a pour valeur  $\frac{\omega_1 - \omega_0}{l} \cos i$  doit être retranché de cette quantité pour donner la perte de charge réelle qui se trouve ainsi être

$$\frac{\alpha (U_0^2 - U_1^2)}{2g} - \frac{\omega_1 - \omega_0}{l} \cos i.$$

1. Ceci a été démontré page 38. Je désigne par la même lettre  $\alpha$  des coefficients numériques n'ayant pas la même signification, mais ayant très sensiblement la même valeur. Cela n'a aucun inconvénient dans les applications.

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{2g} (U_1 + U_0) \alpha (U_0 - U_1) - \frac{\omega_1 - \omega_0}{l} \cos i.$$

En mettant pour  $\alpha (U_0 - U_1)$  sa valeur,  $\frac{g}{2Ql} (\omega_1^2 - \omega_0^2) \cos i$ , déduite de l'équation (19), puis, pour  $U_1 + U_0$ , la valeur égale  $\frac{Q}{\omega_1} + \frac{Q}{\omega_0}$ , nous obtenons :

$$\frac{1}{2g} \left( \frac{Q}{\omega_1} + \frac{Q}{\omega_0} \right) \frac{g}{2Ql} (\omega_1^2 - \omega_0^2) \cos i - \frac{\omega_1 - \omega_0}{l} \cos i;$$

ou bien, en réduisant et simplifiant :

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{l} \cos i \left( \frac{(\omega_1 + \omega_0)^2}{4\omega_1\omega_0} - 1 \right).$$

Puis, en remarquant que la parenthèse est égale à  $\frac{(\omega_1 - \omega_0)^2}{4\omega_1\omega_0}$ , nous trouvons enfin, pour l'expression de la perte de charge due au ressaut superficiel :

$$\frac{(\omega_1 - \omega_0)^2}{4\omega_1\omega_0 l} \cos i.$$

Lorsque le lit a une pente faible,  $\cos i$  peut être pris égal à l'unité, et si, en même temps, la section est rectangulaire, on a  $\omega_1 = lh_1$ ,  $\omega_0 = lh_0$  et l'expression de la perte de charge devient :

$$\frac{(h_1 - h_0)^2}{4h_1h_0}.$$

C'est sous cette forme simplifiée qu'elle a été calculée la première fois par Bélanger.

**74. Exemples de ressauts.** — Le phénomène du ressaut, dit M. Bazin <sup>1</sup>, très rare dans les cours d'eau naturels, se produit au contraire très fréquemment dans les canaux artificiels à parois régulières et à fortes pentes. Il a été signalé pour la première fois par Bidone (*Mém. de l'Acad. de Turin*, 1820), mais il s'en faut de beaucoup que l'observation de ce phénomène soit susceptible d'autant de précision qu'on pourrait le croire à la lecture de son mé-

<sup>1</sup>. *Recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts.*

moire. Lorsque  $\frac{\alpha U^2}{g \cos i} \cdot \frac{l}{\omega}$ , qui dans les canaux rectangulaires devient  $\frac{\alpha U^2}{gh \cos i}$ , est peu supérieur à l'unité, le ressaut est fort allongé et présente l'aspect d'une simple contrepente couverte d'ondulations. A mesure que cette quantité augmente, on voit le ressaut se rac-

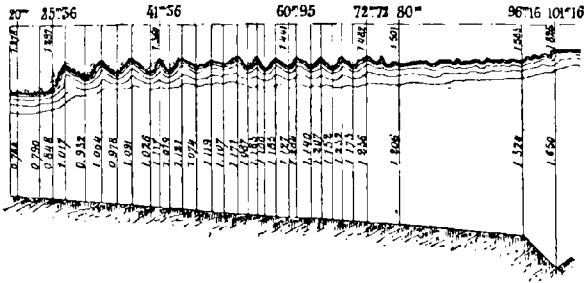


Fig. 52.  
Ressaut observé sur le pont aqueduc de Roquefavour (canal de Marseille).

courcir et l'on finit par obtenir un relèvement à peu près subit de la surface. Le ressaut est suivi de fortes ondulations qui rendent impossible tout nivellement exact, mais qui conservent une position à peu près fixe. Dans les deux ressauts remarquables qu'il a ob-

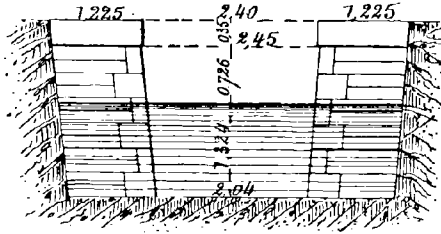


Fig. 53.  
Profil en travers du canal, immédiatement après l'extrémité du pont.

servés au pont de Roquefavour et sur le canal de Craponne, Baumgarten a relevé aussi exactement que possible la distance et la hauteur de ces ondulations, qui se prolongeaient, à Roquefavour, sur plus de 50 mètres de longueur (fig. 52). Au pont de Crau, où le ressaut était très violent (fig. 54), ces ondulations étaient extrêmement fortes et beaucoup plus élevées au milieu du canal que sur les

bords (fig. 55). Cette remarque est générale : il existe toujours, dans l'axe du courant, une protubérance plus élevée que le long

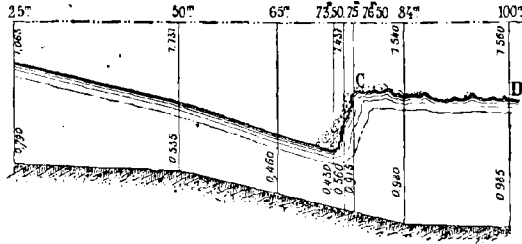


Fig. 54.

Ressaut observé sur le pont aqueduc de Crau (canal de Craonne).

des parois ; le ressaut lui-même affecte la forme d'un arc dont la concavité est tournée vers l'amont.

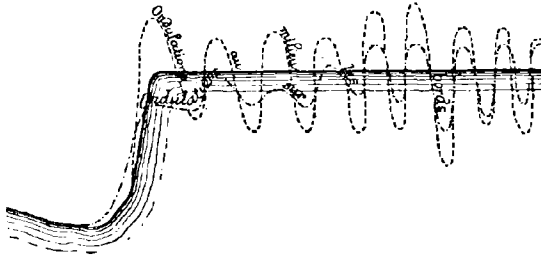


Fig. 55.

Profil en long indiquant le détail des ondes qui suivent le ressaut entre les points C et D, de la figure 54.

Il est donc impossible d'obtenir, au milieu de l'agitation de l'eau, une évaluation exacte de la hauteur du ressaut ; lorsqu'il est bien accusé, c'est-à-dire lorsque  $\frac{\alpha U^2}{gh \cos i}$  dépasse 2, il ne présente plus à l'œil que l'aspect d'une barre d'écume bouillonnant avec violence ; sa hauteur et même sa position dans le canal sont soumises à une fluctuation incessante, au milieu de laquelle on ne peut songer à une mesure précise de la profondeur du courant.

## § 9

## TOURBILLONS

**75. Etude sommaire des tourbillons liquides.** —

Nous avons déjà parlé de l'agitation dite tourbillonnaire, ou des mouvements irréguliers, presque toujours giratoires, qui s'observent dans les courants liquides. Ces tourbillons n'ont, en général, qu'une très faible durée, mais cependant paraissent se reproduire à peu près périodiquement au même lieu, sous l'influence d'une même cause qui, bien que continue ou permanente, produit ainsi des effets intermittents ; ils ne peuvent être étudiés facilement, mais on en tient compte dans toute la mesure possible, eu égard aux ressources actuelles de l'analyse, en substituant, aux vitesses réelles des molécules, les vitesses moyennes locales, définies comme nous l'avons fait plus haut (n° 16, page 23). Ces tourbillons ont souvent leurs axes de giration horizontaux et ils se présentent sous la forme de rouleaux partant du fond, qui grossissent ou s'élèvent à travers la masse liquide et viennent s'épanouir à la surface. Ceux qui ont leurs axes verticaux persistent plus longtemps, mais se dissipent également à une certaine distance du point où ils ont pris naissance pour reparaitre un instant après.

Indépendamment de ces tourbillons, accidentels et irréguliers, il se produit quelquefois, sous l'influence de causes déterminées, des mouvements giratoires réguliers, permanents, dans lesquels les molécules liquides décrivent, autour d'un axe sensiblement vertical, des trajectoires à peu près circulaires. Ces mouvements, dont nous allons faire une étude sommaire, sont de deux sortes : ou bien la matière tourbillonnante se renouvelle sans cesse par un écoulement le long de son axe, ou bien elle reste formée des mêmes particules.

**76. Tourbillon de première espèce.** — Le premier cas se présente dans tout écoulement par un orifice, sous des charges assez peu considérables pour que la surface libre du liquide devienne sensiblement concave, et lorsqu'il existe quelque dissymétrie tendant à produire une rotation de la masse autour d'un axe vertical. Les tourbillons de cette première espèce se produisent dans des réservoirs dont le fond est percé d'un trou, ou bien près des vannes

entr'ouvertes d'où l'eau s'échappe par le bas. Ils se produisent encore, par exemple, lorsqu'un coup d'aviron, plongeant à une certaine profondeur et imprimant aux molécules liquides situées à cette profondeur une vitesse plus grande qu'à celles de la surface, tend à former un creux où doit descendre le liquide supérieur.

Dans tous ces cas, l'entonnoir se creuse autour d'un axe vertical et le mouvement est descendant. Considérons, dans un pareil tourbillon, une particule voisine de la surface ; admettons que sa trajectoire soit sensiblement un cercle horizontal de rayon  $r$  ; appelons  $x$  son ordonnée au-dessus d'un plan horizontal inférieur,  $V$  et  $p$  la vitesse et la pression de cette particule. Soit  $p_0$  la pression atmosphérique constante, et  $V_0$  la vitesse également constante avec laquelle les molécules fluides arrivent au bord du tourbillon considéré comme limité à un rayon  $r_0$  que rien n'empêche de supposer infini. Si nous regardons le mouvement comme permanent et si nous admettons que la composante verticale  $w'$  de l'accélération soit négligeable, la dernière des équations (1) de la page 22, se réduisant à  $\frac{dp}{dx} = -\rho g$ , montre que la pression varie, sur une même verticale, suivant la loi hydrostatique. D'après le théorème de Bernoulli, la somme  $\frac{p}{\Pi} + x + \frac{V^2}{2g}$  est constante tout le long de la trajectoire d'une molécule, et par suite, sa dérivée par rapport à  $r$  est nulle, ce qui donne :

$$\frac{dp}{\Pi dr} + \frac{VdV}{gdr} = 0.$$

D'autre part, l'équation générale de l'hydrostatique, appliquée au mouvement supposé circulaire d'une molécule, nous montrera que la dérivée  $\frac{dp}{dr}$ , de la pression par rapport au rayon, est égale à l'inertie de l'unité de volume suivant le rayon, seule force agissant dans cette direction sur la molécule considérée, c'est-à-dire à  $\rho \frac{V^2}{r}$ . En substituant cette valeur à  $\frac{dp}{dr}$  dans l'équation précédente, celle-ci devient :

$$\frac{\rho}{\Pi} \frac{V^2}{r} + \frac{VdV}{gdr} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{V}{r} + \frac{dV}{dr} = 0,$$

ou, encore, en exceptant le cas  $r = 0$  :

$$V + \frac{rdV}{dr} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d(Vr)}{dr} = 0,$$

ce qui, en appelant  $C$  une quantité constante, revient à :

$$Vr = V_0 r_0 = C.$$

*La vitesse des molécules est inversement proportionnelle à leur distance à l'axe.*

Si l'on applique à une molécule de la surface libre le théorème de Bernoulli,  $p$  ayant alors la valeur constante  $p_0$ , on a :

$$\frac{p_0}{\Pi} + z + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_0}{\Pi} + z_0 + \frac{V_0^2}{2g},$$

ce qui, en appelant  $h$  la profondeur  $z_0 - z$  de la surface libre au-dessous du plan horizontal contenant le bord du tourbillon, de rayon  $r_0$ , donne, pour le profil de cette surface libre :

$$h = \frac{V^2 - V_0^2}{2g} = \frac{C^2}{2g} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right).$$

Ce profil est asymptote à l'axe vertical ; mais cette analyse ne s'applique pas aux parties très voisines de l'axe, comme nous l'avons dit.

L'énergie d'un pareil tourbillon est considérable. Celle d'une couche comprise entre deux plans horizontaux distants de l'unité et entre deux circonférences de rayons  $r_1$  et  $r_0$  a pour expression :

$$\int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{2} \rho V^2 (2\pi r) dr = \pi \rho C^2 \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{r} = \pi \rho C^2 \text{Log.} \frac{r_0}{r_1}.$$

quantité qui devient très grande lorsque  $r_1$  est très petit et qui deviendrait même infinie si la formule s'appliquait encore à  $r_1 = 0$ .

**77. Tourbillons de seconde espèce.** — Les tourbillons de la seconde espèce, dans lesquels la masse en mouvement ne se renouvelle pas, se produisent toutes les fois qu'une masse liquide annulaire est animée d'un mouvement de rotation qu'elle communique de proche en proche à d'autres masses annulaires contiguës. Le mouvement des premières peut leur être imprimé, soit par exemple par le frottement d'un cylindre solide et creux, immergé dans le liquide, soit par deux courants horizontaux, de sens inverse, agissant à la manière d'un couple sur deux points opposés des masses annulaires considérées. Le mouvement dépend alors évidemment du coefficient de frottement intérieur des couches liquides

les unes sur les autres. On trouve facilement <sup>1</sup> que lorsque le mouvement est permanent la vitesse  $V$ , à une distance  $r$  de l'axe d'un pareil tourbillon est exprimée,  $A$  et  $B$  étant deux constantes, par :

$$V = Ar + \frac{B}{r}.$$

Cette formule donnerait aussi  $V$  infini pour  $r = 0$  si l'on admettait qu'elle fût encore applicable à cette limite. En tout cas, la vitesse commence par diminuer à mesure qu'on s'éloigne du centre du tourbillon ; elle passe par un minimum dont la distance au centre est fonction des valeurs des constantes  $A$  et  $B$ , et elle augmente ensuite avec  $r$ .

1. Le frottement est égal, d'après la note du n° 16, à un certain coefficient  $\varepsilon$  multiplié par la vitesse de glissement. Si dans ces masses annulaires en mouvement on suppose que la vitesse soit la même en tous les points d'une même verticale, et si l'on considère un élément compris entre deux plans méridiens distants de  $d\theta$ , entre deux plans horizontaux distants de  $dz$  et entre deux cylindres concentriques distants de  $dr$ , on reconnaîtra que la vitesse de glissement, sur les faces  $rd\theta dz$ , est égale au produit du rayon  $r$  par la dérivée, par rapport à  $r$ , de la vitesse angulaire  $\frac{V}{r}$ , et par suite l'effort tangentiel par unité d'aire de ces faces aura pour valeur :

$$T = \varepsilon r \frac{d}{dr} \left( \frac{V}{r} \right).$$

En exprimant l'équilibre de cet élément, c'est-à-dire en écrivant l'égalité à zéro des sommes des projections sur les trois directions,  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ , des forces qui agissent sur lui et de son inertie, et en remarquant que les composantes de cette inertie sont  $\rho \frac{V^2}{r}$  suivant le rayon et  $\rho \frac{dV}{dt}$  suivant la tangente, on aura les trois équations :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad , \quad \frac{dp}{dr} = \rho \frac{V^2}{r} \quad , \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Tr) + \frac{T}{r} = \rho \frac{dV}{dt}.$$

Si le mouvement est permanent le dernier membre de cette troisième équation est nul, et en mettant pour  $T$  sa valeur précédente, on a :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ \varepsilon r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{V}{r} \right) \right] + \varepsilon \frac{d}{dr} \left( \frac{V}{r} \right) = 0, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\varepsilon}{r^3} \frac{d}{dr} \left[ r^3 \frac{d}{dr} \left( \frac{V}{r} \right) \right] = 0;$$

ce qui donne :  $r^3 \frac{d}{dr} \left( \frac{V}{r} \right) = \text{const} = -2B$ , ou bien :  $\frac{d}{dr} \left( \frac{V}{r} \right) = -\frac{2B}{r^3}$

et enfin en appelant  $A$  une nouvelle constante :  $\frac{V}{r} = A + \frac{B}{r^2}$ .

(Voir Boussinesq, *Essai sur la théorie des Eaux courantes*, pages 616 à 634).



## CHAPITRE IV

# TUYAUX DE CONDUITE

---

§ 1. *Formules et tables.* — § 2. *Problèmes divers.* — § 3. *Étude détaillée de l'écoulement.*

### § 1.

#### FORMULES ET TABLES

**78. Formule générale de l'écoulement dans les tuyaux de diamètre constant.** — L'équation générale (17) du mouvement permanent des courants liquides, que nous avons établie plus haut (n° 25, page 43) :

$$\sin I - \frac{1}{11} \frac{dp_0}{ds} = \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) + \alpha \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right),$$

peut s'appliquer aux tuyaux de diamètre constant  $D$ . La vitesse moyenne  $U$  est alors constante et le dernier terme est nul ; le périmètre mouillé  $\chi = \pi D$  et la section transversale  $\omega = \pi \frac{D^2}{4}$ . Cette équation devient alors :

$$\sin I - \frac{1}{11} \frac{dp_0}{ds} = \frac{4}{D} \varphi(U).$$

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué au n° 32, page 53, le niveau piézométrique, dans l'étendue  $ds$ , s'est abaissé de  $ds \sin I - \frac{dp_0}{11}$

Désignons par  $J$  l'abaissement de ce niveau par unité de longueur, ou bien posons

$$J = \sin I - \frac{1}{\Pi} \frac{dp_0}{ds},$$

l'équation précédente devient

$$\frac{1}{4} DJ = \varphi(U).$$

Elle peut s'établir directement.

Appelons toujours  $\omega$  l'aire de la section transversale,  $\chi$  son périmètre,  $p$  la pression moyenne sur une section donnée,  $I$  l'angle formé par l'axe du tuyau avec l'horizontale. Si le mouvement est supposé uniforme, nous pouvons écrire l'équilibre d'une tranche comprise entre deux sections transversales distantes de  $ds$ . Le poids de cette tranche,  $\Pi\omega ds$ , a pour composante, suivant l'axe du tuyau,  $\Pi\omega ds \sin I$ ; sur ses deux faces extrêmes s'exercent des pressions normales dont la différence, projetée sur le même axe, est  $-\omega dp$ , et enfin sur le pourtour s'exerce un frottement qui, à raison de  $F$  par unité de surface vaut  $-F\chi ds$ . L'équation d'équilibre sera ainsi :

$$\Pi\omega ds \sin I - \omega dp - F\chi ds = 0.$$

Si les points de l'axe du tuyau sont rapportés à un plan horizontal inférieur,  $x$  étant l'ordonnée d'un point quelconque, la différence  $-dx$  de deux points consécutifs sera  $-dx = ds \sin I$ ; substituons, changeons les signes et divisons par  $\Pi\omega$ , nous obtiendrons

$$dx + \frac{dp}{\Pi} + \frac{\chi F}{\omega \Pi} ds = 0.$$

L'effort du frottement  $F$  par unité de surface de la paroi du tuyau est une fonction de la vitesse  $u_0$  le long de la paroi; mais comme cette vitesse est inconnue, il est plus commode, comme nous l'avons dit, de l'exprimer en fonction de la vitesse moyenne  $U$  et d'écrire  $\frac{F}{\Pi} = \varphi(U)$ . Il vient ainsi

$$(1) \quad dx + \frac{dp}{\Pi} + \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) ds = 0.$$

Intégrons cette équation et appelons  $H - \frac{U^3}{2g}$  la constante à laquelle

nous devons éгалer l'intégrale du premier membre, ce qui est légitime puisque U est constant, nous trouvons

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} = H - \frac{\chi}{\omega} \varphi(U) s.$$

Sous cette forme, l'équation montre que le plan de charge s'abaisse proportionnellement à la longueur s, ce qui est évident a priori puisque la seule cause de perte de charge, le frottement du liquide contre la paroi, agit proportionnellement à cette longueur s. La *ligne de charge* est alors une ligne inclinée dont les ordonnées décroissent linéairement à mesure que s grandit, et si nous appelons J cet abaissement du plan de charge par unité de longueur, ce qui revient à poser :

$$J = \frac{\chi}{\omega} \varphi(U),$$

ou bien, pour  $\chi = \pi D$  et  $\omega = \frac{\pi D^5}{4}$ ,

$$\frac{1}{4} DJ = \varphi(U),$$

l'équation différentielle (1) ci-dessus s'écrira :

$$dz + \frac{dp}{\Pi} + J ds = 0,$$

ou  $J = -\frac{dz}{ds} - \frac{1}{\Pi} \frac{dp}{ds} = \sin I - \frac{1}{\Pi} \frac{dp}{ds};$

ce qui montre bien que J est la même quantité que celle que nous avons désignée plus haut par la même lettre.

**79. Formules pratiques.** — La fonction  $\varphi(U)$  exprimant le frottement du liquide est inconnue et on a essayé de la représenter de bien des manières différentes. Nous allons rappeler les principales. On peut toujours, évidemment, donner à la fonction  $\varphi(U)$  la forme

$$\varphi(U) = b_1 U^2$$

à la condition de considérer le coefficient  $b_1$  non comme une constante, mais comme une fonction de la vitesse U. Les expériences montrent même qu'il doit être aussi, probablement, fonction du diamètre D de la conduite et peut-être de la charge J.

L'équation générale de l'écoulement dans les tuyaux de diamètre constant  $D$  se met alors sous la forme

$$(2) \quad \frac{1}{4} DJ = b_1 U^3,$$

ou, ce qui revient au même

$$(3) \quad U = C \sqrt{\frac{DJ}{4}};$$

en appelant  $C = \frac{1}{\sqrt{b_1}}$ , un nouveau coefficient<sup>1</sup>, fonction comme  $b_1$  de la vitesse  $U$  et du diamètre  $D$ .

**80. Formules anciennes.** — La formule qui a été longtemps la plus usitée est en même temps l'une des plus anciennes; c'est celle de Prony :

$$(4) \quad \frac{1}{4} DJ = aU + bU^2,$$

qui revient à faire

$$b_1 = b + \frac{a}{U}.$$

Les valeurs données par Prony pour les coefficients  $a$  et  $b$  sont :

$$a = 0,000017 \quad , \quad b = 0,000348.$$

D'Aubuisson et Eytelwein ont proposé d'autres valeurs numériques, mais celles-ci restent les plus usitées.

Dupuit, supposant  $b_1$  ou  $C$  constant a proposé la formule

$$(5) \quad U = 51 \sqrt{\frac{DJ}{4}}$$

qui est commode à cause de sa simplicité mais qui ne donne pas des résultats d'une exactitude suffisante. On la rend un peu meilleure en augmentant le coefficient numérique et en le portant à 60 et même à 63; mais même avec cette correction elle s'écarte encore beaucoup de la réalité.

De Saint-Venant a remplacé le terme  $\sqrt{\frac{DJ}{4}}$  ou  $\left(\frac{DJ}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$  par la puis-

1. La table VIII, à la fin de ce volume, donne les valeurs correspondantes des deux coefficients  $C$  et  $b_1$ , ainsi définis.

sance fractionnaire  $\left(\frac{Dj}{4}\right)^{\frac{7}{12}}$ . Le coefficient numérique doit être modifié en conséquence. La formule ainsi établie

$$(6) \quad U = 114 \left(\frac{Dj}{4}\right)^{\frac{7}{12}}$$

est peu employée.

**81. Défaut commun à ces formules.** — Toutes ces formules présentent un défaut qui leur est commun et qui tient à la valeur constante attribuée aux coefficients numériques. Il n'y est pas tenu compte de l'état de rugosité des parois, et cela vient probablement en grande partie d'une idée fausse que l'on se faisait des circonstances de l'écoulement. Du Buat avait commencé par mettre en doute cette influence : « En considérant, dit-il, comment l'eau prépare elle-même la surface sur laquelle elle coule, on voit que la différence des matières dont peut être composée la paroi ne doit pas en apporter de bien sensible dans la résistance. » Prony avait adopté cette opinion et en avait donné une explication : « Lorsque le fluide coule dans un tuyau ou sur un lit susceptible d'être mouillé, une lame ou couche de fluide reste adhérente à la matière qui compose ce tuyau ou dans laquelle ce lit est creusé ; cette couche peut ainsi être regardée comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement. » Ces observateurs n'avaient pas remarqué que, même en admettant l'existence de cette couche d'eau immobilisée, elle ne peut complètement effacer les aspérités de la paroi, et que dès lors, la présence de ces aspérités occasionne, dans le courant, des tourbillonnements et des mouvements confus dont l'action ne saurait être négligée.

**82. Formules modernes.** — C'est Darcy qui, le premier, a proposé de tenir compte de l'état des parois. En même temps qu'il proposait, pour le coefficient  $b_1$ , la forme :

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{R},$$

R étant le rayon du tuyau qu'il a mis dans sa formule au lieu du diamètre D plus généralement adopté, il donnait les valeurs numériques des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  applicables à la fonte neuve, et il proposait de les doubler pour les rendre applicables à la fonte recouverte de dépôts.

Il écrivait alors sa formule :

$$RJ = b_1 U^2 = \left( \alpha + \frac{\beta}{R} \right) U^2 ;$$

mais, afin d'éviter toute confusion (le rayon  $R$  a été quelquefois pris pour le rayon moyen  $\frac{D}{4}$ ), nous l'écrivons :

$$(7) \quad \frac{DJ}{4} = \left( \alpha + \frac{\beta}{D} \right) U^2 ;$$

et alors les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ont les valeurs suivantes pour la fonte recouverte de dépôts :

$$\alpha = 0,000507 \quad , \quad \beta = 0,00001294.$$

Pour la fonte neuve, les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  seraient les moitiés de celles-ci.

On voit que, dans l'hypothèse de Darcy, où le coefficient  $b_1$  est fonction du rayon  $R$ , la vitesse moyenne  $U$  est égale au produit de  $\sqrt{RJ}$  par une certaine fonction de  $R$ . M. Maurice Lévy a proposé, pour la fonte recouverte de dépôts, la formule :

$$(8) \quad U = 20,5 \sqrt{RJ (1 + 3 \sqrt{R})},$$

qui revient à donner au coefficient  $b_1$  une forme :

$$b_1 = \frac{1}{\alpha + \beta \sqrt{R}}.$$

Elle est peu employée.

M. Gauckler avait donné la formule plus compliquée :

$$(9) \quad \sqrt{U} + \frac{1}{4} D \sqrt[4]{U} = \alpha \sqrt[3]{D} \sqrt[4]{J},$$

avec  $\alpha = 7$  environ, qui n'est pas non plus passée dans la pratique.

M. Hagen avait cru reconnaître la nécessité de conserver à la formule la forme qui lui avait été donnée par Prony avec un terme du premier degré en  $U$ , et c'était le coefficient de ce terme qu'il rendait variable avec le diamètre. Il écrivait, avec nos notations :

$$(10) \quad \frac{DJ}{4} = \frac{a}{D} U + b U^2 ;$$

$a$  et  $b$  étant des coefficients numériques constants.

Le premier terme de cette formule, le seul qui soit à considérer

lorsque les vitesses sont petites, est analogue à celui qui figure dans la formule établie par Poiseuille pour les tubes capillaires <sup>1</sup>, laquelle s'écrit, avec nos notations :

$$U = aJD^2,$$

ce qui équivaut à

$$\frac{DJ}{4} = \frac{a'}{D} U.$$

Weisbach a donné la formule suivante

$$(11) \quad \frac{DJ}{4} = \left( a + \frac{b}{\sqrt{U}} \right) U^2,$$

avec  $a = 0,0007336$  ,  $b = 0,0004828$  ,

au moyen de laquelle il a dressé des tables qui sont fort usitées à l'étranger, en Angleterre et en Allemagne.

Comme résultat d'une discussion détaillée d'un grand nombre de résultats d'expériences, M. Albert Franck <sup>2</sup> a conclu à l'adoption de la formule :

$$(12) \quad \frac{DJ}{4} = \left( a + \frac{b}{\sqrt{D}} \right) U^2,$$

avec  $a = 0,000512$ ,  $b = 0,000385$ .

Le docteur Lampe, à la suite d'expériences très précises, avait proposé :

$$(13) \quad D^{1,25} J = a U^{1,802},$$

avec  $a = 0,0007555$ .

M. Osborne Reynolds, par la comparaison des résultats de ses expériences, a été amené à conclure que la résistance due au frottement n'était pas proportionnelle à  $U^2$ , mais à une puissance  $U^n$  de  $U$ , variable suivant le degré de rugosité des parois. D'après lui, l'exposant de cette puissance serait 1,7 pour les tuyaux très lisses, 1,722 pour les tuyaux en plomb et n'atteindrait 2 que pour ceux dont la paroi est très rugueuse.

M. le professeur Unwin a proposé la formule suivante :

$$(14) \quad J = a \frac{U^n}{D^{3-n}},$$

1. *Mémoires des savants étrangers à l'Académie des sciences*, tome IX, 1846.  
2. *Der Civilingenieur*, 1881.

$a$  et  $n$  étant variables ; ce dernier nombre, qui figure dans les exposants de  $U$  et de  $D$ , semblerait compris entre 1,79 et 2 pour les tuyaux en fonte, ce qui serait d'accord avec les indications de M. Reynolds.

M. Edgar Thrupp <sup>1</sup> est arrivé, de son côté, à une formule à peu près analogue, qui, bien que présentée sous une forme différente, revient à

$$(15) \quad J = a \frac{Un}{D^{0,6116n}},$$

et dans laquelle  $n$  varie de 1,70 à 2. Elle devient identique à la précédente, lorsque  $n = 1,86$ , ce qui est sensiblement sa valeur moyenne d'après les deux auteurs <sup>2</sup>.

1. Cité par M. le professeur Henry Robinson, dans son ouvrage, *Hydraulic power and hydraulic machinery*, 1887.

2. A titre de renseignement, je crois devoir donner ici une formule proposée par M. Victor Fournié (*ann. des P. et Ch.* 1898, 3<sup>e</sup> trim. page 1) pour l'écoulement d'un liquide par un tuyau circulaire, et dans laquelle le coefficient de résistance, désigné par  $b_1$ , serait fonction de la température. En appelant

$T$  la température dite absolue, en degrés centigrades,

$T_c$  la température absolue au point critique inférieur, c'est-à-dire au point où le corps solidifié se liquéfie,

$m$ , une constante d'adhérence, dépendant de la constitution physique de la paroi,

$n$ , une constante de rugosité, dépendant de la constitution mécanique de la paroi,

$a$ , une constante physique caractéristique du liquide considéré, qui serait, en quelque sorte la mesure de sa mobilité ou l'inverse de sa viscosité,

M. Fournié écrit de la manière suivante l'équation du mouvement

$$\frac{DJ}{4} = \frac{a D \sqrt{T - T_c - 1} + a - D \sqrt{T - T_c - 1}}{a D \sqrt{T - T_c - 1} - 1} (mU + nU^2)$$

Pour l'eau pure, non chargée de matières en suspension,  $a = 10$  et  $T - T_c$  est la température en degrés centigrades comptée au-dessus du zéro, en la désignant par  $t$ , la formule devient

$$\frac{DJ}{4} = \frac{10 D \sqrt{t - 1} + 10 - D \sqrt{t - 1}}{10 D \sqrt{t - 1} - 1} (mU + nU^2)$$

Une des conséquences de cette formule est l'augmentation notable du débit avec la température, quand le diamètre est petit. Lorsqu'il ne dépasse pas un à deux centimètres, le coefficient fractionnaire du second membre qui représente l'effet de l'agitation du liquide dans la section transversale est à peu près inversement proportionnel à  $D$  et vaut environ

pour $t = 4^\circ$	$\frac{0,48}{D}$		pour $t = 26^\circ$	$\frac{0,17}{D}$
10°	$\frac{0,28}{D}$		37°	$\frac{0,14}{D}$



**83. Formules analogues à celles des canaux découverts.** — Comme nous le verrons en parlant des canaux découverts, la plupart des formules proposées pour les tuyaux l'ont été également pour ces canaux, avec des coefficients numériques différents. Inversement, certaines formules, établies par des hydrauliciens en vue de représenter les lois de l'écoulement dans les canaux découverts, ont été appliquées aux tuyaux. Je citerai, en particulier, celle de MM. Ganguillet et Kutter qui sera donnée plus loin sous la forme :

$$(16) \quad U = C \sqrt{\frac{DJ}{4}},$$

le coefficient  $C$  ayant pour valeur :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right) \frac{2n}{\sqrt{D}}},$$

et qui peut s'appliquer aux tuyaux de fonte, en service, en y donnant à  $n$  la valeur 0,011 ou 0,012, soit en moyenne  $\frac{1}{n} = 88$ . De même, la formule de M. Robert Manning, dont il sera parlé au chapitre des canaux découverts et qui peut s'écrire :

$$(17) \quad U = C \sqrt{J} \sqrt[3]{\frac{D^2}{16}} = \frac{C}{4} \sqrt{J} \sqrt[3]{D^2},$$

s'applique aussi aux mêmes tuyaux avec la valeur  $C = 88$  ou  $\frac{C}{4} = 22$ , ce qui donne :

$$U = 22 \sqrt[3]{D^2} \sqrt{J} \quad \text{ou bien} \quad \frac{DJ}{4} = \frac{0,00052}{\sqrt[3]{D}} U^2.$$

#### 84. Difficultés du problème — Ces nombreuses tentatives

Poiseuille a trouvé en effet, que, dans les tubes capillaires, le débit de l'eau à 40 degrés est plus que double du débit en eau à 10°. Aussitôt que le diamètre devient un peu grand, l'influence de la température tend à disparaître et le coefficient fractionnaire dont il s'agit tend vers l'unité.

M. Fournié propose, pour l'eau, les coefficients numériques :

$$m = 0,000005 \qquad n = 0,000342$$

dont le second est très sensiblement celui de Prony. Il ne donne d'ailleurs, à l'appui de la forme proposée pour sa formule, aucun motif théorique qui puisse la justifier, elle doit donc être regardée comme purement empirique.

pour arriver à une formule pratique de l'écoulement dans les tuyaux montrent que la question est complexe et qu'elle est bien loin d'être résolue. Il semble impossible d'avoir une formule s'appliquant à tous les cas à cause de la rugosité qui a une importance considérable dont on peut se rendre compte par l'indication sommaire de Darcy laquelle consiste à doubler, pour la fonte recouverte de dépôts, des coefficients numériques déterminés pour les tuyaux en fonte neuve. Cette indication est manifestement insuffisante, car elle néglige l'importance de ces dépôts. La rugosité de la paroi des tuyaux n'est malheureusement pas susceptible d'un mesurage précis, c'est pourquoi il sera toujours très difficile d'en tenir un compte exact dans les formules. Ce que l'on doit chercher, c'est une formule, la plus simple possible, qui s'accorde assez bien avec les observations dans la limite de la pratique et pour les tuyaux de conduite ordinaires d'une rugosité moyenne.

Il semble démontré que la résistance due au frottement des liquides croît moins vite que le carré de la vitesse. Du Buat l'avait déjà constaté pour des mouvements même assez rapides. M. Gauckler<sup>1</sup> a démontré, pour les cours d'eau, que la loi du frottement proportionnel à la première puissance de la vitesse était la loi véritable dans les cours d'eau à faible pente, comme le sont à peu près toutes les rivières. Dans les écoulements un peu rapides, mais très réguliers, c'est encore celle qui s'observe et qui semble, en quelque sorte, être la loi primordiale du phénomène dégagé des perturbations produites par les tourbillonnements et l'agitation qui accompagnent toujours les grandes vitesses. La formule proposée par Prony se présente donc, au point de vue théorique, comme la plus rationnelle et celle qui avec des coefficients convenables, aurait le plus de chances de s'accorder avec les faits ; du reste, M. Bechmann a remarqué<sup>2</sup> que les formules de Prony, et les tables qui en sont déduites, sont meilleures, pour les diamètres moyens et même pour les grands, que celles de Darcy. Et, en réalité, beaucoup d'ingénieurs continuent à se servir des tables de Prony, malgré les travaux plus récents.

La formule de Prony a l'inconvénient d'être binôme ; celle de Darcy n'est monôme qu'en apparence, puisque le coefficient  $b_1$  y est de la forme  $a + \frac{b}{D}$ . Cela a pour effet de compliquer les calculs, de rendre difficile l'emploi des logarithmes. Aussi a-t-on vu plus haut

1. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1868, 1<sup>er</sup> semestre, p. 254.

2. *Distributions d'eau*, Paris 1888, n<sup>o</sup> 285, p. 318 et 2<sup>e</sup> éd. I, n<sup>o</sup> 187, Paris, 1898.

que les ingénieurs anglais avaient surtout cherché des formules véritablement monômes, même en acceptant la complication d'exposants fractionnaires, comme St Venant l'avait déjà proposé précédemment. Sa tentative pour faire adopter la formule  $U = a (DJ)^{\frac{1}{2}}$ , n'a pas eu, il faut le reconnaître, le succès qu'elle méritait. Les praticiens ont-ils été effrayés par cet exposant fractionnaire, malgré les tables numériques dressées pour rendre facile l'usage de la formule, ou bien ont-ils reconnu qu'elle n'était pas plus exacte que les autres, c'est ce qu'il est difficile de savoir. Le fait est qu'elle est tombée en désuétude, ainsi que les tables qui en sont déduites. Il semblera peut-être alors bien présomptueux de renouveler cette tentative et de proposer une nouvelle formule à exposant fractionnaire : l'avenir seul permettra de juger si c'était inutile.

M. Boussinesq, dans sa *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides*, a montré au § IX, n° 35, que le coefficient représenté ici par  $b_1$  doit croître avec les inverses des deux quantités  $U$  et  $R$  et que, par suite, si on suppose la fonction qui le représente développée par la formule de Mac-Laurin et réduite à sa partie linéaire, ce coefficient aura une expression de la forme

$$(18) \quad b_1 = \alpha \left( 1 + \frac{\beta}{R} + \frac{\beta'}{U} \right).$$

Les hydrauliciens, jugeant ce trinôme trop complexe pour les applications, ont supprimé l'un des deux derniers termes. Prony n'a conservé que le dernier, Darcy et M. Bazin n'ont gardé, au contraire que le précédent, et il semble en effet plus probable qu'il doive en être ainsi lorsque la section transversale acquiert de grandes dimensions, comme dans les cours d'eau. En effet, chaque degré de rugosité de la paroi exige une certaine ampleur de la section, une certaine grandeur minima du rayon moyen  $\frac{\omega}{\chi}$  pour que le coefficient du frottement intérieur se réduise à une valeur constante. Au-dessous de ce rayon minimum, le courant, manquant en quelque sorte de place pour son passage, doit laisser moins de *fluide mort* entre les aspérités de son lit, les contourner ainsi plus complètement et y produire des chocs plus forts, à égalité de la vitesse de translation. De là, sans doute, dans la valeur du coefficient usuel  $b_1$  l'augmentation qu'exprime le second terme.

Il en est autrement lorsque le rayon moyen étant petit, les parois sont polies ou modérément rugueuses. L'écoulement montre alors une tendance de plus en plus accusée, à mesure que le rayon et la

rugosité diminuent, vers les lois de Poiseuille, applicables à l'écoulement dans les tubes capillaires et d'après lesquelles le coefficient appelé ici  $b_1$  serait de la forme  $\frac{\alpha}{RU}$ . L'agitation intérieure est notablement diminuée et il s'établit un régime intermédiaire entre celui des très grandes sections, pour lesquelles  $b_1$  est à peu près constant et celui des très petits tubes. Les variables  $\frac{1}{R}$  et  $\frac{1}{U}$ , au lieu de se séparer comme dans la formule (18) ne figurent, dans l'expression de  $b_1$  que par leur produit affecté d'un exposant variable entre la valeur 0 qui correspond aux très grandes sections et la valeur 1 qui correspond aux tubes capillaires.

En opérant sur un canal rectangulaire de 0 m. 10 de largeur, M. Bazin a reconnu que le coefficient  $b$  pouvait alors être regardé comme proportionnel à la puissance  $\frac{1}{2}$  de ce produit, c'est-à-dire exprimé par  $\frac{\alpha}{\sqrt{RU}}$ , même lorsque les parois de ce canal étaient rendues rugueuses par un revêtement en forte toile.

Les aspérités que l'on rencontre, moyennement, dans les tuyaux de conduite des eaux sont à peine comparables à celles que produisait un pareil revêtement, et d'autre part, l'écoulement dans un tuyau, est, toutes choses égales, plus tranquille que dans un canal découvert de mêmes dimensions. On peut donc être induit à admettre, pour la loi de l'écoulement dans les tuyaux de conduite ordinaires, un coefficient de la forme  $\alpha \left(\frac{1}{RU}\right)^n$ , avec un exposant  $n$  compris, sans doute, entre 0 et  $\frac{1}{2}$ .

C'est ainsi que l'on peut, théoriquement, justifier la forme proposée ci-après.

Il convient de remarquer que la formule (14) proposée par M. Unvin, qui peut s'écrire  $DJ = a \frac{U^n}{D^{2-n}} = \frac{a}{(DU)^{2-n}} \cdot U^2$ , rentre absolument dans cette forme générale. Celle du docteur Lampe (13), si l'on y remplace l'exposant 1,802 de  $U$ , par 1,80, et celui, 1,25 de  $D$  par 1,20, c'est-à-dire avec des modifications relativement peu importantes, s'écrit alors :

$$D^{\frac{5}{2}} J = a U^{\frac{3}{2}},$$

ou bien

$$DJ = \frac{\alpha}{(DU)^{\frac{1}{4}}} U^2,$$

et elle rentre aussi dans la forme générale.

Il m'a paru que l'exposant  $\frac{1}{4}$  s'appliquait aux faits d'observation au moins aussi bien que l'exposant  $\frac{1}{5}$ , que donnerait cette formule ainsi modifiée. De plus, la puissance  $\frac{1}{4}$  ou la racine quatrième peut à la rigueur, se calculer en l'absence de tables; c'est pourquoi je lui ai donné la préférence.

**85. — Nouvelle formule proposée.** — D'un examen détaillé d'un très grand nombre de résultats d'expériences et d'observations, il m'a paru qu'il était possible de conclure que le coefficient  $b_1$ , de la formule

$$\frac{DJ}{4} = b_1 U^2,$$

pouvait recevoir la forme  $b_1 = \frac{b}{\sqrt[4]{DU}}$ , ce qui, en appelant  $\alpha$  un coefficient numérique, conduit à la formule :

$$D^3 J^2 = \alpha^4 U^7,$$

$$(19) \quad \text{ou bien } D^{\frac{5}{4}} J = \alpha U^{\frac{7}{4}}.$$

C'est la formule du docteur Lampe, donnée plus haut, sauf une petite différence dans l'exposant de  $U$  qui y est de 1,802 au lieu de  $\frac{7}{4} = 1,750$ . La formule proposée concorde aussi avec celle de M. le professeur Unwin lorsque, dans cette dernière, on fait  $n = 1,75$ . Le coefficient numérique  $\alpha$  doit y recevoir la valeur moyenne  $\alpha = 0,000740$  pour les tuyaux lisses, parfaitement unis à l'intérieur, ou recouverts d'une couche de coaltar ou autre enduit qui en fait disparaître les rugosités, et la valeur moyenne 0,00092 pour les tuyaux légèrement incrustés comme le sont, au bout de quelque temps de service, tous ceux qui ont à conduire des eaux un peu calcaires. Si les tuyaux sont fortement incrustés, aucune formule

n'est plus applicable car il faudrait alors tenir compte de la diminution de la section transversale qui pourrait être considérable.

L'effet des incrustations est variable, naturellement, avec le diamètre des tuyaux ; il est d'autant moindre que le diamètre est plus grand. Lorsque le diamètre n'est que de 0,05 à 0,10 l'effet d'incrustations ordinaires doublerait facilement le coefficient de résistance ; tandis qu'il n'augmenterait ce coefficient que de moitié pour des diamètres de 0,20 à 0,60 et d'un quart, à peine, pour des diamètres plus grands.

Les tuyaux parfaitement lisses sont un peu une exception et il est bien rare qu'ils conservent longtemps leur poli primitif ; on peut voir, en comparant les observations faites par Darcy, qu'un dépôt à peine perceptible, d'une petite fraction de millimètre d'épaisseur, suffit pour changer les conditions de l'écoulement en augmentant la résistance. C'est pourquoi je propose d'adopter, dans tous les cas pratiques, la formule <sup>1</sup> :

$$(20) \quad DJ = 0,00092 \sqrt[4]{\frac{U^7}{D}}.$$

### 86. Tables numériques. — Les problèmes que l'on peut

1. Dans une matière aussi peu susceptible d'exactitude, il me paraît inutile de donner, pour le coefficient numérique, plus de deux chiffres significatifs.

M. l'ingénieur Masoni (Bollettino del Collegio degl' Ingegneri ed Architetti in Napoli, vol. XI, n. 3 e 4 ; Marzo e Aprile 1863) en comparant les résultats donnés par cette formule à ceux des formules de Prony, Weisbach, Darcy, etc, est arrivé à conclure que l'accord serait beaucoup plus satisfaisant, surtout pour les grands diamètres, si le coefficient 0,00092 était augmenté de moitié et porté, par conséquent, à 0,00138.

Il existe bien peu d'expériences sur les conduites de grand diamètre surtout sur des conduites de 3 mètres de diamètre, comme M. Masoni en suppose dans les tableaux comparatifs qu'il a dressés. Je n'en connais pas, et je ne sais pas si les formules de Prony, Weisbach, ou Darcy s'appliqueraient mieux que la mienne aux résultats des observations qui pourraient être faites.

M. William E. Foss, membre de la société des Ingénieurs civils de Boston, propose de substituer à cette formule, une nouvelle expression qui s'écrirait, avec nos notations :

$$DJ = \frac{a}{6\sqrt{D^2U}} \cdot U^2$$

Elle rentrerait à peu près dans la forme générale, seulement les deux paramètres  $\frac{1}{D}$  et  $\frac{1}{U}$  dont le produit figure dans l'expression de  $b$ , y entreraient avec des exposants différents. La prédominance attribuée au diamètre ou au rayon moyen sur la vitesse moyenne donnerait, à cette nouvelle formule, un caractère par lequel elle se rapprocherait sans doute de la réalité, surtout pour les grands diamètres, d'après ce qui a été dit plus haut à la fin du n° 84,

être appelé à résoudre sur les tuyaux de conduite se réduisent toujours, étant données deux des quatre quantités R ou D, rayon ou diamètre du tuyau, J perte de charge par unité de longueur, U vitesse moyenne de l'eau, et  $Q = \pi R^2 U$ , débit de la conduite par unité de temps, à déterminer les deux autres.

Cela se fait au moyen de la relation  $Q = \pi R^2 U$  et de l'une des formules qui viennent d'être données établissant une relation empirique entre R ou D, J et U. En vue de faciliter les calculs, la plupart de ces formules ont été traduites en tables numériques dont les dispositions sont diverses.

Les tables de Prony et de St Venant sont à simple entrée et donnent, en regard de la vitesse moyenne U, la valeur de  $\frac{DJ}{4}$ . Elles ne sont pas commodes pour les calculs, car le débit  $Q = \pi R^2 U$  de la conduite, par seconde, qui est un élément important, n'y figure pas, et si, par exemple, c'est ce débit qui est donné avec la perte de charge J, le diamètre D de la conduite, qui est à calculer, ne peut être trouvé que par tâtonnement.

La table de Darcy est à double entrée ; elle donne, pour une valeur de U comprise entre 0<sup>m</sup>10 et 3<sup>m</sup>00 et pour un diamètre D compris entre 0,01 et 1<sup>m</sup>00, le débit Q et la charge J. La table de Mary est également à double entrée ; elle donne, pour les diamètres usuels compris entre 0<sup>m</sup>05 et 0<sup>m</sup>60 et pour un débit Q compris entre 0 lit. 022 et 266 lit. 6 par seconde, la vitesse moyenne U et la charge J. Elle est déduite de la formule de Prony <sup>1</sup>.

On peut, dans la formule  $\frac{1}{4} DJ = b_1 U^2$ , remplacer U par sa valeur en fonction du débit  $U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4Q}{\pi D^2}$ , ce qui donne :

$$J = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 D^5} \quad \text{ou} \quad \frac{J}{Q^2} = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^5}$$

M. Bresse a dressé une table qui donne, pour une valeur du diamètre D, comprise entre 0 m. 01 et 1 m. 20, la valeur correspondante de  $\frac{J}{Q^2}$  et de son logarithme. Cette table est calculée d'après la formule et les coefficients de Darcy ; un extrait en est donné dans la table VII, à la fin du présent volume.

1. Les débits qui figurent à la première colonne de la table de Mary sont des multiples ou des sous-multiples du pouce de fontainier. Un pouce de fontainier représente un débit de 0 lit. 2227 par seconde. Cette mesure n'est plus usitée.

La formule précédente peut se mettre sous la forme :

$$Q = \frac{\pi D^3}{8 \sqrt{b_1 D}} \sqrt{J} = \frac{\pi R^3}{\sqrt{2b_1 R}} \sqrt{J} ;$$

et M. Gay, professeur à l'université de Lausanne, a donné une table où l'on trouve, pour les valeurs du rayon R comprises entre 0 m. 01 et 0 m. 50 la valeur du logarithme du coefficient  $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2b_1 R}}$ .

Enfin, on peut, de la formule de Prony,  $\frac{DJ}{4} = aU + bU^2$ , éliminer le diamètre D en fonction du débit :  $D^2 = \frac{4Q}{\pi U}$  ; on trouve

$$J^2 Q = 4\pi U (aU + bU^2)^2.$$

M. Fourneyron a calculé une table qui pour une valeur donnée de  $J^2 Q$ , fournit immédiatement la valeur correspondante de U.

Ces dernières tables sont, croyons-nous, peu employées.

Toutes ces tables ne sont d'ailleurs que la traduction des formules de Prony ou de Darcy. Celles qui portent les numéros IV, V, et VI à la fin de ce volume, ont été au contraire calculées d'après la formule (20) proposée à la page 150. Elles permettent de résoudre immédiatement tous les problèmes relatifs aux conduites.

**87. Usages de ces tables.** — *Exemples* : 1<sup>o</sup> Etant donnés le diamètre D d'une conduite et la perte de charge par mètre J, calculer son débit Q.

La formule :

$$D^5 J^4 = a^4 U^7$$

devient, en y mettant pour U sa valeur  $U = \frac{4Q}{\pi D^2}$ ,

$$D^{19} J^4 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^7 a^4 Q^7 :$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{Q^7}} = \frac{1}{J} a \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^7} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{19}}} .$$

La table IV donne, pour toutes les valeurs de D comprises entre 0 m. 01 et 1 m. 40, la valeur de  $a \sqrt[4]{\left(\frac{4}{\pi}\right)^7} \frac{1}{\sqrt[4]{D^{19}}}$  qui y est désignée,



pour abrégé, par la lettre  $\gamma$ . On divisera donc, par la perte de charge donnée  $J$ , le nombre de cette table correspondant au diamètre donné  $D$  et l'on cherchera, dans la table V qui donne les valeurs de  $\frac{1}{\sqrt[4]{Q^3}} = \frac{\gamma}{J}$  le nombre qui se rapproche le plus du produit obtenu ; on trouvera, en regard, le débit cherché  $Q$ .

Exemple : *Quel est le débit d'une conduite de 0 m. 35 de diamètre, sous une charge de 0 m. 00013 par mètre.*

Le nombre  $\gamma$  de la table IV, correspondant au diamètre 0,35, est 0,205. La charge  $J$  étant 0,00013, le quotient  $\frac{\gamma}{J}$  est 1577.

La table V donne en regard du débit  $Q = 0$  m. 015 le nombre 1560, et en regard du débit  $Q = 0$ ,014, le nombre 1755. Le débit cherché sera donc, à très peu près de 15 litres par seconde.

2° Etant donné le débit  $Q$  et la charge  $J$ , calculer le diamètre  $D$ .

On multipliera la charge donnée  $J$  par la valeur de  $\frac{\gamma}{J}$  inscrite dans la table V, en face du débit donné  $Q$  et l'on aura ainsi la valeur de  $\gamma$  ; il suffira de chercher, dans la table IV, la valeur de  $D$  correspondante.

Exemple : *Quel diamètre faudra-t-il donner à une conduite pour qu'elle puisse débiter cent dix litres par seconde sous une charge de 0 m. 00021 par mètre.*

Le nombre  $\frac{\gamma}{J}$  de la table V correspondant au débit de 110 litres est 48. Le produit de ce nombre par la charge donnée 0,00021 est 0,01008, lequel est compris entre ceux qui sont, dans la table IV, en regard des diamètres 0,65 et 0,70. Une interpolation, faite à la manière ordinaire, conduirait à la valeur  $D = 0,662$  ; mais il sera en général suffisant et préférable, en pratique, d'adopter le chiffre le plus élevé 0,70.

3° Etant donné le débit  $Q$  et le diamètre  $D$ , calculer la perte de charge par mètre  $J$ .

On prendra, dans la table V le nombre correspondant au débit donné  $Q$  ; dans la table IV celui qui correspond au diamètre donné  $D$  ; le premier est  $\frac{\gamma}{J}$ , le second est  $\gamma$ , il suffira donc de diviser le second par le premier pour avoir  $J$ .

Exemple : *Une conduite de 0 m. 40 de diamètre débite 55 litres par seconde : quelle est la perte de charge par mètre.*

La table IV donne, pour  $Q = 0,055$ ,  $\frac{\gamma}{J} = 160$  ; la table V, pour

$D = 0,40$ ,  $\gamma = 0,107$ . En divisant ce nombre par le précédent, on trouve  $J = 0,000669$ .

L'emploi de ces tables, bien que très simple, exige encore un petit calcul, multiplication ou division; pour l'éviter, on peut se servir de la table VI où l'on trouvera les résultats de ce calcul pour un certain nombre de diamètres usuels et pour des débits variables. L'usage de cette table n'a besoin d'aucune explication.

On trouvera, aux annexes, une méthode graphique basée sur l'emploi d'un abaque qui permet de résoudre très simplement tous les problèmes relatifs aux conduites.

Les tables III et III bis donnent les débits en fonction de la vitesse ou inversement, dans les conduites ayant les diamètres les plus usuels. Ces tables ne sont que la traduction en chiffres de l'une des formules :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot U \quad \text{ou} \quad U = \frac{4}{\pi D^2} \cdot Q$$

Elles sont limitées, pour chaque série de diamètres aux neuf chiffres significatifs; elles permettent d'obtenir tous les débits correspondant à toutes les vitesses, ou inversement, par un simple déplacement de la virgule et une addition.

Exemple : *Quelle est la vitesse moyenne correspondant à un débit de 253 litres par seconde, dans une conduite de 0 m. 80 de diamètre.*

La table III bis donne, dans une conduite de 0,80 :

pour un débit de 200 litres	une vitesse de	0 <sup>m</sup> ,39789
—	50 litres	— 0 <sup>m</sup> ,09947
—	<u>3 litres</u>	— <u>0<sup>m</sup>,00597</u>

Et par suite pour un débit de

253 litres une vitesse de 0<sup>m</sup>,50333

*Quel est le débit correspondant à une vitesse de 0 m. 68 dans une conduite de 0 m. 25.*

La table III donne, pour la conduite de 0,25 :

Débit correspondant à une vitesse de 0,60	29 <sup>lit.</sup> 45
—	—
—	<u>0,08</u>
Débit correspondant à une vitesse de 0,68	<u>33<sup>lit.</sup> 93</u>
	33 <sup>lit.</sup> 38

**88. Limitation de la vitesse dans les conduites.** — Il n'est pas inutile de rappeler ici que, pour diverses causes et en par-

ticulier pour éviter les coups de bélier dans les conduites, il est d'usage de limiter la vitesse moyenne de l'eau qu'elles débitent. Cette limitation de la vitesse n'a évidemment rien d'absolu et peut dépendre des précautions plus ou moins nombreuses qu'on aura prises d'autre part pour se mettre à l'abri des coups de bélier, elle peut aussi être fonction, dans une certaine mesure, de la pression moyenne dans les conduites. Cependant, on peut admettre en général les limites ci-après, pour les conduites de différents diamètres :

Diamètres	Vitesses maxima	Diamètres	Vitesses maxima
0 <sup>m</sup> ,10	0 <sup>m</sup> ,75	0 <sup>m</sup> ,40	1 <sup>m</sup> ,25
0 ,15	0 ,80	0 ,50	1 ,40
0 ,20	0 ,90	0 ,60	1 ,60
0 ,25	1 ,00	0 ,80	1 ,80
0 ,30	1 ,10	1 ,00	2 ,00

Bien des ingénieurs se tiennent même notablement au-dessous de ces limites qui sont rarement atteintes.

## § 2

## PROBLÈMES DIVERS

**89. Conduite partant d'un réservoir.** — Soit au moyen des tables, soit au moyen de l'une des formules proposées pour calculer le débit des conduites, on peut donc résoudre les problèmes auxquels leur établissement peut donner lieu. Il y a toutefois, en ce qui concerne la détermination de la perte de charge, une remarque essentielle à faire lorsqu'il s'agit d'une conduite partant d'un réservoir sur la paroi duquel elle s'embranche.

Considérons une pareille conduite AB (fig. 55) et soit H la hauteur verticale entre le niveau de l'eau dans le réservoir et celui de l'extrémité B de la conduite que nous supposons déboucher librement dans l'air. Si L est la longueur AB de la conduite, la perte de charge par mètre ne sera

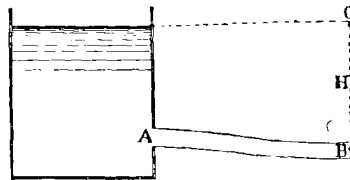


Fig. 55

pas  $\frac{H}{L}$  car une partie de la charge totale  $H$  est perdue à l'entrée dans la conduite, et une autre, utilisée pour produire la vitesse d'écoulement, se trouve en réalité perdue également, puisque le liquide s'écoule par l'extrémité  $B$  sans que sa vitesse y soit utilisée. La perte de charge due à l'entrée de l'eau dans la conduite est, comme on l'a vu au n° 43, exprimée par  $\frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \right]$  en appelant  $m$  le coefficient de contraction de la veine liquide à l'entrée du tuyau. La charge utilisée à produire la vitesse  $U$  est égale <sup>1</sup> à  $\frac{U^2}{2g}$  et, d'après ce qui vient d'être dit, la perte de charge totale se trouve être ainsi de  $\frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{10}{9} \right]$ . Cette quantité doit être retranchée de la charge totale  $H$  pour que l'on puisse en déduire la perte due au frottement du liquide dans la conduite par unité de longueur, laquelle est alors :

$$J = \frac{H - \frac{U^2}{2g} \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{10}{9} \right]}{L}.$$

Nous avons vu que, pour la valeur ordinaire du coefficient

1. La charge utilisée à produire la vitesse  $U$  serait exactement  $\frac{U^2}{2g}$  dans un fluide parfait, ou en faisant abstraction des frottements intérieurs et si toutes les vitesses étaient égales. En faisant entrer en ligne de compte, et les frottements, et les différences des vitesses, dans le cas très simple du mouvement le plus régulier à l'entrée bien évasée d'un tube circulaire, M. Boussinesq est arrivé à trouver (Théorie de l'écoulement tourbillonnant, etc., 2<sup>e</sup> mémoire, note du n° 13) que la charge nécessaire pour produire la vitesse de régime uniforme  $U$ , était de  $1,12 \frac{U^2}{2g}$  et M. J. Delemer, dans sa thèse de doctorat (Paris 1895) sur le mouvement de l'eau, etc. citée par M. Boussinesq, a trouvé  $1,1346 \frac{U^2}{2g}$ .

Ces résultats peuvent être prévus. La force vive du courant dont la vitesse moyenne est  $U$  n'est pas  $U^2$ , mais, comme il a été démontré au n° 24,  $\alpha U^2$ , en appelant  $\alpha$  un coefficient nécessairement supérieur à l'unité ; la hauteur de chute correspondant au travail qui représente cette force vive est donc  $\alpha \frac{U^2}{2g}$ . Dans les conditions où l'écoulement a été étudié, la valeur de  $\alpha$  ne dépasse l'unité que d'une petite fraction, elle n'est que d'environ 1,03 ou 1,04, la différence en plus que présentent les deux valeurs trouvées par M. Boussinesq et M. Delemer provient du frottement.

$m = 0,62$ , la parenthèse qui multiplie  $\frac{U^2}{2g}$  vaut environ  $\frac{3}{2} = 1,50$ . On peut, pour abrégé, représenter cette parenthèse par  $\delta$  et écrire :

$$J = \frac{H - \delta \frac{U^2}{2g}}{L}.$$

La vitesse d'écoulement  $U$  se déterminera ainsi par l'équation générale  $\frac{DJ}{4} = b_1 U^2$ , dans laquelle on mettra pour  $J$  cette expression et pour  $b_1$  soit une valeur constante, soit l'une des nombreuses valeurs variables que nous avons données précédemment. On aura ainsi :

$$\frac{D}{4L} \left( H - \delta \frac{U^2}{2g} \right) = b_1 U^2;$$

d'où l'on tirera :

$$U = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{\frac{8Lb_1g}{D} + \delta}}.$$

La vitesse réelle est donc égale à la vitesse théorique  $\sqrt{2gH}$  multipliée par un coefficient de réduction  $\mu$ , plus petit que l'unité et ayant pour expression :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{8Lb_1g}{D} + \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{10}{9} \right]}}.$$

Lorsque  $L$  est égal à  $D$  ou ne le dépasse pas beaucoup, ce qui est le cas de l'ajutage cylindrique, le premier terme sous le radical, où  $b_1$  est généralement inférieur à  $0,0004$ , ne dépasse pas  $0,03$  ou  $0,04$  et peut être négligé par rapport au terme suivant, dont la valeur, pour  $m = 0,62$ , est  $1,50$ . On trouve alors pour le coefficient  $\mu$  environ  $0,82$ .

Mais si  $L$  augmente le coefficient  $\mu$  diminue, et voici les valeurs qu'il prend lorsque la longueur  $L$  devient égale à 5 fois, 10 fois,.... le diamètre  $D$ .

Valeurs de $\frac{L}{D}$	Valeurs de $\mu$	Valeurs de $\frac{L}{D}$	Valeurs de $\mu$
5	0,78	30	0,63
10	0,75	40	0,60
15	0,71	50	0,57
20	0,68	100	0,46
25	0,66	200	0,36

Tous ces chiffres, et les derniers surtout, doivent être considérés comme seulement approximatifs, car ils sont calculés en admettant, pour le coefficient de frottement  $b_1$ , une valeur moyenne qui peut suivant la nature des parois différer beaucoup de la réalité. Pour les faibles longueurs, l'influence de ce coefficient est moins grande, et les résultats ont plus de chance d'être approchés.

**90. Régime graduellement varié.** — M. de Caligny, d'après de nombreuses observations, a été amené à penser que la longueur d'un tuyau doit être au moins de trente-six fois celle de son diamètre pour que la vitesse centrale soit sensiblement influencée par le frottement des parois. Jusque là l'effet retardateur de ce frottement ne se fait sentir que sur les couches les plus éloignées du centre. La distribution des vitesses, dans un tuyau de faible longueur, serait donc très différente de celle que l'on a observée dans les tuyaux plus longs et que nous ferons connaître plus loin.

Cette conséquence a été remarquablement vérifiée par les expériences très précises de M. Bazin<sup>1</sup>. Il a constaté, en effet, sur un tuyau de 0<sup>m</sup>,80 de diamètre, que la répartition des vitesses à une distance de 20 mètres de l'origine, soit 25 diamètres, était encore très différente de ce qu'elle était à la distance de 40 mètres, soit 50 diamètres. Et M. Boussinesq, dans sa *Théorie du mouvement tourbillonnant et tumultueux des liquides* a montré qu'un parcours d'environ 30 diamètres, après l'épanouissement des filets fluides consécutif à la contraction de l'entrée, suffit pour établir le régime uniforme. En comptant 4 ou 5 diamètres en plus depuis l'entrée jusqu'à la section où l'épanouissement est ainsi effectué et où le régime commence à varier graduellement, on voit que l'établissement du régime uniforme dans un tuyau de conduite à parois polies demandera, au maximum, une longueur de 35 à 40 fois le diamètre du tuyau.

1. Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux par M. Bazin (1897). Tome XXXII des Mémoires des savants étrangers à l'Académie des Sciences.

Après un parcours de 25 diamètres seulement, l'écart entre les vitesses réelles aux divers points de la section et les vitesses correspondant au régime uniforme, se trouve exprimé par une fonction qui décroît en valeur absolue depuis 1,07 environ au centre, jusqu'à 0,60 au contour. La vitesse sur l'axe est donc inférieure à celle du régime uniforme, alors qu'elle est plus grande le long de la paroi ; l'écart s'annule à une distance du centre égale à 0,66 R, ce qui est aussi d'accord qu'on peut l'espérer avec les expériences de M. Bazin desquelles il résulte que la distance à laquelle se produit l'égalité des vitesses est d'environ les  $\frac{5}{8}$  du rayon, soit 0,625 R.

La raison de ces différences est facile à voir ; après la contraction qui s'opère à l'entrée du tuyau et où les vitesses sont sensiblement égales dans toute la section, les filets voisins de la paroi se retardent progressivement tandis que ceux de la partie centrale tendent à accélérer leur mouvement, en raison de ce que leur vitesse relative, par rapport aux voisins, étant très petite, il en est de même du frottement. Ce n'est qu'au bout d'un certain parcours (35 à 40 diamètres) que l'équilibre est réalisé partout et que le régime uniforme s'établit définitivement.

Indépendamment de l'influence de la longueur, M. de Caligny a constaté aussi celle de la durée de l'écoulement, ou de l'amplitude totale du mouvement. « Quand le chemin parcouru par l'eau dans un tuyau de conduite, dit-il, par un mouvement permanent ou par un mouvement oscillatoire, est, relativement au diamètre, au-dessous d'une certaine limite, sans être excessivement petit, le coefficient de la résistance des parois, proportionnelle au carré de la vitesse moyenne dans chaque élément de l'espace et du temps, est beaucoup moindre qu'on n'aurait dû le penser jusqu'ici, d'après les idées généralement reçues sur le mode d'action des frottements. » Il en conclut, avec beaucoup de raison, que la résistance passive doit être en général moindre dans les mouvements oscillatoires que dans les mouvements permanents, si, de part et d'autre, les vitesses moyennes ne sont pas très petites.

Cette différence provient, d'après M. de Caligny, « d'une diminution dans le rapport de la vitesse de la couche d'eau qui glisse contre la paroi à la vitesse moyenne de chaque tranche, dans un même instant donné. »<sup>1</sup>

Cela revient à dire que le frottement du liquide contre la paroi est beaucoup plus grand que celui du liquide sur lui-même, et que

1. *Hydraulique*, Tome I, pages 42 et suivantes.

l'influence retardatrice du frottement ne s'exerce de proche en proche et d'une couche à la suivante, que dans un temps appréciable. Il se produirait alors, au commencement de l'écoulement, une vitesse moyenne plus grande qu'un instant après.

**91. Conduite à diamètre variable.** — Les tuyaux de conduite à diamètre graduellement variable ne sont employés que d'une façon exceptionnelle et sur de petites longueurs pour raccorder deux conduites de diamètre différent. La loi de l'écoulement dans ces tuyaux est donnée par la formule générale (17) ou (18) ci-dessus (pages 43 et 44) dans laquelle on devra supposer  $D$ , diamètre de la conduite, variable et fonction donnée de la longueur  $s$ . L'équation (18) multipliée par  $ds$  devient, en y remplaçant comme nous l'avons déjà fait plus haut,  $ds \sin I$  par  $-dz$  :

$$dz + \frac{dp}{\Pi} + \frac{4}{D} \varphi(U) ds + \alpha' d \left( \frac{U^2}{2g} \right) = 0.$$

Intégrons depuis une section initiale particularisée par l'indice 0, nous aurons :

$$z - z_0 + \frac{p - p_0}{\Pi} + 4 \int_{s_0}^s \frac{\varphi(U)}{D} ds + \alpha' \left( \frac{U^2 - U_0^2}{2g} \right) = 0.$$

Nous pouvons, comme nous l'avons fait dans le cas du mouvement uniforme, remplacer la fonction inconnue  $\varphi(U)$  par  $B_1 U^2$ , en appelant  $B_1$  un coefficient qui peut être fonction de  $U$ , de  $D$ , etc. Cela revient simplement à poser  $\frac{\varphi(U)}{U^2} = B_1$  ce qui peut être admis à titre de simplification.

Nous pouvons ensuite, sous le signe d'intégration, remplacer  $U$  par sa valeur en fonction de  $Q$  c'est-à-dire par  $\frac{4Q}{\pi D^2}$  et observer que  $Q$ , étant indépendant de  $s$ , sortira de ce signe ; nous obtiendrons alors, en faisant cette substitution et groupant les termes d'une façon différente :

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{64Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^s \frac{B_1 ds}{D^5} - (\alpha' - 1) \left( \frac{U^2 - U_0^2}{2g} \right)$$

Sous cette forme on voit que l'abaissement du plan de charge ou la perte de charge entre deux sections données se compose de deux



parties : 1<sup>o</sup> le terme  $\frac{64 Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^s \frac{B_1 ds}{D^5}$  qui est dû au frottement contre la paroi ; et 2<sup>o</sup> le terme  $(\alpha' - 1) \left( \frac{U^2 - U_0^2}{2g} \right)$  dû à l'accélération ou à l'accroissement de vitesse moyenne, c'est-à-dire à l'inertie de la masse liquide en mouvement.

Pour évaluer la première partie  $\frac{64 Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^s \frac{B_1 ds}{D^5}$ , il faut connaître d'abord la loi de variation de D en fonction de s que l'on suppose donnée, et aussi la loi de variation du coefficient B<sub>1</sub>. Or on n'a, sur ce coefficient, aucune notion exacte. On peut supposer, approximativement, qu'il est à peu près le même, dans le cas d'une conduite à diamètre variable que dans une conduite à diamètre constant et lui attribuer alors soit une valeur constante b<sub>1</sub> soit une expression variable, ou bien en fonction de U comme l'a proposé Prony, ou bien en fonction du diamètre D comme l'a fait Darcy. Eu égard au peu d'importance pratique de la question, rien n'empêche d'admettre la première hypothèse et de faire ce coefficient constant, ce qui permet de le faire sortir du signe d'intégration.

Pour la seconde partie de la perte de charge  $(\alpha' - 1) \left( \frac{U^2 - U_0^2}{2g} \right)$  son évaluation exige la connaissance du coefficient  $\alpha'$ , dont la valeur dépend de l'excès, sur le produit U<sup>2</sup> ω, de l'intégrale  $\int_{\omega} u^2 d\omega$ . Nous avons établi plus haut la loi des variations de la vitesse u en fonction de la distance de chacun des filets liquides au centre du tuyau, dans le cas du mouvement uniforme. Si nous admettons, bien que cela semble assez peu probable, que la répartition des vitesses dans une section soit la même lorsque le diamètre de la conduite est variable, la valeur pratique à attribuer à  $\alpha'$  serait d'environ 1,111 soit  $\frac{10}{9}$  ; de sorte que  $(\alpha' - 1)$  serait égal à  $\frac{1}{9}$ .

1. En réalité, la valeur du coefficient  $\alpha$  déduite de la loi de la répartition des vitesses dans une même section transversale est beaucoup plus faible et ne dépasse guère 1,03 ; mais comme nous l'avons dit plus haut (p. 43, en note), la substitution, dans le terme précédent, du coefficient b<sub>1</sub> relatif au régime uniforme équivaut à négliger un terme en  $\frac{U^2 - U_0^2}{2g}$ , de sorte que pour corriger cette erreur, on est conduit à augmenter le coefficient  $\alpha'$  de près de quatre fois son excès sur l'unité, et à adopter par suite la valeur donnée  $\alpha' = 1,111$  (voir le mémoire de Saint-Venant sur les eaux courantes ; *Annales des ponts et chaussées*, 1<sup>er</sup> semestre, 1881, pages 148 et suiv.).

Nous pourrions alors écrire définitivement la formule applicable aux conduites à diamètre variable de la façon suivante :

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{64b_1Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^s \frac{ds}{D^5} - \frac{1}{9} \left( \frac{U^2 - U_0^2}{2g} \right).$$

Le dernier terme est positif ou négatif suivant que  $U_0$  est plus grand ou plus petit que  $U$ , c'est-à-dire que le diamètre de la conduite augmente ou diminue. Dans le premier cas, ce terme correspond non pas à une perte, mais à une augmentation de la charge, et il représente un relèvement du plan de charge, c'est-à-dire qu'il vient en déduction de la perte de charge mesurée par le terme précédent.

Il convient d'ailleurs de remarquer que le dernier terme, très petit, est presque toujours négligeable par rapport aux autres. Si nous nous étions contentés, comme on le fait quelquefois, d'appliquer le théorème de Bernoulli à l'étude de l'écoulement dans le cas dont il s'agit, nous n'aurions pas eu à écrire ce dernier terme, et la formule aurait été :

$$(21) \quad z + \frac{p}{\Pi} + \frac{U^2}{2g} = z_0 + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{U_0^2}{2g} - \frac{64b_1Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^s \frac{ds}{D^5}.$$

C'est sous cette forme que l'on donne ordinairement l'équation des conduites à diamètre variable.

Le plus souvent, les pressions  $p$  et  $p_0$  sont égales toutes deux à la pression atmosphérique et dans la plupart des problèmes pratiques les deux termes  $\frac{U^2}{2g}$  et  $\frac{U_0^2}{2g}$  diffèrent assez peu l'un de l'autre pour que l'on puisse négliger leur différence. La perte de charge totale  $z_0 - z$  vaut alors simplement :

$$(22) \quad z_0 - z = \frac{64b_1Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^s \frac{ds}{D^5}.$$

### 92. Conduite à débit variable. Service en route. —

Au lieu de supposer le mouvement varié par suite d'un changement progressif du diamètre de la conduite, on peut supposer qu'il le soit par suite d'une modification du débit. Soit donc une conduite que nous supposons à section constante, ayant à son origine un débit  $Q_0$ , mais laissant sortir par des orifices, répartis d'une manière continue, un débit  $q$  par unité de longueur, de telle sorte qu'à une

distance  $s$  de l'origine le débit de cette conduite ne soit plus que  $Q_0 - qs$ . C'est ce que Dupuit appelait le service en route.

Admettons que l'équation précédente soit applicable, à la condition de considérer  $Q$  comme variable et égal à  $Q_0 - qs$  et de le faire entrer, par suite, sous le signe d'intégration; nous obtiendrons en intégrant :

$$x_0 - x = \frac{64 b_1}{\pi^3 D^5} \int_0^s (Q_0 - qs)^2 ds,$$

ou bien

$$x_0 - x = \frac{64 b_1}{\pi^3 D^5} \left( Q_0^2 s - Q_0 q s^2 + \frac{1}{3} q^2 s^3 \right).$$

Si l'on suppose que, au bout de la longueur  $L$  de la conduite, le débit soit réduit à  $Q_1$  c'est-à-dire si l'on pose  $Q_0 = qL + Q_1$ , on trouvera, en remplaçant  $s$  par  $L$  et réduisant :

$$x_0 - x = \frac{64 b_1 L}{\pi^3 D^5} \left[ Q_1^2 + Q_1 q L + \frac{1}{3} q^2 L^2 \right].$$

Cette relation entre  $D$ ,  $Q_1$ ,  $q$ ,  $L$  et  $x_0 - x$  servira à calculer l'une de ces quantités, les autres étant connues.

On peut se demander quel serait le débit de la même conduite, sous la même charge, s'il n'y avait pas de service en route. Ce débit  $Q'$  sera évidemment donné par la relation

$$Q'^2 = Q_1^2 + Q_1 q L + \frac{1}{3} q^2 L^2,$$

qui donne à peu près, d'après Bresse :

$$Q' = Q_1 + \frac{9}{16} q L.$$

Si tout le débit  $Q_0$  se fait en route de manière que le débit  $Q_1$  à l'extrémité soit nul, la charge est

$$x_0 - x = \frac{64 b_1 L}{\pi^3 D^5} \cdot \frac{1}{3} q^2 L^2 = \frac{64 b_1 L}{\pi^3 D^5} \cdot \frac{1}{3} Q_0^2.$$

Si, au contraire, il n'y avait pas de service en route, pour porter le même débit total  $Q_0$  à l'extrémité, il faudrait une charge

$$x_0 - x = \frac{64 b_1 L}{\pi^3 D^5} \cdot Q_0^2,$$

triple de la précédente.

**93. Conduite formée de plusieurs parties de diamètres différents. Règle de Dupuit.**— Au lieu de conduites à diamètre graduellement variable on emploie, en pratique, des conduites formées de portions plus ou moins longues, chacune de diamètre constant, ce diamètre étant différent pour les diverses portions. Si l'on applique, à chacune d'elles, la formule simplifiée (22), c'est-à-dire si, pour chaque portion de longueur  $L_1, L_2, L_3, \dots$  et de diamètre  $D_1, D_2, D_3, \dots$ , on calcule l'abaissement du plan de charge exprimé par le second membre de cette formule,  $\frac{64b_1 Q^2}{\pi^2} \int_{s_0}^s \frac{ds}{D^5}$ , on trouvera, pour la perte de charge due à la première partie :  $\frac{64b_1 Q^2 L_1}{\pi^2 D_1^5}$ ; faisant le même calcul pour les autres parties et additionnant, il viendra pour la perte de charge totale :

$$\frac{64b_1 Q^2}{\pi^2} \left( \frac{L_1}{D_1^5} + \frac{L_2}{D_2^5} + \frac{L_3}{D_3^5} + \dots \right)$$

La longueur  $L'$ , d'une conduite d'un diamètre donné  $D$  qui pour le même débit  $Q$  produirait la même perte de charge que la première partie, serait donnée par l'équation  $\frac{64b_1 Q^2 L'}{\pi^2 D^5} = \frac{64b_1 Q^2 L_1}{\pi^2 D_1^5}$ , ou  $L' = L_1 \frac{D^5}{D_1^5}$ ; de même, la longueur d'une conduite d'un diamètre  $D$  qui produit la même perte de charge que la seconde partie sera  $L_2 \frac{D^5}{D_2^5}$ , et ainsi de suite; de sorte que la conduite considérée est équivalente, au point de vue de la perte de charge, à une conduite unique de diamètre  $D$  et de longueur :

$$L_1 \left( \frac{D}{D_1} \right)^5 + L_2 \left( \frac{D}{D_2} \right)^5 + L_3 \left( \frac{D}{D_3} \right)^5 + \dots$$

c'est ce qu'on appelle la longueur *réduite*; et la règle qui consiste à remplacer ainsi les conduites successives de différents diamètres par une conduite unique de diamètre  $D$  et de longueur réduite est la *règle de Dupuit*.

Il y a lieu d'ajouter, à la perte de charge ainsi calculée, celle qui est due aux changements brusques de section, et que nous avons évaluée plus haut (nos 43 et 44).

**94. Conduites branchées.** — Considérons trois conduites AD, BD, CD (fig. 57) aboutissant à un même point D et mettant en

communication trois réservoirs A, B, C, dans chacun desquels nous supposons le niveau maintenu constant, et proposons-nous d'étudier les conditions de l'écoulement dans un pareil système. Faisons

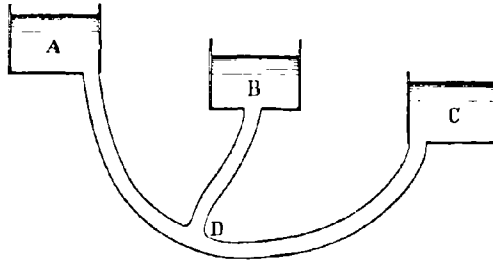


Fig. 57.

abstraction des pertes de charge secondaires à l'entrée de chacun des tuyaux, aux coudes s'il en existe et au point d'embranchement D ; supposons que chacune des conduites AD, BD, CD soit d'un diamètre constant. Appelons respectivement  $x_1, x_2, x_3$  les altitudes supposées données des trois niveaux des réservoirs au-dessus d'un plan horizontal inférieur,  $z_0$  l'ordonnée du point d'embranchement D au-dessus du même plan de comparaison, et  $L_1, L_2, L_3 ; D_1, D_2, D_3$  les longueurs et les diamètres des trois conduites,  $Q_1, Q_2, Q_3$  leurs débits, et enfin  $p$  la pression inconnue au point d'embranchement D. Supposons, pour fixer les idées, que le niveau du réservoir B soit intermédiaire entre celui des deux autres ou que  $x_1 > x_2 > x_3$ . Si  $p_0$  est la pression atmosphérique s'exerçant sur les niveaux des trois réservoirs, les hauteurs piézométriques aux points A et D étant respectivement  $x_1 + \frac{p_0}{\Pi}$  et  $z_0 + \frac{p}{\Pi}$ , la perte de charge, dans la conduite AD, sera  $\left(x_1 - z_0 - \frac{p - p_0}{\Pi}\right)$  et l'on exprimera les conditions de l'écoulement de cette conduite par l'équation :

$$x_1 - z_0 - \frac{p - p_0}{\Pi} = \frac{64b_1}{\pi^2} \frac{Q_1^2 L_1}{D_1^5},$$

De même, on aura, pour les deux autres conduites, en supposant que le niveau piézométrique en D soit plus élevé qu'en B, c'est-à-dire que l'écoulement ait lieu, dans ces deux conduites, dans le sens DB et DC :

$$z_0 - x_2 + \frac{p - p_0}{\Pi} = \frac{64b_1}{\pi^2} \frac{Q_2^2 L_2}{D_2^5},$$

$$z_0 - z_3 + \frac{p-p_0}{\Pi} = \frac{64b_1 Q_3^2 L_3}{\pi^2 D_3^5},$$

équations auxquelles il convient d'ajouter, d'après l'hypothèse que nous venons de faire, la suivante :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3,$$

ce qui donne quatre équations pour déterminer quatre inconnues qui pourront être, suivant les cas,  $p, D_1, D_2, D_3$  ou bien  $p, Q_1, Q_2, Q_3$ .

Si le niveau piézométrique en D était moins élevé qu'en B, l'écoulement dans la seconde conduite aurait lieu de B vers D et les deux premiers réservoirs alimenteraient le troisième ; la seconde équation serait alors :

$$z_0 - z_2 - \frac{p-p_0}{\Pi} = \frac{64b_1 Q_2^2 L_2}{\pi^2 D_2^5},$$

et la quatrième :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Ces équations se résolvent par tâtonnement. Supposons, par exemple, donnés les diamètres et soit à déterminer les débits. On prendra pour  $p$  une valeur arbitraire et l'on choisira celle qui mettrait le niveau piézométrique au point D à la même hauteur que le réservoir intermédiaire, c'est-à-dire qu'on annulera le premier membre de la seconde équation, et par suite  $Q_2$ . On aura, d'après les deux autres :

$$Q_1 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{(z_1 - z_2) D_1^5}{b_1 L_1}} \quad ; \quad Q_3 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{(z_2 - z_3) D_3^5}{b_1 L_3}}.$$

Si ces deux valeurs sont égales, la quatrième équation sera satisfaite, puisque  $Q_2 = 0$  et le problème sera résolu. Si elles sont inégales, cette dernière équation n'étant pas vérifiée, on aura  $Q_1 > Q_3$  ou  $Q_1 < Q_3$ . Dans le premier cas, on augmentera la valeur de  $p$ , ce qui aura pour conséquence de diminuer  $Q_1$ , d'augmenter  $Q_2$  et de donner à  $Q_3$  une valeur correspondant à un écoulement dans le sens BD. Dans le second cas, on diminuera au contraire  $p$ , ce qui augmentera  $Q_1$ , diminuera  $Q_2$  et donnera, pour  $Q_3$ , une valeur correspondant à un écoulement dans le sens DB. On calculera, d'après la nouvelle valeur arbitraire de  $p$ , les valeurs correspondantes de  $Q_1, Q_2, Q_3$  qui devront vérifier la quatrième équation sous l'une ou l'autre de ses deux formes, et l'on corrigera la valeur de  $p$  jusqu'à ce que cette vérification ait lieu.

Si, au lieu des diamètres, ce sont les débits  $Q_1, Q_2, Q_3$  qui sont donnés, et si l'on doit en déduire les diamètres des conduites, la quatrième équation devant être vérifiée par les données et ne contenant pas les inconnues, il n'y a, en réalité, pour calculer celles-ci que les trois premières, ce qui laisse le problème indéterminé. On doit alors avoir recours à une nouvelle condition à laquelle on astreindra les diamètres des conduites. On peut, par exemple, chercher quels seront les diamètres qui rendront minimum la dépense en argent, ce qui, en admettant que le prix d'une conduite soit proportionnel à son diamètre <sup>4</sup>, revient à rendre minimum la somme

$$L_1 D_1 + L_2 D_2 + D_3 D_3.$$

1. Cette hypothèse du prix d'une conduite proportionnel au diamètre est généralement indiquée dans les traités d'hydraulique : elle comporte certaines réserves. Le prix d'une conduite est la somme du prix d'acquisition de la matière qui constitue les tuyaux, proportionnel à leur poids, du prix de la pose, lequel est aussi à peu près proportionnel au poids, et du prix des travaux accessoires, ouverture de tranchées, etc., pose de supports, etc., variables, croissant avec le diamètre, sans proportionnalité rigoureuse.

Le seul élément du prix susceptible d'appréciation exacte est le poids ; c'est d'ailleurs le plus important. Or voici, d'après l'album de l'usine de Pont-à-Mousson (1899), les poids  $P$  par mètre courant de longueur utile des tuyaux à emboîtement et cordon de divers diamètres  $D$ . J'ai indiqué à la suite les poids par centimètre de diamètre, c'est-à-dire les rapports  $\frac{P}{D}$  ou plutôt  $\frac{P}{100 D}$  :

Diamètres	Poids par mètre de longueur utile	Poids par centimètre de diamètre	Diamètres	Poids par mètre de longueur utile	Poids par centimètre de diamètre	Diamètre	Poids par mètre de longueur utile	Poids par centimètre de diamètre
D	P	$\frac{P}{D}$	D	P	$\frac{P}{D}$	D	D	$\frac{P}{D}$
0.040	9.5	2.37	0.125	33 <sup>k</sup>	2.64	0.450	170 <sup>k</sup>	3.78
0.050	12.0	2.40	0.135	35	2.59	0.500	195	3.90
0.054	13.5	2.50	0.150	40	2.67	0.600	250	4.17
0.060	15.0	2.50	0.162	46	2.84	0.650	280	4.31
0.070	17.0	2.43	0.175	52	2.97	0.700	320	4.57
0.075	18.0	2.53	0.200	60	3.00	0.750	365	4.86
0.080	20.0	2.50	0.220	70	3.18	0.800	400	5.00
0.090	22.0	2.44	0.250	80	3.20	0.900	467.5	5.19
0.100	25.0	2.50	0.300	97	3.23	1.000	563.5	5.63
0.110	27.0	2.45	0.350	118	3.37	1.150	674.5	6.13
0.120	30.0	2.50	0.400	140	3.50	1.250	855	6.84

Si le poids était proportionnel au diamètre, le chiffre de la colonne  $\frac{P}{D}$  serait constant. On voit qu'il n'en est ainsi, ou à peu près, que tant que le diamètre

La condition s'exprimera en égalant à zéro la dérivée de cette expression prise par rapport à la variable indépendante  $p$ ; ce sera donc :

$$L_1 \frac{dD_1}{dp} + L_2 \frac{dD_2}{dp} + L_3 \frac{dD_3}{dp} = 0.$$

si l'on différencie par rapport à  $p$  les trois équations qui, plus haut, expriment les conditions d'écoulement dans chacune des conduites, on obtient, par exemple, pour la première :

$$-\frac{1}{\Pi} = -5 \frac{64 b_1}{\pi^2} \cdot \frac{Q_1^2 L_1}{D_1^6} \cdot \frac{dD_1}{dp}$$

et deux expressions analogues pour les deux autres. En les portant dans l'équation de condition précédente, celle-ci devient :

$$\frac{D_1^6}{Q_1^2} - \frac{D_2^6}{Q_2^2} - \frac{D_3^6}{Q_3^2} = 0$$

Et, comme dans le premier cas, la résolution du système des quatre équations ne peut se faire que par tâtonnement. Généralement, on se donne arbitrairement l'un des diamètres à déterminer et les deux autres se déduisent des équations précédentes, ainsi que la pression  $p$  au point D. Celle-ci doit toujours être positive et au moins égale à la moitié de la pression atmosphérique, pour que l'écoulement ne soit pas troublé par le dégagement de l'air contenu en dissolution dans l'eau.

reste inférieur à 0<sup>m</sup>,12 ou 0<sup>m</sup>,15 mais, qu'au delà, ce rapport augmente constamment et assez rapidement avec le diamètre. Avec une approximation qui, bien souvent serait suffisante, on peut écrire  $\frac{p}{D} = 2,25 + 3,40 D$ . On ne peut

donc regarder le rapport  $\frac{p}{D}$  comme constant, c'est-à-dire le prix comme proportionnel au diamètre, que dans des limites très peu étendues ou pour des diamètres peu différents les uns des autres.

D'ailleurs, si l'on fait abstraction des extrémités des tuyaux, le poids par mètre courant est sensiblement égal au produit  $eD$  de l'épaisseur  $e$  par le diamètre  $D$ , c'est-à-dire que le rapport  $\frac{p}{D}$  serait proportionnel à l'épaisseur. Or, d'après Unwin, on peut calculer l'épaisseur des tuyaux en fonte en fonction de leur diamètre  $D$  et de la pression intérieure  $p$  qu'ils doivent supporter, par la formule

$$e = 2,6 pD + 6,5;$$

$D$  étant exprimé en mètres,  $p$  en atmosphères et  $e$  en millimètres.

En pratique, on adopte une même épaisseur pour une série de diamètres peu différents les uns des autres, surtout lorsqu'ils sont petits.



**95. Calcul d'une conduite élévatoire.** — En général, l'eau destinée à la distribution dans les villes doit être puisée au moyen de machines qui sont étudiées dans un autre volume de l'*Encyclopédie*, et refoulée dans un réservoir élevé. Le calcul du diamètre de la conduite de refoulement donne lieu à une remarque intéressante. Désignons par  $p$  le prix du cheval-vapeur de la machine élévatoire, y compris la dépense d'entretien et d'exploitation capitalisée, et par  $p'$  le prix de l'unité de longueur d'une conduite ayant pour diamètre l'unité. Si  $N$  est le nombre de chevaux-vapeur de la machine,  $D$  le diamètre de la conduite et  $L$  sa longueur, la dépense en argent de la machine et de la conduite représentera un capital  $P = pN + p' DL$ .

Soit  $Q$  le volume d'eau à élever par seconde et  $H$  la hauteur d'élévation. Le travail utile de la machine, par seconde, sera  $\Pi QH$  ; mais elle devra en outre vaincre le travail de frottement dans la conduite, ce qui revient à dire que la hauteur réelle d'élévation  $H$  sera augmentée de la perte de charge qui, pour la longueur  $L$  sera, d'après ce que nous venons de voir,  $\frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5}$ . Le travail réel à développer par la machine sera ainsi  $\Pi Q \left[ H + \frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5} \right]$ . Le nombre  $N$  de chevaux-vapeur s'obtiendra en divisant ce travail, exprimé en kilogrammètres, par le rendement  $m$  de la machine et par 75. Il en résulte que le capital aura pour expression :

$$P = p \frac{\Pi Q}{75m} \left[ H + \frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5} \right] + p' DL.$$

Si l'on veut choisir le diamètre  $D$  de la conduite de manière que  $P$  soit minimum, il faut égaler à zéro la dérivée  $\frac{dP}{dD}$ , ce qui donne :

$$- 5 \frac{p \Pi Q}{75m} \cdot \frac{64 b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^6} + p' L = 0.$$

D'où l'on tire :

$$\frac{D^6}{Q^3} = \frac{64 b_1 p \Pi}{15 m \pi^2 p'}, \text{ ou bien } \frac{D^2}{Q} = \frac{4}{\pi} \sqrt[3]{\frac{b_1 \pi \Pi}{15 m} \cdot \frac{p}{p'}}.$$

ou bien :

$$D = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \sqrt[6]{\frac{b_1 \pi \Pi}{15 m} \frac{p}{p'}}} \cdot \sqrt{Q}.$$

Le coefficient de  $\sqrt{Q}$  ne dépend ni de la longueur  $L$ , ni de la hau-

teur  $H$ , ni du débit, il ne dépend que du rendement  $m$  de la machine et des prix  $p$  et  $p'$ . Le rapport variable  $\frac{p}{mp'}$  ne figure d'ailleurs que par sa racine sixième, c'est-à-dire que ses variations n'ont pas beaucoup d'influence sur la valeur du coefficient qui multiplie  $\sqrt{Q}$ . Soit, par exemple,  $b_1 = 0,0004$  ;  $m = 0,75$  ;  $p = 5,000$  fr. <sup>1</sup> ;  $p' = 100$ , il viendra :

$$D = 1,50 \sqrt{Q}.$$

Si, au lieu de ces valeurs, qui peuvent être considérées comme moyennes, on avait, dans des circonstances exceptionnelles, le rapport  $\frac{p}{p'} = 100$ , au lieu de 50, on trouverait  $D = 1,70 \sqrt{Q}$  ; et si, au contraire, ce rapport n'était que de 25, au lieu de 50, la valeur de  $D$  serait  $D = 1,35 \sqrt{Q}$ , ce qui confirme bien ce que nous venons de dire au sujet de l'influence des variations des quantités qui entrent dans la formule. La valeur moyenne  $1,50 \sqrt{Q}$ , qui a été indiquée par Bresse, peut donc toujours être adoptée.

On peut remarquer que la vitesse moyenne  $U$ , dans la conduite ascensionnelle, qui est égale à  $\frac{4Q}{\pi D^3}$ , a pour valeur, d'après l'expression ci-dessus de  $\frac{D^3}{Q}$  :

$$(23) \quad U = \sqrt[3]{\frac{15 mp'}{b_1 \pi 11 p}} ;$$

ce qui, avec les valeurs précédentes de  $m$ ,  $p$  et  $p'$ , donne :

$$U = 0^m,564.$$

Et cette valeur moyenne de la vitesse  $U$  peut, pour les mêmes raisons qui viennent d'être développées, être considérée comme à peu près constante ou applicable à tous les cas pratiques. En tout cas, quelle que soit cette vitesse la plus économique (23), d'après les valeurs locales de  $m$ ,  $p$  et  $p'$ , elle restera la même si, au lieu d'une seule conduite réunissant la machine au réservoir, il y en a deux ou un plus grand nombre. Alors, en effet, s'il y a  $n$  conduites, par

1. Ce prix de 5.000 fr. peut être ainsi justifié : acquisition de la machine, 1.000 fr. ; frais annuels, par cheval consommation de combustible, 4 tonnes à 30 fr., 120 fr. ; entretien et réparation, 30 fr. ; amortissement, 50 fr. Total 200 fr., représentant un capital de 4.000 fr.

exemple, le débit de chacune étant  $Q$  et son diamètre  $D$ , le débit total sera  $nQ$ , mais la hauteur correspondant à la perte de charge, à ajouter à  $H$  pour calculer la puissance de la machine, sera toujours  $\frac{64b_1Q^2L}{\pi^2D^5}$ . L'expression de la dépense totale  $P$  sera alors :

$$P = p \cdot \frac{\pi nQ}{75m} \left[ H + \frac{64b_1Q^2L}{\pi^2D^5} \right] + p' \cdot nDL.$$

et l'équation à résoudre pour obtenir le minimum de  $P$  sera exactement la même que ci-dessus. On en tirera donc toujours la même valeur de  $\frac{D^2}{Q}$  ou de  $U$ .

Cette circonstance, de deux ou plusieurs conduites ascensionnelles, se présente fréquemment et en particulier lorsque la ville qu'il s'agit d'alimenter se trouve placée entre la machine élévatoire et le réservoir. La vitesse la plus économique est indépendante du nombre de ces conduites, et elle a une valeur déterminée dans chaque localité par celles de  $m$ ,  $p$  et  $p'$ .

Cette conclusion, ainsi que les précédentes, suppose toutefois que l'on fait abstraction des variations du coefficient  $b_1$  avec le diamètre et avec la vitesse. Elle est assez exacte pour une première approximation et cette approximation est généralement suffisante, car le diamètre à adopter pour les conduites ascensionnelles n'a pas besoin d'être déterminé avec une exactitude absolue en égard à la nécessité économique où l'on se trouve de n'employer que des conduites ayant les diamètres existant dans le commerce.

**96. Calcul d'une conduite en dérivation.** — M. Sorel, ingénieur des ponts et chaussées, m'a fait remarquer qu'une analyse semblable peut être faite pour le cas où, au lieu d'avoir recours à une machine élévatoire, on veut prendre l'eau directement dans une rivière dont la pente  $I$ , aux abords du point où doit se faire la prise d'eau, est donnée.

Soit  $h$  la hauteur, également donnée, du niveau que doit atteindre l'eau dans le réservoir, au-dessus de la ligne de pente  $I$  supposée prolongée jusqu'à la verticale de ce réservoir. Si  $L$  est la longueur de la conduite, véritable inconnue du problème, et  $J$  la perte de charge par mètre, on aura, d'après ces définitions :

$$h = L(I - J).$$

Si l'on appelle encore  $D$  le diamètre fonction déterminée de la longueur  $L$  de la conduite,  $p'$  le prix de l'unité de longueur d'une

conduite ayant un diamètre égal à l'unité, la dépense d'établissement sera  $p'DL$ , et il pourra y avoir lieu d'y ajouter une dépense pour acquisition de terrains sur tout ou partie de la longueur  $L$ . Si  $p'$  est le prix, par unité de longueur, des terrains nécessaires et si l'on suppose que, sur une longueur  $L'$ , l'acquisition ne soit pas nécessaire, la dépense dont il s'agit sera  $p''(L - L')$  et la dépense totale  $P$ , à rendre minimum, sera exprimée par :

$$P = p'DL + p''(L - L') = (p'D + p'')L - p''L'.$$

D'autre part,  $Q$  étant le débit donné de la conduite, on a entre  $D$  et  $J$ , la relation :

$$J = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 D^5}.$$

Dans l'expression de  $P$ , substituons à  $L$  sa valeur  $\frac{h}{I - J}$ , après avoir posé, pour simplifier :

$$d^5 = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 I},$$

cette expression devient :

$$P = \frac{p'D + p''}{I} \cdot \frac{hD^5}{D^5 - d^5} p'' L'.$$

Et la dérivée de  $P$  par rapport à  $D$  étant égale à zéro donnera l'équation :

$$\left(\frac{D}{d}\right)^6 - 6\left(\frac{D}{d}\right) - 5\frac{p''}{p'd} = 0,$$

Lorsque  $p'' = 0$ , ou qu'on ne tient pas compte de la dépense d'acquisition des terrains, cette équation fournit immédiatement :

$$D = d \sqrt[5]{6} = 1,432d = \sqrt[5]{\frac{6 \times 64 b_1 Q^2}{\pi^2 I}}.$$

ou encore :

$$J = \frac{1}{6} I.$$

on en déduira

$$L = \frac{6h}{5I}.$$

Lorsque  $p''$  n'est pas négligeable, le rapport  $\frac{p''}{p'd}$  du prix du terrain à celui de la conduite d'un diamètre  $d$  est toujours inférieur à l'unité, et alors la résolution de l'équation du 6e degré, en  $\frac{D}{d}$ , peut se faire au moyen du tableau suivant, dressé par M. Sorel, qui donne les valeurs correspondantes des deux rapports  $\frac{D}{d}$  et  $\frac{p''}{p'd}$  :

$\frac{p''}{p'd}$	$\frac{D}{d}$		$\frac{p''}{p'd}$	$\frac{D}{d}$
0,053	1,44		0,478	1,50
0,119	1,45		0,532	1,51
0,185	1,46		0,642	1,52
0,254	1,47		0,820	1,54
0,326	1,48		0,919	1,56
0,400	1,49		1,015	1,58

On obtient, en général, une approximation suffisante en prenant pour  $D$  et par suite pour  $L$  la valeur ci-dessus, correspondant à  $J = \frac{1}{6}I$ , trouvée pour le cas où il n'y a pas d'acquisition de terrains.

On voit en effet que, même pour des terrains très chers, où l'on aurait  $p'' = p'd$ , le diamètre  $D$  serait porté seulement à 1,58  $d$  au lieu de 1,43  $d$ , c'est-à-dire augmenté seulement d'un dixième environ. L'augmentation résultant de la prise en considération du prix des terrains sera toujours inférieure à ce chiffre.

**97. Transmission du travail à distance.** — Les canalisations pour la transmission à distance du travail mécanique, et surtout pour la distribution de ce travail ne diffèrent en rien, au point de vue théorique, de celles qui ont simplement pour but le transport du liquide. Leur épaisseur seule est plus grande (voir la fin de la note du n° 94, page 168) et le mode d'assemblage des tuyaux entre eux doit être disposé pour résister aux fortes pressions généralement usitées.

Dans une conduite, de longueur  $L$ , ou de diamètre  $D$  et de débit  $Q$ , la pression diminue, par mètre de longueur, de

$$\Pi \frac{64 b_1}{\Pi^2} \cdot \frac{Q^2}{D^5}.$$

Par conséquent, la pression  $p_1$  à l'extrémité de la canalisation sera, en appelant  $p$  la pression à l'origine :

$$p_1 = p - \Pi \frac{64 b_1}{\pi^2} \cdot \frac{Q^2 L}{D^5}.$$

Le travail moteur  $\mathfrak{E}$  nécessaire pour produire, par seconde, un débit  $Q$  à la pression  $p$  est égal au produit  $Qp$  ; le travail disponible à l'extrémité de la conduite est représenté par  $Qp_1$  de sorte que le rendement  $\mathfrak{R}$  de la centralisation sera :

$$\mathfrak{R} = \frac{p_1}{p} = 1 - \Pi \frac{64 b_1}{\pi^2} \cdot \frac{Q^2 L}{p D^5}$$

ou bien en mettant au lieu de  $Q$  la valeur  $\frac{\mathfrak{E}}{p}$  :

$$\mathfrak{R} = 1 - \Pi \frac{64 b_1}{\pi^2} \cdot \frac{\mathfrak{E}^2 L}{p^3 D^5}.$$

On augmente donc rapidement le rendement lorsque l'on augmente  $p$  ou  $D$  qui figurent au dénominateur du terme négatif avec des exposants élevés.

Dans la pratique, c'est surtout en élevant la pression que l'on cherche à obtenir un rendement élevé ; l'augmentation du diamètre a pour effet d'accroître plus rapidement les frais d'établissement des canalisations, et les grosses conduites sont plus facilement affectées par les tassements que celles de diamètre plus faible. L'augmentation de pression présente en outre l'avantage de diminuer le volume d'eau nécessaire pour un même travail et de diminuer également l'encombrement des organes de réception.

On voit que, pour conserver aux pertes de ce travail la même valeur relative dans les diverses parties d'une canalisation servant à la distribution de l'énergie mécanique, servant à transmettre des puissances différentes, il convient de faire varier le diamètre comme la racine  $\frac{2}{5}$ , c'est-à-dire un peu moins rapidement que la racine carrée du travail à transmettre et comme la racine cinquième de la longueur. Il en résulte, par exemple, qu'en augmentant de moitié le diamètre d'une canalisation on pourra, sans augmenter la perte de travail, transmettre celui-ci à une distance sept fois et demie plus grande :  $(1,50)^5 = 7,6$ .

D'autres considérations limitent la pression que l'on peut admettre dans les canalisations. En général on adopte celle de 50 atmosphères, il y a cependant des exemples de pressions beaucoup plus fortes <sup>1</sup>.

1. D'après ce qui vient d'être dit, la perte d'une canalisation hydraulique

**98. Consolidation des coudes des conduites. —**

Lorsque l'on établit une conduite d'eau, il ne faut jamais négliger de tenir compte de la pression qui s'exerce dans les coudes et qui tend à y disloquer les tuyaux. Si l'on considère une conduite présentant un coude tel que AB (fig. 58) et si l'on y suppose l'eau en repos, la masse liquide comprise entre les sections extrêmes AA', BB' du coude, recevra, de l'eau contenue dans le reste de la conduite, des pressions qui se transmettront à la paroi AB du coude et qui tendront à le

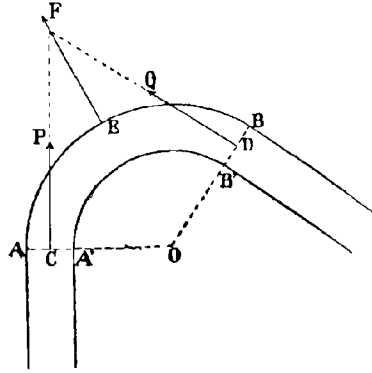


Fig. 58

séparer des parties rectilignes. Les assemblages des tuyaux ne sont pas, en général, en état de résister à de pareils efforts, et les tuyaux se sépareront effectivement si l'on n'a pas eu la précaution d'appuyer la partie convexe AB du coude sur un massif très résistant, ordinairement en maçonnerie ou en charpente. Dans l'état statique, l'effort auquel ce massif doit résister est simplement la résultante des pressions qui s'exercent sur les deux sections extrêmes AA', BB'. Lorsque l'eau est en mouvement il faut ajouter à cette pression l'action due à la force centrifuge que l'on pourra calculer approximativement en supposant que la masse d'eau comprise dans le coude est concentrée en son sommet. Alors l'action de la force centrifuge sera égale à cette masse multipliée par  $\frac{U^2}{\rho}$  en appelant U la vitesse moyenne et  $\rho$  le rayon de courbure du coude. Cette action est souvent assez petite, et négligeable par rapport aux pressions statiques.

varie, toutes choses égales, en raison inverse de la cinquième puissance du diamètre, tandis que la perte d'une canalisation électrique, pour une tension donnée, varie en raison inverse de la section du conducteur, ou du carré de son diamètre s'il est circulaire. La loi des résistances est donc tout à l'avantage de la transmission hydraulique.

Mais d'autres considérations peuvent, au contraire, rendre l'avantage à la transmission électrique ; en particulier le faible rendement des moteurs hydrauliques à très haute pression que l'on doit employer comme réceptrices.

Toutefois, il n'est pas impossible que, dans certaines circonstances, des *feeders* électriques ne puissent être avantageusement remplacés par des canalisations hydrauliques.

## § 3

## ÉTUDE DÉTAILLÉE DE L'ÉCOULEMENT

**99. Loi de la variation des vitesses à l'intérieur d'un tuyau de conduite.** — D'expériences faites sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux publiées en 1857, Darcy avait conclu que dans une conduite circulaire de rayon  $R$ , la vitesse  $v$  d'un filet liquide, à une distance  $r$  du centre, était liée à la vitesse  $V$  du filet central et à la différence de charge  $J$  par la relation :

$$V - v = \frac{K}{R} r^{\frac{3}{2}} \sqrt{J};$$

$K$  étant un coefficient numérique.

Cette équation, différenciée par rapport à  $r$ , donne :

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{3K}{2R} \sqrt{rJ}.$$

Multipliant les deux membres par  $\frac{2R}{3K}$ , élevant au carré et multipliant encore par  $\pi r$ , on obtient :

$$\frac{2}{9K^2} \left( R \frac{dv}{dr} \right)^2 \cdot 2\pi r = \pi r^2 J;$$

et sous cette forme on reconnaît l'équation d'équilibre d'une masse liquide cylindrique de rayon  $r$ , à la condition que le frottement, par unité superficielle de son contour, soit exprimé par  $\frac{2}{9K^2} \left( R \frac{dv}{dr} \right)^2$ . En effet le premier membre représente alors la force retardatrice sur l'unité de longueur, et le second membre, la force accélératrice. D'après cela, le frottement mutuel des couches liquides serait proportionnel au carré de  $\frac{dv}{dr}$  ou de leur vitesse relative, et en même temps au carré du rayon  $R$  du tuyau considéré. Ce résultat déduit de l'expérience était en contradiction avec l'hypothèse généralement admise depuis Newton et surtout depuis Navier et Poisson, qui avaient supposé, avec tous les hydrauliciens, que le frottement inté-



rieur des liquides était simplement proportionnel à la vitesse relative  $\frac{dv}{dr}$ . Mais M. Bazin, en observant des canaux découverts de forme demi-circulaire et de dimension bien plus grande que les tuyaux sur lesquels Darcy avait opéré, a reconnu que la loi de la variation des vitesses était plus exactement représentée par l'équation :

$$(24) \quad \frac{V - v}{\sqrt{RJ}} = K \left( \frac{r}{R} \right)^3 ;$$

et il a expliqué que si Darcy n'avait pas trouvé une expression de cette forme, cela pouvait être attribué à ce que ses observations, à raison des dimensions relativement faibles des conduites sur lesquelles elles avaient porté, ne s'étaient pas étendues à une distance du centre supérieure aux deux tiers du rayon. Dans la partie voisine du centre les courbes représentant les deux lois de variation des vitesses ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre : elles sont en effet toutes les deux normales au filet central qui a la vitesse maximum. Elles ont donc, en ce point, même tangente, et en leur donnant un autre point commun, elles ne peuvent pas s'écarter beaucoup dans la partie intermédiaire. Ce n'est donc que dans la région la plus éloignée du centre que peut se manifester la divergence des deux courbes et c'est précisément celle que Darcy n'a pas observée. « Il ne serait donc pas impossible, dit M. Bazin, que, dans un tuyau fermé, la décroissance des vitesses dans le voisinage de la paroi s'opérât plus rapidement que ne l'indique la formule obtenue par M. Darcy. »

La formule de M. Bazin, différenciée par rapport à  $r$ , donne :

$$(25) \quad - \frac{dv}{dr} \frac{R^3}{3K \sqrt{RJ}} = r^2.$$

Multiplications-en les deux membres par  $\pi J$ , et remplaçons, dans le premier membre,  $\sqrt{RJ}$  par  $U \sqrt{2b_1}$  déduit de  $\frac{DJ}{4} = \frac{RJ}{2} = b_1 U^2$ , nous obtiendrons :

$$- \left( \frac{R \sqrt{2b_1}}{2} \frac{R}{3K} \frac{1}{r} U \frac{dv}{dr} \right) \cdot 2\pi r = \pi r^2 J.$$

La parenthèse du premier membre exprime encore, pour les mêmes raisons que tout à l'heure, la force retardatrice sur l'unité de longueur, ou le frottement par unité superficielle du liquide sur lui-même. On voit que ce frottement est alors proportionnel à la

première puissance de la vitesse relative  $\frac{dv}{dr}$ , conformément aux hypothèses anciennes, au rayon moyen  $\frac{R}{2}$ , et inverse de la distance proportionnelle  $\frac{r}{R}$  de la couche considérée au centre du tuyau.

Nous avons indiqué plus haut (n° 29, page 47) les raisons qui pouvaient être invoquées en faveur de l'introduction de ces deux derniers facteurs : ils sont destinés à tenir compte du manque de parallélisme des filets, qui engendre les tourbillonnements et mouvements compliqués ou obliques absorbant une portion de force vive non utilisée pour l'écoulement proprement dit. Ce manque de parallélisme est d'autant plus prononcé que les dimensions de la section transversale sont plus grandes et que le filet considéré est relativement moins éloigné de la paroi solide. Darcy avait reconnu, par ses observations, l'influence des dimensions absolues du tuyau, puisqu'il avait signalé la présence, dans l'expression du frottement intérieur, du facteur  $R^2$  proportionnel au carré du rayon ; facteur qui se retrouve, en réalité, dans l'expression résultant de la formule de M. Bazin.

D'après ses premières expériences, M. Bazin avait été conduit à admettre l'exactitude absolue de la formule (24) ci-dessus, et il avait trouvé, pour le coefficient numérique  $K$  qui y figure, de nombres variant entre 18 et 23 et généralement assez voisins de 21 qu'il avait adopté définitivement.

Il écrivait donc, en remplaçant dans cette formule  $\sqrt{RJ}$  par  $U\sqrt{2b_1}$  :

$$\frac{V - v}{U\sqrt{2b_1}} = 21 \left( \frac{r}{R} \right)^3.$$

Mais de nouvelles expériences plus précises dont il a donné le détail dans son mémoire de 1897<sup>1</sup> lui ont montré des différences assez notables entre les résultats fournis par cette formule et ceux de l'observation, et il a cherché de nouvelles expressions capables de réaliser une concordance plus parfaite. Il a considéré successivement les formules

$$(26) \quad \frac{V - v}{U\sqrt{2b_1}} = 21 \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \left( \frac{r}{R} \right)^3 + \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]$$

1. *Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux* par M. Bazin.

$$(27) \quad \frac{V - v}{U\sqrt{2b_1}} = 21 \left(\frac{r}{R}\right)^3 + 27 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(1 - 1,10 \frac{r}{R}\right)^2$$

qui s'appliquent assez bien à la région centrale, mais pas aux points voisins de la paroi où elles fournissent toujours pour le premier membre des valeurs dépassant très peu 21, tandis que l'expérience a donné une valeur supérieure à 23. Il a donc essayé une nouvelle expression

$$(28) \quad \frac{V - v}{U\sqrt{2b_1}} = 29,5 \left[ 1 - \sqrt{1 - 0,95 \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right].$$

qui lui a donné de meilleurs résultats. Cette même formule concorde également bien avec une remarquable observation faite par M. John Freemann, à Lawrence, Massachusetts, sur la répartition des vitesses dans un jet sortant d'une pompe à incendie sous forte pression. Les recherches de M. Freemann avaient pour but de rechercher la forme la plus avantageuse à adopter pour l'ajutage dont on doit armer la lance des pompes en vue d'augmenter la portée et la stabilité du jet. Il a constaté que les ajutages légèrement coniques, qui rendent les vitesses presque uniformes dans toute la section du jet, sont préférables à un tuyau exactement cylindrique ; dans ce dernier, l'inégalité plus grande des vitesses favorise l'éparpillement du liquide à la sortie, et la portée du jet est notablement moindre.

L'observation citée par M. Bazin a été faite sur un tuyau cylindrique d'environ trois centimètres de diamètre et avec des vitesses dépassant 20 mètres par seconde. Ces vitesses ont été mesurées au centre et en dix-neuf autres points, à des distances différentes entre le centre et la paroi, et la loi de leur variation peut se représenter à très peu près par la formule (28). En particulier la vitesse moyenne se trouve bien au point situé à la distance  $r = 0,74 R$ , comme dans le tuyau de 0 m.80 de diamètre qui servait aux expériences de M. Bazin. La formule (27), comme la formule (28), s'accorde bien sur ce point avec l'observation.

Au moyen de l'une quelconque (26), (27) ou (28) de ces formules, on peut exprimer la vitesse moyenne  $U$  en fonction de la vitesse maximum  $V$ . Si, pour abrégé, l'on désigne par  $f\left(\frac{r}{R}\right)$  l'un quelconque des seconds membres de ces expressions, on pourra écrire

$$v = V - U\sqrt{2b_1} f\left(\frac{r}{R}\right)$$

si l'on multiplie les deux membres de cette dernière équation par

la surface  $2\pi r dr$  de la couche annulaire infiniment mince dont la vitesse est  $v$ , et si l'on intègre de 0 à  $R$ , le premier membre,  $\int_0^R v \cdot 2\pi r dr$  sera le débit du tuyau, ou  $\pi R^2 \cdot U$  et en divisant par  $\pi R^2$ , on obtiendra par conséquent :

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left[ V - U \sqrt{2b_1} f\left(\frac{r}{R}\right) \right] 2\pi r dr.$$

En mettant pour  $f$  le second membre de (27) et effectuant les calculs, on trouve :

$$(29) \quad \frac{V}{U} = 1 + 9,03 \sqrt{2b_1} = 1 + 12,67 \sqrt{b_1}$$

Si l'on fait les calculs au moyen du second membre de (28) on trouve identiquement la même valeur qui correspond à très peu près à la moyenne des observations de M. Bazin, dans lesquelles  $2b_1$  était égal à 0,000332 soit  $b_1 = 0,000166$  et  $\sqrt{b_1} = 0,0129$ , et où le rapport  $\frac{V}{U}$  a été trouvé égal à 1,1643 tandis que l'expression précédente donnerait 1,1675. L'accord est donc satisfaisant.

On peut également, au moyen des mêmes formules, trouver le rayon  $r'$  de la couche où la vitesse  $v$  est égale à la vitesse moyenne  $U$  ; il suffit de faire, dans une des formules (26), (27) ou (28),  $v = U$  et de remplacer le rapport  $\frac{V}{U}$  par la valeur (29) qui vient d'en être donnée, on a une équation du 4<sup>e</sup> degré en  $\frac{r}{R}$  dont la résolution donne à très peu près

$$r = 0,74 R$$

ce qui est également conforme à l'observation.

La vitesse à la paroi,  $w$ , s'obtiendrait en faisant  $r = R$  dans l'une des formules précédentes. Il a été dit que les formules (26) et (27) ne donnaient pas, pour les points voisins de la paroi, des résultats conformes à l'observation ; il faudrait donc prendre la formule (28), ou plutôt la valeur même donnée par l'observation, laquelle est légèrement supérieure à 23, pour le premier membre de l'une quelconque de ces formules. Si donc on écrit

$$\frac{V - w}{U \sqrt{2b_1}} = 23 \text{ plus une très petite fraction,}$$

et si l'on met, pour  $\frac{V}{U}$  la valeur (29), on en déduit facilement :

$$(30) \quad \frac{w}{U} = 1 - 14 \sqrt{2b_1} = 1 - 19,8 \sqrt{b_1}$$

Dans des tuyaux où le coefficient  $b_1$ , serait par exemple, de :

$$b_1 = 0,0001, \quad 0,0002, \quad 0,0003, \quad 0,0004$$

la vitesse maximum  $V$  vaudrait respectivement :

$$V = 1,127U, \quad 1,181U, \quad 1,221U, \quad 1,253U$$

et la vitesse à la paroi,  $w$  :

$$w = 0,802U, \quad 0,717U, \quad 0,657U, \quad 0,604U.$$

Ces formules sont celles qui ont été données par M. Bazin et qui lui ont paru les plus propres à représenter les faits qu'il a observés. La loi de variation qu'elles indiquent, pour les vitesses, diffère en somme assez peu de celle qu'il avait déduite de ses premières expériences et qui est exprimée par la formule (24) que l'on doit considérer comme exacte, au premier degré d'approximation. Elle concorde, ainsi que je viens de le rappeler (page 178) avec l'expression simple donnée au n° 29 (page 47) pour l'expression du frottement intérieur. Mais, dans la note de ce n° 29, j'ai fait connaître comment et pourquoi M. Boussinesq avait jugé nécessaire de compléter, par un terme additionnel, cette loi trop simple, qui conduirait, pour les filets voisins du centre du tuyau, à des valeurs du coefficient de frottement croissant au delà de toute limite. C'est au moyen de la discussion des expériences de M. Bazin que M. Boussinesq est arrivé à déterminer la correction à apporter à l'expression du coefficient de frottement intérieur, et cette discussion lui a fourni, en même temps la forme suivante de la loi des écarts entre les vitesses réelles des filets fluides et celles qui seraient déduites de la formule (24). Il est arrivé à reconnaître que ces écarts peuvent être représentés par une fonction  $\Psi\left(\frac{r}{R}\right)$ , s'annulant pour  $r = 0$  et dont la valeur moyenne, entre  $r = 0$  et  $r = R$ , est également nulle. Cette fonction étant écrite :

$$\Psi\left(\frac{r}{R}\right) = 0,576 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1,421 \left(\frac{r}{R}\right)^3 + 3,372 \left(\frac{r}{R}\right)^4 - 6,085 \left(\frac{r}{R}\right)^5 + 3,579 \left(\frac{r}{R}\right)^6,$$

la loi des vitesses s'exprimerait par :

$$(31) \quad \frac{V - v}{U \sqrt{2b_1}} = 22,91 \left(\frac{r}{R}\right)^3 + 34,37 \Psi \left(\frac{r}{R}\right).$$

De cette expression (31), traitée comme plus haut les formules (26) à (28), on déduit, pour l'expression de la vitesse maximum en fonction de la vitesse moyenne :

$$(32) \quad \frac{V}{U} = 1 + 9,16 \sqrt{2b_1} = 1 + 12,96\sqrt{b_1}$$

laquelle ne présente pas, avec l'observation, la très petite différence signalée à la formule (29) ; et pour l'expression de la vitesse à la paroi

$$(33) \quad \frac{w}{U} = 1 - 13,75 \sqrt{2b_1} = 1 - 19,43 \sqrt{b_1}$$

Au point de vue pratique, les différences entre les expressions (29) et (32) d'une part, (30) et (33) de l'autre, sont tout à fait négligeables, et elles disparaissent même à peu près si l'on se borne à ne conserver aux coefficients numériques qu'un seul chiffre après la virgule. Elles deviennent ainsi :

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{V}{U} = 1 + 9,1 \sqrt{2b_1} = 1 + 12,8 \sqrt{b_1} \\ \frac{w}{U} = 1 - 13,9 \sqrt{2b_1} = 1 - 19,6 \sqrt{b_1} \end{cases}$$

Et sous cette forme, elles peuvent être regardées comme le dernier mot de nos connaissances actuelles sur cette matière.

En divisant l'équation (25) par l'équation (24) on obtient la valeur de  $\frac{dv}{dr}$  en fonction de  $v$  et de  $r$ , qui est :

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{1}{3r}(V - v),$$

et cette expression différentielle peut servir à tracer, par ses tangentes, la courbe représentative des vitesses au premier degré d'approximation, c'est-à-dire la parabole du 3<sup>e</sup> degré représentée par l'équation (24).

Nous donnerons au chapitre VI, en parlant des procédés du jaugeage des cours d'eau, la description sommaire des instruments qui ont été employés pour mesurer les vitesses aux divers points de la section transversale d'un courant, et qui ont permis d'établir expérimentalement les lois qui viennent d'être énoncées.

## CHAPITRE V

# CANAUX DÉCOUVERTS

---

§ 1. *Mouvement uniforme.* — § 2. *Etude détaillée de l'écoulement.* — § 3. *Applications.* — § 4. *Mouvement varié.* — § 5. *Remous.* — § 6. *Etranglement ou élargissement du lit.*

### § 1.

#### MOUVEMENT UNIFORME

**100. Division du sujet.** — La question de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts, qui constitue la partie la plus intéressante de l'hydraulique, est beaucoup plus compliquée que celle de l'écoulement dans les tuyaux. Elle n'est résolue d'une manière à peu près complète que pour le cas où le canal a une forme régulière, présentant une section transversale constante ou à peu près constante, un axe rectiligne ou à courbure insensible. Dès qu'il s'agit de cours d'eau naturels, dans lesquels ces conditions ne sont pas remplies, et surtout dans lesquels le lit se compose de matières susceptibles d'être entraînées par le courant, les conditions de l'écoulement ne peuvent plus être étudiées que d'une façon empirique et approximative. Ce n'est que par une extension souvent abusive que l'on applique à de pareils cours d'eau les formules et les lois que l'on a trouvées pour des canaux rectilignes à section et à pente régulières.

Tout au plus ces formules peuvent-elles être applicables à certaines parties régulières des cours d'eau naturels assimilables à des canaux<sup>1</sup>. Mais lorsqu'il s'agit de cours d'eau ordinaires, plus ou

1. Encore convient-il d'observer que l'écoulement dans ces parties régulières

moins irréguliers, cette application ne donne plus qu'une approximation qui, souvent, s'écarte beaucoup de la réalité.

Nous diviserons donc l'étude de l'écoulement de l'eau dans les cours d'eau en deux parties distinctes. La première sera consacrée aux *canaux découverts*, en désignant par ce mot tout cours d'eau de forme régulière, à pente sensiblement constante et à peu près rectiligne. Dans l'autre, consacrée aux *cours d'eau naturels*, nous exposerons les quelques règles empiriques qui ont été établies au sujet de ces cours d'eau, nous les justifierons le mieux possible, et nous dirons dans quelle mesure les formules trouvées dans la première partie peuvent y être appliquées.

Dans la première partie, consacrée aux canaux, nous étudierons d'abord le mouvement uniforme, puis le mouvement permanent varié.

L'étude du mouvement non permanent fera l'objet d'un chapitre spécial.

**101. Mouvement uniforme.** — Le mouvement uniforme de l'eau est caractérisé par ce fait que, dans un canal rectiligne, à pente et à section transversale constantes, la vitesse d'une molécule reste la même tout le long d'un même filet liquide. Ainsi défini, le mouvement uniforme ne pourrait être réalisé, sans doute, que dans des canaux à section transversale très petite, comparables aux tubes capillaires, et dans lesquels la vitesse serait extrêmement réduite. Aussitôt que les dimensions transversales deviennent sensibles, la vitesse des molécules liquides change, à chaque instant, de grandeur et de direction. Mais on conserve la dénomination de mouvement uniforme à celui dans lequel la vitesse *moyenne locale* des molécules qui passent en chaque point est constante, et reste la même tout le long d'un même filet liquide. Et l'on admet que cette condition est réalisée lorsque le canal est rectiligne et que sa pente et sa section transversale restent constantes.

Il est bien certain que la vitesse moyenne  $U$  est la même pour toutes les sections : cette vitesse étant le quotient du volume  $Q$  débité en une seconde, par l'aire  $\omega$  de la section transversale ; mais ce n'est que par induction que l'on en conclut la constance des vitesses moyennes locales, car chaque molécule possède, en réalité, une vitesse oblique sur la direction du courant ; il en résulte des croise-

est influencé, sur une portion de la longueur, par les conditions antérieures. On ne peut d'ailleurs rencontrer que très exceptionnellement de telles parties, la mobilité du lit et des rives tendant à faire disparaître la régularité qui aurait existé à un moment donné.



ments en tous sens des filets liquides que l'on suppose parallèles, et rien n'est moins prouvé que l'invariabilité de la vitesse en chaque point. Au contraire, nous dirons plus loin que, même en ne comparant que les composantes des vitesses parallèles au courant, ces composantes varient, en chaque point, dans des limites assez étendues ; à plus forte raison les vitesses elles-mêmes doivent-elles se modifier, puisqu'elles changent constamment de direction.

Dans la complication du mouvement réel, la vitesse moyenne locale en chaque point et sur toute l'étendue d'un même filet reste sensiblement constante, à la condition qu'elle soit observée pendant un temps assez long, et l'on peut, en ne considérant que ces vitesses moyennes locales, admettre que liquide se meut d'un mouvement uniforme par filets parallèles. Mais il ne faut pas oublier que ce n'est là qu'une moyenne dont la réalité diffère notablement à chaque instant.

#### 102. Formule générale du mouvement uniforme. —

Si, alors, dans un pareil canal, nous isolons une portion d'une longueur égale à l'unité et limitée par deux sections transversales parallèles, rien ne distinguant l'une de ces sections de l'autre, les pressions sur chacun de leurs éléments y seront les mêmes et disparaîtront des équations. Il faudra donc, ainsi que l'a remarqué Du Buat, puisque le mouvement est uniforme, qu'il y ait équilibre entre la force accélératrice due à la pesanteur et les forces retardatrices dues au frottement. Ces dernières proviennent surtout des parois du canal. Il faut faire entrer en ligne de compte, dans les résistances, les frottements intérieurs du liquide qui proviennent des vitesses obliques, ou des composantes des vitesses des molécules fluides perpendiculaires à la direction du mouvement. Ces composantes ne contribuent en rien à l'écoulement, et elles donnent lieu à des frottements mutuels, à des tourbillonnements qui constituent une perte de force vive et par suite une résistance. Mais l'obliquité des vitesses est elle-même due à la rugosité des parois et l'on peut admettre que toutes les résistances, par conséquent, proviennent de cette cause unique. Elles seront alors, en totalité, proportionnelles à la longueur  $\chi$  du périmètre mouillé. Elles seraient aussi fonction de la vitesse à la paroi variable d'un point à l'autre de celle-ci. On l'exprime, comme nous l'avons dit, en fonction de la vitesse moyenne  $U$  par  $\gamma f(U)$ , en appelant  $f$  une fonction à déterminer. Cette résistance, doit, d'après la remarque de Du Buat, être égale à la composante du poids de la masse liquide considérée. Ce poids est  $\Pi\omega$ , en appelant  $\Pi$  le poids spécifique du liquide, et sa composante suivant la

penne I sera  $\Pi\omega \sin I$  ou simplement  $\Pi\omega I$  en mettant le petit angle I au lieu de son sinus. L'équation du mouvement sera ainsi

$$\Pi\omega I = \chi f(U);$$

ou bien en divisant par  $\Pi\chi$  :

$$\frac{\omega}{\chi} I = \frac{f(U)}{\Pi}.$$

Le rapport  $\frac{\omega}{\chi}$  est le rayon moyen de la section transversale que nous désignerons par R ; la fonction  $f(U)$  peut toujours être mise sous la forme  $\Pi b U^2$ , en appelant  $b$  un coefficient qui serait lui-même, au besoin, une fonction de U ou des autres éléments ; et alors l'équation du mouvement uniforme prendra la forme suivante, sous laquelle elle est généralement donnée :

$$(1) \quad RI = bU^2.$$

Elle est identique, dans la forme, à celle du mouvement dans les tuyaux, et elle aurait pu, comme celle-ci, se déduire de la formule générale démontrée au n<sup>o</sup> 27.

En résolvant cette équation par rapport à U, on l'écrit :

$$(2) \quad U = \frac{1}{\sqrt{b}} \sqrt{RI}, \quad \text{ou} \quad U = C \sqrt{RI};$$

le coefficient C étant, comme  $\frac{1}{\sqrt{b}}$  dont il tient la place, une fonction de U, de R, de I, et surtout de la rugosité de la paroi.

Il est intéressant de pouvoir passer facilement d'un de ces coefficients à l'autre. La table VIII, à la fin du volume, donne les valeurs de  $b$  correspondant à celles de C pour tous les besoins de la pratique.

**103. Formules anciennes.** — Comme pour les tuyaux, Prony a proposé, pour le coefficient  $b$ , la forme  $b + \frac{a}{U}$ , ce qui revient à écrire

$$RI = aU + bU^2;$$

et d'après quelques expériences de du Buat, il a proposé les valeurs suivantes pour les nombres  $a$  et  $b$  :

$$a = 0,000044 \quad , \quad b = 0,000309,$$

Eytelwein a donné des valeurs un peu différentes quoique déduites des mêmes expériences.

Depuis longtemps les ingénieurs italiens appliquaient une formule simplifiée, dite de Tadini, dans laquelle ils considéraient les coefficients  $b$  et  $C$  comme constants ; cette formule qui est :

$$(3) \quad RI = 0,0004 U^2, \quad \text{ou} \quad U = 50 \sqrt{RI},$$

est suffisante lorsqu'il s'agit de cours d'eau tranquilles, profonds et à faible pente, et qu'on ne désire pas une grande approximation. Elle peut être utilisée pour un avant-projet.

St. Venant a proposé de remplacer le terme  $U^2$  par la puissance  $\frac{21}{11}$  de la vitesse moyenne et il a donné les formules :

$$RI = 0,0004 U^{\frac{21}{11}}, \quad \text{ou} \quad U = 60 (RI)^{\frac{11}{21}},$$

qui ne sont pas employées, malgré les tables qui ont été dressées pour en faciliter l'usage.

Toutes ces formules ont en effet un grave défaut, c'est de ne tenir aucun compte de la rugosité des parois. A la rigueur, pour les tuyaux, on a pu dans une certaine mesure, proposer une sorte de valeur moyenne pour les coefficients, parce que, dans la pratique, les tuyaux en service depuis un certain temps parviennent à un état de rugosité moyenne peu différent de l'un à l'autre, lorsque les eaux qu'ils conduisent ne sont pas trop incrustantes. Mais pour les cours d'eau, il n'en est pas ainsi. La rugosité des parois varie dans des limites très étendues et a pour conséquence de modifier, dans une proportion considérable, pour les cours d'eau de faibles dimensions au moins, les valeurs des coefficients qui doivent en tenir compte. Ce n'est donc qu'avec restriction et pour des cours d'eau définis dont les parois ont un degré déterminé de rugosité que l'on peut adopter des formules à coefficient constant.

**104. Formules modernes.** — MM. Darcy et Bazin mirent cette conclusion en évidence par les expériences qu'ils exécutèrent sur une rigole détachée du canal de Bourgogne. Les résultats de ces expériences ont été publiés par M. Bazin, qui a proposé par le coefficient  $b$  la forme  $\alpha + \frac{\beta}{R}$ , analogue à celle que Darcy avait déjà donnée pour les tuyaux de conduite, en attribuant à ce coefficient

les valeurs suivantes pour quatre catégories de parois, auxquelles MM. Ganguillet et Kutter ont ajouté la cinquième (parois en gravier) :

1. *Parois très unies*, ciment lissé, bois raboté, etc...  $b=0,00015\left(1+\frac{0,03}{R}\right)$
2. *Parois unies*, pierres taillées, briques, planches, etc.  
.....  $b=0,00019\left(1+\frac{0,07}{R}\right)$
3. *Parois peu unies*, maçonnerie de moellons....  $b=0,00024\left(1+\frac{0,25}{R}\right)$
4. *Parois en terre*.....  $b=0,00028\left(1+\frac{1,25}{R}\right)$
5. *Parois en gravier*.....  $b=0,00040\left(1+\frac{1,75}{R}\right)$

La formule de MM. Darcy et Bazin, ainsi écrite :

$$RI = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) U^2 = bU^2,$$

et dans laquelle  $\alpha$  et  $\beta$  ont les valeurs qui viennent d'être données, peut, comme toutes les autres, se mettre sous la forme  $U = C\sqrt{RI}$ , en attribuant au coefficient  $C$  la signification :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{R}}}$$

M. Bazin (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1897, 4<sup>e</sup> trim., p. 20) en discutant de nouveau un très grand nombre d'observations diverses sur les canaux découverts a proposé une nouvelle formule qu'il écrit :

$$\frac{\sqrt{RI}}{U} = \sqrt{b} = 0,0115 \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right),$$

ou bien

$$U = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \sqrt{RI}.$$

Le coefficient unique  $\gamma$  que contient cette formule, au lieu des deux,  $\alpha$  et  $\beta$ , celle qui précède, aurait, d'après M. Bazin, les valeurs suivantes :

- 1° *Parois très unies* (ciment, bois raboté, etc).....  $\gamma = 0,06$
- 2° *Parois unies* (planches, briques, pierres de taille, etc.)..  $\gamma = 0,16$
- 3° *Parois en maçonnerie de moellons*.....  $\gamma = 0,46$
- 3° *bis. Parois de nature mixte* (sections en terre très régulières ou revêtues de perrés).....  $\gamma = 0,85$
- 4° *Canaux en terre* dans des conditions ordinaires.....  $\gamma = 1,30$
- 5° *Canaux en terre* présentant une résistance exceptionnelle.  $\gamma = 1,75$

On trouvera, à la table IX, pour diverses valeurs du rayon moyen R, les valeurs du coefficient C de cette formule

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

et pour les six valeurs ci-dessus du coefficient de rugosité  $\gamma$ .

On en déduirait, au moyen de la table VIII, les valeurs correspondantes du coefficient  $b$ , dans la formule  $RI = bU^2$ .

MM. Ganguillet et Kutter ont cru reconnaître, par la discussion d'un très grand nombre d'expériences et d'observations, que, pour une même nature de parois, le coefficient  $b$  ou C devait varier, non-seulement avec le rayon moyen R, mais aussi avec la pente I du cours d'eau, et ils ont conclu à l'adoption dans la formule  $U = C \sqrt{RI}$ , de la forme suivante pour le coefficient C :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}}$$

Le nombre désigné par  $n$  est variable suivant la nature de la paroi, dont il mesure en quelque sorte la rugosité. Il a les valeurs suivantes :

	$n$	$\frac{1}{n}$
1° <i>Parois très unies</i> : ciment lissé, bois raboté, etc....	0,010	100
2° <i>Parois unies</i> : pierres taillées, briques.....	0,013	77
3° <i>Parois peu unies</i> : maçonnerie de moellons.....	0,017	58
4° <i>Parois rugueuses</i> : moellons bruts.....	0,020	50
5° <i>Parois en terre</i> .....	0,025	40
6° <i>Parois en gravier</i> , ou plantes aquatiques.....	0,030	33
7° <i>Parois de gravier, irrégulières et mal entretenues</i> ..	0,035	29
8° <i>Parois très irrégulières</i> .....	0,040	25

Cette formule est compliquée et les résultats qu'elle fournit ne

semblent pas s'accorder aussi bien que la dernière de M. Bazin, avec l'observation. Elle est fort usitée à l'étranger, principalement en Allemagne, en Angleterre et en Amérique ; cela tient peut-être à ce que le coefficient  $n$  variable avec la rugosité est unique, tandis que dans la première formule de M. Bazin il y avait deux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , dont chacun dépendait suivant une loi inconnue de l'état de la paroi. Cet inconvénient n'existe plus dans la nouvelle formule.

La table XI donne les valeurs du coefficient  $C$  de Ganguillet et Kutter pour les huit natures de parois qui viennent d'être définies et pour un certain nombre de pentes comprises dans les limites de la pratique. Au moyen de ces tables, l'emploi de la formule dont il s'agit est presque aussi simple que celui de la formule de M. Bazin. Nous donnerons un peu plus loin des exemples de l'application de l'une et de l'autre.

La comparaison des résultats de la formule de Ganguillet et Kutter avec ceux de l'observation semble montrer qu'elle n'attribue pas à la pente  $I$  une importance suffisante, car les écarts que l'on a constatés paraissent être fonction de la pente et sont surtout appréciables lorsque celle-ci est très petite.

On peut d'ailleurs objecter à cette formule qu'il est bien extraordinaire que, lorsque le rayon moyen a la valeur  $R = 1$  m., le coefficient  $C$  devient indépendant de la pente, tandis qu'il varie avec elle lorsque le rayon moyen a une valeur ou plus grande ou plus petite. D'après cette formule, le coefficient  $C$  croît avec la pente pour les valeurs de  $R$  inférieures à 1 et il décroît au contraire quand la pente augmente lorsque  $R$  est supérieur à l'unité. On ne voit pas les causes de cette différence qui semble difficile à expliquer.

M. Robert Manning, professeur au Collège Royal de Dublin, a proposé la formule <sup>1</sup> :

1. Cette formule n'est qu'une forme simplifiée d'une autre plus générale donnée par M. Rob. Manning sous la forme

$$U = C \sqrt{gI} \left[ \sqrt{R} + \frac{0,22}{\sqrt{m}} (R - 0,15 m) \right],$$

dans laquelle  $m$  représente la hauteur de la colonne de mercure qui équilibre la pression atmosphérique. Les valeurs des coefficients numériques y restent les mêmes quelle que soit l'unité adoptée pour les longueurs. Pour la valeur  $m = 0,76$ , en prenant le mètre pour unité de longueur, elle devient simplement

$$U = C_1 \sqrt{I} \left( \sqrt{R} + \frac{R}{4} - 0,03 \right).$$

C'est la parenthèse que remplace le facteur  $\sqrt[3]{R^2}$  de la forme plus simplifiée donnée ci-dessus. Voir la brochure *On the flow of water in open channels and pipes*, par Robert Manning. Dublin, 1890.

$$U = C_1 \sqrt[3]{R^2} \sqrt{I} = C_1 R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}};$$

dans laquelle le coefficient  $C_1$ , variable avec la nature de la paroi, a la valeur  $\frac{1}{n}$  de l'inverse du coefficient de rugosité  $n$  de la formule de Kutter. On devrait donc prendre, pour les parois en terre,  $C_1 = 40$ , et de même pour les autres. Cette formule revient à :

$$U = C_1 \sqrt[6]{R} \cdot \sqrt{RI},$$

et elle rentre dans la formule générale  $U = C\sqrt{RI}$  ou  $RI = bU^2$  avec :

$$C = C_1 \sqrt[6]{R} \quad \text{ou} \quad b = \frac{1}{C_1^2 \sqrt[3]{R}}.$$

D'après M. Robert Manning, elle s'accorderait, tout aussi bien que celle de Kutter, avec les résultats d'expérience desquels celle-ci a été déduite. La forme en avait déjà été indiquée par M. Gauckler, pour les valeurs de  $I$  supérieures à 0,0007, soit à 0<sup>m</sup>70 par kilomètre. Pour les pentes inférieures à ce chiffre, M. Gauckler avait proposé :

$$U = CR^{\frac{4}{3}}I.$$

mais M. Gauckler attribuait à  $C$  une valeur constante.

On trouvera, à la table X, les valeurs du coefficient  $C$  d'après cette formule de M. Robert Manning, dont l'usage semble devoir être recommandé.

Une formule bien plus compliquée a été déduite par MM. Humphreys et Abbot de leurs observations sur le Mississipi. Ils y ont fait entrer, non pas le rayon moyen  $R$ , tel qu'il est défini plus haut, ou le rapport au périmètre mouillé de l'aire de la section transversale, mais bien un rapport  $R_1$  obtenu en divisant cette aire par le périmètre total de la section, y compris la surface libre.

Cette formule est :

$$U = \left[ \sqrt[4]{69R_1\sqrt{I}} - 0,0214 \right]^2.$$

En négligeant le terme constant, 0,0214, elle peut s'écrire approximativement :

$$U = \sqrt{69R_1} \sqrt[4]{I} = 8,3 \sqrt{R_1} \sqrt[4]{I};$$

ce qui revient encore à

$$R_1 I = \frac{\sqrt{I}}{6g} U^2 = b U^2,$$

en faisant

$$b = \frac{\sqrt{I}}{6g}.$$

Lorsqu'il s'agit de canaux de très petite dimension, comme les dernières petites rigoles employées pour les irrigations, MM. Darcy et Bazin ont trouvé que l'on pouvait prendre, avec une approximation suffisante :

$$b = \frac{k}{\sqrt{RU}}, \quad \text{ou} \quad RI = \frac{k}{\sqrt{RU}} U^2.$$

$k$  étant une constante. Il en résulte, ainsi que l'a fait remarquer M. Boussinesq, en appelant  $\alpha$  une autre constante :

$$U = \alpha RI^{\frac{2}{3}} = \alpha R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{2}{3}}.$$

D'après les résultats inscrits au tableau de la page 106 des *Recherches hydrauliques* de M. Bazin, et déduits d'expériences sur des rigoles de 0 m. 10 de largeur dans lesquelles le rayon moyen a varié de 1 à 3 centimètres, les valeurs du coefficient  $k$  auraient été d'environ 0,00004, lorsque les parois des rigoles étaient polies et de 0,00012 lorsqu'elles avaient été rendues rugueuses par la juxtaposition d'une forte toile. Il serait intéressant d'avoir la valeur de  $k$  pour des rigoles tapissées de végétation.

## § 2.

### ÉTUDE DÉTAILLÉE DE L'ÉCOULEMENT

#### 105. Répartition des vitesses dans un courant. —

La détermination de la vitesse moyenne  $U$ , dans de pareils canaux, s'opère directement par le mesurage du débit dans un temps donné, obtenu en remplissant un réservoir. Mais ce procédé n'est plus appli-



cable à ceux de grande dimension. La vitesse moyenne doit alors y être déterminée par l'observation des vitesses en un grand nombre de points d'une même section transversale et l'étude de la répartition des vitesses qui, dans les tuyaux, n'offre qu'un intérêt secondaire, devient primordiale lorsqu'il s'agit des canaux découverts.

D'après ce qui a été dit au chapitre II, n° 32, et ce que nous avons vérifié dans les tuyaux de conduite, la vitesse dans un canal doit être minimum le long de la paroi et aller en croissant à mesure qu'on s'en éloigne ; il semble en résulter que la vitesse maximum se trouverait au milieu de la surface libre, si l'on pouvait faire abstraction de la résistance de l'air. L'atmosphère qui repose sur la surface libre constitue cependant une véritable paroi sur laquelle frotte le liquide en mouvement et qui produit sur lui un effet retardateur comparable à celui qui provient des parois solides. Cet effet, à peine sensible lorsque l'air est immobile, devient beaucoup plus intense

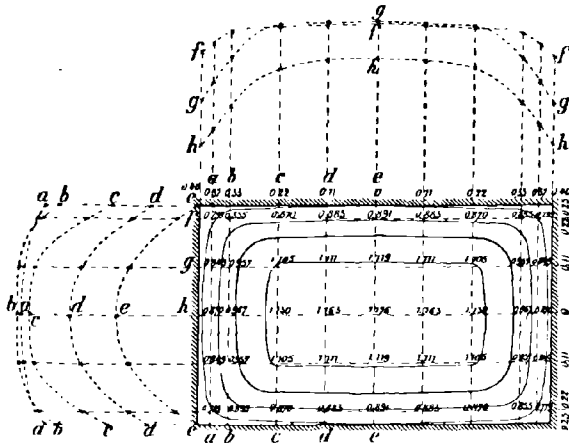


Fig. 5g.

si l'air se déplace en sens inverse du liquide, c'est-à-dire si le vent souffle en sens contraire du courant. Mais la résistance de l'air ne suffit pas à rendre compte des différences que l'on observe dans la répartition des vitesses dans un canal découvert de forme rectangulaire, et dans le même canal formant la moitié inférieure d'un tuyau fermé à section rectangulaire ; ces différences sont rendues évidentes par la comparaison des deux figures 5g et 6o empruntées à l'ouvrage de M. Bazin. Dans le canal découvert (fig. 6o), les cour-

bes d'égale vitesse, au lieu de présenter à peu près la forme de rectangles, comme elles le font dans le tuyau fermé (fig. 59), affectent une figure elliptique beaucoup plus prononcée, surtout lorsqu'on se rapproche de l'axe ; au lieu de venir couper à angle droit la sur-

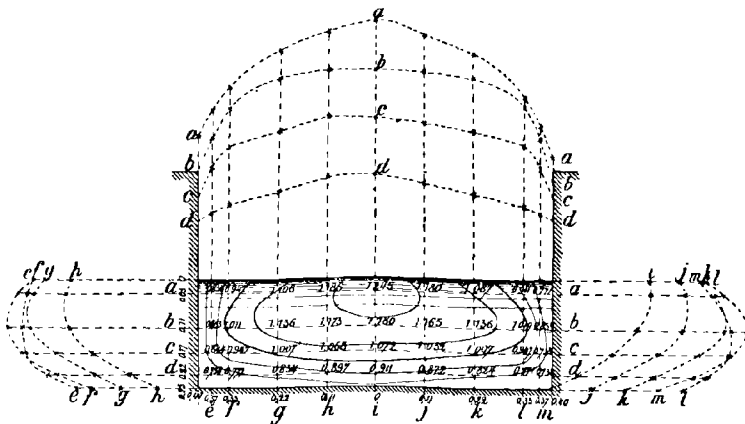


Fig. 60.

face horizontale du courant, elles la rencontrent, au contraire, sous un angle aigu et manifestent, en s'en rapprochant, une tendance à se refermer ; enfin elles sont plus éloignées de l'axe que dans le cas du tuyau fermé, surtout celles qui correspondent à la vitesse moyenne  $V = U$  et à la vitesse  $V = 1,10U$  ; au contraire, la courbe des vitesses  $V = 0,80U$  semblerait un peu plus rapprochée. La loi de la répartition des vitesses est donc complètement modifiée.

Une perturbation aussi notable ne peut pas être uniquement attribuée, d'après M. Bazin, à la résistance opposée par l'air au mouvement des tranches supérieures du fluide, car s'il en était ainsi, elle disparaîtrait dans le cas d'un vent soufflant d'amont avec une vitesse égale ou supérieure à celle du courant et ce n'est pas ce que l'on observe : la vitesse maximum se trouve encore, alors, au-dessous de la surface. La diminution de vitesse des couches supérieures, dans un canal découvert, doit donc être imputée à l'absence de résistance sur la surface libre et au défaut d'invariabilité de la section ; ces circonstances favorisent, aux environs de la surface, la production de mouvements irréguliers de toute espèce, qui correspondent à une déperdition de force vive non translatrice ou à des vitesses obliques dont la composante, dans le sens de l'écoulement,

est notablement plus faible que dans les couches correspondantes du tuyau fermé. Elle peut tenir aussi, pour une certaine part, à la tension superficielle du liquide.

**106. Répartition des vitesses sur une verticale.** —

Quoi qu'il en soit de la véritable cause du phénomène, le fait n'en est pas moins avéré : il est très rare que, sur une verticale, la vitesse la plus grande se trouve à la surface. Les expériences de M. Bazin lui ont permis d'affirmer que la loi des variations des vitesses, sur une même verticale, pouvait être représentée par une parabole du second degré à axe horizontal dont le sommet, correspondant à la vitesse maximum, était placé à une certaine profondeur au-dessous de la surface libre. Cette loi de répartition des vitesses a été retrouvée par tous les observateurs, et en particulier par M. Allan Cunningham, qui a dirigé des expériences très nombreuses et très exactes sur le canal du Gange, c'est-à-dire sur un cours d'eau régulier de dimensions exceptionnelles, beaucoup plus grandes que celles de tous ceux qui avaient été l'objet d'observations du même genre en Europe<sup>1</sup>. Cette loi parabolique peut être exprimée par une équation de la forme :

$$(4) \quad v = v_m - \theta (z - z_1)^2,$$

dans laquelle  $v$  est la vitesse d'un filet fluide,  $v_m$  la vitesse maximum,  $\theta$  un coefficient numérique,  $z$  la profondeur au-dessous de la surface du filet considéré, et  $z_1$  la profondeur du filet dont la vitesse est maximum. Différenciée par rapport à  $z$ , cette équation donne :

$$-\frac{dv}{dz} = 2\theta (z - z_1).$$

Si nous considérons, dans la masse liquide en mouvement, un prisme rectangulaire de longueur et de largeur égales à l'unité et limité par deux plans horizontaux dont les ordonnées soient  $z$  et  $z_1$ , le poids de ce prisme sera  $H(z - z_1)$  et la composante de ce poids, accélératrice du mouvement du prisme considéré, aura pour valeur, en appelant  $I$  la pente du cours d'eau que l'on peut prendre égale à  $\sin I$  :

$$HI(z - z_1).$$

La force retardatrice ne s'exerce pas sur les faces latérales du

1. Il a été donné un résumé des expériences de M. Cunningham dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1882, 2<sup>e</sup> semestre, page 43.

prisme si l'on suppose que les vitesses  $y$  soient les mêmes de part et d'autre, et par conséquent qu'il n'y ait pas de vitesse relative. Elle ne s'exerce pas non plus sur la face dont l'ordonnée est  $z = z_1$ , car la vitesse étant maximum sur cette face,  $\frac{dv}{dz}y$  est nulle, il n'y a pas non plus de vitesse relative des molécules situées de part et d'autre. Elle ne s'exerce donc que sur la face du prisme dont l'aire est égale à l'unité et l'ordonnée égale à  $z$ , et elle doit équilibrer la force accélératrice qui vient d'être écrite. Cette action retardatrice, due au frottement du liquide sur lui-même, est ainsi égale à :

$$\Pi I (z - z_1) = - \frac{\Pi I}{2g} \frac{dv}{dz}.$$

Elle est donc proportionnelle à la première puissance de  $\frac{dv}{dz}$ , comme nous l'avons déjà dit à propos des tuyaux de conduite.

D'autre part, les expériences de M. Bazin lui ont montré que le coefficient que nous avons appelé  $\theta$  était lié à la pente  $I$ , et au rayon moyen ou bien à la profondeur  $h$  dans le cas d'un canal de largeur indéfinie, par la relation :

$$\theta = \frac{k}{h^2} \sqrt{hI}.$$

Cette valeur étant portée dans l'expression précédente du frottement moléculaire par unité superficielle lui donne la forme :

$$- \frac{\Pi I h^2}{2k \sqrt{hI}} \frac{dv}{dz} = - \frac{\Pi}{2k} h \sqrt{hI} \cdot \frac{dv}{dz}$$

ou bien encore, en mettant pour  $hI$  sa valeur  $bU^2$  :

$$- \frac{\Pi \sqrt{b}}{2k} h U \frac{dv}{dz}.$$

Expression du frottement intérieur identique à celle que nous avons supposée au chapitre II, n° 29, à la seule différence que la vitesse à la paroi  $u_0$  est remplacée par la vitesse moyenne  $U$  ; le coefficient  $\frac{\Pi \sqrt{b}}{2k}$  remplaçant en même temps celui que nous avons appelé  $\Pi A$  ou  $\varphi g A$ . Nous trouvons ainsi une confirmation expéri-

mentale des hypothèses qui ont été faites alors sur le frottement intérieur <sup>1</sup>.

**107. Formules de M. Bazin.** — Reprenons alors l'équation générale (4) et mettons-y, pour le coefficient  $\theta$  la valeur  $\frac{k}{h^2} \sqrt{h\bar{l}}$  trouvée par M. Bazin; cette formule devient :

$$v = v_m - k \sqrt{h\bar{l}} \left( \frac{z}{h} - \frac{z_1}{h} \right)^2 ;$$

et en désignant, pour simplifier, par  $\zeta$ ,  $\zeta_1$  les rapports  $\frac{z}{h}$ ,  $\frac{z_1}{h}$ , c'est-à-dire les profondeurs proportionnelles, ou les rapports des profondeurs  $z$  ou  $z_1$  à la profondeur totale  $h$ , et aussi par  $K$  le produit  $k\sqrt{h\bar{l}}$  :

$$(5) \quad v = v_m - K (\zeta - \zeta_1)^2.$$

La vitesse moyenne sur une verticale, que nous appellerons  $u$ , sera :

$$u = \int_0^1 v d\zeta = v_m - K \left( \frac{1}{3} - \zeta_1 + \zeta_1^2 \right),$$

en supposant que le coefficient  $K$  soit constant.

Dans la même hypothèse, la moyenne des vitesses  $v_\zeta$  et  $v_{1-\zeta}$ , en deux points symétriques par rapport à la surface et au fond, diffère peu de la vitesse moyenne  $u$  sur la même verticale, car l'équation (5), en y faisant successivement  $\zeta = \zeta$  et  $\zeta = 1 - \zeta$ , donne :

1. Des formules de deuxième approximation, analogues à celles qui ont été indiquées plus haut, aux pages 48 et 181 pour l'écoulement dans les tuyaux de conduite, n'ont pas été cherchées pour la section rectangulaire large, et il n'y avait pas lieu de le faire. Les principales causes perturbatrices aux règles simples de variation du coefficient de frottement intérieur  $\theta$  qu'expriment les formules de la page 47, sont en effet dues à ce que l'agitation du liquide prend naissance ailleurs qu'aux parois et qu'elle cesse de se concentrer dans les couches les plus rapides; elles tiennent toutes deux, en définitive, à l'inégalité relative de vitesse des filets liquides. Ce qui peut mesurer, au moins approximativement, cette inégalité, c'est l'excès, sur l'unité, du rapport de la vitesse maximum  $v_m$  à la vitesse à la paroi  $w$ ; or cet excès est bien moindre dans une section rectangulaire que dans une section circulaire ou demi-circulaire. Les perturbations doivent donc être moins sensibles dans la première et l'on s'explique que la deuxième approximation n'y ait pas été nécessaire.

Voir sur ce sujet la *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section*, par M. Boussinesq, à laquelle j'ai emprunté le raisonnement qui précède.

$$\frac{v_{\zeta} + v_{1-\zeta}}{2} = u - K\left(\zeta^2 - \zeta + \frac{1}{6}\right);$$

et l'on voit facilement que lorsque  $\zeta$  varie de 0 à  $\frac{1}{2}$ , le trinôme varie de  $\frac{1}{6}$  à  $-\frac{1}{12}$ ; la moyenne des deux vitesses considérées diffère de la vitesse moyenne de moins de  $\frac{1}{6}$  de  $K$ , lequel est toujours une petite fraction de cette vitesse moyenne.

La vitesse au milieu de la hauteur, pour  $\zeta = \frac{1}{2}$  est :

$$v_{\frac{1}{2}} = u + \frac{1}{12}K;$$

elle diffère donc peu de la vitesse moyenne sur la même verticale. Mais la vitesse aux  $\frac{3}{5}$  de la profondeur, obtenue en faisant  $\zeta = \frac{3}{5}$ , diffère encore moins de la vitesse moyenne  $u$ ; on a en effet :

$$v_{\frac{3}{5}} = u - \frac{1}{5}K\left(\frac{2}{15} - \zeta_1\right).$$

Or,  $\zeta_1$ , en pratique, ne dépasse presque jamais  $\frac{1}{3}$  et lorsqu'il varie de 0 à  $\frac{1}{3}$ , le second terme de cette expression, qui représente la différence entre  $v_{\frac{3}{5}}$  et  $u$ , varie, de  $\frac{K}{37,5}$  à  $\frac{K}{25}$ . On peut donc presque toujours, avec une approximation suffisante, écrire :

$$u = v_{\frac{3}{5}}.$$

Cette formule approximative, donnée par M. Bazin, a été remarquablement vérifiée par les expériences de M. Cunningham qui lui ont montré que la vitesse moyenne, sur une verticale, était la même que celle d'un point dont la profondeur variait de 0,577 à 0,667 de la hauteur. La moyenne de ses observations lui a donné, pour la profondeur de ce point,  $\zeta = \frac{5}{8} = 0,625$ , au lieu de  $\zeta = 0,60$ . Mais cela tient à ce qu'il a fait entrer, dans cette moyenne, les observations faites sur des verticales rapprochées des rives, sur lesquelles la

distribution des vitesses est différente de ce qu'elle est dans un canal de largeur indéfinie. Près des rives, en effet, la profondeur où se rencontre la vitesse maximum s'abaisse et la vitesse moyenne se trouve plus bas que vers le milieu du canal. Le point où l'on rencontre une vitesse égale à la vitesse moyenne peut s'abaisser jusqu'à  $\zeta = 0,728$ , mais alors il se trouve, près de la surface, à  $\zeta = 0,10$ , un autre point où la vitesse est la même. M. Cunningham a déduit, de la loi parabolique des vitesses, les valeurs de la vitesse moyenne sur une verticale en fonction de celles de filets situés à diverses hauteurs. Voici quelques unes de ces valeurs :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4} \left( v_0 + 3v_{\frac{1}{2}} \right), \\ &= \frac{1}{7} \left( 3v_{\frac{1}{3}} + 4v_{\frac{2}{3}} \right), \\ &= \frac{1}{6} \left( v_0 + 4v_{\frac{1}{2}} + v_1 \right), \\ &= \frac{1}{3} \left( 2v_{\frac{1}{4}} - v_{\frac{1}{2}} + 2v_{\frac{3}{4}} \right), \\ &\text{etc.....} \end{aligned}$$

Il n'est pas inutile de faire remarquer que  $v_0$ , dans ces formules, représente la vitesse pour  $\zeta = 0$ , c'est-à-dire la vitesse à la surface, et  $v_1$  la vitesse pour  $\zeta = 1$  ou la vitesse au fond. Celle-ci est d'une détermination difficile.

On peut, en adoptant l'une ou l'autre de ces formules, déterminer approximativement la vitesse moyenne sur une verticale au moyen de la mesure directe d'une seule, ou de deux, ou de trois vitesses sur cette verticale.

**108. Rapport de la vitesse maximum à la vitesse moyenne.** — Tout ce qui précède suppose, d'après ce qui a déjà été remarqué, que le coefficient désigné par  $K$ , qui exprime le paramètre de la parabole des vitesses, est constant. Au contraire, les expériences de M. Bazin<sup>1</sup> lui ont montré que ce coefficient devait être remplacé par  $\frac{M}{(1 - \zeta_1)^2}$ , c'est à-dire qu'il est d'autant plus grand

1. *Annales des ponts et chaussées*, 2<sup>e</sup> semestre, 1875, p. 309.

que  $\zeta_1$ , profondeur relative au-dessous de la surface libre du point où la vitesse est maximum, est plus petit ; la courbure de la parabole est d'autant plus prononcée à son sommet que ce sommet est plus bas, ou que la vitesse maximum se trouve plus loin de la surface libre. L'équation qui exprime la loi de variation des vitesses devient alors :

$$(6) \quad v = v_m - M \left( \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta_1} \right)^2,$$

et le coefficient M a pour valeur :

$$M = 20 \sqrt{hI}.$$

Dans un courant rectangulaire de largeur assez grande pour que l'influence des rives pût être considérée comme négligeable,  $h$  pourrait être confondue avec le rayon moyen  $R$ , et la vitesse moyenne sur une verticale, désignée ici par  $u$ , ne différerait pas sensiblement de la vitesse moyenne  $U$  dans toute la section transversale. L'équation précédente s'écrirait alors, en divisant tous ses termes par  $u$  ou par  $U$  et en remplaçant  $h$  par  $R$  :

$$\frac{v}{u} = \frac{v_m}{u} - 20 \sqrt{\frac{RI}{U^2}} \left( \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta_1} \right)^2.$$

Nous avons trouvé plus haut :

$$\frac{v_m}{u} = 1 + \frac{K}{u} \left( \frac{1}{3} - \zeta_1 + \zeta_1^2 \right);$$

la décroissance des vitesses sur une verticale est, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus prononcée que la résistance opposée par les parois à l'écoulement du fluide est elle-même plus considérable. Le coefficient  $K$  ou plutôt le rapport  $\frac{K}{u}$  qui mesure cette décroissance, doit augmenter avec la résistance. Remplaçons, en effet, ce coefficient  $K$  par sa valeur en  $M$ , et remarquons que  $\frac{RI}{U^2} = b$ , nous obtenons :

$$\frac{v_m}{u} = 1 + 20 \sqrt{b} \frac{\frac{1}{3} - \zeta_1 + \zeta_1^2}{(1 - \zeta_1)^2}.$$

Nous avons déjà dit que  $\zeta_1$  était généralement inférieur à  $\frac{1}{3}$ . Dans



les canaux très larges, comme ceux dont nous parlons maintenant, il est rare que  $\zeta_1$  dépasse 0,20 ; alors, avec la valeur moyenne  $\sqrt{b} = 0,02$  qui correspond au coefficient de Tadini, et qui est applicable aux cours d'eau tranquilles et à vitesse modérée, le rapport  $\frac{v_m}{U}$  varie entre 1,10 et 1,13. Pour les autres valeurs de  $b$  applicables aux grands cours d'eau de forme et de vitesse moins régulières, ce rapport peut varier entre 1,09 et 1,19. Cela veut dire que la vitesse maximum, dans un cours d'eau rectangulaire très large, ne dépasse la vitesse moyenne que de  $\frac{1}{5}$  à  $\frac{1}{10}$  de sa valeur.

L'expression précédente de  $\frac{v_m}{U}$  peut d'ailleurs, en effectuant la division indiquée par le dernier facteur et en négligeant les termes du 3<sup>e</sup> ordre en  $\zeta_1$ , se mettre sous la forme :

$$\frac{v_m}{U} = 1 + 20 \sqrt{b} \cdot \frac{1}{3} (1 - \zeta_1)$$

ou bien encore, en remplaçant  $b$  par  $\frac{hI}{U^2}$  :

$$v_m = U + \frac{1}{3} (1 - \zeta_1) 20 \sqrt{hI}.$$

Dans les limites qui viennent d'être rappelées pour la variation ordinaire de  $\zeta_1$ , c'est-à-dire lorsque cette quantité varie de 0, sa limite inférieure qu'elle n'atteint presque jamais, à 0,20, le coefficient numérique du second terme, qui affecte  $\sqrt{hI}$ , varie de 6,67 à 5,33. La moyenne de ces deux valeurs, qui correspond à  $\zeta = 0,10$ , est exactement 6. On peut donc écrire, en moyenne et à titre d'approximation :

$$(7) \quad v_m = U + 6 \sqrt{hI},$$

le coefficient 6 pouvant varier de 5,33 à 6,67.

Avec la formule de Tadini :  $U = 50 \sqrt{hI}$ , cette expression prend la forme  $v_m = 1,12 U$ , ce qui est précisément ce que nous venons de dire, d'après les observations de M. Bazin sur les canaux rectangulaires très larges.

Dans les mêmes conditions, la parabole des vitesses a pour équation :

$$\frac{v}{u} = \frac{v_m}{u} - \frac{20 \sqrt{b}}{(1 - \zeta_1)^2} (\zeta - \zeta_1)^2$$

et son paramètre  $\frac{20 \sqrt{b}}{(1 - \zeta_1)^2}$  est compris entre 0,40 et 0,60.

Dans sa théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section, M. Boussinesq, admettant que la vitesse maximum est à la surface, c'est-à-dire que  $\zeta_1 = 0$ , a donné des formules absolument identiques aux précédentes, en les déduisant de considérations purement théoriques. Il écrit alors simplement, en mettant au lieu du coefficient numérique 20 ci-dessus, un coefficient  $\frac{k}{2}$  dont la valeur reste indéterminée :

$$\frac{v_m}{U} = 1 + \frac{k}{6} \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \frac{v}{U} = \frac{v_m}{U} - \frac{k\sqrt{b}}{2} \zeta_1.$$

Cette dernière équation diffère de celle qui est écrite plus haut, en ce que la vitesse moyenne  $U$  dans toute la section  $y$  figure au lieu de la vitesse moyenne  $u$  sur une verticale. Dans un lit de grande largeur ces deux vitesses moyennes sont en effet identiques.

En éliminant  $k$  entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{v}{U} = 1 + \left( \frac{v_m}{U} - 1 \right) (1 - 3 \zeta_1).$$

si on élève les deux membres de cette dernière d'abord au carré, puis au cube, que l'on multiplie par  $d\zeta$  et que l'on intègre depuis  $\zeta = 0$  jusqu'à  $\zeta = 1$ , le premier membre donnera respectivement le rapport du carré moyen des vitesses  $v$  dans toute la section au carré de leur moyenne  $U$  et le rapport analogue du cube moyen des vitesses  $v$  au cube de la vitesse moyenne, rapports que nous avons démontrés plus haut (n° 24) être plus grands que l'unité, que nous avons représentés respectivement par  $1 + \tau_1$  et par  $\alpha$  et entre lesquels nous avons constaté la relation approchée  $\alpha = 1 + 3 \tau_1$ . En effectuant les calculs indiqués, on trouve facilement :

$$\tau_1 = \frac{4}{5} \left( \frac{v_m}{U} - 1 \right)^2 ; \quad \alpha = 1 + 3 \tau_1 - \frac{2}{7} \tau_1 \sqrt{5 \tau_1}.$$

Ces quantités  $\tau_1$  et  $\alpha$  se trouvent ainsi exprimées en fonction de l'excès, sur l'unité, du rapport de la vitesse maximum à la vitesse moyenne.

**109. Vitesse au fond.** — La vitesse au fond, pour  $\zeta = 1$ ,

que nous représenterons par  $w$ , est alors, en reprenant le coefficient numérique :

$$w = v_m - 20 u \sqrt{b} = v_m - 20 \sqrt{hl} ;$$

et la différence  $v_m - w = 20 \sqrt{hl}$  varie, dans les canaux artificiels, entre  $\frac{1}{4} v_m$  et  $\frac{1}{2} v_m$ . Elle augmente avec la rugosité de la paroi, puisqu'elle est proportionnelle à la racine carrée du coefficient  $b$ , lequel mesure la résistance à cette paroi.

Cet écart, entre la vitesse maximum  $v_m$  et la vitesse au fond  $w$  reste, on le voit, aux environs de  $\frac{1}{3} v_m$ , et c'est cette valeur moyenne qu'il conserve dans beaucoup de cours d'eau naturels, où la résistance des parois présente des conditions à peu près moyennes et peu différentes. Toutefois, sur le Rhin, à Bâle, sur un fond formé de gros galets produisant une résistance extraordinaire, cet écart a atteint presque  $\frac{1}{2} v_m$ ; mais on doit considérer ce résultat comme exceptionnel.

Nous avons vu, que dans les tuyaux, au contraire, l'écart entre la vitesse maximum et la vitesse à la paroi était peu inférieur à  $\frac{1}{2} v_m$ , lorsque les parois étaient d'une rugosité moyenne. Cette différence tient à l'inégalité de la répartition des vitesses, déjà signalée, dans les tuyaux et dans les canaux découverts.

L'étude qui précède, sur la répartition des vitesses dans un courant, est empruntée à M. Bazin, et les résultats expérimentaux ont été déduits en outre des expériences personnelles de ce savant ingénieur, des expériences faites sur la Saône, à Raconnay, sous la direction de M. Lévillé, de celles qui ont été dirigées par M. Emmerly sur la Seine, à Meulan, de celles de Baumgarten sur la Garonne, d'une expérience de Defontaine sur un bras du Rhin, à Kehl, d'une expérience sur le Rhin, à Bâle, par une commission d'ingénieurs, des expériences de MM. Humphreys et Abbot sur le Mississipi et enfin de celles de Robert Gordon sur l'Irrawaddi.

Les expériences de M. Allan Cunningham, sur le canal du Gange, sont postérieures au travail de M. Bazin; elles en ont confirmé les conclusions.

**110. Cas d'un canal de dimensions restreintes.** — Lorsque les dimensions transversales du canal ne sont pas très

grandes par rapport à la profondeur et que l'on ne peut plus, sans erreur sensible, prendre pour le rayon moyen  $R$  la profondeur  $h$ , les résultats précédents ne sont plus applicables. La répartition des vitesses sur une même verticale suit toujours la loi parabolique exprimée par l'équation (6) ; mais l'on ne peut plus, comme nous l'avons fait, remplacer la vitesse moyenne  $u$  sur une verticale par la vitesse moyenne  $U$  dans toute la section transversale. Celle-ci n'est évidemment qu'une fraction de la vitesse moyenne sur la verticale du milieu, à laquelle s'appliquerait peut-être, au moins approximativement, la relation (7) qui deviendrait :

$$v_m = u + 6 \sqrt{hI}.$$

La vitesse moyenne  $U$  étant alors notablement inférieure à  $u$ , le coefficient numérique doit augmenter, en même temps que l'on remplace  $h$  par  $R$ . En effet, les expériences de M. Bazin lui ont permis d'établir, pour des canaux de dimension restreinte, la formule

$$(8) \quad v_m = U + 14 \sqrt{RI},$$

mais le coefficient 14 semble, dans bien des cas, trop élevé.

On n'a, pour les cas intermédiaires, c'est-à-dire pour ceux où la largeur du cours d'eau, sans pouvoir être considérée comme indéfinie, est cependant assez grande, aucun renseignement expérimental. M. Cunningham a simplement constaté que dans une formule de la forme :

$$v_m = U + K \sqrt{RI},$$

le coefficient  $K$  devait varier avec les dimensions de la section transversale ; mais il n'a pas dégagé les lois de cette variation qui paraissent compliquées.

Il a d'ailleurs fait observer qu'une pareille formule ne pourrait avoir d'utilité pratique que si, au lieu de renfermer la vitesse maximum  $v_m$  qu'il est difficile d'observer directement, elle contenait la vitesse la plus grande à la surface libre, laquelle est toujours inférieure à  $v_m$ .

Lorsqu'il s'agit de canaux dont la largeur n'est pas indéfinie, il devient impossible de déterminer la vitesse à la paroi. Cette vitesse est alors variable suivant une loi qui n'est pas connue. Elle a ordinairement son maximum au milieu du fond horizontal du canal et elle va en diminuant jusqu'aux angles formés par le fond et les

parois où se trouvent les plus petites vitesses de toute la section. Elle augmente ensuite jusque vers le milieu de la hauteur de ces parois et diminue enfin jusqu'à la surface libre. A défaut de toute autre indication, on pourra admettre que dans ces canaux limités, comme dans les grands cours d'eau, la vitesse maximum sur le fond est comprise entre la moitié et les deux tiers de la vitesse maximum  $v_m$  afférant à la section entière.

**111. Formules empiriques.** — D'après cela, on comprendra que nous nous bornions à rappeler, sans discussion, la relation empirique entre la vitesse maximum  $v_m$ , la vitesse moyenne  $U$  et la vitesse au fond  $w$ , qui avait été trouvée par Prony et que l'on emploie encore quelquefois :

$$(9) \quad U = \frac{v_m + w}{2}.$$

Prony avait même exprimé la vitesse moyenne en fonction de la vitesse maximum seule, par la formule :

$$(10) \quad U = v_m \cdot \frac{2.37 + v_m}{3.15 + v_m}.$$

On emploie aussi quelquefois l'expression plus simple et qui souvent n'est pas plus inexacte :

$$(11) \quad U = 0,80 v_m, \quad \text{ou } v_m = 1,25 U,$$

laquelle, mise dans l'équation précédente (9), donnerait :

$$(12) \quad w = 0,75 U = 0,60 v_m.$$

Quelques ingénieurs adoptent encore la formule déduite par M. Sonnet d'une analyse spéciale, mais qui, malgré cela, doit être considérée comme aussi empirique que les précédentes :

$$U = \frac{2v_m + w}{3}.$$

Avec  $U = 0,80 v_m$ , elle donne  $w = 0,50 U = 0,40 v_m$ . Mais, comme nous venons de le dire, la vitesse au fond,  $w$ , n'a pas de signification précise dans les cours d'eau de faible largeur.

**112. Application à quelques cours d'eau naturels.** — Ces formules approximatives ou empiriques ne sont basées que sur

un nombre restreint d'expériences, correspondant à peu près toutes à un seul et même cas, celui des rivières de dimensions moyennes, à écoulement assez régulier et pour lesquelles la formule de Tadini  $U = 50 \sqrt{RI}$  était le plus souvent suffisante. Les expériences faites sur la Seine et sur la Saône, dont il vient d'être parlé (n° 109), ont conduit M. Bazin à la formule :

$$\frac{RI}{U^2} = 0,000280 \left( 1 + \frac{1,25}{R} \right);$$

que l'on peut écrire  $U = C \sqrt{RI}$ , en désignant par C le coefficient  $\frac{1}{\sqrt{0,000280 \left( 1 + \frac{1,25}{R} \right)}}$ . Alors, ce coefficient prend la valeur de

Tadini,  $C = 50$  pour  $R = 3$  m. ; mais pour  $R = 1$  m., on a  $C = 40$ , et pour  $R = 10$  m.,  $C = 56$ . Dès que  $R$  dépasse deux mètres, le coefficient C diffère peu de celui de Tadini, et il n'y a pas lieu de s'en étonner, puisque la Seine et la Saône rentrent dans le cas de rivières à cours tranquille. Lorsqu'il s'agit de canaux artificiels, la forme de la section transversale est régulière, et le degré de rugosité des parois peut être assimilé à certains types usités dans la pratique et pour lesquels nous avons donné plus haut des valeurs du coefficient à adopter. Les formules que l'on établit alors sont d'une exactitude suffisante. Mais, lorsqu'il s'agit de cours d'eau naturels, les conditions de l'écoulement varient non seulement suivant la nature du sol qui constitue le fond du lit et qui est d'une diversité bien plus grande que dans les canaux artificiels, mais aussi et surtout avec les irrégularités de forme des sections transversales, bien plus accentuées toujours, même dans les cours d'eau d'allure très régulière, que dans les canaux artificiels. De ces irrégularités, aucune formule ne peut tenir compte ; tout ce que l'on peut faire, c'est adopter un coefficient moyen applicable à quelques cours d'eau présentant une certaine analogie entre eux.

Par exemple, au lieu de la formule qui précède, applicable aux cours d'eau tranquilles, comme la Seine, Kutter a proposé, pour les cours d'eau torrentiels de la Suisse, charriant des galets, la formule :

$$\frac{RI}{U^2} = 0,0004 \left( 1 + \frac{1,75}{R} \right),$$

qui donne, pour  $R = 1$  m.,  $C \approx 30$  ; pour  $R = 3$  m.,  $C = 40$ , et

pour  $R = 10$  m.,  $C = 46$ . M. Graeff a donné la valeur  $C = 36$  comme applicable aux affluents de la Loire supérieure. Sur le Rhin, à Bâle, dont le fond est tapissé de gros galets, on a trouvé  $C = 38$ . Pour le Danube, à Vienne, les observations très précises de M. Harlacher ont donné  $C = 45$ . Pour l'Irrawaddi, les valeurs obtenues par M. Gordon seraient, sans doute, après vérification et rectification, inférieures à  $C = 50$ , malgré les grandes dimensions du lit. Pour le Mississipi, MM. Humphreys et Abbot ont trouvé pour  $C$  des valeurs atteignant 70, et en tout cas bien supérieures aux précédentes pour des valeurs de  $R$  comprises, à la vérité entre 15 et 20 mètres ; mais toutefois ces résultats, obtenus par la méthode des doubles flotteurs (voir plus loin, chapitre VI, n° 170), auraient besoin, d'après M. Bazin, d'être rectifiés dans une mesure qui n'est pas connue <sup>1</sup>. Dans les expériences qu'il a faites à Roorkee sur le canal du Gange, M. Cunningham a trouvé pour  $C$  des valeurs variant de 19, 43 à 72, 12, mais près de 80 pour cent de ses observations lui ont donné des chiffres compris entre 40 et 60.

La valeur du coefficient  $C$  diminue évidemment lorsque les aspérités du fond du lit augmentent. Cet effet, très sensible en même temps que très naturel dans les cours d'eau de petite et de moyenne dimension, est encore très appréciable dans les grands cours d'eau où cependant il semblerait que les inégalités du fond doivent s'effacer devant les dimensions du lit. Cela tient à ce que le coefficient de frottement intérieur  $\epsilon$  (n° 29) augmente avec le rayon moyen du cours d'eau.

### 113. Répartition des vitesses sur une horizontale.

— Si, au lieu de comparer les vitesses aux différents points d'une même verticale, on rapproche celle des points d'une même ligne horizontale menée à travers le courant, en opérant sur une section transversale symétrique avec un lit horizontal et dans un bief uniforme et d'une grande longueur, on reconnaît les lois approximatives suivantes, observées par M. Cunningham :

1° La vitesse, sur chaque ligne horizontale, est maximum près du milieu ; elle subit, de ce point vers les rives, une diminution d'abord très lente, qui devient plus rapide en approchant des rives et très rapide contre les rives ;

<sup>1</sup>. Note sur l'emploi des doubles flotteurs pour la mesure des vitesses dans les grands cours d'eau, par M. Bazin. *Annales des ponts et chaussées*, 1884, 1<sup>er</sup> semestre, pages 587 et suivantes.

2° La courbe horizontale des vitesses est entièrement convexe vers l'aval et elle est symétrique par rapport au milieu du canal, à moins d'irrégularités dans la forme de celui-ci, soit en amont soit en aval du poste d'observation, soit dans le profil lui-même ;

3° Tout changement marqué dans la forme du lit se fait sentir dans la forme de la courbe des vitesses. Une augmentation de profondeur accroît la vitesse et inversement ; ainsi, une concavité du lit produit une convexité de la courbe des vitesses et *vice versa*. Ces effets sont d'autant plus marqués que l'eau est moins profonde.

**114. Variation de la vitesse en chaque point.** — Il ne s'agit, dans tout ce qui précède, que des vitesses moyennes locales définies comme plus haut (n° 101) dont les vitesses réelles diffèrent à chaque instant, non seulement en grandeur mais encore en direction.

Dans une étude des plus intéressantes <sup>1</sup>, M. Bazin a cherché, en se servant d'observations faites antérieurement et dans un tout autre but, à déterminer dans quelles limites pouvait varier, aux divers points d'une même section transversale, la composante longitudinale de la vitesse. Comme celle-ci change à chaque instant et que les instruments qui servent à la mesurer ne donnent jamais que sa moyenne pendant un temps plus ou moins court, on ne peut arriver, avec les procédés d'observation dont on dispose, à mesurer exactement la différence réelle de ces composantes ; mais on peut observer une quantité qui, si elle ne lui est pas proportionnelle, varie vraisemblablement dans le même sens que cette différence.

Sous cette restriction, M. Bazin a reconnu que l'écart entre la plus petite et la plus grande des composantes longitudinales de la vitesse en un même point avait son maximum à la paroi et décroissait, à partir de cette paroi, en variant à peu près comme le rapport  $\frac{v_m - v}{U}$  ; c'est-à-dire que cet écart est sensiblement le même sur tout le parcours d'une courbe d'égale vitesse. Il varie, en outre, entre deux canaux de dimensions comparables, proportionnellement au coefficient  $\sqrt{b}$  qui mesure la résistance des parois.

M. Bazin n'a pas pu déterminer l'influence, sur la valeur de cet écart, des dimensions absolues de la section transversale, parce que ses observations ont porté sur des canaux de dimensions à peu près semblables. L'influence de ces dimensions doit cependant être con-

<sup>1</sup> Note sur la mesure des vitesses à l'aide du tube jaugeur. *Annales des ponts et chaussées*, 1887, 2<sup>e</sup> semestre, page 195.



sidérable si l'on en juge par les tourbillons qui sillonnent la surface des cours d'eau naturels. Ces mouvements expliquent même comment il se fait que la valeur du coefficient  $\sqrt{b}$  se maintient presque constante dans les grands cours d'eau, malgré l'augmentation du rayon moyen  $R$ , contrairement à ce qui se passerait dans les canaux artificiels. Il semble, en effet, au premier abord que, dans un fleuve, l'influence des aspérités des parois doive s'effacer devant les grandes dimensions du lit ; il en serait ainsi dans un canal de section régulière. Mais, dans les cours d'eau naturels, le lit, dont la profondeur et la largeur varient sans cesse, ne peut jamais être assimilé à un canal prismatique ; ces variations de section, comparables aux dimensions du lit, donnent lieu à des mouvements irréguliers d'une amplitude considérable, de sorte que le coefficient  $\sqrt{b}$  peut conserver la même valeur pour un grand fleuve et pour un cours d'eau de largeur médiocre, ainsi que l'ont constaté divers observateurs.

Les variations de vitesse constatées par M. Bazin sont, comme il a été dit, simplement celles de la composante longitudinale de la vitesse en chaque point ; on sait très peu de chose de la façon dont varie la composante verticale ou transversale qu'il est beaucoup plus difficile d'étudier. D'ailleurs, pour la composante longitudinale elle-même, les lois de M. Bazin ne s'appliquent qu'à la composante de la vitesse moyenne locale, et, par définition même, cette composante est nulle dans le sens transversal. On peut cependant, par quelques observations, se faire au moins une idée de ce qu'elle peut être ou des limites entre lesquelles elle peut varier. Tout le monde a pu constater que si, en un point déterminé d'un courant liquide, l'eau en mouvement se trouve colorée par une cause quelconque, qui ne modifie sensiblement ni sa vitesse ni son poids spécifique, la coloration ne tarde pas à se répandre dans toute l'étendue du courant et cela ne peut avoir lieu que sous l'action des composantes transversales de la vitesse. On doit admettre qu'à partir d'un point quelconque du liquide en mouvement, chaque particule qui y passe a sa vitesse comprise dans l'intérieur d'un cône dont ce point est le sommet, qui est ouvert vers l'aval, qui a pour axe la direction de la vitesse moyenne locale et dont les génératrices une inclinaison déterminée par le maximum de la composante transversale de la vitesse. Il en résulte que la matière colorante ou l'eau colorée issue d'un point déterminé ne sortira pas de ce cône ou de la surface enveloppe des cônes successifs ayant pour sommets les points successivement atteints par une particule en mouvement. Or, d'après des expériences

ces faites par M. J. B. Francis <sup>1</sup>, de l'eau de savon introduite dans un courant régulier auprès du fond du lit apparaît à la surface, à l'aval, à une distance variant de 10 à 30 fois la profondeur. Il faut, pour cela, que la composante verticale ascendante de la vitesse soit comprise entre  $\frac{1}{10}$  et  $\frac{1}{30}$  de la composante horizontale. Je ne connais pas d'observation analogue sur l'écart dans le sens transversal ou horizontal. Il est probablement moins prononcé, ce qui reviendrait à dire que le cône, dont il est question plus haut, et à l'intérieur duquel se trouve comprise la direction de la vitesse réelle d'une particule liquide partant de son sommet, n'est pas à base circulaire, mais à base ovale peut-être irrégulière, présentant sa dimension la plus grande dans le sens vertical.

Enfin, il est un fait qui a été constaté par plusieurs observateurs et en particulier par M. Harlacher, c'est que les variations de la composante longitudinale des vitesses se font par périodes régulières, rythmiques, et sont en quelque sorte le résultat d'une oscillation ou plutôt d'une *pulsation* que semble effectuer la masse liquide. Les ingénieurs américains ont donné à ce phénomène le nom significatif de *pouls* des rivières. La cause n'en paraît pas déterminée. Nous avons vu aussi plus haut (n° 30) que, dans les expériences de M. Couette, il se produisait, dans l'écoulement de la veine fluide, des alternatives de vitesses. Sont-elles dues à la même cause ? C'est une question qui n'est pas élucidée.

### § 3.

## APPLICATIONS

**115. Problèmes divers. Forme de section qui donne le débit maximum.** — On peut se proposer, étant donnée la pente  $I$  d'un canal à ouvrir, ainsi que l'inclinaison  $m$  des talus de la cunette, déterminée par la nature du terrain dans lequel ce canal doit être creusé, de trouver la forme à donner à la section transversale pour assurer le débit maximum par unité d'aire de cette section.

Le débit, par unité d'aire, sera proportionnel à la vitesse moyenne  $U$ , laquelle, pour une pente donnée  $I$ , croît avec le rayon moyen  $R$ .

<sup>1</sup>. *Transactions of American Society of Civil Engineers*. Vol. VII, p. 109.

Le problème revient donc à trouver, pour une section donnée  $\omega$ , la forme pour laquelle  $R$  sera maximum, c'est-à-dire pour laquelle le périmètre mouillé  $\chi$  sera minimum.

Alors,  $l$  étant la largeur au plafond,  $h$  la profondeur d'eau, et  $m$  la tangente de l'angle formé par le talus avec l'horizontale, la section  $\omega$  sera :

$$\omega = h \left( l + \frac{h}{m} \right),$$

et le périmètre mouillé :

$$\chi = l + \frac{2h}{m} \sqrt{1 + m^2}.$$

La section  $\omega$  étant supposée donnée, sa différentielle totale est nulle :

$$h \left( dl + \frac{dh}{m} \right) + \left( l + \frac{h}{m} \right) dh = 0.$$

D'autre part, pour que le périmètre mouillé  $\chi$  soit minimum, il faut aussi que sa différentielle soit nulle, ou que

$$dl + \frac{2dh}{m} \sqrt{1 + m^2} = 0;$$

ce qui, en éliminant  $dl$  et  $dh$ , fournit entre  $l$  et  $h$  la relation :

$$l = \frac{2h}{m} \left( \sqrt{1 + m^2} - 1 \right),$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{l}{2} + \frac{h}{m} = \frac{h}{m} \sqrt{1 + m^2};$$

ou bien (fig. 61),  $HB + BE$  ou  $HE = BD$ . En abaissant  $OF$  perpendiculaire à  $BD$  et  $BI$  perpendiculaire à  $OD$ , il faut donc que  $OF$  soit égal à  $BI$  ou à  $OH$ , ou bien que les côtés  $DB$  et  $BA$  soient tangents à une même circonférence décrite du point  $O$  comme centre.

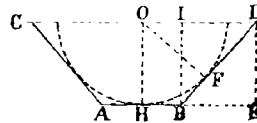


Fig. 61.

Le rapport  $\frac{h}{l}$  de la profondeur à la largeur au plafond vaut ainsi, dans les profils donnant le débit maximum :

$$\frac{h}{l} = \frac{m}{2(\sqrt{1 + m^2} - 1)} = \frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{2m}$$

c'est-à-dire, en mettant pour  $m$  les valeurs usuelles :

Talus verticaux	Talus inclinés				
	à 1 de base pour 2 de hauteur	à 1 de base pour 1 de hauteur 45°	à 3 de base pour 2 de hauteur	à 2 de base pour 1 de hauteur	à 3 de base pour 1 de hauteur
$m = \infty$	$m = 2$	$m = 1$	$m = \frac{2}{3}$	$m = \frac{1}{2}$	$m = \frac{1}{3}$
$\frac{h}{l} = 0,50$	$\frac{h}{l} = 0,81$	$\frac{h}{l} = 1,21$	$\frac{h}{l} = 1,65$	$\frac{h}{l} = 2,12$	$\frac{h}{l} = 3,08$

On voit que, pour les talus d'une inclinaison inférieure à 45 degrés, ou pour  $m < 1$ , le rapport  $\frac{h}{l}$  ne s'écarte pas beaucoup de la valeur approximative :

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{m} + 0,24 m,$$

un peu plus facile à calculer que la valeur exacte.

Dans tous les cas, le rayon moyen, dans le profil ainsi déterminé, exprimé par :

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{h \left( l + \frac{h}{m} \right)}{l + \frac{2h}{m} \sqrt{1 + m^2}},$$

vaut, lorsque l'on y met pour le rapport  $\frac{h}{l}$  la valeur qui correspond au débit maximum :

$$(13) \quad R = \frac{h}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} \cdot \frac{l}{4}.$$

Il est toujours égal à la moitié de la profondeur d'eau, comme dans la section demi-circulaire.

Le rapport  $\frac{h}{l}$  étant ainsi calculé, pour une inclinaison donnée  $m$  des talus de la cunette, il sera facile de trouver, la valeur de  $h$  et par suite celle de  $l$  correspondant à une section transversale d'aire donnée  $\omega$ . L'on a en effet :

$$\omega = h \left( l + \frac{h}{m} \right) = h^2 \frac{2\sqrt{1+m^2}-1}{m},$$

d'où l'on déduira :

$$(14) \quad h = \sqrt{\frac{m\omega}{2\sqrt{1+m^2}-1}}$$

Pour une section transversale  $\omega$  donnée, la profondeur  $h$  et par suite le rayon moyen  $R = \frac{h}{2}$  sont d'autant plus grands que les talus de la cunette sont plus rapprochés de la verticale. Il y a donc toujours un double intérêt, lorsque l'on ouvre un canal destiné à débiter un volume d'eau donné avec une pente également donnée, à adopter, pour le profil transversal les talus les plus raides possibles en égard à la nature du terrain. On réduit ainsi, d'abord, la largeur de l'emprise, et ensuite, en augmentant le rayon moyen, on augmente la vitesse moyenne, ce qui permet de diminuer dans la même proportion l'étendue  $\omega$  de la section transversale, ou le cube des déblais par mètre courant.

Tout ce qui précède suppose, bien entendu, que la détermination de la forme de la section transversale ne dépend d'aucune autre considération que celle qui doit conduire au maximum de la vitesse ou du rayon moyen. Il arrive fréquemment que, pour rendre plus facile l'exécution des déblais lors de la construction, ou l'entretien de la cunette quand le canal est en service, on s'impose la condition de ne pas dépasser, pour la profondeur, une dimension déterminée : deux mètres, trois mètres, par exemple.

L'utilité de limiter la profondeur d'un canal est souvent justifiée par celle de diminuer les pertes par infiltration. Toutes choses égales, ces pertes augmentent rapidement avec la profondeur, c'est-à-dire avec la charge d'eau sur les petits orifices capillaires par lesquels elles se produisent. Elles sont d'autant plus réduites que l'on adopte des profils dans lesquels la profondeur est moindre. Alors, pour une section transversale dont l'aire  $\omega$  est donnée, l'inclinaison des talus  $m$  étant déterminée par la nature des terrains, si l'on se limite, pour l'une des raisons qui précèdent, la grandeur maximum de la profondeur  $h$ , il ne reste, dans l'équation :

$$\omega = h \left( l + \frac{h}{m} \right)$$

qu'une seule inconnue,  $l$ , à déterminer.

**116. Influence des herbes aquatiques.** — Lorsque les eaux que doit porter le canal à ouvrir sont chargées de vase et qu'elles peuvent produire des dépôts ou des envasements, et lorsque la nature des talus et du fond permet la croissance d'herbes aquatiques, il est prudent de tenir compte, dès l'ouverture du canal, de la diminution de section transversale qui en sera la conséquence. Les envasements sont destinés à être enlevés périodiquement, mais l'on ne peut le faire avec facilité que lorsqu'ils ont atteint une épaisseur suffisante, vingt centimètres par exemple.

Les herbes aquatiques sont de deux sortes : celles qui tapissent simplement les parois en s'élevant à une faible hauteur et celles qui s'élèvent jusqu'à la surface de l'eau en traversant toute la profondeur du canal. Les premières ne sont à considérer, comme les envasements, qu'au point de vue de la diminution de section transversale, relativement assez faible, qu'elles produisent. On en tient un compte généralement suffisant en leur attribuant une épaisseur de dix centimètres, comme l'a conseillé M. Alfred Picard, dans son ouvrage sur *l'Alimentation du canal de la Marne au Rhin et du canal de l'Est*. Quant aux grandes herbes, leur influence sur l'écoulement peut devenir considérable, tant à cause de la diminution de section qu'elles occasionnent que de l'augmentation du périmètre mouillé qu'il est impossible d'évaluer. D'après les observations de M. Picard, la réduction de débit due à la végétation est d'autant plus forte que la vitesse d'écoulement est moindre, et l'on comprend bien qu'il en soit ainsi, car sous l'action de l'eau animée d'une vitesse un peu grande, les herbes se courbent, se couchent sur le fond et occupent dans la section transversale un espace relatif moindre que lorsque la vitesse est faible.

« Quel que soit donc le soin, dit M. Alfred Picard, que l'on compte apporter à l'entretien des rigoles à talus en terre, il sera toujours prudent d'augmenter un peu le débouché calculé.... Il appartient d'ailleurs aux ingénieurs d'apprécier, dans chaque cas particulier, la mesure de cette augmentation d'après l'étendue du débouché, la vitesse d'écoulement, la nature du terrain, le développement auquel il faut s'attendre pour la végétation, etc. »

Il convient d'ajouter que les coefficients numériques ou les tables servant aux calculs sont établis pour des eaux pures. Lorsque les eaux sont troubles, une partie de la force vive de l'eau est employée à maintenir en suspension les matières solides qu'elle roule, il en résulte une augmentation du frottement intérieur qui se traduit par une augmentation du coefficient  $b$  mesurant ce frottement, ou par

une diminution du coefficient  $C = \frac{1}{\sqrt{b}}$ . L'importance des modifications à apporter à ces coefficients n'a pas été déterminée.

**117. Détermination de la pente d'un canal de dérivation.** — Le problème de l'ouverture d'un canal de dérivation se pose, au point de vue économique, de la manière suivante. Un cours d'eau naturel présente, dans la partie où l'on veut faire la prise d'eau, une pente  $J$ , donnée ; on veut en dériver un volume  $Q$  par seconde et l'amener en un point d'une altitude donnée. Pour assurer l'écoulement, il suffit évidemment que le point où s'effectuera la prise d'eau soit à une altitude supérieure au point d'arrivée ; mais si la différence de niveau est faible, la pente  $I$  du canal à ouvrir sera également faible et le canal devra avoir une grande section transversale. Plus on remontera la prise d'eau le long du cours d'eau naturel, plus on pourra augmenter la pente de la dérivation et plus on pourra réduire la section transversale ; mais aussi plus la longueur du canal à ouvrir sera grande.

Désignons par  $\omega$  l'aire de la section transversale, inconnue, du canal à ouvrir, par  $R$  son rayon moyen, et enfin par  $L$  la longueur comprise entre la prise d'eau et le point d'arrivée. Nous aurons d'abord, entre les quantités  $L, I, J$ , la relation :

$$L(J - I) = \text{une constante} = H$$

cette constante  $H$  pouvant être considérée comme une donnée de la question. C'est en effet la hauteur du point d'arrivée des eaux au-dessus de la ligne de pente  $J$  supposée prolongée suivant le tracé du canal à ouvrir.

La dépense de construction du canal se compose ordinairement de deux parties : l'une, correspondant aux acquisitions de terrains est sensiblement proportionnelle à la largeur à la ligne d'eau ; l'autre, correspondant aux déblais, est plutôt proportionnelle à l'aire  $\omega$  de la section transversale. Toutefois, pour simplifier, nous admettrons que la première partie de la dépense elle-même est proportionnelle à  $\omega$  ; ce sera, dans tous les cas, une approximation. Alors, si l'on représente par  $p$  le prix de l'unité de longueur du canal, par unité d'aire de la section transversale, la dépense à faire  $P$  sera :

$$P = p\omega L = p\omega \frac{H}{J - I}.$$

D'autre part, nous devons supposer que, d'après la nature des

terrains où le canal sera ouvert, on connaît l'inclinaison maximum possible des talus de la cunette et que l'on peut adopter la forme de section transversale la plus économique; on a alors, entre le rayon moyen  $R$  et la section transversale  $\omega$ , la relation suivante (15) qui résulte de celles (13) et (14) ci-dessus ( $n^0$  115), et dans laquelle  $m$  représente l'inclinaison des talus :

$$(15) \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{2\sqrt{1+m^2}-1}},$$

que l'on peut écrire plus simplement :

$$R^2 = n\omega,$$

en représentant par  $n$  le coefficient  $n = \frac{1}{4} \frac{m}{2\sqrt{1+m^2}-1}$ .

Cela posé, prenons l'équation du mouvement uniforme :

$$RI = bU^2,$$

et supposons que le coefficient  $b$  soit constant, ce qui nous donnera une première approximation. Remplaçons-y la vitesse moyenne  $U$  par le quotient  $\frac{Q}{\omega} = \frac{nQ}{R^2}$ , nous la mettrons sous la forme :

$$R^5 I = bn^2 Q^2.$$

Posons, pour abrégé :

$$\rho^5 J = bn^2 Q^2 = R^5 I$$

en appelant  $\rho$  une quantité auxiliaire connue et définie par cette équation. Dans l'expression du prix  $P$  d'établissement du canal, remplaçons  $\omega$ ,  $I$  et  $J$ , par leurs valeurs déduites des équations précédentes, nous obtiendrons :

$$P = \frac{p H \rho^5}{bn^2 Q^2} \frac{R^7}{R^5 - \rho^5}.$$

Et si nous voulons que le prix  $P$  soit minimum, il faudra égaler à zéro la dérivée  $\frac{dP}{dR}$ , ce qui, après suppression du facteur commun  $\frac{pH\rho^5}{bn^2Q^2}$ , donnera :

$$2R^5 = 7\rho^5;$$



ou bien, puisque  $\rho^3 J = R^2 I$  :

$$I = \frac{2}{7} J.$$

La pente la plus économique du canal de dérivation devra donc, dans les hypothèses où nous nous sommes placés, être égale aux deux septièmes de celle du cours d'eau où s'effectue la prise.

On pourrait, en exprimant le coefficient  $b$  en fonction du rayon moyen  $R$ , d'après la formule de M. Bazin, par exemple, obtenir une approximation un peu plus grande, au prix d'une bien plus grande complication des calculs. Cela semble assez inutile, dans l'espèce, étant données les hypothèses déjà assez peu exactes en ce qui concerne l'établissement du prix  $P$ .

Le résultat est un peu différent si, au lieu d'adopter pour la section transversale la forme qui donne le périmètre minimum ou le rayon moyen maximum, on est conduit, par quelque'une des considérations indiquées plus haut (n<sup>o</sup> 115) à limiter la profondeur. Alors cette profondeur  $h$  doit être considérée comme une constante donnée, la section transversale  $\omega$  varie proportionnellement à la largeur moyenne que nous appellerons  $l$ , et le rayon moyen  $R$  est sensiblement constant ; il est une fraction à peu près toujours la même, lorsque la largeur varie même dans des limites assez étendues, de la profondeur  $h$ . Si, dans l'équation  $RI = bU^2$ , nous remplaçons  $U$  par  $\frac{Q}{\omega}$  et  $\omega$  par  $lh$ , nous obtenons :

$$l^2 I = \frac{bQ^2}{Rh^2},$$

et si nous prenons, comme plus haut, une quantité auxiliaire  $\lambda$  définie par l'équation :

$$\lambda^2 J = \frac{bQ^2}{Rh^2} = l^2 I,$$

l'expression du prix d'établissement du canal  $P = p\omega \frac{II}{J-1}$  devient, en y mettant pour  $\omega$ ,  $I$  et  $J$ , leurs valeurs en fonction de  $h$ ,  $l$  et  $\lambda$  :

$$P = \frac{pRh^3\lambda^2}{bQ^2} \cdot \frac{l^2}{l^2 - \lambda^2}.$$

La dérivée  $\frac{dP}{dl}$  égale à zéro donne, après suppression du facteur constant :

$$l^2 = 3\lambda^2,$$

ou bien, puisque  $I = \lambda^2 J$  :

$$I = \frac{1}{3} J.$$

Dans cette nouvelle hypothèse, la pente la plus économique du canal de dérivation devra donc être égale au tiers de celle du cours d'eau alimentaire. Dans la pratique, il arrivera fréquemment que les conditions dans lesquelles on se trouvera seront, en quelque sorte, intermédiaires entre celles que nous avons supposées. Le prix du canal par unité de longueur, par exemple, ne sera pas exactement proportionnel à l'aire de la section transversale, comme nous l'avons admis d'abord, et il ne le sera pas non plus à la largeur moyenne, ainsi que le suppose implicitement la seconde hypothèse ; il s'exprimera par une fonction de la forme  $p\omega + p'l$ . La détermination de la pente la plus économique donnerait lieu alors à la résolution d'une équation de degré supérieur dont la solution, répondant à la question, serait comprise entre les deux limites que nous avons trouvées  $I = \frac{2}{7} J = 0,286J$  et  $I = \frac{1}{3} J = 0,333J$ . On ne se trompera donc pas beaucoup, en général, en adoptant pour la pente du canal de dérivation, une fraction, 0,30 par exemple, intermédiaire entre les deux précédentes, de celle du cours d'eau alimentaire.

Il convient d'ailleurs d'ajouter que la pente du canal de dérivation peut être limitée par d'autres considérations, et en particulier par la nécessité de maintenir à la vitesse moyenne et par suite à la vitesse au fond une valeur assez faible pour ne pas affouiller les parois du lit en égard à la nature des terres dont elles sont formées. Inversement, si les eaux à dériver sont troubles, il faut leur assurer une vitesse suffisante pour que les matières vaseuses en suspension ne se déposent pas. D'après Du Buat, le dépôt n'a pas lieu tant que la vitesse est supérieure à 0<sup>m</sup>,15 par seconde, mais ce chiffre varie un peu avec la nature des vases entraînées. Belgrand n'admettait pas, en général, dans les canaux de dérivation, de vitesse moyenne inférieure à 0<sup>m</sup>,25 et à cette vitesse limite correspondent naturellement des pentes différentes suivant le type du canal que l'on veut ouvrir, ses dimensions transversales, la nature des talus, etc. Par exemple, pour les aqueducs construits pour l'adduction des sources à Paris, la pente ne doit pas être inférieure à 0<sup>m</sup>,10 par kilomètre.

Il peut encore arriver que le cours d'eau alimentaire soit disposé de telle façon que la prise d'eau ne puisse s'y effectuer que dans certaines régions déterminées, ou plutôt qu'elle soit impraticable dans certaines autres. Si, par exemple, ce cours d'eau est bordé

d'une ville riveraine, la prise d'eau ne pourra pas, en général, être pratiquée dans toute l'étendue de la ville et devra être reportée soit à l'amont, soit à l'aval. La règle qui vient d'être donnée :  $I =$  environ  $0,30J$  ne fournit qu'une première indication qui doit être rectifiée en tenant compte de ces diverses considérations.

**118. Emploi des formules et usage des tables.** — Je vais montrer, par quelques exemples numériques, comment on peut employer les formules qui ont été données plus haut en se servant des tables numériques placées à la fin du volume.

1° *Calculer le débit d'un canal de section transversale et de pente données.*

Ce problème, le plus simple de tous, se résout immédiatement de la manière suivante. La section transversale est généralement en forme de trapèze et on en définit la forme en donnant l'inclinaison des talus  $m$ , la largeur au plafond  $l$  et la profondeur d'eau  $h$ . On peut donc calculer immédiatement le rapport  $\frac{l}{h}$ . En cherchant ce rapport dans la première colonne de la table XII, on trouvera, sur la ligne correspondante et dans la colonne applicable à la valeur donnée de  $m$  les deux valeurs  $\frac{\omega}{h^2}$  et  $\frac{R}{h}$  qui feront connaître immédiatement  $\omega$  et  $R$ . Si l'on ne veut pas se servir de cette table on pourra calculer  $\omega$  et  $R$  par leurs expressions :

$$\omega = h \left( l + \frac{h}{m} \right) \quad , \quad R = \frac{h (ml + h)}{ml + 2h \sqrt{1 + m^2}}$$

Ces deux quantités étant ainsi obtenues, on cherchera, soit dans la table IX de M. Bazin, soit dans celle XI de Kutter, soit dans celle X de Robert Manning, la valeur du coefficient  $C$  correspondant à la nature des parois du canal, à sa pente donnée et à son rayon moyen  $R$ . Alors, la vitesse moyenne  $U$  se déduira de la formule  $U = C \sqrt{RI}$  dans laquelle tout est connu, et le débit cherché  $Q$  sera :

$$Q = \omega U = C\omega \sqrt{RI}.$$

*Exemple.* — Calculer le débit d'un canal dont les parois, en terre, sont inclinées à deux de base pour un de hauteur dont la largeur au plafond est de deux mètres, dans lequel la profondeur est de quatre-vingts centimètres et la pente de vingt centimètres par kilomètre.

On a alors :

$$l = 2^m,00, \quad h = 0^m,80, \quad m = \frac{1}{2}, \quad \frac{l}{h} = 2,50, \quad I = 0,0002.$$

La table XII donne, pour  $\frac{l}{h} = 2,50$  et pour  $m = \frac{1}{2}$  :

$$\frac{\omega}{h^2} = 4,50, \quad \frac{R}{h} = 0,65,$$

D'où, en mettant pour  $h$  sa valeur  $0,80$  et pour  $h^2$ ,  $0,80^2 = 0,64$  :

$$\omega = 4,50 \times 0,80^2 = 2,88, \quad R = 0,65 \times 0,80 = 0,52.$$

Pour  $R = 0,52$  et des parois en terre, la table de M. Bazin (table IX) donne  $C = 31$  environ et celle de M. Manning (table X) :  $C = 36$ . Pour les mêmes données et la pente de  $0,0002$ , la table de Kutter (table n° XI) donne  $C = 34$ . On peut prendre, suivant que l'on veut appliquer l'une ou l'autre formule, l'un de ces trois chiffres ; ou bien un chiffre intermédiaire, comme  $C = 33$ .

Alors le débit cherché  $Q$  sera :

$$Q = C\omega \sqrt{RI} = 33 \times 2,88 \times \sqrt{0,52 \times 0,0002} = 0^m,96,$$

soit de 960 litres par seconde. La vitesse moyenne, qu'il peut être intéressant de connaître aussi, sera :

$$U = C \sqrt{RI} = 33 \times \sqrt{0,52 \times 0,0002} = 0^m,33.$$

On peut en déduire approximativement la vitesse maximum à la surface et la vitesse au fond, d'après les indications qui ont été développées plus haut. Le canal en question étant de dimensions restreintes, la vitesse maximum  $v_m$  devrait, d'après M. Bazin, être prise égale à  $U + 14 \sqrt{RI} = 0,33 + 0,14 = 0^m,47$ , ce qui donnerait, pour le rapport  $\frac{v_m}{U}$  le rapport peu vraisemblable :  $\frac{v_m}{U} = 1,45$ . Le

rapport simple admis souvent comme approximation :  $\frac{v_m}{U} = 1,25$ , donnerait  $v_m = 0^m,41$ . Quand à la vitesse  $w$  au fond, elle serait sans doute voisine de  $0,75U$  c'est-à-dire de  $0^m,25$ .

2° *Etant données la section transversale d'un canal et sa pente, calculer la profondeur d'eau correspondant à un débit donné.*

Ce problème est un peu plus compliqué que le précédent et si l'on tient compte, comme on doit le faire, de la variation du coefficient  $b$  ou  $C$  avec le rayon moyen, il ne peut se résoudre que par

tâtonnements ou approximations successives. Pour le mettre en équation, si l'on adopte, par exemple, la forme du coefficient  $b$  proposée par M. Bazin,  $b = 0,0115 \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)$  on aura en mettant pour  $\omega$  et  $R$  leurs valeurs dans la formule

$$\frac{\sqrt{R\bar{I}}}{U} = \frac{\omega \sqrt{R\bar{I}}}{Q} = \sqrt{b},$$

une équation dans laquelle il n'entre qu'une seule inconnue  $h$ , mais qui est de degré supérieur et ne peut être résolue autrement que par approximations successives. Il sera évidemment plus simple de se servir des tables et de conserver les trois inconnues  $h$ ,  $\omega$  et  $R$  dont les deux dernières dépendent de  $h$ . La manière d'opérer se montrera clairement par un exemple numérique.

*Exemple.* — Une rigole d'un mètre de largeur au plafond, avec des talus en terre à trois de base pour deux de hauteur et une pente de 0<sup>m</sup>,15 par kilomètre doit débiter 300 litres par seconde, quelle devra y être la profondeur de l'eau ?

En égard au chiffre peu élevé du débit, on voit tout de suite que la profondeur n'atteindra sans doute pas et en tout cas ne dépassera pas beaucoup un mètre ; le rayon moyen sera donc probablement inférieur à 1<sup>m</sup>. Alors le coefficient  $C$  sera inférieur à 40 et la vitesse moyenne  $U = C \sqrt{R\bar{I}}$  inférieure à 0<sup>m</sup>,30 ; ce chiffre conduirait, pour la section transversale  $\omega$  à la valeur  $\omega = \frac{Q}{U} = \frac{0,300}{0,30} = 1$  mètre carré laquelle est probablement trop faible.

La profondeur  $h = 0^m,80$ , qui correspond au rapport  $\frac{l}{h} = 1,25$  donne, d'après la table XII,  $\omega = 2,75h^2 = 2,75 \times 0,64 = 1^m9,76$  valeur qui sera sans doute trop forte, mais prenons-la néanmoins comme première approximation. La même table donne  $R = 0,56h = 0,56 \times 0,8 = 0,45$ . A ce rayon moyen et aux parois en terre correspond une valeur du coefficient  $C$  qui est, d'après la table de Bazin, voisine de 30 et d'après celle de Kutter, de 32. Prenons la valeur moyenne 31. Alors, la formule  $\frac{Q}{\omega} = C \sqrt{R\bar{I}}$  donnera :

$$\omega = \frac{Q}{C \sqrt{R\bar{I}}} = \frac{0,300}{31 \sqrt{0,45 \times 0,00015}} = 1,17 ;$$

valeur très différente de celle 1,76, admise plus haut. Celle-ci est

donc trop forte et la valeur de  $\omega$  devra être prise intermédiaire entre 1,17 et 1,76, mais bien plus près de la première.

Prenons alors  $\omega = 1^m 9,30$  ce qui correspond à  $h = 0^m,66$  environ, ou  $\frac{l}{h} = 1,50$ . On a alors  $R = 0,59h = 0^m,39$ . La valeur du coefficient  $C$  n'est plus guère que de 30 d'après Kutter et 28,5 d'après Bazin ; soit  $C = 29$ . Alors :

$$\omega = \frac{Q}{C\sqrt{RI}} = \frac{0,300}{29 \sqrt{0,39} \times 0,00015} = 1,30,$$

ce qui vérifie cette seconde hypothèse. La profondeur cherchée sera donc  $0^m,66$ .

3° *Etant donné le débit d'un canal et la vitesse moyenne de l'eau, déterminer les dimensions de la section transversale, ainsi que la pente du canal.*

Ce problème est celui qui se pose lorsqu'il s'agit d'ouvrir un canal pour une destination donnée. La vitesse moyenne est limitée par la condition de ne pas produire d'affouillement, ni de dépôts, et le débit correspond à l'utilisation qui doit être faite des eaux. Il s'agit de calculer les dimensions que l'on donnera au profil transversal. L'inclinaison des talus de la cunette doit être considérée également comme donnée, elle est une conséquence de la nature des terrains dans lesquels doit être ouvert le canal.

Alors, si aucune autre considération ne s'y oppose, on devra adopter, pour le profil, celui qui a le plus petit périmètre ou le plus grand rayon moyen, d'après ce qui a été dit au n° 115. Le débit  $Q$  et la vitesse moyenne  $U$  étant donnés, l'aire  $\omega$  de la section transversale,  $\omega = \frac{Q}{U}$ , sera connue. La profondeur  $h$  se calculera par la formule (14) :

$$h = \sqrt{\frac{m\omega}{2\sqrt{1+m^2}-1}},$$

et la largeur au plafond sera :

$$l = \frac{2h}{m}(\sqrt{1+m^2}-1) = \frac{2mh}{\sqrt{1+m^2}+1}.$$

On déterminera la pente  $I$  par l'équation  $U = C\sqrt{RI}$ , que l'on mettra sous la forme  $I = \frac{bU^2}{R}$  et dans laquelle on fera  $R = \frac{h}{2}$ .

*Exemple.* — Un canal doit porter 800 litres avec une vitesse moyenne de 0<sup>m</sup>,50 par seconde dans des terrains où les talus peuvent être inclinés à 45 degrés. Quelles doivent être sa largeur au plafond, sa profondeur et sa pente ?

Nous avons  $Q = 0,800$ ,  $U = 0,50$ , donc  $\omega = \frac{Q}{U} = 1^{\text{m}^3}$ , 6.

$$h = \sqrt{\frac{1,60}{2\sqrt{2}-1}} = 0^{\text{m}},935; \quad l = 2h(\sqrt{2}-1) = 0^{\text{m}},77.$$

$$R = \frac{h}{2} = 0^{\text{m}},47.$$

La valeur 0,47 de R correspond, dans les parois de nature mixte, en terre très régulières ou revêtues de perrés comme celles que l'on peut prévoir sous des inclinaisons de 45 degrés, à une valeur de  $C = 39$ ; cette valeur donne, d'après la table VIII,  $b = 0,00066$ . Alors

$$I = \frac{0,00066 \times 0,50^3}{0,47} = 0,00035 \text{ soit } 0^{\text{m}}35 \text{ par kilomètre.}$$

La table de Kutter, pour cette valeur de I, donnerait avec des parois rugueuses,  $C = 43$  et avec des parois en terre,  $C = 34$  environ. La formule de M. Rob. Manning donnerait  $C = 36$ . Si l'on adoptait ce dernier chiffre, il en résulterait  $b = 0,00077$ , ce qui correspondrait à  $I = 0,00041$ . On pourra prendre la valeur approximative  $I = 0,0004$  ou 0<sup>m</sup>,40 par kilomètre.

Si, par suite de circonstances spéciales, on ne peut adopter le profil transversal qui donne le plus grand rayon moyen, ces circonstances se traduisent par une relation entre la profondeur et la largeur du canal au plafond. Et cette relation, avec l'équation  $\omega = h \left( l + \frac{h}{m} \right)$  permet de calculer ces deux dimensions, puisque  $\omega$  est supposé connu.

Par exemple, dans le problème numérique précédent, supposons que la largeur au plafond ne puisse, pour des raisons spéciales, descendre au-dessous de 2<sup>m</sup>,00. La valeur  $l = 2^{\text{m}},00$ , jointe à celle  $\omega = 1,60$  donne pour  $h$ , d'après l'équation  $1,60 = h(2 + h)$  la valeur  $h = 0,61$ . Il en résulte  $\frac{l}{h} = 3,3$  et, d'après la table XII,  $R = 0,70$   $h = 0,43$ . La valeur correspondante de C, d'après Bazin, pour des parois de nature mixte, est  $C = 38$  environ ce qui donne  $b = 0,00069$  et par suite  $I = \frac{0,00069 \times 0,50^3}{0,43} = 0,00040$ . La table de

Kutter donnerait, pour des parois en terre,  $C = 32$  ou  $b = 0,00098$ , et par suite  $I = \frac{0,00098 \times \overline{0,50^2}}{0,43} = 0,00057$ , soit près de moitié en plus de la première.

La différence des résultats donnés par les deux tables est ici assez grande. On adoptera l'un ou l'autre, ou la moyenne des deux. Si le chiffre que l'on aura choisi est trop fort, la vitesse moyenne sera un peu supérieure à la donnée 0,50 et la profondeur sera un peu plus faible que celle que l'on a calculée. Le contraire se produira si l'on adopte un chiffre trop faible pour la pente ; mais ces différences montrent avec quelle réserve il faut appliquer les tables et les formules et avec quelle attention il faut en choisir les coefficients.

4<sup>o</sup> *Etant donnés le débit d'un canal et sa pente, trouver les dimensions de son profil transversal et la vitesse moyenne de l'eau.*

Ce problème, comme le précédent, se pose lorsque l'on doit ouvrir un canal de dérivation. Il doit également être considéré à deux points de vue suivant que l'on peut adopter pour le profil transversal la section la plus économique, ou bien que des circonstances spéciales s'y opposent.

Lorsque l'on peut adopter la section à rayon moyen maximum on a la relation :

$$h = 2R = \sqrt{\frac{m\omega}{2\sqrt{1+m^2}-1}}$$

qui, jointe à :

$$RI = b \frac{Q^2}{\omega^2},$$

permet de calculer les deux inconnues  $\omega$  et  $R$ , en adoptant pour le coefficient  $b$  une valeur provisoire que l'on rectifiera dans une nouvelle approximation d'après la valeur trouvée pour  $R$ . On voit que, pour une valeur donnée de  $b$ , l'équation à résoudre sera du cinquième degré en  $\omega$  ou en  $R$  et pourra être résolue par l'extraction d'une racine cinquième, c'est-à-dire par logarithmes.

*Exemple.* — Un canal doit porter dix mètres cubes d'eau par seconde, avec une pente de dix centimètres par kilomètre. Quel doit être son profil transversal dans la terre avec des talus inclinés à deux de base pour un de hauteur ?

$$\text{On a } I = 0,0001, Q = 10, m = \frac{1}{2}.$$



On en déduit :  $\frac{m}{2\sqrt{1+m^2}-1} = 0,405$ , et par suite les équations à résoudre seront, en prenant pour  $b$  la valeur provisoire 0,0004 :

$$4R^2 = 0,405\omega, \quad R \times 0,0001 = 0,0004 \times \frac{10^2}{\omega^2}.$$

soit  $\omega^2 R = 400$  ; ou bien, en éliminant  $\omega$ ,

$$R^3 = \frac{400 \times (0,405)^2}{16} = \frac{(0,405)^2}{25}$$

et par suite  $R = 1^m,32$ .

La valeur  $R = 1^m,32$  pour les parois en terre correspond, d'après la table de Bazin à  $C = 41$ , d'après celles de Kutter et de Rob. Manning, à  $C = 42$ , ce qui donne à  $b = 0,00057$ . Adoptant cette nouvelle valeur les équations à résoudre deviendront :

$$4R^2 = 0,405\omega, \quad R \times 0,0001 = 0,00057 \frac{10^2}{\omega^2},$$

qui donnent  $R^3 = \frac{570 \times (0,405)^2}{16}$ , ou  $R = 1^m,425$ .

La valeur de  $C$  n'est pas sensiblement modifiée par le petit changement de valeur de  $R$ , on peut donc adopter cette dernière valeur comme définitive. Alors, si  $R = 1^m,425$  ;  $h = 2R = 2^m,85$  ;  $\omega = 9,88R^2 = 19,97$ , soit 20 mètres carrés et la vitesse moyenne  $U = \frac{Q}{\omega} = \frac{10}{20} = 0^m,50$ . La largeur au plafond  $l = \frac{2h}{m} (\sqrt{1+m^2} - 1) = 2 \times 2,85 \times (\sqrt{5} - 2) = 1^m,34$ . Le problème se trouve donc entièrement résolu.

Si l'on ne peut adopter le profil le plus économique, on aura, entre la largeur  $l$  et la profondeur, une certaine relation donnée par les circonstances et qui, jointe à celle  $\omega = h \left( l + \frac{h}{m} \right)$  et à celle  $Rl = b \frac{Q^2}{\omega^2}$ , dans laquelle  $R$  sera exprimée en fonction de  $l$  et de  $h$ , permettra de trouver par tâtonnements les trois inconnues  $l$ ,  $h$  et  $\omega$ .

Si, par exemple, pour prendre une circonstance qui peut se rencontrer en pratique, on veut que le canal puisse être facilement nettoyé des corps étrangers qui pourraient y séjourner et que, par suite, la profondeur ne soit pas supérieure à  $1^m,50$ , on prendra

$h = 1.50$  et les équations à résoudre seront, entre les deux inconnues  $l$  et  $\omega$  :

$$\omega = 150 (l + 2 \times 1.50) ; 0,0001 R = b \frac{10^2}{\omega^2}.$$

L'élimination de  $\omega$  donne lieu à une équation du 3<sup>e</sup> degré en  $l$  qui ne peut être facilement résolue, même en mettant pour  $b$  un nombre arbitraire. On opérera donc de la manière suivante :

La profondeur étant de 1 m. 50, le rayon moyen, égal à une fraction de cette profondeur, aura une valeur voisine de 1 m., et alors le coefficient C, d'après les tables, sera voisin de 40, et par suite  $b$ , voisin de 0,000625. Prenons ces valeurs comme première approximation. Avec  $R = 1.00$  et  $b = 0,000625$ , la seconde équation

devient  $\omega^2 = \frac{0,000625 \times 100}{0,0001 \times 1.00} = 625$ , ou  $\omega = 25$ . Alors, la première

équation,  $\omega = 1.50 (l + 3)$ , donne  $l = \frac{25}{1.50} - 3 = 13.67$ . Cette

valeur de  $l$  conduit, avec celle  $h = 1,50$ , à un rayon moyen

$$R = \frac{25}{13.67 + 2 \times 1,50 \sqrt{5}} = 1^m,24.$$

On obtiendra une nouvelle approximation en partant de cette nouvelle valeur de  $R$  qui donnera successivement

$$\omega^2 = \frac{0,00057 \times 100}{0,0001 \times 1.24} = 457 \text{ ou } \omega = 21,4 ; \text{ puis } l = \frac{21.4}{1.50} - 3 = 11^m,30,$$

$$\text{et par suite } R = \frac{21.4}{11.30 + 2 \times 1.50 \times \sqrt{5}} = 1^m,19.$$

En opérant de la même manière, l'approximation suivante

$$\text{fournira : } \omega^2 = \frac{0,00057 \times 100}{0,0001 \times 1.19} = 477 \text{ ou } \omega = 21.8 ; \text{ puis,}$$

$$l = \frac{21.8}{1.50} - 3 = 11^m,53 \text{ et } R = \frac{21.8}{11.53 + 2 \times 1.50 \sqrt{5}} = 1^m,19 ; \text{ valeur}$$

égale à la précédente, à moins d'un centimètre près. On adoptera ainsi pour largeur au plafond :  $l = 11^m,53$ , ce qui donnera  $\omega = 21^m,8$  et par suite la vitesse moyenne

$$U = \frac{Q}{\omega} = \frac{10}{21,8} = 0^m46.$$

En comparant cette section transversale à celle qui a le plus grand rayon moyen, et que nous avons trouvée plus haut égale à 20 mètres carrés, on voit que l'augmentation est de près d'un dixième. Si l'on

considère que le profil à ouvrir doit comporter une certaine revanche au-dessus du plan d'eau, on verra que la différence est en réalité bien plus grande entre les surfaces totales des deux profils, car la largeur à la ligne d'eau du profil le plus économique est notablement inférieure à celle de l'autre.

Si, au lieu de se limiter la profondeur  $h$ , on avait imposé une limite à la largeur au plafond, cette condition aurait eu pour effet de déterminer la forme du profil transversal, et le problème aurait consisté à trouver la profondeur d'eau nécessaire pour débiter le volume donné, problème qui a été résolu plus haut.

Je me bornerai à ces quatre problèmes, non pas qu'ils présentent tous les cas que l'on peut rencontrer dans la pratique, mais ils suffiront pour montrer comment on peut résoudre les questions auxquelles donne lieu l'établissement des canaux découverts. Les lecteurs trouveront facilement, dans chaque cas particulier, la meilleure manière de conduire les calculs, en s'inspirant des exemples qui précèdent.

**119. Vidange d'un réservoir par un canal de grande longueur.** — Ce problème peut se poser, par exemple, dans les études de dessèchement des marais ; on peut se demander en combien de temps un canal, que nous supposons de section et de pente constante, effectuera l'écoulement des eaux contenues dans un réservoir, lac, étang ou marais dont l'abaissement du niveau a pour conséquence la diminution de profondeur dans le canal d'évacuation. Pour simplifier la mise en équation, je supposerai, comme l'a fait M. Crépin, à qui j'emprunte cette analyse (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1881, 1<sup>er</sup> semestre, page 137), que le réservoir à vider est remplacé par un réservoir fictif ayant même section transversale que le canal à l'aval et une longueur obtenue par le quotient du volume des eaux qu'il contient par cette même section transversale. Alors le problème revient à étudier comment se vide un canal d'une longueur totale donnée, et d'une section uniforme, en admettant que pendant l'opération, ce canal ne reçoive aucun apport.

J'admettrai également que le mouvement est constamment uniforme à un instant donné sur toute la longueur, c'est-à-dire que les portions d'amont et d'aval où le mouvement de l'eau peut différer du mouvement uniforme sont assez courtes par rapport à la longueur totale pour que l'on puisse en faire abstraction. Dès lors, la profondeur de l'eau,  $h$  sera la même, au même instant, dans toute l'étendue du canal.

Ceci posé, soient, comme plus haut :

$l$ , la largeur au plafond du canal (la section transversale étant supposée en forme de trapèze),

$m$ , l'inclinaison des talus, ou la tangente de l'angle formé par le plan du talus avec l'horizontale,

$\omega$ , la section transversale,  $\omega = h \left( l + \frac{h}{m} \right)$ ,

$Q$ , le débit variable, ainsi que la profondeur  $h$ , avec le temps  $t$ .

Si, en outre, on désigne par  $a$  la hauteur du plafond du canal au-dessus du point de rencontre des talus prolongés,  $a = lm$ , la largeur du canal au niveau de l'eau sera exprimé par  $l$ .  $\frac{a + h}{a} = \frac{a + h}{m}$ .

Le mouvement étant uniforme, la vitesse moyenne, à un instant donné où la profondeur est  $h$  se déterminera par l'équation :

$$RI = bU^2$$

dans laquelle on mettra pour  $R$  la valeur

$$R = \frac{h \left( l + \frac{h}{m} \right)}{l + \frac{2h}{m} \sqrt{1 + m^2}}$$

et pour  $b$  une des valeurs données précédemment, par exemple celle de M. Bazin :

$$\sqrt{b} = 0,0115 \left( 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}} \right)$$

La vitesse  $U$  étant ainsi exprimée en fonction de  $h$ , seule quantité variable restant dans la formule, le débit  $Q$  s'obtiendra de même en multipliant  $U$  par l'aire  $\omega$  de la section transversale :  $Q = \omega U$ . On obtiendra donc, en définitive :

$$Q = f(h),$$

la fonction  $f(h)$  étant, comme on peut voir, assez compliquée.

Cela posé, l'eau s'écoulant pendant un temps  $dt$ , le niveau du canal baissera d'une hauteur  $dh$ , et si  $L$  représente la longueur totale du canal (y compris le canal fictif tenant compte du réservoir) on pourra écrire :

$$Q dt = f(h) dt = -L \frac{a + h}{m} dh$$

ou bien

$$dt = -\frac{L}{m} \cdot \frac{a+h}{f(h)} dh.$$

ou encore, en intégrant entre le moment où le niveau était à une hauteur  $h_0$  et celui où le niveau est à une hauteur  $h_1$  :

$$t_{h_0}^{h_1} = -\frac{L}{m} \int_{h_0}^{h_1} \frac{a+h}{f(h)} dh$$

En égard à la forme compliquée de la fonction  $f(h)$  l'intégration sera le plus souvent impossible ou donnera lieu à des difficultés presque insurmontables. On peut cependant résoudre le problème par une construction graphique, de la manière suivante.

La fonction  $f(h)$  peut toujours être exprimée par le produit de  $(a+h)$  par une quantité  $y$ , évidemment fonction de  $h$ , mais que nous considérerons d'abord comme constante, c'est-à-dire que nous admettrons qu'ayant écrit :

$$Q = f(h) = y(a+h)$$

nous puissions regarder, provisoirement au moins,  $y$  comme une

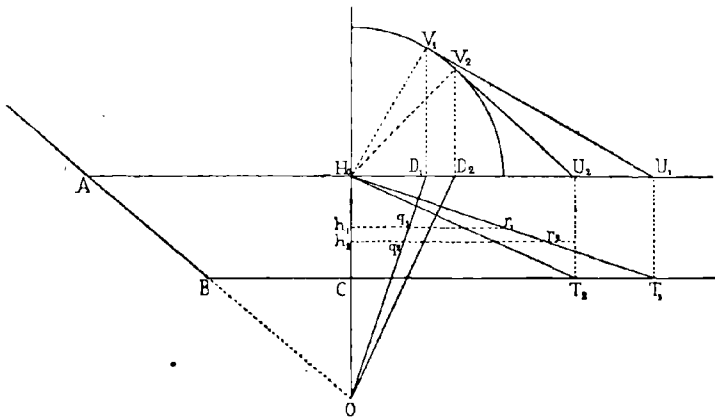


Fig. 62

constante. Alors l'intégration s'effectue facilement et nous obtenons :

$$t_{h_0}^{h_1} = \frac{L}{my} (h_0 - h_1).$$

Si ABC (fig. 62) représente la moitié de la section transversale du canal supposé rempli d'abord jusqu'au niveau  $AH_0$  à une pro-

fondeur  $CH_0 = h_0$ , la quantité  $A$  sera représentée par  $OC$  et si, par le point  $O$  nous menons une droite quelconque  $OD_1$ , elle pourra, à une échelle déterminée représenter la loi de variation du débit en fonction de la hauteur, pour une valeur déterminée de  $y$ ; ce débit, pour une profondeur  $Ch_1$  étant exprimé par l'ordonnée  $h_1q_1$ . Pour la même valeur de  $y$ , la durée de l'écoulement nécessaire pour faire baisser la profondeur de  $h_0$  à  $h_1$  sera représentée par l'ordonnée  $h_1r_1$  d'une autre droite telle que  $H_0T_1$ . Ces deux droites peuvent être appelées conjuguées, et nous allons voir comment on peut passer de l'une à l'autre.

Soit  $Q_0$  le débit correspondant à la profondeur initiale  $h_0$  :

$$Q_0 = y (a + h_0) ;$$

le temps nécessaire à la vidange complète, jusqu'à  $h_1 = 0$  sera

$$t^0 = \frac{L}{my} h_0$$

et, en éliminant  $y$  entre ces deux équations, on obtient

$$Q_0 t^0 = \frac{L}{m} h_0 (a + h_0)$$

ce qui montre que le produit du débit initial par la durée totale de l'écoulement est constant. Sur la figure, le produit de  $H_0D_1$ , débit initial  $Q_0$ , par  $CT_1$ , durée de l'écoulement, doit par conséquent avoir une valeur constante. Si donc on construit un triangle rectangle  $H_0V_1U_1$  dont l'hypoténuse,  $H_0U_1$  soit égale à  $CT_1$  et dont le sommet de l'angle droit  $V_1$  soit sur la verticale du point  $D_1$ , le côté  $H_0V_1$  de ce triangle sera constant, c'est-à-dire que, pour trouver la droite  $H_0T_2$  conjuguée à une autre droite  $OD_2$  il suffira de décrire du point  $H_0$  comme centre, avec  $H_0V_1$  pour rayon, un arc de cercle qui coupe en  $V_2$  la verticale du point  $D_2$  et d'élever en  $V_2$  une droite  $V_2U_2$  perpendiculaire à  $H_0V_2$ . En prenant ensuite  $CT_2 = H_0U_2$ , la ligne  $H_0T_2$  sera conjuguée à  $OD_2$  et ainsi de suite.

Si la loi des débits représentée par  $y = \text{constante}$  n'est vraie que pendant un temps très court correspondant à un abaissement  $h_1h_2$ , et si elle est représentée alors par la petite droite  $q_1q_2$ , dirigée vers le point  $O$ , la loi des abaissements, pendant ce temps très court sera représentée par la petite droite  $r_1r_2$ , dirigée vers le point  $H_0$ .

Bien que la loi des débits en fonction des profondeurs, exprimée par  $Q = f(h)$  soit souvent fort compliquée, on pourra généralement au moyen de cette formule, calculer les valeurs de  $Q$  pour diverses

valeurs données de  $h$ . On pourra donc tracer, avec une approximation aussi grande qu'on le voudra, la courbe des débits en fonction des profondeurs qui sera par exemple CN (fig. 63). Si l'on divise la hauteur  $h_0$  en un grand nombre de parties égales par des lignes parallèles, on pourra, approximativement remplacer la courbe CN par des échelons successifs formés de petites lignes droites convergeant au point O et à chacune desquelles comprendra une droite conjuguée, que l'on pourra construire et qui convergera au point  $H_0$ . En substituant à ces diverses lignes une courbe continue, on obtiendra la loi, au moins approchée, des abaissements en fonction de la hauteur, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que le niveau s'abaisse jusqu'à une hauteur déterminée et même jusqu'à zéro.

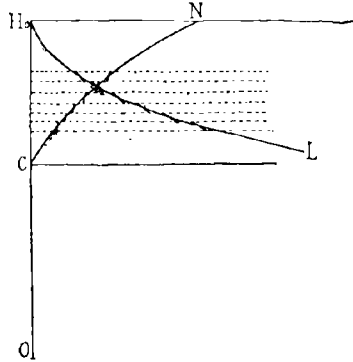


Fig. 63.

On trouvera alors que, pour obtenir la vidange complète, il faudra un temps infini. Ce résultat analogue à celui que nous avons trouvé plus haut pour le cas d'un déversoir, n'a rien d'imprévu et se justifie théoriquement. La vitesse qui décroît avec le rayon moyen atteint la valeur zéro en même temps que la profondeur et à cette valeur nulle correspond un temps croissant indéfiniment. Dans la pratique la vitesse s'annule avant la profondeur. Les inégalités du fond, dont l'influence est à peu près négligeable lorsque la hauteur d'eau est assez grande, prennent de plus en plus une importance prépondérante à mesure qu'elle diminue. Elles augmentent dans une proportion considérable l'étendue du périmètre mouillé et arrêtent l'écoulement alors qu'il reste encore dans le canal une couche d'eau d'une épaisseur appréciable.

§ 4.

MOUVEMENT VARIÉ

**120. Équation générale approximative.** — Nous avons établi plus haut l'équation générale du mouvement permanent varié d'un courant liquide (page 43, équation 17) :

$$\sin I - \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0}{ds} = \frac{\Sigma}{\omega} \varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right);$$

et nous avons vu que pour appliquer cette équation à un canal découvert, l'on pouvait prendre pour axe des  $s$  la ligne tracée sur la surface libre dans le sens du courant et perpendiculairement à la section transversale, ce qui rend  $p_0$  constant, égal à la pression atmosphérique, et annule la dérivée  $\frac{dp_0}{ds}$ . La formule applicable aux canaux découverts est ainsi :

$$\sin I = \frac{\alpha}{\omega} \varphi(U) + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right).$$

On n'a que des données assez incertaines sur ce que peuvent être les valeurs de la fonction  $\varphi(U)$  et du coefficient  $\alpha'$ . Dans un mémoire étendu, inséré aux *Annales des ponts et chaussées* (1887, 1<sup>er</sup> semestre, page 148), de St-Venant a montré que l'on pouvait prendre, pour  $\varphi(U)$ , la même expression  $bU^2$  que dans le mouvement uniforme, à la condition d'augmenter un peu le coefficient  $\alpha'$ . Avec cette augmentation, les valeurs de ce coefficient semblent devoir rester comprises entre 1,085 et 1,138, le premier nombre s'appliquant aux sections rectangulaires très larges et le second aux sections demi-circulaires. On peut donc toujours, pour des sections d'une forme quelconque, comprises entre ces deux extrêmes, adopter pour  $\alpha'$  la valeur moyenne 1,111 ou  $\frac{10}{9}$ . Nous supprimerons donc l'accent de ce coefficient et nous le désignerons par la même lettre  $\alpha$  qui nous a déjà servi précédemment à représenter ce même nombre  $\frac{10}{9}$  que l'on retrouve avec des origines diverses dans un grand nombre de questions. Nous prendrons aussi, pour la fonction  $\varphi(U)$ , la forme  $bU^2$  avec le même coefficient  $b$  que celui du mouvement uniforme et remarquant que la pente  $I$  du cours d'eau peut se confondre avec son sinus, nous écrirons définitivement l'équation du mouvement varié :

$$(16) \quad I = \frac{\alpha}{\omega} bU^2 + \alpha \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right).$$

Dans cette équation,  $I$  représente l'inclinaison, sous l'horizon, des trajectoires superficielles.

Il peut être plus commode d'y faire figurer la pente de fond  $i$  et la variation de la profondeur. Pour cela, prenons une longueur infiniment petite du cours d'eau entre les sections AC et BD (fig. 64). Si par le point C nous menons CE parallèle à la ligne de fond AB



et faisant par suite avec l'horizontale CF l'angle ECF =  $i$ , l'angle DCF étant égal à  $I$  et DE, accroissement de la profondeur, étant représenté par  $dh$ , nous aurons, en appelant  $ds$  la distance AB :

$$I ds = i ds - dh$$

ou bien

$$(17) \quad I = i - \frac{dh}{ds},$$

Cette valeur, portée dans l'équation (16) en élimine la pente superficielle  $I$ .

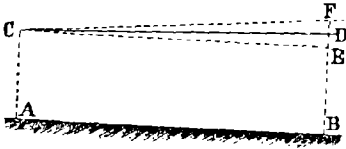


Fig. 64.

On peut aussi mettre en évidence la dénivellation superficielle  $FD$  que nous représenterons par  $dz$ , et qui est égale à  $I ds$ . En multipliant tous les termes de l'équation (16) par  $ds$  après avoir

effectué la différentiation indiquée au dernier terme, et en mettant, dans le premier membre,  $dz$  au lieu de  $I ds$ , on obtient

$$(18) \quad dz = \frac{\chi}{\omega} b U^2 ds + \alpha \frac{U dU}{g}.$$

Lorsqu'il s'agit d'un canal rectangulaire très large, dont les dimensions transversales sont suffisantes pour que l'on puisse, sans erreur sensible, substituer au rayon moyen  $\frac{\omega}{\chi}$  la profondeur  $h$ , les équations (16) et (18) peuvent s'écrire, en tenant compte de (17) :

$$(19) \quad I = i - \frac{dh}{ds} = \frac{bU^2}{h} + \alpha \frac{d}{ds} \frac{U^2}{2g}.$$

et

$$(20) \quad dz = i ds - dh = \frac{bU^2}{h} ds + \alpha \frac{U dU}{g}.$$

**121. Equation générale du mouvement varié en tenant compte de la courbure des filets liquides.** —

L'équation générale (16) qui vient d'être établie, ainsi que celles (18), (19) et (20) qui la présentent sous des formes différentes, suppose implicitement que l'inclinaison mutuelle des divers filets liquides est petite, et aussi que cette inclinaison ne varie notablement que sur de grandes longueurs, ou que la courbure des filets

est insensible, il est intéressant de voir comment elle doit se compléter pour tenir compte de cet élément.

Avec M. Boussinesq, à qui j'emprunte ce qui suit, mais dont j'ai simplifié l'exposé en sacrifiant un peu de la rigueur des raisonnements, je me propose d'établir l'équation générale du mouvement de l'eau dans un canal découvert dont le profil longitudinal du fond est une ligne contenue dans un plan vertical, mais d'une pente  $i$  assez lentement variable d'un point à l'autre et dont les sections normales sont des rectangles ayant leur base, horizontale et constante, très grande par rapport à la profondeur  $h$  du liquide.

Je mesurerai les distances  $s$  sur le profil longitudinal du fond, supposé connu, et après avoir mené à ce profil, au point d'abscisse quelconque  $s$ , sa tangente dans le sens de l'écoulement et sa normale vers le haut, je prendrai ces deux droites pour axes des  $x$  et des  $z$ . Par raison de symétrie, tous les mouvements se font parallèlement au plan des  $zx$ , c'est-à-dire que, partout, la composante de la vitesse désignée plus haut par  $v$  sera nulle, ainsi que toutes les dérivées par rapport à  $y$ . D'autre part, le mouvement étant permanent, toutes les dérivées par rapport au temps sont nulles. Dans ces conditions, les équations générales établies à la note du n° 25, page 40, dans lesquelles nous mettrons pour les accélérations  $u'$  et  $w'$  leurs valeurs données au n° 18, page 26, et pour  $\varepsilon$  la valeur  $\rho g A h u_0$  indiquée au n° 29, page 47, deviendront, en remarquant que  $X = g \sin i$ , et  $Z = -g \cos i$  :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} A h u_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + \sin i - \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dx} = -\frac{u^2}{g} \frac{d \frac{w}{u}}{dx} \\ \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dz} = -\cos i - \frac{u^2}{g} \frac{d \frac{w}{u}}{dx} \end{array} \right.$$

L'axe des  $x$  étant tangent à la courbe suivant laquelle nous mesurons les distances  $s$ , nous pouvons, avec une approximation suffisante, remplacer  $dx$  par  $ds$ , c'est-à-dire mettre les dérivées par rapport à  $s$  à la place de celles prises par rapport à  $x$ . Mais il s'agit d'exprimer les dérivées du rapport  $\frac{w}{u}$  qui représente l'inclinaison, sur l'axe des  $x$ , des filets liquides aux divers points d'une section.

Pour cela, désignons par  $\lambda$  l'inclinaison de ces filets sur le fond.

Dans la section dont l'abscisse est  $s$  ou  $x = 0$ ,  $\lambda$  sera égal à  $\frac{w}{u}$ ; mais

dans la section suivante, distante de  $ds$ ,  $\lambda$  aura augmenté de  $\frac{d\lambda}{ds} ds$  et la tangente au profil, par rapport à laquelle on mesure cette inclinaison, aura varié d'un angle  $\frac{di}{d\xi} ds$ ; on aura donc, pour cette section d'abscisse  $(s + ds)$ ,

$$\frac{w}{u} = \lambda + \frac{d\lambda}{ds} ds - \frac{di}{d\xi} ds.$$

D'où il résulte

$$(22) \quad \frac{d \frac{w}{u}}{ds} = \frac{d\lambda}{d\xi} - \frac{di}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{d \frac{w}{u}}{d\xi} = \frac{d\lambda}{d\xi}.$$

Prenons maintenant l'équation de continuité réduite, puisque  $v = 0$ , à

$$\frac{du}{dx} + \frac{dw}{d\xi} = 0,$$

et remplaçons-y  $w$  par  $\lambda u$ . Nous pourrons, approximativement, mettre à la place de la vitesse individuelle  $u$  de chaque filet, la vitesse moyenne  $U$  et écrire, en remplaçant d'ailleurs  $dx$  par  $ds$  :

$$\frac{dU}{ds} + \frac{d(\lambda U)}{d\xi} = 0;$$

ou bien, en remarquant que  $\lambda = 0$  pour  $x = 0$  et intégrant par rapport à  $x$  à partir de cette limite :

$$\lambda U = - \int_0^x \frac{dU}{ds} ds = - \xi \frac{dU}{ds};$$

Mais, le mouvement étant permanent, le débit  $Uh$  est constant ce qui donne  $\frac{dU}{U} = - \frac{dh}{h}$  ou bien

$$\lambda = \frac{\xi dh}{h ds}.$$

Il en résulte ;

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{1}{h} \frac{dh}{ds}$$

et

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{\xi}{h} \frac{d^2 h}{ds^2} - \frac{\xi}{h^2} \left( \frac{dh}{ds} \right)^2$$

Or, nous admettons que les variations de profondeur sont assez progressives et lentes pour que le carré de  $\frac{dh}{ds}$  soit négligeable, alors, il reste simplement

$$\frac{dh}{ds} = \frac{x}{h} \frac{d^2h}{ds^2}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations (22) et les valeurs qui en résultent pour les dérivées de  $\frac{w}{u}$  dans les équations (21), celles-ci deviennent :

$$(23) \quad \begin{cases} Ahu_0 \frac{d^2u}{dz^2} + \sin i - \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{ds} = -\frac{u^2}{gh} \frac{dh}{ds} \\ \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dz} = -\cos i - \frac{u^2}{g} \left( \frac{x}{h} \frac{d^2h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) \end{cases}$$

A ces équations indéfinies, il faut joindre celles qui expriment les conditions spéciales à la surface libre et au fond. A la surface, nous aurons

$$(24) \quad p = \text{constante}, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad (\text{pour } z = h);$$

et au fond, par analogie avec ce que nous avons trouvé au n<sup>o</sup> 31, nous écrirons :

$$(25) \quad Ah \frac{du}{dz} = Bu_0 \quad (\text{pour } z = 0).$$

Pour tirer quelque chose de ces équations, nous commencerons par éliminer la pression  $p$  entre les deux premières. A cet effet, nous multiplierons la seconde (23) par  $dz$  et nous l'intégrerons depuis une profondeur  $z$  quelconque jusqu'à la surface libre où  $z = h$  et où  $p$  a une valeur constante égale à la pression atmosphérique; nous obtiendrons ainsi

$$(26) \quad \frac{p}{\rho g} = C^{10} + (h - z) \cos i + \frac{1}{g} \int_z^h u^2 \left( \frac{x}{h} \frac{d^2h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) dz.$$

En vue de simplifier l'écriture, désignons par  $\mu$  le dernier terme, et remarquons que ce terme, qui ne dépend que de la courbure des filets liquides est petit par rapport aux autres. Nous ne commettons donc pas une grande erreur en y supposant la vitesse  $u$  égale, en tous les points de la section, à la vitesse moyenne  $U$  qui, se

trouvant indépendante de  $z$ , sortira alors du signe d'intégration. Nous aurons ainsi

$$\mu = \frac{1}{g} \int_z^h u^2 \left( \frac{z}{h} \frac{d^2 h}{ds^2} - \frac{di}{ds} \right) dz = \frac{U^2}{g} \int_z^h \left( \frac{d^2 h}{ds^2} \frac{z}{h} dz - \frac{di}{ds} dz \right)$$

ou, en effectuant le calcul

$$\mu = \frac{U^2}{g} \left[ \frac{d^2 h}{ds^2} \cdot \frac{h^2 - z^2}{2h} - \frac{di}{ds} (h - z) \right].$$

Remarquons ainsi que la pente  $i$  est généralement assez petite pour que l'on puisse, sans erreur sensible, remplacer  $\sin i$  par  $i$  et  $\cos i$  par l'unité. L'équation (26) s'écrit alors :

$$\frac{P}{\rho g} = C^{10} + (h - z) + \mu.$$

En la différentiant par rapport à  $s$  et en portant la valeur obtenue dans la première (23), où l'on remplace  $\sin i$  par  $i$ , celle-ci devient :

$$Ahu_0 \frac{d^2 u}{dz^2} + i - \frac{dh}{ds} = -\frac{u^2}{gh} \frac{dh}{ds} + \frac{d\mu}{ds}.$$

Multiplions-en tous les termes par  $dz$  et intégrons sur toute la hauteur d'une section verticale, entre les limites  $z = 0$  et  $z = h$ , nous aurons :

$$(27) \quad \left( Ahu_0 \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_0^h + hi - h \frac{dh}{ds} = -\frac{1}{g} \frac{dh}{ds} \int_0^h u^2 \frac{dz}{h} + \int_0^h \frac{d\mu}{ds} dz$$

D'après les équations (24) et (25) la valeur du premier terme est  $Bu_0^2$ . La première intégrale du second membre, d'après la définition du coefficient que nous avons appelé  $\eta$  au n° 24, page 37, vaut  $(1 + \eta) U^2$ ; et quant à la dernière, elle est facile à calculer.

D'après l'expression trouvée pour  $\mu$ , nous avons d'abord :

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{U^2}{g} \left[ \frac{d^3 h}{ds^3} \cdot \frac{h^2 - z^2}{2h} - \frac{d^2 i}{ds^2} (h - z) \right]$$

en négligeant la dérivée de  $U$  par rapport à  $s$  ou plutôt les produits de cette dérivée par les quantités très petites qui figurent dans la parenthèse. Nous en déduisons facilement.

$$\int_0^h \frac{d\mu}{ds} dz = \frac{h^2 U^2}{g} \left[ \frac{1}{3} \frac{d^3 h}{ds^3} - \frac{1}{2} \frac{d^2 i}{ds^2} \right].$$

Et alors l'équation précédente (27) devient :

$$Bu_0^2 + hi - h \frac{dh}{ds} = -(1 + \tau) \frac{U^2}{g} \cdot \frac{dh}{ds} + \frac{h^2 U^2}{g} \left[ \frac{1}{3} \frac{d^3 h}{ds^3} - \frac{1}{2} \frac{d^2 i}{ds^2} \right].$$

Ainsi que nous l'avons fait plus haut, nous pouvons, approximativement, substituer au terme  $Bu_0^2$  dans lequel figure le carré de la vitesse au fond,  $u_0$ , une expression de la forme  $bU^2$  où n'entre que la vitesse moyenne  $U$ . Cette substitution sera d'autant plus légitime que nous adopterons un coefficient correctif destiné à remplacer celui qui affecte le premier terme du second membre. Ce coefficient de correction, que nous appellerons  $\alpha'$  étant substitué à  $(1 + \tau)$  l'équation définitive s'écrira :

$$(28) \quad hi - bU^2 = \left( h - \frac{\alpha'}{g} U^2 \right) \frac{dh}{ds} + \frac{U^2 h^2}{g} \left( \frac{1}{3} \frac{d^3 h}{ds^3} - \frac{1}{2} \frac{d^2 i}{ds^2} \right).$$

Cette équation, qui porte le n° 156, page 192, de *l'Essai sur la théorie des Eaux courantes*, ne contiendra d'autre inconnue que la profondeur  $h$  et ses dérivées première et troisième par rapport à  $s$ , si on en élimine  $U$  au moyen de la formule

$$(29) \quad q = Uh$$

où  $q$  représente le débit comtant par unité de largeur du canal.

Cette dernière formule donne rigoureusement

$$(30) \quad Udh + h dU = 0;$$

d'où

$$\frac{dh}{ds} = - \frac{h}{U} \cdot \frac{dU}{ds} = - \frac{h}{U^2} \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2} \right)$$

et, en négligeant les carrés et les produits des dérivées de  $h$  et de  $U$ , on trouve de même, approximativement :

$$\frac{d^3 h}{ds^3} = - \frac{h}{U^2} \frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{U^2}{2} \right).$$

On peut substituer ces valeurs dans l'équation (28) et d'autre part on peut y faire figurer la pente superficielle  $I$ , liée à la pente de fond par la relation (17). Après ces substitutions, l'équation (28) devient :

$$(31) \quad I = \frac{bU^2}{h} + \alpha' \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right) - h^2 \left[ \frac{1}{3} \frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{1}{2} \frac{U^2}{gh} \frac{d^2 i}{ds^2} \right].$$

Enfin, on peut éliminer de cette dernière la dérivée seconde de  $i$  au moyen de l'équation (17) qui donne :

$$\frac{d^2i}{ds^2} = \frac{d^2h}{ds^2} + \frac{d^2I}{ds^2}$$

on trouve alors en mettant pour la dérivée troisième de  $h$  sa valeur approximative qui vient d'être écrite :

$$(32) \quad I + h \frac{U^2}{2g} \frac{d^2I}{ds^2} = \frac{\delta I^2}{h} + \kappa \frac{d}{ds} \left( \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{h^2}{6} \frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{U^2}{2g} \right).$$

Partout où les variations de la courbure du profil superficiel sont lentes et graduelles, le second terme, qui contient  $\frac{d^2I}{ds^2}$ , est négligeable par rapport aux autres et alors cette équation, dont le premier membre ne contient plus que la pente de surface  $I$  permet de calculer cette inconnue successivement en fonction de la profondeur de la vitesse moyenne et des dérivées première et troisième par rapport à  $s$  du carré de cette vitesse moyenne.

Sous la forme (31) l'équation générale du mouvement permanent se réduit à celle qui est démontrée plus haut sous le n° 19, lorsque l'on néglige la dernière parenthèse qui contient les termes exprimant l'influence de la courbure des filets liquides.

La discussion, sans en être difficile, exige cependant des calculs assez laborieux que je ne puis donner ici. Elle est d'ailleurs extrêmement intéressante et je ne puis que renvoyer le lecteur aux §§ XX à XXV de l'Essai sur la théorie des eaux courantes, où il la trouvera en détail. Il y verra comment, aux points où, dans les torrents peu rapides, un obstacle détruit le régime uniforme, ce n'est pas une simple surélévation de la surface qui se produit, mais une série d'ondulations disposées en gradins ; il y trouvera aussi calculée l'influence que les ondulations du fond exercent sur la surface, et comment, suivant les valeurs variables de la pente générale, les ondulations superficielles diffèrent ou se rapprochent plus ou moins de celles du fond.

Ces conclusions sont d'ailleurs en remarquable concordance avec tous les faits observés.

**122. Équation simplifiée pour un canal rectangulaire très-large.** — Reprenons l'équation générale sous sa

forme (20) applicable à un canal rectangulaire très large ; nous pouvons, au moyen des deux équations (29) et (30) en éliminer  $U$  et  $dU$ , ce qui lui donnera la forme :

$$ids - dh = -\frac{\alpha q^2 dh}{g h^3} + b \frac{q^2}{h} ds.$$

Appelons, avec Dupuit, à qui nous empruntons en grande partie cette analyse,  $H$  la profondeur qui correspondrait au régime uniforme, c'est-à-dire une profondeur déterminée par cette condition que le produit  $Hi$  de cette profondeur par la pente  $i$  soit égal au produit de  $b$  par le carré de la vitesse moyenne, laquelle serait alors  $\frac{H}{q}$ , nous aurons, pour déterminer cette profondeur  $H$ , l'équation :

$$(33) \quad Hi = b \frac{q^2}{H^2} \quad \text{ou} \quad H^3 = \frac{bq^2}{i}.$$

Nous pouvons alors remplacer, dans l'équation précédente,  $q^2$  par sa valeur en fonction cette quantité nouvelle  $H$ , et l'écrire :

$$(34) \quad ids - dh = -\frac{\alpha i H^3}{bg h^3} dh + i \frac{H^3}{h^3} ds.$$

### 123. Division des cours d'eau en deux catégories.

— Nous diviserons la discussion de cette équation en deux parties, correspondant aux valeurs du coefficient  $\frac{\alpha i}{bg}$  et suivant que ce coefficient sera plus petit ou plus grand que l'unité.

En mettant pour  $b$  les valeurs qui conviennent à diverses natures de parois et à diverses grandeurs du rayon moyen  $R$ , on peut dresser le tableau ci-dessous les valeurs de la pente du fond  $i$  pour lesquelles ce coefficient est égal à l'unité.

On voit que les pentes limites, ainsi déterminées, augmentent avec la rugosité des parois et diminuent, au contraire, à mesure que le rayon moyen, c'est-à-dire la profondeur de la section, augmente.

Nous appellerons cours d'eau à faible pente ceux pour lesquels la pente sera inférieure au chiffre de ce tableau, les autres étant des cours d'eau à forte pente.

Nous avons vu plus haut (n° 71) que le ressaut superficiel ne pouvait s'observer que dans les cours d'eau dans lesquels la quan-



tité  $\frac{\alpha U^2}{g \cos i} \frac{l}{\omega}$  est supérieure à l'unité, et que nous avons appelés cours d'eau torrentueux ou torrents. Si l'on remarque que  $\cos i$  est sensiblement égal à l'unité, que dans un canal rectangulaire  $\frac{\omega}{l}$  est égal à la profondeur  $h$  et que le carré de la vitesse moyenne  $U^2$  est égal, dans le mouvement uniforme, à  $\frac{hi}{b}$ , on constate que cette quantité  $\frac{\alpha U^2}{g \cos i} \frac{l}{\omega}$  est précisément égale à  $\frac{\alpha i}{bg}$ . C'est pourquoi l'on appelle souvent *torrents* les cours d'eau à forte pente et *rivières* ceux à faible pente. Mais ces dénominations supposent que la vitesse moyenne  $U$  est liée à la pente  $i$  par la relation du régime uniforme  $hi = bU^2$ , ce qui est souvent inexact. En réalité, comme nous le verrons, il peut se trouver et il se trouve souvent, dans les cours d'eau à faible pente, des ressauts superficiels. Il suffit pour cela que la condition générale de la production de ce phénomène soit satisfaite, c'est-à-dire que la vitesse moyenne soit assez grande pour que  $\frac{\alpha U^2}{g \cos i} \frac{l}{\omega}$  soit supérieure à l'unité, ou plus simplement que  $\alpha U^2$  soit plus grand que  $gh$ . Cela arrive, quelle que soit la pente, lorsque la vitesse moyenne est grande et la profondeur faible.

Nature des parois	Pentes pour lesquelles le coefficient $\frac{\alpha i}{bg}$ est égal à l'unité pour les valeurs suivantes du rayon moyen.							
	0 <sup>m</sup> 10	0 <sup>m</sup> 20	0 <sup>m</sup> 50	1 <sup>m</sup> 00	2 <sup>m</sup> 00	5 <sup>m</sup> 00	10 <sup>m</sup> 00	20 <sup>m</sup> 00
1 <sup>o</sup> Parois très unies (ciment, bois raboté, etc.)..	0,0017	0,0015	0,0014	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0012
2 <sup>o</sup> Parois unies (planches, briques, pierres de taille, etc.).....	0,0026	0,0022	0,0018	0,0016	0,0014	0,0013	0,0013	0,0013
3 <sup>o</sup> Parois en maçonnerie de moellons.....	0,0070	0,0048	0,0032	0,0024	0,0020	0,0017	0,0015	0,0014
3 bis. Parois de nature mixte, en terre très régulières ou revêtues de perrés.....	»	0,0098	0,0057	0,0038	0,0029	0,0022	0,0019	0,0017
4 <sup>o</sup> Parois en terre dans les conditions ordinaires....	»	»	0,0094	0,0059	0,0041	0,0029	0,0023	0,0019
5 <sup>o</sup> Parois en terre présentant une résistance exceptionnelle.....	»	»	»	0,0083	0,0056	0,0037	0,0028	0,0023

Quelle que soit la valeur de coefficient  $\frac{\alpha i}{bg}$ , désignons par une seule lettre  $H'$  le produit :

$$H' = H \sqrt[3]{\frac{\alpha i}{bg}}.$$

ou bien, en mettant pour  $H$  sa valeur (33) ci-dessus :

$$H' = \sqrt[3]{\frac{bq^3}{i} \cdot \frac{\alpha i}{bg}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^3}{g}}.$$

La profondeur  $H'$  dont la grandeur ne dépend que du débit  $q$  par unité de largeur <sup>1</sup> et que nous appellerons *profondeur critique*, sera plus grande que celle  $H$  correspondant au régime uniforme dans les cours d'eau à forte pente, elle sera inférieure dans ceux à faible pente. D'autre part, nous avons, par définition :

$$H'^3 = \frac{\alpha q^3}{g} = \frac{\alpha U^3 h^3}{g}$$

ou bien

$$\frac{\alpha U^3}{gh} = \frac{H'^3}{h^3}.$$

Nous venons de dire que le ressaut ne peut se produire que si  $\alpha U^3$  est plus grand que  $gh$  ; nous exprimerons cette condition en disant que le ressaut ne pourra avoir lieu que dans les cours d'eau où la profondeur réelle  $h$  sera inférieure à la profondeur critique  $H'$  ; il sera impossible dans le cas contraire. Et reprenant la distinction établie au n<sup>o</sup> 71 entre les cours d'eau torrentueux et les cours d'eau tranquilles nous pourrions appeler torrents ceux dans lesquels  $h$  sera plus petit que  $H'$  et cours d'eau tranquilles ou rivières ceux où l'on aura  $h > H'$ .

### § 3.

#### REMOUS.

**124. Remous d'exhaussement ou d'abaissement.** — Avec la nouvelle notation  $H'$  qui vient d'être définie, l'équation (34), résolue par rapport à  $ds$ , se met sous la forme :

1. Avec la valeur  $\alpha = 1.11$  qui peut être regardée comme une moyenne, on a, à peu près,  $H' = 0,48 \sqrt[3]{q^3} = 0,48 q^{\frac{2}{3}}$ .

$$(35) \quad ids = \frac{h^3 - H^3}{h^3 - H^3} dh.$$

Lorsque  $h$  différera peu de  $H$ , le dénominateur de la fraction étant très petit,  $dh$  sera très petit par rapport à  $ids$  ; la profondeur ne variera donc que d'une manière insensible sur de grandes longueurs, lorsqu'elle sera voisine de celle qui correspond au régime uniforme. On pourra, en général, dans ces parties du cours d'eau, considérer le régime comme uniforme avec une approximation suffisante. Ce régime uniforme, ou sensiblement uniforme, existant sur de grandes longueurs, se trouvera modifié, soit vers l'amont, soit vers l'aval, dans des parties où  $h$  différant de  $H$  de quantités appréciables, la surface libre présentera une forme courbe définie par l'équation précédente et que l'on appelle la courbe des remous ; le remous sera dit d'exhaussement ou d'abaissement suivant que la courbe du remous se trouvera au-dessus ou au-dessous de la droite correspondant au régime uniforme. D'autre part, suivant que la courbe de remous se trouvera en amont ou en aval de la partie où elle se raccorde asymptotiquement avec la droite du régime uniforme, le régime varié du cours d'eau sera sous l'influence de son extrémité d'amont ou de son extrémité d'aval où se produiront les causes qui ont pour conséquence la transformation du régime uniforme en mouvement varié.

Suivant que les deux termes de la fraction seront de même signe ou de signe contraire, il en sera de même pour  $dh$  et  $ds$ , la profondeur ira en croissant ou en décroissant à mesure que  $s$  augmentera, c'est-à-dire que l'on ira de l'amont vers l'aval. Le dénominateur ne peut changer de signe que pour  $h = H$ , ce qui correspond au régime uniforme, et d'après ce qui vient d'être dit, à des valeurs infinies de  $s$ . Mais le numérateur change de signe en s'annulant lorsque  $h$  devient égal à la profondeur critique  $H' = H \sqrt[3]{\frac{ai}{bg}}$ . Pour cette

valeur, le rapport  $\frac{dh}{ds}$  est infini, la courbe représentant la surface libre a sa tangente perpendiculaire à la direction du fond du lit du cours d'eau, ce qui est incompatible avec l'hypothèse fondamentale que nous avons faite pour établir nos équations et qui consiste à admettre le parallélisme au moins approximatif des filets fluides. Il y a donc, pour la profondeur  $h = H'$  une discontinuité dans le régime permanent que nous étudions et les formules n'y sont pas applicables. Elles ne le sont même pas à une petite distance au-dessus et au dessous de cette profondeur critique, dans les parties où

la direction de la courbe superficielle fait des angles trop prononcés avec celle du fond. D'après M. Boussinesq, l'équation (35) cesserait d'être applicable lorsque le rapport  $\frac{h^3 - H^3}{h^3 - H^3}$  serait inférieur, en valeur absolue, à 0,03. Aux environs de la profondeur critique, c'est généralement un ressaut soit d'abaissement, soit d'exhaussement qui se produit, et la profondeur  $h$  passe brusquement d'un côté à l'autre de cette profondeur critique  $H'$ , dont la dénomination se trouve ainsi justifiée.

**125. Cours d'eau à faible pente. — Remous d'exhaussement.** — Étudions d'abord le premier cas,  $\frac{\alpha i}{bg} < 1$  ou

$H' < H$ , celui d'un cours d'eau à faible pente, ou dans lequel la profondeur critique  $H'$  est plus petite que celle  $H$  du régime uniforme, et supposons en premier lieu que la profondeur  $h$  soit, en un certain point, plus grande que  $H$ . Alors  $h$  est, à plus forte raison, plus grand que  $H'$ , les deux termes de la fraction sont positifs,  $dh$  a le même signe que  $ds$  et la profondeur  $h$  va constamment en augmentant à mesure que  $s$  augmente ou que l'on descend le cours d'eau ; il y a remous d'exhaussement. Lorsque  $h$  devient très grand, la fraction tend vers l'unité et  $dh$  tend à devenir égal à  $ids$  : la

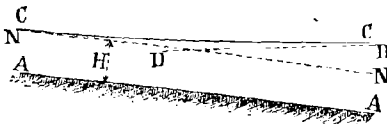


Fig. 65.

surface libre tend vers l'horizontale : la courbe superficielle présente, vers l'aval, une branche infinie, asymptote à une horizontale (fig. 65). Si l'on remonte, au contraire, vers l'amont,

en faisant décroître  $s$ , la profondeur  $h$  diminue en se rapprochant de  $H$ , et lorsqu'elle vient à en différer peu, la diminution de profondeur,  $dh$ , devient très petite par rapport à  $ids$ , la profondeur tend à devenir constante et égale à  $H$ . La courbe superficielle est asymptote, vers l'amont, à la ligne correspondant au régime uniforme. Le régime du cours d'eau est sous l'influence de son extrémité d'aval.

L'intégration de l'équation différentielle peut s'effectuer ; il suffit de l'écrire :

$$(36) \quad ids = \left( 1 + \frac{H^3 - \frac{\alpha i}{bg} H^3}{h^3 - H^3} \right) dh = \left[ 1 + \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg}}{\frac{h^3}{H^3} - 1} \right] dh,$$

et d'effectuer le développement en série du quotient :

$$\frac{1}{\frac{h^3}{H^3} - 1} = \frac{H^3}{h^3} + \frac{H^6}{h^6} + \frac{H^9}{h^9} + \dots,$$

série convergente, puisque  $h$  est plus grand que  $H$ . En faisant l'intégration depuis un profil défini par son abscisse  $s_0$  et dans lequel la profondeur est  $h_0$  jusqu'à un profil quelconque, on obtient, après avoir tout divisé par  $H$  :

$$\frac{i(s-s_0)}{H} = \frac{h-h_0}{H} + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{H^3}{h_0^3} - \frac{H^3}{h^3} \right) + \frac{1}{5} \left( \frac{H^6}{h_0^6} - \frac{H^6}{h^6} \right) + \dots \right]$$

Au lieu de développer en série le quotient  $\frac{1}{\frac{h^3}{H^3} - 1}$ , on peut, comme

Bresse l'a fait, le décomposer en fractions simples en appliquant la méthode générale de la décomposition des fractions rationnelles.

On a, en effet, en appelant pour abrégier  $h'$  le rapport  $\frac{h}{H}$ :

$$\frac{1}{h'^3 - 1} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{h' - 1} - \frac{h' + 2}{h'^2 + h' + 1} \right],$$

puis, en multipliant par  $dh'$  et intégrant, il vient, après réductions :

$$\int \frac{dh'}{h'^3 - 1} = \frac{1}{6} \text{Log} \frac{(h' - 1)^2}{h'^2 + h' + 1} + \frac{1}{3} \sqrt{3} \text{arc cot} \frac{2h' + 1}{\sqrt{3}} + \text{const.}$$

Bresse a calculé et donné, dans son volume d'hydraulique, une table des valeurs de la fonction :

$$\psi(x) = \frac{1}{6} \text{Log} \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{3} \sqrt{3} \text{arc cot} \frac{2x + 1}{3},$$

laquelle est le second membre changé de signe. On a ainsi :

$$\int \frac{dh'}{h'^3 - 1} = \text{Cte} - \psi(h').$$

D'ailleurs l'équation différentielle (34) peut s'écrire :

$$ids = dh + \left(1 - \frac{\alpha i}{bh}\right) \frac{dh}{\frac{h^3}{H^3} - 1} = dh + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right) \frac{Hdh'}{h'^3 - 1}$$

Et par suite, en intégrant, mettant pour l'intégrale du dernier terme la valeur qui vient d'être écrite, et limitant l'intégration à

deux profils d'abscisses  $s_0$  et  $s$ , la constante disparaît et il vient :

$$\frac{i(s_0 - s)}{H} = \frac{h_0 - h}{H} + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right) \left[ \psi\left(\frac{h}{H}\right) - \psi\left(\frac{h_0}{H}\right) \right].$$

Le problème se trouve ainsi résolu de la manière la plus générale.

Pour se servir de cette équation, ou pour déterminer le profil longitudinal de la surface libre d'un cours d'eau dont on connaît la pente de fond,  $i$ , et le débit  $q$  par unité de largeur, à partir d'un profil d'origine où l'on a constaté une profondeur  $h_0$ , on commencera par calculer  $H$  au moyen de l'équation (33) donnant :

$$H = \sqrt[3]{\frac{bq^2}{i}};$$

puis, prenant une profondeur arbitraire  $h$ , différente de  $h_0$ , on la mettra, ainsi que les autres quantités, dans la formule précédente qui donnera alors la distance  $s$  à laquelle se rencontrera cette profondeur  $h$ . Les valeurs de la fonction  $\psi\left(\frac{h}{H}\right)$  seront prises dans la table de Bresse, ou bien dans la table n° XIII à la fin du présent volume qui en est extraite.

Soit par exemple  $q = 5$  mc. 66 ou  $q^2 = 32,0$ ; et  $i = 0,0002$  ou  $0,20$  par kilomètre. Si l'on peut prendre pour  $b$  la valeur moyenne  $b = 0,0004$ , on aura  $\frac{bq^2}{i} = 64$  et par suite  $H = 4,00$ ; avec  $\alpha = \frac{10}{9}$ ,

on a aussi  $\frac{\alpha i}{bg} = 0,056$ . Supposons qu'en un point donné la hauteur

$h_0$  soit égale à  $6,00$ , le rapport  $\frac{h_0}{H}$  sera  $\frac{6}{4} = 1,50$ ; cherchons à quelle

distance en amont la profondeur sera réduite à  $5$  mètres :  $h = 5^m$

ou  $\frac{h}{H} = 1,25$ . La table XIII donne  $\psi\left(\frac{h_0}{H}\right) = 0,257$ ,  $\psi\left(\frac{h}{H}\right) = 0,420$  et

la formule précédente devient, en y mettant ces valeurs :

$$\frac{0,0002(s_0 - s)}{4} = \frac{1}{4} + 0,944(0,420 - 0,257),$$

d'où

$$s_0 - s = \frac{1,616}{0,0002} = 8,080 \text{ mètres.}$$

C'est à cette distance, en amont du point où la profondeur est de  $6,00$ , que l'on rencontrera celle de  $5$  mètres. On trouvera de même les abscisses de profondeurs intermédiaires aussi rapprochées qu'on le voudra. Il suffira, en général, pour avoir une idée suffi-

sante de l'allure de la courbe, d'en calculer deux ou trois points ; on voit combien ce calcul sera facile.

**126. Cas où la pente est très faible.** — Il arrive fréquemment, lorsque la pente est faible, que l'on peut négliger le terme  $\frac{\alpha i}{bg}$  devant l'unité. Ainsi dans l'exemple qui précède ce rapport ne vaut que 0,056, pour une pente de 0<sup>m</sup>20 par kilomètre. On ne commettrait, même dans ce cas, qu'une erreur de  $\frac{1}{18}$  de la valeur du dernier terme en le laissant de côté. La solution générale peut alors se simplifier.

En y effaçant le terme en  $\frac{\alpha i}{bg}$ , l'équation différentielle (34) devient :

$$ids = \left( 1 + \frac{H^3}{h^3 - H^3} \right) dh.$$

Appelons  $y$  la hauteur du remous ou la quantité dont la profondeur réelle  $h$  dépasse celle du régime uniforme  $H$ , ou posons :

$$h = H + y,$$

et remplaçons  $h$  par cette valeur, nous obtenons :

$$ids = \left( 1 + \frac{H^3}{(H + y)^3 - H^3} \right) dy = \left( 1 + \frac{H^3}{3H^2y + 3Hy^2 + y^3} \right) dy,$$

ou bien, en faisant la division :

$$ids = H \left( \frac{1}{3y} + \frac{2}{3H} + \frac{2y}{9H^2} - \frac{y^2}{9H^3} + \dots \right) dy,$$

puis, en intégrant et divisant par  $H$  :

$$\frac{i(s - s_0)}{H} = \frac{1}{3} \text{Log.} \left( \frac{y}{y_0} \right) + \frac{2(y - y_0)}{3H} + \frac{y^2 - y_0^2}{9H^2} - \frac{y^3 - y_0^3}{27H^3} + \dots$$

Dans les circonstances dont il s'agit, les hauteurs du remous,  $y$  et  $y_0$ , sont généralement assez petites par rapport à  $H$  pour que l'on puisse négliger le carré du rapport  $\frac{y}{3H}$ , réduire le second membre à ses deux premiers termes et écrire :

$$(37) \quad i(s - s_0) = \frac{H}{3} \text{Log.} \left( \frac{y}{y_0} \right) + \frac{2}{3}(y - y_0).$$

Le logarithme qui figure dans cette formule est le logarithme népérien. Elle n'est applicable, il convient de le rappeler, qu'à des

cours d'eau de largeur indéfinie et de pente très faible. Mais, dans ces cas particuliers, elle peut être employée utilement pour étudier les variations de hauteur des remous.

Appliquée à l'exemple numérique qui précède, c'est-à-dire en y faisant  $i = 0,0002$ ,  $H = 4$ ,  $y = 1$ ,  $y_0 = 2$ , elle donne, en changeant les signes :

$$0,0002 (s_0 - s) = \frac{4}{3} \text{Log. } 2 + \frac{2}{3} (2 - 1) = \frac{4}{3} \times 0,693 + \frac{2}{3} = 1,590 ;$$

d'où  $s_0 - s = 7950$  mètres au lieu de 8080.

Lorsque  $y$  diffère peu de  $y_0$  et que l'on peut négliger les puissances supérieures de  $\frac{y-y_0}{y_0}$ , on a, à ce degré d'approximation :

$$\text{Log} \frac{y}{y_0} = \frac{y}{y_0} - 1 = \frac{y-y_0}{y_0},$$

ce qui permet d'écrire l'équation précédente :

$$i (s - s_0) = \frac{H + 2y_0}{3} \text{Log} \frac{y}{y_0}.$$

$H + y_0$  est la profondeur du cours d'eau en amont, au point où elle est le plus faible,  $H + 2y_0$  peut être regardé comme différant peu de la profondeur moyenne, dans l'étendue du remous, que nous appellerons  $h_m$ , et alors :

$$(38) \quad i (s - s_0) = \frac{h_m}{3} \text{Log} \frac{y}{y_0}.$$

Cette formule du remous n'est, bien entendu, qu'approximative et son emploi, bien qu'il ait été proposé par Dupuit, pourrait conduire, dans certains cas, à des résultats numériques assez éloignés de la vérité ; mais elle n'en est pas moins précieuse, en ce qu'elle exprime, d'une manière simple, la loi du remous et qu'elle permet, bien mieux que les formules exactes plus compliquées, d'en apprécier toutes les particularités. Elle permet d'établir les propriétés suivantes de la courbe de remous, qu'il faut regarder non comme absolument rigoureuses, mais comme approchées :

1° La distance entre deux hauteurs de remous déterminées est en raison inverse de la pente du cours d'eau ;

2° La diminution du remous entre deux points est due non pas à leur distance, mais à leur différence de niveau ;

3° La distance entre deux hauteurs de remous est proportionnelle à la profondeur du courant, pour des pentes égales ;



4<sup>o</sup> La distance entre deux hauteurs de remous est proportionnelle au carré de la profondeur du courant pour des vitesses égales ; — ou en raison inverse du carré de la vitesse pour des profondeurs égales :

5<sup>o</sup> La distance entre deux hauteurs de remous est proportionnelle au carré de la vitesse, pour des pentes égales ; — ou en raison inverse du carré de la pente pour des vitesses égales <sup>1</sup> ;

6<sup>o</sup> En général, ce qui augmente la longueur du remous, c'est la profondeur ; ce qui la diminue, c'est la pente du courant.

Il en résulte qu'un remous produit dans un cours d'eau par une cause déterminée et qui, à l'étiage, cesse d'être sensible à une certaine distance en amont, peut, en temps de grandes eaux, ou lorsque la profondeur est augmentée, se faire sentir d'une façon appréciable à une bien plus grande distance.

La formule approximative (38) est commode pour obtenir une donnée rapide de l'étendue de la courbe du remous. Elle peut servir, par exemple, à donner une réponse approchée à la question suivante : A quelle distance, dans un canal de pente et de profondeur moyenne données, un remous se réduit-il à la moitié de sa hauteur ?

Il suffit d'y faire  $\frac{y}{y_0} = 2$  et de calculer la valeur correspondante de  $s - s_0$ . Si, pour continuer le même exemple numérique que plus haut, on prend  $i = 0,0002$  et  $hm = 5^m50$  profondeur moyenne entre le point où elle atteint 6 mètres et celui où elle sera réduite à 5, le remous étant alors diminué de moitié, on trouve  $i (s - s_0) = \frac{5,50}{3} \text{Log. } 2 = 1,270$  et par suite  $s - s_0 = 6350$  mètres au lieu de 8080 que nous avait donnés la formule exacte et de 7950 qu'avait fournis la formule approchée (37).

On voit donc avec quelle réserve il faut accepter les résultats de cette formule (38) qui doit plutôt servir à étudier sommairement les lois du remous qu'à en calculer les valeurs exactes.

1. Ces deux dernières propriétés, 4<sup>o</sup> et 5<sup>o</sup>, se déduisent de la formule précédente en remarquant que  $i$  est sensiblement proportionnel à  $\frac{U^2}{hm}$ , ce qui établit la proportionnalité entre le produit  $U^2 (s - s_0)$  et  $hm^2 \text{Log} \left( \frac{y}{y_0} \right)$  ; ou bien que  $hm$  est proportionné à  $\frac{U^2}{i}$  ce qui établit de même une proportionnalité entre  $i^2 (s - s_0)$  et  $U^2 \text{Log} \left( \frac{y}{y_0} \right)$ .

**127. Canal rectangulaire de faible largeur.** — On peut, avec un peu plus de complications dans les calculs, établir des formules analogues aux précédentes pour le cas d'un canal rectangulaire de largeur finie.

Soit  $l$  cette largeur,  $h$  étant toujours la profondeur variable d'une section à l'autre. Le rayon moyen  $\frac{\omega}{\chi}$  vaudra alors  $\frac{lh}{l+2h}$ ; et en opérant sur la formule (32) de la même manière que nous l'avons fait, n° 122, pour trouver celle (34) et en remarquant que le débit total  $Q = hU$ , nous obtiendrons :

$$(39) \quad ids - dh = -\frac{\alpha}{g} \frac{Q^2}{l^2 h^3} dh + b \frac{(l+2h)Q^2}{l^3 h^3} ds.$$

En appelant encore  $H$  la profondeur correspondant au régime uniforme, pour lequel le rayon moyen serait  $\frac{lH}{l+2H}$  et la vitesse moyenne  $\frac{Q}{lH}$ , on a pour déterminer  $H$  la relation

$$\frac{lH}{l+2H} i = b \frac{Q^2}{l^2 H^3}$$

qui permet d'éliminer  $Q^2$  de l'équation précédente ; et l'on trouve :

$$ids - dh = -\frac{\alpha i}{bg} \cdot \frac{l}{l+2H} \cdot \frac{H^3}{h^3} dh + i \frac{l+2h}{l+2H} \cdot \frac{H^3}{h^3} ds.$$

Posons pour simplifier :

$$1 - \frac{\alpha i}{bg} \cdot \frac{l}{l+2H} = m ;$$

si nous nous bornons à considérer des cours d'eau tranquilles à faible pente,  $m$  sera un nombre inférieur à l'unité mais assez voisin de 1. Remplaçons, comme plus haut,  $h$  par  $H + y$  en appelant encore  $y$  la hauteur du remous au-dessus de la ligne du régime uniforme, cette équation deviendra :

$$ids = -\frac{(H+y)^3 - (1-m)H^3}{(H+y)^3 - \left(1 + \frac{2y}{l+2H}\right) H^3} dy.$$

ou bien, en développant :

$$ids = \frac{mH^3 + y^3 + 3Hy^2 + 3H^2y}{y \left[ \left(y + \frac{3H}{2}\right)^2 + H^2 \left(\frac{3l-2H}{4(l+3H)}\right) \right]} dy.$$

Appelons encore :

$$n = \frac{3l + 4H}{l + 2H},$$

et remarquons que le nombre ainsi désigné par  $n$  sera toujours compris entre 2 et 3, car  $l$  et  $H$  sont des quantités positives, et l'on a  $\frac{l}{l + 2H} = n - 2$ , et  $\frac{2H}{l + 2H} = 3 - n$ . Alors l'équation devient :

$$\begin{aligned} ids &= \frac{mH^2 + y^2 + 3Hy^2 + 3H^2y}{y \cdot \left[ \left( y + \frac{3H}{2} \right)^2 + \left( n - \frac{9}{4} \right) H^2 \right]} \cdot dy \\ &= \left\{ 1 + \frac{mH}{ny} + \frac{H^2(3n - 3m - n^2) - mHy}{n \left[ \left( y + \frac{3H}{2} \right)^2 + \left( n - \frac{9}{4} \right) H^2 \right]} \right\} dy. \end{aligned}$$

L'intégration conduite à la manière ordinaire donne :

$$is + c^te = y + \frac{mH}{n} \left[ \text{Log} \frac{y}{\sqrt{\left( y + \frac{3H}{2} \right)^2 + \left( n - \frac{9}{4} \right) H^2}} - \frac{n^2 + \frac{3}{2}m - 3n}{m \sqrt{n - \frac{9}{4}}} \text{arc tang} \frac{y + \frac{3H}{2}}{H \sqrt{n - \frac{9}{4}}} \right]$$

Pour tirer quelque chose de cette équation compliquée, remarquons que, le dernier terme étant ordinairement petit, une petite erreur sur le coefficient qui l'affecte n'a pas grande importance et que l'on peut alors y faire approximativement  $m = 1$ , et  $n = \frac{10}{4}$  puisque  $n$  doit être compris entre 2 et 3. Pour simplifier le premier terme, affecté du logarithme il faut, sous le radical, négliger  $\left( n - \frac{9}{4} \right) H^2$ , ou faire  $n = \frac{9}{4}$ , ce qui est encore dans les limites de la variation possible de cette quantité et ne s'éloigne pas beaucoup, en tout cas, de sa valeur réelle, comprise entre 2 et 3. Il reste alors :

$$is + \text{const.} = y + \frac{mH}{n} \left[ \text{Log} \frac{y}{y + \frac{3H}{2}} - \frac{1}{2} \text{arc tang} 3 \left( 1 + \frac{2y}{3H} \right) \right]$$

ce qui, en développant l'arc tangente, négligeant les puissances supérieures de  $\frac{2y}{3H}$  et déterminant la constante, donne :

$$\begin{aligned}
 i(s - s_0) &= y - y_0 + \frac{mH}{n} \left[ \text{Log} \frac{y(3H+2y_0)}{y_0(3H+2y)} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3H} (y - y_0) \right] \\
 &= (y - y_0) \left( 1 - \frac{m}{9n} \right) + \frac{mH}{n} \left[ \text{Log} \frac{y}{y_0} \cdot \frac{\left( H + \frac{2}{3} y_0 \right)}{\left( H + \frac{2}{3} y \right)} \right]
 \end{aligned}$$

Dupuit arrive à une formule analogue dans laquelle le terme négatif, d'ailleurs très petit,  $\frac{m}{9n}$  n'existe pas, et où, au dernier terme se trouve, au numérateur et au dénominateur, la fraction  $\frac{3}{4}$  au lieu de celle  $\frac{2}{3}$  donnée ici.

On peut encore, lorsque  $y$  et  $y_0$  sont petits par rapport à  $H$ , rem-

placer  $\text{Log} \frac{H + \frac{2}{3} y}{H + \frac{2}{3} y_0} = \text{Log} \frac{1 + \frac{2y_0}{3H}}{1 + \frac{2y}{3H}}$  par  $\frac{2}{3} \frac{y_0 - y}{H}$ , et la formule prend

la forme plus simple :

$$(40) \quad i(s - s_0) = (y - y_0) \left( 1 - \frac{7m}{9n} \right) + \frac{mH}{n} \text{Log} \frac{y}{y_0},$$

analogue à l'équation (37) que nous avons trouvée plus haut pour les canaux de largeur indéfinie. Elle contient, en plus, le rapport :

$$\frac{m}{n} = \frac{1 - \frac{\alpha i}{bg} \cdot \frac{l}{l + 2H}}{\frac{3l + 4H}{l + 2H}} = \frac{l \left( 1 - \frac{\alpha i}{bg} \right) + 2H}{3l + 4H}.$$

Si, par exemple,  $\frac{m}{n} = \frac{2}{5}$ , ce qui a lieu à peu près pour  $l = 2H$ , elle s'écrit :

$$(41) \quad i(s - s_0) = \frac{31}{45} (y - y_0) + \frac{2}{5} H \text{Log} \frac{y}{y_0}.$$

Le coefficient  $\frac{31}{45}$  remplace  $\frac{30}{45}$  ou  $\frac{2}{3}$  et le coefficient  $\frac{2}{5}$  est à la place de  $\frac{1}{3}$ , comparativement à la formule des canaux très larges. Toutes choses égales, le remous s'étend donc plus loin dans un canal de faible largeur que dans un cours d'eau de largeur indéfinie.

**128. Construction de la courbe du remous.** — Il n'est pas inutile de faire remarquer que la courbe du remous, dont nous avons donné l'équation en série pour les canaux très larges et sous une forme approximative pour les autres, est déterminée, pour un cours d'eau donné, lorsque l'on en connaît le débit, qui permet de calculer la profondeur  $H$  répondant au régime uniforme. Si donc on a construit un gabarit représentant cette courbe avec une ligne droite figurant le fond du lit, il suffira de connaître un point de cette courbe pour, en faisant glisser le gabarit sur cette droite et en amenant un point du gabarit en coïncidence avec le point donné, tracer immédiatement la courbe du remous dans toute son étendue.

Si, par exemple, en un point  $A$  d'un cours d'eau à pente régulière (fig. 66) et de débit supposé constant  $Q$ , on établit un barrage transversal formant déversoir, on peut se proposer de chercher la modification qui sera produite par cet ouvrage dans le niveau de la surface libre en amont. Cette surface libre était primitivement une droite

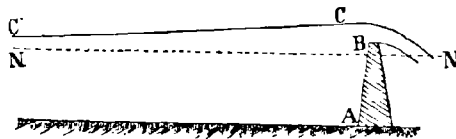


Fig. 66.

$NN'$  parallèle au fond du lit et à une profondeur  $H$  correspondant au régime uniforme. On calculera d'abord au moyen de la formule des déversoirs la charge  $h'$  qu'il sera nécessaire d'avoir, sur la crête du déversoir, pour débiter le volume  $Q$  : cette charge  $h'$  donnera la hauteur du niveau au-dessus de la crête, en amont du déversoir, c'est-à-dire l'ordonnée du point  $C$ , si la hauteur  $BA$  est également connue. Le point  $C$  étant ainsi déterminé, le reste de la courbe du remous se tracera comme il vient d'être dit.

D'ailleurs, comme cette courbe est asymptote à la ligne  $NN'$  on peut, sans changer sensiblement les ordonnées de ses divers points, la déplacer longitudinalement dans un sens parallèle au fond du lit. Il importe donc peu de savoir exactement à quelle distance, en amont du déversoir, doit être placé le point  $C$  ; on peut le supposer soit verticalement au-dessus de la crête, soit, ce qui vaut mieux, à une distance, vers l'amont, égale à cinq ou six fois au moins l'épaisseur de la lame déversante.

Il est rare que, dans la pratique, on ait besoin de calculer exactement la courbe du remous. Une pareille exactitude ne pourrait

d'ailleurs avoir d'application que dans un canal parfaitement régulier comme le supposent les équations du mouvement. Le plus ordinairement, cette régularité parfaite n'existe pas et les inégalités du lit rendent la formule simplement approximative. On peut alors, puisque l'on doit nécessairement se contenter d'une approximation, en choisir une autre, peut être un peu plus éloignée de la réalité, mais qui a l'avantage d'être beaucoup plus simple, et remplacer la courbe du remous soit par un arc de cercle, facile à tracer s'il s'agit d'une construction graphique, soit par un arc de parabole dont les

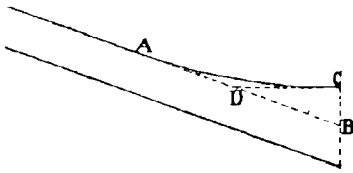


Fig. 67.

ordonnées se calculent immédiatement. La position du point C (fig. 67) par où passe la courbe du remous étant déterminée comme il vient d'être dit, on suppose qu'en ce point la tangente est horizontale et que, par suite, la courbe du remous est tangente

à la ligne CD, menée horizontalement par le point C. De plus, au lieu de la supposer asymptote à la ligne AB représentant le niveau du régime uniforme, on la suppose tangente à cette ligne. Si l'on adopte, pour la courbe du remous, un arc de cercle, cet arc sera entièrement déterminé par la condition d'être tangent au point C à la ligne CD et d'être également tangent à la ligne AB. Il en résultera que le point de contact de l'arc de cercle avec cette ligne se trouvera à une distance  $DA = DC$  du point D. Si l'on prend, pour courbe du remous, un arc de parabole dont le sommet soit en C, cet arc sera également déterminé par la condition d'être tangent à la ligne AB ; mais alors la distance DA du point de contact A, au point D, sera égale à DB, c'est-à-dire à très peu près la même que dans le cas de l'arc de cercle.

Toutes les observations faites sur des cours d'eau à pente modérée s'accordent pour reconnaître que le remous cesse d'être appréciable au-delà d'une distance double de celle qu'atteindrait le niveau tenu horizontalement c'est-à-dire que, pratiquement, BA est double de BD, comme nous venons de le supposer.

Dans la seconde hypothèse, si l'on appelle  $y_0$  la surélévation CB du point C au-dessus de la ligne du régime uniforme et  $y$  la surélévation du niveau en un point quelconque situé à une distance  $s$ , comptée en remontant en amont du point C, on aura :

$$(42) \quad y = y_0 - is \left( 1 - \frac{is}{4y_0} \right).$$

Cette formule approximative peut, bien souvent, être suffisante en pratique ; cependant, elle ne tient aucun compte de la profondeur  $H$  du régime uniforme : elle donne par conséquent la même forme pour la courbe du remous d'un cours d'eau de pente donnée, quelque soit son débit, ce qui est manifestement inexact. Je ne l'indique, par conséquent, qu'en raison de la facilité qu'elle donne pour le calcul de la surélévation  $y$  en amont d'un barrage qui a produit la surélévation  $y_0$  ; mais il ne faut en accepter les résultats que sous réserves, c'est-à-dire pour une première approximation. Si l'on ne veut pas recourir à la formule exacte qui, lorsque l'on n'a pas sous la main les tables de Bresse, donne lieu à des calculs extrêmement laborieux, il serait peut être préférable de prendre la formule de Dupuit (37) pour les canaux très larges, ou la formule (40) pour les canaux rectangulaires de largeur modérée dans lesquelles on remplacerait le logarithme népérien  $\text{Log} \frac{y}{y_0}$  par  $\frac{y - y_0}{y_0}$ . Par exemple, en mettant dans cette dernière formule (40), pour  $\frac{m}{n}$  la valeur moyenne  $\frac{2}{5}$  on aurait, en définitive, et en adoptant pour  $y$ ,  $y_0$  et  $s$  les significations qui viennent de leur être données :

$$(43) \quad is = (y_0 - y) \left( \frac{2H}{5y} + \frac{31}{45} \right) = \frac{y_0 - y}{5} \left( \frac{2H}{y} + 3,444\dots \right),$$

équation un peu plus compliquée que la précédente, mais qui serait sans doute plus approchée.

**129. Cours d'eau à faible pente. Remous d'abaissement.** — Reprenons la discussion générale de l'équation différentielle (34), et considérons le cas où,  $\frac{ai}{bg}$  étant toujours plus petit que l'unité, c'est-à-dire le cours d'eau étant à faible pente, on aurait  $h < H$  : c'est-à-dire une profondeur d'eau inférieure à celle du régime uniforme. L'équation (34) s'applique d'ailleurs à un cours d'eau de largeur indéfinie.

Si nous supposons que  $h$  soit très peu inférieur à  $H$ , il pourra être en même temps supérieur à la profondeur critique  $H'$ , et alors le numérateur de l'expression (35) sera positif, le dénominateur négatif ;  $dh$  sera de signe contraire à  $ds$ , la profondeur décroîtra lorsque l'on marchera dans le sens du courant, de l'amont vers l'aval. En remontant,  $h$  augmentera et s'approchera indéfiniment de  $H$ . La courbe du remous est encore asymptote, vers l'amont, à la

ligne du régime uniforme, mais elle est au-dessous de cette ligne : il y a remous d'abaissement. La profondeur  $h$ , continuant à décroître à mesure que l'on descend, s'approchera de la profondeur critique  $H'$  et finira par l'atteindre.

Le régime varié du cours d'eau est alors sous l'influence de son extrémité d'aval et l'on peut se représenter les circonstances qui doivent se produire à cette extrémité pour y obtenir un abaissement rapide ou brusque assimilable à la discontinuité que signalent les équations. Cela arrive, par exemple, lorsqu'il se trouve, dans le fond du lit, une solution de continuité par laquelle le liquide s'écoule et peut prendre une vitesse se rapprochant de la verticale, et en particulier lorsqu'un canal à pente régulière débouche dans un réservoir plus profond, dans lequel le niveau de l'eau est plus bas que le fond du lit du canal alimentaire (fig. 68). La surface libre, dans

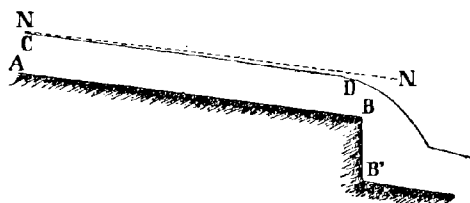


Fig. 68.

ce canal, se tient alors au-dessous de la ligne correspondant au régime uniforme et s'en rapproche indéfiniment à mesure que l'on remonte le courant. La courbe du remous peut donc la représenter depuis l'infini, en amont, jusqu'aux abords du point où commence le déversement.

L'intégration de l'équation différentielle peut se conduire de la même manière que précédemment. Nous pouvons d'abord lui donner la forme (36), ou bien, en changeant le signe du dernier terme pour mettre en évidence celui du dénominateur :

$$ids = \left[ 1 - \frac{1 - \frac{ai}{bg}}{1 - \frac{H^3}{h^3}} \right] dh.$$

Le développement en série du facteur  $\frac{1}{1 - \frac{H^3}{h^3}}$  donne :

$$\frac{1}{1 - \frac{H^3}{h^3}} = 1 + \frac{h^3}{H^3} + \frac{h^6}{H^6} + \frac{h^9}{H^9} + \dots$$



série convergente puisque  $h$  est inférieur à  $H$ . En faisant l'intégration entre deux profils d'abscisses  $s$  et  $s_0$ , on obtient :

$$\frac{i(s-s_0)}{H} = \frac{h-h_0}{H} \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right) \left[ \frac{h-h_0}{H} + \frac{1}{4} \left( \frac{h^4}{H^4} - \frac{h_0^4}{H^4} \right) + \frac{1}{7} \left( \frac{h^7}{H^7} - \frac{h_0^7}{H^7} \right) + \dots \right]$$

ou bien en réduisant :

$$\frac{i(s-s_0)}{H} = \frac{\alpha i}{bg} \cdot \frac{h-h_0}{H} + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right) \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{h_0^4}{H^4} - \frac{h^4}{H^4} \right) + \frac{1}{7} \left( \frac{h_0^7}{H^7} - \frac{h^7}{H^7} \right) + \dots \right]$$

L'intégration peut d'ailleurs se faire sous forme finie, comme dans le cas précédent, au moyen de la fonction de Bresse  $\psi(x)$  définie plus haut. Le résultat trouvé alors et exprimé par l'équation :

$$\frac{i(s-s_0)}{H} = \frac{h-h_0}{H} + \left(1 - \frac{\alpha i}{bg}\right) \left[ \psi\left(\frac{h_0}{H}\right) - \psi\left(\frac{h}{H}\right) \right]$$

est général et s'applique aussi bien au remous d'abaissement. La table de Bresse donne en effet la valeur de la fonction  $\psi(x)$  pour les valeurs de son argument  $x$  inférieures à l'unité comme pour les valeurs supérieures.

On pourrait répéter ici ce qui a été dit sur la manière de se servir de la courbe du remous. Si l'on en a construit un gabarit en indiquant la ligne du fond, la connaissance d'un seul point de la courbe suffira pour la déterminer complètement.

Il est d'ailleurs évident, aussi bien pour le remous d'exhaussement que pour celui d'abaissement, que la forme de la courbe du remous dépend du débit. On peut donc imaginer que, pour un cours d'eau donné, l'on ait construit les gabarits des courbes de remous correspondant à un certain nombre de débits, et alors il suffira de connaître deux points de la surface libre pour trouver le débit correspondant en cherchant, parmi toutes les courbes de remous, celle qui peut passer par les deux points donnés.

Le même problème peut se résoudre aussi par la méthode analytique, au moyen d'une série de tâtonnements.

**130. Cours d'eau à faible pente. Ressaut.** — Au lieu de supposer  $h$  légèrement plus petit que  $H$  et plus grand que

$$H' = \sqrt[3]{\frac{\alpha i}{bg}} H, \text{ supposons-le maintenant plus petit que cette profon-}$$

deur critique. Les deux termes de la fraction  $\frac{h^3 - H^3}{h^3 - H^3}$  de l'équation (35) seront négatifs, et  $dh$  sera de même signe que  $ds$ . La profondeur  $h$  croîtra à mesure que l'on descendra le courant et

atteindra bientôt la profondeur critique pour laquelle  $\frac{dh}{ds}$  devient infini et le régime permanent impossible dans les conditions où il est supposé. D'autre part, si, à partir de ce point, on remonte le courant,  $h$  étant assez notablement différent de  $H$ , le dénominateur de la fraction précédente ne sera pas très petit,  $dh$  aura une valeur comparable à celle de  $ds$ , la profondeur  $h$  ira en décroissant rapidement et il arriverait même que la courbe représentant la surface libre viendrait rencontrer le fond du lit, c'est-à-dire que  $h$  s'annulerait. Il se produira donc, dans ces circonstances spéciales, à la suite d'une profondeur  $h$  assez petite ou très petite, un relèvement assez rapide de la surface libre, qui précèdera une discontinuité dans le mouvement permanent exprimé par l'équation (35) c'est-à-dire un véritable ressaut après lequel  $h$  sera devenu plus grand que la profondeur critique  $H$ , on peut être même que la profondeur de régime uniforme  $H$ . La portion de cours d'eau en amont de ce ressaut sera sous l'influence de son extrémité d'amont. Après le ressaut, le régime deviendra uniforme ou s'établira suivant l'influence de l'extrémité d'aval, d'après l'une ou l'autre des deux hypothèses que nous venons d'examiner.

### 131. Canal rectangulaire à plafond horizontal. —

On pourrait, comme on vient de le faire pour le remous d'exhaussement, chercher comment se modifie la formule générale lorsqu'au lieu de l'appliquer à un canal de largeur indéfinie, on veut considérer un cours d'eau de dimensions restreintes. Nous ne ferons cette étude, qui donne lieu à des calculs compliqués, mais non difficiles, que dans une hypothèse qui leur apporte une certaine simplification et qui correspond à un cas assez fréquent dans la pratique : celui où la pente du fond est rigoureusement nulle :  $i = 0$  ; c'est ce qui arrive, par exemple, dans un canal de navigation dont le plafond est horizontal et qui sert néanmoins à l'écoulement d'un certain volume d'eau.

Supposons aussi, pour simplifier les calculs, que les parois latérales soient verticales, ou le lit rectangulaire ; nous indiquerons, à la fin, comment devront être modifiées les formules définitives pour le cas, plus ordinaire, d'une section en forme de trapèze. Faisons  $i = 0$  dans l'équation (39) et résolvons-la par rapport à  $ds$ , nous obtiendrons :

$$ds = \frac{\alpha}{bg} \cdot \frac{l}{l + 2h} dh - \frac{l^2 h^2}{bQ^2 (l + 2h)} dh.$$

En général, le premier terme du second membre de cette équation sera négligeable par rapport aux autres ; en effet avec les valeurs moyennes des coefficients  $\alpha$  et  $b$ , le quotient  $\frac{\alpha}{bg}$  est inférieur à 300,

le facteur  $\frac{l}{l+2h}$  est inférieur à l'unité ; ce premier terme est donc notablement inférieur à 300  $dh$ . Or, dans un pareil cours d'eau, où la pente du fond est nulle, la pente superficielle dépasse rarement 0 m. 20 ou 0 m. 30 par kilomètre ; en la supposant de 0 m. 25, on a  $ds = 4000 dh$  en valeur absolue, le premier terme est donc toujours beaucoup plus petit que le dixième des deux autres et l'on peut le négliger, si l'on se contente d'une approximation. Il reste alors :

$$ds = - \frac{l^3 h^3 dh}{bQ^2(l+2h)}.$$

Cela montre, tout d'abord, que  $dh$  et  $ds$  sont de signes contraires, ce qui caractérise le remous d'abaissement. En intégrant entre deux profils d'abscisses  $s_1$  et  $s_0$ , on obtient <sup>1</sup>.

$$s_1 - s_0 = \frac{l^3}{bQ^2} \int_{h_1}^{h_0} \frac{h^3 dh}{l+2h}.$$

On peut tirer de là l'expression du débit  $Q$  en fonction des différences de profondeurs dans les profils donnés :

$$(45) \quad Q^2 = \frac{l^3}{b(s_1 - s_0)} \int_{h_1}^{h_0} \frac{h^3 dh}{l+2h}.$$

1. L'intégration n'a rien de difficile, et donne pour résultat :

$$s - s_0 = \frac{l^3}{8bQ^2} \left[ \frac{3h_0^3 - h_1^3}{4l^2} - \frac{h_0 - h_1}{l} \left( \frac{h_0 + h_1}{l} - 1 \right) - \frac{1}{2} \text{Log} \frac{l+2h_0}{l+2h_1} \right].$$

Si la largeur du canal est très grande par rapport à sa profondeur de telle manière que l'on puisse négliger  $\frac{2h}{l}$  devant l'unité, l'équation différentielle se réduit à :

$$ds = - \frac{l^3 h^3 dh}{bQ^2},$$

qui donne, après intégration :

$$s_1 - s_0 = \frac{l^3}{4bQ^2} (h_0^4 - h_1^4).$$

La courbe superficielle est alors une parabole du 4<sup>e</sup> degré, à axe vertical, tangente à l'horizontale à l'origine  $s_0$  et dont la convexité est dirigée vers le haut.

Supposons alors que dans les deux profils définis par les abscisses  $s_0$  et  $s_1$  et distants par conséquent de la quantité donnée  $(s_1 - s_0)$ , on ait constaté, par une première observation, les profondeurs  $h_0$  dans celui d'amont et  $h_1$  dans celui d'aval ; puis, par une seconde observation,

$$h_0 \text{ en amont, } \quad h_2 \text{ en aval ;}$$

enfin, par une troisième,

$$h_1 \text{ en amont, } \quad h_3 \text{ en aval.}$$

Désignons les débits correspondants par  $Q_{0,1}$ ,  $Q_{0,2}$ , et  $Q_{1,2}$  ; les valeurs de ces débits seront données par les équations :

$$Q_{0,1}^2 = \frac{l^3}{b(s_1 - s_0)} \int_{h_1}^{h_0} \frac{h^3 dh}{l + 2h},$$

$$Q_{0,2}^2 = \frac{l^3}{b(s_1 - s_0)} \int_{h_2}^{h_0} \frac{h^3 dh}{l + 2h},$$

$$Q_{1,2}^2 = \frac{l^3}{b(s_1 - s_0)} \int_{h_2}^{h_1} \frac{h^3 dh}{l + 2h};$$

d'où résulte l'équation remarquable :

$$(46) \quad Q_{0,2}^2 = Q_{0,1}^2 + Q_{1,2}^2 \quad (1)$$

Supposons que, pour un cours d'eau de section transversale donnée, ou pour des valeurs déterminées de  $l$  et de  $h$ , on ait calculé les valeurs du débit  $Q$  en admettant que la profondeur dans une section d'amont soit constante et égale à  $h_0$ , cette profondeur étant la plus grande de celles que l'on est exposé à voir se réaliser dans la pratique, et que, dans une autre section, située en aval de la première à une distance donnée  $s - s_0$ , la profondeur ait en successivement les valeurs  $h_1, h_2, h_3, \dots$  inférieures à  $h_0$  (la distance  $s - s_0$  pourra être, par exemple, celle de deux ouvrages sur lesquels se trouve une échelle graduée), on obtiendra ainsi un certain nombre de valeurs  $Q_{0,1}, Q_{0,2}, Q_{0,3}, \dots$  pour le débit du cours d'eau dans ces diverses hypothèses. Ce calcul, étant fait une fois pour toutes, pourra servir à déterminer immédiatement le débit lorsque les profondeurs, dans les deux sections considérées, auront des valeurs quelconques  $h_n, h_p$ . En effet, l'équation précédente donnera :

1. Cette équation a été donnée par M. Cosserat, dans un rapport sur les conditions d'écoulement dans les canaux d'assèchement des Wateringues du Nord et du Pas-de-Calais.

$$Q_{a,p}^2 = Q_{o,p}^2 - Q_{o,n}^2 ;$$

le débit cherché sera le troisième côté d'un triangle rectangle dont les deux autres seront les débits déjà calculés.

Remarquons d'ailleurs que pour des sections transversales semblables ou pour une même valeur du rapport  $\frac{h}{l}$ , les débits sont en raison du cube de la largeur  $l$  des cours d'eau ; la formule générale (45) peut en effet s'écrire

$$Q^2 = \frac{l^6}{b(s-s_0)} \int_{h_1}^{h_0} \frac{\frac{h^3}{l^3} d \cdot \frac{h}{l}}{1 + 2 \frac{h}{l}} ;$$

et par conséquent il suffira, après avoir calculé le débit pour un cours d'eau donné de largeur  $l$ , de le multiplier par le rapport  $\frac{l'^3}{l^3}$  des cubes des largeurs pour avoir celui d'un cours d'eau d'une autre largeur  $l'$ . De même, les calculs faits pour une certaine longueur  $s - s_0$  pourront s'appliquer à une autre longueur  $s' - s_0$  en remarquant que les débits sont en raison inverse de la racine carrée de la longueur aux extrémités de laquelle les profondeurs ont été mesurées.

**132. Canal à section trapèze et à fond horizontal.**

— Tout ce qui précède s'applique aussi au cas où le canal à fond horizontal a une section transversale en forme de trapèze au lieu d'une section rectangulaire. Si  $l$  est toujours la largeur au plafond,  $h$  la profondeur et  $m$  l'inclinaison des talus ou la tangente de l'angle formé par le plan du talus avec l'horizontale, la largeur à la surface étant alors  $l + \frac{2h}{m}$ , le périmètre mouillé est  $l + \frac{2h}{m} \sqrt{1 + m^2} = l + 2ph$  en posant, pour abrégier,  $p = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}$ .

Alors la formule générale (45) doit être écrite :

$$Q^2 = \frac{1}{b(s-s_0)} \int_{h_1}^{h_0} \frac{h^3 (l + mh)^3}{l + 2ph} dh ;$$

Si l'on désigne par  $\varphi\left(\frac{h}{l}\right)$  la fonction suivante, laquelle est, à un facteur près, l'intégrale générale du second membre :

$$\varphi\left(\frac{h}{l}\right) = \frac{m^3}{12\rho} \cdot \frac{h^6}{l^6} + \frac{m^2}{10\rho} \left(3 - \frac{m}{2\rho}\right) \frac{h^5}{l^5} + \frac{m}{8\rho} \left(3 - \frac{3m}{2\rho} + \frac{m^2}{4\rho^2}\right) \frac{h^4}{l^4} + \frac{1}{2\rho} \left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^3 \left[\frac{h^3}{3l^3} - \frac{h^2}{4\rho l^2} + \frac{h}{4\rho^2 l} - \frac{1}{8\rho^3} \cdot \text{Log}\left(1 + 2\rho \frac{h}{l}\right)\right],$$

et si l'on met à la place de  $\frac{1}{\sqrt{b}}$  le coefficient C, l'on obtient, pour la valeur du débit :

$$(47) \quad Q = \frac{Cl^3}{\sqrt{s-s_0}} \sqrt{\varphi\left(\frac{h_0}{l}\right) - \varphi\left(\frac{h_1}{l}\right)}.$$

Voici un petit tableau qui donne quelques-unes des valeurs de la fonction  $\varphi\left(\frac{h}{l}\right)$  et qui permettra, sinon de calculer exactement le débit, au moins de se faire une première idée de son importance.

Valeurs de $\frac{h}{l}$	Parois	Talus inclinés à				
	verticales	1 de base pour 2 de hauteur	1 de base pour 1 de hauteur	3 de base pour 2 de hauteur	2 de base pour 1 de hauteur	3 de base pour 1 de hauteur
	$m = \infty$	$m = 200$	$m = 1,00$	$m = \frac{2}{3}$	$m = \frac{1}{2}$	$m = \frac{1}{3}$
0.20	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
0.30	0.0014	0.0019	0.0023	0.0027	0.0031	0.0041
0.40	0.0039	0.0058	0.0077	0.0097	0.0116	0.0160
0.50	0.0088	0.0143	0.0202	0.0263	0.0328	0.0476
0.60	0.0167	0.030	0.045	0.061	0.078	0.118
0.70	0.029	0.056	0.089	0.125	0.165	0.258
0.80	0.046	0.098	0.161	0.235	0.318	0.512
0.90	0.068	0.159	0.276	0.414	0.57	0.95
1.00	0.098	0.247	0.45	0.69	0.97	1.65

Soit, par exemple, à déterminer le débit d'un cours d'eau à plafond horizontal ayant 5 m. 00 de largeur au plafond, des talus en terre à 3 de base pour 2 de hauteur, et dont la profondeur, égale à trois mètres dans un profil d'amont, se trouve réduite à 2 m. 50 dans un profil situé à trente kilomètres en aval du premier.

On a alors :  $s - s_0 = 30.000$ ,  $m = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{h_0}{l} = 0,60$ ,  $\frac{h_1}{l} = 0,50$ . La

table XII donne d'abord, pour la valeur moyenne de  $\frac{h}{l} = 0,55$ , le rayon moyen  $R = 0,61 h = 0,61 \times 2,75 = 1 \text{ m. } 68$ . Puis, la table IX, pour cette valeur du rayon moyen et des parois en terre, fournit la valeur du coefficient  $C = 45$  environ. Le tableau précédent donne, pour  $\frac{h}{l} = 0,60$ ,  $\varphi\left(\frac{h}{l}\right) = 0,061$  et pour  $\frac{h}{l} = 0,50$ ,  $\varphi\left(\frac{h}{l}\right) = 0,026$ ; par conséquent :

$$Q = \frac{(5,00)^2 \times 45}{\sqrt{30,000}} \sqrt{0,061 - 0,026} = 6 \text{ mc. } 07;$$

soit, en chiffre rond, six mètres cubes par seconde.

On aurait pu, d'une façon moins rigoureuse, se rendre compte du débit en prenant la pente superficielle moyenne  $I = \frac{0,50}{30000}$  et calculant la vitesse moyenne par la formule du mouvement uniforme :

$$U = C \sqrt{RI} = 45 \sqrt{1,68 \times \frac{0,50}{30000}}, \text{ qui aurait donné } U = 0 \text{ m. } 234.$$

La section transversale ayant, en moyenne, une superficie de 25 mq. 09, on aurait trouvé, pour le débit, le chiffre  $Q = 0,234 \times 25,09 = 5 \text{ mc } 87$ , sensiblement le même que le précédent. Dans bien des cas, ce calcul rapide ne donnerait pas un résultat aussi approché.

**133. Cours d'eau à forte pente.** — Occupons-nous maintenant des cours d'eau à forte pente, pour lesquels  $\frac{\sigma i}{bg}$  est plus grand que l'unité. L'équation générale, applicable au cas d'un cours d'eau rectangulaire très large peut toujours se mettre sous la forme (35).

$$ids = \frac{h^3 - \frac{\sigma i}{bg}}{h^3 - H^3} dh = \frac{h^3 - H'^3}{h^3 - H^3} dh.$$

Supposons d'abord que  $h$  soit légèrement supérieur à  $H$ , mais inférieur à la profondeur critique  $H'$ . Le numérateur de la fraction est négatif, le dénominateur positif, et  $dh$  est de signe contraire à  $ds$ . La profondeur  $h$  va en décroissant à mesure que l'on descend et s'approche indéfiniment de la profondeur  $H$  correspondant au régime uniforme. En remontant,  $h$  croît, s'approche de  $H'$  et finit par atteindre cette profondeur critique. Le régime varié fait suite à un abaissement brusque qui peut être un ressaut d'abaissement et

il est sous l'influence de l'extrémité d'amont où se produit cet abaissement brusque. Au delà, en descendant, la forme de la courbe est donnée par les mêmes équations que plus haut, dans lesquelles  $1 - \frac{ai}{bg}$  est négatif au lieu d'être positif.

Si  $h$ , supérieur à  $H$ , est en même temps supérieur à  $H' = H \sqrt[3]{\frac{ai}{bg}}$ , les deux termes de la fraction sont de même signe et  $dh$  est de même signe que  $ds$ . La profondeur va en croissant à mesure que l'on descend. La courbe de la surface libre est asymptote à une horizontale au-dessous de laquelle elle reste et dont elle s'approche indéfiniment. Cette courbe succède à un ressaut d'exhaussement qui se produit vers son origine et en vertu duquel la profondeur  $h$ , précédemment inférieure à  $H \sqrt[3]{\frac{ai}{bg}}$  ou même à  $H$ , devient brusquement supérieure à la première de ces deux quantités. Le régime s'éloigne de plus en plus de l'uniformité et le niveau tend vers l'horizontale comme dans le premier cas que nous avons examiné.

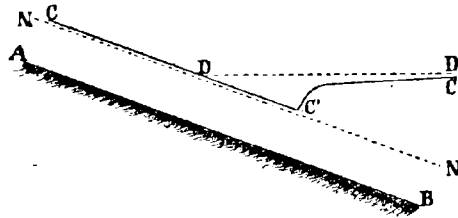


Fig. 69.

L'écoulement se fait sous l'influence de l'extrémité aval du cours d'eau, où se trouve la cause qui maintient ainsi le niveau à peu près horizontal (fig. 69).

Enfin, supposons  $h$  inférieur à  $H$  et par conséquent à  $H' = H \sqrt[3]{\frac{ai}{bg}}$ ; les deux termes de la fraction sont négatifs,  $h$  va en augmentant à mesure que l'on descend et s'approche indéfiniment de  $H$ . Vers l'amont,  $h$  décroissant lorsqu'on remonte, finirait par s'annuler et la courbe de la surface libre rencontrerait le fond du lit. La courbe dont il s'agit fait donc suite à une portion où la profondeur peut être très faible; mais cette profondeur s'accroît régulièrement et sans ressaut, contrairement à ce qui se passe.



dans les mêmes circonstances, lorsque le cours d'eau est à faible pente.

**134. Résumé de la discussion.** — De toute cette discussion, il résulte que, dans un canal découvert de section rectangulaire et de pente constante, il y a une profondeur critique  $H'$  définie par l'équation :

$$H' = \sqrt[3]{\frac{ai}{bg}} \quad H = \sqrt[3]{\frac{aq^2}{g}},$$

dans laquelle  $q$  est le débit par unité de largeur du cours d'eau. Si la profondeur réelle  $h$  en un point donné est supérieure à cette profondeur critique, l'écoulement est tranquille, et le cours d'eau, quelle que soit sa pente, se comporte à la façon des rivières, le ressaut superficiel y est impossible et le régime se trouve sous l'influence de l'extrémité d'aval dont les conditions déterminent celles de l'écoulement.

Si, au contraire, la profondeur réelle  $h$ , en un point donné, est inférieure à la profondeur critique  $H'$ , l'écoulement est torrentueux ; le régime est sous la dépendance de l'extrémité d'amont, quelle que soit la pente du cours d'eau.

Dans les canaux à faible pente, le régime uniforme se produit en amont des points où la profondeur réelle dépasse la profondeur critique ; dans ceux à forte pente, le régime uniforme se produit en aval des points où la profondeur réelle est inférieure à la profondeur critique.

Dans tous, lorsque la profondeur est voisine de la profondeur critique, l'écoulement est irrégulier et il se produit ordinairement un ressaut superficiel.

On peut encore donner une autre forme à ce qui précède. Si l'on considère, dans un cours d'eau à faible pente, la partie où le régime est uniforme ou sensiblement uniforme, dans laquelle la courbe du remous est voisine de son asymptote et si l'on marche vers l'aval, le régime, s'il devient varié, ira en s'écartant graduellement du régime uniforme. Si au contraire on marche vers l'amont, le régime uniforme, s'il cesse d'exister, sera détruit brusquement ou trop rapidement pour que l'équation ordinaire puisse s'y appliquer.

Dans un cours d'eau à forte pente, les circonstances inverses se produisent : le régime uniforme succède asymptotiquement à la courbe de remous. Il ne s'établit donc que graduellement ; mais en revanche il se détruit brusquement ou rapidement à l'aval des points

où il existe et où des causes locales produisent soit une surélévation soit un abaissement du niveau ; ces effets locaux ne se propagent pas vers l'amont où le régime continue à être uniforme jusque tout près de ces points exceptionnels.

**135. Forme générale du profil longitudinal du ressaut.** — Au moyen de l'équation générale du mouvement permanent, obtenue au n° 121, et qui tient compte de la courbure de filets liquides, on peut se faire une idée de la forme générale de la surface libre d'un cours d'eau aux points où se produit le phénomène du ressaut. Bien que l'on puisse, ainsi que nous l'avons dit, le constater exceptionnellement dans des cours d'eau à faible pente, nous étudierons seulement, dans ce paragraphe, un *torrent à pente modérée*, c'est-à-dire un cours d'eau dont la pente de fond constante,  $i$ , soit supérieure à celle qui est indiquée au tableau de la page 241, sans cependant dépasser beaucoup cette limite. Dans cette hypothèse, le rapport  $\frac{\alpha' i}{bg}$  sera supérieur à l'unité, mais n'en différera que d'une quantité qui ne sera pas très grande ; nous poserons donc

$$\frac{\alpha' i}{bg} = 1 + \gamma$$

en appelant  $\gamma$  un nombre positif généralement assez petit.

Prenons l'équation générale du mouvement permanent sous sa forme (28) de la page 238, la pente  $i$  étant constante, sa dérivée seconde disparaîtra du dernier terme et lorsque nous aurons, dans cette équation, remplacé  $U$  par  $\frac{q}{h}$  elle deviendra :

$$\frac{q^2}{3g} \frac{d^3 h}{ds^3} + \left( h - \frac{\alpha' q^2}{g h^2} \right) \frac{dh}{ds} = hi - b \frac{q^2}{h^2}$$

Dans le second et dans le dernier terme, remplaçons  $q^2$  par sa valeur en  $H$  donnée par l'équation (33) et posons, pour simplifier :

$$h = H (1 + \zeta)$$

nous obtiendrons, en tenant compte d'ailleurs de la notation  $\gamma$  qui vient d'être définie :

$$\frac{q^2}{3g} \cdot \frac{d^3 \zeta}{ds^3} = H \left[ \frac{1 + \gamma}{(1 + \zeta)^2} - (1 + \zeta) \right] \frac{d^2 \zeta}{ds^2} + \left[ (1 + \zeta) - \frac{1}{(1 + \zeta)^2} \right] \zeta.$$

$h$  étant généralement petit par rapport à  $H$ ,  $\zeta$  est une petite quantité dont les carrés et les puissances supérieures peuvent être négligés

devant l'unité et nous pourrons, approximativement, remplacer les deux grandes parenthèses respectivement par  $(\gamma - 3\zeta)$  et par  $3\zeta$ ,<sup>1</sup> et avec cette simplification, l'équation devient :

$$(48) \quad \frac{q^2}{3g} \cdot \frac{d^3\zeta}{ds^3} = H(\gamma - 3\zeta) \frac{d\zeta}{ds} + 3\zeta i.$$

Multiplions-en tous les termes par  $ds$  et intégrons à partir d'une abscisse  $s_0$  où nous supposons établi le régime uniforme, c'est-à-dire  $h = H$  ou  $\zeta = 0$  et nulles, aussi, les dérivées de  $h$  ou de  $\zeta$ . Généralement, et en toute rigueur, cette condition ne sera satisfaite que pour  $s_0 = \pm \infty$ , car le régime uniforme n'est qu'un cas limite dont l'état d'un cours d'eau approche sans jamais l'atteindre. Quoiqu'il en soit, l'intégration donnera :

$$(49) \quad \frac{q^2}{3g} \frac{d^2\zeta}{ds^2} = H\zeta \left( \gamma - \frac{3}{2}\zeta \right) + 3i \int_{s_0}^s \zeta ds.$$

Multiplions encore tous les termes de cette dernière équation par  $2 \frac{d\zeta}{ds} ds$  et intégrons à partir de la même limite  $s_0$ , nous obtiendrons enfin :

$$(50) \quad \frac{q^2}{3g} \left( \frac{d\zeta}{ds} \right)^2 = H\zeta^2 (\gamma - \zeta) + 6i \left[ \zeta \int_{s_0}^s \zeta ds - \int_{s_0}^s \zeta^2 ds \right].$$

A une première approximation, nous pouvons négliger provisoirement la pente  $i$  vis-à-vis de  $\gamma$ , ( $i$  vaut, au plus, 0,003 ou 0,004, tandis que  $\gamma$  peut être voisin de l'unité et même la dépasser), alors si, dans les trois équations (48), (49) et (50) nous effaçons le dernier terme contenant  $i$  en facteur, elles nous montreront ; la première (48), que la courbure de la surface  $\frac{d^2h}{ds^2}$  ou  $H \frac{d^2\zeta}{ds^2}$ , nulle pour  $s = s_0 = -\infty$ , augmente avec  $s$ , puisque sa dérivée est positive à cause du facteur  $\frac{d\zeta}{ds}$  qui est lui-même positif à cause de l'accroisse-

1. On a, identiquement :

$$\frac{1 + \gamma}{(1 + \zeta)^2} - (1 + \zeta) = \gamma - 3\zeta - \frac{d}{d\zeta} \cdot \frac{\zeta^2(\gamma - \zeta)}{1 + \zeta},$$

$$(1 + \zeta) - \frac{1}{(1 + \zeta)^2} = 3\zeta - \frac{d}{d\zeta} \cdot \frac{\zeta^3}{1 + \zeta}.$$

La substitution dont il s'agit revient donc à négliger la dérivée de  $\frac{\zeta^3}{1 + \zeta}$  c'est-à-dire des termes comparables aux puissances supérieures de  $\zeta$ .

ment de  $\zeta$  ; cette courbure augmente ainsi jusqu'à ce que  $\zeta = \frac{\gamma}{3}$  pour décroître ensuite ; la seconde, (49), que cette courbure est positive jusqu'à ce que  $\zeta = \frac{2\gamma}{3}$  et ensuite négative ; enfin, la troisième, (50), dont le premier terme est essentiellement positif, que  $\zeta$  ne peut devenir supérieur à  $\gamma$  et que l'inclinaison  $H \frac{d\zeta}{ds}$  de la surface libre sur le fond s'annule et change de signe lorsque  $\zeta$ , parti de zéro pour  $s = s_0 = -\infty$ , a grandi jusqu'à cette limite supérieure  $\gamma$ . Ainsi, la forme du ressaut présentera une première ondulation convexe dont la hauteur, au-dessus de la surface libre du régime uniforme prolongée, vaudra environ  $H\gamma$ , ce qui correspondra à une profondeur totale  $H \frac{\alpha i}{bg}$ .

Sans la présence des termes en  $i$  dans ces trois équations, on pourrait même ajouter que la surface libre s'abaisserait au delà de ce renflement comme elle s'était élevée en deçà. En effet l'équation (50) donne, abstraction faite de son dernier terme

$$(51) \quad \frac{q}{\sqrt{3g}} \cdot \frac{d\zeta}{ds} = \pm \zeta \sqrt{H(\gamma - \zeta)}$$

et elle montre que  $\frac{d\zeta}{ds}$  retrouve la même valeur absolue lorsque  $\zeta$  redevient le même. Mais le terme en  $i$ , dans (49), augmente sans cesse la valeur de  $\frac{d^2\zeta}{ds^2}$  et tend, par conséquent, à relever la tangente à la surface. Il en résulte que le second membre de (50) s'annule de nouveau, pour redevir ensuite positif, avant que  $\zeta$  ne soit devenu égal à zéro. Alors  $\zeta$  recommence à grandir, c'est-à-dire que la première convexité de la surface du ressaut est suivie d'une autre un peu plus élevée et ainsi de suite, jusqu'à ce que la différence  $(\gamma - \zeta)$  s'approchant de zéro, le dernier terme de (50) ne soit plus assez petit par rapport au précédent pour que le raisonnement qui précède soit applicable. On peut d'ailleurs, comme l'a fait M. Boussinesq à qui j'ai emprunté textuellement presque tout ce paragraphe, calculer les valeurs de  $\zeta$  aux points où  $\frac{d\zeta}{ds}$  s'annule.

L'équation différentielle (51), qui s'intègre facilement, donne, à une première approximation la forme des ondulations de la surface excepté aux points où  $\zeta$  étant voisin de zéro ou de  $\gamma$ , le dernier terme de (50) est comparable au précédent, seul conservé dans (51) <sup>1</sup>.

1. Si, dans cette équation (51) on met en évidence, au lieu de  $\zeta$ , la surélé-

En résumé, les ressauts produits dans les torrents peu rapides, aux points où un obstacle détruit le régime uniforme, ne consistent pas en une surélévation continue de la surface, mais en une série d'ondulations disposées en gradins, et dont les premières ont une hauteur un peu supérieure à  $H\gamma$ .

Les expériences de M. Bazin ont remarquablement confirmé cette théorie. Les nombreux ressauts qu'il a observés sont de deux espèces, suivant qu'ils se produisent dans des torrents peu rapides ou dans des cours d'eau de grande pente. Les premiers, plus allongés que les autres, sont toujours sillonnés transversalement d'un certain nombre d'ondulations; les seconds sont les seuls dans lesquels l'élévation de la surface se fasse d'un seul bond et d'une manière presque brusque, bien qu'il y ait encore souvent, mais à la suite du gonflement, un certain nombre de rides transversales.

Dans les petits cours d'eau d'une certaine pente, un simple caillou, placé au milieu du lit, suffit pour donner naissance à deux ressauts, un de chaque espèce. En amont de l'obstacle, aux points où le courant se relève pour le franchir, il se forme un premier ressaut, long et présentant plusieurs ondulations; immédiatement en aval, c'est-à-dire au bas du torrent rapide qui se produit sur la partie postérieure de l'obstacle, il se forme un second ressaut, mais court et constitué par une simple barre d'écume.

Les phénomènes sont plus simples quand, aux endroits où le régime uniforme se détruit, il y a, au lieu d'un ressaut, un abaissement de la surface comme en produit une discontinuité ou coupure du lit donnant naissance à une cascade. Alors, la variable  $\zeta$ , d'abord égale à zéro, devient négative ainsi que tous les termes du second

variation effective que je désignerai par  $h' = H\zeta$ , en appelant d'ailleurs  $h'_1$  la valeur maximum de cette surélévation que nous avons trouvée égale à  $H\gamma$ , et si l'on pose  $\frac{q^2}{g} = H^2$ , cette hauteur  $H$  différant à peine de celle qui est représentée plus haut par la même lettre et que nous avons appelée la profondeur critique, l'équation devient :

$$H^3 \left( \frac{dh'}{ds} \right)^2 = 3h'^2 (h'_1 - h')$$

ce qui est exactement celle que nous trouverons plus loin, au chapitre VIII, § 2, équation (23) pour définir l'onde solitaire.

Les premières ondulations qui se produisent, dans un ressaut, sur un torrent peu rapide, ont donc sensiblement, abstraction faite de leurs points les plus bas, la forme de tout autant d'ondes solitaires qui seraient propagées dans un canal ayant pour profondeur primitive à peu près la *profondeur critique*.

Je renvoie au chapitre VIII pour l'intégration de cette équation (51) ainsi transformée.

membre de l'équation (49). La courbure  $\frac{d^2z}{ds^2}$  reste donc toujours négative, ce qui montre que le profil longitudinal de la surface doit s'abaisser progressivement sans présenter aucun point d'inflexion.

A une première approximation, on peut encore réduire l'équation différentielle à sa forme (51), c'est-à-dire que le profil longitudinal affecte encore la forme qui résulte de l'intégration de cette équation, et qui n'a plus alors, de l'onde solitaire, que le nom. C'est une courbe qui ressemble vaguement à une branche d'hyperbole ayant pour asymptotes la surface correspondant au régime uniforme et une droite verticale et qui peut se construire facilement. On en trouvera le dessin coté à la page 383 de *l'Essai sur la théorie des eaux courantes*.

## § 6

### ÉTRANGLEMENT OU ÉLARGISSEMENT DU LIT

**136. Effet d'un long étranglement.** — Ce n'est pas à la résolution de ces problèmes généraux que l'on peut borner les indications de la théorie sur les conditions de l'écoulement dans les canaux découverts. D'autres problèmes, un peu plus particuliers ou spéciaux, peuvent aussi recevoir une solution approximative. Nous traiterons d'abord celui de l'effet produit sur un canal découvert par un rétrécissement de la section assez long pour que le mouvement y devienne uniforme.

Nous supposerons toujours, pour simplifier, une section transversale rectangulaire, ce qui constitue, quelle que soit l'inclinaison des rives, une approximation suffisante pour les cours d'eau très larges par rapport à leur profondeur.

Considérons donc un canal découvert de pente constante  $i$ , de largeur  $l$  et de profondeur  $H$ , dans lequel le régime uniforme est établi. En appelant toujours  $U$  la vitesse moyenne, nous aurons, entre ces quantités, la relation :

$$Hi = bU^3.$$

Supposons qu'à partir d'un certain point, et sans changer la pente du cours d'eau, on diminue sa largeur qui deviendra  $l'$ , sur une longueur indéfinie vers l'aval.

A une certaine distance en aval du point où commence la largeur  $l'$ , un nouveau régime uniforme s'établira, défini par l'équation :

$$H'i = bU'^2 ;$$

et comme le débit est resté le même, on aura aussi :

$$H/U = H'/U'.$$

On en déduit, si l'on admet que  $b$  ait la même valeur dans les deux cas, ce qui n'est pas absolument exact puisque ce coefficient dépend de  $H$  :

$$\frac{H'}{H} = \frac{U'^2}{U^2} = \frac{H_1 b}{H'^2 l'^2} = \sqrt[3]{\frac{l^2}{l'^2}}.$$

Et, par suite, l'exhaussement du niveau  $y = H' - H$  sera :

$$(52) \quad y = H' - H = H \left[ \sqrt[3]{\frac{l^2}{l'^2}} - 1 \right].$$

Les deux niveaux, à des profondeurs  $H$  et  $H'$  dans la partie large et dans la partie étroite, se raccorderont par une courbe de remous formée d'une partie  $CC'$  asymptote à la ligne de profondeur  $H$  et située au-dessus de cette ligne (fig. 70), comme dans le premier cas considéré plus haut (n° 125).

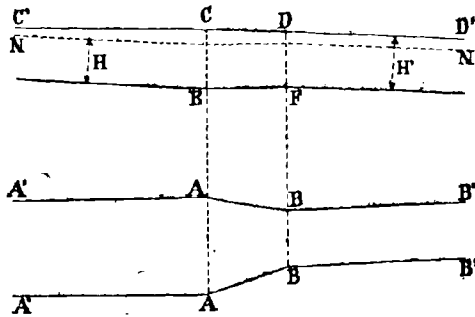


Fig. 70.

Pour raccorder cette ligne à la profondeur  $H'$  on doit remarquer que, entre les deux profils  $A$  et  $B$ , la vitesse passant de la valeur  $U$  à la valeur plus grande  $U'$ , il faut qu'il existe une pente superficielle égale en totalité à  $\frac{U'^2 - U^2}{2g}$ . La profondeur  $DF$  du profil  $B$  étant

égale à  $H'$ , celle CE du profil A est égale à  $H'$  augmentée de cette quantité. Cela donne le point C par lequel devra passer la courbe de remous CC' que l'on tracera comme dans le cas d'un barrage transversal (n° 128).

La formule précédente montre que le remous produit par un long étranglement est proportionnel à la profondeur du cours d'eau <sup>1</sup>. On doit donc procéder avec d'autant plus de circonspection aux travaux d'endiguement qui rétrécissent le lit d'une rivière, qu'elle présente des crues plus élevées. Pour  $l' = \frac{1}{2} l$ , on aurait à peu près  $y = 0,60H$ ; pour  $l' = \frac{4}{5} l$  ce qui représente un empiètement d'un *cinquième*, on a  $y = 0,164$  soit environ  $\frac{1}{6} H$  : les crues seraient exhaussées de  $\frac{1}{6}$  de leur hauteur.

Si les rétrécissements par endiguements continus peuvent être désastreux pendant les crues (lorsque  $H$  est grand), en relevant leur niveau, on voit, par contre, qu'ils n'ont d'influence appréciable sur les basses eaux (lorsque  $H$  est petit), que s'ils atteignent une proportion considérable. En resserrant une rivière qui n'aurait que 0<sup>m</sup>,50 de profondeur, au moyen de digues qui lui enlèveraient la moitié de sa largeur, ou n'augmenterait la profondeur que des soixante centièmes de sa valeur primitive soit de  $0,60 \times 0,50 = 0,30$ ; on n'obtiendrait donc qu'une profondeur totale de 0<sup>m</sup>,80; et encore il faudrait pour cela que l'endiguement eût lieu sur une grande longueur.

Ces résultats doivent, comme il a été dit, être considérés comme approximatifs.

### 137. Étranglement de longueur restreinte. —

Lorsque l'étranglement n'est pas assez long pour que le mouvement uniforme puisse s'établir dans la portion rétrécie, la surélévation produite à l'amont est employée à accroître la vitesse de l'écoulement dans cette partie étranglée et le mouvement y reste varié. La forme de la surface libre y est alors celle du remous d'abaissement étudiée au n° 129. Cette surface libre s'abaisse au point D' (fig. 71) au-dessous de la profondeur  $H$  correspondant au régime uniforme; dans la partie large et au point où l'étranglement cesse, elle remonte brusquement de D' en C' pour retrouver

1. Dupuit.



cette profondeur  $H$  qui se continue ensuite indéfiniment vers l'aval. Le relèvement, entre  $D'$  et  $C'$ , est dû à la différence de charge correspondant à la différence des vitesses. Si l'on appelle  $H$ ,  $l$  et  $U$  la profondeur, la largeur et la vitesse moyenne en  $A'C'$ , et  $x$  la différence de profondeur en  $D'$  et en  $C'$ , la profondeur en  $D'$  étant  $H - x$  et la largeur  $l'$ , la section sera  $l'(H - x)$  et la vitesse  $U' = U \frac{lH}{l'(H-x)}$ . La différence de charge  $x$ , due à la diminution de vitesse, sera <sup>1</sup> :

$$(53) \quad x = \alpha \frac{U'^2 - U^2}{2g} = \alpha \frac{U^2}{2g} \left( \frac{l^2 H^2}{l'^2 (H-x)^2} - 1 \right),$$

ou en développant après avoir multiplié par  $(H - x)^2$  :

$$H^2 x - 2Hx^2 + x^3 = \sigma \frac{U^2}{2g} \left( \frac{l^2 H^2}{l'^2} - H^2 + 2Hx - x^2 \right),$$

équation du troisième degré en  $x$  qui aura toujours une racine positive et souvent trois racines positives réelles.

Deux de ces racines, au moins, correspondent à des états d'équilibre possibles pour la surface libre. M. Vauthier, ingénieur des ponts et chaussées, a fait à Roanne une série d'expériences dans lesquelles il a réalisé ces deux positions d'équilibre, et il a constaté que la supérieure seule était stable <sup>2</sup>.

La profondeur dans la section  $B'$  étant calculée d'après la valeur de  $x$ , la surface libre affecte, à l'amont, de  $D'$  en  $D$ , la forme de la courbe du remous d'abaissement étudiée au n° 129. Si l'étranglement est assez long, cette courbe se rapproche de l'asymptote située à une profondeur  $H'$  et correspondant au mouvement uniforme dans la partie rétrécie. C'est ce que nous avons admis tout à l'heure.

**138. Effet d'un élargissement du lit.** — Si, au lieu de présenter un rétrécissement, le lit présente un élargissement d'une grande longueur ou bien d'une longueur modérée, il se produira des phénomènes analogues susceptibles d'être calculés par les mêmes équations.

Lorsque l'élargissement pourra être considéré comme ayant une

1. C'est l'application de la formule générale du mouvement permanent varié. On peut, en particulier, déduire cette équation de celle (16) établie au n° 120, page 232, en l'intégrant et en négligeant le premier terme du second membre qui représente le frottement sur l'étendue comprise entre les deux profils considérés.

2. Indication sommaire des résultats d'expériences faites à Roanne pour l'étude de quelques conséquences du mouvement permanent. — Annales des ponts et chaussées, 1848, 1<sup>er</sup> semestre, page 129.

longueur indéfinie, de telle sorte que le régime uniforme y soit établi, il se produira, au passage de la partie plus étroite à la plus large, un abaissement du niveau qui sera mesuré par l'équation (52), dans laquelle on fera  $l'$  plus grand que  $l$ . Le niveau de l'eau, dans la partie élargie, se relèvera successivement en approchant de l'extrémité de l'étranglement, la surface libre aura la forme de la courbe du remous d'exhaussement et se raccordera, comme il est dit au n° 136, à la profondeur plus grande correspondant à la partie rétrécie qui y fait suite. Si l'élargissement est court, il pourra arriver que l'étendue du remous soit notablement plus longue que lui et que la surface libre se trouve encore relevée à l'origine de l'élargissement; il se produira alors, en ce point, un relèvement brusque analogue à celui qui vient d'être étudié et dont le calcul donnera lieu à la résolution d'une équation du 3<sup>e</sup> degré. Dans ce dernier cas, d'un élargissement relativement court, le profil longitudinal des eaux présente la forme indiquée dans la figure 72.

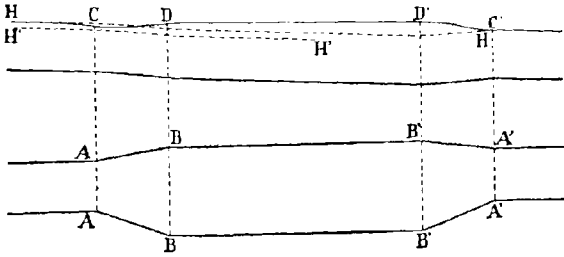


Fig. 72.

La ligne HH est celle du régime uniforme qui correspond à la section rétrécie et qui existe en aval de la section A' et asymptotiquement en amont de la section A. De D' en C', il se produit une

différence de niveau  $\alpha \frac{U'^2 - U^2}{2g}$  et cette différence correspond à une

profondeur plus grande en D', puisqu'il y a accroissement de vitesse entre les deux sections. À partir de D', en remontant, commence la courbe de remous d'exhaussement qui serait asymptote à la ligne H'H' du régime uniforme dans la portion élargie si cette portion était assez longue. Mais si en D, à l'origine de l'élargissement, elle est encore au-dessus de la ligne HH ou du niveau dans la portion rétrécie d'amont, le niveau s'abaissera en C, de telle manière qu'entre C et D, se produise la différence de niveau  $\alpha$  donnée par l'équation du 3<sup>e</sup> degré; puis en amont du point C la surface

libre aura la forme d'un remous d'abaissement et se raccordera asymptotiquement à la ligne HH du régime uniforme.

Ce dernier exemple met en évidence une conséquence intéressante au point de vue pratique : un élargissement de longueur modérée pratiqué sur un cours d'eau peut être accompagné d'une surélévation du niveau. Cela résulte en effet de la comparaison du niveau HCDD'C'H que prend la surface libre dans le cours d'eau lorsqu'il existe un élargissement, avec le niveau rectiligne HH correspondant au régime uniforme qu'il prendrait si la section restait partout la même ou si le lit, au lieu d'être limité par les rives ABB'A', l'était simplement par les rives rectilignes AA'. Cette surélévation, dont le

maximum au point D' est  $\alpha \frac{U^2 - U'^2}{2g}$ , peut être assez grande. Si,

par exemple, comme l'indique Dupuit, l'on a  $U = 5^{\text{m}00}$ , ce qui n'a rien de trop excessif en temps de crue pour certains cours d'eau, et si  $U' = 2^{\text{m}50}$ , ce qui ne correspond qu'à un doublement de la section transversale, on a  $\frac{U^2 - U'^2}{2g} = \frac{25.00 - 6.25}{2 \times 9,8} = 1$  mètre environ.

Des approfondissements ou des relèvements partiels du fond conduiraient à des résultats semblables que l'on calculerait de la manière suivante. A chaque changement de section, la formule  $z = \frac{U^2 - U'^2}{2g}$  donne la différence de niveau. Si, ensuite, sur une certaine étendue en amont, le canal conserve sa section, la surface libre prend la forme d'une courbe de remous d'exhaussement ou d'abaissement suivant que le point de départ se trouve au-dessus ou au-dessous de la ligne du régime uniforme.

### 139. Effet d'un étranglement graduel, mais peu long.

— Dupuit a calculé aussi l'effet produit sur un cours d'eau par un étranglement, dans lequel les sections transversales varieraient graduellement et diminueraient proportionnellement à leur distance à l'origine, puis augmenteraient ensuite suivant une loi analogue.

Désignons par  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, U_0, U_1, U_2$  les sections transversales et les vitesses moyennes dans les trois sections  $A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2$  (fig. 73), situées respectivement en amont de l'étranglement, dans la partie la plus étranglée, et en aval de l'étranglement, où la section a repris sa dimension normale. Soient aussi  $L_1, L_2$  les distances mutuelles de ces trois sections et L la longueur totale de l'étranglement :  $L = L_1 + L_2$ . Si  $\omega$  est l'aire d'une section transversale située à une distance  $s$  en aval de la section étranglée, nous supposons que

$\omega = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{L_2} s$ , et celle d'une section située à une distance  $s$  en

amont de la même section étranglée  $\omega_1$  serait  $\omega = \omega_1 + \frac{\omega_0 - \omega_1}{L_1} s$ .

Le débit est constant et la vitesse moyenne  $U$  dans la section quelconque  $\omega$  est liée aux autres quantités par la relation :

$$\omega U = \omega_0 U_0 = \omega_1 U_1 = \omega_2 U_2.$$

Étudions d'abord ce qui se passe dans la partie aval de l'étranglement, entre les sections  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  supposons que dans cette

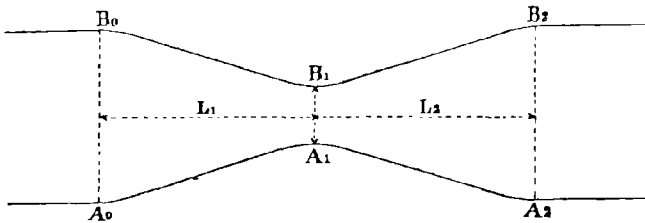


Fig. 73.

section  $A_2B_2$  le régime soit uniforme ; nous pourrions d'abord écrire, en appelant  $i$  la pente constante du canal et  $R$  le rayon moyen de cette section :

$$Ri = bU_2^2.$$

Appliquons l'équation générale du mouvement varié sous la forme déduite de celles (16) et (17) ci-dessus, que nous écrirons :

$$dh = -\alpha \frac{UdU}{g} + \left( i - \frac{Z}{\omega} b U^2 \right) ds,$$

et intégrons-la entre les deux sections considérées ou sur la longueur  $L_2$ . Appelons  $y_2$  la différence de niveau entre la surface libre dans l'une et l'autre de ces deux sections, ou bien faisons  $y_2 = \int_0^{L_2} (-dh)$ , nous obtiendrons :

$$y_2 = \alpha \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \int_0^{L_2} \left( \frac{Z}{\omega} b U^2 - i \right) ds.$$

Le rapport  $\frac{Z}{\omega}$  sera, en général, comme  $\omega$  elle-même, une fonction de  $s$  et l'on devra l'exprimer ainsi pour effectuer l'intégration. Pour simplifier, et dans l'impossibilité de laisser la question indéterminée, on doit faire une hypothèse simple sur la loi de cette variation ;

on peut supposer, ou bien  $\gamma$  constant, ou bien  $\frac{Z}{\omega}$  constant ; ces deux suppositions conduisent à des résultats différents. Prenons la seconde,  $\frac{Z}{\omega}$  constant, et égal, par conséquent, à l'inverse  $\frac{1}{R}$  du rayon moyen de la section  $A_2B_2$ . Remplaçons  $\frac{Z}{\omega}$  par  $\frac{1}{R}$ , puis  $U^2$  par  $\frac{U_2^2 \omega_2^2}{\omega^2}$ , et enfin  $\frac{bU_1^2}{R}$  par  $i$  ; l'équation deviendra :

$$y_2 = \alpha \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \int_0^{L_2} i \left( \frac{\omega_2^2}{\omega^2} - 1 \right) ds.$$

Mettons pour  $\omega$  sa valeur en  $s$  et faisons l'intégration, nous obtiendrons, toutes réductions faites :

$$y_2 = \alpha \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + i L_2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right).$$

Exprimons maintenant  $U_1$  en fonction de  $U_2$  et de  $\frac{Ri}{b}$ , ainsi que des sections  $\omega_1, \omega_2$ , il viendra définitivement :

$$y_2 = i \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) \left[ L_2 - \frac{\alpha}{2gb} R \left( 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right].$$

Le coefficient  $\frac{\alpha}{2gb}$  a les valeurs moyennes suivantes pour les diverses natures de parois :

Parois très unies. . . .	$\frac{\alpha}{2gb} = 340,$
Parois unies. . . .	270,
Parois peu unies. . . .	210,
Parois en terre. . . .	180.

Tant que  $L_2$  est plus petit que  $\frac{\alpha}{2gb} R \left( 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$ ,  $y_2$  est négatif, il y a dépression dans la section rétrécie et cette dépression est d'autant plus considérable pour un étranglement donné  $\left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$  que le rayon moyen de la section transversale d'aval est plus grand et que la pente du cours d'eau est plus forte. Lorsque  $L_2$  est précisément égal à cette quantité, il n'y a, dans la section rétrécie, ni dépression, ni exhaussement. Lorsque, au contraire,  $L_2$  est plus grand, il y a exhaussement.

Appliquons la même équation et le même calcul à la portion de l'étranglement de longueur  $L_1$ , comprise entre les sections  $A_0B_0$  et  $A_1B_1$ ; nous obtiendrons, en appelant  $y_1$  la différence de niveau dans ces sections et supposant toujours  $\frac{X}{\omega} = \frac{1}{R}$ :

$$y_1 = \alpha \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} + iL_1 \left( \frac{\omega_2^2}{\omega_0 \omega_1} - 1 \right);$$

par suite la différence de niveau totale due à l'étranglement et mesurée entre les deux sections extrêmes  $A_0B_0$  et  $A_2B_2$  sera, en la désignant par  $y = y_2 + y_1$ :

$$y = \alpha \frac{U_2^2 - U_0^2}{2g} + i \left[ L_1 \left( \frac{\omega_2^2}{\omega_0 \omega_1} - 1 \right) + L_2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) \right].$$

Le premier terme peut encore prendre la forme  $\frac{\alpha}{2gb} Ri \left( 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right)$  ce qui ne laisse subsister, dans l'expression de  $y$ , que les sections transversales  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ . Comme approximation, il est souvent suffisant de supposer  $\omega_0 = \omega_2$ , le premier terme se trouve annulé, et dans la parenthèse on peut mettre en facteur  $\left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)$ . L'expression de  $y$  devient alors, en remarquant que  $L$  représente la longueur totale  $L_1 + L_2$ :

$$y = iL \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right).$$

Sous cette forme approximative simple, on voit que le gonflement total produit par un étranglement graduel est toujours positif et représente une surélévation à l'amont. La pente du lit sur la longueur  $L$  considérée étant  $iL$ , le premier terme  $iL \frac{\omega_2}{\omega_1}$  représente la différence d'altitude de la surface libre dans les deux sections extrêmes.

Il n'est pas inutile de faire observer que le calcul de  $\omega_2$  suppose connue la dénivellation désignée plus haut par  $y_2$  dans l'expression de laquelle figure aussi la quantité  $\omega_2$ , que l'on devrait y exprimer en fonction de  $y_2$ ; l'équation ne pourrait être résolue que par la méthode de fausse position.

**140. Effet d'un étranglement brusque. — Passage de l'eau sous un pont.** — Si l'effet d'un étranglement graduel peut à la rigueur se calculer au moins d'une façon approchée, celui d'un

étranglement brusque est beaucoup plus incertain ; la solution que l'on peut en donner n'est pas très satisfaisante. Peut-être pourrait-on se contenter d'admettre que, de part et d'autre de la section étran-

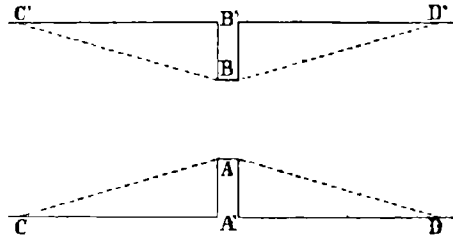


Fig. 74.

glée, la section vive dans laquelle se produit en réalité le courant, augmente progressivement, et assimiler l'étranglement brusque à un étranglement progressif en supposant que tout ce qui est hors de la section vive, rempli par du liquide à l'état de tourbillonnement, peut être assimilé à un solide. Même dans cette hypothèse, il resterait une grande incertitude sur l'inclinaison, par rapport à la direction du courant, que l'on devrait admettre pour ces parties mortes de la section. D'après Bresse, on devrait prendre une inclinaison assez faible, 3 ou 4 degrés. Alors, en supposant que la section étranglée  $\omega_1$  ait sensiblement la même profondeur  $h$  que les sections d'amont et d'aval, et que, par suite, les largeurs superficielles soient proportionnelles aux aires de ces sections, chaque saillie, telle que AA' ou BB' (fig. 74), étant alors égale à  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2h}$ , chacune des longueurs A'C, A'D serait à peu près de 20 fois la saillie et la longueur totale L de l'étranglement serait approximativement  $\frac{20(\omega_2 - \omega_1)}{h}$ . Le gonflement produit par un étranglement brusque serait ainsi exprimé par :

$$(54) \quad y = 20i \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{h\omega_1} ;$$

et il correspondrait, non pas seulement au passage rétréci, mais à la dénivellation produite entre les deux sections CC' et DD', prises assez loin en amont et en aval pour que les filets liquides y soient redevenus sensiblement parallèles.

Cette formule donne lieu, d'ailleurs, à l'observation suivante :

Dans l'hypothèse simplificative où la profondeur  $h$  est la même

dans les diverses sections, leurs superficies  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  sont proportionnelles aux largeurs  $l_1$ ,  $l_2$ , et elle se réduit à

$$y = 20 il_1 \left( \frac{l_2}{l_1} - 1 \right)^2$$

Il en résulterait que  $y$  ne dépendrait que des largeurs et serait indépendant de la profondeur  $h$ ; la surélévation serait la même en eaux basses et en eaux hautes, ce qui est invraisemblable.

On peut calculer le gonflement produit par un étranglement brusque au moyen de la formule (53) du n<sup>o</sup> 137 :

$$y = \alpha \frac{U^2 - U'^2}{2g},$$

en mettant pour  $U$  et  $U'$  les quotients du débit  $Q$  par les sections transversales. Si on appelle, comme plus haut,  $H$  la profondeur qui correspondrait au régime uniforme que l'on suppose exister à une certaine distance en aval de la section étranglée, et si l'on néglige le relèvement de la surface libre qui se produit nécessairement dans cette partie par suite de la diminution de vitesse,  $H$  sera aussi la profondeur dans la section rétrécie. Si  $l$  est sa largeur, l'aire de cette section sera  $lH$ , mais on doit admettre qu'il se produit une contraction, de telle sorte que la section réelle, servant à l'écoulement, est égale au produit de  $lH$  par un coefficient  $\mu$  plus petit que l'unité. En amont de la section étranglée, la profondeur  $H$  est devenue  $H + y$ , et la largeur étant  $l$ , la section est  $l(H + y)$ . On a alors l'équation :

$$(54) \quad y = \alpha \frac{Q^2}{2g} \left[ \frac{1}{\mu^2 l^2 H^2} - \frac{1}{l^2 (H + y)^2} \right],$$

qui est tout à fait analogue à celle (52) que nous avons trouvée plus haut. Elle est du 3<sup>e</sup> degré en  $y$  et pourra servir à déterminer cette inconnue si l'on est fixé sur la valeur à donner au coefficient de contraction  $\mu$ . D'après Eytelwein, pour appliquer cette formule au passage de l'eau sous un pont, il faudrait prendre  $\mu = 0,85$  quand les piles présentent carrément leur face antérieure au courant et  $\mu = 0,95$  quand elles ont des avant-becs aigus. Mais il est vraisemblable, dit Bresse, que ce coefficient ne dépend pas uniquement de la forme des piles et qu'il varie avec le rapport  $\frac{l'}{l}$ , car si ce rapport atteignait l'unité, toute contraction disparaîtrait, de manière qu'on aurait alors  $\mu = 1$ .

Il ne faut pas croire que cette formule, malgré sa complication plus grande, procure une approximation supérieure à celle que l'on



trouvera par la formule simple (54), et qui n'aurait besoin que d'avoir son coefficient numérique déterminé par quelques expériences pour donner des résultats à peu près suffisants. La dernière formule (55) néglige, en effet, comme on a dit, la contre-pente qui doit exister, dans tous les cas, en aval de la section rétrécie, bien que souvent l'agitation de l'eau et ses ondulations la rendent à peu près impossible à mesurer et même à constater. Il faut n'admettre les résultats du calcul qu'avec réserve et comme une première indication.

#### 141. Affouillements qui en sont la conséquence. —

La dénivellation dont on vient de donner le calcul approximatif n'est pas la seule conséquence du passage de l'eau dans une section rétrécie. Sous l'action de la vitesse plus grande qui s'y produit, les matières qui constituent le fond peuvent être entraînées et des affouillements peuvent compromettre la solidité des fondations de l'ouvrage qui rétrécit la section. C'est surtout autour des piles de pont que cet effet est à craindre.

Des expériences ont été faites sur ce sujet, sous la direction de Belgrand, par A. Durand-Claye. Voici comment il en a résumé les résultats <sup>1</sup>.

Les expériences ont porté sur trois formes de piles différentes (fig. 75) : 1<sup>o</sup> piles à section horizontale entièrement rectangulaire ; 2<sup>o</sup> piles à section rectangulaire terminée par deux demi-circonférences ; 3<sup>o</sup> piles à section rectangulaire terminée par deux triangles.

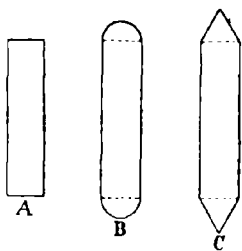


Fig. 75.

Dans les trois cas, les affouillements se sont manifestés à l'amont des piles et sur les côtés, les atterrissements à l'aval. La chute des ponts vers l'amont trouve ainsi une justification expérimentale ; il convient donc, comme l'avait déjà indiqué Minard dans un mémoire publié en 1856, de veiller spécialement à la solidité des fondations du côté de l'amont.

La forme rectangulaire est la moins convenable pour les piles ; elle donne un affouillement considérable à l'amont, des affouillements latéraux continus. La formetriangulaire, fendant le courant, annule à peu près l'affouillement d'amont suivant l'axe, mais le maintient, en l'exagérant, aux épaulements d'amont où se manifeste ainsi l'inconvénient d'un changement brusque de direction

1. *Hydraulique. Expériences sur les affouillements. Annales des ponts et chaussées*, 1873, 1<sup>er</sup> semestre, page 467.

dans la paroi solide de la pile. La pile ronde évite cet inconvénient par la continuité de sa forme et de son action, mais n'a pas l'avantage d'annuler l'effet d'affouillement sur l'axe ; elle produit à l'amont sur tout son pourtour un affouillement moins large que ne l'est celui de la pile rectangulaire.

M. Durand-Claye pense qu'on réunirait à l'amont les avantages des deux formes triangulaire et ronde en adoptant pour la pile une section à double courbure (fig. 76) présentant la double propriété de faire diverger les molécules sur l'axe et de diriger progressivement le courant sous l'arche sans changement brusque de tracé. Il me semble qu'on arriverait plus simplement au même résultat en adoptant pour la pointe la forme d'un triangle rectiligne DCE. Les parties concaves du profil ne semblent d'aucune utilité, puisque le triangle rectiligne suffit à empêcher les affouillements à la pointe. Cette forme paraît de nature à éviter tout affouillement exagéré à l'amont et par suite un développement excessif des radiers ou des massifs de fondation.

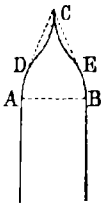


Fig. 76.

A l'aval, la production constante des atterrissements ôte un intérêt bien majeur au choix d'une forme plutôt que d'une autre. La forme triangulaire présente un certain désavantage à cause de sa tendance à faire converger les courants latéraux vers l'axe avec production d'un sillon, lequel est avantageusement remplacé, dans le cas de la pile ronde, par un dos d'âne à pente douce. La combinaison d'un avant-bec triangulaire et d'un arrière bec rond, comme au pont Saint-Ange, à Rome (fig. 77), paraît une solution à la fois pratique et rationnelle.

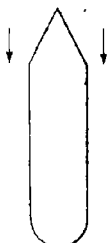


Fig. 77.

Elle le serait encore davantage, d'après ce qui vient d'être dit, si le triangle d'amont était raccordé par un arc de cercle avec la partie rectangulaire, comme dans la figure 76.

Il serait à désirer que ces expériences fussent reprises et complétées, en les faisant porter sur des lits artificiels formés d'une épaisseur suffisante de matières meubles, épaisseur qui était un peu trop réduite dans les expériences de Durand-Claye.

## CHAPITRE VI

# COURS D'EAU NATURELS

---

§ 1. *Mobilité du lit.* — § 2. *Entraînement et suspension.* —  
§ 3. *Influence de la forme des rives.* — § 4. *Ecoulement souterrain.* — § 5. *Jauges.*

### § 1

#### MOBILITÉ DU LIT.

**142. Généralités**<sup>1</sup>. — Il est bien rare qu'un cours d'eau naturel présente à la fois une section transversale régulière, une pente constante, et un lit non affouillable et sensiblement rectiligne. Ces conditions, qui sont celles des canaux auxquels s'appliquent les considérations développées dans le chapitre qui précède, ne sont parfois réalisées approximativement, dans les fleuves ou rivières, que sur de très petites longueurs où l'écoulement se trouve influencé par les modifications du lit en amont ou en aval. On peut cependant essayer de se rendre compte de la façon dont l'écoulement se produit dans un lit de forme variable.

Reprenons, pour cela, la formule générale (18) du mouvement varié (n° 120, page 233) ici reproduite :

$$dx = \frac{\alpha U dU}{g} + \frac{\chi}{\omega} b U^3 ds$$

1. Une grande partie des considérations développées dans ce numéro et dans les deux suivants est extraite du mémoire de M. Lokhtine, *Sur le Mécanisme du lit fluvial*, St-Petersbourg, 1897, ou des notes publiées sur cet intéressant travail par M. Vauthier, et par M. Fargue, dans le bulletin de la société des Ingénieurs civils de France (avril 1898).

et rappelons-nous que le facteur  $\frac{\chi}{\omega} b U^2$  qui multiplie  $ds$  dans le dernier terme n'est qu'une forme empirique du coefficient destiné à représenter le frottement du liquide sur lui-même et sur les parois du lit (voir le n° 25 et en particulier la note de la page 42). Il pouvait y avoir intérêt, lorsque les quantités  $\chi$ ,  $\omega$ ,  $U$  qui y figurent sont constantes ou à peu près, à s'en servir pour exprimer le frottement ; mais il n'en est plus de même lorsque tous ces éléments sont eux-mêmes variables suivant des lois inconnues : leur présence dans la formule n'est qu'une complication de plus, et elle est bien peu justifiée si l'on considère combien est contestable le raisonnement qui les y a amenés. Désignons donc par une seule lettre,  $\varphi$ , le coefficient de frottement ou plutôt de résistance au mouvement de l'eau, coefficient variable suivant des lois inconnues avec les diverses circonstances de l'écoulement, nous écrirons la formule du mouvement sous la forme :

$$dz = \frac{\alpha U dU}{g} + \varphi ds.$$

et, en l'intégrant entre deux sections caractérisées pour les indices 0 et 1, nous obtiendrons :

$$(1) \quad z_1 - z_0 = \alpha \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} + \int_{s_0}^{s_1} \varphi ds.$$

Le premier terme du second membre représente la hauteur correspondant à la différence de force vive du liquide dans les deux sections considérées. Il est positif ou négatif suivant que  $U_1$  est plus grand ou plus petit que  $U_0$ , c'est-à-dire suivant que la vitesse moyenne a augmenté ou diminué. Le second terme représente la hauteur correspondant au travail nécessaire pour vaincre la résistance au mouvement. Il est toujours positif et il croît toujours avec  $s$ .

Si l'on envisage une grande longueur de cours d'eau naturel, le premier terme sera alors négligeable par rapport au suivant : la différence de niveau entre les points extrêmes, presque tout entière, sera employée à surmonter le frottement. Il n'en sera plus de même s'il s'agit d'une courte portion terminée par deux sections transversales de superficies très différentes, dans lesquelles, par conséquent, la différence des vitesses moyennes  $U_0$  et  $U_1$  est assez grande. Le premier terme du second membre, positif ou négatif, acquiert alors une valeur comparable et même parfois supérieure à celle du second, et la chute totale  $z_1 - z_0$  peut devenir négative. Il se produit alors

un phénomène analogue au ressaut que nous avons étudié au n<sup>o</sup> 71.

Bien des cours d'eau naturels présentent, sur une étendue plus ou moins grande, dans leur lit, une succession de sinuosités presque régulières d'une forme analogue à celles de la courbe ABA'B'A''B''... de la figure 78, formées chacune d'une partie à pente rapide à laquelle succède un plafond sensiblement horizontal ou légèrement concave suivi d'une contre-pente plus ou moins accentuée. On trouve ainsi une suite de points saillants A, A', A''... auxquels on donne les noms de *seuils*, de *maigres*, ou de *hauts-fonds*, séparés par des cuvettes plus profondes appelées *biefs*, *mouilles* ou *bas fonds*.

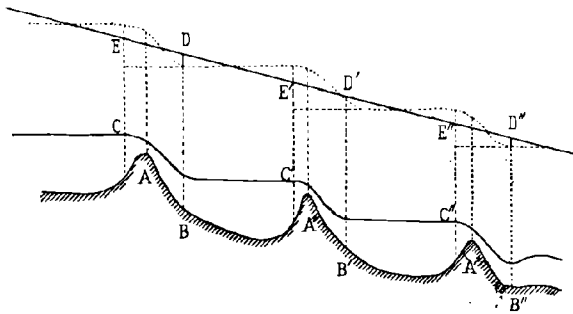


Fig. 78.

Lorsque le débit du cours d'eau est faible, les seuils A, A', A'' sur lesquels passe une lame mince retiennent l'eau dans les mouilles sous une pente de surface très faible. Ce n'est qu'à partir des points C, C', C'' situés en amont des seuils que la surface du courant s'incline pour imprimer à l'eau la vitesse exigée par le débit, à l'image de ce qui se passe dans le cas d'un déversoir. Dans l'étendue des rapides, l'eau coule avec des vitesses plus ou moins grandes suivant les dispositions du lit et il arrive souvent qu'au pied du maigre, à la rencontre du bief inférieur, se produit une contre-pente, ainsi qu'il est indiqué en B'.

Lorsque le débit augmente, le profil du courant ne reste pas parallèle au profil d'étiage. Avec des variations dépendantes des accidents du lit, à mesure que le niveau général des eaux s'élève, la pente augmente dans les mouilles, diminue au droit des rapides et le profil tend à se rectifier suivant une ligne droite représentant la pente moyenne dans l'étendue considérée. Dans une partie du courant telle que BD B'D' comprise entre les pieds de deux rapides consécutifs, nous trouverons une portion DBC'E' correspondant à la mouille dans laquelle la vitesse moyenne sera plus faible (si nous

supposons la largeur constante) que dans la portion C'E'D'B' correspondant au maigre. Ces deux parties présentent encore un caractère différent : pour la première la vitesse est plus forte en aval qu'en amont et c'est le contraire pour la seconde. Cela explique comment, nonobstant la différence des vitesses, la pente puisse être identique dans les deux parties. Il peut même arriver, dans certains cas, que la pente dans l'étendue du bief soit plus forte qu'au droit du rapide, bien que la vitesse moyenne y soit plus faible.

La pente superficielle et la vitesse moyenne n'ont donc pas toujours, dans les cours d'eau naturels, la relation étroite par laquelle nous les avons trouvées liées dans les canaux à section régulière et à pente constante. Ce n'est qu'avec une grande réserve que l'on peut conclure de l'une à l'autre : le fait des contrepentes superficielles en témoigne d'une façon péremptoire et l'interprétation de l'équation générale (1) ne peut laisser aucun doute à ce sujet.

La distinction que nous avons faite plus haut (n° 123) entre les cours d'eau à faible et à forte pente s'applique aux cours d'eau naturels. Dans le cours d'eau dont le profil est représenté par la fig. 78, les parties telles que CB, C'B'... correspondant aux rapides seraient en général à forte pente et auraient le caractère de torrents ; au contraire, les parties telles que BC', B'C'... correspondant aux mouilles seraient à faible pente et seraient assimilables à des rivières. D'une façon générale, dans les cours d'eau tranquilles, ou rivières, un exhaussement ou un abaissement de la surface libre produit par une cause locale se propage indéfiniment, en s'atténuant, du côté de l'amont. Dans les torrents, au contraire, ces causes locales de la variation du niveau ne se font sentir qu'à une très petite distance : les molécules fluides sont animées d'une force vive suffisante pour franchir ces obstacles sans modifier sensiblement leur mouvement ni la vitesse de celles qui les suivent, et les inégalités locales du fond se reflètent, pour ainsi dire, sur la surface libre, alors qu'elles disparaissent, dans les rivières, sous une masse épaisse animée d'une faible vitesse et dont la profondeur ne se règle que par les accidents généraux que le lit peut présenter.

**143. Effets de la mobilité du lit.** — Les cours d'eau naturels ont rarement un lit de forme invariable, et c'est là une des difficultés les plus grandes de leur étude. Ils se creusent un lit plus ou moins profond, dans la partie supérieure de leur cours, aux endroits où la pente est assez grande, suivant que le terrain qu'ils sillonnent est plus ou moins susceptible d'être délayé, entraîné ou emporté par les eaux. Le plus habituellement, au moins dans les

grands cours d'eau, l'affouillement n'a lieu qu'autant que la vitesse des filets fluides contigus aux parois atteint une certaine valeur sensiblement constante pour une nature déterminée des matières qui composent ce fond, variable au contraire avec leur grosseur, leur densité, leur degré de tassement et leur mode d'insertion. Par conséquent, dans les régions sujettes aux affouillements, la vitesse au fond doit tendre, aux époques de crues où se produisent les grandes érosions, vers une limite sensiblement constante pour les cours d'eau qui coulent sur un sol mobile d'une nature déterminée. Il en est de même, par suite, de la vitesse moyenne  $U$  dans une section, et par suite aussi du produit  $Ri$  ou  $hi$  qui est sensiblement proportionnel au carré de  $U$ . Ainsi, le produit de la pente du fond par la profondeur est, en moyenne, une quantité assez peu variable pour les cours d'eau dont le lit, constitué à peu près de la même manière, est parvenu à une stabilité relative après s'être suffisamment creusé ou comblé. Les torrents, caractérisés par de fortes pentes de fond, ne sont donc en général que de petits cours d'eau ou des cours d'eau moyens, et les rivières qui ont de faibles pentes peuvent être au contraire de grands cours d'eau.

Il arrive d'ailleurs presque toujours que la pente des cours d'eau diminue plus rapidement que la profondeur n'augmente, à mesure qu'on s'éloigne de leur source et que leur débit s'accroît de celui de leurs affluents, parce que les matériaux dont le lit est formé se composent de graviers de moins en moins gros (puisque'ils ont pu être trainés plus loin), de sables et de limons de plus en plus fins pour lesquels la vitesse d'entraînement à laquelle est proportionnelle la vitesse moyenne  $U$  et le coefficient de résistance  $b$  sont de plus en plus faibles.

Tant qu'un cours d'eau n'est pas arrivé à sa pente d'équilibre, il opère toujours la réduction de sa trop grande pente en déployant la moindre action possible. Si le sol sur lequel il coule est moins résistant à sa partie supérieure qu'au fond, ce qui est fréquent, il arrive à la stabilité en allongeant son lit par des sinuosités, sans le creuser beaucoup ; dans le cas contraire, et en supposant que les berges ne s'écroulent pas sans cesse, c'est en creusant profondément son lit sans l'allonger.

Lorsqu'après ce travail le fond de la rivière est parvenu à acquérir la pente qui convient à sa stabilité, l'établissement du régime est encore bien souvent retardé par le défaut de résistance des rives. Le lit ne peut se fixer que lorsque sa forme, sensiblement prismatique, ne présente transversalement que d'assez faibles pentes, ou encore quand le cours d'eau est contenu entre deux berges forte-

ment résistantes en tous les points où elles reçoivent le choc des courants.

Lorsqu'une rivière se jette contre une de ses rives, elle creuse au pied de cette rive un sillon qui se relève en contre-pente à mesure que le courant, s'écartant peu à peu de la digue qu'il vient de heurter, se dilate et se ralentit ; et le produit du creusement poussé en avant va se déposer sur le revers de la contre-pente et y former, en l'élevant *couche par couche*, une portion de cône du haut de laquelle la rivière se jette plus ou moins directement contre l'autre rive pour reproduire au-delà les mêmes phénomènes, et cela avec une variété infinie, suivant les accidents locaux, suivant la hauteur et le volume des eaux, etc. Il résulte de ces effets généralement observés qu'un cours d'eau est formé, comme il a été dit, au numéro précédent, d'une suite alternative de parties où la pente du fond est moindre et où il se rencontre même fréquemment des contre-pentes et d'autres parties qui sont de véritables cônes de déjections plus ou moins tronqués où la pente est plus grande.

Cet état du cours d'eau s'établit, par exemple, sous l'action des eaux ordinaires. Si une crue survient, les conditions vont se trouver modifiées : quelques-unes de ces sinuosités du profil longitudinal disparaîtront ; certaines saillies seront écrêtées, quelques creux seront comblés ; les grandes eaux donneront à l'ensemble du lit un nouveau profil en rapport avec leur volume et avec leur vitesse, et ce profil sera, comme celui des eaux ordinaires, une succession de parties à faible pente ou à contre-pente précédant les cônes de déjections, et de parties plus déclives sur le talus même de ces cônes. Le profil ainsi formé à la suite d'une crue se trouvera lui-même modifié par l'action subséquente d'eaux moins abondantes qui vont, sur les cônes de déjections où la pente est forte, se creuser des lits peu profonds en entraînant des matériaux avec lesquels elles viendront combler en partie les creux précédant les contre-pentes.

L'examen du profil en quelque sorte théorique représenté par la figure 78, montre que dans une rivière, il y a des sections où la pente superficielle augmente avec le débit, et d'autres où, au contraire la pente diminue quand le débit augmente. Or, c'est surtout pendant la période des grands débits, correspondant aux grandes vitesses, que les matières solides sont déplacées sur le fond du lit, il en résulte que les dépôts, bancs de sable ou maigres se formeront de préférence dans ces dernières parties, où la pente superficielle diminue en hautes eaux et atteint son minimum au maximum du débit. Les grandes eaux transporteront les matières solides de la



mouille au maigre suivant et les basses eaux, au contraire, les conduiront du maigre à la mouille suivante.

Dans cet état constamment variable de la forme du fond, on peut observer deux particularités distinctes. Ou bien, après chaque crue ordinaire, le fond reprend à peu près la même forme qu'après la crue précédente ; les hauts fonds, sommets de cônes de déjection, se retrouvent à peu près aux mêmes emplacements, bien qu'ils ne soient pas formés des mêmes matériaux, ceux-ci ayant été plus ou moins charriés vers l'aval, mais remplacés par d'autres ; ou bien encore la position des hauts fonds s'est déplacée elle-même de l'amont vers l'aval. Dans le premier cas, le cours d'eau est arrivé à une forme d'équilibre stable : on en a de nombreux exemples, et l'on peut dire que la plupart des cours d'eau rendent ainsi à leur lit, après chaque crue, la forme qu'il avait à la fin de la crue précédente et qui avait été modifiée pendant les eaux ordinaires, soit par l'action même de ces eaux, soit par la main de l'homme ; les bancs de gravier que l'on a dragués en basses eaux se retrouvent aux mêmes emplacements après les crues. Dans le second cas, l'équilibre est encore établi, mais dans des conditions un peu différentes : c'est un équilibre mobile dont les conditions se modifient un peu à chaque crue. Ainsi Baumgarten a observé plusieurs années de suite, sur la Garonne, un petit banc de gravier qui avançait pendant les crues de 20 à 30 mètres par an. M. Partiot et M. Sainjon ont observé sur la Loire un grand nombre de bancs de sable, appelés *grèves*, qui se trouvent entraînés insensiblement dès que la vitesse à la surface du courant dépasse environ 0 m. 30 à 0 m. 35. Ce n'est plus même ici une crue proprement dite qui est nécessaire pour déplacer ces bancs, qui avancent de quantités comparables à deux kilomètres par année.

**144. Stabilité d'un cours d'eau.** — Les cours d'eau à fond mobile nous apparaissent donc, en général, comme se modifiant à chaque instant par suite des déplacements des matériaux du fond. Les hautes eaux creusent et allongent les mouilles en exhaussant les maigres, les basses eaux, au contraire, abaissent les maigres en les allongeant pour combler les mouilles. Mais cette forme variable oscille entre des limites peu étendues ; elle se reproduit périodiquement et elle constitue un état d'équilibre que l'on peut regarder comme stable, quoique variant à chaque instant.

La division du profil longitudinal en mouilles et maigres successifs n'est pas toujours très accentuée. La forme générale du lit dépend, bien entendu, du degré de mobilité des matières qui le constituent et aussi du rapport des débits des grandes eaux à ceux

d'étiage. Si le volume des crues n'est pas beaucoup plus grand que celui des basses eaux, ou si les variations du débit sont faibles, et si les matériaux sont assez mobiles pour être déplacés par ce courant presque permanent, les inégalités du profil, en supposant qu'elles se soient produites antérieurement, ne tarderont pas à s'effacer. La même cause agissant toujours dans le même sens et avec une intensité peu variable finira par donner au lit un profil à peu près uniforme. Peu à peu, les maigres se creuseront, et les mouilles se combleront jusqu'à ce que le lit ait partout une pente correspondant à la vitesse sensiblement constante des eaux en chaque point.

Il en sera autrement si les variations du débit sont grandes. Sur un lit même régularisé par l'action prolongée d'eaux moyennes, il survient tout à coup une grande crue. Les inégalités de vitesse dues aux courbes sont alors bien plus marquées : le lit se creuse dans les parties concaves le long des rives et les matières entraînées en ces points sont amenées dans les parties droites où elles se déposent ; le profil longitudinal se trouve modifié et amené à la forme en escalier qui est comme le type des rivières à fond mobile.

Mais il faut aussi, pour cela, que les matériaux du fond ne soient pas trop menus et puissent présenter une certaine résistance à l'action des eaux moyennes ou des basses eaux. S'il n'en est pas ainsi ; si les matériaux sont tellement mobiles que le moindre courant les entraîne, les grandes eaux pourront bien donner au profil la forme sinueuse, creuser des mouilles et former des seuils, mais cette forme ne présentera aucune stabilité, les eaux moyennes d'abord, les basses eaux ensuite rendront immédiatement au lit la forme régulière correspondant à leur vitesse.

Ainsi, lorsque le lit de la rivière est relativement résistant, ou sa pente moyenne faible, la division en mouilles et maigres est nette et tranchée ; il s'établit une sorte d'équilibre ou du moins une oscillation périodique du profil longitudinal autour d'une forme stable. Tel est le Dniestre, dont la pente moyenne est de 0<sup>m</sup>19 par kilomètre et dont le lit est composé de graviers de un à quatre centimètres cubes.

Si la pente générale de la rivière est plus forte, ou, ce qui revient au même, si les matériaux de son lit sont plus mobiles, les caractères ne sont plus les mêmes ; les maigres en basses eaux présentent une pente moins rapide, leur emplacement est moins stable ; la forme en escalier du profil en long est moins accentuée.

Quand la pente est égale ou supérieure à celle qui est nécessaire pour que l'entraînement des matériaux soit continu, l'équilibre ne

s'établit pas : il y a destruction continue du fond et des berges et entraînement continu de matériaux. Tel est le cas de la Vistule dont la pente kilométrique est de 0<sup>m</sup>,30 et qui charrie un sable fin dont les grains ont en moyenne  $\frac{1}{10}$  de centimètre de diamètre.

Entre les deux types extrêmes représentés par le Dniestre et la Vistule, il y a toutes les catégories intermédiaires.

M. Lokhtine a proposé de mesurer le degré de fixité du lit d'une rivière au moyen d'un rapport spécial à chacune d'elles et justifié par le raisonnement suivant :

Chaque parcelle des matières charriées offre à l'entraînement une résistance proportionnelle à son poids, ou approximativement à son volume, ou au cube  $d^3$  sa dimension moyenne  $d$ . D'autre part la force d'entraînement est proportionnelle au carré de cette même dimension et au carré de la vitesse, lequel est proportionnel à la pente moyenne  $h$ . Le rapport de ces deux forces est donc proportionnel au rapport  $\frac{d}{h}$  et, plus ce rapport sera grand, plus grande sera la fixité du lit. M. Lokhtine appelle *coefficient de fixité* ce rapport  $\frac{d}{h}$  dans lequel  $d$  est le diamètre moyen des matières charriées exprimé en millimètres et  $h$  la pente kilométrique moyenne du courant. Ce coefficient qui n'est, pour la Vistule que 3,70 atteint la valeur 166 pour le Dniestre, type des rivières stables.

Voyons maintenant ce que l'on peut conclure de l'état de stabilité de la forme du cours d'eau dans une certaine section. Le fond du lit ayant pris, en chaque point, la forme qui convient à cet équilibre, il faut que la résistance qu'opposent, à l'érosion, les matériaux qui le constituent soit égale en tous les points à la puissance érosive. Cette puissance est, probablement, proportionnelle au carré de la vitesse au fond. D'autre part, pour des matériaux de même nature, l'érosion sera d'autant plus facile, toutes choses égales, qu'ils se trouveront sur une pente plus forte, parce qu'à la force qui tend à les entraîner s'ajoute la composante de leur poids suivant l'inclinaison du talus où ils sont placés et qui est proportionnelle à la pente  $i$  du fond en cet endroit. La force totale qui tend à faire avancer vers l'aval les matériaux du fond est donc proportionnelle, si  $w$  est la vitesse de l'eau au fond, à  $(kw^2 + i)$  en appelant  $k$  un coefficient numérique dépendant de la grandeur et de la densité de ces matériaux. Si, par hypothèse, le fond s'est établi dans une position d'équilibre, c'est qu'en chaque point cette force  $(kw^2 + i)$  est devenue égale à la résistance qu'opposent ces mêmes matériaux

à leur déplacement et qui dépend, non seulement de leurs dimensions, mais de la manière dont ils sont rangés les uns par rapport aux autres. On peut donc admettre que pour chaque nature de matériaux constituant le fond du lit d'un cours d'eau en état d'équilibre, la quantité  $(kw^3 + i)$  sera égale à une constante. Cette égalité est absolue pour tous les points où le fond a été modifié par la vitesse  $w$ . Partout ailleurs, c'est une inégalité qu'il faut écrire en considérant que la quantité  $kw^3 + i$  est restée inférieure à la force qui aurait été nécessaire pour produire cette modification.

**145. Effet d'un endiguement.** — Le long d'une rivière ainsi arrivée à l'état d'équilibre, on construit, sur une certaine longueur, des digues parallèles très résistantes qui diminuent la section libre en la resserrant. La vitesse va croître à proportion du resserrement, la force érosive augmentera aussi, et si avant le resserrement elle était égale à la résistance du fond, elle la dépassera après. Les eaux creuseront donc le lit vers l'amont de l'endiguement et déposeront vers l'aval les matériaux entraînés, jusqu'à ce que l'inclinaison du fond soit assez amoindrie pour que l'équilibre se rétablisse. En d'autres termes,  $w^3$  ayant été augmenté,  $i$  doit diminuer pour que la somme  $kw^3 + i$  reste constante. L'*endiguement continu d'une rivière réduit sa pente* et il a pour conséquence un abaissement plus ou moins considérable du plan d'eau en amont de la partie endiguée. On peut ainsi arriver à abaisser l'altitude des crues d'un cours d'eau en un point donné de son cours ; mais il faut, pour cela, prolonger le resserrement assez loin en aval et fonder les digues, vers l'amont, de manière qu'elles soient susceptibles de se maintenir malgré les affouillements.

D'ailleurs, comme les matériaux du lit ne sont généralement pas tous de même dimension, ce sont les plus petits qui sont d'abord entraînés par suite de l'augmentation de vitesse résultant de l'endiguement. Le diamètre moyen de ceux qui restent est donc plus grand qu'auparavant, ce qui montre que l'endiguement d'une rivière augmente son coefficient de fixité.

Comme exemple des effets de l'endiguement, je reproduirai ici, en abrégé (fig. 79), le profil en long de la rivière d'Arve, donné avec détails par Dausse dans ses *Études d'hydraulique pratique* à l'appui de la loi qui vient d'être énoncée et qu'il s'est attaché à mettre en lumière. On y voit que l'Arve, avant d'être endiguée, avait de l'amont vers l'aval des pentes moyennes décroissantes : 0,0028 ; 0,0023 ; 0,0019 ; et qu'après l'endiguement la pente, en amont de la partie endiguée, est devenue 0,0031, au lieu de 0,0028,

et en aval, de 0,0021 au lieu de 0,0019, mais que, dans l'étendue de l'endiguement, elle a été réduite de 0,0023 à 0,0018 par suite d'un abaissement de 2 m. 40 en amont de la partie endiguée, accompagné d'un relèvement de 1 m. 53 à l'aval.

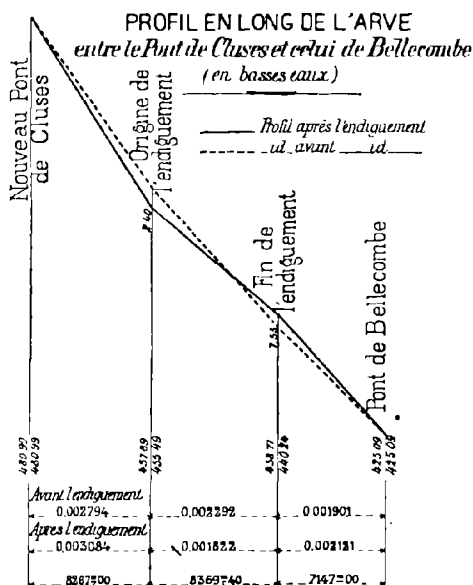


Fig. 79.

Cette loi générale, exprimée par  $kw^3 + i = \text{constante}$ , trouve encore sa confirmation expérimentale aux embouchures des grands fleuves qui, comme le Rhône ou le Pô, aboutissent à une mer dont le niveau est à peu près fixe. Dans les crues, le fleuve, s'élevant dans son lit, tandis que la mer ne s'élève pas sensiblement, prend, vers son embouchure, une pente superficielle et une vitesse considérables ;  $kw^2$  dépasse alors la constante et  $i$  doit être négatif : le fond se dispose en contre-pente, car les mêmes matériaux dont le lit est formé ne sauraient, autrement, opposer au courant une résistance qui lui fasse équilibre.

Elle a été confirmée par l'observation, et je n'en citerai qu'une vérification, la plus récente qui ait été faite à ma connaissance ; elle se trouve dans une étude de M. Fargue, sur la Garonne <sup>1</sup>, dont j'extrait les passages suivants :

1. *Étude sur la largeur du lit moyen de la Garonne. Annales des ponts et chaussées*, 1882, 2<sup>e</sup> semestre, page 303.

« Le lit de la Garonne fluviale, entre la limite du département « et Langoiran (49 kilomètres), est aujourd'hui limité partout par « des rives artificielles auxquelles on a généralement donné un « écartement à peu près uniforme, moindre que la largeur naturelle... Le premier effet des travaux de resserrement du lit a toujours été de relever brusquement le niveau de l'étiage. Cela tient « à ce que les changements que les nouvelles formes de rives apportent dans la forme des profils en travers ne se produisent pas « tant que les eaux restent basses ; il faut un débordement pour les « déterminer. Aux premières hautes eaux, il s'opère dans les grèves et dans les bancs des remaniements qui se traduisent par un « premier abaissement de l'étiage. Ce travail se continuant à chaque crue suivante, avec une intensité décroissante, et jusqu'à ce « qu'un nouvel équilibre se soit établi, l'étiage continue lui-même « à s'abaisser pendant un certain nombre d'années, et s'arrête à un « niveau déterminé, inférieur à son niveau primitif.... Entre la « limite du département et Portets, l'étiage s'est abaissé, en moins « de quarante ans, de 1<sup>m</sup>,30 en moyenne. A Baric et à Caudrot, les « eaux d'étiage ont été, en 1870, à 1<sup>m</sup>,85 en contrebas du niveau « auquel elles coulaient en 1832 ».

Cet abaissement de l'étiage est dû évidemment à un abaissement du fond du lit, occasionné par une réduction de la pente. En aval de la partie endiguée, jusqu'à Bordeaux, le fond s'est exhaussé. Il s'est donc passé quelque chose de comparable à ce que M. Dausse a constaté sur l'Arve et que représente la figure 79 ci-dessus.

La loi dont il s'agit n'avait pas échappé à l'esprit sagace des ingénieurs italiens, et déjà, en 1697, Guglielmini (cité par Dausse) avait, dans son grand traité *Della natura de fiumi*, énoncé et développé les propositions suivantes :

« *Nè fiumi, quanto maggiore sarà la forza dell' acqua, tanto « le declività degli alvei saranno minori ;*

« *Quanto maggiore sarà la tenacità del terreno che compone « il fondo del fiume, tanto esso sarà più declive ;*

« *E quanto maggiore sarà l'acqua ordinaria del fiume, sarà « ancora tanto meno declive l'alveo ».*

Elle paraît pourtant avoir été méconnue depuis, car Dausse, dans ses *Études d'hydraulique pratique*, produit, pour l'établir, des arguments et des exemples si nombreux et si variés, qu'il semble aller au devant des objections, ce qu'il n'aurait certainement pas fait si elle avait été généralement admise.

On peut s'expliquer, dans une certaine mesure, les motifs qui auraient pu la faire oublier.

**146. Comparaison avec l'effet d'un resserrement dans un canal à fond fixe.** — Si l'on rapproche le résultat qui vient d'être trouvé, comme conséquence nécessaire de tout travail de resserrement du lit d'un cours d'eau à fond mobile, de celui que nous avons calculé plus haut (n<sup>o</sup> 136), comme conséquence d'un resserrement d'un canal découvert supposé de forme invariable, on reconnaît qu'ils sont opposés. Dans le cas d'un canal découvert à fond fixe, un étranglement continu sur une certaine longueur produit un relèvement du niveau en amont, une augmentation de la pente superficielle dans l'étendue de la partie rétrécie et un abaissement du niveau vers l'aval. Au contraire, dans une rivière à fond mobile, un endiguement continu diminuant la largeur de la section produit vers l'amont un abaissement du fond du lit qui a pour conséquence un abaissement un peu moindre de la surface libre. Vers l'aval, on constate un exhaussement du fond et de la surface libre et une diminution de la pente du fond dans la partie endiguée. Cette comparaison suffit à montrer avec quelle réserve il faut appliquer, aux cours d'eau naturels, les formules qui ont été trouvées dans le chapitre précédent pour les canaux découverts. La mobilité du fond, les variations de forme qu'il éprouve peuvent renverser complètement les résultats, et en tout cas les fausser au point de leur ôter toute probabilité.

## § 2.

## ENTRAÎNEMENT ET SUSPENSION

**147. Entraînement des matériaux du lit.** — S'il n'est pas possible d'analyser exactement les efforts qui produisent l'entraînement des matériaux du fond, on peut cependant se rendre un compte sommaire des causes de leur mouvement, ce qui nous amènera à parler du cas de l'équilibre mobile du lit ou de la marche des alluvions.

Tout le monde sait que les fluides en mouvement peuvent tenir en suspension et entraîner des matières solides beaucoup plus denses qu'eux-mêmes. Ces deux effets, peu différents, sont dus à la même cause, la vitesse relative du fluide et du solide. Nous consacrerons plus loin un dernier chapitre (chap. X) à l'étude de l'action mutuelle des liquides et des solides en mouvement relatif dans les cas les

plus simples, les seuls où l'analyse puisse donner quelques résultats. Nous pouvons admettre ici, comme étant à peu près démontré, que cette action est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse relative. Cela étant, un corps solide en repos, frappé par un fluide en mouvement, sera poussé, dans le sens du mouvement, par un effort qui pourra être supérieur aux résistances qui s'opposent à son déplacement, et alors il sera entraîné. Par



Fig. 80.

exemple, un corps sphérique A (fig. 80) appuyé en B, au-dessous de son centre, sur un autre corps en saillie, étant soumis, de l'autre côté, à l'action d'un fluide en mouvement dont la résultante F passera par son centre, sera soulevé et entraîné si le moment de la force F par rapport au point B est supérieur au moment, par rapport au même point, du poids du corps évalué dans le fluide, c'est-à-dire diminué de celui du fluide déplacé.

Pour que l'entraînement se produise, il suffit que l'effort dû à la vitesse moyenne du fluide soit comparable au poids du corps solide entraîné. Soit un corps sphérique de diamètre D et de poids spécifique  $\Pi_1$ . La section transversale qu'il oppose au fluide est  $\pi \frac{D^2}{4}$  et l'effort correspondant à une vitesse moyenne U est, comme nous le verrons plus loin,  $k \frac{\Pi}{g} \pi \frac{D^2}{4} \frac{U^2}{2}$ , le coefficient numérique k ayant à peu près, pour les corps sphériques, la valeur 0,53, et  $\Pi$  représentant le poids spécifique du fluide. D'autre part, le poids du solide considéré, plongé dans le fluide, est réduit à  $\frac{1}{6} \pi D^3 (\Pi_1 - \Pi)$ , et, pour que le corps puisse commencer à être entraîné, il suffira que le rapport des ces deux forces soit égal ou supérieur à celui de leurs bras de levier par rapport aux points d'appui, tels que B, autour desquels il peut pivoter.

Appelons  $\theta$  ce rapport des bras de levier qui dépendra de l'état d'enchevêtrement des matériaux, l'équation exprimant l'égalité dont il s'agit et déterminant la vitesse à laquelle commence l'entraînement sera :

$$k \frac{\Pi}{g} \pi \frac{D^2}{4} \frac{U^2}{2} = \frac{1}{6} \pi D^3 (\Pi_1 - \Pi) \theta.$$

Si le corps n'est pas sphérique, l'équation sera la même, à la condition d'y mettre, au lieu de  $\pi \frac{D^2}{4}$ , la superficie A de la section trans-



versale exposée au courant, et au lieu de  $\frac{1}{6} \pi D^3$ , le volume  $V$  du corps, et de donner une valeur différente aux coefficients  $k$  et  $\theta$  ; elle devient ainsi :

$$k \frac{\pi}{g} A \frac{U^2}{2} = V (\Pi_1 - \Pi) \theta,$$

ce qui donne, pour le corps sphérique :

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{2\theta}{3k} \cdot D \left( \frac{\Pi_1}{\Pi} - 1 \right),$$

et pour un corps de forme quelconque :

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{\theta}{k} \frac{V}{A} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi} - 1 \right).$$

Le rapport  $\frac{V}{A}$  du volume du corps à la surface de sa section transversale et très variable suivant la forme des matériaux. Égal aux deux tiers du diamètre lorsqu'ils sont sphériques, il est plus grand que le diamètre pour des formes très anguleuses ; on peut le prendre, en moyenne, égal au diamètre pour les formes ordinaires des pierres cassées, non arrondies. Quant au rapport  $\frac{\theta}{k}$ , il ne peut évidemment être donné que par l'observation. Le coefficient  $k$ , qui vaut un peu plus de 0,50 lorsque la surface du corps est sphérique, croît et s'approche de l'unité à mesure que l'irrégularité de la surface augmente ; le nombre  $\theta$ , rapport du bras de levier de la force d'entraînement à celui du poids, doit être généralement inférieur à l'unité ; il est d'autant moindre que les matériaux sont plus complètement enchevêtrés les uns dans les autres, et il dépend probablement aussi de la grosseur des matériaux. M. Sainjon (cité par M. Partiot)<sup>1</sup>, par la discussion de quelques faits d'observation, a cru pouvoir adopter, en moyenne,  $k = 1$  et  $\theta = 0,80$ . Avec ces chiffres, la formule précédente qui, pour le rapport  $\frac{\Pi_1}{\Pi} = 2,50$  correspondant à des matériaux pesant 2,500 kilog. par mètre cube, revient à peu près à  $U^2 = 25D$ , lui a donné les valeurs suivantes des vitesses capables d'entraîner les graviers suivant leurs grosseurs :

Grosseur des graviers	0,0025	0,01	0,04	0,10	0,17	0,38	0,67
Vitesses au fond.....	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00	4,00

1. *Mémoires sur les sables de la Loire*, par M. Partiot. *Annales des ponts et chaussées*, 1871, 1<sup>er</sup> semestre, pages 259 et suivantes.

Ces résultats sont d'accord avec l'observation. Les seules expériences que l'on ait à ce sujet sont celles de Du Buat et de Telford. Du Buat a déterminé les vitesses-limites au-dessous desquelles les matières plongées cessent d'être entraînées et il a constaté les vitesses suivantes :

Indication des matières	Vitesse	
Argile brune propre à la poterie. . . . .	0 <sup>m</sup> ,081	
Sable déposé par cette argile. . . . .	0,162	
Gros sable jaune anguleux. . . . .	0,216	
Graviers de la Seine	Gros comme un grain d'anis. . . . .	0,108
	— un pois. . . . .	0,189
	— une petite fève de marris. . . . .	0,325
Galets de mer arrondis, d'un pouce au plus. . . . .	0,650	
Pierre à fusil anguleuse, du volume d'un œuf de poule. . . . .	0,975	

Telford a observé au contraire les vitesses nécessaires pour corroder le fond d'un cours d'eau, et les résultats sont les suivants :

Nature du lit	Vitesse au fond
Terre détrempée. . . . .	0 <sup>m</sup> ,076
Argile tendre. . . . .	0,152
Sable. . . . .	0,305
Gravier. . . . .	0,609
Cailloux. . . . .	0,914
Pierres cassées. . . . .	1,220
Cailloux agglomérés, schiste tendre. . . . .	1,520
Rocher en couches . . . . .	1,830
Rocher dur. . . . .	3,050

La grosseur des matériaux ni leur forme ne sont aussi bien définies dans ces dernières expériences que dans celles de Du Buat ; et bien qu'il y ait, entre les chiffres des deux tableaux, une assez grande analogie, on peut remarquer que ceux qui sont donnés par Telford paraissent un peu plus élevés que ceux de Du Buat : par exemple, argile, 0<sup>m</sup>,152 au lieu de 0,081 ; sable, 0,305 au lieu de 0,162 ou de 0,216 ; gravier, 0,609 au lieu de 0,325 au plus ; cette différence tient sans doute à ce que le fait observé n'a pas été le même, Du Buat a mesuré les vitesses au-dessous desquelles des matières, mises en suspension dans l'eau, cessent d'être entraînées, et il devait

trouver, toutes choses égales, des chiffres inférieurs à ceux de Telford qui observait les vitesses capables d'affouiller un fond de nature donnée. Les matériaux observés par Du Buat n'étaient pas appuyés les uns sur les autres, ou bien ne l'étaient que dans des conditions moins complètes que s'ils avaient préalablement formé le lit d'un cours d'eau, ayant subi l'action de vitesses inférieures à celles d'entraînement, mais capables néanmoins d'enchevêtrer les sables et les graviers.

L'état d'enchevêtrement des matériaux doit en effet avoir une grande influence sur la vitesse à laquelle ils peuvent résister avant d'être entraînés. Si l'on fait passer un courant d'eau, même assez rapide, sur du sable sec, le premier effet de l'arrivée de l'eau est de tasser le sable, d'en presser les grains les uns contre les autres et de lui donner une résistance bien supérieure à celle qu'il possédait auparavant. Ce fait est bien connu de tous ceux qui ont fréquenté des plages de sable. Quelque chose d'analogue se passe pour les graviers, galets et matériaux d'une grosseur quelconque, seulement l'effet est beaucoup plus lent. Un tas de graviers ou de galets fraîchement remués sera entraîné d'abord par un courant d'une vitesse donnée; peu à peu, les matériaux qui le composent se tasseront, s'inséreront les uns entre les autres et constitueront un fond notablement plus résistant qui ne pourra être attaqué que par un courant beaucoup plus rapide.

Dans des expériences faites dans l'isthme de Panama, du 4 au 12 juillet 1890, il a été constaté que dans une conduite demi-circulaire de 0<sup>m</sup>50 de diamètre, en pente de 0,17, un courant d'eau de 0,23 de profondeur au milieu ayant une vitesse moyenne de 2<sup>m</sup>40 environ par seconde, ou un débit de 210 litres, entraînait, avec une vitesse supérieure à deux mètres, une pierre de 0,20 × 0,10 × 0,10. Mais lorsqu'on mettait dans ce même courant un certain nombre de pierres de dimensions inférieures à celles de la précédente, et même de la pierre cassée, ces pierres se coïnciaient et n'étaient pas entraînées<sup>1</sup>.

Tous ces phénomènes sont encore peu connus dans leurs détails, et les effets sont très différents, d'une rivière à une autre, suivant la forme et la densité des matériaux. Mais l'entraînement du fond se produit toujours à partir d'une certaine vitesse et c'est dans cet effet et dans la modification correspondante de la pente du lit qu'il faut chercher l'explication de ce fait que, nulle part, la vitesse des grands cours d'eau ne dépasse guère cinq à six mètres par seconde.

1. Rapport de mission en Colombie, par M. Lucien N. B. Wyse, 1891.

Aucun fond ne résiste à des vitesses supérieures et s'il s'en produit exceptionnellement quelque part, par suite d'un accident, rupture de digue ou autre, cette grande vitesse a pour conséquence presque immédiate une diminution de la pente du cours d'eau, ce qui modère la vitesse.

**148. Matières tenues en suspension.** — Lorsque les matériaux entraînés par un courant sont assez légers et d'un volume assez petit, ils prennent la vitesse du courant et peuvent être alors soulevés comme s'ils devenaient plus légers que le fluide et y être tenus en *suspension* à une certaine hauteur au-dessus du fond. Le phénomène de la suspension, qui est souvent la conséquence de l'entraînement, en diffère en ce que celui-ci est produit par le choc du courant contre des solides qui vont moins vite que lui, tandis que les matières en suspension ont à très peu près la même vitesse que le liquide lui-même. Elles sont, dans une certaine mesure, assimilables aux corps flottants à la surface qui participent à la vitesse du courant, qui sont, en fait, entraînés par lui, mais dans des conditions différentes de ceux qui roulent sur le fond, pour lesquels le courant doit vaincre avant de les mettre en mouvement une résistance extérieure spéciale qui n'existe pas dans les corps flottants. Toutefois, le corps en suspension, plus lourd que le liquide, ne peut être maintenu en équilibre que par des causes différentes de celles qui soutiennent le corps flottant. La suspension peut être due, comme nous le verrons, soit aux composantes verticales, dirigées de bas en haut, des molécules liquides, soit simplement à la différence des vitesses de deux filets liquides superposés.

**149. Vitesse d'un flotteur sur un courant.** — Beaucoup d'ingénieurs, en particulier Du Buat et Dupuit, ont remarqué qu'un corps flottant à la surface d'un courant prenait une vitesse plus grande que celle du liquide ; l'explication qu'ils ont donnée de ce fait peut se résumer dans les termes suivants employés par Dupuit :

« Considérons un corps flottant sur la surface d'un cours d'eau...  
 « Il est clair qu'en vertu de la composante  $P_i$  suivant l'inclinaison  
 « du courant, ce solide tend à prendre une vitesse accélérée mais  
 « qui devient uniforme par suite de la résistance que lui oppose le  
 « liquide. Cette vitesse sera plus grande que la vitesse moyenne des  
 « filets qui entourent le flotteur, car il faudra que le flotteur trouve  
 « en avant une résistance capable de faire équilibre à la pression  
 « des filets qui vont plus vite que lui et à la quantité  $P_i$ . »

Sous cette forme, l'explication est insuffisante, car si le poids  $P$  du corps flottant est le même que celui du liquide dont il tient la place, la pesanteur ne lui imprime pas une accélération plus grande. Aussi le fait a-t-il été nié par un certain nombre d'ingénieurs qui le considèrent comme une illusion. M. Bérard a même rendu compte<sup>1</sup> d'expériences dans lesquelles il a constaté qu'un flotteur marche avec une vitesse égale à la vitesse moyenne des filets fluides qu'il rencontre et que s'il paraît marcher plus vite que le courant, cela tient à ce que la vitesse maximum se trouve un peu au-dessous de la surface.

M. du Boys avait cependant, un peu auparavant<sup>2</sup>, rectifié et complété dans une certaine mesure l'explication du phénomène. Si l'on considère le volume liquide dont le corps flottant tient la place, il est bien, comme ce dernier, soumis à la force accélératrice de la pesanteur due à son poids  $P$  qui est le même que celui du liquide, mais la résistance est différente. Alors que pour le solide elle est constituée simplement par le frottement des parois de celui-ci sur le liquide qui l'entoure, elle comprend en outre, pour le liquide, l'agitation intérieure qui dépense une partie de l'énergie transmise par la force motrice. Il y aurait identité entre le solide flottant et le liquide déplacé si l'écoulement s'effectuait exactement par filets parallèles et s'il n'existait aucune composante verticale ou transversale de la vitesse des molécules liquides ; mais il est loin d'en être ainsi. Dans le volume liquide qui tiendrait la place du corps flottant, ces vitesses transversales ou verticales correspondent à une certaine force vive qui ne contribue pas à l'écoulement, elles donnent lieu à des frottements ou à une perte d'énergie plus grande que si les filets étaient rigoureusement parallèles. C'est la somme de toutes ces forces vives, de tous ces frottements, perdus pour l'écoulement, qui égale la force accélératrice de la pesanteur. Tout cela est remplacé, dans le cas du corps flottant, par le frottement superficiel et par une résistance supplémentaire due à ce que ce corps prend une vitesse plus grande et qu'il presse davantage sur le liquide qui se trouve devant lui. Il convient d'ajouter, ce me semble, qu'il n'est nullement démontré que le volume déplacé par un corps flottant à la surface d'un liquide en mouvement soit le même que celui qui est déplacé dans le même liquide en repos.

Bien que je ne connaisse aucune expérience sur ce sujet, il me paraît y avoir de fortes raisons de penser que le corps flottant

1. *Annales des ponts et chaussées*, 1886, 2<sup>e</sup> semestre, page 830.

2. *Annales des ponts et chaussées*, 1886, 1<sup>er</sup> semestre, page 199.

plonge moins dans le liquide en mouvement, et d'autant moins que l'agitation est plus grande. Alors, la force qui lui donnerait une vitesse égale à celle du liquide est la composante d'un poids de liquide inférieur au sien. Il reste donc disponible une portion de son poids qui lui procure une accélération nouvelle, et une vitesse plus grande que celle du liquide. De l'explication qui précède résulte que la différence de vitesse, entre un corps flottant et le courant liquide, croît avec les dimensions du corps flottant et avec l'agitation du liquide. Il n'est donc pas surprenant que M. Bérard, opérant sur un courant très régulier, à vitesse relativement faible et avec un flotteur de petite dimension, ait trouvé une concordance à peu près complète entre les deux vitesses ; mais il n'en aurait pas été de même si le fond du canal sur lequel il opérait avait été irrégulier et surtout si le flotteur avait eu des dimensions plus grandes.

M. du Boys a constaté qu'un bateau (dont il ne donne pas les dimensions) avait pris une vitesse moyenne de  $4^m46$  dans un courant dont la vitesse superficielle n'était que de  $2^m75$ . Même en faisant une large part aux erreurs d'observations, on voit que la différence est loin d'être négligeable.

**150. Effet de la différence de vitesse des filets liquides.** — Une des premières conséquences de la différence de vitesse des divers filets liquides, c'est que si un corps flottant est placé à la surface d'un courant, il tendra toujours à venir se placer sur l'axe, ou sur la ligne où les vitesses superficielles sont les plus grandes. Si, en effet, on le suppose dans une position excentrique, il rencontrera une moindre résistance en se dirigeant obliquement vers les filets les plus rapides qu'en continuant à se mouvoir au milieu de ceux qui ont une vitesse moyenne inférieure à la sienne.

Ce fait de l'entraînement d'un corps flottant vers les filets qui ont la plus grande vitesse s'observe partout, et l'on peut l'expliquer en supposant, par exemple, le corps sphérique et placé dans un courant dont les filets AA, BB, CC ont des vitesses croissantes (fig. 81). Les filets les plus rapides CC exerceront sur le solide, du côté C, un

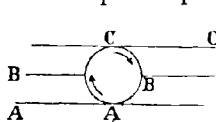


Fig. 81.

frottement qui tendra à le faire tourner dans le sens de la flèche. De l'autre côté AA, les filets liquides, allant moins vite que le solide, exerceront un frottement en sens inverse qui tendra à produire une rotation dans le même sens, et le solide étant, par rapport au liquide, en repos relatif au point B, ou plutôt étant pressé sur ce point par l'excès de vitesse qu'il tend à prendre, ne peut subir ce mouvement de rotation sans

pivoter autour du point B et rouler en se dirigeant du côté des vitesses les plus grandes. D'autre part, aussi, le corps solide étant plus lourd que le liquide dont il tient la place tend, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, à prendre une vitesse supérieure à celle du filet où il se trouve placé ; il tendra donc à se porter successivement vers les filets dont les vitesses sont les plus grandes<sup>1</sup>.

On doit donc regarder comme démontré qu'un corps solide, lorsqu'il se trouve dans un fluide dont les filets ont des vitesses différentes, se trouve, par suite même de la différence de ces vitesses, entraîné du côté des filets les plus rapides. La vitesse, dans l'étendue d'une même section transversale d'un cours d'eau, ou sur une même verticale, allant en croissant à mesure que l'on s'élève, les corps solides arrachés du fond et d'abord entraînés par le courant peuvent s'élever, s'ils sont assez menus et assez légers, et être maintenus en suspension.

Il est d'ailleurs à remarquer que l'effort à exercer, pour maintenir un solide en suspension, se réduit à assez peu de chose lorsque ses dimensions sont faibles et que son poids spécifique ne dépasse pas beaucoup celui du liquide. Si l'on considère, comme plus haut, un corps sphérique de diamètre D et de poids spécifique  $\Pi_1$ , la force accélératrice qui tiendra à le faire descendre dans un liquide sera, en appelant  $v$  sa vitesse verticale à un instant quelconque :

$$\frac{1}{6} \pi D^3 (\Pi_1 - \Pi) - k \frac{\Pi}{g} \cdot \pi \frac{D^2}{4} \cdot \frac{v^2}{2} ;$$

Cette forme accélératrice est nulle lorsque le second terme est égal au premier, ou bien, après réduction, lorsque

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3k} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi} - 1 \right) D ;$$

expression analogue à celle que nous avons trouvée plus haut (no 147) pour la condition d'entraînement par le courant des matériaux du fond du lit, mais qui contient en plus, au second membre, le facteur  $\theta$ . Comme ce coefficient est généralement inférieur à l'unité, la vitesse qui annulera la force accélératrice d'un corps solide tombant dans un liquide sera généralement un peu plus grande que celle qui

1. Cette question de la suspension des solides dans l'eau en mouvement et des explications qui peuvent en être données a été traitée avec de grands détails par M. E. H. Hooker dans les *Transactions of American Society of Civil Engineers*, vol. XXXVI, 1896. J'ai emprunté à son intéressant mémoire : *The suspension of solids in flowing water*, un certain nombre de considérations et de faits nouveaux.

sera capable d'entraîner le même solide faisant partie du lit et plus ou moins maintenu entre d'autres solides semblables.

Cette vitesse, pour laquelle la force accélératrice est nulle et que l'on pourrait appeler *vitesse d'équilibre* étant désignée par  $v_1$ , on aura :

$$v_1 = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{2D}{3k} \left( \frac{\Pi_1}{\Pi} - 1 \right)}.$$

M. Thoulet, dans un article publié en 1884 dans les *Annales des mines*, a donné les résultats d'expériences qu'il a faites en vue de déterminer la vitesse que devrait avoir un courant d'eau dirigé verticalement pour soutenir en équilibre des sphères de diamètres et de densités diverses. Cette vitesse, ainsi mesurée, n'est autre que la vitesse d'équilibre qui vient d'être définie. Voici quelques-uns des résultats donnés par M. Thoulet, pour des sphères dont les rayons varient de 0<sup>m</sup>,0001 à 0<sup>m</sup>,0025, ou les diamètres de deux dixièmes de millimètre à cinq millimètres, et dont les poids spécifiques varient de 1.500 à 3.500 kilogrammes par mètre cube. Sous l'influence des vitesses verticales indiquées dans les cinq dernières colonnes, les sphères mises en expérience ont été maintenues en équilibre dans le courant vertical pendant des temps variables mais qui n'ont jamais été inférieurs à trente secondes. Les vitesses  $v_1$  sont exprimées en mètres par seconde : on voit qu'il suffit qu'elles soient à peine sensibles pour maintenir en suspension des solides de dimensions appréciables. Pour les particules les plus ténues, ces vitesses sont elles-mêmes extrêmement réduites. S'il s'agit, par exemple, d'argile à briques délayée dans l'eau, une vitesse verticale de moins de trois millimètres par seconde suffit à la maintenir indéfiniment en suspension.

Diamètres des sphères  D	Vitesses d'équilibre $v_1$ pour des sphères dont le poids spécifique $\Pi_1$ est de				
	1.500 <sup>k</sup>	2.000 <sup>k</sup>	2.500 <sup>k</sup>	3.000 <sup>k</sup>	3.500 <sup>k</sup>
0 <sup>m</sup> 0002	0 <sup>m</sup> 613	0 <sup>m</sup> 023	0 <sup>m</sup> 032	0 <sup>m</sup> 040	0,047
0.0004	0,023	0,040	0,055	0,069	0,079
0.0006	0,032	0,057	0,078	0,094	0,106
0.0008	0,040	0,070	0,094	0,114	0,129
0.0010	0,051	0,082	0,107	0,132	0,151
0.002	0,072	0,123	0,161	0,195	0,224
0.003	0,084	0,144	0,188	0,229	0,267
0.004	0,094	0,154	0,201	0,246	0,283
0.005	0,098	0,156	0,206	0,255	0,292



Avec l'expression précédente de  $v_1$ , la force accélératrice d'un corps tombant dans un liquide s'exprime par

$$k \Pi \frac{\pi D^3}{4} \left( \frac{v_1^2 - v^2}{2g} \right)$$

et en égalant cette valeur au produit de la masse du corps par son accélération  $\frac{dv}{dt}$ , on aura l'équation de son mouvement :

$$k \Pi \frac{\pi D^3}{4} \left( \frac{v_1^2 - v^2}{2g} \right) = \frac{\Pi}{g} \cdot \frac{\pi D^3}{6} \cdot \frac{dv}{dt}$$

qui, après réduction et séparation des variables devient :

$$\frac{3k dt}{4D} = \frac{dv}{v_1^2 - v^2}$$

et qui, étant intégrée depuis  $v = 0$ ,  $t = 0$ , donne :

$$2v_1 \cdot \frac{3k}{4D} \cdot t = \text{Log.} \frac{v_1 + v}{v_1 - v}$$

ou bien :

$$v = v_1 \text{ tah.} \frac{3kv_1}{4D} t.$$

en désignant par *tah* la tangente hyperbolique.

Quant à l'espace parcouru pendant le temps  $t$ , si on le désigne par  $x$ , on obtient, en remarquant que  $v = \frac{dx}{dt}$  et que  $x = 0$  pour  $t = 0$  :

$$2e^{\frac{3k}{D} t} = e^{\frac{3k}{D} v_1 t} + e^{-\frac{3k}{D} v_1 t}.$$

La vitesse du corps qui tombe librement croît en s'approchant asymptotiquement de la vitesse-limite  $v_1$ , dont elle ne diffère plus sensiblement après un temps très court, à peine appréciable si les dimensions du corps sont très petites <sup>1</sup>.

1. Pour un corps dont le poids spécifique serait de 2.500 kil. et dont le diamètre serait inférieur à deux millimètres, le rapport  $\frac{v_1}{D}$  dépasserait 100, et  $\frac{3kv_1}{4D}$

ne vaudrait pas moins de 40. Pour  $t = \frac{1}{10}$  de seconde, l'argument de la tangente hyperbolique serait donc à peu près égal à 4, ce qui montre, d'après la table XVII à la fin du volume, que  $v$  ne différerait de  $v_1$  que de moins d'un millième de sa valeur.

Si le corps tombe dans un liquide en mouvement, dont tous les filets peuvent être considérés comme ayant la même vitesse moyenne  $U$ , sa trajectoire ne différera pas sensiblement d'une ligne droite inclinée à raison de  $U$  de base pour  $v_1$  de hauteur. Il parcourra horizontalement, pour tomber d'une hauteur  $h$ , une distance  $h \frac{U}{v_1}$  qui pourra être grande si le rapport  $\frac{U}{v_1}$  est grand ; et pour peu que, dans ce trajet, il rencontre des molécules dont la vitesse ait une composante verticale dirigée de bas en haut, il sera relevé et ramené vers les couches supérieures.

Si, par exemple, comme il semble résulter des expériences de M. Francis, citées plus haut, la composante verticale ascendante de la vitesse est comprise entre le dixième et le trentième de la vitesse moyenne d'écoulement, il suffira que cette vitesse moyenne atteigne dix à trente fois la valeur de  $v_1$  donnée au tableau précédent pour que, sous la seule action du mouvement translatatoire réel, les sphères des poids spécifiques et des dimensions indiquées s'y maintiennent en équilibre.

Mais c'est surtout, comme nous l'avons dit, la différence de vitesse des filets fluides qui produira, sur le corps solide, l'effort très petit nécessaire pour cela. Dans les cours d'eau naturels, en effet, comme dans les canaux découverts que nous avons étudiés, la vitesse va en augmentant depuis le fond jusque vers la surface, et cette augmentation proportionnelle, mesurée par le rapport  $\frac{dv}{dz}$ , est en raison de la profondeur ; elle diminue donc elle-même lorsque l'on s'approche de la surface libre.

Si l'on admet, ce qui semble assez naturel, la proportionnalité de l'effet à la cause, la force qui entrainera vers le haut les corps solides roulés par l'eau sera proportionnelle à  $\frac{dv}{dz}$ , c'est-à-dire d'autant plus grande que l'on sera plus près du fond. Si donc l'on imagine un courant d'une profondeur donnée et des solides d'une densité déterminée et de volumes croissant par degrés insensibles, ces solides se distribueront dans les couches de haut en bas, suivant l'ordre de leur volume ; les couches supérieures ne porteront que les matières les plus ténues, parce que les filets y ont des vitesses sensiblement égales et les couches inférieures porteront des solides de plus en plus gros <sup>1</sup>.

1. Un phénomène analogue, dû à la même cause, peut s'observer lorsque l'on met en suspension, dans un liquide, des corps solides de petite dimension, plus lourds que lui, et que l'on imprime au liquide un mouvement de

**151. Puissance de suspension d'un courant liquide.**

— Si, maintenant, au lieu d'un corps solide isolé, tenu en suspension dans un liquide, nous imaginons en avant et en arrière, à une petite distance de lui, un autre corps semblable, il pourra se faire que dans l'étendue du courant inférieur qui soutient le premier, il se produise, à une certaine distance autour de lui, une perturbation dans la répartition des vitesses qui ne permette pas à ce même courant, si le second corps est très rapproché du premier, de le soutenir dans les mêmes conditions ; cela revient à dire qu'un corps solide, en égard à sa distance aux corps voisins, peut se trouver en équilibre dans une couche inférieure à celle où il se teindrait s'il y était isolé ; ou bien encore que le corps montera ou descendra si les corps voisins s'éloignent ou se rapprochent.

De ce qui précède, Dupuit, à qui nous avons emprunté ce raisonnement, déduit les principes suivants :

L'eau courante peut tenir en suspension des solides beaucoup plus denses qu'elle ;

La puissance de suspension dépend de la vitesse relative des filets et elle est d'autant plus considérable que cette vitesse relative est plus grande. En général, elle est en rapport avec la quantité  $\frac{dv}{dz}$ , de sorte que les couches inférieures d'un courant peuvent porter des solides plus volumineux et plus nombreux ;

La puissance de suspension d'une couche est limitée, c'est-à-dire qu'un mètre carré de chaque couche ne peut contenir qu'un certain nombre de solides d'un volume déterminé. Mais il y a, pour chaque couche, un degré de saturation différent. Cette importante idée de la saturation d'un courant par un solide en suspension a été particulièrement mise en évidence par M. Scipion Gras <sup>1</sup>.

Il est probable que la puissance de suspension d'un cours d'eau ne dépend pas seulement de la vitesse relative  $\frac{dv}{dz}$  des filets liquides, mais aussi de l'agitation tourbillonnaire en chaque point, laquelle est, comme nous l'avons vu, proportionnelle à la vitesse  $u_0$  sur le fond et au rayon moyen ou à la profondeur  $h$  du cours d'eau. La puissance de suspension serait ainsi proportionnelle au coefficient

rotation autour d'un axe vertical, comme par exemple lorsque l'on remue avec une cuillère un verre d'eau contenant des grains de sucre non encore dissous. Dans le mouvement giratoire imprimé au liquide, les vitesses les plus grandes sont au centre et c'est vers ce point que sont entraînés les petits corps solides en suspension.

1. *Etudes sur les torrents des Alpes*. Annales des ponts et chaussées, 1857, 2<sup>e</sup> semestre, page 1.

que nous avons appelé  $\varepsilon$  (n<sup>o</sup> 29, page 47) du frottement intérieur du liquide et cela semble assez plausible si l'on remarque que cette force est due probablement, pour la plus grande partie, au frottement du liquide sur le solide en suspension.

On sait, en effet, que l'on peut, avec un peu de précaution, placer une aiguille à coudre en équilibre sur la surface d'une eau tranquille. Elle y est maintenue par la force spéciale dite *tension superficielle* du liquide laquelle n'est sans doute pas autre chose qu'une forme de la viscosité, plus grande à la surface que dans l'intérieur, et la viscosité elle-même se confond avec le frottement intérieur.

Les matières tenues en suspension se distribuent d'ailleurs, dans l'étendue des sections transversales d'un courant, suivant des lois qui ne semblent pas encore bien établies. Quelques observateurs ont constaté que la répartition du sédiment était sensiblement uniforme, la même à toutes les profondeurs. D'autres, au contraire, ont constaté un accroissement de la matière en suspension, par unité de volume d'eau, depuis la surface jusqu'au fond. M. Partiôt a trouvé que le rapport des quantités de sédiment contenues dans un même volume d'eau, à la surface et au fond de la Loire était de 9 à 11 ; M. Surrel, sur le Rhône a trouvé le rapport de 10 à 19 ; MM. Humphreys et Abbot, sur le Mississippi ont trouvé le rapport de 10 à 12. Le fait d'un accroissement de la densité du sédiment, avec la profondeur, paraît établi d'une façon à peu près générale, mais la loi de cet accroissement reste indéterminée. Ce fait paraît en contradiction avec celui de l'accroissement de la vitesse du fond à la surface : il semblerait qu'au fond, la vitesse de l'eau étant moindre, le courant doit pouvoir soutenir en suspension une moins grande quantité de matières. Mais on doit remarquer que c'est au contraire vers le fond que la dérivée  $\frac{dv}{dz}$  a la plus grande valeur et qu'elle diminue à mesure qu'on se rapproche de la surface, aux environs de laquelle elle s'annule. C'est dans cette circonstance, à mon sens, qu'il faut chercher l'explication de l'augmentation de la densité du sédiment de la surface au fond. Cette densité doit sans doute augmenter à la fois avec la vitesse de chaque filet liquide et avec la valeur de la dérivée  $\frac{dv}{dz}$  au point correspondant, et ces deux quantités varient en sens inverse l'une de l'autre. Il peut en résulter suivant les cas, que la quantité de matière en suspension soit plus grande au fond qu'à la surface, ou que ce soit l'inverse, ou que la distribution soit à peu près la même sur toute l'étendue d'une verticale.

Quant à la répartition dans le sens horizontal, il n'existe que très peu d'observations. Il semble cependant que si cette répartition n'est pas uniforme, la densité est un peu plus grande au milieu que sur les bords.

Dans la comparaison qui peut être faite entre les quantités de matières solides tenues en suspension par deux courants différents, ou par deux portions différentes du même courant, il y a lieu de faire entrer en ligne de compte le degré de ténuité de ces matières. Le poids par mètre cube d'eau peut être le même pour des matières relativement grosses, entraînées par une grande vitesse, et pour d'autres beaucoup plus ténues, maintenues en suspension dans un courant moins rapide. Ce sont des questions qui sont encore bien loin d'être élucidées d'une façon complète. Tout ce que l'on peut dire aujourd'hui, c'est qu'il paraît probable, sinon démontré, que la puissance de suspension d'un courant liquide augmente avec la profondeur  $h$  de ce courant, avec la vitesse  $v$  de chaque filet fluide et sans doute, par suite, avec la vitesse moyenne  $U$  du courant, et aussi et surtout avec la dérivée  $\frac{dv}{dz}$  de cette vitesse par rapport à la profondeur. Cela suffit pour expliquer les phénomènes principaux que l'on observe dans un grand cours d'eau à fond mobile.

**152. Débit solide d'un cours d'eau.** — Si le cours d'eau est saturé de matières solides en suspension et si son mouvement est uniforme, sa section et sa pente étant constantes, il ne déposera ni ne prendra rien sur sa route. Mais si la section varie, la répartition des vitesses et peut-être aussi la vitesse moyenne variera en même temps ; il en sera de même de la puissance de suspension, et il en résultera des dépôts ou des affouillements suivant qu'elle aura diminué ou augmenté. Si, dans une rivière, on considère deux sections transversales, une certaine quantité de matières solides, en suspension ou entraînées, traverse la section d'amont pendant un certain temps, et une autre quantité de ces mêmes matières traverse, pendant le même temps, la section d'aval. Si la quantité qui est entrée entre les deux sections est supérieure à celle qui en est sortie, le fond s'est exhaussé ; il s'est abaissé dans le cas contraire. Pour qu'il conserve la même forme et que le régime du cours d'eau soit réellement permanent, il faut que le volume total des matières solides transportées soit le même dans toutes les sections, ou que le *débit solide* soit constant dans toute l'étendue de la rivière <sup>1</sup>.

1. C'est M. Lechalas qui paraît avoir parlé le premier des *débites de sable* et

Il est difficile d'arriver à mesurer, même grossièrement, le volume total de ces matières solides. Celui des limons tenus en suspension peut s'évaluer d'une façon assez exacte par l'analyse de l'eau : il suffit de prélever un volume d'eau déterminé, présentant les conditions moyennes et de laisser se déposer les matières tenues en suspension. C'est ainsi que Baumgarten (cité par M. Fargue) a établi que chaque année la Garonne charrie, à Marmande, cinq millions de mètres cubes de limons. La quantité de limon par mètre cube varie souvent dans les limites extrêmement étendues, pour un même cours d'eau, avec les saisons, l'abondance des eaux, etc. Ainsi, on a constaté que le poids de limon charrié par la Durance varie de zéro à quatre et même cinq pour cent, ce qui représente de 40 à 50 kilogrammes de matières solides par mètre cube d'eau. D'après des expériences faites par M. Duponchel sur l'écoulement dans un petit canal artificiel, « on peut poser comme un fait certain, démontré « par l'expérience, qu'une eau courante, animée d'une vitesse « moyenne de 1 m. 44 par seconde, peut entraîner sans dépôt 9 o/o « de son poids de limon ; et comme, d'ailleurs, le mélange de limons, « loin d'avoir atténué la vitesse du courant, paraît l'avoir plutôt « augmentée, on peut en conclure, avec une très grande probabilité, « que cette proportion de 9 o/o est notablement inférieure au degré « de saturation que comporte une vitesse de 1 m. 44. »<sup>1</sup>

Il semble, en effet, résulter des mêmes expériences que, toutes choses égales, la vitesse moyenne de l'eau chargée de limon est supérieure à celle de l'eau claire, « la plus grande densité du liquide « paraît compenser, et au-delà, sa moindre fluidité. » Tandis que les vitesses des eaux claires étaient de 1 m. 41, 1 m. 97, 2 m. 71, celle des eaux troubles, dans les mêmes conditions, se sont trouvées de 1 m. 44, 2 m. 05, 2 m. 79.

Une opinion contraire est soutenue par d'autres observateurs. M. Baldwin Latham (cité par M. E. H. Hooker<sup>2</sup>) a publié une série d'observations desquelles il résulte que la vitesse d'une eau trouble, dans les mêmes conditions de pente et de profondeur, est moindre que celle de l'eau pure. La différence est en raison du trouble : le débit de l'eau pure multiplié par sa vitesse correspond

de la comparaison des volumes passant aux divers profils en travers d'une section de rivière. Rapport joint à l'avant projet de transformation de la Loire maritime publié en 1869 ; brochure sur le même sujet imprimée et distribuée par la Chambre de commerce de Nantes en 1870 ; *Annales des Ponts et Chaussées* de 1871 ; etc.

1. *Hydraulique et géologie agricoles*, pages 638-639.

2. *Transactions of american society of Civil Engineers*, vol. XXXVI, 1896, page 288.

au poids d'eau et de sédiment multiplié par la vitesse correspondante. « La loi de la conservation de l'énergie, dit M. Hooker, ne saurait admettre une autre solution bien qu'il ait quelquefois été prétendu que ce ralentissement de la vitesse n'existait pas ». En effet, d'après M. G. K. Gilbert dont il reproduit le raisonnement, lorsque l'eau est pure, le travail de la pesanteur, correspondant à une chute donnée, a simplement pour effet, si le mouvement est uniforme, de vaincre le frottement du liquide sur le fond. Au contraire si l'eau contient du sédiment, l'énergie produite devra en outre être dépensée en partie à maintenir en suspension la matière solide entraînée ; ce qui restera ne suffira plus pour surmonter le frottement et il s'établira une nouvelle vitesse inférieure à la première.

Ce raisonnement me semble incomplet, car, dans le cas de l'eau trouble, le travail de la pesanteur est augmenté de celui qui correspond à la quantité dont la matière solide est descendue et il n'est pas démontré que cette augmentation ne soit pas plus que suffisante pour maintenir le solide en suspension. Je ne vois donc pas comment la loi de la conservation de l'énergie s'opposerait à ce que la vitesse fût au contraire augmentée, comme l'ont constaté M. Duponchel et d'autres observateurs. J'ajouterai que cela me semble au contraire plus probable : les matières solides en suspension tendent, comme je l'ai dit, à prendre une vitesse plus grande que celle de l'eau dans laquelle ils sont plongés, ils tendent donc à pousser devant eux les particules d'eau qui s'opposent à leur mouvement et il semble qu'il doive en résulter une vitesse moyenne plus grande que celle de l'eau pure.

Quoi qu'il en soit, le fait aurait besoin d'être vérifié par des expériences précises sur des canaux de dimensions diverses.

M. Duponchel a constaté aussi que le canal de Marseille charrie parfois jusqu'à 4 et 5 o/o du volume de ses eaux en limons et en charrierait bien davantage si la Durance les lui fournissait. Ces limons se maintiennent constamment en suspension sur un parcours de près de cent kilomètres. Non seulement ils ne forment aucun atterrissement dans le lit du canal, mais ils accompagnent ses eaux dans les plus petites rigoles, suivant leurs sinuosités les plus irrégulières, remontant dans les conduites forcées de distribution sans jamais les obstruer, tant que l'écoulement des eaux se maintient avec une vitesse même très inférieure à celle du canal, qui atteint à peine 0 m. 75 par seconde.

Dans les mines de Californie, on effectue le transport des déblais au moyen de conduites en bois de forme rectangulaire de 1 m. 80 de

largeur sur 0,91 de hauteur, dont le fond est garni de barres transversales destinées à retenir l'or contenu dans les terres transportées. La pente est très forte, soit d'environ 0,03. Le volume des déblais entraînés varie de  $\frac{1}{28}$  à  $\frac{1}{16}$  et même à  $\frac{1}{11}$ , il est moyennement de  $\frac{1}{25}$  de celui de l'eau, soit de 4 pour cent <sup>1</sup>.

Des faits analogues peuvent se constater sur tous les cours d'eau et le degré de saturation des matières en suspension dépend non seulement de la vitesse des eaux, mais aussi et surtout de la ténuité et du poids spécifique des matières ainsi emportées.

Mais, pour ce qui est du volume des matières charriées par entraînement sur le fond du lit, il est à peu près impossible de s'en faire une idée précise. Cependant de nombreuses expériences et observations ont été faites dans ce but. M. G. F. Deacon, au sujet des études du canal de Manchester, a cherché à se rendre compte de la façon dont les sables sont entraînés sur le fond. Il s'est servi, pour cela, d'une bêche à fond plat munie latéralement de parois en verre au fond de laquelle il plaçait du sable provenant de l'embouchure de la Mersey et où il faisait couler de l'eau avec une vitesse croissante. Il mesurait très exactement la vitesse superficielle du courant et le poids de sable entraîné.

Le sable restait immobile tant que la vitesse superficielle restait inférieure à 0 m. 40 par seconde. Alors, le mouvement commençait d'abord par le déplacement de quelques grains isolés, puis la même vitesse se continuant, les grains ainsi entraînés se rangeaient en bandes perpendiculaires à la direction du courant, chacune de ces bandes acquérant peu à peu le profil triangulaire bien connu formé par un talus plat vers l'amont et un talus plus raide vers l'aval. A cette vitesse de 0 m. 40, chacune de ces stries prenait un mouvement de translation très lent dû aux grains de sable qui s'élevaient en roulant sur le talus d'amont et retombaient sur celui d'aval en passant au-dessus de la crête. Lorsque la vitesse superficielle était de 0 m. 45, ces bandes de sable étaient de forme absolument régulière et s'avançaient avec une vitesse d'environ  $\frac{1}{2160}$  de la vitesse superficielle. Ce rapport se réduisait à environ  $\frac{1}{1050}$  pour la vitesse de 0 m. 53 et à  $\frac{1}{480}$  pour celle de 0 m. 61. Lorsque la vitesse superficielle atteignait 0 m. 65, le mouvement du sable prenait un autre

1. Rapport de mission en Colombie, par M. Lucien N. B. Wyse, 1891.



caractère. Les grains, après s'être élevés sur le talus d'amont jusqu'à la crête, au lieu de retomber sur celui d'aval, étaient lancés vers la crête suivante. A la vitesse de 0 m. 75 cette sorte de bombardement d'une crête à l'autre devenait général et les grains lancés arrivaient à dépasser la première et même la seconde crête en avant de celle d'où ils étaient partis. A la vitesse superficielle de 0 m. 88 le sable restait en suspension et son mouvement prenait un caractère tout différent. Partant toujours du fond, il s'élevait à des hauteurs variables et était entraîné par l'eau à des distances souvent très grandes de son point de départ.

M. Deacon a cru pouvoir conclure de ses expériences que, dans les limites où il a opéré, le poids de sable entraîné est sensiblement proportionnel à la cinquième puissance de la vitesse superficielle.

Dans un grand cours d'eau à fond mobile, ce n'est probablement pas la couche superficielle seule qui s'avance de quantités appréciables lorsque la vitesse devient grande ; il est possible que le fond soit remué jusqu'à une certaine profondeur et participe au mouvement général. Dès lors, il semble bien difficile d'aborder par le calcul le problème de la détermination des changements de forme produits par l'action des eaux.

**153. Etude du régime des rivières à fond de sable, par M. Lechalas.** — M. Lechalas l'a cependant tenté <sup>1</sup>, en bornant toutefois son étude à celle des rivières à fond de sable et surtout de la Loire, à laquelle se rapportent tous les chiffres de son travail. Il établit d'abord que, pour une rivière déterminée, ayant son lit formé d'un sable homogène dont les grains sont d'une même grosseur dans toute son étendue et sur une profondeur supposée indéfinie, il y a une certaine vitesse de fond minimum,  $w_0$ , au-dessous de laquelle le sable n'est pas entraîné et il trouve que, pour la Loire, cette vitesse est d'environ 0 m. 25 par seconde. Lorsque la vitesse est un peu plus grande, le sable est roulé par le courant, mais n'entre pas encore en suspension ; pour que ce fait se produise, il faut que la vitesse de fond atteigne une certaine valeur  $w_1$  qu'il suppose être de 0 m. 55 sur la Loire. Ces chiffres, on le voit, concordent à peu près avec ceux qui viennent d'être donnés d'après M. Deacon. Cela étant, le régime uniforme pourra se produire, avec les deux valeurs de la vitesse au fond  $w_0$  ou  $w_1$ , et un même débit  $q$  par unité de largeur du fleuve supposé avoir une largeur indé-

1. Note annexe du premier volume de l'ouvrage intitulé : *Navigations intérieures, rivières et canaux*, par M. Guillemain, dans l'*Encyclopédie des travaux publics*.

finie. La profondeur  $H$ , la pente  $i$  du cours d'eau, et la vitesse moyenne  $U$  se détermineront, dans les deux cas, par les trois équations <sup>1</sup> :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Hi = \left( \alpha + \frac{\beta}{H} \right) U^2, \\ q = HU, \\ \omega = U - 14 \sqrt{Hi}, \end{array} \right.$$

en y mettant pour  $q$  la valeur du débit et pour  $\omega$  soit la valeur  $\omega_0$ , soit la valeur  $\omega_1$ . On aura ainsi deux systèmes de trois équations permettant, dans chaque cas, de calculer les trois inconnues  $H$ ,  $U$ ,  $i$ ; et l'on trouvera, correspondant à la vitesse la plus faible  $\omega_0$ , une valeur de  $H$  plus grande et une valeur de  $i$  plus petite que pour le cas de la plus grande vitesse  $\omega_1$ . Voici alors ce qu'en conclut M. Lechallas, pour un cours d'eau idéal, à débit constant, ne recevant de l'amont aucun apport solide et duquel le sable entraîné vers l'aval disparaît régulièrement. Un lit rempli de sable qui ne se renouvelle pas, disposé suivant une inclinaison dépassant certaine limite, reçoit un débit d'eau  $q$  par seconde et par unité de largeur; au bout d'un temps plus ou moins long, suivant la pente et la longueur du canal, un état d'équilibre s'établit, correspondant à la vitesse de fond  $\omega_1$ , au-dessous de laquelle cesse le transport des sables en suspension. La profondeur est alors  $H_1$  et la pente  $i_1$ . Mais cette vitesse  $\omega_1$  entraîne encore du sable, l'équilibre réalisé est donc instable, le cours d'eau va s'approfondir et, au bout d'un temps considérable, se produira l'état d'équilibre définitif correspondant à la vitesse  $\omega_0$  à laquelle cesse l'entraînement du sable. La profondeur est devenue  $H_0$  plus grande que  $H_1$  et la pente  $i_0$  plus faible que  $i_1$ . La profondeur a augmenté par suite de l'entraînement du sable et la pente a diminué par suite de l'augmentation de profondeur et de la diminution de la vitesse moyenne <sup>2</sup>. Ces conclusions sont certaines; ce qui l'est peut-être moins, ce sont les résultats numériques déduits de l'application des trois équations (2) qui supposent applicables à une rivière à

1. La première de ces équations est celle du mouvement uniforme, d'après Darcy; la seconde résulte de la définition de la vitesse moyenne, et la troisième est celle que nous avons donnée plus haut, nos 108 et 109, pour les grands cours d'eau, d'après M. Bazin. M. Lechallas prend  $\omega = U - 10 \sqrt{Hi}$  qui correspond aux cours d'eau de dimension restreinte.

2. La résolution des équations (2) donne, à peu près :

pour $\omega = \omega_0 \cong 0,25$ ,	pour $\omega = \omega_1 \cong 0,55$ .
$H_0 \cong 9 \text{ m. } 00$ ,	$H_1 \cong 4 \text{ m. } 00$ .
$i_0 \cong 0,0000038$ ,	$i_1 \cong 0,00005$ .

fond mobile, dont les eaux entraînent effectivement du sable, les coefficients numériques déduits d'expériences sur des canaux à fond fixe.

Pour passer de ce cours d'eau idéal à un autre qui se rapproche davantage de la réalité, M. Lechalas suppose que l'équilibre stable ( $w_0, H_0, i_0$ ) étant établi, un apport de sable de  $p$  mètres cubes par jour, amené par exemple par un affluent, se produise vers l'amont. L'eau n'entraîne d'abord qu'une très petite portion de cet apport  $p$  ; elle ne commence à en enlever que lorsque le bourrelet formé, ayant diminué la section, a accru la vitesse moyenne et a donné à la vitesse de fond une valeur supérieure à  $w_0$ .

A partir de ce moment, l'entraînement du sable se continue, le bourrelet s'étale vers l'aval, la profondeur diminue, la pente et la vitesse augmentent jusqu'à ce que la vitesse du fond,  $w$ , ait atteint une grandeur suffisante pour que, soit par entraînement, soit par suspension, le volume de sable charrié vers l'aval atteigne  $p$  mètres cubes par jour. Il se produit alors un nouvel état d'équilibre. Si, par exemple, AA (fig. 82) était le fond primitif, BB, la surface libre correspondante, le nouvel état d'équilibre sera représenté par une ligne de fond CC et une ligne superficielle DD, plus inclinées que les premières et qui les couperont respectivement en deux points E, F. En amont du point E, le fond se sera remblayé par suite de l'apport de sable, en aval, il se sera creusé. Le niveau de l'eau aura été relevé en amont du point F et abaissé en aval ; mais ce raisonnement ne permet d'établir aucune corrélation entre la position de ces points E, F et celle du point M où l'apport de sable est supposé se produire. Si l'on reste dans l'hypothèse d'un cours

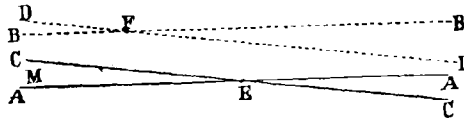


Fig. 82.

d'eau indéfini dans les deux sens, rien ne peut indiquer à quel moment le nouvel équilibre s'établira. Il faut donc supposer ou bien que le fond présente en E un point fixe, en amont duquel se réglera la pente nouvelle, ou bien que c'est le niveau de l'eau qui sera maintenu fixe en un certain point tel que celui que nous avons marqué F. Alors, d'après la distance à ces points du point M où arrive le sable on pourra calculer le temps nécessaire au remplissage du prisme triangulaire CEAM. En adoptant des chiffres appli-

cables à la Loire, M. Lechallas trouve, pour un cas particulier, une durée de 70 ans. Ce résultat montre de combien peu d'utilité peut être un calcul numérique de ce genre, puisque, dans une aussi longue période, il se produira certainement des crues plus ou moins grandes qui modifieront le lit, lui donneront une forme d'équilibre toute différente que les eaux ordinaires viendront ensuite peu à peu transformer jusqu'à ce qu'une nouvelle crue vienne encore une fois tout bouleverser, et ainsi de suite. Car ce n'est pas tant l'action des eaux d'étiage qu'il faut étudier pour se rendre compte de la forme du lit d'un cours d'eau que celle des crues ordinaires. Les grandes crues extraordinaires sont très rares ; mais les grandes eaux annuelles établissent une forme du lit, à peu près constante, si elles sont sensiblement de même importance : présentant au contraire des différences, d'une année à l'autre, si elles ont été plus ou moins abondantes. Sur ce relief viennent les eaux ordinaires et les basses eaux qui n'y apportent souvent que des modifications peu sensibles.

Au lieu de supposer, comme nous venons de le faire, l'état d'équilibre primitif troublé par l'apport de table d'un affluent, on peut chercher à se rendre compte, de la même manière, de ce qui se passera si, sans rien changer au débit de sable qui arrive par la section d'amont d'une partie donnée du cours d'eau, on vient à en endiguer le lit de manière à rétrécir l'étendue superficielle de sa section transversale. On mettrait alors en équation, sous la même forme que plus haut, le phénomène qui a été décrit au n<sup>o</sup> 145. A l'origine de l'endiguement, le vitesse moyenne étant augmentée va se trouver plus grande que celle qui correspondait à l'équilibre, et le lit se creusera, mais par des travaux de consolidation, ou par l'effet même de l'accroissement de la profondeur, cet effet sera rapidement limité, et bientôt le débit solide, dans l'étendue de la partie endiguée, devra être le même qu'auparavant. Le lit se creusera jusqu'à ce que la pente soit assez diminuée pour que l'excédent de vitesse sur le fond ne produise pas l'entraînement du sable. Vers la fin de l'endiguement, la section transversale s'accroissant, la vitesse diminuera et il se produira un dépôt de sable terminant à l'aval la faible pente réalisée dans la partie endiguée et limité lui-même vers l'aval par un talus plus raide sur lequel la vitesse réduite laissera en équilibre les particules de sable.

Ce nouvel état d'équilibre ne se produira lui-même qu'au bout d'un temps plus ou moins long, et ce qui vient d'être dit au sujet de l'inutilité d'un calcul numérique, s'applique encore à ce cas particulier

Ce qui vient encore compliquer le problème c'est que le lit n'est jamais uniforme sur une grande longueur comme doivent le supposer les équations ; il existe, de distance en distance des seuils plus ou moins résistants qui s'opposent aux affouillements, qui arrêtent la marche des sables sur le fond, etc. Quelquefois même, ces seuils sont établis ou consolidés en vue de la régularisation du cours d'eau.

D'autre part, à mesure que le sable descend, il s'use ; les grains dont il est formé diminuent de volume, entrent plus facilement en suspension, et lorsqu'ils sont tout à fait menus, sont maintenus sans se déposer, même par une vitesse très faible, comme la vase ; alors on peut considérer le sable comme disparu, au point de vue des ensablements. Il y a, dans toutes les sections de cours d'eau, une portion plus ou moins grande de sable qui disparaît ainsi. Le sable qui entre à la partie supérieure sous forme de grains d'un certain diamètre moyen, à raison d'un poids déterminé par mètre cube d'eau, est transformé, à la partie inférieure en grains d'un diamètre moyen un peu plus faible dont le poids total par mètre cube d'eau est également moindre et la différence est représentée par le produit de l'usure, c'est-à-dire par une certaine portion de sable réduit à l'état impalpable et maintenu en suspension, même aux très faibles vitesses. Lorsqu'il s'agit de sections d'une faible longueur, cette différence est fort petite et peut être négligeable, mais il n'en est plus de même si l'on considère une grande étendue du cours d'eau.

On voit donc combien le problème, même lorsqu'il s'agit d'un lit bien régulier et uniforme, présente de complication. Et ce n'est pas tout, car, dans l'étude du lit d'un cours d'eau de largeur même assez grande pour que son rayon moyen ne diffère pas de sa profondeur, il est nécessaire aussi de tenir compte de la courbure des rives dont l'effet est souvent prépondérant.

### § 3

## INFLUENCE DE LA FORME DES RIVES

**154. Étude de l'influence de la forme des rives, par M. Fargue.** — Cette étude de l'influence de la forme des rives a été faite par plusieurs ingénieurs, mais c'est M. Fargue qui l'a

poussée le plus loin <sup>1</sup>. Les résultats qu'il a obtenus sur la Garonne, en appliquant les principes qu'il en a déduits ont été absolument conformes à ses prévisions et ont transformé cette rivière de la façon la plus heureuse.

M. Fargue a étudié le cours de la Garonne entre Gironde et Barsac, sur 22 kilomètres de longueur. La rivière présente dans cette partie une largeur moyenne de 180 mètres et un débit moyen de 687 mètres par seconde. Le fond, mobile, est formé de gravier dont les grains ont de 5 à 6 centimètres de grosseur, mélangé d'environ 35 à 50 pour cent de sable. En prenant le milieu, ou à peu près, des principaux alignements droits, il a décomposé l'axe de la rivière en portions auxquelles il a donné le nom spécial de *courbes*. Lorsque deux courbes successives sont de sens contraire, le point qui les sépare est dit point d'*inflexion*, il s'appelle point de *surflexion* lorsque les deux courbes consécutives sont de même sens. Le nombre des courbes dans la portion étudiée était de 17, séparées par 14 points d'inflexion et 3 points de surflexion ; leur longueur moyenne était par conséquent de 1330 mètres. On a mesuré, dans un très grand nombre de profils, la profondeur la plus grande et la comparaison des résultats a montré que cette profondeur suivait une loi générale de périodicité : elle croît à partir d'un point où elle est minima, ce point est le *maigre* ; elle atteint une valeur maxima à un autre point qui est la *mouille* ; elle décroît ensuite jusqu'à un second maigre pour croître de nouveau jusqu'à une autre mouille et ainsi de suite. Prenant pour points de divisions les principaux maigres, M. Fargue a partagé la longueur de la rivière en 17 portions qu'il a appelées biefs. En comparant ces biefs aux courbes il a reconnu une corrélation entre les deux : le maigre correspond au point d'inflexion ou de surflexion, mais il se trouve reporté un peu en aval de ce point, en moyenne à 253 mètres, soit un cinquième environ de la longueur du bief ou de la courbe. De même la mouille correspond au sommet de la courbe, et elle est reportée vers l'aval d'une quantité un peu plus grande que le maigre, 307 mètres en moyenne, ou un quart de la longueur du bief. Enfin la mouille est d'autant plus profonde que la courbure du sommet est plus prononcée. En appelant  $c$  la courbure kilométrique au sommet de chaque courbe, c'est-à-dire en posant  $c = \frac{1}{R}$ , le rayon de courbure  $R$  de la courbe étant exprimé en kilomètres, la relation

1. Étude sur la corrélation entre la configuration du lit et la profondeur d'eau dans les rivières à fond mobile, *Annales des ponts et chaussées*, 1868, 1<sup>er</sup> semestre, page 34.

suivante a été trouvée entre la profondeur de la mouille  $H$  exprimée en mètres et la courbure  $c$  :

$$c = 0,03 H^3 - 0,23 H^2 + 0,78 H - 0,76.$$

Cette relation doit être considérée comme un cas particulier d'une autre, plus générale, dans laquelle figurerait explicitement la longueur de chaque courbe.

Une loi analogue relative au maigre est à chercher, mais elle ne peut dépendre de la courbure locale au point correspondant puisque cette courbure locale est uniformément nulle. Elle résulte alors des courbures qui précèdent le maigre. Si l'on appelle  $h$  la profondeur en chaque point,  $h_1$  la profondeur moyenne d'un bief de longueur  $l$ , on a  $h_1 = \frac{1}{l} \int_0^l h ds$  ; de même,  $c$  étant la courbure en chaque point,  $c_1$  la courbure moyenne,  $c_1 = \frac{1}{l} \int_0^l c ds = \frac{\alpha}{l}$  en appelant  $\alpha$  l'angle que font entre elles les tangentes aux extrémités de la courbe que l'on considère ; on a approximativement la relation :

$$h_1 = 1,50 \times (1 + \sqrt{c_1^2 + 1,711 \times c_1}).$$

A longueur égale, la profondeur d'eau moyenne d'un bief est d'autant plus grande que les deux tangentes extrêmes de la courbe forment un angle extérieur plus ouvert.

Les accroissements de la profondeur et ceux de la courbure sont en corrélation. Si l'on appelle  $q$  la variation par kilomètre de la courbure kilométrique et  $p$  la variation de profondeur également par kilomètre :

$$q = 10^6 \frac{\Delta c}{\Delta s}, \quad p = 10^3 \frac{\Delta h}{\Delta s},$$

on a la relation :

$$q = 0,1553 p + 0,0114 p^3 ;$$

ou bien en prenant les limites des rapports :

$$(3) \quad \frac{dc}{ds} = \frac{155,3}{10^6} \left( \frac{dh}{ds} \right) + 11,4 \left( \frac{dh}{ds} \right)^3.$$

Si l'on a construit une courbe ayant pour abscisses les longueurs  $s$  et pour ordonnées les courbures  $c$  en chaque point, cette courbe est appelée courbe des courbures et l'on peut dire alors que : La pente

du fond du thalweg est déterminée par l'inclinaison de la tangente à la courbe des courbures. C'est la *loi de la pente du fond*.

**155. Lois générales applicables aux rivières à fond mobile.** — L'expression numérique donnée à chacune des lois précédentes ne s'applique bien entendu qu'au cas particulier considéré par M. Fargue; mais il est extrêmement probable que ces mêmes lois existent d'une manière générale pour toutes les rivières à fond mobile. Les voici résumées avec quelques autres qui résultent également des observations de M. Fargue :

1° La mouille et le maigre sont reportés en aval du sommet de la courbe et du point d'inflexion ou de surflexion ;

2° La courbure du sommet détermine la profondeur de la mouille ;

3° Dans l'intérêt de la profondeur, tant maxima que moyenne, la courbe ne doit être ni trop courte ni trop développée ;

4° L'angle extérieur des tangentes extrêmes de la courbe, divisé par la longueur, détermine la profondeur moyenne du bief ;

5° Le profil en long du thalweg ne présente de régularité qu'autant que la courbure varie d'une manière graduelle et successive. Tout changement brusque de courbure occasionne une modification brusque de la profondeur ;

6° Si la courbure varie d'une manière continue, l'inclinaison de la tangente à la courbe des courbures détermine la pente du fond du thalweg.

**156. Forme à donner au lit pour obtenir un profil en long déterminé.** — Les réciproques des propositions 2, 4 et 6 sont également vraies ; on peut donc chercher à tracer le lit de manière à donner au thalweg un profil en long déterminé.

Se donner le profil, c'est se donner  $h$  en fonction de  $s$  et par suite

$\frac{dh}{ds}$ . Puisque, d'après la réciproque de la proposition 6, la valeur de

$\frac{dh}{ds}$  détermine celle de  $\frac{dc}{ds}$ , on a, en somme, une équation de la forme :

$$\frac{dc}{ds} = \varphi(s) \quad , \quad \text{d'où} \quad c = c_0 + \int_0^s \varphi(s) ds.$$

On connaîtra donc la courbure de l'axe en chaque point si l'on a, à l'origine par exemple, une profondeur donnée  $H$  correspondant à une mouille, qui fera connaître, d'après la proposition 2, la courbure maxima en ce point qui sera  $c_0$ . La courbure en chaque point donnera, par son inverse, le rayon de courbure, et il sera facile de construire la courbe par arcs de cercle successifs.



Par exemple, si l'on veut que le profil du fond soit rectiligne, depuis la mouille jusqu'au maigre, il faudra faire  $\frac{dh}{ds}$  constant ; par suite  $\frac{dc}{ds}$  est aussi constant et la courbure a pour expression :

$$c = c_0 + \gamma s,$$

$\gamma$  étant un coefficient numérique. La courbe des courbures est alors une ligne droite, et l'on peut donner à son équation la forme

$$c - c_0 = \gamma (s - s_0),$$

en appelant  $s_0$  l'abscisse du point où la courbure est  $c_0$ . La tangente à la courbe cherchée en un point quelconque  $s$ , fait avec la tangente, à la même courbe au point  $s_0$ , un angle  $\alpha = \int_0^s c ds$ , et, si l'on veut avoir l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires, on écrira :

$$dx = ds \cos \alpha, \quad dy = ds \sin \alpha.$$

Si, pour simplifier, on prend pour origine de la courbe le point d'inflexion où la courbure est nulle, et, pour axe des  $x$  la tangente à la courbe à ce point d'inflexion, on aura, pour  $s_0 = 0, c_0 = 0, \alpha = 0$ , et les équations précédentes deviennent :

$$c = \gamma s, \quad \alpha = \gamma \frac{s^2}{2}.$$

On en déduit alors, en développant  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  suivant les puissances croissantes de  $\alpha$  et après avoir intégré :

$$x = \sqrt{\frac{2x}{\gamma}} \left[ 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{1}{9} \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{13} \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \right]$$

$$y = \sqrt{\frac{2x}{\gamma}} \left[ \frac{1}{3} \alpha - \frac{1}{7} \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{1}{11} \frac{\alpha^5}{1.2.2.4.5} - \frac{1}{15} \frac{\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots \right]$$

La courbe ainsi définie a été appelée, par M. Fargue, une spirale-volute. Elle se compose de deux branches symétriques par rapport à l'origine (fig. 83) et s'enroulant asymptotiquement autour du point dont les coordonnées sont :

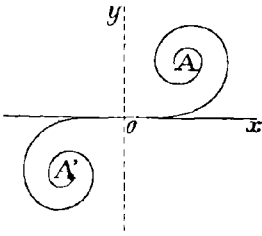


Fig. 83.

$$x = y = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

La forme de l'équation montre d'ailleurs que toutes les spirales-volutes sont semblables entre elles et que leurs gran-

deurs sont proportionnelles à la quantité  $\sqrt{\frac{2}{\gamma}}$  qui en est le paramètre. La grandeur de ce paramètre étant connue suffit pour définir entièrement une spirale-volute. Or,  $\gamma$  n'est autre chose que la dérivée  $\frac{dc}{ds}$  de la courbure par rapport à la longueur, c'est la quantité désignée plus haut par  $q$ , mais divisée par  $10^6$ . Si donc l'on se donne la pente du fond,  $\frac{dh}{ds}$  ou  $\frac{p}{10^3}$ , on en déduira facilement le paramètre de la spirale-volute applicable à un cas particulier donné, et si l'on a construit à l'avance un certain nombre de spirales-volutes de paramètres divers (M. Fargue en a construit 17 pour des valeurs du paramètre comprises entre 0,10 et 1,00), on n'aura qu'à prendre celle qui correspond à la pente de fond que l'on se sera donnée. Les gabarits ainsi construits à l'avance doivent être complétés par l'indication de la direction de la normale et de la grandeur du rayon de courbure en chaque point.

Supposons maintenant que le fond du thalweg soit profilé suivant une courbe quelconque ; on peut toujours, avec une approximation qui, théoriquement, n'a pas de limites, décomposer cette courbe en éléments rectilignes, et constituer le tracé de l'axe du cours d'eau par des arcs successifs de spirale-volute, facilement tracés au moyen des gabarits, qui seront non seulement tangents entre eux, mais osculateurs, c'est-à-dire qu'ils auront à leurs points de raccordement des contacts de second ordre, puisqu'ils auront, en ces points, mêmes courbures. Les courbes ainsi constituées pourront affecter des formes très diverses, mais elles auront toutes une propriété commune et essentielle, la *continuité de la variation de la courbure*.

Si l'axe du cours d'eau présentait simplement des alignements droits raccordés entre eux par des arcs de cercle, la courbe des courbures se composerait de droites horizontales situées à diverses hauteurs. Elle présenterait donc une discontinuité aussi grande que possible. Si, au lieu de droites et d'arcs de cercle, l'axe du cours d'eau est formé, comme nous venons de le dire, d'arcs successifs de spirales-volutes, raccordés entre eux par osculation, la courbure variant, dans chacun de ces arcs, proportionnellement à la longueur  $s$ , la courbe des courbures se présentera sous la forme d'un polygone formé de lignes droites plus ou moins inclinées. La discontinuité sera moindre que dans le premier cas. Et l'on comprend qu'elle serait encore moindre, ou que l'on arriverait à une loi de continuité plus parfaite si, au lieu de ce polygone pour la courbe des courbures, on

avait une courbe dont la courbure elle-même varierait avec continuité. Dans cet ordre d'idées, M. Fargue a étudié l'axe du cours d'eau qui correspondrait à une courbe des courbures ayant la forme d'une sinusoïde, c'est-à-dire qu'il a posé :

$$c = c_0 \cos \frac{\pi s}{2s_0},$$

et il a trouvé pour la courbe correspondante une ligne qu'il a appelée *bisinoïde*, définie par les équations :

$$x = \int \cos \left( c_0 \frac{2s_0}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2s_0} \right) ds + c^{te},$$

$$y = \int \sin \left( c_0 \frac{2s_0}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2s_0} \right) ds + c^{te}.$$

Il a tracé, suivant la forme de cette courbe, les rives de la Garonne au passage de Barsac. Les résultats ont été entièrement conformes aux prévisions ; les mouilles et les maigres se sont creusés et distribués comme il les avait projetés.

Je renverrai au mémoire de M. Fargue pour ce qui est du choix du tracé et de la détermination du profil du thalweg, et aussi pour ce qui concerne l'établissement des lignes de rive sur le terrain, questions d'un caractère trop pratique pour trouver utilement place ici. Mais je donnerai de sa théorie de l'écoulement dans un lit curviligne, un résumé qui peut apporter quelque lumière dans cette difficile question des rivières à fond mobile.

**157. Écoulement dans un lit curviligne.** — L'hypothèse ordinaire de l'écoulement de l'eau par filets parallèles est absolument inapplicable aux rivières. Si nous examinons ce qui se passe dans une courbe, le filet qui est en contact avec la berge concave et qui a une vitesse dont la direction est tangente à celle de la berge en un point, la rencontre, au point suivant, suivant un angle infiniment petit  $d\alpha$  ; sa direction doit être déviée de  $d\alpha$ . Le filet contigu n'est pas dans les mêmes conditions, ce n'est pas sur une surface solide qu'il vient se heurter, mais sur la surface liquide du premier filet ; le phénomène qui se passe est complexe et on peut se le représenter comme consistant dans une pénétration du premier filet par le second. L'écoulement étant plus rapide dans le second que dans le premier, celui-ci augmente à la fois de masse et de vitesse, c'est-à-dire de quantité de mouvement, aux dépens du second. Le second est à son tour pénétré par le troisième et sa

quantité de mouvement augmente de ce qu'il reçoit du troisième et diminue de ce qu'il a cédé au premier. Et ainsi des autres. Mais cette action de la berge concave sur les divers filets n'est pas instantanée, et les modifications qui se produisent dans une section donnée sont dues à des causes existant, non pas dans cette section, mais dans la portion du lit située sur une certaine étendue à l'amont.

L'accroissement de masse et de vitesse ou de quantité de mouvement des filets situés près de la rive concave y produit un accroissement de hauteur et un approfondissement. C'est donc près de la rive concave que le thalweg tend à se fixer.

On peut encore dire, avec M. Boussinesq, que dans un courant courbe, la force centrifuge amène sans cesse, contre le bord extérieur ou concave, les couches supérieures de la masse fluide qui se trouvent animées de vitesses plus grandes. Après avoir été recouvertes par celles qui les suivent, ces couches doivent, sous l'impulsion de celles-ci, s'enfoncer d'abord, perdre en tourbillonnements une partie de leur force vive, puis revenir, en glissant sur le fond, et tout en continuant d'ailleurs à suivre le courant, vers le bord intérieur ou convexe, près duquel elles émergent lentement pour s'engager de nouveau dans un trajet pareil. Si la berge concave n'est pas très résistante, elle sera sans cesse affouillée de haut en bas, de manière à devenir tout à la fois profonde et presque verticale, tandis que la berge convexe, sur laquelle viennent s'épanouir ou se détendre les filets après avoir subi une contraction sur la première, recevra la plus grande partie des débris arrachés à celle-ci et ne pourra conserver qu'une pente douce <sup>1</sup>.

En second lieu, la forme d'un profil transversal du lit, et par suite la position et la profondeur du thalweg dans ce profil, dépendent d'un certain ensemble ou groupe des courbures précédentes. Si l'on passe au profil suivant, la modification de la forme et la pente du thalweg dépendent de la variation de ce groupe de courbures. Cette variation doit être graduelle et continue pour que la pente du thalweg soit régulière.

Enfin, si l'on considère la courbure maxima, c'est-à-dire la section dans laquelle l'action directrice du lit atteint sa plus grande valeur locale, on voit que le profil transversal en éprouvera un maximum d'effet, ce qui veut dire que le profil en long du thalweg présentera un point de profondeur maxima; mais on voit aussi que ce n'est pas dans la section même du sommet que se produira ce dernier maximum, mais à une certaine distance à l'aval.

1. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, page 612.

La pénétration des filets liquides qui se rencontrent ainsi sous de très petits angles, avec accroissement de la quantité de mouvement de ceux qui sont appuyés contre des obstacles solides, donne l'explication d'un certain nombre de faits que leur évidence ou leur simplicité a révélés depuis longtemps : la tendance du thalweg à s'établir contre la rive concave, la fixation du courant contre les rochers, les affouillements aux abords et *notamment à l'amont* des piles de ponts, etc.

Ces faits, relativement simples lorsqu'on les prend isolément, se compliquent des effets, sur les matières entraînées ou en suspension, de la variation de la vitesse dans les diverses sections. Si indépendamment des matières solides charriées sur le fond, il y en a d'autres entraînées en suspension dans l'eau, il pourra se produire des ensablements aux points où la vitesse diminuera. D'autre part, la loi de la répartition des vitesses, dans une section transversale du cours d'eau, est sans doute bien différente suivant que cette section est faite dans une partie rectiligne ou dans une courbe, et la considération de la vitesse moyenne  $U$ , quotient du débit par l'aire de la section transversale, ne peut alors que donner une idée très vague de ce que peuvent être la vitesse maximum et la vitesse minimum dans la section faite dans une courbe. Et si l'on peut, comme on vient de le faire, expliquer les phénomènes généraux de l'écoulement, il semble bien difficile de les soumettre au calcul. Tout ce que l'on peut dire c'est que la forme du lit est déterminée, en chaque point, par les divers éléments dont nous avons examiné l'influence : le plus ou moins de mobilité des matières qui le constituent, la pente moyenne et le débit moyen du cours d'eau, sa courbure, etc.

**158. Règles de M. Fargue pour la succession des courbes.** — Le thalweg ainsi formé par suite d'une certaine configuration du lit correspond à un débit, à un état particulier des eaux. Si le débit change, les vitesses, les quantités de mouvement respectives des divers filets changent, leurs pénétrations réciproques et successives n'ont plus lieu de la même manière, le thalweg n'aura plus ni la même position, ni la même direction. Il a donc une tendance naturelle à *divaguer*, c'est-à-dire à se déplacer quand le débit se modifie. Cette tendance doit être combattue par tous les moyens possibles, car le remaniement perpétuel du fond est incompatible avec une bonne navigation. On conçoit que la longueur des courbes, leur distribution et l'écartement des rives soient réglés de telle sorte que les divers thalwegs, correspondant à tous les états des eaux autres que les crues débordées, soient pratiquement peu diffé-

rents les uns des autres ; c'est ce que l'on appelle la permanence du thalweg, permanence impossible à réaliser d'une manière absolue, mais que l'on peut obtenir d'une façon suffisante pour la pratique. Il n'est pas nécessaire, en effet, que la ligne mathématique du thalweg soit permanente, mais la condition de la permanence sera suffisamment satisfaite s'il existe toujours une passe, c'est-à-dire une zone d'une certaine largeur, dans laquelle la rivière ne vient pas déposer de matières solides. Et l'on peut arriver à ce résultat par un tracé rationnel des digues, et en appliquant des règles pratiques ou principes d'amélioration de toute rivière navigable au moyen de rives artificielles, que M. Fargue formule ainsi <sup>1</sup> :

1<sup>o</sup> L'écartement des rives artificielles doit varier avec deux éléments, la distance et la courbure, savoir :

a) La largeur au point d'inflexion doit croître de l'amont vers l'aval ;

b) Entre deux points d'inflexion consécutifs, la largeur doit croître en même temps que la courbure croît elle-même et présenter vers le sommet un maximum qui est d'autant plus grand que la courbure du sommet est elle-même plus grande ;

2<sup>o</sup> Les rives convexes doivent avoir un développement notablement supérieur à celui des rives concaves.

Quant à la loi suivant laquelle doit se faire l'accroissement de la largeur, elle dépend du nombre, de la répartition et du régime des affluents ; il est impossible de rien préciser à cet égard. Entre deux affluents, ou entre le dernier affluent et la mer, on pourrait être tenté de faire croître la largeur proportionnellement à la distance, et c'est ce qui a été admis, d'après M. Fargue, sur la Garonne maritime jusqu'en 1882. Il a montré alors que cette loi d'accroissement n'était pas d'accord avec les faits naturels. Cela aurait pu être prévu. S'il existe dans le cours d'eau une cause qui provoque l'augmentation de largeur et si l'on suppose cette cause constante, elle ne produira pas, au bout de chaque kilomètre, un même accroissement brut de largeur  $\Delta l$ , mais un même accroissement proportionnel  $\frac{\Delta l}{l}$ , c'est-à-dire que si, sur un kilomètre, la largeur s'est accrue, par exemple, de  $\frac{1}{100}$  de sa largeur au commencement de ce kilomètre, elle s'accroîtra encore sur le kilomètre suivant de  $\frac{1}{100}$  de sa largeur

1. Etude sur la largeur du lit moyen de la Garonne. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1882, 2<sup>e</sup> semestre, page 301.

au commencement de ce second kilomètre <sup>1</sup>. C'est donc le rapport  $\frac{\Delta l}{l}$  qu'il faut évaluer à une constante  $\lambda$ , ce qui, en prenant une longueur infiniment petite  $ds$ , conduit à l'équation

$$\frac{dl}{l} = \lambda ds,$$

ou, en intégrant depuis une section définie par l'abscisse  $s_0$  où la largeur était  $l_0$  :

$$l = l_0 e^{\lambda(s - s_0)}.$$

Le coefficient  $\lambda$  d'accroissement proportionnel de largeur doit avoir une valeur déterminée pour chaque cours d'eau ou chaque section de cours d'eau <sup>2</sup>. Il ne s'agit ici, bien entendu, que de la largeur minimum, mesurée aux points d'inflexion ; partout ailleurs, dans les courbes, la largeur doit être plus grande, conformément au principe n<sup>o</sup> 1, *b*) ci-dessus, et l'on peut prévoir, et l'expérience confirme qu'« à la traversée d'une rive à l'autre, le thalweg est profond « et stable quand la partie sensiblement rectiligne du lit est plus « étroite que les parties voisines présentant une courbure prononcée ». C'est, en effet, vers les points d'inflexion, où le thalweg doit

1. On peut remarquer, en général, que si l'on considère une portion de cours d'eau dans laquelle le débit  $Q$  soit constant,  $h$  étant la profondeur moyenne,  $l$  la largeur et  $U$  la vitesse moyenne, on a

$$lhU = Q = \text{const.}$$

d'où l'on déduit, par la différentiation :

$$\frac{dl}{l} + \frac{dh}{h} + \frac{dU}{U} = 0.$$

Si l'on suppose que la formule

$$hl = bU^2$$

du régime uniforme soit applicable, elle donne de même

$$\frac{dh}{h} + \frac{dl}{l} = 2 \frac{dU}{U};$$

d'où en éliminant  $U$

$$\frac{dl}{l} + \frac{3}{2} \frac{dh}{h} + \frac{1}{2} \frac{dI}{I} = 0.$$

La profondeur moyenne restera constante, ou  $dh$  sera égal à zéro si l'on a

$$\frac{dl}{l} = -\frac{1}{2} \frac{dI}{I},$$

ou si l'accroissement proportionnel de la largeur est égal à la moitié de la diminution proportionnelle de la pente moyenne.

2. C'est ce coefficient que M. l'Inspecteur général Mengin a appelé le module d'accroissement kilométrique (*Mémoire sur la puissance hydraulique des fleuves à marée* Congrès des travaux maritimes de 1889).

passer d'une rive à l'autre, qu'il est le plus exposé à divaguer et qu'il y a utilité, en resserrant le lit, à s'opposer à cette tendance. D'un autre côté le thalweg, dans les parties courbes, se rapproche de la rive concave ; près de la rive convexe, au contraire, se déposent les matières en suspension ; si donc l'on veut qu'au point d'inflexion le thalweg, qui doit passer d'une rive à l'autre, se maintienne toujours vers le milieu du lit, sans s'approcher d'une des rives, il faudra que les deux rives présentent, toutes les deux, une convexité sensible et tournent l'une vers l'autre cette convexité. Il en résulte que les courbes convexes doivent avoir plus de développement que les courbes concaves qui leur sont opposées ; ces courbes devront être disposées comme le montre la figure 84. La différence, d'après M. Fargue, doit être de trois ou quatre fois la largeur minimum, mesurée au point d'inflexion de l'axe intermédiaire entre les points d'inflexion des courbes des deux rives.

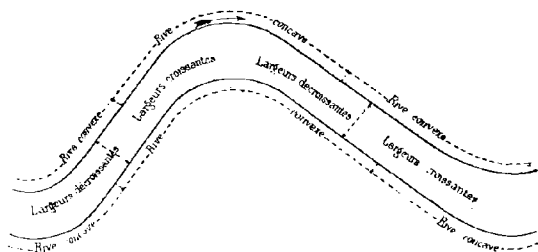


Fig. 84.

Je me bornerai à ces indications sommaires sur le régime des cours d'eau naturels. Les questions nombreuses et difficiles auxquelles donne lieu l'étude plus détaillée de ce régime et de ses conséquences sont étudiées dans des ouvrages spéciaux et en rapport avec l'objet que l'on a en vue. Je citerai notamment l'*Hydraulique fluviale*, de M. Lechalas, le *Traité de navigation intérieure*, de M. Guillemain, celui des *Ponts en maçonnerie*, de MM. Degrand et Résal, dans l'Encyclopédie des travaux publics, et j'y renverrai le lecteur pour tous les développements qui ne peuvent trouver place ici. J'ajouterai cependant quelques indications théoriques, dues à M. Boussinesq<sup>1</sup> et qui me paraissent de nature à fournir une première base à l'étude de la question si obscure de l'influence des courbes sur le régime des cours d'eau.

1. *Essai sur la théorie des eaux courantes*, n<sup>os</sup> 219 et suivants.



**159. Essai théorique sur l'écoulement dans les courbes.** — Nous avons dit plus haut (n° 45, page 81), que la perte de charge qui se produit au passage de l'eau dans un tuyau coudé avait été trouvée, par les expériences de Du Buat, pouvoir être représentée par une expression de la forme :

$$\tau_1 \frac{L}{r} \sqrt{\frac{D}{r}} \cdot U^2,$$

$L$  étant la longueur du coude,  $r$  son rayon de courbure,  $D$  le diamètre du tuyau,  $U$  la vitesse moyenne de l'eau et  $\tau_1$  un coefficient numérique que nous avons dit être égal à 0,005 environ. Si l'on compare cette perte de charge, qui, par unité de longueur, est alors  $\frac{\tau_1}{r} \sqrt{\frac{D}{r}} \cdot U^2$ , à celle qui se produirait dans la même longueur d'un tuyau droit est qui est  $4b_1 \frac{U^2}{D}$ , on voit que la perte de charge due à la courbure, comparée à celle du frottement, est une fraction de celle-ci exprimée par :

$$\frac{\tau_1}{4b_1} \left(\frac{D}{r}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ou environ} \quad \frac{10}{3} \left(\frac{D}{r}\right)^{\frac{3}{2}},$$

en prenant pour  $b_1$  une valeur moyenne de 0,00036.

De même, dans un canal courbe ayant une section rectangulaire très large, on arrive par des considérations de même ordre, à reconnaître que la perte de charge peut s'exprimer par une formule telle que :

$$\tau \frac{L}{h} \sqrt{\frac{l}{r}} \cdot U^2,$$

$L$  étant toujours la longueur de la courbe,  $l$  la largeur du cours d'eau,  $h$  sa profondeur,  $r$  le rayon de courbure de son axe, et  $\tau$  un autre coefficient numérique dont la valeur, beaucoup plus petite que dans le cas précédent, n'a été déterminée que d'une façon peu précise, mais semble pourtant être voisine de 0,0003 à 0,0005. La perte de charge par unité de longueur due au frottement est dans ce cas  $b \frac{U^2}{h}$ , et le rapport des deux est simplement :

$$\frac{\tau}{b} \sqrt{\frac{l}{r}}, \quad \text{ou environ} \quad \frac{3}{4} \sqrt{\frac{l}{r}},$$

en prenant pour  $b$  la valeur moyenne de 0,0004 et pour  $\tau$  celle de 0,0003, qui paraît être un minimum.

Lorsque l'on écrira l'équation du mouvement varié dans un canal d'une largeur  $l$  beaucoup plus grande que la profondeur  $h$  et dont le thalweg présentera une courbure sensible  $\frac{1}{r}$ , on devra donc ajouter

au second membre un terme  $\frac{\tau}{h} \sqrt{\frac{l}{r}} U^2$ . Et si l'on applique cette équation à un cours d'eau naturel dans lequel la vitesse moyenne  $U$  ait, partout, la valeur maxima sensiblement constante qu'elle ne peut dépasser sans produire des affouillements, de manière à ce que le terme  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{U^2}{2g} \right]$  soit négligeable, cette équation deviendra simplement :

$$I = \frac{U^2}{h} \left( b + \tau \sqrt{\frac{l}{r}} \right).$$

Dans cette équation,  $I$  désigne la pente superficielle. En appelant  $h_0$  la profondeur qui correspondrait au régime uniforme dans un lit de forme rectiligne, c'est-à-dire en posant  $h_0 = \frac{bU^2}{I}$ , on peut lui donner la forme :

$$h = h_0 \left( I + \frac{\tau}{b} \sqrt{\frac{l}{r}} \right).$$

La profondeur  $h$  devient  $h_0$  quand le rayon de courbure  $r$  est infini, c'est-à-dire dans les parties rectilignes ou aux points d'inflexion. Si l'on considère le cours d'eau à l'époque d'une crue, la pente superficielle  $I$  devient à peu près constante sur d'assez grandes longueurs, et prend une valeur moyenne à peu près indépendante des ondulations du lit et réglée simplement par la pente générale de la vallée,  $\frac{\delta U^2}{I}$  ou  $h_0$  est donc sensiblement constant ; cela veut dire

qu'alors, à tous les points d'inflexion, la profondeur du cours d'eau est à peu près la même ; ou, en d'autres termes, que la pente superficielle moyenne dont il vient d'être parlé se règle d'après les parties saillantes, les maigres correspondant aux points d'inflexion.

L'équation précédente peut encore s'écrire :

$$\frac{I}{r} = \frac{1}{l} \left( \frac{b}{\tau} \right)^2 \left( \frac{h_0}{h} - I \right)^2,$$

et elle établit alors une relation entre la courbure  $\frac{1}{r}$  et la profondeur  $h$ . Cette relation est différente de celle que M. Fargue a déduite de ses observations, n° 154, page 319, mais elle ne semble cependant pas inadmissible<sup>1</sup>. Différentiée par rapport à  $s$ , elle donnerait :

$$(4) \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{2}{lh_0} \left( \frac{b}{\tau} \right)^2 \left( \frac{h}{h_0} - 1 \right) \frac{dh}{ds},$$

au lieu de la formule (3) de M. Fargue. Il serait intéressant, au moyen de données numériques, d'en comparer les résultats à ceux de l'observation. *A priori*, elle semble plus satisfaisante. Il paraît naturel d'admettre que la pente du lit  $\frac{dh}{ds}$ , correspondant à une variation déterminée  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{r} \right]$  de la courbure, doit dépendre de la profondeur  $h$ ; à une variation de courbure déterminée doit correspondre une pente d'autant plus faible que la profondeur est plus grande. Ce ne sont là, je me hâte de le dire, que de simples conjectures dont la vérification expérimentale devrait être faite avant d'en tirer des conclusions. De cette vérification il résulterait, en particulier, que la forme de spirale-volute donnée en plan aux rives des cours d'eau aurait pour conséquence le règlement du fond, non pas suivant une ligne droite, mais suivant un arc de parabole concave vers le haut<sup>2</sup>. Il y aurait alors à chercher, par la méthode générale imaginée par M. Fargue, une courbe autre que la spirale-volute pour correspondre aux pentes uniformes du lit.

**160. Effet de levées transversales dans une vallée submersible.** — Ce n'est pas seulement au moyen de digues longitudinales que l'on peut arriver à modifier et à régulariser la forme du lit des cours d'eau; on emploie souvent, pour cela, des

1. La formule ci-dessus donne des résultats qui s'accordent assez bien avec ceux de la formule de M. Fargue lorsque l'on y fait  $h_0 = 2$  m. 80,  $l = 70$  mètres et  $\frac{\tau}{b} = \frac{7}{4}$  soit  $\tau = 0,0007$  si  $b = 0,0004$ .

2. La spirale-volute est en effet caractérisée par  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{r} \right] = \text{constante}$ , ce qui, en supposant approximativement  $l$  constant, et en appliquant l'équation précédente, donnerait

$$(h - h_0) \frac{dh}{ds} = \text{constante.}$$

équation différentielle d'une parabole à axe vertical.

digues transversales, ou épis, principalement lorsqu'il s'agit de fixer, dans une large vallée submersible, une rivière dont le régime n'est pas encore établi et qui est sujette à de continuel changements. Lorsque, dans une pareille vallée, on vient établir une digue insubmersible transversale, ou perpendiculaire à la direction générale de la rivière, et réservant, au lieu qu'occupe le courant, une ouverture pour le libre écoulement des eaux, on observe les effets suivants, d'après un rapport de Negretti (cité par Dausse) en date du 6 février 1847 :

1<sup>o</sup> En amont de ces deux digues, la rivière continue à changer de cours, à divaguer, arrivant toujours obliquement tantôt contre l'une, tantôt contre l'autre digue et formant au pied de leurs musoirs de profonds affouillements ; mais en aval le cours s'établit fixement et dans une direction normale à l'ouverture ;

2<sup>o</sup> La profondeur de l'affouillement diminue par degrés en aval de l'ouverture et cesse presque entièrement à une distance à peu près égale à l'amplitude de cette ouverture, et là, la section de la rivière devient constante et régulière sur toute sa largeur ;

3<sup>o</sup> L'incidence oblique du courant contre les digues a toujours une limite, et quand il l'a atteinte contre l'une de ces digues il se porte contre l'autre, sans pouvoir jamais se tenir au milieu ; et, en défendant ces digues vers leurs musoirs, sur une certaine longueur du côté d'amont, on n'a pas à craindre qu'elles soient endommagées au-delà.

Ainsi un tel système, de deux digues transversales en regard l'une de l'autre, borne en amont les divagations de la rivière, parce qu'il l'assujettit à passer toujours par l'ouverture réservée ; et en aval il lui fait prendre un cours régulier, invariable et normal à la dite ouverture.

Ces effets constatés, il devient facile d'appliquer ce système de digues transversales à la régularisation ou à la correction d'une rivière. Il suffit de placer ces digues de distance en distance en des points judicieusement choisis. En particulier on peut les employer pour régulariser une rivière au passage d'un pont et faire en sorte que le courant se présente toujours dans une direction bien normale au pont sans produire d'affouillements. Voici les règles données dans ce but par Negretti :

1<sup>o</sup> Les deux digues transversales (qu'il appelle orthogonales) doivent être placées sur une même normale à la direction générale de la rivière et prolongées l'une et l'autre jusqu'au sol insubmersible ou jusqu'à une digue insubmersible, de manière à ne laisser d'autre

issue aux eaux d'inondation que l'intervalle entre leurs musoirs <sup>1</sup>.

2° La distance de cette ouverture à la section qu'il s'agit de rendre constante et régulière doit être à peu près égale à la largeur qu'il faut donner à la dite ouverture pour que le libre écoulement des crues soit assuré.

3° Les musoirs des digues (orthogonales) doivent être suffisamment défendus pour résister au choc du courant et aux affouillements qui pourraient se produire à leur pied : le revêtement capable de procurer cette résistance devra être prolongé à partir de chaque musoir, du côté d'amont, sur une certaine longueur suivant la nature du terrain et le régime de la rivière ;

4° L'ouverture à réserver entre les musoirs doit être plus large d'un dixième environ que la largeur à assigner à la section inférieure (celle du pont) pour le libre écoulement des eaux, à cause de la contraction de la veine fluide ;

5° Enfin, les musoirs doivent être placés sur les bords de la section vive de la rivière et non à l'écart, sans quoi l'on aurait ensuite à faire d'autres ouvrages coûteux et d'un effet souvent très incertain pour amener la rivière entre les dits musoirs.

A cela Dausse ajoute qu'il faut toujours donner des talus doux aux musoirs et aux levées exposées au courant.

On peut encore dire que l'observation montre que, si des levées transversales établies sur les rives d'un cours d'eau sont surmontées par les eaux qui s'écoulent au-dessus d'elles comme sur un déversoir, la présence de ces levées tend à donner aux eaux une direction normale à celle de la crête, et que dès lors, il y a généralement intérêt, pour la régularisation du lit, à donner à ces levées une direction légèrement inclinée vers l'amont. (Ainsi, dans l'exemple cité en note, au bas de la page, il vaudrait mieux, au lieu de donner aux digues HI, KL la forme de quart de cercle, comme sur la figure, les tracer suivant les lignes droites HI, KL). Cette dispo-

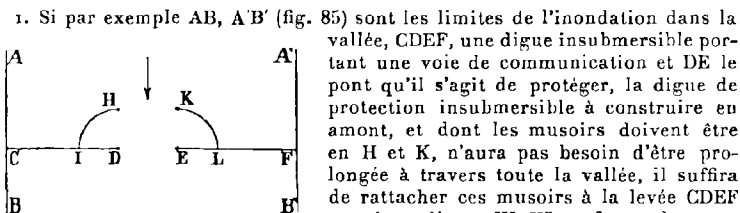


Fig. 85.

vers I et L ne tarderont pas à se colmater et à protéger très efficacement la levée principale.

sition a pour effet de ramener les eaux vers le milieu du courant et de les écarter des rives.

**161. Considérations générales sur les travaux d'endiguement ou de régularisation des rivières.** — Quel que soit le mode de correction adopté pour le lit d'une rivière, les travaux qu'il comporte se traduisent presque toujours par une diminution de la section laissée libre au passage des crues ordinaires ou des grandes eaux. Il en résulte, d'après la première loi citée plus haut, de Guglielmini, un accroissement de la vitesse des crues, et par suite une diminution de la pente : le lit se creuse vers l'amont. Les matériaux arrachés du fond, dans cette partie, ceux qui tombent des rives affouillées par l'approfondissement ne sont pas, en général, entraînés jusqu'à la mer sous leur forme primitive. Il y a un moment où par suite de circonstances locales diverses, la vitesse diminue et n'est plus suffisante pour les mettre en mouvement. D'ailleurs, la crue qui les a arrachés est ordinairement de peu de durée et lorsque le volume des eaux diminue, la marche des matériaux les plus gros s'arrête. La crue suivante les reprend et les porte un peu plus loin. En même temps, leur frottement mutuel arrondit

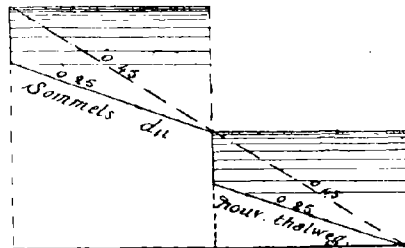


Fig. 86.

leurs angles, diminue leur volume et les réduit progressivement en gallets, gravier, sable et vase ; et la pente moyenne du cours d'eau s'établit, dans chaque section, en raison du volume et du poids de ces matériaux, ainsi que de la difficulté qu'ils présentent à être entraînés par les eaux. Autour de cette pente moyenne, le lit présente des pentes plus faibles correspondant aux sections rétrécies, et des pentes plus fortes dans les parties larges ; mais la pente moyenne est, comme on vient de le dire, plus faible après la régularisation qu'au-paravant. C'est ce que M. Fargue, par exemple, a constaté sur la Garonne (voir plus haut, n° 145, page 294). Si la régularisation devait s'étendre sur une très grande longueur, la transformation, pour être

complète, exigerait l'enlèvement par les eaux d'un énorme volume de déblais. Le plus souvent, il se rencontrera, dans le fond du lit, des parties moins affouillables dont les sommets deviendront les points de départ des pentes faibles, s'étendant progressivement vers l'amont par l'approfondissement successif. La figure 86 met en évidence ce résultat. Le lit primitif d'une rivière étant la ligne droite ponctuée avec une pente supposée de 0 m. 45 par kilomètre, s'il se rencontre un seuil résistant, le lit, après régularisation, présentera, en amont de ce point, une pente plus faible supposée, sur la figure, de 0 m. 25 par kilomètre. S'il n'y avait pas, dans le lit, ces seuils plus résistants, on pourrait avoir intérêt à les y établir, à construire, en des points convenablement choisis et espacés, des seuils fixes ou barrages de soutènement du lit. On éviterait ainsi l'énorme travail que devraient effectuer les eaux pour donner au lit, dans toute son étendue, la pente la plus faible, c'est-à-dire le déblai et le transport d'une énorme quantité de matériaux qui aurait l'inconvénient, non seulement d'exiger un très long délai, mais encore d'encaisser le lit d'une façon excessive vers l'amont et de l'exhausser vers l'aval dans des proportions qui pourraient devenir dangereuses. Ces barrages fixes de soutènement du lit peuvent d'ailleurs devenir les seuils de barrages mobiles, s'il s'agit de rendre la rivière navigable.

On peut au contraire, comme on l'a fait sur le Rhône, régulariser un cours d'eau en lui conservant sa pente moyenne et fixer le profil longitudinal du lit par des seuils analogues à ceux dont on vient de parler, mais assez rapprochés les uns des autres pour que la pente moyenne primitive du lit se trouve maintenue. Ces seuils, qui portent alors le nom d'épis noyés, s'opposent à la réduction de la pente qui pourrait être la conséquence de travaux d'endiguement.

Dans le premier système, la vitesse moyenne des eaux est diminuée ; elle est au contraire conservée dans le second, car elle se règle sur la pente du lit auquel on a maintenu artificiellement une déclivité plus grande que celle qu'il aurait prise s'il avait été endigué.

Le degré de fixité du lit, mesuré par exemple au moyen du coefficient proposé par M. Lokhtine, est un élément important dont il importe de tenir compte. Si la rivière est à fond résistant, ou à coefficient de fixité élevé, les matériaux entraînés par le courant devenu plus fort à la suite d'un endiguement du lit sur une faible longueur correspondant à un maigre, se déposent dans la mouille suivante et ils en sont enlevés plus tard par la prochaine crue. Le resserrement du lit n'a donc pas altéré le caractère essentiel de la rivière.

Mais si elle est au contraire du type divaguant, à coefficient de

fixité faible, elle n'est plus nettement divisée en mouilles et en maigres, les matériaux entraînés en aval de l'endiguement ne se trouvent pas portés dans un endroit où se produit un renforcement périodique du courant. Il faudra donc allonger les digues et ainsi de suite jusqu'à ce que la rivière se soit modifiée sur une grande longueur.

Si, au contraire, on appliquait à une rivière à type fixe le resserrement sur une grande longueur, on lui ferait perdre, sur cette longueur, son caractère de fixité, tout son lit deviendrait un chenal uniforme au lieu de présenter comme auparavant, des mouilles et des maigres successifs. Mais peu à peu, sous l'action des crues, la forme primitive se rétablirait et l'on n'aurait, en somme, rien gagné.

Autant donc la méthode de l'amélioration par resserrement systématique est rationnelle et même seule possible sur une rivière divagante, à faible fixité, autant elle serait inapplicable et même dangereuse dans le cas d'une rivière à lit résistant. Pour ces sortes de rivières, il faut diriger les travaux de manière à conserver la forme générale du profil en long et sa division en mouilles et en maigres et se borner à disposer rationnellement les digues entre deux mouilles consécutives.

Il n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage de donner des indications plus précises sur les procédés à employer pour l'amélioration des rivières ; c'est avant tout une question d'espèce dans laquelle il faut faire entrer en ligne de compte l'importance économique du but que l'on poursuit, les dépenses à faire, etc. Tout ce que l'on peut conseiller, d'une façon générale, c'est la plus grande prudence dans les modifications que l'on apporte à la forme du lit. On se trouve en présence d'un régime existant, d'un état d'équilibre qui résulte de l'action des eaux sur les rives et sur le fond pendant plusieurs siècles ; si l'on vient à le troubler, on ne connaît pas exactement quel sera le nouveau régime qui s'établira ni quelles seront les conséquences des modifications. A ce point de vue, les théories de M. Fargue constituent une indication précieuse, mais elles ne suffisent pas. En tout cas, lorsque l'on se sert du courant, convenablement dirigé, pour approfondir le lit sur un point, pour faire disparaître un banc, il ne faut pas perdre de vue que le courant emporte les matériaux de ce banc et qu'il devra, fatalement, les déposer en aval. Il s'agit donc de voir, dans chaque cas, comment et dans quelles conditions ce dépôt pourra s'effectuer sans constituer un nouveau banc pouvant présenter autant sinon plus d'inconvénients que le premier. Il faut aussi remarquer que les matériaux enlevés à un premier haut fond et emportés ainsi à l'aval par un



effet du courant que l'on peut qualifier d'artificiel, plus énergique que celui que comportait le régime ancien, ne subissent pas, dans leur brusque transport, la même diminution progressive de volume qui résulterait pour eux de la marche graduelle vers l'aval et qui est corrélatrice à la diminution de la pente du cours d'eau depuis sa source jusqu'à l'embouchure. L'enlèvement d'un banc par l'effet du courant aura donc en général pour conséquence de déposer, en un certain point du cours d'eau, des matériaux plus gros et plus lourds que ceux qui constituent le lit en cet endroit et dont la grosseur est en rapport avec la vitesse moyenne au fond, sur le même point. Les matériaux ainsi déposés seront donc, toutes choses égales, plus difficilement entraînés par le courant dans leur nouvelle position que primitivement, c'est-à-dire que le second banc, s'il se forme, sera plus difficile à enlever que le premier.

L'amélioration d'un cours d'eau par le changement de son régime est donc une opération qui ne doit pas être entreprise à la légère sans que l'on en ait, auparavant, prévu toutes les conséquences dans la mesure du possible. A moins de circonstances exceptionnelles, il faut se garder d'entreprendre des travaux partiels, en vue de la modification d'un seul passage défectueux, sans les rattacher au préalable à une étude d'ensemble embrassant la totalité du cours d'eau.

En outre, si l'on veut atteindre le résultat que l'on a en vue, sans risquer d'obtenir un résultat contraire, il est de toute nécessité de procéder lentement. Si les travaux projetés, même avec des dispositions judicieuses, sont exécutés trop rapidement, leur succès sera douteux. Le fleuve n'obéira peut-être pas aux indications des ouvrages et se tracera son chenal sans en tenir compte ou en les emportant, comme on en a des exemples. Il faut, pour que de tels travaux aboutissent, procéder par modifications successives et graduelles ; consolider d'abord ce qui est bon, et faire en sorte que la forme du lit se modifie peu à peu à mesure que s'exécutent les travaux, mais se garder de placer brusquement toute une série d'ouvrages dans un lit dont la forme ne concorde pas avec celle de ces ouvrages. La transformation du régime d'un fleuve est une œuvre de longue haleine et d'autant plus longue que le fleuve est plus mobile ; elle exige l'intervention du temps, et toute entreprise de cette nature qui n'accepte pas le temps comme un auxiliaire nécessaire est vouée à un insuccès certain <sup>1</sup>.

1. Ce dernier paragraphe est extrait presque textuellement du rapport en date du 14 décembre 1898 présenté par la Commission spéciale chargée d'étudier les moyens d'améliorer la navigabilité de la Loire entre Briare et Nantes. (M. Fargue, président ; M. Girardon, rapporteur).

## § 4

## ÉCOULEMENT SOUTERRAIN

**162. Écoulement à travers des terrains perméables.** — Après cette étude sommaire du régime varié des cours d'eau à fond mobile, je vais dire quelques mots de l'écoulement de l'eau à travers les terrains perméables. L'étude de cette question a été faite par Dupuit, auquel j'emprunterai la plus grande partie de ce qui va suivre.

Considérons d'abord le mouvement en supposant une surface libre, comme celui d'une masse d'eau qui traverse un massif perméable, sans atteindre la partie supérieure de ce massif, et admettons que ce mouvement soit devenu permanent. Nous pouvons y appliquer l'équation générale de ce mouvement sous la forme donnée par Prony :

$$\frac{\omega}{\chi} I = \alpha U + \beta U^2.$$

La vitesse moyenne  $U$  étant toujours très petite, on peut négliger le terme en  $U^2$ . D'autre part, le rayon moyen  $\frac{\omega}{\chi} a$ , pour chaque nature de terrain perméable, une valeur déterminée qui dépend de la grandeur et de la forme des vides qui existent entre les différentes particules et par lesquels s'effectue l'écoulement. L'équation prend donc la forme :

$$(5) \quad I = \mu U,$$

$I$  désignant la pente superficielle et  $\mu$  un coefficient numérique constant pour chaque nature de terrain. D'après Dupuit, ce coefficient  $\mu$  vaut environ :

1266	dans du sable grossier,
5760	— fin.

Il varie donc entre des limites très étendues, et il doit, dans chaque cas particulier, être déterminé avec soin. Il a d'ailleurs une grande valeur, ce qui confirme ce que nous venons de dire sur la petitesse de la vitesse  $U$ .

Étudions maintenant une couche perméable, aquifère, reposant sur un terrain imperméable, et désignons par :

$i$  l'inclinaison du fond,

$q$  le débit par unité de largeur,

$h$  la hauteur de la surface au-dessus du fond,

$y$  la hauteur de la surface au-dessus de l'horizontale menée par l'origine de la couche imperméable;  $y = h - is$ ;

$m$  le rapport du vide au plein dans le terrain perméable; la grandeur du vide, dans une section verticale de hauteur  $h$  et de largeur égale à l'unité, sera  $mh$ , et la vitesse moyenne étant  $U$ , l'on aura :

$$(6) \quad q = mhU.$$

Éliminant  $U$  entre les deux équations (5) et (6), il vient :

$$I = \frac{\mu q}{m h} = \mu' \frac{q}{h},$$

en désignant par  $\mu'$  un nouveau coefficient numérique.

Lorsque la pente est faible, la pente superficielle vaut à peu près  $-\frac{dy}{ds}$  et l'on a, en tout cas,  $dy = dh - ids$ . On déduit donc de l'équation précédente dont on a éliminé d'abord  $I$ , puis  $y$ , la suivante :

$$ds = - \frac{hdh}{\mu'q + ih}$$

qui donne, en l'intégrant depuis l'origine  $s = 0$ , où l'on suppose que la profondeur  $h$  était  $h_0$  :

$$(7) \quad s = \frac{h_0 - h}{i} + \frac{\mu'q}{i^2} \text{Log} \frac{\mu'q + ih}{\mu'q + ih_0};$$

ou bien, en développant le logarithme en série :

$$s = \frac{1}{2\mu'q} (h_0^2 - h^2) - \frac{i}{3\mu'^2q^2} (h_0^3 - h^3) + \frac{i^2}{4\mu'^3q^3} (h_0^4 - h^4) \dots$$

Lorsque la pente du fond est assez faible pour que l'on puisse la négliger, c'est-à-dire si le terrain imperméable sur lequel repose la couche aquifère est sensiblement horizontal, on peut faire  $i = 0$ , il reste simplement :

$$s = \frac{1}{2\mu'q} (h_0^2 - h^2);$$

équation d'une parabole à axe horizontal. Telle est alors la forme

de la surface libre de la couche aquifère. Si l'on représente par  $z$  la charge  $h_0 - h$ , ou l'abaissement de la surface libre entre deux profils déterminés, on peut écrire l'équation précédente :

$$(8) \quad q = \frac{1}{\mu'} \cdot \frac{z}{s} \cdot \frac{h+h_0}{2}.$$

Le débit est alors proportionnel à la charge  $z$  et inversement proportionnel à la longueur  $s$  du massif ; il est donc proportionnel à la charge moyenne par unité de longueur, et il est aussi proportionnel à  $\frac{h+h_0}{2}$  ou à la profondeur moyenne de la couche aquifère. Il

est facile de voir que cette formule est celle qui donnerait le débit d'un massif filtrant de même nature, de même épaisseur, mais traversé verticalement au lieu de l'être horizontalement.

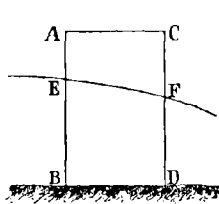


Fig. 87.

La formule (8) s'applique en effet à un massif tel que ABCD (fig. 87), reposant sur un fond horizontal imperméable BD et où la surface libre de la couche aquifère est la parabole EF à axe horizontal interceptant sur les deux ordonnées extrêmes, distantes de  $BD = s$ , les hauteurs  $BE = h_0$ ,  $DF = h$ . Si, au lieu de cela, on considère un massif tel que MNPQ (fig. 88) compris entre deux parois MP, NQ imperméables, présentant une surface horizontale  $MN = PQ = \frac{h+h_0}{2}$ , égale à la section moyenne  $\frac{h+h_0}{2}$ , du

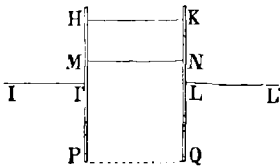


Fig. 88.

premier et une hauteur  $MP = NQ = BD$  égale à sa longueur  $s$  ; si, en outre, la charge qui produira le mouvement dans ce second massif et qui sera la différence des niveaux HK et IL à l'intérieur et à l'extérieur des parois verticales, est égale à la charge  $z = BE - FD$  dans le premier, ce second massif débitera le

même volume que le premier dans l'unité de temps.

Enfin, si l'on appelle  $H$  la profondeur qui correspondrait au régime uniforme, dans lequel la pente superficielle  $I$  serait la même que la pente du fond  $i$ , c'est-à-dire si l'on pose :

$$Hi = \mu'q,$$

on peut éliminer  $\mu'$  de l'équation (7) et l'écrire :

$$(9) \quad is = h_0 - h \pm H \text{ Log } \frac{H \pm h}{H \pm h_0},$$

en prenant le signe  $+$  lorsque  $i$  est positif et le signe  $-$  lorsqu'il est négatif. L'équation, mise sous cette forme, peut être discutée comme celle du mouvement varié des cours d'eau ; mais cette discussion ne semble pas avoir, jusqu'ici, une grande utilité pratique.

Si, au lieu d'avoir sa surface libre, la couche aquifère est contenue entre deux couches imperméables, comme dans un tuyau de conduite qui serait rempli de sable ou de gravier, des équations analogues seront applicables.  $L$  désignant la longueur totale de cette conduite,  $H$  la différence de niveau des réservoirs qu'elle réunit ou la perte de charge totale,  $\omega$  sa section transversale, on pourra écrire comme ci-dessus,  $\frac{H}{L} = \mu U$ ,  $q = m\omega U = \frac{m}{\mu} \omega \frac{H}{L} = \frac{\omega}{\mu'} \cdot \frac{H}{L}$ , en appelant encore  $m$ ,  $\mu$  et  $\mu'$  des coefficients numériques dépendant de la nature du terrain perméable considéré.

**163. Débit d'un puits ordinaire.** — Un raisonnement analogue permet d'établir une relation entre le débit d'un puits ordinaire et le rayon de ce puits, supposé percé verticalement au milieu d'une couche aquifère et reposant sur la couche imperméable supposée horizontale.

Appelons  $R$  le rayon du puits,  $L$  le rayon du massif filtrant,  $h$  la hauteur de l'eau dans le puits lorsque l'on en extrait par seconde un débit régulier  $q$ , enfin  $H$  la même hauteur quand le puits est abandonné à lui-même et que l'eau s'y met en équilibre avec la couche environnante. Appelons encore  $x$  la distance d'un point quelconque du massif au centre du puits,  $y$  l'ordonnée de la surface liquide en ce point ; la pente superficielle est sensiblement égale à  $\frac{dy}{dx}$  et, en appliquant l'équation générale (5), nous écrirons :

$$\frac{dy}{dx} = \mu U.$$

D'autre part, la surface filtrante du cylindre de rayon  $x$  est  $2m\pi xy$ , et, la vitesse de l'eau étant  $U$ , nous avons aussi :

$$q = 2m\pi xyU.$$

Éliminant  $U$  et appelant encore  $\mu'$  le rapport  $\frac{\mu}{m}$ , il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu' q}{2\pi} \cdot \frac{1}{xy}, \quad \text{ou} \quad y dy = \frac{\mu' q dx}{2\pi x}.$$

Intégrant depuis  $x = R$ , où l'on a  $y = h_0$ , on trouve, pour l'équation de la courbe superficielle :

$$y^2 - h_0^2 = \frac{\mu'}{\pi} q \cdot \text{Log} \frac{x}{R};$$

Si, au contraire, on intègre à partir de l'autre limite  $x = L$ , où l'on a  $y = H$ , on trouve :

$$y^2 - H^2 = \frac{\mu'}{\pi} q \cdot \text{Log} \frac{x}{L};$$

équation qui représente aussi la courbe superficielle. On en déduit facilement les trois équations suivantes :

$$\frac{y^2 - h_0^2}{H^2 - h_0^2} = \frac{\text{Log} x - \text{Log} R}{\text{Log} L - \text{Log} R}, \quad \frac{H^2 - y^2}{H^2 - h_0^2} = \frac{\text{Log} L - \text{Log} x}{\text{Log} L - \text{Log} R},$$

et

$$(10) \quad q = \frac{2\pi}{\mu'} \cdot \frac{H - h_0}{\text{Log} L - \text{Log} R} \cdot \frac{H + h_0}{2}.$$

Cette dernière montre que le débit  $q$  est proportionnel à la charge  $H - h_0$ , à l'épaisseur moyenne verticale  $\frac{H + h_0}{2}$  de la couche, mais qu'il n'est plus inversement proportionnel à l'épaisseur moyenne horizontale  $L - R$ ; il est inversement proportionnel au logarithme de  $\frac{L}{R}$ .

Si l'on considère, dans un même massif, deux puits de rayons différents  $R$  et  $R'$ , les débits  $q$  et  $q'$ , pour une même charge  $H - h_0$ , seront entre eux dans le rapport :

$$\frac{q}{q'} = \frac{1 - \text{Log} \frac{R'}{L}}{1 - \text{Log} \frac{R}{L}}.$$

Si  $R$  et  $R'$  sont petits par rapport à  $L$ , les deux débits  $q$  et  $q'$  différeront peu. Cela montre que le débit, tout en augmentant en même temps que le diamètre du puits, n'est proportionnel ni à sa surface ni à son périmètre. Il augmente bien moins rapidement que le diamètre<sup>1</sup>.

1. Dans une note sur le débit des puits dans les terrains perméables insérée aux *Annales des Ponts et Chaussées*, 1890, 1<sup>er</sup> semestre, M. Fossa-Mancini, par

Les calculs précédents supposent que le puits a été creusé jusqu'à la couche imperméable ; s'il n'en était pas ainsi, le débit serait moindre, mais d'une quantité très faible. En effet, le terrain perméable laissé au fond du puits donnerait une issue à l'eau par le fond, et la diminution du débit ne correspondrait qu'à l'excès de perte de charge dû à la traversée de cette petite masse. Ce serait, en réalité, comme si l'on diminuait un peu le diamètre du puits, et nous venons de voir combien cette diminution a peu d'influence sur le débit <sup>1</sup>.

**164. Débit d'un puits artésien.** — Un puits artésien est alimenté par une nappe d'eau souterraine, généralement en mouvement à travers une couche perméable formée de sables, de galets ou de roches fissurées. Il est formé par un tube vertical, que nous supposons de diamètre constant, qui part de cette couche aquifère et qui s'élève jusqu'au niveau du sol et même au-dessus. Si ce tube est assez long, l'eau y monte jusqu'à son niveau d'équilibre et il constitue un véritable piézomètre mesurant la pression dans la couche souterraine au point où il y pénètre.

Appelons  $H$  la hauteur de ce niveau piézométrique au-dessus du point le plus bas du tube. Si ce tube est coupé à une hauteur  $h$ , inférieure à  $H$ , l'eau s'écoulera à sa partie supérieure à raison d'un débit  $Q$  correspondant à une vitesse moyenne  $U$  que prendra la

une analyse et un raisonnement plus compliqués, arrive à une formule identique à la formule (10) ci-dessus, c'est celle qui porte le n° (12) de la page 842. Il donne les résultats d'expériences qu'il a faites pour en établir l'exactitude.

1. Dans une note de la page 404 de son très intéressant travail intitulé : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, 1885, M. Boussinesq a fait remarquer que les lois de la diffusion d'un corps (non gazeux) dans un dissolvant à température uniforme paraissent les mêmes que celles du mouvement de la chaleur par conductibilité dans les corps athermanes isotropes, au moins tant que le dissolvant se trouve encore assez loin de la saturation.

Ce mode de diffusion est celui auquel on arrive en assimilant le corps qui se diffuse à un fluide régi par la loi de Mariotte, qui filtrerait à travers un milieu perméable comme du sable, à la condition d'admettre que son coefficient de frottement intérieur fût proportionnel à sa densité, ce qui n'a pas lieu dans les gaz.

L'équation aux dérivées partielles qui régit les variations de la densité effective  $\rho$  de la matière diffusée (c'est-à-dire la masse qui se trouve effectivement par unité de volume dans le milieu perméable) est :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}.$$

Je renvoie, pour l'intégration de cette équation, à l'ouvrage cité, où l'on trouvera une méthode remarquable d'intégration des équations différentielles de cette forme.

colonne liquide dans toute la hauteur. Ce débit et cette vitesse, liés entre eux par la relation

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot U,$$

dans laquelle  $D$  est le diamètre du tuyau, sont des fonctions de la hauteur variable  $h$ .

Le mouvement de l'eau est produit par la charge sur l'orifice qui est égale à  $(H - h)$ , qui correspond, par unité de masse liquide, à une énergie mesurée par  $g(H - h)$ . Cette énergie est consacrée à produire la vitesse  $U$  et s'il n'y avait aucune perte, on aurait, entre ces quantités, la relation de Torricelli :  $U^2 = 2g(H - h)$ . Mais il faut tenir compte des résistances. La première est celle qui est due au mouvement de l'eau dans le tuyau d'une longueur  $h$  ; elle est de  $\frac{4b_1 U^2}{D}$  par unité de longueur, soit, en totalité,  $\frac{4b_1 U^2}{D} h$ . Une autre résistance résulte du mouvement de l'eau dans la couche aquifère, et nous n'avons aucun moyen de la connaître. Tout ce que nous pouvons savoir c'est qu'elle est fonction de la vitesse de l'eau dans les fissures de cette couche, laquelle est proportionnelle à la vitesse  $U$ . Nous pouvons admettre, en outre, ainsi que nous l'avons dit plus haut, au n° 162, que dans ces fissures, les mouvements sont relativement lents et que par suite la résistance doit être exprimée par une fonction linéaire de la vitesse aux divers points. Cette résistance pourra donc être représentée par un terme contenant seulement la première puissance de  $U$ .

D'autre part, ce terme, figurant dans une équation de forces vives ou de travail doit, pour l'homogénéité, exprimer également un travail : celui qui correspond à l'élévation à une hauteur  $h$  d'un volume  $U$  par unité de temps. Il devra donc renfermer le produit  $hU$  ou être de la forme  $\frac{hU}{B}$ , en appelant  $B$  un coefficient inconnu dépendant de la résistance au mouvement de l'eau dans la couche aquifère. Nous pourrions donc écrire l'équation

$$H - h = \frac{U^2}{2g} + \frac{4b_1 U^2}{D} \cdot h + \frac{hU}{B}.$$

Remarquons que le dernier terme sera, dans la plupart des cas, beaucoup plus grand que les deux autres qui renferment  $U$  à la seconde puissance : la résistance au mouvement de l'eau dans l'intérieur des sables ou dans les fissures des roches est infiniment supé-



rieure à celle du mouvement dans le tube ascensionnel, laquelle est représentée par l'avant dernier terme ; et celui-ci est lui-même, pour peu que  $h$  dépasse une centaine de mètres, beaucoup plus grand que le précédent. Nous pourrions donc, avec une approximation qui sera sans doute presque toujours suffisante, négliger ces termes en  $U^2$  et écrire simplement :

$$(11) \quad H - h = \frac{hU}{B} \quad \text{ou} \quad \frac{hU}{H - h} = B.$$

Cette relation simple exprime la proportionnalité entre l'énergie motrice,  $H - h$ , et le travail utile,  $hU$ . Le coefficient  $B$  est en quelque sorte proportionnel au rendement mécanique de l'appareil hydraulique constitué par la couche aquifère et le tube ascensionnel.

Ce coefficient  $B$ , inconnu, dépend de la consistance du puits artésien ou plutôt de l'état de la nappe aquifère qui l'alimente ; il doit être sensiblement le même pour tous les puits alimentés par une même nappe et peu éloignés les uns des autres.

Si l'on a observé la hauteur d'équilibre  $H$ , et si l'on a mesuré le débit  $Q_0$  et par suite la vitesse moyenne  $U_0$  correspondant à une hauteur donnée  $h_0$  de la conduite ascensionnelle, la valeur de  $B$  se déduira de l'équation :

$$B = \frac{h_0 U_0}{H - h_0} ;$$

et, une fois trouvée, elle servira à calculer, par l'équation (11) la vitesse moyenne ou le débit pour une hauteur  $h$  quelconque.

Des deux équations qui viennent d'être écrites, on déduit facilement :

$$h_0 U_0 - hU = B (h - h_0)$$

et par suite :

$$(12) \quad U = \frac{h_0 U_0 - B (h - h_0)}{h}.$$

Cette dernière équation, de laquelle  $H$  a disparu, a été donnée par M. Michal dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (1866, 1<sup>er</sup> semestre, page 220) ; c'est, avec des notations différentes, celle qui est désignée dans son mémoire par la lettre  $(A_1)$ . Il la déduit de considérations théoriques plus que contestables qui le conduisent à attribuer au coefficient désigné ici par  $B$  la valeur  $\frac{g}{2}$ , ou la moitié de l'accélération due à la pesanteur. Par une circonstance absolument

fortuite, le coefficient B, applicable aux puits de Grenelle et de Passy qui ont donné lieu au travail de M. Michal, vaut environ 4.90 en mesures métriques, ce qui est bien la valeur de  $\frac{g}{2}$ ; mais le raisonnement n'en reste pas moins inadmissible.

D'ailleurs, le coefficient étant déterminé, la formule s'accorde, aussi complètement qu'on peut le désirer, avec les observations.

Le coefficient B varie en réalité d'un puits à un autre.

M. Démétriadès, ingénieur principal des ponts et chaussées, a également vérifié la formule précédente sur les puits artésiens alimentant la ville de Salonique<sup>1</sup> et dont les profondeurs varient de 30 à 50 mètres, tandis que celle des puits de Grenelle et de Passy dépasse 500 mètres. Il a constaté que les débits suivent la loi établie par M. Michal, c'est-à-dire qu'ils sont proportionnels à la charge sur l'orifice ( $H - h$ ) et inversement proportionnels à la hauteur de la colonne ascendante ( $h$ ). C'est bien ce qu'exprime la formule (11)

$$U = B \frac{H - h}{h}.$$

Seulement, comme le coefficient B, supposé égal à  $\frac{g}{2}$ , n'a plus cette valeur pour les puits de Salonique. M. Démétriadès a été amené à y appliquer un coefficient correctif K qu'il désigne sous le nom de *coefficient artésien* et qui varie d'un puits à l'autre. Il semble plus simple, au lieu d'appeler K  $\frac{g}{2}$  la constante désignée par B dans les équations précédentes, de la débarrasser de ce facteur  $\frac{g}{2}$  dont la présence ne s'explique pas d'une façon satisfaisante.

Tant que la nappe souterraine peut, sans modification sensible dans son régime, fournir la quantité d'eau débitée par un puits artésien, le coefficient B et par suite la vitesse correspondant à une même hauteur  $h$  y restent les mêmes. Il en résulte que le débit est proportionnel à l'aire de la section du tube ascensionnel. Mais cela ne reste vrai que dans des limites assez restreintes et l'expérience montre qu'au delà d'un certain diamètre le débit cesse de croître proportionnellement à la section et qu'il cesse même tout à fait d'augmenter. Cette conséquence se déduit naturellement de la signification qui a été donnée au coefficient B; elle serait au con-

1. La distribution d'eau de la ville de Salonique (Turquie) et les nouvelles formules sur les puits artésiens, par G. A. Démétriadès (Extrait de la *Technologie sanitaire*, n° 4, 1899). Louvain.

traire inexplicable s'il était démontré que ce coefficient a une valeur constante telle que  $\frac{g}{2}$ .

En terminant ce paragraphe sur les puits artésiens, je crois devoir transcrire textuellement une remarque importante faite par Delaunay, dans son cours élémentaire de Mécanique (7<sup>e</sup> édition, page 449) et rappelée aussi par M. Michal.

« Il arrive souvent que la quantité d'eau fournie par un puits « diminue. Cette diminution peut être attribuée à deux causes : « ou bien à ce que le courant souterrain n'exerce plus une aussi « grande pression à l'extrémité inférieure du puits ; ou bien à ce « que l'intérieur du puits s'est obstrué par des éboulements ou par « l'accumulation en certains points, des matières solides que l'eau « entraîne avec elles : la détermination du niveau d'équilibre par « l'observation peut faire connaître immédiatement à laquelle des « deux causes est dû l'affaiblissement du débit du puits. Dans le « premier cas, on trouvera que ce niveau s'est abaissé ; dans le « second, au contraire, on trouvera qu'il n'a pas varié. »

## § 5

## JAUGEAGES

**165. Détermination du débit d'un cours d'eau par la hauteur des eaux.** — La détermination du débit d'un cours d'eau est toujours une opération difficile et délicate ; aussi, pour les grandes rivières, on se contente le plus souvent d'approximations, et l'on évalue simplement leur débit par une observation de la hauteur de leur niveau en adoptant, pour chacun des postes d'observations, une relation empirique entre la hauteur  $H$  lue à une certaine échelle et le débit  $Q$  correspondant. On admet alors, implicitement, que le débit est le même lorsque la profondeur est la même, ce qui, comme nous le verrons plus loin, n'est pas exact. Parmi ces relations empiriques, une des plus usitées est de la forme :

$$(13) \quad Q = A (H + C)^{\frac{3}{2}},$$

$A$  et  $C$  étant des coefficients numériques à déterminer en chaque point. Cette formule peut se justifier, dans une certaine mesure,

par des considérations théoriques. Si l'on suppose que le mouvement du cours d'eau soit uniforme et si l'on appelle  $h$  sa profondeur, prise pour son rayon moyen,  $I$  sa pente et  $U$  sa vitesse moyenne, on pourra écrire :

$$hI = bU^2.$$

Si maintenant l'on prend pour le coefficient  $b$  la forme indiquée par Darcy,  $b = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{h}\right)$ , et si l'on appelle encore  $Q$  le débit total égal à  $lhU$ , on pourra donner, à l'équation précédente, la forme :

$$hI = \alpha \left(1 + \frac{\beta}{h}\right) \frac{Q^2}{l^2 h^2}.$$

La largeur  $l$  du cours d'eau et le coefficient  $\alpha$  sont des quantités constantes au point considéré, et l'on peut admettre, approximativement, qu'il en est de même de la pente  $I$ . Alors en posant  $\frac{I l^2}{\alpha} = A^2$ , on obtiendra :

$$Q^2 = A^2 \frac{1}{1 + \frac{\beta}{h}} h^3.$$

Si l'on suppose encore que  $\beta$  soit petit par rapport à  $h$  (ce qui ne peut être vrai que si  $h$  est assez grand, parce que, pour les parois en terre, par exemple,  $\beta$  est égal à 1,25), et si l'on peut négliger devant l'unité les puissances supérieures de  $\frac{\beta}{h}$ , on pourra écrire, approximativement :

$$\frac{1}{1 + \frac{\beta}{h}} = \left(1 + \frac{\beta}{h}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{\beta}{3h}\right)^3;$$

et par suite :

$$Q = A \left(h - \frac{\beta}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

La profondeur  $h$  ne diffère que par une constante de la hauteur  $H$  lue à une échelle fixe ;  $h - \frac{\beta}{3}$  est donc la même chose que  $H + C$ , ce qui justifie la formule précédente. Elle a reçu de nombreuses applications ; par exemple, d'après M. Graëff, le débit de la Loire, au pont de Roanne, est lié à la hauteur lue à l'échelle de ce pont par la relation :

$$Q = 180 (H + 0,25)^{\frac{3}{2}};$$

d'après M. Cuvinot, le débit de la Seine au pont de Mantes est, de même, exprimé par :

$$Q = 95 (H + 0,70)^{\frac{3}{2}}.$$

D'autres formules ont également été employées. Ce sont ordinairement des formules dans lesquelles le débit est exprimé par plusieurs termes contenant les puissances croissantes de la profondeur, de la forme :

$$Q = A + BH + CH^2 + DH^3 + \dots$$

Ainsi, d'après M. Fargue, le débit de la Garonne, à Langou, serait :

$$Q = 86,52 + 120,18H + 41,70H^2;$$

d'après M. du Boys, le débit du Rhône, à Valence :

$$Q = 325 + 365H + 40H^2 + 14H^3.$$

Mais la première de ces deux formules, surtout, pourrait être remplacée avec une exactitude suffisante par une expression de la forme (13).

L'illustre Lombardini a proposé, pour l'Adda, une formule analogue, dans laquelle la constante C est supprimée et la constante A remplacée par un terme variable en fonction de H. D'après lui, le débit de l'Adda à Côme serait lié à la hauteur H lue à l'échelle du pont de cette ville par la relation :

$$Q = 100 H^{\frac{3}{2}}(1 - 0,032 H) = (100 - 3,20 H) H^{\frac{3}{2}}.$$

Ces formules, ou d'autres analogues, ne sont applicables qu'au point pour lequel on a déterminé les valeurs numériques des coefficients, et cette détermination suppose une autre méthode de mesurage du débit.

**165. Détermination du débit au moyen de profils en travers.** — On indique quelquefois, pour arriver à ce but, une méthode basée sur l'application de la formule du mouvement permanent, mise sur la forme :

$$dz = \frac{\alpha U dU}{g} + \frac{\Sigma}{\omega} b U^2 ds.$$

Appliquée à une étendue finie  $L$ , elle donne, en appelant  $U_0, U_n$  les vitesses aux deux extrémités de cette longueur,  $z_0$  et  $z_n$  les altitudes de la surface libre :

$$z_0 - z_n = \alpha \frac{U_n^2 - U_0^2}{2g} + \int_0^L \frac{\chi}{\omega} b U^2 ds.$$

Remplaçons-y  $U$  par le quotient du débit constant  $Q$  par la section transversale  $\omega$ , dont les valeurs aux extrémités seront aussi  $\omega_0, \omega_n$ , il viendra :

$$(14) \quad z_0 - z_n = \alpha \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right) + Q^2 \int_0^L \frac{\chi}{\omega^3} b ds.$$

L'intégrale du dernier terme peut être calculée approximativement par une formule de quadrature, en supposant que l'on ait mesuré, dans l'étendue de la longueur  $L$ , un certain nombre de profits transversaux pour lesquels on aura déterminé exactement les valeurs de  $\chi$ , de  $\omega$  et même de  $b$  qui varie avec le rayon moyen. Si l'on a partagé, par exemple, la distance  $L$  en un nombre pair  $n$  de parties égales, on pourra calculer l'intégrale par la formule de Simpson ou par celle, plus simple, du général Parmentier. Si l'on représente par  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , les valeurs de la quantité  $\left[ b \frac{\chi}{\omega^3} \right]$  dans

les profits  $0, 1, \dots, n$ , l'intégrale  $\int_0^L b \frac{\chi}{\omega^3} ds$ , aura pour valeur approchée :

$$\int_0^L b \frac{\chi}{\omega^3} ds = \frac{L}{n} \left[ 2(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + \frac{y_0 + y_n}{6} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{6} \right];$$

la première parenthèse ne comprenant que les valeurs affectées d'indices impairs.

Cette intégrale étant ainsi calculée, et sa valeur portée dans l'équation (14), celle-ci donnera immédiatement la valeur du débit  $Q$  lorsque l'on aura mesuré la pente superficielle totale  $z_0 - z_n$  entre les deux profils extrêmes.

Cette méthode n'a été, à ma connaissance, que peu employée ; elle paraît n'avoir pas toujours fourni des résultats exacts <sup>1</sup>.

**167. Jaugeage par déversoir.** — Lorsqu'il s'agit de petits cours d'eau que l'on peut barrer complètement, on arrive facilement à en connaître le débit au moyen d'un déversoir.

1. Voir Graëff, *Traité d'hydraulique*, tome II, page 142.

En tout cas, et quel que soit le procédé employé, comme l'opération du jaugeage exige un certain temps, le résultat ne peut avoir de sens que si le débit est resté constant pendant toute la durée de l'opération, il faut donc choisir un moment où le régime soit bien permanent, et, s'il est possible, une région où le mouvement soit à peu près uniforme.

Lorsque l'on établit un déversoir en travers d'un cours d'eau en vue de le jauger, il faut s'assurer avec le plus grand soin que l'eau ne peut pas passer au-dessous du déversoir, ce qui fausserait singulièrement les résultats. Cela fait, le seuil du déversoir étant réglé exactement suivant une ligne horizontale, il suffira de placer, un peu en amont, à une distance au moins égale à cinq ou six fois l'épaisseur de la lame déversante, une échelle graduée dont le zéro soit au niveau de cette ligne pour avoir, par une simple lecture, la hauteur  $h$  de la lame déversante et pouvoir calculer le débit par la formule spéciale du déversoir en ayant soin de choisir le coefficient de débit qui s'applique aux circonstances. On pourra aussi se servir de la table II, donnée à la fin de ce volume.

Il sera toujours utile, en même temps que l'on observera la hauteur à l'échelle au-dessus du déversoir, de l'observer aussi à une autre échelle fixe, placée en aval et assez loin pour que la perturbation produite dans le régime par l'établissement du barrage ait disparu. Si l'on a fait cette lecture un certain nombre de fois, dans des conditions différentes du cours d'eau, et en particulier au moment des eaux très abondantes, ainsi qu'en étiage, on pourra se servir de ces observations simultanées pour relier le débit  $Q$  du cours d'eau à la hauteur  $H$  lue à cette seconde échelle, au moyen d'une formule empirique de la forme :

$$Q = A (H + C)^{\frac{3}{2}}$$

dont on déterminera les constantes  $A$  et  $C$  par la méthode des moindres carrés, ou autrement ; et l'on pourra ainsi, à l'avenir, par une simple lecture à cette échelle, connaître le débit du cours d'eau.

**168. Jaugeage des grands cours d'eau.** — Mais ce procédé de jaugeage par déversoir n'est applicable, en général, qu'à de très petits cours d'eau. Lorsqu'il s'agit de cours d'eau importants, il n'y a pas d'autre moyen d'en connaître le débit que de mesurer la vitesse de l'eau. Et l'on peut dire, alors, que la précision du résultat est en raison du nombre des points où l'on a mesuré cette vitesse, dans une même section transversale.

Les appareils servant à mesurer la vitesse de l'eau dans les cours d'eau sont de deux sortes : les flotteurs et les hydromètres. Nous parlerons d'abord des premiers.

**169. Flotteurs.** — Les flotteurs peuvent être disposés de manière à donner la vitesse superficielle de l'eau, ou bien la vitesse moyenne de l'eau sur une verticale, ou bien encore la vitesse d'un des filets non superficiels situé à une profondeur donnée.

Quel que soit le système de flotteur que l'on adopte, la vitesse se déduit du temps nécessaire au parcours d'une longueur déterminée. Il est ici de la plus grande importance de choisir, pour faire les observations, une portion de cours d'eau aussi régulière que possible, bien rectiligne et où le mouvement puisse être considéré comme uniforme. Il est, en outre, nécessaire de faire les observations par un temps calme, car, le moindre vent modifie la vitesse des flotteurs dans une proportion qui est rarement négligeable.

L'emplacement des observations étant choisi, on tend, au travers du cours d'eau, et aussi près que possible au-dessus de sa surface, deux cordes allant d'une rive à l'autre, dans une direction bien perpendiculaire à celle du courant et à une distance déterminée l'une de l'autre ; cette distance doit être la plus grande possible, il est bon qu'elle ne soit pas inférieure à 50 mètres et souvent on la prend de 100 mètres ou d'un multiple de 100 mètres.

Le flotteur, quelle que soit sa forme, placé dans le courant, commence par avoir une vitesse inférieure à celle des filets qui l'entourent. Sa marche s'accélère peu à peu et sa vitesse augmente jusqu'à ce que la résistance qu'il rencontre au-devant de lui égale les pressions qu'il subit en arrière, diminuées du frottement qu'il exerce sur les filets qui vont moins vite que lui. La vitesse qu'il acquiert, lorsque son mouvement est devenu uniforme, est sensiblement la même que la moyenne de celles des filets liquides dont il tient la place, et la différence est d'autant plus faible que ses dimensions horizontales sont plus petites. Il faut donc choisir des flotteurs très petits. L'espace nécessaire pour que le flotteur ait acquis une vitesse uniforme est d'environ 15 à 20 mètres. D'une barque amarrée à 20 ou 25 mètres en amont de la première corde on laissera donc tomber dans l'eau le flotteur sur le filet dont on voudra mesurer la vitesse : exactement sur ce filet lorsqu'il sera au milieu de la largeur ; un peu plus près de la rive lorsqu'il s'agira d'un filet qui ne sera pas au milieu, afin de tenir compte, dans une certaine mesure, de l'effet d'entraînement, vers le milieu, que subira le flotteur dans sa course. Alors, un observateur, muni d'un chrono-



mètre, se plaçant sur une rive exactement dans le plan vertical qui contient l'une des cordes, note l'instant où le flotteur passe au-dessous de la corde, puis se transportant en face de l'autre corde, fait une observation analogue, ce qui lui fait connaître le nombre de secondes employées par le flotteur pour parcourir la distance connue des deux cordes. Au lieu d'un seul observateur, parcourant la rive d'une corde à l'autre *en même temps que le flotteur*, ce qui devient d'ailleurs impraticable lorsque la vitesse atteint un mètre par seconde, on peut, lorsque l'on veut faire un grand nombre d'observations, placer un observateur en face de chaque corde ; l'un d'eux est muni du chronomètre, note le passage du flotteur en face de sa corde et note ensuite l'apparition d'un signal convenu que lui montre le second, lorsque le flotteur passe à la seconde corde. Une autre barque, placée à quelques mètres en aval de la seconde corde, recueille les flotteurs, lorsqu'ils doivent servir de nouveau, et, dans tous les cas, s'assure que le flotteur a suivi la direction du filet dont il avait pour but de mesurer la vitesse ou du moins ne s'en est pas trop écarté. *Lorsqu'il n'en est pas ainsi, l'on doit annuler l'observation et la recommencer.* Pour faire facilement cette vérification, on marque, sur chaque corde, des points de division qui se correspondent et qui partagent la largeur de la rivière en un certain nombre de parties égales, dans chacune desquelles doit rester le flotteur en passant d'une corde à l'autre. Lorsque l'on n'a pas de chronomètre, M. Graëff indique la possibilité de s'en passer en confectionnant sur place un pendule de 0 m. 994 de longueur, battant la seconde, au moyen d'une pierre attachée à l'extrémité d'une ficelle. Ce procédé expéditif peut suffire pour des reconnaissances sommaires ; son exactitude dépend du soin qui a été apporté à son emploi.

Quelle que soit la forme du flotteur adopté, il faut, comme on a dit, qu'il soit de petites dimensions horizontales. Il faut aussi, toujours, qu'il ne fasse pas au-dessus du niveau de l'eau une saillie prononcée, qui ferait intervenir dans son mouvement la résistance de l'air ou l'action du vent.

Pour des flotteurs superficiels, Boileau s'est servi, en 1845, de pains à cacheter. On emploie quelquefois de petites rondelles de liège, provenant simplement de bouchons de bouteilles coupés en tranches minces. On est souvent obligé, pour les rendre visibles de de la rive, de les colorer en blanc ou en rouge.

**170. Bâtons lestés.** — Pour déterminer la vitesse moyenne sur une verticale, on se sert de tiges ou bâtons lestés. C'est un moyen

très rapide et suffisamment exact d'arriver au but. Le flotteur est alors formé d'un bâton bien droit, en bois verni, à la partie inférieure duquel s'adapte un petit cylindre creux où l'on place des rondelles de plomb en nombre suffisant pour que le bâton, se tenant verticalement dans l'eau, n'émerge que d'une très petite quantité. En raison de la masse du flotteur et de la grandeur des efforts qui lui sont imprimés par le liquide, l'influence de la résistance de l'air est bien moins à craindre que pour les flotteurs superficiels; on peut donc, sans inconvénient, le laisser dépasser légèrement la surface libre du liquide, ou planter sur sa face supérieure un petit signal qui le rende bien visible.

Un pareil bâton, plongé verticalement dans un liquide en mouvement, y rencontre des filets animés de vitesses différentes et, sous leur action, il prend une vitesse moyenne intermédiaire entre elles. Si l'on désigne par  $l$  la longueur de la tige supposée verticale, par  $v'$  sa vitesse, par  $v$  la vitesse d'un filet quelconque situé à une profondeur  $x$  et enfin par  $h$  la profondeur du filet qui a la même vitesse  $v'$  que la tige, les filets situés plus haut ont une vitesse  $v > v'$ , leur vitesse relative par rapport à la tige est  $v - v'$  et, si l'on admet que la pression du liquide soit proportionnelle au carré de cette vitesse relative, la force accélératrice totale sera, en appelant  $\mu$  un certain coefficient numérique :  $\int_0^h \mu (v - v')^2 dz$ . De même, les filets à une profondeur supérieure à  $h$  dont la vitesse  $v$  est inférieure à  $v'$  produiront, sur la tige, une force retardatrice  $\int_h^l \mu (v' - v)^2 dz$ . Si le mouvement de la tige est uniforme, ces deux intégrales doivent être égales. On a ainsi :

$$\int_0^h \mu (v - v')^2 dz = \int_h^l \mu (v' - v)^2 dz.$$

Le facteur constant  $\mu$ , commun aux deux termes, peut être supprimé. Si l'on met ensuite, pour  $v$ , une expression de la forme :

$$\begin{aligned} v &= v_0 + ax - bx^2, \\ \text{qui donne :} \quad v' &= v_0 + ah - bh^2, \end{aligned}$$

la différence  $v - v'$  sera :

$$v - v' = a(x - h) - b(x^2 - h^2).$$

Substituant et effectuant les intégrations, il vient une équation du 5<sup>e</sup> degré en  $h$ , d'où l'on tire, en moyenne, en mettant pour  $a$  et  $b$  les valeurs les plus ordinaires :

$$h = 0,61 l.$$

Cela veut dire que la tige prend à peu près la vitesse du filet qui la rencontre aux  $\frac{3}{5}$  de sa profondeur. On peut, par le même moyen, comparer la vitesse  $v'$  de la tige, à la vitesse moyenne  $u$  sur la verticale dans la profondeur  $l$ , vitesse qui a pour expression  $u = \frac{1}{l} \int_0^l v dz$ .

On trouve ainsi que la vitesse de la tige est inférieure à cette vitesse moyenne ; par conséquent, la vitesse prise par la tige, plus faible que la vitesse moyenne des filets qui la rencontrent, peut être considérée comme étant égale à la vitesse moyenne sur une profondeur un peu plus grande que sa longueur. En faisant le calcul avec les valeurs les plus ordinaires des coefficients numériques  $a$  et  $b$ , on constate que, pour avoir la vitesse moyenne sur toute une verticale, depuis la surface jusqu'au fond, il faut donner à la tige lestée une longueur égale à environ 0,94 de la profondeur du cours d'eau <sup>1</sup>.

**171. Doubles flotteurs.** — Pour mesurer la vitesse en un point situé à une certaine profondeur au-dessous de la surface libre, on emploie quelquefois un double flotteur. C'est un instrument dont l'idée remonte à Léonard de Vinci et qui a été employé par Mariotte (1684). Il se compose de deux corps solides, réunis par un cordeau ou fil. L'un de ces corps qui seul est à proprement parler un flotteur doit rester à la surface de l'eau, l'autre, plus lourd que l'eau, soutenu par le premier et par le cordeau, doit rester à la profondeur marquée par la longueur du fil. Si les dimensions de ce dernier corps sont grandes par rapport à celles du reste de l'appareil, la vitesse prise par l'ensemble du système, et que l'on peut mesurer en observant le flotteur supérieur, se rapprochera de la vitesse moyenne des filets que rencontre ce corps inférieur.

Les conditions que doivent remplir les doubles flotteurs pour donner des indications à peu près exactes sont nombreuses et difficiles à réaliser.

Le corps inférieur doit être d'un volume relativement grand, par rapport aux autres parties, mais cependant assez petit pour que la vitesse du courant soit sensiblement la même dans toute son étendue ; il doit avoir un poids spécifique suffisant pour s'enfoncer rapidement, tendre le fil, et se maintenir à une profondeur constante malgré les tourbillons ou courants qui tendraient à le faire remonter ; le flotteur superficiel doit être le plus petit possible que pour son volume soit négligeable par rapport à celui du corps

1. Voir *Annales des Ponts et chaussées*, 1882, 2<sup>e</sup> semestre, pages 69 et suiv.

inférieur, il doit cependant avoir une flottaison suffisante pour maintenir ce dernier en équilibre. Le fil doit être assez menu pour que l'action du courant sur lui soit négligeable et assez solide pour porter le corps inférieur dans l'air. Ces conditions, dont quelques-unes paraissent incompatibles, sont rarement satisfaites ; aussi les doubles flotteurs, dont l'usage s'explique par la facilité et la promptitude avec lesquelles on peut les établir et les observer, ne donnent-ils que des résultats fort sujets à caution, surtout lorsque la vitesse et la profondeur sont grandes. Les causes d'erreur, qui croissent avec la profondeur, peuvent enlever toute valeur aux observations faites par ce procédé expéditif. En effet, lorsque la profondeur est grande, le fil, si menu qu'il soit, n'est plus négligeable, et la vitesse réellement prise par l'ensemble est beaucoup plus grande que celle du filet où se trouve son extrémité inférieure. Le corps inférieur est, en outre, déplacé verticalement par les tourbillonnements et il se trouve porté dans les couches supérieures où la vitesse est plus rapide. Les vitesses observées devraient donc être réduites dans une proportion difficile à déterminer, mais qui peut être très grande <sup>1</sup>.

**172. Hydromètres. Tube de Pitot.** — La vitesse des filets liquides placés à une certaine profondeur se détermine plus exactement au moyen des hydromètres. Ces appareils sont de deux sortes suivant que la vitesse de l'eau est mesurée par l'intermédiaire d'un équilibre statique ou d'un équilibre dynamique. Dans les premiers, on mesure la pression produite par la vitesse de l'eau sur une surface fixe donnée ; dans les seconds on mesure la vitesse imprimée par l'eau à des organes mobiles. Les appareils les plus usités du premier type sont les tubes jaugeurs et les tachomètres, ceux du second les moulinets.

L'idée des tubes jaugeurs paraît due à Pitot. Il a remarqué en 1732, que si l'on plonge dans un courant un tube vertical AB

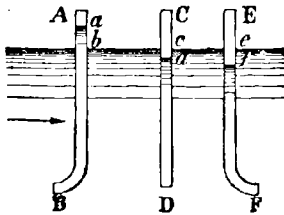


Fig. 89.

(fig. 89) recourbé à son extrémité, ouvert aux deux bouts de manière à diriger son extrémité inférieure à l'encontre du courant, l'eau s'élève dans ce tube à une hauteur  $ab = h_1$ , qui dépend de la vitesse  $u$  du filet liquide correspondant à l'orifice B. Pitot supposait, entre ces deux quantités, la relation  $u^2 = 2gh_1$ , mais cela n'est pas tout à fait

1. Notice sur l'emploi des doubles flotteurs, par M. Bazin. *Annales des Ponts et chaussées*, 1884, 1<sup>er</sup> semestre, page 554.

exact, parce que la colonne liquide  $ab = h_1$  qui mesure l'excès de la pression au point B sur la pression hydrostatique ne serait rigoureusement celle qui est due à la vitesse  $u$  du liquide en ce point que si les filets avaient des trajectoires rectilignes et parallèles. La présence du tube, dont les dimensions ne sont jamais négligeables, a pour effet d'obliger les filets liquides à se courber. La pression se trouve modifiée : elle augmente du côté convexe et diminue du côté concave par suite de l'accélération normale qui intervient alors dans son expression. On rend évident cet effet de la courbure des filets en plongeant dans le courant un tube vertical CD, non recourbé, ou bien un tube recourbé comme AB, mais disposé de manière que la branche inférieure soit dirigée transversalement ou perpendiculairement au courant. Dans les deux cas, la présence du tube oblige les filets à se courber en tournant leur concavité vers son orifice ; il s'y produit donc une diminution de pression qui se manifeste par un abaissement  $cd = h_2$  : le niveau dans le tube se tient au dessous de la surface libre. De même, si l'on place le tube recourbé dans la position EF, la dépression  $ef = h_3$  est encore plus accentuée. On comprend d'ailleurs que si aucune de ces petites hauteurs,  $h_1$ ,  $h_2$  ou  $h_3$ , n'est celle qui est due à la vitesse  $u$ , elles doivent vraisemblablement présenter avec la quantité  $\frac{u^2}{2g}$  un rapport constant dont la grandeur dépend des dimensions et de la forme de l'appareil. On pourra donc, en appelant  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  des coefficients numériques à déterminer pour chaque tube, écrire :

$$\frac{u^2}{2g} = m_1 h_1 = m_2 h_2 = m_3 h_3,$$

et la mesure de l'une de ces hauteurs, en supposant connu le coefficient  $m$  correspondant, donnera la vitesse du filet rencontré par l'extrémité inférieure du tube.

La lecture de ces petites hauteurs est très difficile : la surface libre d'un liquide en mouvement est bien rarement immobile aussitôt que les vitesses cessent d'être faibles ; il s'y produit constamment de petites ondulations, des rides, provenant le plus souvent de composantes obliques des vitesses des filets inférieurs, de petits tourbillons à axe horizontal, de l'effet du vent, etc. Les variations qui se produisent dans le niveau de cette surface autour du tube sont souvent du même ordre de grandeur que les hauteurs  $h$  à mesurer, de sorte que l'on ne peut obtenir de celles-ci qu'une valeur assez peu approchée.

**173. Tube de Darcy.** — Darcy a perfectionné d'une façon très heureuse le tube de Pitot en réunissant, sur un même appareil, les deux tubes AB, EF de la figure précédente et en les munissant de robinets qui permettent de faire les lectures beaucoup plus facilement. Voici comment : Les deux tubes AB, EF (fig. 90) peuvent être fermés simultanément au moyen d'un même robinet R placé vers leur partie inférieure. Ils sont en outre réunis par le haut, et sur la partie supérieure commune est placé un autre robinet S permettant d'établir ou d'intercepter la communication de cette partie

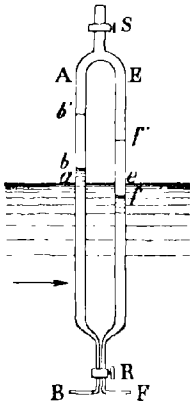


Fig. 90.

supérieure avec l'atmosphère. Les deux parties inférieures recourbées, terminées en B et en F, étant dans le prolongement l'une de l'autre, on descend l'appareil dans le courant de manière que la direction BF soit parallèle à celle de l'écoulement : le robinet R étant ouvert, les deux tubes fonctionnent comme nous venons de le dire ; le niveau monte dans le premier, d'une certaine hauteur  $ab = h_1$ , et s'abaisse, dans le second, de  $ef = h_2$ . Que l'on ferme le robinet R et l'on pourra retirer l'instrument de l'eau et lire avec toute la précision possible la différence de niveau dans les deux tubes ; ce sera, avec nos notations,  $h_1 + h_2$ . Au lieu d'opérer ainsi, on peut encore, sans retirer de l'eau l'appareil, ouvrir le robinet S, aspirer avec la bouche l'air qui se trouve au-dessus des niveaux  $b, f$  ; ces deux niveaux s'élèveront d'une même quantité, arriveront en  $b', f'$ , et l'on pourra les amener tous deux assez haut au-dessus du niveau du courant pour que la lecture de leur différence puisse se faire facilement. Une échelle graduée se trouve placée, dans ce but, entre les deux tubes.

Lorsque l'on opère avec le tube de Pitot, l'équilibre ne s'établit qu'après un grand nombre d'oscillations. C'est afin de les réduire que Darcy a donné un très faible diamètre ( $0^m0015$ ) à la partie inférieure et recourbée des tubes, tandis que dans la partie atteinte par les niveaux, le diamètre est beaucoup plus grand ( $0^m01$ ).

La hauteur  $h_1 + h_2$  étant ainsi mesurée et désignée simplement par  $h$ , les équations précédentes la relient à la vitesse  $u$  par l'expression :

$$h = h_1 + h_2 = \frac{u^2}{2g} \left[ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right],$$

qui peut prendre la forme :

$$u = K \sqrt{2gh},$$

$K$  étant un coefficient numérique  $= \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$  qui dépend comme  $m_1$  et  $m_2$  de la forme et des dimensions de l'appareil et qui, une fois déterminé pour chaque instrument, donnera la vitesse  $u$  correspondant à une hauteur  $h$ .

Pour déterminer ce coefficient  $K$  on fait mouvoir l'instrument en ligne droite dans une eau tranquille avec une vitesse constante connue  $u$  et l'on observe la valeur correspondante de  $h$ . On répète bien entendu cette opération un assez grand nombre de fois, avec des vitesses différentes, afin d'avoir pour  $K$  la valeur la plus exacte possible <sup>1</sup>.

Dans une note insérée aux *Annales des Mines* (mars 1898), M. Râteau a montré que, dans le cas de vitesses variables, le tube de Pitot (ou celui de Darcy) mesure, non pas la vitesse moyenne, mais la moyenne des carrés des vitesses, c'est-à-dire la quantité de mouvement moyenne au point où il est placé pendant la durée de l'expérience. Pour en déduire la vitesse moyenne, il faut y appliquer un coefficient qui varie suivant le degré d'irrégularité des vitesses par rapport au temps. Le coefficient par lequel doit être multipliée la valeur de  $\frac{u^2}{2g}$  pour être égale à  $h$  et qui est désigné plus haut par  $\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$ , a varié, dans les expériences de M. Râteau, de 1,012 à 1,37, s'écartant ainsi beaucoup de la moyenne 1,15 qui est quelquefois adoptée.

M. Ritter a donné, dans les *Annales des Ponts et chaussées*, (1886, 2<sup>e</sup> sem. p. 697), la description d'un appareil nouveau dérivant du tube de Pitot et qui a surtout pour objet la mesure des vitesses superficielles. Cet instrument n'a pas été assez employé pour que l'on puisse se prononcer sur sa valeur. Il en est de même d'une balance de torsion proposée par M. de Perrodil.

Le tube de Pitot ou de Darcy ne peut pas être facilement employé dans les grandes profondeurs ni lorsque les vitesses sont trop faibles. On peut se servir alors du tachomètre de Brunings ou du moulinet de Woltmann.

**174. Tachomètre de Brünings.** — Le tachomètre de Brünings se compose essentiellement d'un disque AB (fig. 91) lesté à

1. On pourra utilement constater à ce sujet un article de Darcy, dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1858, 1<sup>er</sup> semestre, page 354, et le traité de M. Bazin sur les eaux courantes, pages 44 à 51 et 63 à 70.

sa partie inférieure de manière à ce qu'il se maintienne dans une position verticale lorsqu'il est plongé dans l'eau et à ce qu'il ait un poids total exactement égal au poids du liquide dont il tient la place, de sorte qu'il n'éprouve aucune tendance à monter ni à descendre.

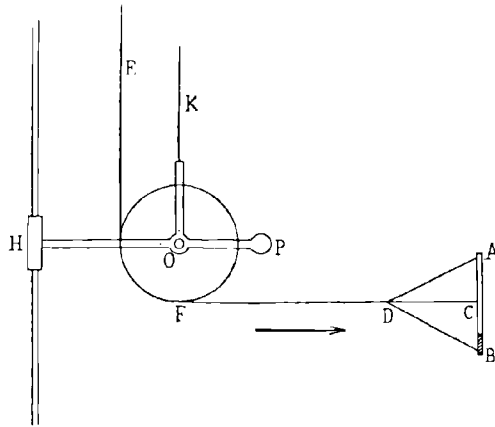


Fig. 91.

Un fil FC attaché à son centre et d'autres fils DA, DB, attachés à son pourtour le maintiennent dans une direction perpendiculaire au courant. Le fil CF passe sur une poulie à axe horizontal O, se retourne verticalement en FE et vient, au-dessus du niveau de l'eau se fixer à un dynamomètre très sensible dont les mouvements sont amplifiés par une aiguille qui se meut sur un cadran divisé. L'effort exercé par le courant sur le disque croît avec la vitesse et l'on comprend que l'on ait pu, par des expériences préalables, graduer l'instrument et inscrire sur le cadran les vitesses correspondant aux efforts exercés, c'est-à-dire aux déplacements du dynamomètre.

L'axe O est suspendu à une corde K qui permet de le placer à la hauteur convenable. La chape de la poulie porte une douille H qui peut glisser le long d'une tige verticale que l'on place un peu en amont du point dont on veut observer la vitesse. Elle est maintenue horizontale par un contrepoids P. La tige verticale passant dans la douille H peut être remplacée par une corde fixée au fond par une ancre ou un corps mort. La présence, immédiatement en amont du point à observer, de la poulie et de la tige introduit bien une légère perturbation dans l'écoulement, mais il suffit que la longueur FC du fil soit égale à deux à trois fois la largeur du disque pour que cette perturbation ne produise sur la vitesse observée qu'un effet absolument négligeable.



**175. Moulinet de Woltmann.** — Le moulinet de Woltmann se compose essentiellement d'un axe horizontal AB (fig. 92), portant à son extrémité deux ou quatre ailettes CC disposées obliquement sur sa direction. Cet appareil est monté sur une tige verticale MN que l'on fait reposer sur le fond du lit du courant ; l'axe AB peut se déplacer à volonté de manière à pouvoir être mis à une hauteur quelconque au-dessus du fond. Si on le dirige dans le sens du courant, les filets liquides rencontrant les palettes C leur imprimeront une vitesse proportionnelle à la leur, si l'on fait abstraction du frottement, ou un peu moindre en tenant compte de cette résistance. Il suffira de mesurer la vitesse de rotation de l'axe AB pour, en la multipliant par un coefficient numérique spécial, en déduire la vitesse moyenne des filets qui rencontrent les ailettes que l'on regarde comme étant celle du filet que rencontre l'axe.

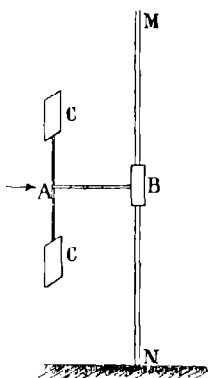


Fig. 92.

La vitesse de l'axe AB se mesure par l'observation du nombre  $n$  de tours qu'il fait dans un temps déterminé, une seconde par exemple. L'observation porte, bien entendu, sur un temps assez long et l'on divise le nombre total de tours par celui des secondes. Dans l'appareil de Woltmann, l'axe AB porte une vis sans fin qui peut engrener avec une roue dentée servant de compteur de tours ; un enclenchement spécial, manœuvré du haut au moyen d'une corde, permet de produire l'engrènement de la roue dentée ou de la rendre indépendante de la vis. On doit, pour chaque lecture, retirer de l'eau l'instrument. Cette obligation, ainsi que celle de maintenir la corde bien tendue pendant toute la durée de chaque opération, rend la manœuvre de l'instrument assez incommode ; en outre, le frottement des engrenages a pour conséquence de fausser les résultats.

**176. Perfectionnement apporté par M. Harlacher.**

— M. Harlacher, professeur à l'école polytechnique de Prague, a eu l'idée de supprimer tous ces engrenages et de compter les tours de l'axe par l'intervention d'un courant électrique. A chaque tour un contact se produit, un courant passe et vient au dehors, se manifester soit par une marque inscrite, comme dans l'appareil télégraphique de Morse, sur une bande de papier qui se déroule, soit en laissant avancer d'une dent la roue d'un compteur de tours. Les lectures peuvent ainsi se faire à tout moment, à l'air, sans que l'on ait besoin de déplacer l'appareil, et presque tous les frottements se trouvent

supprimés. Grâce à ce perfectionnement, le moulinet est devenu beaucoup plus commode et plus exact.

La relation entre la vitesse moyenne  $u$  des filets rencontrés par l'appareil et le nombre  $n$  de tours par seconde est de la forme :

$$u = An + B,$$

A et B étant des coefficients numériques spéciaux à chaque instrument et à déterminer par un tarage. On opère, comme pour le tube jaugeur, en imprimant au moulinet une vitesse horizontale connue dans une eau en repos. M. Harlacher se servait, pour cela, d'un wagon roulant sur des rails établis sur pilotis au milieu d'une pièce d'eau et au-dessous duquel était suspendu l'instrument. Il a constaté qu'en général le coefficient B est petit par rapport à A et que l'on ne commet pas une erreur appréciable, surtout si le nombre  $n$  de tours est un peu grand, en bornant la formule à son premier terme :  $u = An$ . Baumgarten tarait le moulinet de Woltmann en l'attachant à l'extrémité d'une longue perche horizontale dont l'autre extrémité était maintenue fixe sur un axe vertical. Le moulinet décrivait ainsi, dans l'eau en repos, une grande circonférence.

M. Rateau, dans la note citée plus haut, a montré que la formule s'accorde mieux avec les observations lorsqu'on la complète par un terme contenant la vitesse en dénominateur ; il écrit alors :

$$u = An + B + \frac{C}{u}.$$

Le coefficient B est nul ou négligeable dans la plupart des cas ; il en est de même du dernier terme dès que la vitesse dépasse  $0^m,50$  ou  $1^m,00$  par seconde.

**177. Calcul du débit au moyen des vitesses mesurées.** — Au moyen de l'un des appareils qui viennent d'être décrits, on pourra donc toujours mesurer la vitesse en un point quelconque de la section transversale du cours d'eau ; il faudra ensuite en déduire le débit, et cette dernière opération sera, comme il a été dit, d'autant plus exacte que la vitesse aura été mesurée en un plus grand nombre de points convenablement choisis.

On peut, pour un jaugeage approximatif, se contenter de mesurer la vitesse  $V$  au milieu de la surface libre, qui diffère peu de la vitesse maximum. On calcule alors la vitesse moyenne  $U$  par une formule empirique, celle de Prony par exemple ( $n^0$  111), ou bien tout simplement en prenant  $U = 0,80 V$ , ou  $= 0,85 V$ , ou même  $= 0,90 V$ . Le coefficient à adopter, compris entre 0,80 et 0,90, doit être d'au-

tant plus petit que le fond du cours d'eau est plus irrégulier et que le cours d'eau est plus étroit. C'est donc pour les cours d'eau très larges et à fond très uni que l'on prendrait  $U = 0,90 V$ . La vitesse moyenne  $U$  ainsi calculée se multiplie par l'aire de la section transversale moyenne relevée dans l'étendue dans laquelle les observations ont été faites, si la vitesse  $V$  a été mesurée au moyen d'un flotteur. Il faut alors, comme on l'a dit, que la portion de cours d'eau observée ait une forme aussi régulière que possible, mais il n'en existe pas moins quelques différences entre les surfaces des diverses sections transversales. On en relève un nombre suffisant, on en calcule les aires et on prend la moyenne.

On obtient un résultat plus exact en mesurant les vitesses superficielles en un certain nombre de points équidistants de la ligne d'eau. On divise alors l'aire de la section transversale par des verticales équidistantes en un même nombre de parties au milieu desquelles on a mesuré la vitesse superficielle. On ne se trompe généralement pas beaucoup en admettant que la vitesse moyenne sur la verticale menée au-dessous du point où elle a été mesurée est de 0,84 à 0,85 de la vitesse superficielle, et en appliquant la vitesse moyenne ainsi calculée à l'élément d'aire limité par les deux verticales voisines.

Le résultat est encore plus exact si, au lieu de se contenter de mesurer les vitesses superficielles, on mesure directement, au moyen de bâtons lestés ayant une longueur d'environ 0,92 à 0,94 de la profondeur, la vitesse moyenne sur chaque verticale. Les vitesses prises par ces bâtons lestés et observées directement, remplacent celles que l'on calculerait, comme il vient d'être dit, en se servant de l'observation de vitesses superficielles. En mesurant simplement, au moyen d'un bâton lesté, la vitesse moyenne sur la verticale du milieu du courant, on peut la prendre à très peu près pour la vitesse moyenne  $U$  dans toute la section lorsque celle-ci est très large. Pour les cours d'eau de dimension restreinte, on la multipliera par un coefficient de réduction qui ne devra pas être inférieur à 0,90, si la section transversale ne présente pas d'irrégularités trop prononcées et si elle se rapproche de la forme d'un segment de cercle ou d'un trapèze.

Enfin, lorsque l'on voudra avoir un jaugeage exact, il sera nécessaire de mesurer, au moulinet, au tachomètre ou au tube jaugeur, les vitesses en un grand nombre de points d'une section transversale bien régulière ; ces points seront en général équidistants dans le sens horizontal et dans le sens vertical ; ils se trouveront, par conséquent, aux sommets de rectangles juxtaposés. Les médianes de tous ces

rectangles diviseront la section transversale en d'autres rectangles qui, sur les bords, deviendront des triangles ou des trapèzes, et à l'aire de chacun de ces éléments de la section on appliquera la vitesse mesurée au point central correspondant. La somme de tous les produits donnera le débit du cours d'eau.

Cette opération du jaugeage est, comme on voit, assez longue, et il est nécessaire que pendant toute sa durée, le régime du cours d'eau reste permanent. Cette condition est souvent difficile à réaliser, et c'est une des raisons pour lesquelles on se contente souvent d'opérations un peu moins exactes, mais plus rapides.

**178. Méthode de calcul de M. Harlacher.** — M. Harlacher a indiqué, pour calculer le débit d'un cours d'eau, lorsque l'on a mesuré les vitesses en un grand nombre de points d'une section transversale, une méthode basée sur l'emploi des appareils planimétriques et qu'il est intéressant de connaître <sup>1</sup>. Supposons qu'en chaque point de la section transversale considérée nous portions, sur la normale au plan de cette section, une longueur égale à la vitesse en ce point; les extrémités de ces lignes constitueront une surface courbe et le débit  $Q$  sera égal au volume compris entre : 1<sup>o</sup> le plan de la section transversale; 2<sup>o</sup> la surface libre du cours d'eau; 3<sup>o</sup> les parois et le fond du lit; 4<sup>o</sup> la surface courbe ainsi tracée. Le calcul du débit revient donc à la mesure de ce volume. Décomposons-le en tranches par des plans équidistants, parallèles à celui de la section transversale; la surface courbe dont il vient d'être parlé sera coupée, par ces plans, suivant des lignes d'égale vitesse dont nous supposerons les projections tracées sur le plan de la section. Le volume total sera la somme d'une série de disques trapézoïdaux ayant pour bases successives ces courbes d'égale vitesse. Si donc, pour chacun de ces disques, on mesure, au planimètre, la surface des deux bases verticales qui le limitent, le volume du disque sera égal à la demi-somme de ces deux surfaces multipliée par l'équidistance des plans verticaux de division, et la somme des volumes sera le débit cherché.

Lorsque l'on connaît la vitesse moyenne sur un grand nombre de verticales parallèles, soit qu'on les ait déterminées au moyen de bâtons lestés ou par l'observation d'une ou de plusieurs vitesses sur chaque verticale, comme il a été dit, le calcul du débit se réduit à une simple quadrature et peut s'effectuer au planimètre de la manière

<sup>1</sup>. *Die Messungen in der Elbe und Donau, und die hydrometrischen Apparate und Methoden des Verfassers*, Leipzig, 1881.

suivante. Soit ABC (fig. 93) la section transversale considérée. Si  $v$  est la vitesse moyenne sur une verticale quelconque KL dont la profondeur KL soit appelée  $z$  et la distance AK, à l'origine du profil, désignée par  $y$ , le débit  $Q$  sera exprimé par

$$Q = \int v z dy,$$

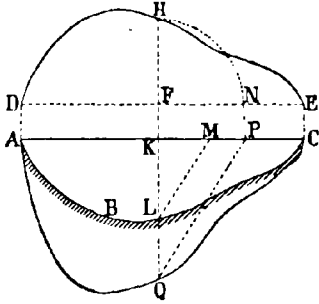


Fig. 93.

l'intégrale étant prise dans toute l'étendue de la section. Sur une horizontale DE égale à la largeur de la surface libre, menons en chaque point, tel que F, une verticale FH égale à la vitesse moyenne  $v$  sur la verticale correspondante KL de la section transversale, le

lieu des sommets H de ces ordonnées, ou la courbe DHE sera la courbe des vitesses moyennes sur les verticales, supposée connue. Du point F comme centre avec FH pour rayon, décrivons un quart de circonférence HN, ou simplement prenons sur l'horizontale DE la longueur FN = FH, et projetons le point N en P sur la ligne AC représentant la surface libre. A partir du point K, prenons KM égale à une longueur constante arbitraire  $a$ , qui sera ou l'unité de longueur ou une fraction simple de cette unité, joignons ML, et par le point P menons PQ parallèle à ML jusqu'à sa rencontre en Q avec la verticale KL prolongée au besoin ; la longueur KQ sera égale à  $KL \times \frac{KP}{KM}$  ou, puisque  $KP = FH$ , nous aurons  $KQ = \frac{vz}{a}$ . Le débit  $Q$

sera ainsi exprimé par  $Q = a \int KQ . dy$ . Le lieu des points Q sera une courbe AQC, que l'on tracera par points, et dont la surface AQC, mesurée au planimètre, donnera la valeur de l'intégrale qu'il suffira de multiplier par  $a$  pour obtenir le débit cherché Q.

Cette méthode consiste simplement, comme on le voit, à substituer le calcul d'une surface à celui d'un volume en effectuant graphiquement le produit des deux dimensions de chacune de ses sections rectangulaires.

**179. Précautions générales à prendre dans les opérations de jaugeage.** — On ne saurait trop insister sur la nécessité, lorsque l'on veut calculer la vitesse moyenne par l'observation de flotteurs superficiels, de choisir une portion de cours

d'eau bien régulière dans sa forme longitudinale et transversale. C'est à cette seule condition que les rapports entre la vitesse moyenne et la vitesse superficielle restent compris entre les limites indiquées. Mais il n'est pas moins important que la forme régulière de la partie du cours d'eau où se font les observations fasse suite à une autre, aussi régulière et de même forme, car ce n'est pas immédiatement à chaque variation de forme de la section transversale, que la répartition des vitesses s'établit suivant les lois qui ont été indiquées. Pour ce motif, ainsi que le fait observer M. de Caligny<sup>1</sup>, il y a des raisons de penser que le rapport de la vitesse moyenne à celle du milieu de la surface de l'eau dans un canal où le mouvement est permanent, peut être plus grand si la longueur du canal est petite par rapport à ses dimensions transversales que si elle est beaucoup plus grande.

1. *Hydraulique*, 1<sup>re</sup> partie, page 157.



## CHAPITRE VII

### MOUVEMENT NON PERMANENT

§ 1. *Généralités.* — § 2. *Crues des cours d'eau.* — § 3. *Prévision des crues.* — § 4. *Atténuation des effets des crues.*

---

#### § 1.

#### GÉNÉRALITÉS.

**180. Formule générale pour la valeur moyenne, sur une section, de toute dérivée complète par rapport au temps.** — L'étude du mouvement non permanent des liquides est beaucoup plus compliquée que celle du mouvement permanent ; les simplifications que nous avons admises au chapitre II pour l'évaluation du frottement et des diverses quantités qui figurent dans les équations ne pourraient plus être admises ou elles ne conduiraient qu'à des résultats trop éloignés de la réalité. Il faut donc serrer la question d'un peu plus près. Je ne puis avoir la prétention d'en donner ici une étude complète et détaillée, mais j'essaierai au moins de montrer comment elle a été abordée et résolue par M. Boussinesq, d'abord dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes* puis dans ses deux mémoires de 1897 sur l'*Écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides*.

J'admettrai toujours que le mouvement du liquide ait lieu par filets parallèles ou sensiblement parallèles, de manière que l'on puisse, à une première approximation, négliger, comme nous l'avons fait au n° 24, les composantes transversales  $v, w$  des vitesses des molécules devant la composante  $u$  dirigée dans le sens du mouvement, ainsi que leurs dérivées  $v', w'$ . Et j'établirai d'abord une formule générale donnant la valeur moyenne, sur une section trans-

versale d'un courant fluide, de la dérivée complète par rapport au temps,  $\varphi'$ , d'une fonction continue quelconque  $\varphi$ , des quatre variables  $x, y, z, t$ . Cette formule s'applique aux fluides élastiques aussi bien qu'aux liquides ; et il y a lieu d'y faire figurer la densité  $\rho$ , constante ou variable, de chaque particule.

Considérons, à l'époque  $t$ , toutes les particules  $m = \rho d\omega dx$  comprises entre deux sections voisines  $\omega$  et  $\omega'$  dont les abscisses sont voisines et constantes,  $x$  et  $x + \Delta x$ . Formons la somme  $\Sigma m\varphi$  des produits de chacune de ces masses pour la valeur correspondante de la fonction donnée quelconque  $\varphi$  ; nous avons évidemment

$$\Sigma m\varphi = \int_x^{x + \Delta x} dx \int_{\omega} \rho \varphi d\omega ;$$

Appelons  $\varphi_1$  la valeur, à l'époque  $t + dt$ , de la fonction  $\varphi$  pour la particule  $m$  et cherchons à évaluer la somme  $\Sigma m\varphi_1$ . La masse  $\Sigma m$ , qui à l'époque  $t$  se trouvait entièrement comprise entre les deux sections  $\omega$  et  $\omega'$ , se composera, à l'époque  $t + dt$ , de la tranche fluide qui sera comprise entre ces deux sections et qui donnera des éléments d'intégrale  $dx \rho \varphi d\omega$ , diminuée du fluide entré par chaque élément  $d\omega$  de la première section, dont la masse sera, pour chacun,  $\rho(u dt) d\omega$  et qui donnera des éléments d'intégrale  $- dt \rho u \varphi d\omega$ , et augmentée du fluide sorti de la même manière par chaque élément  $d\omega'$  de la seconde section et fournissant des éléments  $dt \rho u \varphi d\omega'$ . La somme cherchée sera ainsi

$$\Sigma m\varphi_1 = \int_x^{x + \Delta x} dx \int_{\omega} \rho \varphi d\omega + dt \left( \int_{\omega'} \rho u \varphi d\omega' - \int_{\omega} \rho u \varphi d\omega \right)$$

La différence des deux dernières intégrales est précisément ce dont s'accroît la dernière lorsqu'on passe de l'abscisse  $x$  à l'abscisse  $x + \Delta x$  ; on peut donc écrire :

$$\Sigma m\varphi_1 = \int_x^{x + \Delta x} dx \left( \int_{\omega} \rho \varphi d\omega + dt \frac{d}{dx} \int_{\omega} \rho u \varphi d\omega \right)$$

Or la différence  $\Sigma m\varphi_1 - \Sigma m\varphi$  divisée par  $dt$  vaudra évidemment  $\Sigma m\varphi'$ , et cette somme a pour expression

$$\Sigma m\varphi' = \int_x^{x + \Delta x} dx \int_{\omega} \rho \varphi' d\omega.$$

Effectuant le calcul et la substitution et supposant  $\Delta x$  infiniment petit, il vient la relation cherchée



$$(1) \quad \int_{\omega} \rho \varphi' d\omega = \frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \varphi d\omega + \frac{d}{dx} \int \rho u \varphi d\omega.$$

Lorsqu'il s'agit de liquides, la densité  $\rho$  est constante et l'on peut écrire simplement, en divisant tous les termes par  $\rho$  :

$$(2) \quad \int \varphi' d\omega = \frac{d}{dt} \int \varphi d\omega + \frac{d}{dx} \int u \varphi d\omega,$$

ou :

$$\mathcal{M}\varphi' = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d}{dt} \int \varphi d\omega + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d}{dx} \int u \varphi d\omega ;$$

étant entendu que les intégrales doivent s'étendre à toute la section transversale du courant liquide, permanent ou non permanent.

Telle est la formule générale que M. Boussinesq a établie et qui s'applique à toute fonction  $\varphi$  quelconque des variables  $x, y, z, t$  caractérisant le mouvement du liquide.

Appliquons cette formule générale (2) au calcul de la moyenne de  $u'$ , dont nous avons trouvé la valeur au n° 24, page 35, dans le cas du mouvement permanent et pour cela, faisons  $\varphi = u$ , nous obtenons, vu que  $\int u d\omega = U\omega$  et que  $\int u^2 d\omega = (1 + \tau) U^2\omega$  :

$$\int u' d\omega = \frac{d \cdot U\omega}{dt} + \frac{d \cdot (1 + \tau) U^2\omega}{dx}.$$

Dans le dernier terme, considérons la fonction  $(1 + \tau) U^2\omega$ , dont nous devons prendre la dérivée par rapport à  $x$ , comme le produit des deux facteurs  $(1 + \tau) U$  et  $U\omega$ , nous aurons, en effectuant la différentiation :

$$\int u' d\omega = \omega \frac{dU}{dt} + U \frac{d\omega}{dt} + (1 + \tau) U \frac{d \cdot U\omega}{dx} + U\omega \frac{d(1 + \tau)U}{dx}.$$

Mais, d'après l'équation de continuité, qui exprime la conservation du volume des éléments liquides, que nous avons établie au n° 17, page 26, nous avons, en remarquant que le débit  $q = U\omega$  :

$$(3) \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{d \cdot U\omega}{dx} = 0. \quad 1$$

1. Cette équation (3) est du reste une conséquence immédiate de la formule générale (2) dans laquelle on fait  $\varphi = 1$  d'où  $\varphi' = 0$ . Elle devient alors, en effet :

$$\frac{d}{dt} \int d\omega + \frac{d}{dx} \int u d\omega = 0,$$

ou bien l'équation (3).

Il en résulte que deux des termes de la précédente se détruisent ; et en divisant le tout par  $\omega$  il vient :

$$(4) \quad \frac{1}{\omega} \int u' d\omega = \mathfrak{N} u' = \frac{dU}{dt} + U \frac{d \cdot (1 + \eta) U}{dx} - \eta \frac{U}{\omega} \frac{d\omega}{dt}$$

Nous n'avions trouvé, au n° 24, que le second terme du dernier membre. Les deux autres sont nuls lorsque le mouvement est permanent et le dernier, affecté du coefficient très petit  $\eta$  est souvent négligeable.

Appliquons encore cette formule générale (2) au calcul de la moyenne de la dérivée de  $u^2$ , soit  $2uu'$ . En y faisant  $\varphi = u^2$ , nous obtenons, vu que  $\int u^2 d\omega = \alpha U^2 \omega$  :

$$\int (u^2)' d\omega = \frac{d(1 + \eta) U^2 \omega}{dt} + \frac{d \cdot \alpha U^2 \omega}{dx}$$

ou, en mettant en évidence comme plus haut le produit  $U\omega$ , effectuant la différentiation des produits, réduisant en tenant compte de la relation (3) et divisant finalement par  $\omega$  :

$$(5) \quad \frac{1}{\omega} \int (u^2)' d\omega = \mathfrak{N} \cdot (u^2)' = \frac{d(1 + \eta) U^2}{dt} + U \frac{d \cdot \alpha U^2}{dx} - (\alpha - 1 - \eta) \frac{U^2}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Nous aurons à utiliser plus loin ces deux résultats (4) et (5).

### 181. Equation différentielle générale du mouvement d'un courant liquide, en tenant compte du frottement intérieur.

— En raisonnant comme nous l'avons fait au n° 25, page 39, nous arriverons à établir les trois équations générales (14) pour déterminer le mouvement d'un courant liquide supposé s'effectuer par filets à peu près parallèles. Et le même raisonnement nous fournira l'équation (15) de ce numéro, dans laquelle, eu égard à ce que la pente  $I$  de la surface libre du courant est généralement petite, on peut remplacer  $\cos I$  par l'unité. Nous l'écrirons donc

$$(6) \quad p = p_0 + \rho g z.$$

Quant à la première des équations (14), elle nous donnera encore

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = g \sin I - F - u'$$

que nous simplifierons d'abord, en remplaçant  $\sin I$  par  $I$  et en observant que  $\frac{dp}{dx} = 0$ . Nous l'écrirons donc,

$$gI - F = u'.$$

Nous allons essayer d'exprimer la force que nous avons appelée  $-F$ . C'est, d'après ce qui a été dit à la page 41, la projection, sur l'axe des  $x$ , de l'effort de frottement dû à la vitesse relative de deux molécules voisines. Or, d'après la note du n° 16, page 22, les vitesses relatives des molécules ont pour projections

$$\begin{aligned} & \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \text{ sur un plan parallèle à celui des } xz, \\ & \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, \text{ sur un plan parallèle à celui des } xy; \end{aligned}$$

et si, comme nous l'avons admis, les composantes  $v$  et  $w$  sont négligeables ainsi que leurs dérivées, ces projections des vitesses se réduisent respectivement à  $\frac{du}{dz}$  et à  $\frac{du}{dy}$ . Il en résulte que, si l'on représente par  $\epsilon$  un coefficient de frottement intérieur, variable avec le degré d'agitation qui se produit au point considéré, les efforts correspondants à ces vitesses relatives seront  $\epsilon \frac{du}{dz}$  et  $\epsilon \frac{du}{dy}$ . Mais sur la face  $dx dz$ , perpendiculaire aux  $y$  et la plus rapprochée de l'origine, d'un élément parallélépipède  $dx dy dz$ , agit, parallèlement à l'axe des  $x$ , l'effort  $-\epsilon \frac{du}{dy} dx dz$  et, sur la face parallèle, l'effort  $\left[ \epsilon \frac{du}{dy} + \frac{d}{dy} \left( \epsilon \frac{du}{dy} \right) dy \right] dx dz$  dont la somme algébrique représente la composante à faire entrer en ligne de compte. Ramenée à l'unité de masse, c'est-à-dire divisée par  $\rho dx dy dz$ , cette composante a ainsi pour valeur  $\frac{d}{dy} \left( \frac{\epsilon}{\rho} \frac{du}{dy} \right)$ . On trouverait de même, pour les deux faces perpendiculaires à l'axe des  $z$  la composante  $\frac{d}{dz} \left( \frac{\epsilon}{\rho} \frac{du}{dz} \right)$ . C'est la somme de ces deux composantes que nous avons représentée par  $-F$ . Nous écrirons donc de la manière suivante l'équation générale du mouvement du courant liquide

$$(7) \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{\epsilon}{\rho g} \frac{du}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left( \frac{\epsilon}{\rho g} \frac{du}{dz} \right) + I = \frac{u'}{g}.$$

A cette équation différentielle indéfinie, il faut joindre la condi-

tion qui doit être satisfaite au contour de la section transversale. Si  $dn$  représente un élément infiniment petit de la normale élevée en un point quelconque du contour de cette section, et dans son plan, le frottement sera exprimé en ce point par le produit  $\varepsilon \frac{du}{dn}$  et, pour une section transversale de forme quelconque, nous écrirons la condition limite, d'après ce qui a été dit au n° 29 pour l'expression du frottement à la paroi :

$$(8) \quad \varepsilon \frac{du}{dn} = - \rho g B_0 u_0^2 f\left(\frac{\chi y}{\omega}, \frac{\chi z}{\omega}\right).$$

Dans ces deux équations (7) et (8) le coefficient de frottement  $\varepsilon$  devra recevoir la valeur que nous lui avons attribuée à ce même n° 29, c'est-à-dire

$$(9) \quad \varepsilon = \frac{\rho g}{k} \sqrt{B_0} \frac{\omega}{\chi} u_0 F\left(\frac{\chi y}{\omega}, \frac{\chi z}{\omega}\right).$$

M. Boussinesq a appliqué ces équations générales et il en a tiré une expression remarquable, que je donnerai plus loin, pour le frottement extérieur moyen dans un courant liquide de forme quelconque. Je me bornerai, en suivant exactement la même marche que lui, à les appliquer au cas simple d'un canal rectangulaire très large.

**182. Cas particulier d'un courant rectangulaire très large.** — Si nous considérons un courant dont la profondeur  $h$  soit constante sur toute la largeur d'une section transversale et dont la largeur soit assez grande pour pouvoir être regardée comme indéfinie, c'est-à-dire telle que les tranches comprises entre deux plans voisins, parallèles aux  $zx$  soient toutes dans les mêmes conditions au point de vue de l'écoulement, la coordonnée  $y$  disparaît, en ce que les dérivées par rapport à  $y$  deviennent identiquement nulles. Le coefficient de frottement intérieur  $\varepsilon$  est alors constant et exprimé par la formule suivante :

$$\varepsilon = \frac{\rho g}{k} \sqrt{B} h u_0,$$

qui est exactement celle que nous avons donnée au n° 29 dans laquelle, toutefois, pour adopter des notations qui se rapprochent de celles de M. Boussinesq, nous avons remplacé le coefficient  $A$  par  $\frac{\sqrt{B}}{k}$ . Alors si nous portons cette valeur de  $\varepsilon$  dans les deux

équations (7) et (8) en y supprimant les dérivées en  $y$  et en remarquant que, par suite de l'identité supposée des conditions d'écoulement en tous les points du fond, la fonction appelée  $f$  est égale à l'unité, ces deux équations deviennent :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{B}}{k} h u_0 \frac{d^2 u}{dz^2} + I = \frac{u'}{g}, \\ \frac{du}{dn} = -\frac{k}{h} \sqrt{B} u_0 \end{array} \right. \quad (\text{au fond}).$$

Multiplions tous les termes de la première par  $dz$  et intégrons de 0 à  $h$  nous obtenons

$$\frac{\sqrt{B}}{k} h u_0 \left( \frac{du}{dz} \right)_0^n + Ih = \int_0^n \frac{u' dz}{g}.$$

Mais, la normale  $n$  à la paroi du fond se confond avec la direction  $z$ , de sorte que la valeur de  $\frac{du}{dz}$  pour  $z = h$  n'est autre chose que  $\frac{du}{dn}$ , exprimée par la seconde (10). En substituant, il vient après réductions :

$$(11) \quad Bu_0^2 = Ih - \int_0^n \frac{u' dz}{g} = h \left( I - \frac{\partial \mathcal{U} u'}{g} \right).$$

S'il s'agissait d'un régime uniforme dans lequel l'accélération  $u'$  est nulle, cette formule se réduirait à  $Bu_0^2 = Ih$ , et c'est en substituant à la fois au coefficient  $B$  un autre coefficient  $b$  et à la vitesse  $u_0$  à la paroi, la vitesse moyenne  $U$  que nous avons obtenu plus haut la formule  $bU^2 = Ih$ . Si donc  $b$  est le coefficient applicable au régime uniforme, il est relié à celui que nous avons appelé  $B$  par l'équation :

$$Bu_0^2 = bU^2.$$

Dans le mouvement varié, que nous étudions, le rapport de la vitesse moyenne  $U$  à la vitesse au fond  $u_0$  est différent de ce qu'il est dans le mouvement uniforme et c'est ce rapport que nous allons chercher à déterminer en faisant entrer en compte l'accélération  $u'$ . Portons dans la première équation (10) la valeur de  $I$  tirée de (11), nous obtenons

$$(12) \quad \frac{1}{k \sqrt{B} u_0} \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{u' - \partial \mathcal{U} u'}{g h B u_0^2}.$$

cette équation ne contient plus d'autre inconnue que la vitesse  $u$  d'un

filet quelconque et ses dérivées ; c'est donc l'équation du problème. Pour la traiter facilement, nous prendrons comme inconnue non pas cette vitesse  $u$ , mais son excès  $u - u_0$  sur la vitesse au fond  $u_0$ , et nous poserons :

$$(13) \quad \frac{1}{k\sqrt{B} \cdot u_0} (u - u_0) = F_1 + \frac{h}{gBu_0^2} F_2,$$

en appelant  $F_1$  et  $F_2$  deux fonctions inconnues de  $x$ , définies par les équations différentielles suivantes :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 F_1}{dx^2} + \frac{1}{h^2} = 0. \quad (\text{partout}), \\ \frac{dF_1}{dx} = -\frac{1}{h}. \quad F_1 = 0 \quad , \quad (\text{au fond}). \end{array} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 F_2}{dx^2} = \frac{u' - \mathfrak{N}u'}{h^2}. \quad (\text{partout}). \\ \frac{dF_2}{dx} = 0 \quad , \quad F_2 = 0 \quad , \quad (\text{au fond}). \end{array} \right.$$

L'équation (13) peut s'écrire :

$$(16) \quad \frac{u}{u_0} = 1 + k\sqrt{B} \cdot F_1 + \frac{kh}{g\sqrt{B}u_0^2} F_2;$$

ce qui donnera le rapport de la vitesse en un point quelconque à la vitesse au fond lorsque  $F_1$  et  $F_2$  seront connues. Si l'on multiplie les termes de cette dernière équation par  $dx$ , qu'on l'intègre ensuite de 0 à  $h$  et que l'on divise le résultat par  $h$ , on obtiendra pour chaque terme sa valeur moyenne sur une ordonnée verticale, ou, ce qui revient au même, dans toute la section transversale puisque toutes les ordonnées sont supposées se trouver dans des conditions identiques. En appelant alors  $U$  la vitesse moyenne de débit, on pourra écrire

$$(17) \quad \frac{U}{u_0} = 1 + k\sqrt{B} \cdot \mathfrak{M}F_1 + \frac{kh}{g\sqrt{B}u_0^2} \mathfrak{M}F_2.$$

Fort heureusement, on peut calculer des valeurs suffisamment approchées des moyennes  $\mathfrak{M}F_1$  et  $\mathfrak{M}F_2$  sans avoir besoin d'intégrer les équations (14) et (15).

Tout d'abord, remarquons que si le mouvement était uniforme, la fonction  $F_1$ , indépendante de l'accélération  $u'$  subsisterait seule avec sa même valeur, tandis que la fonction  $F_2$  serait toujours nulle. Dans un mouvement uniforme, le second membre de l'équation (17)

se réduirait donc à ses deux premiers termes, et d'après ce que nous venons de dire, si  $b$  est le coefficient usuel qui entre dans la formule du mouvement uniforme et dont la détermination expérimentale a été faite avec toute la précision désirable, nous pouvons écrire :

$$(18) \quad 1 + k\sqrt{B} \cdot \mathfrak{N} F_1 = \sqrt{\frac{B}{b}}.$$

Reste à calculer la moyenne de  $F_2$ . Pour cela, additionnons les deux premières équations (14) et (15) après les avoir multipliées respectivement par  $F_2 dz$  et par  $-F_1 dz$ , nous obtiendrons

$$\frac{d^2 F_1}{dz^2} F_2 dz - \frac{d^2 F_2}{dz^2} F_1 dz + \frac{F_2 dz}{h^2} = \frac{\mathfrak{N} u' - u'}{h^2} F_1 dz.$$

Si nous intégrons tous les termes entre 0 et  $h$ , les deux premiers termes qui peuvent s'écrire  $\frac{d}{dz} \left( \frac{dF_1}{dz} F_2 - \frac{dF_2}{dz} F_1 \right) dz$  donneront une somme nulle en égard aux conditions aux limites (14) et (15). Et si nous multiplions par  $h$  les autres termes, intégrés entre les mêmes limites, nous obtiendrons

$$(19) \quad \mathfrak{N} F_2 = \mathfrak{N} u' \mathfrak{N} F_1 - \mathfrak{N} (F_1 u').$$

En substituant cette valeur dans (17) et en tenant compte de (18), il vient :

$$\frac{U}{u_0} = \sqrt{\frac{B}{b}} \left[ 1 + \frac{k\sqrt{b}}{gBu_0^2} h \left( \mathfrak{N} F_1 \mathfrak{N} u' - \mathfrak{N} (F_1 u') \right) \right]$$

Le terme qui suit l'unité est petit lorsqu'il s'agit, comme nous l'avons supposé, d'un mouvement varié qui ne diffère pas beaucoup du régime uniforme. On peut donc, en appliquant la formule du binôme, élever à la puissance  $-2$  les deux membres de cette équation et négliger les puissances de ce terme supérieures à la première. Il vient ainsi, en remplaçant aussi, dans ce terme,  $Bu_0^2$  par sa valeur de première approximation  $bU^2$  :

1. On peut remarquer en passant, avec M. Boussinesq, que cette expression donne

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{B}} + k \mathfrak{N} F_1.$$

Le coefficient  $\frac{1}{\sqrt{b}}$  que nous avons appelé  $C$  se compose donc de deux parties : la première, variable en sens inverse du degré de rugosité des parois, la seconde, indépendante de cette condition.

$$Bu_0^3 = bU^2 - \frac{2k\sqrt{b}}{g} \cdot h \left[ \partial \mathcal{K} F_1 \partial \mathcal{K} u' - \partial \mathcal{K} (F_1 u) \right].$$

Il faut encore observer que, pour le calcul de ce dernier terme, petit par rapport aux précédents, on peut remplacer avec une approximation suffisante,  $k\sqrt{b}$  par  $k\sqrt{B}\frac{u_0}{U}$ , et  $F_1$ , dans les termes où il figure comme facteur, par  $\frac{u - u_0}{k\sqrt{B}u_0}$ , ce qui revient à mettre  $\frac{u - u_0}{U}$  au lieu du produit  $k\sqrt{b} \cdot F_1$ ; la moyenne de  $F_1$  ou  $\partial \mathcal{K} F_1$  vaut alors, au même degré d'approximation,  $\frac{U - u_0}{k\sqrt{B}u_0}$ , et avec ces substitutions, l'équation précédente s'écrit :

$$Bu_0^3 = bU^2 - 2\frac{h}{g} \left[ \frac{U - u_0}{U} \partial \mathcal{K} u' - \left( \frac{\partial \mathcal{K} (u u') - \partial \mathcal{K} (u_0 u')}{U} \right) \right].$$

Le facteur  $u_0$ , constant, peut sortir des signes de moyenne et les termes qui le renferment se détruisent; et il reste, si l'on observe que  $2uu'$  est la dérivée de  $u^2$  que nous désignerons par  $(u^2)'$ , l'expression définitive :

$$(20) \quad Bu_0^3 = bU^2 + \frac{h}{g} \left[ \frac{\partial \mathcal{K} (u^2)'}{U} - 2 \partial \mathcal{K} u' \right].$$

En portant cette valeur dans l'équation (11) où figure la pente motrice  $I$ , on obtiendra l'équation du mouvement varié, qui sera, après réductions :

$$(21) \quad I = \frac{bU^2}{h} + \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \mathcal{K} (u^2)'}{U} - \partial \mathcal{K} u' \right].$$

Pour un cours d'eau à section transversale quelconque, les deux équations sont exactement les mêmes sauf la substitution du rayon moyen  $\frac{\omega}{\alpha}$  à la profondeur  $h$ ; le premier terme du second membre de la dernière est donc ainsi :  $bU^2 \frac{\alpha}{\omega}$ .

**183. Equation générale du mouvement non permanent et du frottement extérieur.** — Admettons donc comme démontrées, pour un cours d'eau à section quelconque les deux équations :



$$I = \frac{\chi}{\omega} bU^2 + \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \mathcal{R}(u^2)'}{U} - \partial \mathcal{R} u' \right],$$

et 
$$Bu_0^2 = bU^2 + \frac{1}{g} \frac{\omega}{\chi} \left[ \frac{\partial \mathcal{R}(u^2)'}{U} - 2 \partial \mathcal{R} u' \right];$$

il nous suffira d'y remplacer les moyennes de  $u'$  et de  $(u^2)'$  qui y figurent par les expressions (4) et (5) que nous avons trouvées plus haut pour obtenir les équations cherchées entre la vitesse moyenne  $U$  et la pente motrice  $I$  d'une part, et le frottement extérieur d'autre part. Ces équations sont les suivantes :

$$(22) \quad I = \frac{\chi}{\omega} bU^2 + (2\alpha - 1 - \tau_1) \frac{dU^2}{dx} \frac{1}{2g} + \frac{1 + 2\eta}{g} \frac{dU}{dt} - \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g} \frac{U}{\omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{U}{g} \left( U \frac{d(\alpha - \eta)}{dx} + \frac{d\eta}{dt} \right),$$

$$(23) \quad Bu_0^2 = bU^2 + 2(\alpha - 1 - \tau_1) \frac{\omega}{\chi} \frac{dU^2}{dx} \frac{1}{2g} + \frac{2\eta}{g} \frac{\omega}{\chi} \frac{dU}{dt} + \frac{1 + 3\tau_1 - \alpha}{g} \frac{U}{\chi} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\chi g} \left( U \frac{d(\alpha - 2\tau_1)}{dx} + \frac{d\eta}{dt} \right).$$

En général, lorsque l'écoulement sera assez graduellement varié pour que le mode de distribution des vitesses diffère peu de ce qu'il est dans le régime uniforme, les coefficients  $\alpha$ ,  $\tau_1$  pourront être réduits à leurs valeurs sensiblement constantes données pour ce régime. De plus, dans les écoulements graduellement variés où les changements de forme de la section transversale sont assez lents pour influer peu sur la valeur de ces coefficients, leurs dérivées en  $x$  ou en  $t$  seront du second ordre de petitesse. Par conséquent, à une première approximation, le dernier terme, double, de chacune des équations (22) et (23) sera négligeable.

Le quatrième terme du second membre de chacune des équations, affecté des coefficients  $(\alpha - 1 - 2\tau_1)$  dans la première et  $(1 + 3\tau_1 - \alpha)$  dans la seconde sera lui-même très peu sensible par rapport aux autres. Et alors on peut dire que la pente motrice  $I$  se divise en trois parties principales employées respectivement, l'une,  $\frac{\chi}{\omega} bU^2$ , à vaincre le frottement extérieur de régime uniforme ; la deuxième,  $(2\alpha - 1 - \tau_1) \frac{dU^2}{dx} \frac{1}{2g}$ , à accélérer le mouvement en y accroissant la hauteur due à la vitesse moyenne  $U$  ; enfin, la troisième,  $\frac{1 + 2\eta}{g} \frac{dU}{dt}$ , à accélérer le mouvement sur place. Ces accélérations peuvent, bien entendu, être positives ou négatives.

De même, la formule (23) montre que le frottement extérieur moyen par unité d'aire comprend pareillement trois parties principales dont les deux dernières, dépendant des mêmes variations du mouvement font voir que, à égalité de vitesse moyenne  $U$ , la vitesse au fond,  $u_0$ , croît quand le mouvement s'accélère ainsi soit d'amont en aval, soit sur place. Ces accélérations tendent donc à égaliser les vitesses à travers chaque section. Dupuit en avait déjà fait la remarque. Il observe que si on applique, entre deux sections normales d'un courant permanent sensiblement rectiligne, et aux divers filets fluides supposés parallèles de ce courant, le théorème de Bernoulli, chacun d'eux aura subi, de l'amont à l'aval, la même variation de la hauteur  $\frac{u^2}{2g}$  due à la vitesse. Si donc les filets s'accélèrent,

les carrés  $u^2$  conserveront entre eux, tout en grandissant, leurs différences primitives (du moins le long de parcours assez modérés pour qu'on puisse y négliger l'action des frottements) et les différences entre leurs racines  $u$  s'atténueront. Le même fait a été observé par M. Bazin. L'effet contraire se produit, les différences entre les vitesses s'accroissent, lorsque le mouvement est retardé.

La pente motrice ou pente superficielle  $I$  est liée avec la dérivée en  $x$  de la section  $\omega$  et à la pente du fond  $i$  supposée connue par une relation qui, dans le cas d'une section rectangulaire de profondeur  $h$  se réduit à

$$(24) \quad I = i - \frac{dh}{dx}$$

et qui pourra être écrite de même pour toute autre forme donnée de la section. En joignant donc à la formule (22) la condition (3) de conservation des volumes fluides ou de continuité, on aura tout ce qu'il faut pour rattacher, dans le cas général d'un régime non permanent, les états successifs du courant fluide à son état initial.

On peut souvent, avec une approximation suffisante, simplifier notablement cette équation (22). J'ai déjà dit plus haut que son dernier terme était négligeable. Le terme précédent, affecté du coefficient  $(\alpha - 1 - 2\eta)$  le sera aussi le plus souvent. En effet, dans le régime uniforme on a, à peu près,  $\alpha = 1 + 3\eta$ , ce qui réduirait à  $\eta$ , c'est-à-dire ordinairement à quelques centièmes de l'unité, ce coefficient. En le laissant de côté, négligeant de même, dans le terme précédent,  $2\eta$  par rapport à l'unité, et remplaçant dans celui qui le précède encore  $(2\alpha - 1 - \eta)$  par l'unité, l'équation se réduit à

$$(25) \quad I = \frac{\omega}{\omega} b' U^2 + \frac{d}{dx} \cdot \frac{U^2}{2g} + \frac{1}{g} \frac{dU}{dt},$$

que l'on déduit de (22) en y faisant  $\alpha = 1$  et  $\eta = 0$  ; mais dans laquelle j'ai mis  $b'$  au lieu de  $b$  pour tenir compte des termes négligés.

Sous cette forme simplifiée et approximative, on peut la déduire facilement de celle que nous avons établie au n° 25, page 41, et que je reproduis ici :

$$\omega \left( g \sin I - \frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} \right) = \int_{\omega} F d\omega + \int_{\omega} u' d\omega$$

Nous pouvons y remplacer immédiatement  $\sin I$  par  $I$  et en faire disparaître la dérivée de  $p_0$  qui est nulle, puisque  $p_0$  est constante. Elle devient alors

$$\omega g I = \int_{\omega} F d\omega + \int_{\omega} u' d\omega$$

Le premier terme du second membre pourra être exprimé, approximativement, par une fonction de la vitesse moyenne  $U$ , multipliée par le périmètre mouillé  $\chi$ , et écrit  $g \chi \varphi(U)$ . La fonction  $\varphi(U)$  peut également recevoir la forme usuelle  $b'U^2$  dans laquelle  $b'$  représente une fonction de  $U$  qui pourra être différente de celle  $b$  relative au mouvement permanent.

Pour évaluer le terme suivant  $\int_{\omega} u' d\omega$  ou  $\omega \cdot \mathcal{M}u'$ , nous pourrions nous servir de la formule générale établie plus haut, au n° 180. Mais si nous remarquons que

$$u' = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx},$$

nous pourrions avoir une valeur approchée de  $u'$  en substituant à  $u$ , dans cette expression, sa valeur moyenne  $U$  et alors, nous obtenons simplement

$$\int_{\omega} u' d\omega = \omega \left( \frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{dx} \right).$$

En portant cette valeur et celle du frottement dans l'équation précédente, il vient bien l'équation (25).

A cette équation qui suffit le plus souvent, il faut toujours joindre celle de continuité (3) que nous écrirons, en développant le second terme :

$$(26) \quad \frac{d\omega}{dt} + U \frac{d\omega}{dx} + \omega \frac{dU}{dx} = 0.$$

**184. Application à un canal horizontal de largeur indéfinie.** — Nous allons appliquer cette formule générale simplifiée (25) au mouvement qui peut prendre naissance et se propager dans un canal de largeur indéfinie, dont nous supposons ou bien le plafond horizontal dans le sens longitudinal, c'est-à-dire la pente du fond  $i$  nulle ou négligeable, ou tout au moins cette pente assez faible et les mouvements du liquide assez peu rapides pour que l'on puisse admettre qu'il y a toujours compensation entre cette pente et les frottements extérieurs, de telle sorte que la différence  $i - \frac{\lambda}{\omega} b U^2$  puisse toujours être regardée comme nulle.

Enfin, une autre hypothèse, nécessaire pour simplifier les résultats que nous avons en vue, sera que la vitesse moyenne  $U$  ne soit, en chaque point, fonction que de la profondeur.

Cela étant admis, appelons  $H$  la profondeur du canal en un point qui soit encore en repos à l'époque considérée, c'est-à-dire où la vitesse moyenne  $U$  soit nulle, et  $H + h$  cette profondeur en un autre point quelconque. En ne considérant que l'unité de largeur du canal, nous aurons :

$$\omega = H + h \quad \text{et} \quad d\omega = dh.$$

D'après notre dernière hypothèse, la vitesse  $U$  n'étant fonction que de la profondeur  $H + h$  ou de sa partie variable  $h$ , les dérivées de  $U$  s'exprimeront en fonction de celles de  $h$  par les formules :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}.$$

Alors, d'après notre première hypothèse  $i - \frac{\lambda}{\omega} b U^2 = 0$ , les deux équations (24) et (25) nous donnent, en tenant compte de ces expressions :

$$(27) \quad g \frac{dh}{dx} + \frac{dU}{dh} \frac{dh}{dt} + U \frac{dU}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} = 0.$$

et l'équation (26) deviendra, de même,

$$(28) \quad \frac{dh}{dt} + U \frac{dh}{dx} + (H + h) \frac{dU}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} = 0.$$

Portant dans (27) la valeur de  $\frac{dh}{dt}$  donnée par (28), il vient, après réduction et suppression du facteur commun  $\frac{dh}{dx}$  qui, égalé à zéro, correspond à une profondeur constante :

$$(H + h) \left( \frac{dU}{dh} \right)^2 = g$$

ou bien

$$(29) \quad \frac{dU}{dh} = \pm \sqrt{\frac{g}{H + h}}$$

cette dérivée ne peut évidemment s'annuler, ni par suite changer de signe, et il suffit pour conserver toute la généralité d'adopter l'un des deux signes du second membre, soit le signe positif. En intégrant et remarquant que, par hypothèse  $U = 0$  pour  $h = 0$ , il vient :

$$(30) \quad U = 2\sqrt{g} \left[ \sqrt{H + h} - \sqrt{H} \right].$$

Substituant cette valeur de  $U$  et celle (29) de  $\frac{dU}{dh}$  dans l'équation (28), on trouve :

$$\frac{dh}{dt} + \left[ 3\sqrt{g(H + h)} - 2\sqrt{gH} \right] \frac{dh}{dx} = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles a pour intégrale, en désignant par  $f$  une fonction arbitraire :

$$(31) \quad x = \left[ 3\sqrt{g(H + h)} - 2\sqrt{gH} \right] t + f(h).$$

C'est la solution du problème. Lorsque, à une époque déterminée à partir de laquelle on comptera le temps, ou pour laquelle  $t = 0$ , l'on connaîtra la forme de la surface de l'eau donnée par une équation

$$x = f(h),$$

l'équation (31) donnera la forme de cette même surface à une époque  $t$  quelconque. Elle montre que chacune des ordonnées  $h$  de la surface libre, comptée au-dessus du niveau primitif, se transporte, en apparence, en conservant sa grandeur avec une vitesse  $\left[ 3\sqrt{g(H + h)} - 2\sqrt{gH} \right]$  constante pour une même ordonnée, mais différente pour une autre. La forme de la surface libre se modifie donc par suite de la marche, avec des vitesses différentes, de ses diverses ordonnées. Les ordonnées les plus hautes marchent plus vite que les autres et la courbure de la surface s'accroît de manière à devenir appréciable. A partir de ce moment, les formules approximatives (30) et (31) cessent d'être applicables.

Elles ne le sont d'ailleurs, ainsi que l'équation générale (25) d'où nous les avons déduites, qu'autant que l'on peut substituer cette équation (25) à celle (22), c'est-à-dire que si les mouvements du liquide diffèrent assez peu de ceux du régime uniforme pour que l'on puisse négliger les frottements et les coefficients  $(\alpha - 1)$  et  $\eta$  devant l'unité. Il faut en outre, pour que les équations (30) et (31) puissent représenter le mouvement du liquide, que les hypothèses faites au commencement de ce paragraphe soient réalisées. La dernière, en particulier, consistant en ce que la vitesse  $U$  n'est fonction que de la profondeur, ne se vérifie qu'à la condition que la surélévation  $h$  soit faible par rapport à la profondeur  $H$  et que les courbures de la surface soient négligeables.

Nous retrouverons plus loin ces équations comme conséquence de celles qui régissent la propagation des ondes.

## § 2

### CRUES DES COURS D'EAU

**185. Difficulté du problème.** — La question des crues des cours d'eau est une de celles qui intéressent le plus les ingénieurs : ils ont à étudier les moyens de garantir les vallées contre les inondations, ou tout au moins ceux de prévoir les surélévations exceptionnelles du niveau des eaux, et d'en avertir les intéressés. Dans l'état actuel de la science, il est impossible de donner une théorie complète des crues ; d'ailleurs, les cours d'eau présentent dans leurs allures une si grande diversité que la théorie, fût-elle parfaite, devrait en tout cas être appropriée aux circonstances spéciales relatives à chaque rivière et ne pourrait se traduire en formules pratiques que moyennant l'introduction d'un certain nombre de coefficients ou de termes empiriques dépendant de ces circonstances. Les crues constituent, en réalité, une forme de mouvement non permanent des cours d'eau et leur étude théorique devrait, rationnellement, être déduite de celle de l'équation générale du mouvement non permanent qui vient d'être établie. Mais cette équation, en raison même de sa généralité, ne peut donner, sur le phénomène des crues, que des indications vagues et sans utilité pratique. C'est pourquoi je n'en ferai pas usage dans cette étude et je vais me contenter d'indiquer ce que peut apprendre, sur la question de la pro-

pagation des crues, une théorie sommaire que j'emprunterai pour la plus grande partie à une note de M. Kleitz <sup>1</sup>, dans laquelle cet ingénieur, à propos des crues du Rhône, a traité la question d'une manière tout à fait générale.

**186. Hypothèse simplificative.** — J'examinerai seulement le cas le plus simple d'une crue se propageant dans un cours d'eau sans affluent. Je ferai abstraction des complications qui résulteraient de la division de la rivière en plusieurs bras, ou de ses débordements sur de larges plaines, et je supposerai que la crue, dans chaque localité, s'élève graduellement jusqu'à un maximum unique, pour s'abaisser ensuite jusqu'à ce que la rivière soit revenue à son état initial. Au commencement et à la fin de la crue, la rivière est censée être en régime permanent et avoir le même débit dans toutes les sections transversales.

Alors le débit  $q$ , dans une localité quelconque définie par son abscisse  $s$ , variera avec le temps  $t$  pendant la durée de la crue ; à une même époque  $t$ , au contraire, le débit variera suivant les localités, ou avec l'abscisse  $s$  qui les définit ; il sera donc à la fois fonction de ces deux variables et nous pourrons écrire :

$$(32) \quad q = F(s, t).$$

D'autre part, si nous désignons par  $\omega$  l'étendue de la section transversale, nous pourrons répéter le même raisonnement et écrire :

$$(33) \quad \omega = f(s, t).$$

Nous avons démontré plus haut (n<sup>o</sup> 17, page 26), que l'équation de continuité pouvait se mettre sous la forme :

$$(34) \quad \frac{dq}{ds} + \frac{d\omega}{dt} = 0 ;$$

et enfin, en appelant  $u$  la vitesse moyenne, à une époque quelconque et dans une section quelconque, nous aurons, par définition :

$$(35) \quad u = \frac{q}{\omega} \quad \text{ou} \quad q = \omega u.$$

**187. Courbe des débits.** — Un fait bien constaté par l'expérience, c'est que le flot produit par une crue simple s'affaisse de plus en plus, en s'allongeant, lorsqu'il se propage sur une partie

1. Note sur la théorie du mouvement non permanent des liquides, par M. Kleitz. *Annales des ponts et chaussées*, 1877, 2<sup>e</sup> semestre, page 135.

de cours d'eau qui ne reçoit aucun affluent<sup>1</sup>. Si l'on a construit, pour une localité donnée, la courbe des débits locaux, c'est-à-dire une courbe telle que  $OMN$  (fig. 94), dont les abscisses sont les temps  $t$  et les ordonnées les débits  $q$  à chaque instant; la courbe analogue, pour une autre localité située en aval de la première, aura une forme telle que  $O'M'N'$  plus longue et moins haute que la précédente; la ligne horizontale  $OO'N'N'$  correspondant au débit permanent qui, par hypothèse, suit et précède la crue. Le volume du flot qui cons-

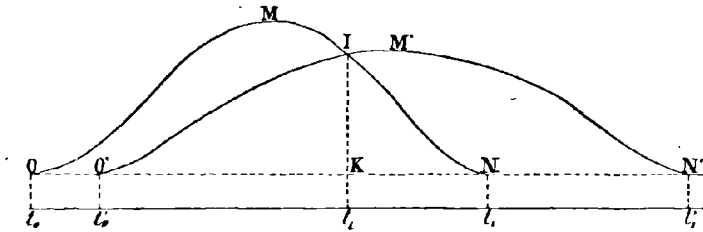


Fig. 94.

titue la crue dans toute son étendue est le même pour toutes les localités, puisque, par hypothèse, le cours d'eau ne reçoit aucun affluent. Or, ce volume, dans la première localité, est représenté par la surface  $OMNO$ , dans la seconde, par la surface  $O'M'N'O'$ . Il faut donc que ces deux surfaces soient équivalentes. Il en est de même aussi, par conséquent, des deux surfaces  $OMIO'O$  et  $NIM'N'N'$ . La première est l'excès de la surface  $OMIKO$ , représentant le volume d'eau passé à la première localité ayant l'époque  $t_i$  sur la surface  $O'IKO'$ , qui représente celui qui est passé à la seconde avant la même époque. Cette surface  $OMIO'O$  représente ainsi l'accroissement que le volume du cours d'eau a pris entre les deux localités avant l'époque  $t_i$ ; c'est ce qu'on appelle l'emmagasinement maximum, entre les deux localités considérées. Pour une crue donnée  $OMNO$  qui passe devant la première, cet emmagasinement sera d'autant plus grand que le point  $I$  sera plus bas sur la branche de courbe  $MN$ ; et plus le point  $I$  sera abaissé, plus la forme de la seconde courbe, qui doit être telle que la surface  $IM'N'NI$  soit égale à  $OMIO'O$ , sera aplatie et allongée. On voit que le débit maximum, dans la localité d'aval, sera d'autant moindre que l'emmagasinement, en amont, aura été plus considérable. Si donc on diminue cet emmagasinement par des travaux d'endiguement,

1. Je renvoie le lecteur à la note citée de M. Kleitz, pages 158 à 166, pour la démonstration théorique de ce fait, qu'il déduit de l'équation générale du mouvement du liquide.



on augmente nécessairement le débit maximum dans les localités d'aval. « Cette conséquence si évidente, dit M. Kleitz, paraît avoir passé longtemps inaperçue ; car c'est lors des inondations de 1856 seulement que le danger des digues insubmersibles a été signalé. »

**188. Maximums successifs de la vitesse, du débit et de la hauteur.** — Dès qu'il est admis que le point culminant M de la courbe des débits s'abaisse progressivement, en passant d'une localité à une autre située en aval, il s'en suit que si l'on imagine tracées, sur une même épure, toutes les courbes analogues aux deux précédentes, pour toutes les localités successives, le lieu des sommets tels que M, M'... (fig. 95) de ces courbes sera une nouvelle courbe dont la tangente, en un point quelconque, fera un angle fini avec



Fig. 95.

l'horizontale. Si, alors, nous considérons les sommets M, M' de deux courbes infiniment voisines, la ligne MM', qui les joint, fera, d'après cela, un angle fini avec l'horizontale MH, et le point M', infiniment voisin du point M, se trouvera au-dessous de la courbe M qui ne s'écarte de sa tangente que d'un angle infiniment petit. Le point d'intersection I des deux courbes se trouvera donc au-delà des deux sommets M et M'. Or, à l'instant  $t_i$  marqué par l'abscisse de ce point I, le débit  $q$  est le même dans les deux localités infiniment voisines considérées, ou bien  $\frac{dq}{ds} = 0$ . Mais d'après l'équation (33), cela entraîne comme conséquence :

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Cela veut dire qu'à l'époque  $t_i$  la section transversale atteint son maximum dans cette localité, ou que la crue y atteint son maximum de hauteur. Ce maximum de hauteur est, comme on voit, postérieur au débit maximum, dont l'époque est représentée par l'abscisse du point M<sup>1</sup>.

1. Voici comment on peut calculer, dans une localité donnée, le temps qui s'écoule entre ces deux maximums. Si l'on suppose que, dans cette localité, le lit du cours d'eau soit à peu près rectangulaire, de largeur  $l$ , de manière que la section  $\omega$  soit proportionnelle à la profondeur  $h$ , ou que  $\omega = lh$ , la largeur  $l$  étant constante, et si l'on a observé les hauteurs de la crue et construit une courbe de ces hauteurs en fonction du temps, comme on a toujours  $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{dq}{ds}$ , il suffira, pour avoir l'époque du maximum de  $q$ , de déterminer

Prenons l'équation (35) dans une localité donnée et différencions-la par rapport au temps, nous aurons :

$$(36) \quad \frac{dq}{dt} = u \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{du}{dt},$$

$u$  et  $\omega$  étant nécessairement positifs, il faut que, lorsque  $\frac{dq}{dt}$  s'annule, les deux dérivées  $\frac{d\omega}{dt}$  et  $\frac{du}{dt}$  s'annulent en même temps, ou soient de signes contraires. Or, nous venons de voir que, quand  $\frac{dq}{dt} = 0$  dans une localité, c'est-à-dire quand le débit  $y$  est maximum, la hauteur croît encore et n'a pas encore atteint sa plus grande valeur ;  $\frac{d\omega}{dt}$  est donc alors positif et par suite  $\frac{du}{dt}$  est négatif ; la vitesse décroît. Et comme il s'agit d'une crue simple, dans laquelle la vitesse, le débit et la hauteur ne passent chacun que par un seul maximum, si la vitesse décroît, c'est qu'à l'époque considérée du débit maximum, elle a déjà passé par sa plus grande valeur ou que son maximum a précédé celui du débit. Nous trouvons ainsi que ces trois maximums ne se produisent pas simultanément. Dans une crue simple, on observera donc d'abord :

sur cette courbe le point où le coefficient angulaire de sa tangente  $\frac{dh}{dt}$  ou  $\frac{1}{l} \frac{d\omega}{dt}$  est égal en valeur absolue à la valeur de  $\frac{dq}{ds}$ , pour le maximum de  $q$ , multipliée par  $\frac{1}{l}$ .

On peut assimiler, sans erreur sensible, la courbe des hauteurs, dans la partie dont il s'agit, à un arc de cercle, et il suffira, pour avoir son rayon, d'en mesurer la flèche  $f$  pour une corde déterminée correspondant à un intervalle de temps  $2\theta$ . Le rayon de courbure est alors  $\frac{\theta^2}{2f}$  et l'angle avec l'horizontale formé par la tangente à cette courbe à une distance  $x$  du sommet sera  $\frac{x}{\frac{\theta^2}{2f}} = \frac{2fx}{\theta^2}$ . Cet angle, sensiblement égal à  $\frac{dh}{dt}$  ou à  $\frac{1}{l} \frac{d\omega}{dt}$  doit être égal à  $\frac{1}{l} \frac{dq}{ds}$

et l'on en déduira :  $x = \frac{\theta^2}{2fl} \frac{dq}{ds}$ .

Si, par exemple, dans la localité considérée, le sommet de la courbe des hauteurs a une flèche de  $0^m20$  pour vingt-quatre heures,  $f = 0^m20$ , et  $\theta = 12 \text{ h.} \times 3600''$  ; si de plus, le débit maximum du cours d'eau décroît de 5 mètres cubes par kilomètre [le débit maximum étant inférieur de 1000 mètres cubes dans une localité située à 200 kilomètres en aval], on a  $\frac{dq}{ds} = 0,005$  ; ce qui donne avec  $l = 300^m$ ,  $x = 21 \text{ h. } 36 \text{ m.}$

le maximum de la vitesse moyenne  $u$ ,  
 puis le maximum du débit  $q$ ,  
 et enfin le maximum de la hauteur atteinte par les eaux,  
 lequel correspond au maximum de la section transversale  $\omega$ .

On voit ainsi que le débit du cours d'eau, pour une même profondeur, ou pour une même valeur de la section transversale, n'est pas le même pendant la période ascendante et pendant la période descendante de la crue. La vitesse moyenne diminue déjà depuis longtemps, que le niveau s'élève encore ; et le niveau continue encore à monter lorsque le débit commence à décroître, ce qui montre qu'au moment de la plus grande hauteur, la vitesse moyenne doit être bien inférieure au maximum. Les formules qui ont été données plus haut, et qui expriment le débit d'un cours d'eau en fonction de sa profondeur ne sont donc applicables qu'en cas de mouvement permanent, puisque, en temps de crue, le débit, pour une même hauteur observée à une échelle, a deux valeurs très différentes suivant que le niveau monte ou descend.

Une remarque analogue doit être faite en ce qui concerne le jaugeage au moyen de flotteurs superficiels. Pendant la première période de la crue, la vitesse moyenne sur place s'accélère, et d'après ce qui a été dit à la fin du n° 183, page 378, ce fait a pour conséquence une tendance à l'égalisation des vitesses dans toute l'étendue de la section transversale. La vitesse superficielle sera donc alors moins différente de la vitesse moyenne que dans le mouvement uniforme. Plus tard, le phénomène inverse se produira. À mesure que la vitesse moyenne ira en décroissant, les inégalités de vitesses individuelles des divers filets s'accroîtront de plus en plus et, pour une même vitesse superficielle, la vitesse moyenne aura des valeurs différentes suivant la période de la crue, ou, plus exactement, le rapport de la vitesse superficielle à la vitesse moyenne variera suivant les périodes.

Ce n'est donc que pour obtenir simplement une approximation de la grandeur du débit que l'on peut appliquer en temps de crue les procédés de jaugeage indiqué, pour le cas du régime uniforme. Il ne faut pas s'étonner des résultats, quelquefois contradictoires, que l'on est exposé à trouver au moyen de ces procédés expéditifs.

**189. Vitesse de propagation de la crue.** — Il est intéressant de chercher la vitesse de propagation de la crue le long du cours d'eau. Supposons que nous ayons construit la surface représentée par l'équation :

$$q = F(s, t)$$

en prenant deux axes rectangulaires pour les  $s$  et les  $t$  (fig. 96) et en supposant les débits  $q$  portés en ordonnées perpendiculaires au plan

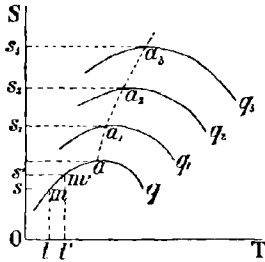


Fig. 96.

de la figure : la surface peut alors être représentée par ses courbes de niveau, ou lignes d'égal débit  $q, q_1, q_2, q_3, \dots$ . Un même débit  $q$ , par exemple, se propage entre les points définis par les abscisses  $s$  et  $s'$  dans un intervalle de temps que l'on obtient en menant, par  $s$  et  $s'$ , des parallèles à l'axe  $OT$  jusqu'en  $m, m'$ , puis, par ces points  $mm'$ , des parallèles à l'axe  $OS$  ; l'intervalle de temps en question est  $tt'$ . Or, l'équation de la

courbe d'égal débit étant :

$$q = \text{constante},$$

son équation différentielle est :

$$\frac{dq}{ds} ds + \frac{dq}{dt} dt = 0,$$

et la vitesse de propagation du débit  $q$  sera exprimée par  $\frac{ds}{dt}$ , ou bien, si on la désigne par  $v_q$ , par :

$$v_q = \frac{ds}{dt} = - \frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dq}{ds}},$$

ou bien, en vertu des équations (34) et (36) :

$$v_q = \frac{dq}{d\omega} = u + \frac{\omega \frac{du}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

La vitesse  $v_q$  de propagation d'un débit quelconque  $q$ , est plus grande que la vitesse moyenne  $u$  du courant liquide dans la première période de la crue où  $u$  et  $\omega$  sont toutes deux croissantes ; elle devient égale à  $u$  lorsque cette vitesse atteint son maximum ; et ensuite,  $\frac{du}{dt}$  étant négatif alors que  $\frac{d\omega}{dt}$  est encore positif,  $v_q$  devient plus petit que  $u$  et s'annule lorsque,  $\frac{dq}{dt}$  étant nul,  $q$  est maximum.

Cette vitesse nulle indique que le débit maximum  $q$ , qui se produit alors, n'a pas son égal dans la section infiniment voisine, ou qu'il ne se propage pas du côté d'aval. Dans la période comprise entre  $\frac{dq}{dt} = 0$  et  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ , ou entre le maximum du débit et le maximum de la hauteur, la vitesse de propagation est négative, ce qui signifie (comme le montre la fig. 95 entre les points  $MM'$  supposés infiniment voisins et le point I) que les débits qui se produisent pendant cet intervalle de temps dans la section d'amont s'étaient déjà produits dans celle d'aval. Au moment du maximum de  $\omega$ , la vitesse de propagation  $v_q$  devient infinie, ce qui veut dire que le même débit se produit simultanément dans les deux sections voisines. Enfin, plus tard,  $\frac{dq}{dt}$  et  $\frac{d\omega}{dt}$  étant tous deux négatifs, la vitesse  $v_q$  redevient positive et tend de nouveau vers la valeur  $u$ .

En général, dans les cours d'eau ordinaires où la section transversale est à peu près rectangulaire ou trapézoïdale, tant que le débordement n'a pas commencé, le rapport de  $\frac{dq}{dt}$  à  $\frac{d\omega}{dt}$ , qui mesure la vitesse  $v_q$  de propagation d'un débit  $q$ , sera, en chaque point du cours d'eau, d'autant plus grand que le débit  $q$  lui-même sera plus grand. En effet, bien que d'après ce qui vient d'être dit, le débit  $q$  correspondant à une hauteur donnée du niveau soit différent suivant que le cours d'eau est en croissance ou en décroissance, et ne soit pas le même par conséquent que dans l'état du régime permanent, on peut, à titre de première approximation, admettre que le débit est lié à la profondeur par une des relations que nous avons données plus haut (n° 165, page 347), par exemple par celle-ci dont nous avons justifié la forme :

$$q = A(H + C)^{\frac{3}{2}} = A(h + c)^{\frac{3}{2}},$$

en substituant la profondeur  $h$  du cours d'eau à la hauteur  $H$  menée à une échelle fixe, dont le zéro peut ne pas correspondre au fond du lit. On aurait alors :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{3}{2} A(h + c)^{\frac{1}{2}} \frac{dh}{dt}.$$

Si, d'autre part, la section est rectangulaire ou à peu près rectangulaire, et si l'on désigne par  $l$  la largeur à la ligne d'eau, on pourra écrire à peu près :

$$\omega = lh \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = l \frac{dh}{dt} + h \frac{dl}{dt}.$$

Tant que le cours d'eau ne déborde pas, la largeur  $l$  est peu variable et  $\frac{dl}{dt}$  est nul ou négligeable ; on a donc simplement :

$$\frac{d\omega}{dt} = l \frac{dh}{dt}$$

et par suite, avec l'approximation que nous avons admise :

$$v_q = \frac{3A}{2l} (h + c)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2l} A^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{q}.$$

On peut donc considérer comme démontré que, dans les circonstances indiquées, la vitesse de propagation d'un débit  $q$  est d'autant plus grande que le débit est plus grand ; il en résulte que la tête et la queue d'une crue marchent moins vite que son sommet : la partie postérieure de la crue s'allonge donc de plus en plus, tandis que la partie antérieure se raccourcit<sup>1</sup>. Ce résultat n'est autre que celui que nous avons déjà trouvé plus haut, page 381, comme conséquence de l'équation (31).

Mais le contraire doit arriver souvent dans les rivières débordées. La largeur à fleur d'eau croît très rapidement avec  $q$ , le terme  $\frac{dl}{dt}$  n'est plus négligeable, et il peut se faire que la vitesse de propagation  $v_q$  soit moindre pour les débits élevés que pour les débits plus faibles ou décroisse lorsque  $q$  grandit. Elle sera plus petite alors pour le sommet de la crue que pour sa tête ou sa queue ; la partie antérieure de la crue s'allongera, tandis que la partie postérieure se raccourcira de plus en plus. Cette conséquence a été vérifiée par M. Graëff dans son *Mémoire sur l'application des courbes des débits à l'étude du régime des rivières, etc*<sup>2</sup>.

#### 190. Vitesse de propagation du débit maximum —

Sur les diverses courbes d'égal débit représentées plus haut par la figure 96, nous pouvons considérer les points  $a, a_1, a_2, a_3, \dots$  où la tangente est parallèle à l'axe des  $t$  ; ces points donneront les débits maximums dans les localités  $s_1, s_2, s_3, \dots$  ; la courbe, lieu des points  $a$ , a pour équation :

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(s, t) = 0,$$

en appelant  $\varphi(s, t)$  la dérivée  $\frac{dq}{dt}$ . Or, le coefficient angulaire de la

1. Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, n° 191, pages 470 et suivantes.

2. *Mémoires des savants étrangers*, tome XXI.

tangente à cette courbe qui exprimera la vitesse avec laquelle se propage le débit maximum, sera obtenu par :

$$\frac{d\varphi}{ds} ds + \frac{d\varphi}{dt} dt = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2q}{dsdt} ds + \frac{d^2q}{dt^2} dt = 0 ;$$

et cette vitesse, égale à  $\frac{ds}{dt}$  sera, si on l'appelle  $v_m$  :

$$v_m = - \frac{\frac{d^2q}{dt^2}}{\frac{d^2q}{dsdt}} = \frac{\frac{d^2q}{dt^2}}{\frac{d^2\omega}{dt^2}}.$$

Cette vitesse  $v_m$  diffère essentiellement de la vitesse de propagation d'un débit déterminé  $v_q$ ; il ne s'agit plus de la production successive d'un même débit dans deux localités, mais de la production successive des débits maxima qui ont des valeurs différentes dans ces deux localités.

#### 191. Cas où la hauteur de la crue reste stationnaire.

— Ce qui précède suppose que les courbes des débits  $q$  et des sections  $\omega$  ou des profondeurs  $h$  sont arrondies à leur sommet. Or, sur les cours d'eau de quelque importance, on observe très fréquemment qu'aux environs du maximum d'une crue, la hauteur reste à peu près stationnaire pendant un temps assez long. Dans ce cas, si le débit  $q$  n'arrive pas à son maximum en même temps que  $\omega$ , sa valeur ne varie pas sensiblement. Si la crue se maintient exactement à la même hauteur pendant un temps assez long pour qu'il se constitue un régime permanent, on aura à la fois  $\frac{d\omega}{dt} = 0$  et  $\frac{dq}{dt} = 0$ . Alors

le débit maximum se transmet à l'aval sans diminution. Mais on se rend facilement compte que la durée de l'étale ira en se raccourcissant de plus en plus et, pour peu que le cours d'eau soit étendu, il arrivera que, dans une certaine localité, l'étale s'étant complètement effacée, la courbe des débits sera arrondie à son sommet. En aval de cette localité, le débit maximum ira en décroissant.

Mais les choses ne se passent pas, en général, d'une manière aussi simple que nous l'avons admise et la diminution graduelle des débits maxima n'est pas seulement la conséquence des conditions du mouvement varié des liquides. D'autres causes y contribuent souvent d'une façon plus efficace. Ainsi lorsqu'une rivière déborde sur de larges plaines, dont le remplissage ne se fait pas instantanément, l'emmagasinement continue assez longtemps après que la crue a

atteint sa plus grande hauteur dans le courant principal. Mais toutes ces causes, quelles qu'elles soient, se traduisent toujours par un emmagasinement des eaux pendant la période ascendante de la crue ; et si cet emmagasinement est diminué notablement, dans une certaine région, par des ouvrages de main d'homme, tels que des digues insubmersibles, les débits maxima peuvent en être augmentés sensiblement et d'une manière dommageable dans les régions inférieures. « Les rétrécissements du champ d'inondation qui ont été opérés partout, depuis les plus petites vallées jusqu'aux plus vastes, au moyen de redressements de rives et d'endigements plus ou moins complets, dit M. Kleitz, ont certainement une influence considérable, sinon prédominante, sur les hauteurs plus grandes que les crues atteignent généralement aujourd'hui, comparative-ment à celles des siècles passés. »

**192. Cas où les formules cessent d'être applicables.** — Les formules qui précèdent, ainsi que celles plus détaillées que l'on pourrait en déduire, afin d'étudier de plus près les diverses particularités des crues, comme l'a fait M. Boussinesq dans son ouvrage cité, cessent d'être applicables, soit lorsque les variations du régime sont trop brusques, soit quand le lit présente une largeur assez grande ou des rives assez peu semblables pour que la propagation d'une crue se fasse avec des vitesses notablement différentes aux diverses parties de la largeur en produisant ainsi, dans le sens transversal, des dénivellations sensibles. Les pressions, alors, ne varient plus hydrostatiquement dans un même profil en travers.

On peut se faire une idée de ce qui se passe dans un pareil cours d'eau en l'assimilant à un certain nombre de cours d'eau juxtaposés, mais distincts. Il est facile de reconnaître, d'abord, que la vitesse de propagation  $v_q$  d'un débit donné varie dans le même sens que la profondeur  $h$  et en sens inverse du coefficient de frottement extérieur<sup>1</sup>. Donc, à pente de fond égale, la propagation se fait plus rapidement aux points où la profondeur est grande qu'à ceux où elle l'est moins ; plus rapidement, aussi, loin des rives, où le seul frottement extérieur à considérer est celui du fond, que près d'une

1. Si l'on admet que l'on puisse appliquer, au moins approximativement, la formule du mouvement uniforme écrite  $hI = bU^3$ , le débit  $q$  étant égal à

$lhU$ , on aura  $hI = \frac{bq^2}{l^2h^3}$  ou  $q = \sqrt{\frac{l^2h^3I}{b}}$ , ce qui démontre la proposition énoncée.

On conçoit qu'elle soit encore exacte, dans sa forme générale, ou du moins approchée lorsque le mouvement n'est pas uniforme.



rive où il y a en outre le frottement du bord ; plus rapidement aussi près d'une berge unie ou quand le fond est peu rugueux que dans les cas contraires. Aux endroits où les vitesses de propagation sont ainsi plus grandes qu'en d'autres appartenant aux mêmes sections, les diverses phases de la crue se produisent avec une certaine avance relative. Pendant la période ascendante, le niveau s'y trouvera donc plus élevé qu'aux autres points et le profil transversal de la surface libre y présentera une convexité vers le haut ; au contraire, pendant la période de décroissance, le niveau y sera plus bas qu'ailleurs et la surface libre concave.

M. Baumgarten a constaté, sur la Garonne, de petites dénivellations de cette nature <sup>1</sup>. M. Graëff en a observé de bien plus considérables (s'élevant à 2<sup>m</sup>40) sur la Loire, dans les gorges du Pertuiset <sup>2</sup>. « Et il doit s'en produire de plus grandes encore, dit M. Boussinesq, « dans les rivières à bords perméables, entre le liquide qui coule à « ciel ouvert et celui qui, circulant à travers les pores du lit, ne « propage à son intérieur, d'amont en aval, qu'avec une lenteur ex- « cessive, ses variations de régime, de manière, en quelque sorte, « à ne s'élever durant la période de croissance et à ne baisser du- « rant la période de décroissance, qu'en vertu de ses différences de « niveau et par suite de ses échanges avec l'eau voisine contenue « dans le lit ouvert. »

**193. Formules approximatives.** — Si l'on devait étudier les crues d'un cours d'eau d'après la théorie qui vient d'être exposée, il faudrait renoncer à aborder les divers problèmes qui se posent dans les questions d'inondations, car les débits  $q$  et les vitesses de propagation  $v_q$ , pour les diverses valeurs de  $\omega$ , sont exprimées, dans les équations précédentes, en fonction des dérivées de ces quantités par rapport à l'espace et au temps, dérivées dont la connaissance suppose précisément celle des circonstances de la crue. Mais il est possible, en se bornant à une approximation, d'établir des formules dont on peut se contenter dans la pratique.

L'approximation consiste à négliger, dans une certaine étendue du cours d'eau, les effets de l'affaissement graduel de la crue. On divise le cours d'eau à étudier en un certain nombre de sections et dans chacune d'elles on suppose que le débit maximum se propage sans atténuation de l'amont à l'aval. Alors  $q$  et  $\omega$  atteignent en même temps leurs maximums et le régime peut être considéré

1. *Annales des ponts et chaussées*, 1848, 2<sup>e</sup> semestre, pages 29 et 30.

2. *De l'action de la digue de Pinay*, page 206.

comme permanent. La vitesse de propagation  $v_q$  est la même pour tous les débits et elle a pour valeur commune :

$$v_q = \frac{dq}{d\omega} = u + \frac{du}{d\omega};$$

elle varie, comme nous venons de le dire, aux diverses époques de la crue. Dans cette hypothèse simplificative, la valeur de  $q$  est déterminée pour chaque valeur de  $\omega$  et l'on peut exprimer  $q$  en fonction de  $\omega$  ou de la profondeur  $h$ , au moyen de formules approximatives comme celles dont il a été donné des exemples plus haut (n° 165). Alors, si  $\omega = lh$ ,

$$v_q = \frac{dq}{d\omega} = \frac{1}{l} \frac{dq}{dh},$$

et si la formule du débit en fonction de la hauteur est de la forme :

$$q = Al(h+c)^{\frac{3}{2}},$$

que nous avons reconnue être assez générale, la vitesse de propagation de la crue sera :

$$v_q = \frac{3}{2} A \sqrt{h+c} = m \sqrt{2g(h+c)},$$

en appelant  $m$  le coefficient  $\frac{3A}{2\sqrt{2g}}$ .

Dans chacune des parties en lesquelles on aura divisé la longueur du cours d'eau, les coefficients  $A$ ,  $c$  et  $m$  auront des valeurs différentes, mais ces valeurs, une fois déterminées pour chaque section, pourront servir à évaluer la vitesse de propagation d'une crue de hauteur donnée  $h$  dans l'étendue de cette partie du cours d'eau.

En tout cas, la valeur de  $\frac{dq}{dh}$  peut être déduite pour chaque hauteur  $h$  de la comparaison de la courbe des débits et de celle des hauteurs, et on adopte une valeur moyenne pour toute la portion de cours d'eau considérée. La largeur  $l$  est celle du champ d'inondation, elle est aussi déterminée pour chaque hauteur  $h$ . On obtient ainsi une valeur de  $v_q$  pour une valeur quelconque de  $h$  et par suite du débit  $q$ .

Mais ce qu'il importe aussi de déterminer, c'est la hauteur probable de la crue dans la partie située en aval de celle que l'on con-

sidère. Prenons alors les deux sections transversales qui limitent cette partie à l'amont et à l'aval et supposons connue la courbe

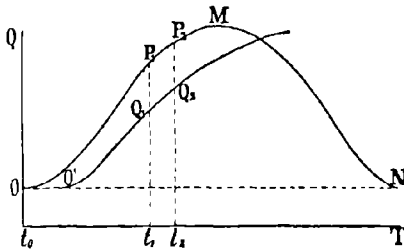


Fig. 97.

des débits OMN (fig. 97) dans la première de ces localités. Nous devons supposer aussi que, la vallée où se produit la crue étant connue, on a pu dresser à l'avance un tableau numérique ou graphique faisant connaître l'augmentation  $\Delta B$  du volume d'eau emmagasiné pour chaque aug-

mentation de hauteur  $\Delta h$  à une échelle donnée. Cette augmentation de volume est simplement le produit, par  $\Delta h$ , de la surface horizontale couverte par l'eau, à chaque hauteur du niveau, dans l'étendue comprise entre les deux localités considérées. Le tableau ainsi dressé donnera, pour une différence de niveau quelconque,  $h_2 - h_1$ , l'accroissement correspondant  $B_2 - B_1$  du volume d'eau répandu sur la vallée.

Cela étant, si nous considérons deux époques successives, aussi voisines que nous le voudrons, et représentées par les abscisses  $t_0 t_1$  et  $t_0 t_2$ , le volume d'eau passé dans la première des deux sections transversales pendant l'intervalle de temps  $t_1 t_2$  aura pour mesure la surface du trapèze  $t_1 P_1 P_2 t_2$ , et si l'on a observé en même temps les hauteurs  $h_2$  et  $h_1$  du niveau à ces deux époques marquées par  $t_2$  et  $t_1$ , on en déduira, d'après le tableau dont il vient d'être question, l'accroissement  $B_2 - B_1$  du volume d'eau emmagasiné. Représentons ce volume  $B_2 - B_1$  par un parallélogramme dont la hauteur soit  $t_1 t_2$  et  $P_1 P_2$  le côté oblique, ce parallélogramme sera par exemple  $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ , et par suite  $Q_1 Q_2$  sera un élément de la courbe des débits de la localité d'aval. En opérant ainsi successivement pour chaque époque, au fur et à mesure de la production des débits qui constituent la crue dans la première localité, on obtiendra des éléments successifs, tels que  $Q_1 Q_2$  parallèles aux éléments correspondants  $P_1 P_2$  de la première courbe mais qui en seront à des distances différentes. Il suffira de substituer, à ces éléments discontinus, une courbe continue pour avoir ainsi la courbe des débits dans la localité d'aval, et ainsi de suite <sup>1</sup>.

1. Par cette méthode et au moyen de la formule  $vq = \frac{1}{l} \frac{dq}{dh}$  appliquée comme il est dit plus haut, au moyen de profils en travers levés de kilomètre

Ordinairement, en même temps que la crue du cours d'eau principal, se produisent celles de ses affluents, et chacune de celles-ci vient modifier, en aval du confluent, la courbe des débits déterminée comme il vient d'être dit. Il résulte de cette superposition des courbes plus ou moins ondulées, mais dont les ondulations s'effacent peu à peu à mesure que l'on descend ; les sommets des courbes s'abaissent progressivement, tandis que les points bas intermédiaires entre deux sommets se relèvent et que les pentes moyennes de ces courbes diminuent par suite de l'allongement de leur base que l'on constate toujours, ainsi que nous l'avons dit plus haut. Les méthodes approximatives qui viennent d'être indiquées s'appliquent facilement à cette superposition de crues <sup>1</sup>.

Malgré cela, ces méthodes ne paraissent pas, jusqu'à présent, avoir été souvent employées par les ingénieurs pour l'étude des crues des rivières et les procédés de prévision des crues restent absolument empiriques. Il n'est que juste de reconnaître d'ailleurs que ces procédés empiriques sont arrivés, dans quelques services, à un degré de perfection assez avancé pour que les avertissements donnés aux autorités locales et aux populations riveraines aient une véritable utilité, leur indiquent la nature des précautions à prendre s'il y a lieu et leur évitent des craintes exagérées. On peut en effet, par les procédés empiriques, tenir compte, bien plus facilement que par des formules théoriques, de toutes les inégalités de forme que présentent les cours d'eau et qui modifient la hauteur des crues. Ainsi par exemple, un étranglement local de la section transversale de la vallée aura presque toujours pour conséquence de relever le maximum de la crue en amont et de s'opposer, par suite, à l'effet d'affaïssissement graduel que nous avons signalé. Le relèvement pourrait sans doute être calculé, mais on arrivera à le connaître peut-être plus exactement au moyen d'une formule simplement empirique. Il en sera de même des effets produits par les changements de pente, les courbes, la division du lit en plusieurs bras, etc.

en kilomètre, les ingénieurs du service du Rhône ont calculé, en 1857, les vitesses de propagation  $v_q$  pour des débits variant de mille en mille mètres cubes entre Lyon et le Pont-Saint-Esprit. Ils ont également déduit dans la crue extraordinaire de 1856, les courbes des débits de Tournon, de Valence, du Pouzin, de Pont-Saint-Esprit et de Beaucaire des courbes des débits établies à Lyon en amont et en aval du confluent de la Saône. Les résultats de ces calculs sont consignés dans un mémoire de M. Kleitz en date du 30 janvier 1858.

1. Il peut arriver que la crue subite d'un grand affluent, tel que l'Ardèche, produise, dans le cours d'eau principal, une surélévation considérable du niveau, accompagnée d'un arrêt ou tout au moins d'un ralentissement très prononcé du débit de ce cours d'eau, en amont du confluent. La méthode qui vient d'être exposée rendrait compte de ce phénomène, car elle permet aussi bien de déduire la courbe d'amont  $OP_1P_2$  de celle d'aval,  $O'Q_1Q_2$  supposée connue; que de faire l'inverse.

## § 3

## PRÉVISION DES CRUES

**194. Variation du débit des sources.** — C'est Belgrand qui, dans le bassin de la Seine, a montré le premier comment l'on pouvait, par l'étude des faits survenus dans la partie supérieure des vallées, prévoir la hauteur probable que pourra atteindre le niveau d'un cours d'eau en un point donné de son cours. Les considérations générales qui peuvent être regardées comme la base de cette étude ont été développées par lui dans les *Annales des Ponts et Chaussées*<sup>1</sup>. Nous allons les reproduire en les résumant.

Toutes les eaux absorbées par un terrain perméable déboisé n'arrivent pas au sous-sol ; une grande partie reste dans le sol qui, après la pluie, est imprégné comme une éponge quand sa pente superficielle est faible<sup>2</sup>. Lorsque la saison est sèche, cette eau est promptement enlevée par l'évaporation. Il est donc très rare qu'il tombe assez d'eau, l'été, pour qu'elle pénètre jusqu'au sous-sol et à plus forte raison jusqu'aux sources. Dans les terrains boisés, ce sont les feuilles qui empêchent les eaux pluviales d'arriver jusqu'au sol. Il en résulte, dans tous les cas, une diminution considérable du volume des sources en été.

Au contraire, les sources qui existent dans les terrains perméables se gonflent à la suite des grandes pluies d'hiver et reçoivent à peu près toute la quantité d'eau tombée sur le sol, rien n'étant enlevé par l'évaporation. Il en résulte alors le débordement, presque périodique, des rivières dont les versants perméables ne laissent point couler d'eau à leur surface. Cette variation du débit, entre l'été et l'hiver, semble d'autant plus marquée que les versants de la vallée sont plus boisés : les arbres, même dépouillés de leurs feuilles, empêchent pendant l'hiver l'évaporation partielle qui se produit sur les terrains déboisés. « S'il était démontré, dit Belgrand, que les « bois, qui n'ont qu'une faible action sur le débit des sources en « été, peuvent, au contraire, notablement augmenter leur débit en

1. *Etudes hydrologiques dans le bassin de la Seine*, 1846, 2<sup>e</sup> semestre, et 1852, 1<sup>er</sup> semestre.

2. Si la pente du terrain est forte, une grande partie des eaux pluviales arrive aux cours d'eau, quelle que soit la perméabilité, et ne profite pas aux sources.

« hiver, il faudrait en conclure que *le reboisement des montagnes, « loin de régulariser le régime des sources, tendrait au contraire « à le rendre moins régulier ».*

**195. Crues des grands cours d'eau. Lois de Belgrand.** — Les crues des cours d'eau, suivant que les versants sont perméables ou imperméables, sont soumises à des lois différentes. Belgrand appelle *eaux torrentielles* les eaux qui arrivent au thalweg en ruisselant à la surface des terrains imperméables ; *torrent*, un cours d'eau alimenté par des eaux torrentielles ; et, par opposition, *eaux tranquilles* les eaux provenant des sources et de l'égoutture des terres, et *cours d'eau tranquille* un cours d'eau alimenté par des eaux tranquilles. Avec ces définitions, que nous adopterons dans cet exposé, une rivière, pouvant recevoir à la fois des eaux torrentielles et tranquilles peut être un demi, un tiers, un quart de torrent.

Si les versants d'un cours d'eau d'une médiocre étendue sont imperméables, la crue se divise en deux parties très distinctes : l'une très élevée et d'une très courte durée est due aux eaux torrentielles, l'autre, d'une élévation médiocre et d'une très longue durée est due au gonflement des eaux tranquilles et à l'égoutture des terres après la cessation des pluies.

Si, au contraire, les versants sont perméables, la crue est toujours due au gonflement des eaux tranquilles ; elle est très longue et se compose d'une période de croissance régulière, d'une étale bien soutenue et d'une période de décroissance également régulière. Donc :

*Première loi.* — La crue d'un torrent d'étendue médiocre se compose toujours d'une première partie courte et élevée due aux eaux torrentielles, et d'une longue crue tranquille d'une élévation médiocre. La crue d'un cours d'eau à versants perméables est toujours longue et croît et décroît lentement et régulièrement.

Considérons maintenant l'influence qu'exerce, sur la crue d'un cours d'eau A, la rencontre d'un affluent a dont les versants ont une superficie moindre que ceux de A. Supposons d'abord que ces versants soient imperméables. Si la pluie dure encore ou n'a cessé que depuis un temps assez court, la crue A s'accroît toujours de la crue de a ; mais si la pluie a cessé depuis un temps assez long, l'écoulement de la partie torrentielle de la crue a étant de courte durée, les deux crues torrentielles ne se rencontreront presque jamais au confluent. Pour peu que l'étendue des versants de A soit plus grande que celle de a, la crue torrentielle de A arrivera la dernière au confluent, et s'ajoutera à la crue tranquille de a. Donc :

*Deuxième loi.* — En général, la crue d'un torrent, à l'aval du confluent d'un autre torrent plus petit, a pour portée maximum, par seconde, la somme de la portée maximum du cours d'eau principal et de la portée de la crue tranquille de l'autre cours d'eau. La crue torrentielle totale d'un grand cours d'eau à versants imperméables se compose donc de la succession des crues torrentielles des affluents qui passent les unes à la suite des autres, et est d'autant plus longue que le nombre des affluents est plus grand, et que le point qu'on considère est plus éloigné de la source.

*Troisième loi.* — Si les versants du cours d'eau *a* sont perméables, ceux de *A* restant imperméables, et si l'étendue de *a* est peu différente de celle de *A*, la crue torrentielle de *A* passera toujours seule et la première au confluent, et les portées par seconde des deux crues tranquilles s'ajouteront.

Si les deux cours d'eau *A* et *a* ont leurs versants perméables, la durée de l'étalement des crues étant très longue, les portées maximum s'ajouteront presque toujours au confluent. Donc :

*Quatrième loi.* — La portée maximum, par seconde, à l'aval d'un confluent, des crues d'un cours d'eau à versants perméables se compose de la somme des portées maximum, par seconde, des deux affluents.

Si les versants de *A* étant perméables, ceux de *a* sont imperméables, la crue torrentielle de *a* sera toujours écoulée lors qu'arrivera la crue de *A*, donc :

*Cinquième loi.* — Lorsqu'un cours d'eau tranquille rencontre un torrent, la partie torrentielle de la crue du torrent passe toujours seule et la première au confluent ; la crue du cours d'eau tranquille s'ajoute à la partie tranquille de la crue du torrent.

Belgrand cite un grand nombre de faits à l'appui de ces lois. Il constate cependant qu'elles ne se vérifient pas toujours exactement, surtout pour ce qui concerne les crues torrentielles. Deux torrents, même très inégaux en surface, peuvent être disposés de telle sorte que leurs crues torrentielles arrivent ensemble au confluent ; cela a lieu surtout lorsque la pente du petit cours d'eau est plus faible que celle du grand ; mais ce cas est presque toujours une exception.

Ces lois permettent d'expliquer plusieurs faits remarquables.

1° Les crues extraordinaires des cours d'eau à versants imperméables, qui prennent dans la partie supérieure du lit un développement très rapide, tendent, en descendant, à prendre une portée maximum constante. Ces crues sont beaucoup plus longues dans

les parties basses du cours d'eau que dans les parties supérieures.

2<sup>o</sup> Les portées maximum de deux affluents tranquilles s'ajoutant toujours à chaque confluent et le plan des eaux tendant à s'abaisser en raison de la longue durée des crues, les crues extraordinaires d'un fleuve tranquille vont sans cesse en croissant à mesure qu'il reçoit de grands affluents ou même qu'il traverse de grandes régions de sources.

3<sup>o</sup> La crue la plus élevée d'un bassin imperméable pourra être produite par une pluie tombée seulement sur une partie du bassin ; dans ce cas, elle sera de plus courte durée que si le phénomène qui la produit était général.

4<sup>o</sup> Dans un bassin perméable, au contraire, où les portées ne se succèdent pas, mais s'ajoutent à chaque confluent, la plus grande crue sera produite par un phénomène général.

Il y a d'ailleurs, suivant les divers cours d'eau, des différences énormes dans le rapport du débit par seconde pendant les crues à celui de l'étiage. Ainsi, tandis que sur la Somme ce rapport ne serait que de 2,75, d'après Cambuzat, ou 4, d'après Mary, il atteindrait le chiffre 30 sur la Seine à Paris où le plus bas étiage serait de 73 mètres cubes <sup>1</sup> et la plus grande crue de plus de 2200 cubes par seconde. Sur la Loire à Roanne, il arriverait au chiffre de 1458 : la plus grande crue étant, d'après Vauthier, de 7290 mètres cubes, et l'étiage de 5 mètres cubes seulement.

**196. Incertitude des formules empiriques trop générales.** — D'après ce qui précède on voit combien sont incomplets et incertains les énoncés ou les formules qui ne font dépendre les débits des cours d'eau que des surfaces du bassin. Baccarini, dans son ouvrage *Sul compimento delle opere di bonificazione et sulla regolazione delle acque nelle Maremme Toscane* donne par exemple la formule de Possenti :

$$Q = \frac{Ca}{S} \left( m + \frac{p}{3} \right),$$

dans laquelle  $Q$  est le débit maximum des crues,  $m$  la superficie de la partie montagneuse du bassin ;  $p$  celle de la partie en plaine ;  $a$  la hauteur maxima de la pluie en vingt-quatre heures ;  $S$  la longueur de la rivière depuis sa source et  $C$  un coefficient variable avec chaque rivière ou chaque section de rivière, que l'on détermine au moyen d'un débit maximum connu.

1. Depuis l'époque où Belgrand a établi ces comparaisons, on a observé des débits d'étiage encore plus faibles.



Cette formule suppose que le débit est proportionnel à la quantité  $a$  de pluie tombée ; elle ne tient aucun compte de l'état d'imbibition des terres perméables qui peut pourtant, dans une mesure considérable, modifier le rapport entre le volume d'eau tombée et le volume charrié par le cours d'eau. Elle ne tient pas compte non plus de la superficie atteinte par les pluies ni des divers degrés de perméabilité des versants. On ne peut donc la considérer que comme donnant une grossière approximation, même pour la région toute spéciale pour laquelle elle a été établie.

Il en est de même, pour la même raison, des autres formules analogues qui ont été proposées par divers auteurs, et qui ne sont applicables qu'aux circonstances locales, tout à fait spéciales, pour lesquelles elles ont été établies. Il n'y a aucun intérêt à les mentionner ici.

**197. Bases ordinaires des formules de prévision des crues.** — Les formules usitées pour la prévision des crues sont ordinairement établies sur d'autres bases. Belgrand a indiqué, pour le bassin de la Seine, une formule qui permet de calculer la hauteur du fleuve à Paris au moyen de celles de ses affluents supérieurs.

Cette formule est en réalité la première qui ait été effectivement appliquée à la prévision des crues. La méthode indiquée par Belgrand a été imitée dans la plupart des autres bassins et il a été rendu compte, dans les Annales des ponts et chaussées, de quelques-unes de celles qui ont été adoptées et qui sont aujourd'hui employées dans divers services <sup>1</sup>.

On peut faire la prévision des crues, en un point donné d'un cours d'eau, en établissant des relations empiriques entre les hauteurs atteintes par le niveau de l'eau à des échelles fixes, dont l'une est placée en ce point et les autres en d'autres points en amont sur le cours d'eau principal ou sur ses affluents, les zéros de ces échelles correspondant à l'étiage du cours d'eau ; ou bien on peut établir ces relations entre les *montées* de l'eau, c'est-à-dire entre les quantités dont l'eau s'élève au-dessus du niveau qu'elle avait au moment où le cours d'eau a commencé à croître. Les deux systèmes ont leurs partisans. Belgrand considérait surtout les montées et il a donné une règle qui est encore, sauf quelques modifications, adop-

1. Je citerai, en particulier, les notes sur ce sujet de M. Allard, 1889, 1<sup>er</sup> semestre, page 629 ; de M. Mazoyer, 1890, 2<sup>e</sup> semestre, page 441, et un grand nombre d'autres antérieures. J'ai emprunté aux deux premières tout ce qui suit, concernant la prévision des crues.

tée aujourd'hui, d'après laquelle la montée probable à Paris est une fonction linéaire simple des montées observées sur huit affluents recueillant les eaux de vallées imperméables ; ceux qui coulent dans des vallées perméables ne font que soutenir la crue après la production du maximum. Cette règle permet de faire les prévisions, en moyenne, trois jours à l'avance. Elle doit d'ailleurs être appliquée avec sagacité et doit subir quelques corrections pour tenir compte des circonstances particulières à chaque crue ; mais elle donne des résultats satisfaisants.

Ce sont des règles analogues qui ont été appliquées, en général, dans tous les bassins français où l'on a organisé des services d'annonce des crues. C'est aussi d'après ce système que M. le colonel Mahan a installé un service d'annonce des crues de l'Ohio, aux États-Unis d'Amérique.

**198. Méthode algébrique.** — Cette méthode ne tient pas compte de la durée de la propagation de la crue dans chacun des affluents ou du temps qui s'écoule entre la montée maximum sur chacun de ces cours d'eau et le moment où elle se produira dans le cours d'eau principal ; ou plutôt, on mesure les montées des affluents en des points tels que la crue de chacun d'eux mette à peu près le même temps pour arriver à la localité pour laquelle la prévision doit être faite, et ce sont des coefficients numériques, déterminés empiriquement, qui tiennent compte de l'atténuation de chacune des crues. Il serait assurément préférable, comme l'a proposé M. Allard, de combiner ensemble les hauteurs qui se produisent sur chaque affluent à des dates échelonnées, suivant les différences des durées de propagation. Sans doute ces durées varient un peu suivant la hauteur et les autres circonstances de la crue ; mais il suffirait peut-être de prendre dans chaque cas la durée moyenne, pour se rapprocher un peu plus de la vérité qu'en ne tenant aucun compte de cet élément important.

Les hauteurs ou les montées des divers affluents, qui servent à la prévision, peuvent entrer dans la formule simplement par leur somme ou par leur moyenne ; mais il est en général plus rationnel et plus exact de leur attribuer à chacune un coefficient en rapport avec la surface du bassin de chaque affluent. Si l'on fait la prévision au moyen des hauteurs et si  $h_1, h_2, h_3 \dots$  sont les hauteurs observées aux échelles des affluents, la hauteur probable  $h$  du cours principal dans la localité d'aval est alors exprimée par une fonction de la forme :

$$h = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots$$

dans laquelle  $a_1, a_2, a_3 \dots$  sont des coefficients numériques présentant avec les surfaces de chaque bassin une certaine proportionnalité, pour les vallées offrant à peu près les mêmes caractères de perméabilité. On donnera proportionnellement des valeurs plus grandes aux coefficients qui s'appliquent aux hauteurs des affluents venant de vallées moins perméables.

Cette formule n'est pas en général suffisante pour donner des valeurs assez approchées de la hauteur  $h$  que la crue atteindra dans la localité où il s'agit de l'annoncer. Et pour obtenir une approximation plus grande, voici le procédé graphique que propose M. Allard.

**199. Méthode graphique de M. Allard.** — La somme  $h_1 + h_2 + h_3 + \dots$  des hauteurs observées dans les affluents, ou, plus généralement, la somme de ces hauteurs multipliées chacune par un coefficient très simple, 1, 2, ou 3. est portée en abscisse sur une épure, et l'ordonnée correspondante est la hauteur  $h$  qu'il s'agit de prévoir. Si la relation entre cette abscisse, ainsi calculée, que je représenterai par  $\gamma$  et la hauteur  $h$  était simplement linéaire, les sommets de toutes les ordonnées se trouveraient sur une ligne droite. Mais si l'on a, pendant plusieurs années consécutives, observé les crues du cours d'eau que l'on étudie, on pourra, avec l'abscisse et l'ordonnée, figurer chacune des crues par un point marqué sur cette épure (fig. 98) et alors tracer, au sentiment, une courbe qui repré-

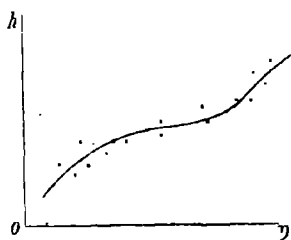


Fig. 98.

sente à peu près la moyenne de ces observations antérieures. Cela étant, pour appliquer cette épure à la prévision d'une nouvelle crue, on calculera l'abscisse  $\gamma$  d'après les hauteurs  $h_1, h_2 \dots$ , des affluents et on prendra, sur la figure, l'ordonnée correspondante de la courbe qui sera la hauteur probable dans la localité d'aval.

Les hauteurs  $h_1, h_2 \dots$  seront celles qui auront été observées simultanément aux échelles des divers affluents, lorsque ces échelles seront sensiblement à la même distance de la localité d'aval. Plus généralement, on prendra, pour former l'abscisse  $\gamma$  les hauteurs à des époques échelonnées suivant les distances et suivant le temps probable que met la crue à arriver jusqu'à la localité dont il s'agit. Les durées de propagation sont variables avec les hauteurs, et il ne s'agit ici que d'une moyenne approximative. Si l'on admet, par exemple, que la crue met en moyenne trois heures de plus pour venir du point où l'on mesure la hauteur  $h_1$  que de celui où l'on mesure la hauteur  $h_2$ ,

ou prendra, pour former l'abscisse  $\tau_1$  la hauteur  $h_1$  à 9 heures du matin, et celle  $h_2$  à midi et ainsi des autres, l'ordonnée  $h$  correspondant, d'après la courbe, à l'abscisse  $\tau_1$  ainsi calculée, donnera la hauteur probable de la crue à une époque déterminée, postérieure d'un certain nombre d'heures à celles des observations.

Les mêmes procédés peuvent être employés en mesurant et en calculant les montées au lieu des hauteurs et tout ce qui précède s'y applique sans modification.

J'ajouterai qu'il me semblerait préférable, toutes choses égales, de baser, comme l'avait fait Belgrand, la prévision des crues sur les montées  $\Delta h$  au lieu de se servir uniquement des hauteurs  $h$  observées à des échelles déterminées. Ce qui vaudrait encore mieux, sans doute, ce serait, comme me l'a fait remarquer M. Auric, ingénieur des Ponts et Chaussées, de se servir, en même temps que des hauteurs  $h$ , et des montées  $\Delta h$ , des vitesses d'élévation du niveau aux points d'observation, c'est-à-dire des rapports  $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ . Cela donnerait lieu, sans doute, à une difficulté et à une complication plus grande pour la mise en œuvre des documents recueillis, mais cet inconvénient pourrait être compensé par une exactitude plus rigoureuse. Il n'est pas douteux, en effet, qu'une crue se comportera très différemment, tout en atteignant le même niveau, si la montée a été rapide que si elle a été lente. Je ne crois pas, d'ailleurs, que la complication soit telle qu'elle puisse rendre impraticable la prise en considération de cet élément nouveau. On pourrait facilement, par exemple, établir, pour chaque poste d'observation, une sorte de table à double entrée donnant, pour les diverses valeurs de la montée  $\Delta h$ , des coefficients correctifs variables suivant la vitesse d'ascension  $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ ; et ce serait aux montées ainsi corrigées que l'on appliquerait l'une ou l'autre des méthodes qui viennent d'être indiquées.

**200. Méthode graphique de M. Mazoyer.** — M. Mazoyer fait usage, sur la Loire, d'une autre méthode graphique, applicable surtout à un cours d'eau ne recevant qu'un seul affluent principal. Il détermine par exemple, par sa méthode, les hauteurs des crues de la Loire au bec d'Allier au moyen des hauteurs observées sur la Loire supérieure à Decize et sur l'Allier à Moulins, ou bien au moyen de la hauteur observée à Moulins et de la hauteur prévue à Nevers, sur la Loire, d'après les observations des affluents.

La hauteur maximum  $h$  de la crue, en aval du confluent, est une

fonction des hauteurs maxima  $h_1$ ,  $h_2$  observées sur le cours d'eau et sur son affluent, aux deux échelles placées en amont du confluent. On peut donc écrire

$$h = f(h_1, h_2)$$

et figurer la surface, représentée par cette équation à trois variables, au moyen de ses courbes de niveau. Cela revient, ayant porté en abscisse l'une des hauteurs  $h_1$  (fig. 99), eu ordonnée l'autre  $h_2$ , à marquer à l'extrémité de cette ordonnée la valeur correspondante de  $h$ , et à réunir par des courbes continues les points du plan qui

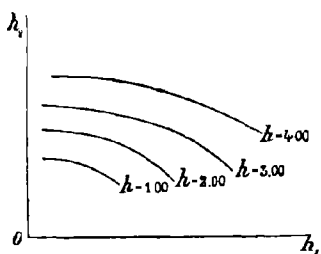


Fig. 99.

répondent aux mêmes valeurs de  $h$ . L'épure étant tracée sur un papier quadrillé, pour avoir la hauteur  $h$  correspondant à deux hauteurs observées  $h_1$ ,  $h_2$ , on prendra, sur chacun des axes, le point où se trouve le chiffre relatif à chacune de ces hauteurs et les lignes menées par ces points, parallèlement aux axes, se coupe-

ront en un point qui sera sur l'une des courbes tracées ou bien entre deux de ces courbes, et la position de ce point donnera ainsi immédiatement ou par interpolation la hauteur cherchée  $h$ .

La même méthode s'applique au cas où le cours d'eau principal reçoit un certain nombre d'affluents secondaires. Alors, la hauteur  $h$  du cours d'eau, dans une localité d'aval, est fonction de la hauteur  $h_1$  observée sur ce cours d'eau à une échelle en amont, et des hauteurs  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4$ ,... observées sur les divers affluents. Mais ces hauteurs peuvent être, comme dans la méthode de M. Allard, composées en une seule,  $\eta$ , qui sera ou leur somme ou la somme de leurs produits par des nombres entiers, 1, 2, 3, ... Cette quantité,  $\eta$ , ainsi calculée, caractérise, d'après M. Mazoyer, l'état des affluents, et alors on a simplement :

$$h = f(h_1, \eta) ;$$

c'est-à-dire que l'on considère  $h$  comme une fonction de ces deux quantités,  $h_1$  et  $\eta$  que l'on représente cette fonction par ses courbes de niveau comme il vient d'être dit. C'est ainsi, par exemple, que M. Mazoyer prévoit les hauteurs maxima de la Loire à Nevers d'après la hauteur  $h_1$  observée à Digoin et ce qu'il appelle l'état des affluents,  $\eta$ .

**201. Cas de cours d'eau torrentiels. —** Les méthodes

précédentes ne sont applicables qu'à des cours d'eau qui, comme la Seine, présentent des crues dont la vitesse de propagation est modérée, ou bien qui, comme la Loire, ont un développement assez grand pour qu'une crue, même assez rapide, exige cependant plusieurs jours pour se propager d'une extrémité à l'autre. Mais elles ne le sont plus lorsqu'il s'agit de torrents comme l'Ardèche et ses affluents, ou comme les autres cours d'eau issus du versant méridional des Cévennes dans lesquels les crues parcourent en quelques heures toute la longueur du bassin. La prévision, basée sur l'observation des niveaux dans la partie supérieure, peut alors à peine précéder le moment où la crue se produit à l'aval et n'a plus aucune utilité. Cependant M. G. Lemoine a pensé qu'il serait possible, même dans ces conditions, de donner des avertissements utiles aux habitants des régions inférieures des vallées. Mais, pour cela, il faut les établir sur l'observation des hauteurs de pluie tombée dans les régions montagneuses.

Un certain nombre de postes d'observation pluviométrique sont donc installés, en des points convenablement choisis et distribués dans la partie haute des vallées, naturellement dans les localités pourvues d'un bureau télégraphique. Chaque soir, pour tenir tout le personnel en éveil, chacun des observateurs envoie, par carte postale, le résumé des observations de la journée à un ingénieur, désigné pour chaque bassin, et qui reçoit toutes ces communications par le courrier du lendemain matin. En cas de forte pluie, l'avis postal est remplacé par un avis télégraphique.

Chaque matin, l'ingénieur spécialement chargé de ce service, ou son délégué désigné d'avance, dépouille les observations, et en cas de crue probable, il en avertit par voie télégraphique les maires des communes intéressés ainsi que les préfets et autres fonctionnaires désignés dans un tableau général de service. On a ainsi supprimé autant que possible tous les intermédiaires inutiles, en laissant absolument de côté les traditions hiérarchiques.

Les résultats paraissent aussi satisfaisants qu'ils peuvent l'être eu égard aux circonstances exceptionnelles dans lesquelles fonctionne ce service. Les riverains ne sont plus aussi complètement pris au dépourvu qu'ils l'étaient si souvent dans le passé.

**202. Application de ces méthodes.** — Il importe d'ajouter que l'application des règles empiriques, quelles qu'elles soient, qui ont été données plus haut, doit être judicieusement faite : il faut, en même temps que l'on calcule la hauteur probable d'une crue, corriger souvent le résultat du calcul pour tenir compte des

circonstances particulières qui l'accompagnent. Les crues d'été se propagent d'une manière différente de celles d'hiver ; une crue se propage autrement si elle en suit une autre à peu de distance que si elle succède à une longue période d'étiage, etc. La mise en compte de toutes ces circonstances peut difficilement se faire au moyen de formules ; c'est à la sagacité de celui qui les applique qu'incombe le soin de déterminer les corrections qu'elles doivent subir ; et ce n'est que par une longue pratique et par la comparaison d'un grand nombre d'observations que l'on pourra arriver à des prévisions exactes, en perfectionnant tous les jours les coefficients, les formules et les méthodes elles-mêmes.

Je ne parlerai que pour mémoire de la méthode employée par M. Harlacher et ses collaborateurs pour prévoir les crues de l'Elbe, méthode basée sur la mesure non des hauteurs atteintes en amont par ce cours d'eau et son affluent principal, la Moldau, mais sur la mesure des augmentations de débit qui s'y produisent simultanément. On en déduit naturellement l'augmentation du débit du cours d'eau principal et l'on est obligé, pour prévoir la hauteur de la crue, de recourir à une relation entre les débits et les hauteurs.

#### § 4

### ATTÉNUATION DES EFFETS DES CRUES

#### **203. Atténuation des effets des crues. Réservoirs.**

— Un autre problème, bien autrement important que celui de la prévision des crues, consisterait à en prévenir le retour ou du moins à en atténuer les effets.

On a quelquefois pensé, pour diminuer l'importance des crues des cours d'eau, à établir, dans la partie supérieure de leurs bassins, de grands réservoirs dans lesquels s'emmagasinerait l'eau pendant la période ascendante, et que l'on viderait ensuite progressivement et d'une façon assez lente pour qu'il n'en résulte aucun dommage. Cette idée séduisante serait une sorte de généralisation de ce que l'on trouve naturellement établi sur certains cours d'eau dont le parcours traverse de grands lacs qui sont les régulateurs de leurs crues. L'exemple le plus souvent cité est celui du lac Léman et du Rhône. Pour qu'un pareil réservoir puisse avoir toute son utilité il faut qu'il soit, en général, vide, et qu'on ne le remplisse

qu'au moment où de grandes pluies étant tombées dans les régions supérieures de la vallée, l'arrivée d'une crue est menaçante. Ou bien, si le réservoir n'est pas habituellement tout à fait vide, son niveau devra être tenu le plus bas possible afin de laisser à l'emmagasinement de l'eau le plus grand volume disponible. Et alors on arrêtera l'écoulement de manière à le remplir, toutes les fois qu'une crue se produira. L'époque à laquelle la fermeture devra avoir lieu ne laissera pas que d'être difficile à déterminer. Si elle a lieu trop tôt et que le réservoir soit entièrement rempli avant que le cours d'eau ait atteint son débit maximum, celui-ci ne sera nullement atténué et le réservoir aura été à peu près inutile. Je ne parle que pour mémoire des dommages que pourra causer la surélévation de l'eau dans le réservoir, en admettant que tous les terrains qui seront alors submergés aient reçu dans l'intervalle des crues des cultures plus ou moins importantes.

Les réservoirs que l'on établit souvent dans la partie haute de certaines vallées peuvent avoir un autre but et une utilité incontestable en emmagasinant les eaux d'hiver et en permettant de réaliser avec une augmentation, souvent fort profitable, du débit d'étiage du cours d'eau, la production d'une force motrice permanente. De pareils réservoirs, qu'il est nécessaire de tenir toujours remplis aussi complètement que possible, ne peuvent avoir qu'une utilité médiocre et souvent nulle au point de vue de la diminution des crues.

Si l'on se rend compte, d'ailleurs, du volume énorme que devraient emmagasiner les réservoirs construits sur un grand cours d'eau pour en atténuer les crues d'une façon appréciable on ne sera pas éloigné de reconnaître tout ce qu'il y a d'impraticable dans cette idée : un réservoir de cent millions de mètres cubes n'aurait qu'une influence insignifiante sur les crues d'un grand cours d'eau comme la Loire. Tout ce qu'il serait peut-être possible de faire, dans cet ordre d'idées, ce serait de créer, de distance en distance, principalement dans les parties les plus hautes des vallées, des obstacles partiels à l'écoulement, favorisant l'emmagasinement de l'eau, ayant pour conséquence certaine une surélévation du niveau des crues en amont, mais aussi et par compensation un abaissement du niveau maximum à l'aval. Les emplacements de ces obstacles partiels devraient être choisis en aval de plaines larges et peu inclinées, habituellement submergées par les crues et sur lesquelles la petite surélévation du niveau dont il est question n'aurait pas un grand inconvénient, en même temps qu'elle correspondrait à un volume emmagasiné considérable. Telle est la digue de Pinay, sur la Loire, en aval de la plaine du Forez, dont la présence a pour effet d'abais-



ser la hauteur des crues, à Roanne, de 0 m. 60 à 1 mètre, d'après M. Graeff. Il n'est pas besoin d'ajouter que la construction de pareils obstacles à l'écoulement, si elle a pu se faire sans inconvénients ni réclamations à une époque où les terrains des vallées avaient une valeur beaucoup moindre qu'aujourd'hui, ne pourrait être entreprise, dans l'état actuel des cours d'eau français, qu'avec la plus grande prudence et serait peut-être même impraticable. Les terrains cultivables ont acquis aujourd'hui une valeur telle que non seulement, si le lac Léman n'existait pas, il ne viendrait à personne l'idée de barrer le Rhône pour le constituer, mais que le projet de le dessécher pour le mettre en culture sera peut-être un jour sérieusement examiné.

Mais, quel que soit le système préventif établi dans les régions supérieures des vallées pour régulariser les crues et en diminuer la hauteur, il y aura toujours, sur les grands cours d'eau, des changements de régime considérables et des périodes alternatives d'étiage, de grandes eaux et même de grandes crues. Les populations riveraines songeront à se protéger contre les effets de ce régime variable au moyen de digues longitudinales, ayant pour but de mettre à l'abri de l'eau les terrains qu'elles ne voudront pas voir envahis par les crues.

**204. Dignes submersibles et insubmersibles.** — Les digues sont de deux espèces : les digues submersibles et celles dites insubmersibles. Il y a des digues submersibles de toute hauteur, suivant l'importance des terrains à protéger. Quant aux autres, on ne devrait les considérer que comme plus rarement submersibles que les premières, et leur submersion devrait être, comme celle des autres, un événement prévu, calculé et contre les effets duquel on ne chercherait que des moyens d'atténuation. Mais il n'en est pas toujours ainsi, et souvent l'on a pris absolument à la lettre la dénomination d'insubmersible et l'on s'est attaché à élever le niveau de ces digues au-dessus des plus hautes crues connues. Ainsi, d'après Comoy <sup>1</sup>, sur la Loire, le couronnement des digues avait été arrêté à 15 pieds au-dessus de l'étiage ; tout porte à penser qu'avant l'établissement des digues les plus grandes crues ne dépassaient pas cette hauteur, et qu'en adoptant la hauteur de 15 pieds on avait l'intention de rendre les digues insubmersibles. On n'avait pas compté sur les effets que produit l'endiguement ; la hauteur des grandes crues a augmenté, et celle de 1706 s'étant élevée en certains points à 18

1. Rapport sur la crue de 1856.

pieds, on fixa la hauteur des digues à 21 pieds. Mais cette nouvelle hauteur s'est trouvée encore trop faible : toutes les grandes crues ont continué à surmonter et à rompre les digues. Après la crue de 1846, on tenta de mettre les digues à l'abri des ruptures en les exhaussant d'environ un mètre au moyen d'une petite banquette construite sur leur crête du côté du fleuve. Mais la crue de 1856 et celle de 1866 ont démontré que cet exhaussement est encore et de beaucoup insuffisant. Les digues peuvent défendre les vals submersibles contre les crues ordinaires, mais elles sont insuffisantes contre les grandes crues. Leur rupture cause alors de graves dommages. L'eau se précipite avec violence par les brèches, creuse dans le val des gouffres profonds, occasionne des ensablements souvent considérables et détruit les bâtiments qui se trouvent à proximité des brèches. Ce sont des pertes radicales, des destructions complètes de propriétés dont s'émeut beaucoup l'opinion publique à toute nouvelle apparition de ces tristes catastrophes. Ainsi, les digues construites pour défendre la vallée submersible deviennent par suite de leur insuffisance la principale cause des dommages qu'elle éprouve dans les grandes inondations.

Les digues plus basses, submersibles par les grandes crues et qui n'ont pour but que de protéger les récoltes contre les crues moyennes rendent autant, sinon plus, de services que les digues élevées que l'on a voulu rendre insubmersibles ; elles n'ont pas l'inconvénient de déterminer les courants dévastateurs auxquels les grandes digues donnent lieu dans les crues extraordinaires. Elles ont en outre le grand avantage de ne pas diminuer l'étendue du lit majeur dans les grandes crues et par suite de ne pas augmenter le débit maximum des crues.

Il importe d'ailleurs de distinguer complètement les crues ordinaires, relativement fréquentes, des inondations extraordinaires qui ne se produisent qu'à de longs intervalles. Autant il est rationnel et souvent assez facile de se mettre à l'abri des premières, autant il est chimérique de chercher à éviter tous les inconvénients des autres. Tout ce que l'on peut espérer, c'est d'en garantir certaines grandes agglomérations ou certaines régions des vallées.

La solution des digues insubmersibles a été toutefois adoptée pour le Pô avec raison, car la vallée du Pô est beaucoup plus large que celle de la Loire, et elle fourmille de villes qu'il fallait couvrir à tout prix. Et encore, bien que le Pô, dans ses crues, roule moins d'eau que la Loire, cette solution garde-t-elle bien des dangers avec un grand fleuve, tant d'affluents et de cours d'eau latéraux suspendus à 9, 10 et 13 mètres au-dessus de la plaine, et bien des inconvénients avec de vastes marais sans écoulement naturel.

**205. Effet de l'endiguement insubmersible.** — Il convient de remarquer avec Dausse <sup>1</sup> que l'endiguement insubmersible a nécessairement cette conséquence de relever le cours d'eau au-dessus de sa vallée. Pour les fleuves, comme pour les torrents des Alpes que M. Surell a si bien décrits, il y a une partie de leur cours, plus ou moins courte, au pied des montagnes, où ils ne creusent ni n'exhaussent. Mais, en dehors de cette partie, tous les cours d'eau creusent leur lit en amont et l'exhaussent en aval. Cette double action est plus ou moins lente et sensible et le reboisement avec les travaux auxiliaires la diminue puissamment, mais elle n'en est pas moins constante. Là où elle semble nulle en vingt ans, elle sera marquée après un siècle ou après quelques siècles. Dans la partie sujette à exhaussement, laquelle est la plus longue des trois et la plus importante d'ordinaire, le cours d'eau a établi avec le temps une certaine différence d'altitude entre le fond du lit et la plaine adjacente ; et quand le lit s'exhausse, la plaine aussi s'exhausse, l'un et l'autre à sa manière propre, de sorte que la différence en question, qui est un des éléments du régime établi, se maintient, et c'est le cours d'eau lui-même qui l'entretient, qui perpétue cette espèce d'harmonie. Or l'endiguement rompt cette harmonie, il rend impossible l'exhaussement graduel de la plaine, en modifiant l'exhaussement du lit, mais sans l'empêcher, d'où résultent un état artificiel de plus en plus instable, la dépression croissante de la plaine qu'on prétend garantir et le risque croissant aussi des irrutions dévastatrices <sup>2</sup>.

Non seulement les digues dites insubmersibles privent les vallées du limon, généralement très fécond, que déposent les crues, mais lorsque ces digues sont rapprochées, elles augmentent la hauteur descrués ; si elles sont en même temps sinueuses, elles ont à essuyer le choc de courants violents qui les culbutent sans avoir besoin de les surmonter. Elles sont d'une construction et d'un entretien très coûteux et elles nécessitent l'ouverture de canaux d'assainissement des vals qu'elles ont isolés du cours d'eau.

**206. Avantages des digues submersibles.** — Si, au contraire, l'on s'est contenté de fixer les berges du cours d'eau, puis, à une distance plus ou moins grande de part et d'autre, d'élever des bourrelets en terre un peu au-dessus des crues ordi-

1. *Études d'hydraulique pratique*. Mémoires des savants étrangers, t. XX.

2. Dans les lits de la Loire et de la Garonne, des seuils rocheux existent en un grand nombre de points des thalwegs ; il n'y a donc pas eu sur ces deux fleuves, l'exhaussement général du lit constaté sur le Pô où l'endiguement est beaucoup plus complet et plus ancien.

naires ; si l'on a mis entre ces bourrelets et le fleuve les cultures qui craignent le moins une immersion passagère et en arrière les cultures les plus délicates, les grandes crues, qui sont le plus chargées de limon, couvriront tout ; sans doute elles causeront quelque dommage aux récoltes, mais comme elles laissent d'ordinaire un engrais qui dispense, les années suivantes, de fumer les terres inondées, les dommages qu'elles auront causés se trouveront compensés. En outre, les points plus bas, marécageux, les lits délaissés que l'on trouve souvent dans toutes les vallées se combleront peu à peu et finiront par devenir cultivables.

Avec ce système de digues basses, les crues s'étendant sur toute la plaine sont diminuées à proportion de sa largeur, et les cultures, les haies, les arbres, les chaussées transversales surtout, modèrent la vitesse de la nappe d'inondation laquelle alors, au lieu de raviner le sol, le couvre d'un précieux sédiment.

Les digues insubmersibles, rendues autant que possible véritablement telles, doivent être réservées pour protéger les villes, bourgs, villages bâtis dans des lieux trop bas. Mais il faut les éviter partout ailleurs.

---

## CHAPITRE VIII

# MOUVEMENTS ONDULATOIRES

---

§ 1. *Ondes de translation.* — § 2. *Onde solitaire.* — § 3. *Houle.* —  
§ 4. *Clapotis.* — § 5. *Colonnes liquides oscillantes.* — § 6. *Marées.*

### § 1.

#### ONDES DE TRANSLATION

**207. Ondes de translation.** — A l'étude de la propagation des crues se rattache étroitement celle du phénomène remarquable de propagation des ondes liquides, et en particulier des ondes dites de translation qui ont été l'objet d'expériences intéressantes de la part de J. Scott Russell et de M. Bazin. Voici comment Scott Russell (cité par M. Bazin) rend compte de la façon dont il a découvert ce phénomène <sup>1</sup> :

« J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient  
« rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrê-  
« ter tout à coup ; mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau  
« qu'il avait mise en mouvement dans le canal ; elle s'accumula au-  
« tour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant  
« tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec  
« une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation,  
« dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée.  
« Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme  
« et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la  
« retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles à

<sup>1</sup> Report of the fourteenth meeting of the British association for the advancement of science, held at York in september 1844. London 1845.

« l'heure et conservant sa figure initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1  $\frac{1}{2}$  pied de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille « ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal. »

L'onde de translation (tel est le nom que J. Russell donne à ce phénomène) peut se produire d'après lui et d'après M. Bazin <sup>1</sup> dans des circonstances fort diverses : toutes les fois qu'un certain volume d'eau, momentanément soulevé au-dessus du niveau général de la masse, est abandonné à lui-même, il donne naissance, en s'affaissant pour y rentrer, à une onde de translation. Ce soulèvement momentané peut être produit soit par le mouvement d'un solide (comme le bateau dont il vient d'être parlé) agissant à la façon d'un piston qui pousse le liquide, soit par la projection d'un certain volume d'eau dans un liquide tranquille, etc. L'onde de translation est tout entière en saillie au-dessus du niveau de l'eau sur laquelle elle chemine, ce qui la distingue des ondes oscillatoires que nous étudierons plus loin et dont chaque saillie est accompagnée d'une cavité correspondante. De plus, les ondes d'oscillation sont toujours réunies par groupe et se succèdent à intervalles réguliers ; l'onde de translation chemine seule, aussi Scott Russell a-t-il donné à celle qu'il a étudiée la dénomination d'*onde solitaire* (solitary wave), qui est appliquée plus spécialement aujourd'hui à une onde de translation particulière ayant la propriété de se propager sans se déformer.

Si, au lieu d'élever momentanément le niveau du liquide, on l'abaisse en créant subitement un vide ou une dépression dans la surface liquide, on a une onde de translation négative qui se propage, comme l'onde positive, mais en se déformant progressivement. L'onde dite solitaire, seule, se propage sans subir de déformation.

**208. Vitesse de leur propagation** — Voici comment on peut, très simplement, se rendre compte de la propagation d'une pareille onde de translation, positive ou négative, et calculer la vitesse de cette propagation.

Considérons un canal horizontal, de section transversale quelconque, mais uniforme, dont nous appellerons l'aire  $\omega$ , rempli de liquide en repos dont le poids spécifique est  $\Pi$  ; soit AA' (fig. 100) sa surface libre et BB' le fond. Supposons ce canal fermé par

1. Recherches expérimentales sur la propagation des ondes : *Mémoire des savants étrangers*, tome XIX.

une vanne AB occupant toute la section transversale et formant piston. Imprimons à cette vanne une vitesse horizontale U ; il se produira, en avant, sur une certaine longueur CG, une surélévation du liquide qui viendra, par exemple, jusqu'en EF. Désignons

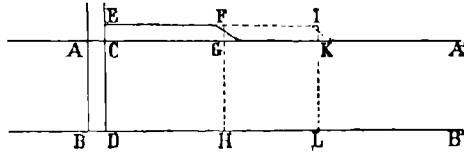


Fig. 100.

par  $h$  la surélévation CE supposée petite par rapport aux autres dimensions et par  $l$  la largeur du canal à la surface ; la différence de pression, d'un côté à l'autre de la vanne AB, venue en CD, aura pour valeur

$$\Pi \left( \omega h + \frac{lh^2}{2} \right).$$

L'impulsion de cette force, pendant l'unité de temps, sera égale à l'accroissement de la quantité de mouvement de la masse liquide. Or, au commencement de cette unité de temps, toute la masse liquide comprise entre ED et FH avait déjà la vitesse U, et pendant cette unité de temps, cette même vitesse U a été communiquée à une certaine masse GHKL dont la longueur GK = HL représente la quantité dont s'est propagée l'intumescence dans l'unité de temps, ou la célérité <sup>1</sup> de cette propagation que nous appellerons V. La masse mise en mouvement est ainsi  $\frac{\Pi}{g} V\omega$ , et la quantité du mouvement communiquée :

$$\frac{\Pi}{g} V\omega U.$$

Égalant cet accroissement de la quantité de mouvement à l'impulsion de la force qui pendant l'unité de temps est égale à la force elle-même et divisant tous les termes par  $\Pi$ , il vient :

$$(1) \quad \omega h + \frac{lh^2}{2} = \frac{V\omega U}{g}.$$

Mais, d'autre part, par suite de l'incompressibilité de la masse

1. Saint-Venant a employé le mot de *célérité* pour distinguer la vitesse dont il s'agit de la véritable vitesse des molécules liquides représentée par U.

liquide, il y a égalité entre l'accroissement FGKI de l'intumescence et la diminution de volume résultant de l'avancement de la vane d'une quantité U dans l'unité de temps, ce qui donne la nouvelle équation

$$(2) \quad lh V = (\omega + lh) U.$$

Éliminant U entre ces deux équations, on en tire la valeur de V :

$$V = \sqrt{g \left( \frac{\omega}{l} + \frac{3h}{2} + \frac{lh^2}{2\omega} \right)}.$$

Le dernier terme sous le radical est toujours petit par rapport aux autres ; en effet, si on le compare au précédent, la somme de ces deux termes peut s'écrire  $\frac{h}{2} \left( 3 + \frac{lh}{\omega} \right)$  ; or  $lh$ , accroissement de l'aire de la section dû à la surélévation  $h$ , est toujours, par hypothèse, une petite fraction de l'aire primitive  $\omega$ , le rapport  $\frac{lh}{\omega}$  est donc négligeable par rapport à 3 et la formule peut se réduire à :

$$(3) \quad V = \sqrt{g \left( \frac{\omega}{l} + \frac{3}{2} h \right)}.$$

Elle s'applique, sous cette forme, à une section transversale quelconque. S'il s'agit, en particulier, d'un canal rectangulaire de largeur  $l$  et de profondeur  $AB = H$ , la section  $\omega = lH$ , et les formules (2) et (3) s'écrivent :

$$(4) \quad (H + h) U = h V,$$

$$(5) \quad V = \sqrt{g \left( H + \frac{3}{2} h \right)}.$$

Et si l'on néglige le carré de  $\frac{h}{H}$  devant l'unité, cette dernière expression peut se mettre sous la forme

$$(6) \quad V = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{4H} \right).$$

Il est facile de reconnaître que le mouvement de propagation, une fois commencé, continuera indéfiniment dans le même sens, alors même que la cause qui l'a provoqué cessera d'agir ; car cette propagation résulte uniquement du fait qu'une certaine masse liquide a reçu une impulsion déterminée. La quantité de mouve-



ment qui en résulte reste ensuite constante si l'on fait abstraction des frottements.

Lorsque  $h$  est négligeable devant  $H$ , on a simplement

$$(7) \quad V = \sqrt{gH},$$

expression applicable dès que la profondeur  $H$  est un peu grande. Dans les mêmes conditions, l'expression (4) devient

$$(8) \quad HU = hV$$

ou bien

$$(9) \quad U = h \sqrt{\frac{g}{H}}.$$

Scott Russell avait déduit, de ses observations, la formule suivante,

$$(10) \quad V = \sqrt{g(H+h)}$$

pour la célérité de la propagation. Cette formule a été vérifiée par M. Bazin. Cependant certaines de ses expériences lui ont donné des valeurs un peu plus grandes et voisines de celles qui répondent à la formule (5). Il se produisait alors, en avant de l'intumescence, une tête ou saillie dont la surélévation était évaluée par lui à  $\frac{3}{2}h$  environ. Eu égard à ce que  $h$  est généralement petit par rapport à  $H$ , les deux formules (5) et (10) peuvent être considérées comme donnant à peu près les mêmes résultats. D'ailleurs il est à peine besoin de faire remarquer que le raisonnement d'où nous avons déduit la formule (5) n'est qu'approximatif ; il ne serait donc pas surprenant que cette formule ne s'accordât pas bien exactement avec les observations <sup>1</sup>. Mais nous verrons plus loin la cause de la

1. La formule (5) n'est autre chose que celle du ressaut superficiel. Supposons que l'on imprime aux parois du canal et à l'observateur une vitesse commune de translation égale à  $V$ , ce qui ne change rien aux mouvements effectifs ; l'onde, devenue fixe, ne sera plus qu'un ressaut dont le liquide s'écoulera, en sens inverse du mouvement de l'observateur, avec une vitesse  $V$  dans toutes ses parties non atteintes par l'intumescence où la section est  $Hl$ , et avec la vitesse  $V - U$  dans celles où la section est  $l(H+h)$ . Mettons donc dans la formule du ressaut (dernière équation du n° 71, page 128) pour  $\omega_0$  la valeur  $lH$ , pour  $\omega_1$  celle  $l(H+h)$  et pour  $Q$  celle  $lHV$ , faisons d'ailleurs  $\cos i = 1$ , nous obtiendrons :

$$V^2 = g(H+h) \left( 1 + \frac{h}{2H} \right), \text{ soit, à peu près, } V^2 = g \left( H + \frac{3}{2}h \right),$$

ce qui est précisément la formule (5).

différence entre ces deux formules, qui mettra au contraire en évidence leur exactitude. Nous allons les modifier en cherchant à leur donner une approximation plus grande. Pour cela, nous prendrons la question sous une forme plus générale et nous aurons recours au calcul analytique, en suivant la marche indiquée par M. Boussinesq.

**209. Formule plus approchée de cette vitesse, tenant compte de la forme de l'onde.** — Considérons une masse liquide indéfinie dans tous les sens horizontaux, reposant sur un fond horizontal placé à une profondeur  $H$  au-dessus de sa surface libre supposée d'abord immobile. Nous étudierons simplement les ondes *cylindriques*, c'est-à-dire celles dont la surface libre est limitée par des cylindres à génératrices horizontales, et nous admettrons que toutes les molécules liquides qui se trouvent sur une même horizontale parallèle à ces génératrices ont, à chaque instant, le même mouvement, de sorte qu'il nous suffira d'étudier le mouvement de celles qui se trouvent dans un même plan vertical.

Nous prendrons, dans ce plan, pour axe des  $x$ , son intersection avec le fond horizontal, et pour axe des  $z$ , une verticale quelconque dirigée de bas en haut. Nous pourrons, en limitant fictivement la masse liquide à deux plans verticaux parallèles à celui des coordonnées, la regarder comme faisant partie d'un canal rectangulaire dont l'axe longitudinal serait l'axe des  $x$ .

Nous étudierons l'onde ou intumescence formée, dans ce canal, par la projection brusque, en un point quelconque de sa longueur, d'un certain volume liquide, et nous compterons les abscisses positivement dans le sens de la propagation de cette onde.

La surélévation  $h$ , positive ou négative, du niveau primitif, sera alors variable avec l'abscisse  $x$  et le temps  $t$ ; mais elle sera nulle, quel que soit  $t$ , pour  $x = \infty$ . Elle sera toujours, par hypothèse, très petite par rapport à  $H$ .

Si nous appelons  $u$ ,  $w$  les composantes horizontale et verticale de la vitesse d'une molécule liquide de coordonnées  $x$ ,  $z$ ,  $p$  la pression en ce point,  $\rho$  la densité du liquide,  $g$  la gravité, les équations générales du mouvement sont (n° 16, page 22) :

$$(11) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u', \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g - w',$$

Il faut y joindre l'équation de continuité ou de conservation des volumes (7), page 25, qui se réduit à :

$$(12) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Il n'est pas nécessaire dans les équations (11), d'introduire les termes représentant les forces de frottement, car, en chaque endroit, et pendant l'instant assez peu long qu'emploie l'onde à y passer, les frottements n'ont qu'un effet négligeable.

Si nous appelons  $U$  la vitesse moyenne dans une section transversale dont l'aire est ici  $(H + h)$ , le volume qui traverse cette section dans l'unité de temps est  $(H + h)U$ , son accroissement, entre deux sections distantes de  $dx$  est  $-\frac{d(H + h)U}{dx} dx$ , et ce même accroissement a pour expression  $\frac{dh}{dt} dx$ . En égalant ces deux expressions, on obtient la forme suivante de l'équation de continuité que nous aurions pu déduire de l'équation (8) page 26 :

$$(13) \quad \frac{dh}{dt} + \frac{d(H + h)U}{dx} = 0.$$

Éliminons  $p$  entre les deux équations (11) et pour cela, multiplions la seconde par  $-dz$  et intégrons depuis  $z = z$  jusqu'à  $z = H + h$ , où  $p = 0$ , il viendra :

$$(14) \quad \frac{p}{\rho} = g(H + h - z) + \int_z^{H+h} w' dz.$$

Il s'agit d'exprimer  $w'$ . L'équation de continuité (12) peut être écrite  $dw = -\frac{du}{dx} dz$ , et si, approximativement, nous supposons que toutes les composantes horizontales  $u$  des vitesses des molécules sont égales à leur moyenne  $U$ , nous pourrions remplacer  $u$  par  $U$  qui est alors indépendant de  $z$  et nous obtiendrions, à fort peu près :

$$w = -z \frac{dU}{dx}.$$

D'un autre côté, l'équation (13), en y négligeant  $h$  devant  $H$ , donne  $\frac{dh}{dt} + H \frac{dU}{dx} = 0$ , ce qui permet d'éliminer  $\frac{dU}{dx}$  de la précédente et d'écrire :

$$(15) \quad w = \frac{z}{H} \frac{dh}{dt}.$$

$\frac{dh}{dt}$  est la composante verticale de la vitesse d'une molécule de la surface libre, et cette équation revient à dire que les compo-

santes verticales des vitesses des diverses molécules liquides sont en raison de leur distance au fond du canal. Il en résulte :

$$w' = \frac{x}{H} \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

Substituant dans la valeur (14) de  $\frac{p}{\rho}$ , effectuant l'intégration et remplaçant la limite  $H + h$  de l'intégrale par  $H$ , il vient, à ce degré d'approximation :

$$\frac{p}{\rho} = g (H + h - x) + \frac{d^2 h}{dt^2} \frac{H^2 - x^2}{2H}.$$

Différentions par rapport à  $x$  pour retrouver le premier membre de la première (11) et éliminons ce premier membre qui contient  $p$ , nous obtenons :

$$u' = -g \frac{dh}{dx} - \frac{d^3 h}{dx dt^2} \frac{H^2 - x^2}{2H}.$$

Cherchons maintenant la valeur moyenne de  $u'$  sur une verticale ; pour cela multiplions cette expression par  $\frac{dx}{H + h}$  et intégrons de 0 à  $H + h$ , cela nous donnera :

$$\int u' = -g \frac{dh}{dx} - \frac{H}{3} \frac{d^3 h}{dx dt^2}.$$

D'un autre côté, la valeur générale de  $u'$ , dérivée totale de  $u$ , a pour expression

$$u' = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + w \frac{du}{dz}.$$

Si nous y remplaçons  $u$  par sa valeur moyenne  $U$ , nous pourrions considérer le résultat comme étant la valeur moyenne de  $u'$  ; il nous viendra ainsi, le dernier terme étant nul puisque  $U$  est indépendant de  $z$  :

$$\int u' = \frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{dx}.$$

Égalons ces deux expressions, nous obtiendrons enfin :

$$(16) \quad \frac{dU}{dt} + U \frac{dU}{dx} + g \frac{dh}{dx} + \frac{H}{3} \frac{d^3 h}{dx dt^2} = 0.$$

A cette équation, nous joindrons l'équation de continuité (13) que nous écrirons :

$$(17) \quad \frac{dh}{dt} + H \frac{dU}{dx} + \frac{d.hU}{dx} = 0.$$

Ce qui caractérise et définit la vitesse  $V$  de propagation de l'une des tranches verticales de l'intumescence, c'est que, lorsque  $t$  croît de  $dt$  et  $x$  de  $Vdt$ , la surélévation  $h$  et la vitesse moyenne  $U$  dans la section correspondante se retrouvent les mêmes, ou que ces deux quantités  $h$  et  $U$  sont des fonctions inconnues de la quantité  $(x - Vt)$ ; cela veut dire que leurs dérivées par rapport à  $t$  sont égales au produit par  $-V$  de leurs dérivées par rapport à  $x$ . Dans les deux équations (16) et (17), mettons alors, au lieu des dérivées  $\frac{d}{dt}$  par rapport à  $t$ , les dérivées  $\frac{d}{dx}$  par rapport à  $x$  multipliées par  $-V$ , nous obtiendrons respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ -VU + \frac{1}{2} U^2 + gh + \frac{HV^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2} \right] &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left[ -Vh + HU + hU \right] &= 0. \end{aligned}$$

Les deux polynômes entre parenthèses sont donc indépendants de  $x$  ou constants quel que soit  $x$ ; et comme tous leurs termes sont nuls pour  $x = \infty$ , ils sont tous deux égaux à zéro. Cela nous donne les deux équations :

$$\begin{aligned} VU &= \frac{1}{2} U^2 + gh + \frac{HV^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2}, \\ Vh &= U(H + h). \end{aligned}$$

La seconde est celle (4) que nous avons trouvée plus haut.

Portant la valeur de  $U = \frac{Vh}{H + h}$ , qu'on en tire, dans la précédente, celle-ci donne :

$$V^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{h}{H + h} - \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2} \right) = g(H + h)$$

ou à peu près, en négligeant les puissances de  $\frac{h}{H}$  supérieures à la première, et les produits de  $\frac{h}{H}$  par  $\frac{d^2h}{dx^2}$  :

$$V^2 = g(H + h) \left( 1 + \frac{h}{2H} + \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2} \right),$$

ou bien enfin :

$$(18) \quad V = \sqrt{gH \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{h}{H} + \frac{H^2}{3h} \frac{d^2h}{dx^2} \right)},$$

ou encore, au même degré d'approximation :

$$(19) \quad V = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{h}{H} + \frac{H^2}{6h} \frac{d^2h}{dx^2} \right).$$

Cette valeur  $V$  de la vitesse de propagation d'une tranche quelconque de l'onde, étant ainsi fonction de la surélévation  $h$  et de la courbure  $\frac{d^2h}{dx^2}$  au point correspondant de la surface, montre que les diverses tranches verticales d'une intumescence quelconque marcheront plus ou moins vite suivant les valeurs respectives de ces deux quantités. Les formules (18) et (19) ont été données pour la première fois par M. Boussinesq. On voit que si l'on néglige le terme contenant la courbure, elles se réduisent aux formules de première approximation (5) ou (6) que nous avons établies d'une façon toute différente <sup>1</sup>.

1. M. Boussinesq a bien voulu m'indiquer une méthode, un peu différente de celle qui vient d'être exposée, pour arriver à l'équation (19). Cette méthode, peut-être moins simple, a le mérite d'être beaucoup plus suggestive et de montrer beaucoup mieux en quoi consistent les quantités négligées dans les approximations successives, et en même temps, de donner, à certaines des quantités calculées, leur signification pratique. Je vais essayer de la résumer sommairement.

Aux équations (11) et (12) ci-dessus, ici reproduites :

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -u' \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g - w' \quad ,$$

$$(2) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

qui sont des équations indéfinies, il faut joindre celles qui expriment les conditions aux limites savoir

$$(3) \quad (\text{pour } z = 0) \quad , \quad w = 0$$

$$(4) \quad (\text{pour } z = H + h, \text{ ou pour } p = 0) \quad , \quad \frac{dh}{dt} + u' \frac{dh}{dx} = w_1 ;$$

en appelant  $u$  et  $w$  les composantes de la vitesse à la surface libre. Cette dernière condition exprime que si l'on fait croître  $t$  de  $dt$  et  $x$  de  $u dt$  en suivant une molécule superficielle,  $h$  croît de  $w dt$ . On a bien en effet :

$$dh = \frac{dh}{dt} dt + \frac{dh}{dx} dx \text{ ou, en remplaçant } dx \text{ par } u dt, \text{ et divisant par } dt, \text{ l'équation (4).}$$

Appelons  $U$  la vitesse moyenne définie par

**210. Énergie totale d'une onde de translation.** — Quelle que soit la forme d'une intumescence et les transformations qu'elle subit en se propageant, son *énergie totale*, c'est-à-dire le

$$(5) \quad \int_0^{H+h} u dx = (H + h) U.$$

L'équation (2), multipliée par  $dx$  et intégrée de  $x = 0$  à  $x = x$ , donne :

$$(6) \quad w = - \int_0^x \frac{du}{dx} dx,$$

et, en particulier, en faisant  $x = H + h$ ,

$$w_1 = - \int_0^{H+h} \frac{du}{dx} dx.$$

Et cette valeur, portée dans l'équation (4) la transforme en

$$\frac{dh}{dt} + u_1 \frac{dh}{dx} + \int_0^{H+h} \frac{du}{dx} dx = 0$$

ce qui est la même chose que

$$(7) \quad \frac{dh}{dt} + \frac{d}{dx} \int_0^{H+h} u dx = 0$$

Car la dérivée en  $x$  de l'intégrale définie dont la limite supérieure  $(H + h)$  est variable se compose, d'abord, de ce que donne la différentiation sous le

signe  $\int$ , savoir  $\int_0^{H+h} \frac{du}{dx} dx$ , plus un terme provenant de l'élément  $u dx$  dont s'accroît *par en haut* l'intégrale quand  $x$  croît de  $dx$ , élément qui, divisé par  $dx$  devient  $u_1 \frac{dh}{dx}$ .

Des deux équations (7) et (5), on déduit immédiatement la suivante qui exprime la condition de conservation de volumes fluides, et qui porte, dans le texte le n° (13).

$$(8) \quad \frac{dh}{dt} + \frac{d(H+h)U}{dx} = 0.$$

Reste à chercher une seconde équation où figureront les deux principales inconnues du problème,  $h$  et  $U$ . Pour cela, multiplions la deuxième (1) par  $-dx$  et intégrons de  $x = x$  à  $x = H + h$ , où  $p = 0$ , nous trouvons

$$\frac{p}{\rho} = g(H + h - x) + \int_x^{H+h} w' dx,$$

d'où, en différentiant par rapport à  $x$  :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = g \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \int_x^{H+h} w' dx,$$

travail qu'elle produirait si la masse liquide revenait au repos, est *constante* si l'on néglige les frottements des particules liquides, qui sont en effet négligeables lorsque l'on ne considère le mouve-

et cette valeur, portée dans la première (1), donne :

$$9) \quad u' = -g \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \int_z^{H+h} w' dz.$$

À partir d'ici, bornons-nous à étudier des ondes de translation censées caractérisées par ce fait que *le mouvement vertical soit peu de chose en comparaison du mouvement horizontal*, ou que, à une première approximation,  $w'$  y soit négligeable devant  $u'$ , alors le dernier terme de (9), de l'ordre de  $w'$ , s'efface devant le premier  $u'$  et il vient, à une première approximation :

$$10) \quad u' = -\frac{dh}{dx} = g I,$$

en représentant par  $I$  la pente superficielle ; valeur qui est la même depuis le fond jusqu'à la surface, et aussi la même sur une petite longueur du canal. Donc, les molécules en repos que l'onde atteint à la fois prennent toutes *sensiblement* le même mouvement, la même vitesse horizontale  $u$ , (ou  $U$ ), du fond à la surface et sur toute très petite longueur du canal.

Il est alors facile d'achever de former les équations de première approximation. L'expression classique de  $u'$ , savoir  $\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + w \frac{du}{dz}$ , devient, en y remplaçant  $w$  par sa valeur (6) :

$$u' = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} - \frac{du}{dx} \int_0^z \frac{du}{dx} dz.$$

Or, le dernier terme est évidemment de l'ordre de  $\frac{du}{dx} \frac{du}{dx} z = \left( z \frac{du}{dx} \right) \frac{du}{dx}$ , et  $z \frac{du}{dx}$  étant comparable aux variations de  $u$  de la surface au fond, lesquelles ne

sont qu'une minime fraction de  $U$ , ce terme est négligeable devant  $U \frac{du}{dx}$ , c'est-à-dire devant le terme précédent  $u \frac{du}{dx}$ , lui-même réductible, sauf erreur très

faible à  $U \frac{dU}{dx}$ , vu que  $u$  égale constamment  $U$  plus une très petite quantité.

On a donc, avec une erreur négligeable en comparaison du dernier terme :

$$11) \quad u' = \frac{du}{dt} + U \frac{dU}{dx}.$$

Or,  $U \frac{dU}{dx}$  est même, à une première approximation, négligeable devant  $\frac{du}{dt}$ .

En effet, c'est un fait d'observation que les vitesses de propagation des valeurs de  $h$ , des valeurs de  $U$ , etc., sont sensibles quelque faibles que soient  $h$ ,  $U$ , etc., et que par suite, si un observateur se meut le long du canal avec une vitesse  $V$  précisément telle qu'il constate sans cesse à côté de lui le même  $h$ , ou le même  $U$ , cette vitesse  $V$  de propagation sera beaucoup plus forte que la petite vitesse effective  $u$ , ou  $U$  de l'eau. Or pour cet observateur,



ment que pendant un temps limité. Les actions moléculaires, supposées alors normales aux surfaces sur lesquelles elles s'exercent, ne produisent aucun travail dans les changements de forme du fluide

on aura, s'il s'agit de  $u$ , par exemple,  $\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dt} dt = 0$ , avec  $dx = V dt$ , d'où  $\frac{du}{dt} = -V \frac{du}{dx}$ ; et par conséquent on peut dire que dans (11) le terme  $\frac{du}{dt}$  est de l'ordre du produit de  $\frac{du}{dx}$  par une vitesse  $V$  très supérieure au facteur  $U$  du terme suivant  $U \frac{dU}{dx}$ . D'où il suit que, dans (11), le terme  $\frac{du}{dt}$  subsiste seul à une première approximation.

Par suite, il peut lui-même se réduire à sa partie principale  $\frac{dU}{dt}$ , mais à une première approximation seulement. Ainsi, l'on aura sensiblement, dans (10),  $u' = \frac{dU}{dt}$ , et cette équation s'écrira  $\frac{dU}{dt} + g \frac{dh}{dx} = 0$ .

D'autre part, dans (8), le produit  $(H + h) U$  se compose de deux parties graduellement variables toutes les deux, mais dont l'une,  $hU$  est constamment peu sensible par rapport à l'autre  $HU$ , donc  $\frac{d(hU)}{dx}$  est négligeable, à une première approximation, devant  $\frac{d(HU)}{dx} = H \cdot \frac{dU}{dx}$ , et l'on a simplement

$$\frac{dh}{dt} + H \frac{dU}{dx} = 0.$$

En résumé, les deux équations de première approximation sont :

$$(12) \quad \frac{dh}{dt} + H \frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dt} + g \frac{dh}{dx} = 0.$$

Passons à une seconde approximation.

L'équation (8) y sera conservée entière, sous la forme  $\frac{dh}{dt} + H \frac{dU}{dx} + \frac{d(hU)}{dx} = 0$ .

Pour trouver la seconde, il faudra toujours la tirer de (9) mais en y gardant la partie principale de ce que nous avons négligé. Commençons par le terme où figure  $w'$ , et d'abord, cherchons  $w$ . Dans (6), nous pouvons remplacer  $\frac{du}{dx}$  par  $\frac{dU}{dx}$ , ce qui donne, à fort peu près,  $w = -\varepsilon \frac{dU}{dx}$ , ou, en éliminant  $\frac{dU}{dx}$  d'après la première (12) :

$$(13) \quad w = \frac{\varepsilon}{H} \frac{dh}{dt} \text{ (sensiblement).}$$

Or, d'ailleurs,  $w' = \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + w \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} - w \frac{dw}{dx}$ . Les deux derniers termes sont comparables entre eux, car  $w$  et  $u$ , nuls tous les deux pour  $x$  infini, deviennent ensemble ce qu'ils sont en  $(x, \varepsilon)$  quand on recule de  $x$  infini vers  $x$  fini, et par suite, dans  $\frac{1}{w} \frac{dw}{dx}$  et  $\frac{1}{u} \frac{du}{dx}$ , les rapports de  $dw$  à  $w$  et

lorsque le volume ne change pas. Il en est de même des pressions appliquées à la surface libre et aux parois fixes. Il ne reste donc, comme force agissant sur le liquide et capable de produire un tra-

de  $du$  à  $u$  sont du même ordre, d'où il suit que  $u \frac{dw}{dx}$  et  $w \frac{du}{dx}$  sont les produits respectifs de  $w$  par des quantités comparables. Or, l'un de ces termes,  $u \frac{dw}{dx}$  est négligeable devant  $\frac{dw}{dt}$ , car  $\frac{dw}{dt}$  est le produit de  $-\frac{dw}{dx}$  par une vitesse de propagation  $V$  (celle de la valeur de  $w$ ) très supérieure à  $u$ . Donc on a sensiblement :  $w' = \frac{dw}{dt}$ , ou d'après (13) :

$$(14) \quad w' = \frac{\pi}{H} \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

D'où

$$\int_x^{H+h} w' dz = (\text{sensiblement}) \int_x^{H+h} w' dz = \frac{1}{H} \frac{d^2 h}{dt^2} \int_x^H dz = \frac{H^2 - x^2}{2H} \cdot \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

Portons cette valeur dans (9), en même temps que la valeur (11) de  $u'$ , nous aurons

$$(15) \quad \frac{du}{dt} + U \frac{dU}{dx} = -g \frac{dh}{dx} - \frac{H^2 - x^2}{2H} \frac{d^2 h}{dx dt^2}.$$

Cette équation, par elle-même, n'est propre qu'à nous faire connaître  $\frac{du}{dt}$  aux diverses hauteurs  $x$ , ce qui nous importe peu. Ce que nous voulons, c'est éliminer  $u$ . A cet effet, multiplions (15) par  $\frac{dx}{H+h}$  et intégrons de  $x = 0$  (fond) à  $x = H+h$  (surface), en observant que dans le dernier terme, qui est petit, et dont il suffit d'évaluer la partie principale, l'intégration peut être faite de 0 à  $H$ , et  $H+h$  se réduire à  $H$ . Il vient :

$$(16) \quad \int_0^{H+h} \frac{du}{dt} \frac{dx}{H+h} + U \frac{dU}{dx} = -g \frac{dh}{dx} - \frac{H^2 - \frac{1}{3} H^2}{2H^2} \frac{d^2 h}{dx dt^2}.$$

Or, l'équation (5) différenciée en  $t$  par la règle de différentiation des intégrales (appliquée plus haut) donne  $\int_0^{H+h} \frac{du}{dt} dx + u_1 \frac{dh}{dt} = (H+h) \frac{dU}{dt} + U \frac{dh}{dt}$ ,

D'où  $\int_0^{H+h} \frac{du}{dt} \frac{dx}{H+h} = \frac{dU}{dt} - \frac{u_1 - U}{H+h} \frac{dh}{dt}$ , ou, en remplaçant dans le dernier terme, qui est de seconde approximation,  $H+h$  par  $H$  et d'après la première (12)  $\frac{dh}{dt}$  par  $-H \frac{dU}{dx}$  :

$$(17) \quad \int_0^{H+h} \frac{du}{dt} \cdot \frac{dx}{H+h} = \mathcal{N} \frac{du}{dt} = \frac{dU}{dt} + (u_1 - U) \frac{dU}{dx}.$$

vail, que la pesanteur, et tout le travail qu'elle produira aura pour effet, en diminuant l'énergie potentielle, d'augmenter d'autant la

Portons dans (16) cette valeur moyenne de  $\frac{du}{dt}$  et nous verrons que le dernier terme  $(u_1 - U) \frac{du}{dx}$  n'est même pas de deuxième approximation ; car  $u_1 - U$  n'étant qu'une minime fonction de  $U$ , ce terme est négligeable à côté du terme  $U \frac{dU}{dx}$ . Donc la valeur moyenne de  $\frac{du}{dt}$ , du fond à la surface, est réductible à  $\frac{dU}{dt}$  et l'équation (16) devient :  $\frac{dU}{dt} + \frac{UdU}{dx} = -g \frac{dh}{dx} - \frac{H}{3} \frac{d^3h}{dxdt^2}$ .

En résumé, les équations de deuxième approximation seront :

$$(18) \quad \frac{dh}{dt} + H \frac{dU}{dx} + \frac{d \cdot hU}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{dU}{dt} + g \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dU^2}{dx} + \frac{H}{3} \cdot \frac{d^3h}{dxdt^2} = 0.$$

Il s'agit maintenant d'intégrer.

Ne le faisons d'abord qu'à une première approximation. Différentions en  $t$  la première (12) et remplaçons, dans le résultat,  $\frac{dU}{dt}$  par sa valeur tirée de la seconde (12), il vient  $\frac{d^2h}{dt^2} - g H \frac{d^2h}{dx^2} = 0$ ; ce qui, en posant

$$(19) \quad \psi = \frac{dh}{dt} + \sqrt{gH} \frac{dh}{dx} ,$$

peut s'écrire identiquement

$$(20) \quad \frac{d\psi}{dt} - \sqrt{gH} \frac{d\psi}{dx} = 0, \text{ D'où } \psi = \text{fonction arbitraire de } (x + t \sqrt{gH}).$$

Cela posé, admettons que le canal s'étendant indéfiniment dans les deux sens, de  $x = -\infty$  à  $x = +\infty$ , on ait placé l'origine des abscisses  $x$  en un point tel que, pour  $t = 0$ , le fluide soit encore en repos sur toute l'étendue des  $x$  positifs. On aura donc (pour  $t = 0$  et  $x > 0$ ),  $U = 0$ ,  $\frac{dh}{dt} = 0$ ,  $\frac{dh}{dx} = 0$ , ou, d'après (19),  $\psi = 0$ . Donc, la fonction arbitraire de  $(x + t \sqrt{gH})$  qui exprime  $\psi$  sera nulle pour toutes les valeurs positives de sa variable, ce qui comprend toutes les époques positives  $t$  et toutes les abscisses positives  $x$ , c'est-à-dire, en somme, toute la propagation future du mouvement dans le fluide en repos pour  $t = 0$ , ce qui est précisément ce que l'on veut étudier. Donc on peut prendre  $\psi = 0$ , et (19) devenue  $\frac{dh}{dt} + \sqrt{gH} \frac{dh}{dx} = 0$ , donne  $h =$  une fonction arbitraire  $f$  de  $x - t \sqrt{gH}$ .

Alors, dans la première équation (12) remplaçons  $\frac{dh}{dt}$  par  $-\sqrt{gH} \frac{dh}{dx}$ , il viendra  $\frac{d}{dx} [HU - h \sqrt{gH}] = 0$ , d'où  $HU - h \sqrt{gH}$  nul quelque soit  $x$ , comme il l'est pour  $x$  infini ou  $U = \sqrt{gH} \frac{h}{H}$ .

En résumé, la première approximation donne :

$$(21) \quad h = f(x - t \sqrt{gH}) \quad , \quad U = \sqrt{gH} \frac{h}{H}$$

force vive des particules liquides, de sorte que l'énergie totale sera constante.

D'où il suit que toute fonction de  $h$  et de  $U$  est, *sensiblement*, fonction de  $x - t\sqrt{gH}$ , et a sa dérivée en  $t$  à fort peu près égale au produit de  $-\sqrt{gH}$  par sa dérivée en  $x$ .

Passons à la *seconde approximation*, en appliquant cette règle, et aussi la seconde (21) aux petits termes négligés dans (12), ce qui n'introduira que des erreurs négligeables par rapport à ces termes ou erreurs du *troisième ordre*. Les équations (18) deviendront ainsi :

$$(22) \quad \frac{dh}{dt} + H \frac{dU}{dx} + \sqrt{gH} \frac{d}{dx} \left( \frac{h^2}{H} \right) = 0. \quad \frac{dU}{dt} + g \frac{dh}{dx} + g \frac{d}{dx} \left( \frac{h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2} \right) = 0.$$

Opérons comme ci dessus, c'est-à-dire différencions la première (22) en  $t$  et éliminons, du résultat,  $\frac{dU}{dt}$  par la seconde (22), il viendra, en appliquant au dernier terme, *qui est petit*, la règle  $\frac{d}{dt} = -\sqrt{gH} \frac{d}{dx}$  :

$$(23) \quad \frac{d^2h}{dt^2} - gH \frac{d^2h}{dx^2} - gH \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2} \right) = 0.$$

Or, d'après la même règle, applicable au dernier terme de (23), *qui est petit*,  $-\sqrt{gH} \frac{d}{dx}$  équivaut à  $\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} - \sqrt{gH} \frac{d}{dx} \right)$  et ce dernier terme peut être écrit  $\left( \frac{d}{dt} - \sqrt{gH} \frac{d}{dx} \right) \frac{\sqrt{gH}}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3} \frac{d^2h}{dx^2} \right)$ .

Et si alors, pour abréger on pose, non plus (19), mais

$$(24) \quad \psi = \frac{dh}{dt} + \sqrt{gH} \frac{d}{dx} \left( h + \frac{3h^2}{4H} + \frac{H^2}{6} \frac{d^2h}{dx^2} \right)$$

L'équation (23) deviendra identiquement, comme à la première approximation  $\frac{d\psi}{dt} - \sqrt{gH} \frac{d\psi}{dx} = 0$  et donnera de même, pour  $x + t\sqrt{gH} > 0$ ,  $\psi = 0$ , c'est-à-dire, d'après (24)

$$(25) \quad \frac{dh}{dt} + \sqrt{gH} \frac{d}{dx} \left( h + \frac{3h^2}{4H} + \frac{H^2}{6} \frac{d^2h}{dx^2} \right) = 0.$$

Equation destinée à donner  $h$ , après quoi la première (22) ou mieux (8) donnera  $U$ .

Introduisons la vitesse de propagation  $V$  d'un élément  $dq$  de l'eau tuméfiée. C'est la vitesse  $\frac{dx}{dt}$  d'un plan d'abscisse  $x$  ayant sans cesse devant lui un même volume  $q = \int_x^\infty h dx$  d'intumescence. Cette expression de  $q$ , différenciée en faisant croître  $t$  de  $dt$  et  $x$  de  $dx$  donne, d'après la règle de différentiation des intégrales définies :

$$dq = -h dx + \left( \int_x^\infty \frac{dh}{dt} dx \right) dt ;$$

et, en faisant  $dx = V dt$  pour que  $dq = 0$ , il vient

Il est facile d'évaluer cette énergie totale.

Soit  $Q$  le volume total de l'intumescence, ou le volume du liquide dont la projection brusque est censée avoir donné naissance à l'onde (ce volume pouvant se composer de parties positives et de parties négatives correspondant respectivement aux régions dans lesquelles la surface libre est au-dessus ou au-dessous du niveau primitif et dans lesquelles  $h$  est positif ou négatif). Appelons  $\zeta$  la hauteur du centre de gravité du volume  $Q$  au-dessus de la surface libre,  $H + \zeta$  son ordonnée et  $\xi$  son abscisse. L'énergie potentielle de l'onde est, pour chacun de ses éléments  $h dx$ , égale au poids  $\rho g h dx$  de cet élément multiplié par la hauteur  $\frac{h}{2}$  de son centre de gravité au-dessus de la surface libre ; c'est donc la somme des produits  $\rho g \frac{h^2}{2} dx$ . Pour

$$V = \frac{1}{h} \int_x^\infty \frac{dh}{dt} dx,$$

ou d'après (25) qui permet d'éliminer  $\frac{dh}{dt}$  :

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\sqrt{gH}}{h} \int_x^\infty d \left( h + \frac{3h^2}{4H} + \frac{H^2}{6} \frac{d^2h}{dx^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{gH}}{h} \left( h + \frac{3h^2}{4H} + \frac{H^2}{6} \cdot \frac{d^2h}{dx^2} \right). \end{aligned}$$

Il vient donc la formule *fondamentale*, qui était à démontrer

$$(26) \quad V = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h} \cdot \frac{d^2h}{dx^2} \right).$$

Cette formule porte, dans le texte, le n° (19).

Il est bon de voir aussi ce que sera  $U$ . L'équation (25), vu celle (26), n'est autre, désormais, que

$$(27) \quad \frac{dh}{dt} + \frac{d \cdot hV}{dx} = 0.$$

Or, cette relation, comparée à (8) donne :  $\frac{d}{dx} \left[ (H + h) U - hV \right] = 0$ , et la quantité entre crochets étant nulle identiquement pour  $x = \infty$ , l'est partout. Donc

$$(28) \quad U = V \frac{h}{H + h}.$$

C'est l'équation (4) du texte, retrouvée également plus haut comme conséquence de celle (17) du texte.

Les deux équations principales (26) et (28), sont ainsi retrouvées par des considérations sinon différentes, au moins plus complètes et plus détaillées que celles qui ont été exposées dans le texte.

la totalité de l'onde, elle est la même que si tout le volume  $Q$  ou tout le poids  $\rho g Q$  était concentré au centre de gravité, c'est-à-dire qu'elle a pour valeur  $\rho g Q \zeta$ .

L'énergie actuelle, ou demi-force vive, est, pour une tranche  $(H + h)dx$  comprise entre deux plans verticaux distants de  $dx$ , égale au demi-produit de la masse  $\rho(H + h)dx$  de cette tranche par le carré  $U^2$  de la vitesse de toutes ses molécules, en admettant qu'elles ont toutes la même vitesse horizontale  $U$  et en négligeant le carré de la composante verticale de ces vitesses. Cette énergie actuelle est ainsi  $\frac{1}{2} \rho(H + h)U^2 dx$ . Nous avons trouvé plus haut (4) la relation  $(H + h)^2 U^2 = h^2 V^2$  ou bien, en mettant pour  $V^2$  sa valeur expérimentale  $g(H + h)$  qui est suffisamment approchée :  $(H + h) U^2 = gh^2$ . Cette valeur donne à l'énergie actuelle d'un élément la même expression  $\frac{1}{2} \rho gh^2 dx$  qu'à son énergie potentielle, et par suite, la somme des énergies actuelles, pour tous les éléments, sera la même que la somme  $\rho g Q \zeta$  de leurs énergies potentielles. L'énergie totale sera ainsi le double de chacune d'elles ; si on la désigne par  $\rho g E$ , on aura :

$$(20) \quad \rho g E = 2 \rho g Q \zeta \quad \text{ou} \quad E = 2 Q \zeta.$$

Le premier membre  $E$  étant constant, il en est de même du second, et par suite, la hauteur  $\zeta$  du centre de gravité d'une intumescence au-dessus de la surface libre primitive est constante.

Les seules forces extérieures agissant sur le liquide étant la pesanteur et les réactions du fond, qui sont verticales, la quantité de mouvement projetée sur l'horizontale doit également être constante, et cette quantité est la même que si toute la masse avait la vitesse  $\frac{d\xi}{dt}$  du centre de gravité. Il en résulte que cette vitesse est invariable.

La circonstance que le centre de gravité de l'intumescence reste à une hauteur constante n'empêche pas l'onde de s'aplatir : il suffit qu'elle se décompose en parties alternativement positives et négatives dont la somme algébrique seule représente son volume invariable. Le centre de gravité des parties positives et celui des parties négatives peuvent se rapprocher indéfiniment de la surface libre initiale, tandis que le centre de gravité général, situé sur le prolongement de la droite qui les joint, se maintient toujours à la même hauteur.

Les conclusions qui précèdent supposent d'ailleurs que les frottements sont négligés : c'est à cette seule condition que l'énergie  $E$

et par suite l'ordonnée  $\zeta$  restent constantes. Lorsque l'on ne considère l'onde que sur une portion restreinte de son parcours, les frottements sont, en effet, à peu près négligeables, car, comme l'on peut s'en assurer par un calcul facile dans le cas d'une onde solitaire, le mouvement des molécules liquides, au passage de l'onde, est assez peu accentué, et ne donne pas lieu à des vitesses relatives importantes <sup>1</sup>.

Nous allons appliquer les résultats théoriques précédents à l'étude de la propagation de quelques intumescences de formes particulières.

**213. Application à quelques exemples.** -- Considérons d'abord une intumescence assez longue, mais limitée, comme celle

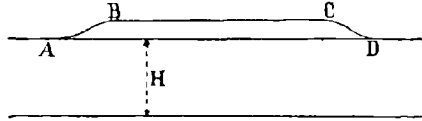


Fig. 101.

qui serait produite par la projection, dans le canal, d'un certain volume liquide y arrivant avec un débit constant pendant un temps appréciable. Aux premiers instants qui suivront sa formation, l'intumescence aura une forme telle que AB, CD (fig. 101), comprenant une partie BC, sensiblement horizontale, raccordée avec le niveau primitif AD par deux courbes AB, CD. Dans la partie horizontale BC, la courbure étant nulle ou négligeable, la célérité de la propagation s'exprime seulement par les deux premiers termes  $V = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{4H} \right)$  de la formule (19). En un point tel que B, où la courbure devient sensible avec une valeur négative, la célérité de la propagation s'exprimera par cette formule (19) dans laquelle le dernier terme ne sera plus nul, mais négatif, et  $h$  aura une valeur plus faible; elle sera moindre que dans la partie horizontale. La queue de l'onde tendra donc à se détacher et à former une onde distincte. Le même morcellement continuant, l'intumescence primitive se résoudra en un certain nombre d'ondes distinctes, jusqu'à ce que la courbure au sommet de chacune d'elles devienne assez sensible pour que la

1. On peut voir, sur ce sujet l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, de M. Boussinesq auquel est empruntée la plus grande partie de cette étude sur les ondes de translation et l'onde solitaire, ou bien un article inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1889, 2<sup>e</sup> semestre, page 5.

vitesse du point le plus élevé ne dépasse pas celle des parties voisines. Ce phénomène a été nettement observé et décrit par Scott Russell.

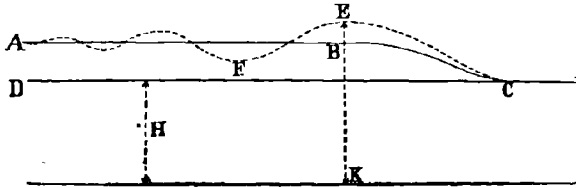


Fig. 102.

Supposons maintenant que l'afflux d'eau, restant encore uniforme, se continue indéfiniment ; l'intumescence aura, à ses premiers instants, la forme d'une lame d'une épaisseur uniforme telle que AB (fig. 102) superposée au liquide primitif DC. En raisonnant de la même manière, on voit que la partie horizontale, la lame, se propage plus vite que la tête de l'onde où la courbure introduit un terme négatif. La tête de l'onde se trouvera alors inondée par l'afflux de l'eau venant en arrière et elle s'exhaussera jusqu'à ce que son excès d'élévation compense, dans la formule (19), l'influence du dernier terme négatif. Ainsi se formera ce que M. Bazin a appelé *l'onde initiale*, dont il a évalué la hauteur à  $\frac{3}{2}h$  ou à une fois et demie celle de la lame qui la suit. L'équilibre étant établi dans ces conditions, la célérité de la propagation de la lame AB de hauteur uniforme et de courbure nulle a été trouvée, dans les expériences de M. Bazin, égale à  $\sqrt{g \times EK}$ , c'est-à-dire  $\sqrt{g(H + \frac{3}{2}h)}$  comme l'indique la formule approximative (5) et la formule exacte (18) dans laquelle on suppose nulle la courbure  $\frac{d^2h}{dx^2}$ .

Ce n'est pas tout ; l'onde initiale ne peut se raccorder à la lame qui la suit que par une courbe ayant une partie concave, pour laquelle le dernier terme de V étant positif, la célérité de propagation sera plus grande que celle de la lame. Il se creusera, par conséquent, un vide entre l'onde initiale et la lame qui suit. La concavité F ainsi formée n'atteindra pas la surface libre primitive DC, car si  $h$  devenait négatif la célérité V deviendrait notablement inférieure à celle de la lame qui, affluant, relèverait sur le champ le niveau. Cette première concavité ne pourra se raccorder à la lame située en arrière que par une partie convexe dont le sommet soit



au-dessus du niveau AB, et ainsi de suite. La formule (19) rend bien compte, comme on voit, de toutes ces particularités constatées par l'observation et décrites avec plus de détails dans le mémoire de M. Bazin.

## § 2.

## ONDE SOLITAIRE

**212. Définition et équation de l'onde solitaire.** — Parmi toutes les intumescences de formes diverses dont on peut imaginer la propagation, il en est une pour laquelle les hauteurs  $h$  et les courbures  $\frac{d^2h}{dx^2}$  sont tellement réparties que la célérité de la propagation est la même pour tous ses éléments. C'est l'*onde solitaire* étudiée par Scott Russell.

Pour en déterminer la forme, il suffit d'exprimer que la somme des deux derniers termes, variables, de l'expression de V conserve la même valeur, ce que l'on peut écrire, en appelant  $h_1$  une quantité constante :

$$(21) \quad \frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h} \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{h_1}{2H},$$

ou bien

$$(22) \quad \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{3h}{2H^3} (2h_1 - 3h).$$

Equation différentielle, en  $h$  et  $x$ , définissant la forme de la surface de l'onde.

Pour l'intégrer, multiplions les deux membres par  $2 \frac{dh}{dx} dx$  et remarquons que  $h$  s'annule en même temps que  $\frac{dh}{dx}$ ; il viendra :

$$(23) \quad \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3h^2}{H^3} (h_1 - h).$$

Cette équation, ayant son premier membre positif, montre que  $h$  est toujours inférieur ou au plus égal à  $h_1$ . La quantité  $h_1$  est ainsi la hauteur, au-dessus du niveau primitif, du sommet de

l'onde solitaire. La pente  $\frac{dh}{dx}$  ayant des valeurs égales, au signe près, pour les points où  $h$  a la même grandeur, la surface de l'onde est symétrique par rapport à cette ordonnée maximum  $h_1$ .

Quand à la célérité de la propagation de l'onde, elle est, en mettant dans (18) pour les deux derniers termes leur valeur en  $h_1$  donnée par (21) :

$$V = \sqrt{g(H + h_1)}$$

conformément aux expériences, très précises et très nombreuses de Scott Russell et de M. Bazin.

Pour tirer parti de l'équation différentielle (22), nous allons la transformer en prenant pour variable indépendante, au lieu de l'abscisse  $x$  d'une section transversale, le volume  $q = \int_x^\infty h dx$  compris en avant de cette section, volume qui suffit, tout aussi bien que  $x$ , à en définir la situation<sup>1</sup>. On a alors  $dq = -h dx$ , et en éliminant  $dx$  de l'équation (23), il vient :

$$\left(\frac{dh}{dq}\right)^2 = \frac{3}{H^3}(h_1 - h),$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{3}{H^3}} dq = \frac{dh}{\sqrt{h_1 - h}}.$$

L'intégration donne facilement, en appelant  $c$  une constante :

$$\sqrt{\frac{3}{H^3}}(q - c) = 2\sqrt{h_1 - h},$$

ou, en élevant au carré :

$$h = h_1 - \frac{3}{4H^3}(q - c)^2.$$

La constante se déterminera en exprimant que, pour  $x = \infty$  ou

1. On peut aussi intégrer l'équation (22) en  $h$  et  $x$  sous la forme (23) sans rien changer. Il suffit de séparer les variables et de remarquer que l'abscisse du sommet est égale à  $Vt$  si l'on compte le temps à partir du moment où le sommet de l'onde passe à l'origine. On trouve alors

$$\frac{2h_1}{h} = 1 + \operatorname{cch} \sqrt{\frac{3h_1}{H^3}}(x - Vt),$$

en désignant par  $\operatorname{cch}$  le cosinus hyperbolique.

pour  $h = 0$ , le volume  $q$  est nul, ce qui donne  $c^3 = \frac{4H^3 h_1}{3}$ . Mais, d'autre part, il y a une relation entre la hauteur maximum  $h_1$  de l'onde et son volume total  $Q$ . L'onde étant symétrique, on doit avoir  $q = \frac{Q}{2}$  pour  $h = h_1$ . Il en résulte  $c = \frac{Q}{2}$ , ou en comparant avec la précédente valeur de  $c^3$  :

$$Q^3 = \frac{16h_1 H^3}{3}, \quad h_1 = \frac{3Q^2}{16H^2}.$$

et cela permet d'éliminer à la fois  $h_1$  et  $c$  de l'équation précédente en y faisant entrer  $Q$ . Elle devient ainsi :

$$(24) \quad h = \frac{3}{4H^2} q (Q - q).$$

Sous cette forme remarquable, elle montre que l'ordonnée  $h$  varie proportionnellement au produit des deux portions en lesquelles elle divise le volume total  $Q$  de l'intumescence.

**213. Energie et stabilité de l'onde solitaire.** — Nous pouvons trouver facilement la hauteur du centre de gravité de l'onde au-dessus de la surface libre primitive. D'après la définition même du centre de gravité, cette hauteur  $\zeta$  sera donnée par l'équation

$Q\zeta = \int_0^a \frac{h}{2} dq$ ; et en mettant pour  $h$  sa valeur (24), effectuant l'intégration, on trouve :

$$\zeta = \frac{Q^3}{16H^3} = \frac{h_1}{3}.$$

Le centre de gravité d'une onde solitaire se trouve donc au tiers de la hauteur de cette onde, au-dessus de la surface libre primitive.

La quantité  $E$ , qui exprime le quotient de l'énergie totale de l'onde par le poids spécifique du liquide, a pour expression d'après (20) :

$$(25) \quad E = 2Q\zeta = 2Q \cdot \frac{Q^3}{16H^3} = \left(\frac{Q}{2H}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{4h_1 H}{3}}\right)^3.$$

On en déduit les relations suivantes :

$$(26) \quad Q = 2H \sqrt[3]{E}; \quad h_1 = \frac{3\sqrt[3]{E}}{4H}; \quad \frac{Q}{h_1} = \frac{8H^2}{3\sqrt[3]{E}}.$$

Ces formules peuvent expliquer ce qui se passe lorsqu'une onde se propage dans un canal à pente douce, dont la profondeur  $H$  diminue lentement; par exemple ce qui se produit au bord de la mer pour les ondes qui viennent du large sur une plage peu inclinée. L'énergie  $E$  étant constante ou sensiblement constante, le volume  $Q$  de l'onde décroîtra avec  $H$  et la hauteur  $h_1$  augmentera en sens inverse. Le rapport  $\frac{Q}{h_1}$  qui peut être considéré comme mesurant en quelque sorte la longueur de l'onde, décroîtra comme le carré de  $H$ . L'onde, plus élevée et plus courte, sera de moins en moins stable jusqu'à ce qu'elle manque de base et déferle.

Les formules précédentes peuvent encore servir à calculer approximativement l'énergie du choc produit par une onde sur un obstacle vertical perpendiculaire à sa direction. Si l'on admet que l'énergie totale de l'onde est employée à produire ce choc, la force vive correspondante sera :

$$\rho g E = \rho g \left( \sqrt{\frac{4h_1 H}{3}} \right)^3 .$$

Ainsi, une onde de 0,40 de saillie se propageant dans une eau de 2<sup>m</sup>00 de profondeur produira, sur un mur vertical perpendiculaire à sa direction, un choc dont l'énergie, par mètre de longueur horizontale, sera :

$$1000 \left( \sqrt{\frac{4 \times 0,40 \times 2,00}{3}} \right)^3 = 1100 \text{ kilogrammètres environ.}$$

L'onde solitaire, dont tous les éléments se propagent avec la même célérité, conserve indéfiniment sa forme; mais une autre intumescence de forme différente, pour laquelle la somme des deux derniers termes de l'expression de  $V$  n'est pas constante, change de forme en se propageant, les éléments les plus rapides se superposant en partie à ceux qui les précèdent. Il est bien évident que le mouvement doit tendre à se régulariser ou que toutes ces célérités variables doivent tendre vers une valeur commune et par conséquent la forme de l'onde tendre vers celle de l'onde solitaire, la seule qui soit stable. C'est ce que M. Boussinesq a démontré analytiquement et ce qui explique la facilité avec laquelle on produit des ondes solitaires: toute intumescence de longueur peu considérable et de volume limité, assez peu haute pour ne pas déferler, prend au bout d'un certain temps cette forme définitive. Et lors-

qu'elle est arrivée à cet état, la célérité de sa propagation s'exprime bien par la formule de Scott Russell et de M. Bazin :

$$V = \sqrt{g(H+h)}.$$

**214. Intumescence très allongée.** — Considérons maintenant une intumescence assez longue et assez aplatie pour que ses courbures soient partout négligeables ; la célérité de sa propagation sera simplement, en annulant le dernier terme de (19) :

$$V = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{4H} \right);$$

et si l'on combine cette équation avec celle (4), on en déduit ;

$$U = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{4H} \right) \frac{h}{H+h};$$

ou bien en négligeant les puissances supérieures du rapport  $\frac{h}{H}$  :

$$(27) \quad U = \sqrt{gH} \left( 1 - \frac{h}{4H} \right) \frac{h}{H}.$$

Si dans l'équation de continuité (13) l'on met pour  $(H+h)U$  la valeur que donne la précédente, cette équation devient :

$$\frac{dh}{dt} + \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{2H} \right) \frac{dh}{dx} = 0;$$

et cette dernière, intégrée, donne, en appelant  $f$  une fonction arbitraire :

$$(28) \quad x = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{2H} \right) t - f(h).$$

Ces deux équations (27) et 28) sont identiques au fond à celles que nous avons trouvées plus haut, article 184, page 381, pour le mouvement non permanent dans les conditions spéciales que nous y avons définies. Elles portent, à cet article, les numéros (30) et (31) et il suffit de les développer en négligeant les puissances supérieures du rapport  $\frac{h}{H}$  pour retrouver identiquement les deux qui précèdent.

Appliquons ces formules à l'étude de la propagation des marées, supposée graduelle et bien continue, le long d'un canal horizontal débouchant dans la mer<sup>1</sup>. Soit :

1. Cette application a été donnée par M. Boussinesq dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes*, n° 174.

$H$  la profondeur du canal aux points assez éloignés de l'embouchure pour que les variations du niveau ne s'y fassent pas sentir;

$h$  la surélévation, au-dessus de ce niveau, d'un point quelconque de la surface libre, à une époque  $t$ ;

$a$  la hauteur, au-dessus du fond du canal, du niveau moyen de la mer;

$\alpha$  le rapport (supposé petit) à cette hauteur  $a$ , de la demi-amplitude de la marée;

$T$  l'intervalle de temps qui sépare deux marées consécutives.

A l'entrée du canal, ou pour  $x = 0$ , on aura sensiblement :

$$(29) \quad H + h = a \left( 1 + \alpha \sin \frac{2\pi t}{T} \right).$$

Tirons de cette équation la valeur de  $t$  et portons-la dans l'équation (28), dans laquelle nous aurons fait  $x = 0$ , nous obtiendrons :

$$f(h) = -\sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{2H} \right) \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{H - a + h}{\alpha a}.$$

Et par suite, l'équation (28) de la surface libre devient :

$$(30) \quad x = \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3h}{2H} \right) \left[ t - \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{H - a + h}{\alpha a} \right].$$

On pourra construire la surface libre par points, aux diverses époques successives ou pour chaque valeur de  $t$ , en calculant, au moyen de cette équation, l'abscisse  $x$  qui correspond à une surélévation quelconque  $h$ . La relation (27) fera ensuite connaître la vitesse  $U$ .

Mais cette formule ne présente guère qu'un intérêt théorique, en ce qu'elle néglige les frottements dont l'influence suffit cependant, dans le phénomène dont il s'agit, pour empêcher le flux et le reflux de se faire sentir au delà d'une certaine distance, ou pour y maintenir constante la profondeur  $H$ . Elle serait, sans cela, applicable à toute la partie du canal comprise entre l'embouchure et l'endroit où, par suite de l'inégalité de vitesse de propagation, la surface prendrait une courbure que l'on ne pourrait plus négliger.

Quoi qu'il en soit, l'état du canal, au bout d'un certain temps, sera évidemment réglé de telle manière que le volume fluide total  $\int_0^T (H + h) U dt$  qui y pénètre pendant la durée d'une période soit égale à zéro. Ecrivons donc :

$$\int_0^T (H + h) U dt = 0;$$

ce qui, d'après l'équation (4) équivaut à :

$$\int_0^T V h dt = 0;$$

ou bien, d'après la valeur de  $V$  donnée au commencement de ce paragraphe :

$$\int_0^T \left( \frac{h}{H} + \frac{3h^2}{4H^2} \right) \frac{dt}{T} = 0.$$

Dans cette dernière équation, substituons à  $\frac{h}{H}$  sa valeur tirée de (29), il viendra, en négligeant, vis-à-vis du petit rapport  $\frac{a-H}{a}$ , des quantités comparables à son carré :

$$\int_0^T \left[ \frac{a-H}{a} + \frac{\alpha a}{H} \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{3}{2} \frac{\alpha(a-H)}{H} \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{3}{4} \alpha^2 \sin^2 \frac{2\pi t}{T} \right] \frac{dt}{T} = 0.$$

Effectuant l'intégration, multipliant par  $a$  et réduisant, on trouve :

$$(31) \quad H = a \left( 1 + \frac{3}{8} \alpha^2 \right).$$

On voit que le niveau moyen de la mer serait un peu plus bas (de la quantité  $H - a = \frac{3}{8} a \alpha^2$ ) que celui de la surface libre dans les parties du canal éloignées de l'embouchure, où les oscillations des marées ne se font plus guère sentir, et où, par conséquent, la profondeur reste à peu près égale à  $H$ .

Dans une étude sur le régime des marées dans le canal de Suez dont je parlerai plus loin, M. Bourdelles a fait connaître que le niveau des Lacs Amers ne reste pas absolument constant, pas plus que le niveau moyen de la mer Rouge, et il n'a rapporté que les observations qui s'appliquent à des époques où les deux niveaux étaient sensiblement égaux. Je ne connais donc pas de vérification expérimentale de l'intéressant résultat qui précède.

**215. Propagation des ondes dans un liquide en mouvement.** — Les formules de la propagation des ondes dans un liquide en repos s'appliquent facilement au cas où ce phéno-

mène se produit dans un cours d'eau régulier, à fond horizontal ou sensiblement horizontal et dans lequel le liquide est animé d'une vitesse moyenne  $U$ . Là rien n'empêche de supposer que l'axe des  $x$ , au lieu d'être immobile, participe au mouvement de la masse liquide et se déplace avec la vitesse  $U$ . Et alors, l'onde ayant, par rapport à cet axe, une célérité de propagation exprimée par  $\sqrt{gH} \left(1 + \frac{3h}{4H}\right)$ , la célérité réelle  $V$  rapportée à un axe fixe sera :

$$V = U \pm \sqrt{gH} \left(1 + \frac{3h}{4H}\right),$$

en prenant le signe  $+$  ou le signe  $-$  suivant que la célérité relative est de même sens que  $U$  ou de sens contraire.

Ce raisonnement serait rigoureux si toutes les particules liquides de la section transversale du cours d'eau avaient effectivement la vitesse  $U$  ; mais il n'en est pas ainsi, et l'inégalité de vitesse des divers filets fluides a pour effet de diminuer la célérité absolue de la propagation. M. Boussinesq en tient compte au moyen d'un terme correctif  $- \varkappa \sqrt{gH}$  dans lequel  $\varkappa$  est un coefficient numérique beaucoup plus petit que l'unité. La formule s'écrit alors :

$$V = U \pm \sqrt{gH} \left(1 + \frac{3h}{4H} - \varkappa\right).$$

Appelons  $U'$  l'accroissement positif ou négatif de la vitesse moyenne au moment du passage de l'onde, de sorte que  $U + U'$  soit la vitesse moyenne dans la section transversale dont la hauteur est  $H + h$ , la vitesse relative, par rapport à l'axe mobile, sera aussi  $U'$  et nous pourrons appliquer à cette vitesse la formule approximative (5) qui nous donnera :

$$h = \pm \frac{U'}{\sqrt{gH}} \cdot H$$

substituons cette valeur de  $h$  dans l'équation précédente, il vient :

$$(32) \quad V = U \pm \sqrt{gH} (1 - \varkappa) + \frac{3}{4} U'.$$

Par exemple, dans le cas du remous ascendant que l'on produit dans un canal en arrêtant l'écoulement par la fermeture d'une vanne placée à l'aval, cette formule donne, en y faisant  $U + U' = 0$ , puisque la vitesse s'annule dans les sections transversales et en prenant le signe  $-$  puisque l'onde se propage alors en sens inverse de  $U$  :



$$V = \frac{1}{4}U - \sqrt{gH} (1 - \varkappa)$$

ou bien :

$$-V = \sqrt{gH} (1 - \varkappa) - \frac{1}{4}U.$$

la célérité de la propagation est donc, en valeur absolue, un peu inférieure à la valeur  $\sqrt{gH} - \frac{1}{4}U$  que lui avait attribuée Bidone d'après ses expériences. C'est ce qu'a reconnu M. Bazin qui a proposé de tenir compte de la différence en prenant :

$$(33) \quad -V = \sqrt{gH} - \frac{2}{5}U.$$

Plus généralement pour un remous ascendant quelconque, ou pour  $U$  négatif, la formule (32) prise avec le signe inférieur pourra être écrite, en faisant porter, comme l'a fait M. Bazin, le coefficient  $\varkappa$  non pas sur le second terme, mais sur le troisième :

$$(34) \quad V = U - \sqrt{gH} + \frac{3}{5}U'$$

Indépendamment de ce que présente d'imparfaite la correction ainsi apportée empiriquement au dernier terme, cette formule exprime la célérité en fonction de la vitesse moyenne  $U'$  qui n'est connue que dans certaines circonstances spéciales (comme celle des expériences de Bidone, par exemple).

Dans sa *Théorie du mouvement tourbillonnant* etc., M. Bousinesq a donné l'expression de la célérité  $V$  en fonction de  $U$  et de la différence entre cette vitesse moyenne et la vitesse maximum, différence qui caractérise les circonstances de l'écoulement. Je vais essayer de résumer son analyse.

Supposons qu'il s'agisse d'un canal rectangulaire de pente constante et d'une très grande largeur également constante, où se trouve établi, avant la perturbation constituant l'onde étudiée, un régime uniforme, à vitesse moyenne  $U$  pour la profondeur d'eau donnée  $H$ . Soient  $U + U'$  et  $H + h$  les nouvelles valeurs de ces quantités lors du passage de l'onde, ou  $U'$  et  $h$  les petites variations, fonctions de  $x$  et de  $t$  qu'ont subies celles-ci à partir des valeurs primitives constantes  $U$  et  $H$ .

La pente initiale de superficie  $I$ , donnée par la formule du

régime uniforme, est le quotient  $\frac{bU^2}{H}$ , puisque  $H$  est alors le rayon moyen. A l'état non permanent, chaque section se relevant de  $h$ , cette pente devient  $b\frac{U^2}{H} - \frac{dh}{dx}$ . L'équation (22) du n° 183, page 377, devient alors, en négligeant son dernier terme :

$$\frac{bU^2}{H} - \frac{dh}{dx} = b\frac{(U+U')^2}{H+h} + (2\alpha - 1 - \nu) \frac{U+U'}{g} \cdot \frac{dU'}{dx} + \frac{1+2\nu}{g} \cdot \frac{dU'}{dt} - \frac{\alpha - 1 - 2\nu}{g} \cdot \frac{U+U'}{H+h} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

Avec une approximation suffisante, on peut négliger les carrés et les produits de  $U'$  et de  $h$  et même les produits, par ces deux quantités, du coefficient  $b$ , toujours très petit. L'équation ainsi simplifiée deviendra :

$$(35) \quad \frac{1+2\nu}{g} \frac{dU'}{dt} + \frac{2\alpha - 1 - \nu}{g} U \frac{dU'}{dx} + \frac{dh}{dx} - \frac{\alpha - 1 - 2\nu}{g} \frac{V}{H} + U \frac{dh}{dt} = 0.$$

D'autre part, l'équation de continuité (13) ou (17) peut, au même degré d'approximation, s'écrire :

$$(36) \quad \frac{dh}{dt} + H \frac{dU'}{dx} + U \frac{dh}{dx} = 0.$$

Raisonnons, sur ces deux équations (35) et (36) comme nous l'avons fait plus haut, au n° 209, page 421, sur les deux équations (16) et (17), c'est-à-dire exprimons que les deux quantités variables  $h$  et  $U'$  sont des fonctions de  $(x - Vt)$ , en appelant  $V$  la célérité de la propagation de l'onde, nous obtiendrons, après toutes réductions<sup>s</sup> et après avoir négligé des termes très petits de l'ordre de  $\nu^2$ , les deux équations :

$$(37) \quad U' = \frac{V-U}{H} \cdot h,$$

$$(38) \quad V = U \pm \sqrt{gH} + \frac{\alpha-1}{2} U \left( 3 \pm \frac{U}{\sqrt{gH}} \right) - \nu U \left( \frac{5}{2} \pm \frac{U}{\sqrt{gH}} \pm \frac{\sqrt{gH}}{U} \right).$$

Et, en mettant dans cette dernière, pour  $\alpha$  et  $\nu$  les valeurs qui en ont été données à la fin du n° 108, page 202, savoir :

$$\nu = \frac{4}{5} \left( \frac{v_m}{U} - 1 \right)^2, \quad \alpha = 1 + 3\nu - \frac{2}{7} \nu \sqrt{5\nu};$$

nous obtenons enfin :

$$(3g) \quad V = U \pm \sqrt{gH} + \frac{4}{5} \left( 2 \pm \frac{U^2 - 2gH}{2U\sqrt{gH}} \right) \frac{(v_m - U)^2}{U} \\ - \frac{8}{35} \left( 3 \pm \frac{U}{\sqrt{gH}} \right) \frac{(v_m - U)^3}{U^2}.$$

Cette expression dépend des trois quantités  $U$ ,  $\pm \sqrt{gH}$ ,  $v_m - U$  qui définissent, l'une,  $U$ , la vitesse moyenne du cours d'eau, la seconde,  $\pm \sqrt{gH}$  la célérité des ondes telle qu'elle serait par rapport à la masse fluide si celle-ci était animée de la vitesse moyenne  $U$ ; enfin la troisième,  $v_m - U$ , l'excédent de la vitesse maxima  $v_m$  à la surface sur la vitesse moyenne  $U$ , lequel caractérise l'inégalité absolue de vitesse des filets fluides.

La différence  $V - U \pm \sqrt{gH}$ , exprimée en grande partie par le troisième terme du second membre de (3g), mesure donc l'influence, sur la célérité de propagation  $V$ , de la rapidité avec laquelle se déforme sans cesse le milieu transmettant les ondes. Ce terme est ordinairement peu sensible, comparativement à la somme  $U \pm \sqrt{gH}$  des deux précédents, sauf dans les deux cas :

1° d'ondes descendantes le long d'un cours d'eau à fond rugueux et très rapide, rendant à la fois les quantités  $\eta$  et  $U$  relativement considérables et notable aussi la différence  $\frac{U^2 - 2gH}{2U\sqrt{gH}}$  (précédée alors du signe +) qui croît avec le rapport de  $U$  à  $\sqrt{gH}$  ;

2° d'ondes ascendantes le long d'un courant presque torrentiel ou faiblement torrentiel où la somme algébrique  $U - \sqrt{gH}$  des deux premiers termes s'approche de zéro par suite de la quasi égalité de  $U$  et de  $\sqrt{gH}$ , ce qui accroît l'importance du troisième terme considéré.

Pour donner une idée de cette importance, je citerai, d'après M. Boussinesq, trois expériences de M. Bazin <sup>1</sup>, relatives au premier cas, où les rapports de  $v_m - U$  à  $U$  et de  $U$  à  $\sqrt{gH}$  sont relativement considérables. On y avait, en effet, comme valeurs observées de  $H$ ,  $U$ ,  $v_m$  et  $V$  (avec des erreurs possibles de 3 pour 100 environ sur  $V$ ) :

$H = 0^m, 110$	,	$0^m, 150$	,	$0^m, 235$	,
$U = 3, 785$	,	$2, 744$	,	$3, 481$	,
$v_m = 5, 51$	,	$3, 49$	,	$4, 55$	,
$V = 6, 25$		$4, 32$		$5, 75$	.

1. Publiées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 15 juin 1885, tome C, page 1492.

Avec ces données il vient seulement pour  $U + \sqrt{gH}$  les valeurs :

$$U + \sqrt{gH} = 4,824 \quad , \quad 3,959 \quad , \quad 4,999 \quad ,$$

lesquelles sont très inférieures aux célérités observées  $V$  ; tandis que la formule (36) donne les résultats suivants :

$$V = 6,511 \quad , \quad 4,327 \quad , \quad 5,589 \quad .$$

La formule théorique que l'on obtient en conservant les termes de l'ordre de  $\tau^2$  que nous avons supprimés pour obtenir l'équation (38) donne des résultats encore plus approchés.

Il convient de remarquer que le rapport  $\tau$ , généralement très petit, atteint, dans ces trois expériences, les valeurs :

$$\tau = 0,166 \quad , \quad 0,059 \quad , \quad 0,075 \quad .$$

On peut voir, par cet exemple, quelles erreurs on est exposé à commettre en négligeant ce coefficient  $\tau$  et en assimilant à l'unité le coefficient  $\alpha$  qui est plus grand que  $1 + 3\tau$ .

Pour établir l'équation (39) et celle (35) d'où nous l'avons déduite, nous avons, en somme, négligé, dans l'équation générale du mouvement non permanent donnée au n° 183, page 377, les termes correspondant au frottement extérieur et affectés du coefficient  $b$ . Nous aurions pu, en suivant M. Boussinesq, tenir compte de l'influence du frottement. Malheureusement, les calculs en deviennent beaucoup plus compliqués et ils m'ont paru comporter des développements hors de proportion avec le reste de mon ouvrage. Je me bornerai à donner ici, sans démonstration, la formule qui fait connaître la variation de la vitesse moyenne  $U'$ , au passage d'une intumescence et qui correspond à l'équation (37) ci-dessus, établie sans tenir compte du frottement. On a :

$$U' = \frac{V - U}{H} \left( 1 - \frac{h}{4H} \right) h \mp \frac{V}{H} \int_{-\infty}^x \frac{\alpha'' h^2 dx}{H^2}$$

où  $\alpha''$  représente un coefficient égal à  $\frac{hg}{2(1+2\tau)}$  et où l'on doit prendre le signe  $+$  ou le signe  $-$  suivant que  $Vh$  est positif ou négatif. La valeur absolue de  $U'$  se trouve réduite d'une quantité de plus en plus sensible à mesure qu'on s'éloigne de la tête de l'intumescence. En un point déterminé du canal, la valeur maximum de  $U'$  se produit un certain temps avant que la hauteur  $h$  de l'onde y devienne elle-même maximum en valeur absolue.

## § 3.

## HOULE

**216. Ondes d'oscillation.** — Les ondes d'oscillation ou ondes périodiques constituent, pour les liquides, une forme particulière de l'état d'équilibre, si l'on peut appliquer ce nom à un état dans lequel toutes les molécules sont en mouvement. Mais ce mouvement est tout à fait distinct de celui de l'écoulement ; c'est un balancement sur place dans lequel les particules liquides décrivent des trajectoires fermées autour de leur position d'équilibre ; et il est caractérisé par ce fait que, si l'on fait abstraction des frottements, l'état dont il s'agit, d'une même masse liquide, se perpétuera indéfiniment sans modification, dans le même espace, comme l'équilibre lui-même.

Les ondes d'oscillation ou périodiques sont de deux sortes : celles qui paraissent courir à la surface de l'eau et qui s'appellent ondes *houleuses* ; celles qui semblent rester sur place, ou ondes *clapoteuses*. Les états correspondants de la masse liquide sont *la houle* et *le clapotis*.

Nous étudierons d'abord la houle, et nous emprunterons la plus grande partie de cette étude à un mémoire de F. Gerstner, dont une traduction a été publiée dans les *Annales des Ponts et Chaussées* 1887, 1<sup>er</sup> semestre, page 31. Dans tout ce qui va suivre, nous considérerons, comme nous l'avons fait dans les ondes de translation, que des ondes *cylindriques*, c'est-à-dire telles que toutes les molécules qui se trouvent à la fois sur une même ligne horizontale perpendiculaire au plan vertical des coordonnées aient exactement le même mouvement et restent constamment en ligne droite. Le mouvement de toute la masse sera alors défini par celui des molécules situées dans le plan vertical des coordonnées.

Si, à un moment quelconque, on suppose menées, dans la masse liquide, les surfaces de niveau, qui seront des cylindres horizontaux, ou bien, ce qui revient au même, si l'on suppose tracées, sur le plan vertical des coordonnées, les bases de ces cylindres qui seront des courbes de niveau, chacune de ces courbes considérée comme immobile représentera la trajectoire des molécules liquides qu'elle rencontre ; car, une molécule quelconque ne peut s'écarter de cette ligne qui est une ligne d'égale pression en tous ses points.

**217. Houle.** — L'hypothèse de surfaces de niveau immobiles dans l'espace paraît en contradiction avec celle de la houle, dans laquelle la surface libre, qui est une surface de niveau, change de forme à chaque instant. Mais la propriété des surfaces de niveau subsiste si l'on attribue à ces surfaces et à toute la masse liquide un mouvement de translation commun. Il est alors possible, comme nous le verrons, de représenter les ondes houleuses avec de telles surfaces.

Soit  $AMB$  (fig. 103) l'une des courbes de niveau, trajectoires des molécules,  $A$ , son point le plus élevé. Menons l'horizontale  $Ax$  et

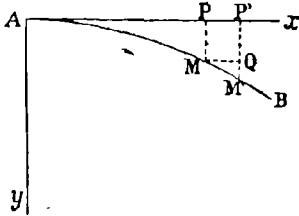


Fig. 103.

la verticale  $Ay$  que nous prendrons pour axes de coordonnées. Soient  $M, M'$  deux positions infiniment voisines d'une molécule sur sa trajectoire ; appelons  $m$  la masse de cette molécule,  $v_0$  sa vitesse lorsqu'elle était au point  $A$ ,  $v$  sa vitesse en  $M$ ,  $s$  la longueur de l'arc  $AM$  et  $ds$  l'élément  $MM'$ .

Appliquons le théorème des forces vives à cette molécule entre les deux points  $A$  et  $M$ , nous aurons :

$$(40) \quad v^2 = v_0^2 + 2gy.$$

Si  $R_0$  est le rayon de courbure de la trajectoire au point  $A$ , la force verticale qui sollicitait la molécule, lorsqu'elle était en ce point, a pour expression  $mg - \frac{mv_0^2}{R_0} = m \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right)$ . Cette masse  $m$ , qui s'est écoulée pendant le temps  $dt$  avec la vitesse  $v_0$ , occupe sur la trajectoire une longueur  $v_0 dt$ , de sorte que la force verticale, rapportée à l'unité de longueur, est :

$$\frac{m}{v_0 dt} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right).$$

Cette force verticale par unité de longueur, appliquée au point  $A$ , représente la pression en ce point, et puisque  $AMB$  est une courbe de pression, elle représente aussi la pression normale par une unité de longueur au point quelconque  $M$ . La même masse  $m$ , écoulée pendant le temps  $dt$ , y occupe une longueur  $ds = v dt$ , de sorte que la pression normale sur cette molécule est  $\frac{m ds}{v dt} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right)$ . La pression normale au point  $M$  fait avec l'horizontale un angle dont le cosinus est  $\frac{dy}{ds}$ , et par suite la composante horizontale de cette pres-

sion est  $\frac{m ds}{v_0 dt} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right) \frac{dy}{ds}$ . La somme des impulsions de cette composante horizontale, depuis A jusqu'à M, est égale à la différence des quantités de mouvement projetées sur l'axe des  $x$  ou à  $m \left( \frac{dx}{dt} - v_0 \right)$ . Or cette somme des impulsions a pour expression  $\int \frac{m ds}{v_0} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right) \frac{dy}{ds} dt$ , ou en réduisant :  $\int \frac{m}{v_0} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right) dy$  ou enfin  $\frac{m}{v_0} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right) y$ . Ecrivant cette égalité et divisant par  $m$ , il vient :

$$\frac{dx}{dt} - v_0 = \frac{y}{v_0} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right).$$

Désignons, pour abrégier par  $\frac{1}{b}$  ( $b$  étant une longueur), la quantité :

$$(41) \quad \frac{1}{b} = \frac{g}{v_0^2} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{v_0^2} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right),$$

l'équation précédente s'écrira simplement :

$$(42) \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \left( 1 + \frac{y}{b} \right).$$

Pour avoir une relation  $y$  et le temps  $t$ , nous exprimerons, en fonction de  $y$ , la composante verticale  $\frac{dy}{dt}$  de la vitesse, qui est égale à  $\sqrt{v^2 - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}$ . Mettant pour  $v$  et pour  $\frac{dx}{dt}$  leurs valeurs données par les équations (40) et (42), nous trouvons :

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{v^2 - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gy - v_0^2 \left( 1 + \frac{y}{b} \right)^2},$$

ou, après réductions :

$$(43) \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sqrt{\frac{2y}{R_0} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

L'intégration de cette équation se fait facilement en séparant les variables ; on trouve, en comptant le temps  $t$  à partir du moment où la molécule était au point A, ou en faisant  $y = 0$  pour  $t = 0$  :

$$(44) \quad y = \frac{b^2}{R_0} \left( 1 - \cos \frac{v_0 t}{b} \right),$$

ce qui donne :

$$(45) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{bv_0}{R_0} \sin \frac{v_0 t}{b}.$$

Substituant la valeur (44) de  $y$  dans celle (42) de  $\frac{dx}{dt}$ , il vient :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \left[ 1 + \frac{b}{R_0} \left( 1 - \cos \frac{v_0 t}{b} \right) \right],$$

ou bien, en raison de la signification de  $b$  :

$$(46) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{bg}{v_0} - \frac{bv_0}{R_0} \cos \frac{v_0 t}{b};$$

et, en intégrant depuis l'époque  $t = 0$  où l'on a  $x = 0$  :

$$(47) \quad x = \frac{bg}{v_0} t - \frac{b^2}{R_0} \sin \frac{v_0 t}{b}.$$

**218. Forme des surfaces de niveau.** — Les deux valeurs de  $x$  et de  $y$  en fonction du temps définissent la trajectoire des molécules ou la forme des surfaces de niveau de la masse liquide en fonction des quantités  $v_0$ ,  $R_0$  et  $b$  qui varieront de l'une à l'autre. Pour étudier plus facilement ces courbes, nous allons remplacer ces quantités  $v_0$ ,  $R_0$  et  $b$  qui sont constantes pour une même courbe, par trois autres,  $r$ ,  $V$  et  $T$  liées aux premières par les relations :

$$(48) \quad r = \frac{b^2}{R_0}, \quad V = \frac{bg}{v_0}, \quad T = \pi \frac{b}{v_0}.$$

Alors les expressions de  $x$ ,  $y$ ,  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{dy}{dt}$  prennent la forme :

1. Il est plus simple, au lieu d'effectuer l'intégration, de vérifier le résultat ci-dessus. La substitution de la valeur (44) de  $y$  dans l'équation (43) donne en effet :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_0 \sqrt{\frac{2b^2}{R_0^2} \left( 1 - \cos \frac{v_0 t}{b} \right) - \frac{b^2}{R_0^2} \left( 1 - \cos \frac{v_0 t}{b} \right)^2} = \\ &= \frac{bv_0}{R_0} \sqrt{1 - \cos^2 \frac{v_0 t}{b}} = \frac{bv_0}{R_0} \sin \frac{v_0 t}{b}, \end{aligned}$$

ou précisément l'équation (45).



$$(49) \left\{ \begin{array}{l} x = Vt - r \sin \frac{\pi t}{T}, \quad y = r \left( 1 - \cos \frac{\pi t}{T} \right). \\ \frac{dx}{dt} = V - \frac{\pi r}{T} \cos \frac{\pi t}{T}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\pi r}{T} \sin \frac{\pi t}{T}. \end{array} \right.$$

Considérons une circonférence de cercle (fig. 104) tracée dans un plan vertical avec un rayon  $r$ , et parcourue par un point mobile avec une vitesse angulaire constante  $\frac{\pi}{T} = \frac{v_0}{b}$ ; si, à l'époque  $t = 0$ , ce point mobile était au point A, à l'extrémité supérieure du diamètre vertical, l'angle AOM correspondant à sa position M à l'époque quelconque  $t$  sera égal à  $\frac{\pi t}{T}$  et l'on

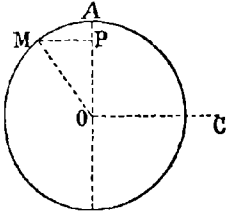


Fig. 104.

aura :

$$AP = OA - OP = r - r \cos \frac{\pi t}{T} = y,$$

$$MP = r \sin \frac{\pi t}{T} = Vt - x.$$

Et si nous supposons qu'en même temps que le point M décrit la circonférence, le centre de celle-ci se meuve, dans la direction OC des  $x$  positifs avec une vitesse  $V$ , le diamètre vertical OA aura parcouru, depuis l'époque  $t = 0$  où son abscisse était nulle, un espace horizontal  $Vt$ , et le point M aura alors pour abscisse  $Vt - MP$ , c'est-à-dire précisément l'abscisse  $x$  de la courbe de niveau.

Ainsi une courbe de niveau quelconque est engendrée par un point mobile parcourant, avec une vitesse angulaire constante, une circonférence de cercle placée dans un plan vertical et animée elle-même d'un mouvement de translation horizontale avec une vitesse constante. La courbe ainsi définie est une *trochoïde*, se transformant en une cycloïde lorsque la vitesse de translation horizontale est égale à la vitesse linéaire du point mobile sur la circonférence.

Au contraire, si cette vitesse de translation horizontale devient de plus en plus grande par rapport à l'autre, les dimensions horizontales de la circonférence deviennent négligeables par rapport à l'espace parcouru pendant le même temps par cette circonférence elle-même. La courbe de niveau se rapproche de plus en plus de celle qui serait engendrée par le point P, projection de M sur le diamètre vertical, c'est-à-dire d'une *sinusoïde* <sup>1</sup>.

r. En particulier lorsqu'il s'agit de l'onde-marée, dont nous parlerons plus

**219. Relation entre la longueur et la vitesse d'une onde.** — Pendant le temps  $2T$  que met le point mobile à décrire la circonférence entière, celle-ci s'est avancée horizontalement d'une quantité que nous appellerons  $2L$  et qui est égale à  $2T.V$  ; nous en déduisons :

$$L = TV,$$

et si nous observons que, d'après les deux dernières (48) :

$$V = \frac{gT}{\pi},$$

nous pourrons écrire, entre toutes ces quantités, les relations :

$$(50) \quad L = \frac{gT^2}{\pi}, \quad T = \sqrt{\frac{\pi L}{g}}, \quad V = \sqrt{\frac{gL}{\pi}}, \quad \frac{\pi}{T} = \sqrt{\frac{\pi g}{L}}.$$

Et il nous suffira de connaître une des quantités  $L$ ,  $T$ ,  $V$  pour en déduire les deux autres. Ces relations, entre la demi-longueur  $L$  et la demi-période  $T$  des vagues, nous montrent que les vagues de même longueur  $2L$  sont décrites dans le même temps  $2T$  quelle que soit leur hauteur ; la vitesse de translation  $V$  et la vitesse angulaire  $\frac{\pi}{T}$  ne dépendent que de  $L$ .<sup>1</sup>

**220. Condition de continuité.** — Si donc nous superposons des courbes de niveau ayant la même longueur  $2L$ , en les plaçant de manière que tous les sommets soient sur des verticales distantes de  $2L$ , ces trajectoires seront toutes parcourues, dans le même temps  $2T$ , par les diverses molécules liquides. Mais, pour qu'elles puissent l'être simultanément, par des particules faisant partie d'une même masse liquide, il doit exister entre les dimensions de ces courbes et leur espacement des relations nécessaires, que nous allons déterminer en tenant compte de l'invariabilité du volume des éléments de cette masse.

Soient  $AM, A'M'$  (fig. 105) deux courbes de niveau infiniment voisines ;  $BC, B'C'$  les trajectoires horizontales des centres des cer-

loin, la vitesse de translation horizontale dépasse souvent 10.000 fois celle du point mobile sur la circonférence : les différences entre la courbe réelle et la sinusoïde ne sont plus appréciables.

1. Les quantités auxiliaires  $b$ ,  $v_0$ ,  $R_0$  dont nous nous sommes servis pour établir les équations peuvent être, si on le veut, calculées d'après les équations (48) en fonction de  $L$ ,  $V$ ,  $T$  et de  $r$ , mais leur connaissance ne présente aucun intérêt.

des générateurs dont les rayons  $r$  et  $r + dr$  sont BA et B'A'. Au bout du temps  $t$ , lorsque les centres de circonférences sont venues de BB' en CC', les points mobiles M, M' ont parcouru des angles égaux, de telle sorte que les rayons CM, C'M' joignant ces points aux centres C, C' sont parallèles et font avec la verticale C'CD le même angle  $\frac{\pi t}{T}$  que, pour simplifier, nous

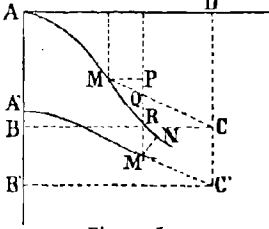


Fig. 105.

appellerons  $\varphi$ .

Soit  $x_0$  la profondeur de la ligne BC au-dessous de celle qui correspond à la surface libre,  $x_0 + dx_0$  celle de la ligne B'C'. Menons par M une horizontale MP et par M' une verticale rencontrant aux points R, Q, P, la trajectoire AM, le rayon MC et l'horizontale MP; enfin, abaissons M'N normale sur la trajectoire AMN. Le volume d'eau qui, dans l'unité de temps, passe entre les deux surfaces de niveau est égal à  $v \times M'N$  et il doit être indépendant de la position du point M', c'est-à-dire de l'angle  $\varphi$ . Les deux triangles semblables M'RN et MRP donnent :

$$M'M = M'R \cdot \frac{MP}{MR} = M'R \frac{dx}{ds}.$$

D'autre part :

$$M'R = M'Q + QP - PR = C'C + MQ \cos \varphi - MQ \sin \varphi \frac{dy}{dx},$$

$C'C = dx_0$  et  $MQ = -dr$ , ce qui donne :

$$M'R = dx_0 - dr \cos \varphi + dr \sin \varphi \frac{dy}{dx},$$

et par suite

$$M'N = M'R \frac{dx}{ds} = (dx_0 - dr \cos \varphi) \frac{dx}{ds} + dr \sin \varphi \frac{dy}{ds};$$

multipliant les deux membres par  $v$  et remarquant que les produits

$v \frac{dx}{ds}$  et  $v \frac{dy}{ds}$  sont respectivement, puisque  $ds = v dt$ , les composantes  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{dy}{dt}$  de la vitesse, il vient

$$v \times M'N = (dx_0 - dr \cos \varphi) \frac{dx}{dt} + dr \sin \varphi \frac{dy}{dt},$$

ou bien, en mettant pour  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{dy}{dt}$  leurs valeurs (49) avec  $\varphi$  au lieu de  $\frac{\pi t}{T}$  :

$$\begin{aligned} v \times M'N &= (dz_0 - dr \cos \varphi) \left( V - \frac{\pi r}{T} \cos \varphi \right) + dr \sin \varphi \cdot \frac{\pi r}{T} \sin \varphi \\ &= V \left[ dz_0 + \frac{\pi r}{L} dr - \left( dr + \frac{\pi r}{L} dz_0 \right) \cos \varphi \right]. \end{aligned}$$

Il faut, d'après ce qui vient d'être dit, que cette quantité soit indépendante de l'angle  $\varphi$ , ce qui exige que :

$$(51) \quad dr + \frac{\pi r}{L} dz_0 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{r} + \frac{\pi dz_0}{L} = 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\text{Log } r + \frac{\pi z_0}{L} = \text{constante.}$$

Pour déterminer cette constante, appelons  $2h$  la hauteur des vagues, ou  $h$  le rayon de la circonférence décrite par les molécules de la surface libre, pour laquelle  $z_0 = 0$ , la constante sera  $\text{Log } h$ , et l'équation précédente deviendra :

$$\text{Log } \frac{r}{h} + \frac{\pi z_0}{L} = 0,$$

ou bien, en passant des logarithmes aux nombres :

$$(52) \quad r = h e^{-\frac{\pi z_0}{L}}.$$

Lorsque la profondeur  $z_0$  croît en progression arithmétique, le rayon  $r$  des circonférences décroît en progression géométrique.

**221. Etat ondulatoire d'une masse liquide.** — De ce qui précède il résulte que si l'on place les unes au-dessus des autres des trochoïdes de même longueur  $2L$  et dont les hauteurs  $2r$  varient suivant cette loi, les molécules liquides pourront les parcourir simultanément pendant le même temps  $2T$  en constituant toujours une masse liquide continue.

Cela restera vrai, évidemment, si l'on imprime à l'ensemble de toutes ces courbes et de la masse liquide un mouvement de translation horizontal commun avec une vitesse quelconque —  $W$ , et en particulier si cette vitesse est précisément égale et contraire à  $V$ . Alors les sommets des vagues, en tant que formes géométriques

marchent avec cette vitesse  $V$  vers les  $x$  négatifs et les centres des circonférences, trajectoires des points décrivant les trochoïdes, sont immobiles. Les molécules liquides décrivent précisément ces circonférences et tournent ainsi constamment autour de points fixes, avec des vitesses angulaires constantes et les mêmes pour toutes.

On voit d'ailleurs que le sens du mouvement apparent de propagation des vagues est le même que celui de la vitesse des molécules liquides quand elles passent aux points les plus élevés de leurs trajectoires circulaires.

Pour que la masse liquide puisse rester continue dans toutes ses parties et que ses molécules puissent en même temps avoir le mouvement qui vient d'être défini, il faut qu'à une profondeur  $z_0$  quelconque, ces molécules décrivent une circonférence de rayon  $r$  donné par l'équation (52). Cette condition est incompatible avec celle d'un fond solide, aussi les lois que nous venons d'établir ne s'appliquent-elles rigoureusement que dans le cas d'une profondeur indéfinie. Si la profondeur est très grande, les rayons des circonférences que devraient décrire les molécules du fond sont très petites et la perturbation que leur immobilité forcée dans le sens vertical apporte aux lois du mouvement est négligeable.

Sous cette restriction, les formules précédentes sont applicables aux ondulations liquides présentant l'aspect de houle ou de vagues courantes. Ainsi, une houle dont les vagues se succèdent à des intervalles  $2T =$  deux secondes, par exemple, se propage avec une vitesse  $V = \frac{gT}{\pi} = \frac{9.81}{3.14} = 3^m 12$  par seconde et parcourt 11.240 mètres en une heure. Sa longueur  $2L$  ou la distance entre les sommets de deux vagues consécutives est  $2L = \frac{2gT^2}{\pi} = 6^m 24$  environ dans une eau d'une profondeur indéfinie.

**222. Pression en un point quelconque.** — On peut se proposer de calculer la pression en un point quelconque de la masse liquide en état d'oscillation. Nous avons vu plus haut (page 446) que la pression normale, par unité de longueur, sur une molécule de masse  $m$  avait pour valeur, en la représentant par  $dp$  :

$$dp = \frac{m}{v_0 dt} \left( g - \frac{v_0^2}{R_0} \right).$$

Or, d'après les relations (48) et (50) nous avons :

$$\frac{v_0^2}{R_0} = \frac{\pi gr}{TV} = \frac{\pi gr}{L};$$

il en résulte que :

$$dp = \frac{mg}{v_0 dt} \left( 1 - \frac{\pi r}{L} \right).$$

Si nous considérons l'onde qui correspond au cercle générateur dont le centre serait à la profondeur quelconque  $x_0$ , le sommet de cette onde sera à la profondeur  $(x_0 - r)$ , et le volume dont  $m$  est la masse aura pour valeur  $v_0 dt d(x_0 - r)$ . De sorte que, si  $\Pi$  est le poids spécifique du liquide, le poids  $mg$  de la masse  $m$  sera  $mg = \Pi v_0 dt d(x_0 - r)$ . Et par conséquent la pression  $dp$  sera exprimée par :

$$dp = \Pi d(x_0 - r) \left( 1 - \frac{\pi r}{L} \right) = \Pi \left( dx_0 - dr - \frac{\pi r}{L} dx_0 + \frac{\pi r}{L} dr \right);$$

or, nous avons démontré plus haut (51) que  $dr + \frac{\pi r}{L} dx_0 = 0$ , il reste donc :

$$dp = \Pi \left( dx_0 + \frac{\pi r}{L} dr \right);$$

et, en intégrant depuis la surface libre où  $p = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $r = h$  :

$$p = \Pi \left[ x_0 - \frac{\pi}{2L} (h^2 - r^2) \right].$$

Si l'on considère une profondeur assez grande pour que  $r$  soit négligeable, la hauteur représentative de la pression est simplement

$$x_0 - \frac{\pi h^2}{2L},$$

et nous allons voir qu'elle aurait la même valeur si le liquide était en équilibre, et immobile.

### 223. Niveau d'équilibre différent du niveau moyen.

— Il nous suffira, pour cela, de chercher quel serait le niveau du liquide revenu au repos.

La forme de la courbe affectée par la surface libre, dont les saillies sont beaucoup moins longues que les creux, fait supposer que le niveau moyen, ou la ligne qui partage en deux parties égales la hauteur des vagues superficielles, se trouve au-dessus du niveau qui correspondrait à l'équilibre ou au liquide immobile.

Menons, à la surface libre, une tangente à son point le plus bas,

soit à distance  $2h$  de l'axe des  $x$ , et évaluons l'aire comprise entre cette horizontale et la surface libre. Cette aire sera :

$$\int_0^{2L} (2h - y) dx.$$

Mettons pour  $y$  et  $x$  leurs valeurs (49) en remplaçant toujours, pour simplifier,  $\frac{\pi t}{T}$  par  $\varphi$  et  $VT$  par  $L$ , et en prenant d'ailleurs pour  $r$  la valeur  $h$  qui convient à la surface libre ; nous aurons :

$$y = h(1 - \cos \varphi), \quad dx = \left( \frac{L}{\pi} - h \cos \varphi \right) d\varphi;$$

et en effectuant la substitution et l'intégration de 0 à  $2\pi$  :

$$\int_0^{2L} (2h - y) dx = 2 h L - \pi h^2.$$

Si l'on suppose cette surface répartie également sur la longueur  $2L$  d'une vague, la hauteur du rectangle équivalent sera :

$$h - \frac{\pi h^2}{2L}.$$

Par conséquent le niveau d'équilibre se trouve au-dessous du niveau moyen, lequel est à la hauteur  $h$ , d'une hauteur égale à  $\frac{\pi h^2}{2L}$ . La pression que le liquide en équilibre exercerait sur un point placé à une profondeur  $x_0$  au-dessous de l'horizontale partageant en deux la hauteur des vagues serait donc bien mesurée par une hauteur  $x_0 - \frac{\pi h^2}{2L}$ .

La longueur  $2L$  est toujours notablement plus grande que  $2\pi h$  par conséquent la surélévation du niveau moyen au-dessus du niveau d'équilibre est toujours notablement inférieure à  $\frac{\pi h^2}{2\pi h} = \frac{h}{2}$  ou au quart de la hauteur  $2h$  des vagues<sup>1</sup>.

1. Le fait que le niveau moyen (la ligne horizontale qui partage en deux parties égales la hauteur des vagues) est plus élevé que le niveau d'équilibre d'une quantité mesurée par le quotient de l'aire de l'orbite d'une molécule par la longueur  $2L$  de l'onde est une loi géométrique générale, qui s'applique lorsque les molécules décrivent des trajectoires fermées quelconques.

Si un point mobile M parcourt avec une vitesse linéaire constante une trajectoire fermée pendant que celle-ci se déplace avec une vitesse constante V de même sens que la vitesse de la molécule au sommet le plus élevé de sa

Nous venons de voir, au numéro précédent, que la pression exercée par le liquide en mouvement sur un point quelconque placé à une profondeur  $z_0$  au-dessous du niveau moyen, ou à une profondeur  $z_0 - \frac{\pi h^2}{2L}$  au-dessous du niveau d'équilibre, avait pour valeur :

$$p = \Pi \left[ \varepsilon_0 - \frac{\pi h^2}{2L} + \frac{\pi r^2}{2L} \right].$$

Elle est donc inférieure à celle qui correspond au niveau moyen, mais elle est supérieure à celle qui correspond au niveau d'équilibre.

Si donc on suppose un corps flottant sur une eau en repos, ce corps étant en équilibre à une hauteur déterminée au-dessus d'un plan de comparaison inférieur, et si l'on vient à imprimer au

trajectoire, l'aire comprise entre la trajectoire réelle du point et une horizontale quelconque située au-dessous d'elle, différera de l'aire rectangulaire de la trajectoire du centre de gravité de la courbe fermée d'une quantité égale à l'aire enfermée par cette courbe. Quelle que soit la courbe fermée AB (fig. 106) parcourue avec une vitesse constante pendant qu'elle se déplace horizontalement avec une vitesse V, l'aire OAB'A'X diffère de l'aire OEFX (EF étant menée par le centre de gravité G de la courbe), d'une quantité mesurée par l'aire fermée AMBM'. Soit, en effet, une ordonnée MP =  $\varepsilon$  se déplaçant de  $dx$  sur la

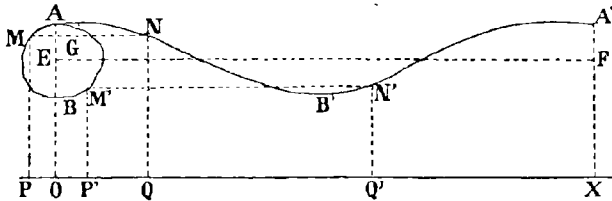


Fig. 106.

courbe fermée, pendant le temps  $dt$ . Si cette ordonnée correspond à un point de la courbe où la projection horizontale de sa vitesse soit de sens contraire à V, le déplacement  $dx$  dans la courbe fermée correspondra à un déplacement  $Vdt - dx$  au point N de la trajectoire réelle. Si, au contraire l'ordonnée M'P' =  $\varepsilon'$  correspond à un point où les vitesses horizontales soient de même sens, le même déplacement correspondra à  $Vdt + dx$ , au point N' de la trajectoire.

L'aire de la courbe fermée est  $\int (\varepsilon - \varepsilon') dx = \Omega$ . Celle qui est comprise entre la trajectoire AB'A' et OX a pour valeur  $\int \varepsilon (Vdt - dx) + \int \varepsilon' (Vdt + dx) = \int (\varepsilon + \varepsilon') Vdt - \int (\varepsilon - \varepsilon') dx = V \int (\varepsilon + \varepsilon') dt - \Omega$ .

Or la courbe fermée étant parcourue avec une vitesse constante,  $dt$  est proportionnel aux arcs  $ds$  de cette courbe et l'intégrale  $\int (\varepsilon + \varepsilon') dt = \int \varepsilon_1 ds$ , en appelant  $\varepsilon_1$ , l'ordonnée OE du centre de gravité G de la courbe. Ce qui démontre le théorème.



liquide un mouvement d'oscillation, la pression se trouvera augmentée en tous les points de la surface plongée du corps et celui-ci sera, par suite, soulevé d'une certaine quantité inférieure à  $\frac{\pi h^2}{2L}$  qui mesure la surélévation du niveau moyen. Il paraîtra plonger davantage, mais sera en réalité plus haut, par rapport au plan fixe de comparaison, que dans le liquide immobile.

**224. Déferlement.** — Nous avons vu que la forme de la surface libre, de même que celle de toutes les surfaces de niveau, était une trochoïde dont la cycloïde est un cas particulier. La trochoïde se transformerait en cycloïde si la longueur  $2L$  était précisément égale à  $2\pi h$ , mais alors la forme théorique des vagues serait une pointe aiguë correspondant au contact de deux arceaux successifs de cycloïde, et il est bien évident qu'un pareil résultat est irréalisable : la vague déferlerait bien avant. C'est pourquoi la longueur  $2L$  est toujours beaucoup plus grande que  $2\pi h$ . Le déferlement se produit lorsque la hauteur  $h$  est grande par rapport à  $L$ , mais le rapport qui doit exister entre ces deux quantités pour que le phénomène s'observe varie avec les circonstances.

Lorsque des vagues se propagent dans un courant dans lequel la vitesse de l'eau est plus grande à la surface qu'au fond et que le sens de la propagation est inverse de celui du courant, ce qui arrive, par exemple, lorsque les vagues de la mer se propagent dans un fleuve, à son embouchure, les molécules superficielles, rencontrant des vitesses plus grandes que celles qui se trouvent plus bas, sont repoussées en arrière, et les sommets de toutes les courbes de niveau, au lieu d'être situés sur une même verticale, se trouvent reportés sur une ligne inclinée et le déferlement se produit alors vers l'arrière ou en sens contraire du mouvement de propagation. Au contraire, le déferlement se produit vers l'avant lorsque les molécules profondes sont ralenties dans leur marche plus que celles de la surface, comme, par exemple, lorsque des ondes se propagent sur une plage en pente douce.

**225. Énergie totale d'une onde d'oscillation.** — Il est facile de calculer l'énergie totale d'une onde d'oscillation.

La hauteur moyenne d'une onde au-dessus de son niveau d'équilibre étant  $\frac{\pi r^2}{2L}$ , son énergie potentielle, pour une tranche de hauteur  $dz_0$  et de longueur  $2L$ , sera égale à son poids  $2\rho gLdz_0$  multiplié par cette hauteur  $\frac{\pi r^2}{2L}$  ou bien à  $\rho g\pi r^2 dz_0$ . En mettant pour  $r$  sa

valeur  $r = e^{-\frac{\pi x_0}{L}}$  et intégrant depuis la surface libre  $x_0 = 0$  jusqu'à une profondeur donnée  $x_0 = x_1$ , on trouve pour cette énergie potentielle :

$$\frac{\rho g h^2}{2} L \left( 1 - e^{-\frac{2\pi x_1}{L}} \right).$$

L'énergie actuelle est la somme des produits  $\frac{mv^2}{2}$ . La vitesse  $v$  est la même pour toutes les molécules d'une couche d'épaisseur  $dx_0$ , car la vitesse angulaire d'une de ces molécules est  $\frac{\pi}{T}$ . On a donc  $v = \frac{\pi r}{T}$  et, la masse totale de la couche étant  $2\rho L dx_0$ , l'énergie actuelle de la couche est  $\frac{\rho L \pi^2 r^2}{T^2} dx_0$  ou bien, puisque  $\frac{\pi L}{T^2} = g$ , elle vaut  $\rho g \pi r^2 dx_0$  ou exactement la même chose que l'énergie potentielle.

L'énergie totale sera donc le double de la valeur de celle-ci, ou bien, en la désignant par  $\rho g E$  comme ci-dessus :

$$\rho g E = \rho g L h^2 \left( 1 - e^{-\frac{2\pi x_1}{L}} \right).$$

Si la profondeur  $x_1$  est assez grande pour que l'exponentielle puisse être négligée devant l'unité, on aura :

$$\rho g E = \rho g L h^2$$

ou bien, en mettant pour  $L$  sa valeur  $\frac{\pi V^2}{g}$  :

$$\rho g E = \rho \cdot \pi h^2 \cdot V^2.$$

L'énergie d'une onde est donc égale (ou un peu inférieure) à la masse liquide contenue dans le cercle d'oscillation des molécules superficielles, multipliée par le carré de la célérité apparente de la propagation.

**226. Formules applicables aux masses liquides de profondeur limitée.** — Lorsqu'au lieu de se propager dans une eau d'une profondeur indéfinie, la houle se produit dans une masse liquide de profondeur  $H$ , M. Boussinesq a montré que le mouvement des molécules liquides était encore analogue, seulement, au lieu de décrire des circonférences de cercles de rayons

$r = h e^{-\frac{\pi x_0}{L}}$ , elles décrivent des ellipses dont le demi grand axe horizontal  $r$  et le demi petit axe vertical  $r'$  ont les valeurs sui-

vantes en fonction de  $x_0$ , H et de L, demi-longueur des vagues <sup>1</sup> :

$$r = h \frac{\operatorname{coth} \pi \frac{H - x_0}{L}}{\operatorname{sinh} \pi \frac{H}{L}}, \quad r' = h \frac{\operatorname{sinh} \pi \frac{H - x_0}{L}}{\operatorname{sinh} \pi \frac{H}{L}},$$

et la demi période T de l'oscillation a pour expression :

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{g} \operatorname{coth} \pi \frac{H}{L}}.$$

La célérité V de la propagation est alors :

$$V = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{\pi} \operatorname{tanh} \pi \frac{H}{L}}.$$

Et lorsque la profondeur H est assez petite par rapport à L pour que  $\frac{\pi H}{L}$  soit inférieur à  $\frac{1}{4}$  par exemple,  $\operatorname{tanh} \frac{\pi H}{L}$  ne diffère de  $\frac{\pi H}{L}$  que de moins de  $\frac{1}{50}$  de sa valeur et l'on a approximativement :

$$V = \sqrt{gH},$$

formule qui a été donnée par Lagrange et qui est identique à celle que nous avons trouvée pour les ondes de translation dont la saillie h est petite par rapport à la profondeur H.

L'élévation du niveau moyen au-dessus de la surface d'équilibre est  $\frac{\pi r r'}{2L}$ , et l'énergie de l'onde  $\rho \pi r r' V^2 = \rho g h^2 L$  est proportionnelle au carré de la hauteur des vagues et à la première puissance de leur longueur.

Cela suppose toutefois que les frottements du liquide sur lui-même et sur le fond sont négligés. L'effet de ces frottements modifie un peu ces conclusions. Il a pour conséquence, par exemple, de rapprocher de la forme circulaire les trajectoires elliptiques des molécules, à partir d'une certaine hauteur au-dessus du fond et même de renverser le sens des axes, le grand axe de l'ellipse étant vertical et le petit axe horizontal lorsque l'on est à une distance suffisante du fond <sup>1</sup>. Il a aussi pour conséquence de diminuer un

1. On trouvera la démonstration de ces formules, ou bien dans le Mémoire de M. Boussinesq sur les ondes liquides périodiques, ou bien dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1888, 1<sup>er</sup> semestre, pages 782 et suivantes.

1. M. de Caligny a observé (*Hydraulique*, 1<sup>re</sup> partie, page 295) les axes ver-

peu les célérités de la propagation et d'éteindre progressivement la houle, c'est-à-dire d'en diminuer la hauteur. Le coefficient d'extinction est inversement proportionnel au carré de la demi-longueur  $L$  de la houle, et par suite les houles les plus courtes disparaissent bien plus rapidement que les plus longues. C'est ce qui explique comment, à la suite de mouvements tumultueux produisant des ondes de toutes formes et de toute amplitude, il s'établit souvent, après un certain temps, une houle unique régulière et dont l'amplitude est la plus grande.

**227. Des vagues de la mer** <sup>1</sup>. — Les vagues ou lames produites à la surface de la mer par l'action du vent se comportent, d'une façon générale, à la manière des ondulations qui viennent d'être étudiées. Au large, elles sont d'autant plus hautes que la mer est plus vaste et plus profonde. On en rencontre de 4 à 5 mètres de hauteur dans la Manche et la Méditerranée, et de 6 à 7 mètres dans le Golfe de Gascogne. Des observateurs dignes de foi assurent avoir vu dans l'Océan des lames de 13, 15, 18 mètres de hauteur et même davantage. Dans l'ouragan des 26 et 27 janvier 1878, les lames avaient 12 mètres de creux à Philippeville et à Collo ; une lame a enlevé et englouti deux personnes placées sur une falaise à 19 mètres au-dessus du niveau de la mer.

Au large, elle se propagent dans la direction du vent sous la forme d'ondes cylindriques. En approchant de la terre, la partie de la lame la plus voisine du rivage est retardée dans sa marche par la diminution de la profondeur, tandis que du côté du large la lame continue à s'avancer avec une vitesse constante. Les lames semblent alors pivoter autour d'une de leurs extrémités pour venir se rabattre sur le rivage. Le même phénomène de pivotement des lames s'observe autour des musoirs des jetées des ports où l'agitation pénètre ainsi dans une direction qui peut être presque opposée à celle du vent.

Lorsque les lames se présentent normalement, ou à peu près, à l'entrée d'une baie largement évasée, elles s'étendent en éventail. A

titicaux et horizontaux des trajectoires elliptiques des molécules dans un mouvement de houle ; il a trouvé les valeurs suivantes :

au fond.....	axe horizontal 0m,022	.....	axe vertical 0m,000
à 0 m,09 au-dessus du fond.....	0,027	.....	0,009
à 0,18.....	0,032	.....	0,018
à 0,27.....	0,040	.....	0,029
à 0,36 (surface).....	0,055	.....	0,060

1. Ce paragraphe est en grande partie emprunté au *Cours de travaux maritimes* professé à l'École des Ponts et Chaussées par M. le baron Quinette de Rochemont, inspecteur général et publié (lithographié) en 1896-1898.

mesure qu'elles s'enfoncent dans la baie, elles sont retardées sur le bord par les moindres profondeurs, elles se courbent alors de plus en plus et semblent venir se modeler sur les lignes de niveau du fond.

Si la baie est en forme d'entonnoir, les lames se raccourcissent et deviennent de plus en plus hautes à mesure qu'elle s'y enfoncent. Par contre, si les lames pénètrent par un goulet étroit dans une baie qui s'évase en arrière elles augmentent de longueur et diminuent de hauteur.

Elles se réfléchissent lorsqu'elles viennent frapper obliquement sur des surfaces verticales ou très inclinées ; on constate même la réflexion sur des talus inclinés à 45 degrés.

Lorsqu'au lieu d'arriver obliquement le long d'une surface verticale, elles arrivent normalement ou à peu près, la réflexion est généralement tumultueuse, accompagnée d'un déferlement, et porte le nom de *ressac*. Le mouvement horizontal de l'eau se transforme d'abord par le choc en mouvement vertical ; la lame s'élève le long de la paroi, mais bientôt elle retombe et c'est cette chute en retour qui constitue le *ressac*. Les eaux descendantes attaquent énergiquement le sol et l'affouillent, et la profondeur maximum de l'affouillement n'est pas au pied du mur qui produit le *ressac*, mais à une certaine distance en avant.

Le mouvement vertical ainsi produit peut être considérable : on a observé, au phare d'Eddystone, des gerbes de 50 mètres de hauteur.

L'effort que produisent les lames dans leur choc sur une paroi verticale est due à leur énergie, calculée au n<sup>o</sup> 225, il peut être très élevé. M. Leferre a estimé à 30.000 kilog. par mètre carré la force qui a déterminé en 1867 la rupture de la tour balise du Petit Charpentier, mais cette évaluation paraît exagérée ; il ne semble pas que, sur les points les plus exposés des côtes de France et d'Algérie, cet effort ait dépassé le chiffre de 20.000 kilog. par mètre carré, en supposant que le choc soit normal à la surface qui le reçoit. Il est atténué en effet, d'une part, lorsque la lame a dû se développer sur un fond sous-marin en pente relativement douce, et d'autre part, à raison de l'obliquité du choc qui a surtout pour conséquence la succession des efforts aux différents points atteints par la lame dans son mouvement de propagation.

Le maximum de l'action des lames a lieu vers le niveau moyen de la mer supposée en repos ; leur puissance décroît rapidement au-dessus et au-dessous de ce niveau. Les enrochements cessent en général d'être remués à une profondeur de 7 à 9 mètres au-des-

sous du creux des lames. Le sable peut être agité et même soulevé par les fonds de 20 mètres et plus.

Une légère couche d'huile, dont l'épaisseur, d'après l'amiral Cloué, peut ne pas atteindre 11 millionnièmes de millimètre, empêche les lames de déferler et de se briser. Les lames ne sont pas amorties, elles subsistent, mais elles affectent la forme de grandes et fortes ondulations. Le fait seul de la disparition des brisants est un résultat d'une portée considérable pour la protection des navires en mer.

**228. Du flot de fond.** — Sous l'action d'un vent prolongé, la masse liquide arrive quelquefois à prendre un état ondulatoire général qui s'étend à toute sa hauteur. Alors, les molécules situées sur le fond, supposé horizontal, se déplacent horizontalement avec des vitesses variables : les trajectoires des molécules, circulaires ou elliptiques, s'aplatissent à mesure que l'on s'approche du fond où elles se réduisent à une ligne droite. Lorsque le fond est horizontal, la vitesse des molécules du fond est nulle au moment où la hauteur de l'onde elle-même est nulle ; elle est dirigée dans le sens de la propagation de l'onde dans la période positive de celle-ci et en sens contraire dans la période négative ; elle atteint son maximum, dans un sens ou dans l'autre, au moment même où la molécule du fond est sur la verticale du sommet ou des creux de l'onde. Si le fond n'est pas horizontal, les coïncidences n'existent plus : lorsqu'il est ascendant, dans le sens de la marche des ondes, le maximum de vitesse précède cette verticale et il la suit lorsque le fond est plongeant.

Lorsque le fond est constamment ascendant, la quantité de mouvement des couches profondes se transmet successivement à des masses décroissantes ; elle peut donc donner lieu, en définitive, à des vitesses de fond assez grandes, et en tout cas notablement supérieures à celles qui correspondraient aux mêmes ondulations superficielles se produisant dans une masse de profondeur uniforme. Et l'on comprend que cette augmentation de la vitesse au fond soit d'autant plus grande que l'agitation vient de plus loin. Cela est d'accord avec ce qu'expriment les marins quand ils disent que la mer est *longue*. Cette augmentation de la vitesse au fond ne se produit pas lorsque le fond est toujours horizontal, et elle est remplacée par une diminution lorsque le fond est plongeant, car la quantité de mouvement de chaque tranche doit se communiquer à des masses croissantes. L'accroissement de profondeur éteint non seulement les vitesses au fond, mais aussi l'agitation superficielle : la hauteur

des ondes diminue lorsque l'onde passe au-dessus d'un creux. Cela tient à ce que son énergie, supposée constante, se répartit sur une masse plus grande. Et lorsqu'après avoir passé au-dessus d'un creux, l'onde poursuivra son chemin en avant, sur des parties moins profondes, elle ne reprendra pas immédiatement pour cela sa hauteur primitive ; une grande partie de son énergie, disséminée dans les couches profondes, disparaîtra dans des frottements, des chocs sur le fond, des tourbillonnements.

Le mouvement ondulatoire est généralement produit par l'action du vent. Si le fond est constamment plongeant, et si la cause déterminante a cessé d'agir, l'ondulation s'effacera rapidement ; mais si, au contraire, cette cause exerce toujours son action, il pourra arriver que l'accroissement d'énergie qu'elle communique à la masse liquide en mouvement compense, et au delà, l'augmentation de cette masse due à l'augmentation de profondeur et que l'onde progresse, sans s'affaisser et même en s'exhaussant, au-dessus d'un fond plongeant. Si, ensuite, après des espaces assez longs, le fond commence à se relever, on constatera l'accroissement constant de la vitesse de fond en même temps que l'exhaussement de l'onde qui pourra s'élever jusqu'à déferler si la profondeur devient assez petite. Ici encore, une grande partie de l'énergie de l'onde se trouvera détruite par les frottements sur le fond, de telle sorte que si, après s'être exhaussé, le fond recommence à s'abaisser, l'onde s'éteindra de nouveau et ne conservera guère qu'une petite portion de son énergie primitive. C'est ce qui explique comment certaines rades, en apparence découvertes dans la direction d'où proviennent les plus fortes tempêtes, offrent néanmoins aux navires un mouillage sûr, parce qu'elles sont abritées, dans cette direction, par des hauts fonds qui interceptent la propagation du mouvement dans les couches profondes.

**229. Vitesse du flot de fond.** — Lorsque l'agitation vient de loin et a pu s'étendre à toute la masse liquide, il peut arriver que la vitesse au fond soit grande, même à de grandes profondeurs. Cela n'est pas en contradiction avec ce fait que, sur certaines plages, les plus grandes bourrasques n'arrivent pas à déplacer sensiblement les matières placées sur le fond à une profondeur moindre. Les conditions ne sont pas les mêmes, et d'ailleurs, si ces matières ne bougent presque pas, cela prouve simplement qu'à la profondeur où elles se trouvent l'effet des vitesses alternatives du flot de fond compense exactement la composante de leur poids parallèlement au fond.

La vitesse du flot de fond peut être calculée, lorsque le fond est horizontal, par la formule (9) de la page 417, en assimilant l'onde qui l'accompagne à une onde de translation ; mais lorsque le fond est en pente, le calcul devient plus difficile ; il ne peut se faire que moyennant des hypothèses plus ou moins plausibles sur la manière dont se transmet la quantité de mouvement des tranches successives aux masses croissantes ou décroissantes du liquide. M. Cornaglia a donné, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1881, 1<sup>er</sup> semestre, page 587, une étude à laquelle nous avons emprunté quelques-unes des considérations qui précèdent et où l'on trouvera des formules établies en vue de ce calcul ; elle sont assez compliquées, mais elles ont donné à l'auteur des résultats qui concordent d'une manière très satisfaisante avec les observations qu'il a faites au port d'Oncille (Oneglia). Nous ne nous arrêterons ni à les discuter ni à les reproduire et nous nous contenterons d'y renvoyer le lecteur.

#### § 4

### CLAPOTIS

**230. Effet de la superposition de deux houles se propageant en sens contraire.** — Au lieu de considérer une masse liquide indéfinie dans tous les sens, supposons-la limitée par un plan vertical perpendiculaire à l'axe des  $x$  et supposons que, sur ce plan, les vitesses des diverses molécules en mouvement se réfléchissent suivant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence et en conservant leurs grandeurs : le mouvement des molécules, après leur réflexion, sera celui d'une houle égale à la première, mais se propageant en sens contraire, et ce mouvement se superposera à celui de la première houle. Le mouvement résultant constitue le clapotis. Pour nous rendre compte de ce qu'il peut être, nous allons figurer séparément les trajectoires circulaires des molécules dans les deux houles qui se superposent. Celles de la houle directe sont celles de la ligne supérieure de la figure 107, et celles de la houle réfléchie sont sur la seconde ligne. Les points marqués des mêmes numéros 0, 1, 2... 11 sur chacune de ces circonférences indiquent les positions simultanées, sur toutes ces trajectoires, de molécules appartenant à la même surface de niveau.



la période  $2T$  de leur mouvement orbital ayant été divisée en 12 parties égales. Si l'on applique le n<sup>o</sup> 0 à l'époque à laquelle une même molécule AA' est au point le plus élevé de sa circonférence dans la houle directe et au point le plus bas dans la houle réfléchie, on voit que cette molécule, à une époque quelconque, sera toujours sur la ligne horizontale de niveau, car les composantes verticales de son déplacement, dans ses deux mouvements simultanés, seront toujours égales et de signes contraires. Pour une autre molécule quelconque BB', distante de AA' d'une longueur  $AB = A'B'$  égale à une fraction déterminée  $\frac{1}{n}$  de la longueur  $2L$  de l'onde (ici,  $\frac{1}{12}$ ), les positions simultanées de cette molécule se trouvent toujours sur une même parallèle à la ligne Bo, B'o et à égale distance, de part et

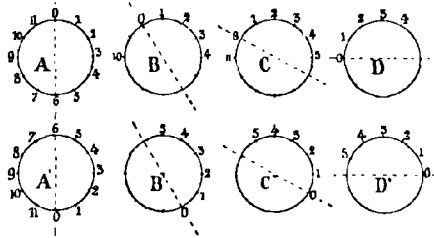


Fig. 107.

d'autre, de la perpendiculaire à cette ligne menée par B, B'; le déplacement résultant sera donc toujours nul sur la ligne Bo, B'o et il s'effectuera uniquement sur une perpendiculaire à cette ligne, laquelle fait avec l'horizontale un angle égal à  $\frac{2\pi}{n}$ ; à une époque quelconque, la distance de la molécule à son centre d'oscillation B, B' sera la même que la distance de la molécule A à son centre d'oscillation, car évidemment la somme des distances, au diamètre passant par les points marqués 0, des deux points portant un même numéro quelconque, est la même pour toutes les circonférences. Il en résulte que, dans le clapotis, les molécules liquides décrivent des trajectoires rectilignes diversement inclinées et qu'à une époque quelconque, toutes les molécules appartenant à un même plan horizontal d'équilibre sont à la même distance de leur centre d'oscillation.

L'angle des trajectoires rectilignes avec l'horizontale, constant pour chaque molécule, croît proportionnellement à la distance horizontale des molécules entre elles.

L'amplitude de l'oscillation est double de celle de chacune des deux houles qui se superposent ; il en résulte que, pour une même longueur  $2L$  de l'onde, la hauteur des vagues du clapotis est double de celle de la houle qui lui a donné naissance.

La surface libre, dans le clapotis, varie de forme à chaque instant, mais les saillies et les creux restent toujours sur les mêmes verticales, les saillies  $y$  alternant avec les creux de façon que les ondes s'élèvent et s'abaissent sur place sans présenter l'apparence d'un mouvement de propagation ; toutes les molécules repassent simultanément et à intervalles égaux par leurs positions d'équilibre. A mi-distance des verticales où se produisent les saillies et les creux, il y a un point où les molécules n'éprouvent que des déplacements horizontaux, c'est-à-dire que la surface libre y reste constamment en coïncidence avec celle d'équilibre.

Tous ces résultats pourraient se déduire facilement des formules données au paragraphe précédent et relatives à la houle : il suffirait d'additionner les ordonnées de deux houles ayant même amplitude et des célérités égales et de signes contraires. On donnera plus loin un exemple de ce calcul pour le cas où la surface libre est une sinusoïde.

Le clapotis est le mouvement périodique naturel des liquides contenus dans des espaces fermés, de même que la houle est le mouvement naturel des masses liquides indéfinies. Et, les mouvements secondaires s'éteignant, comme nous l'avons dit, bien plus vite que les autres sous l'influence des frottements, les mouvements divers donnent naissance, après un certain temps, dans un espace fermé, à un clapotis dont la demi-longueur d'onde  $L$  est égale à la largeur de cet espace.

La relation fondamentale

$$\pi L = gT^2$$

établie pour la houle, subsiste évidemment pour le clapotis qui se produit dans une eau d'une profondeur infinie. Mais lorsqu'il s'agit d'une profondeur finie  $H$ , c'est la formule de Lagrange :

$$V = \frac{L}{T} = \sqrt{gH}$$

que l'on doit appliquer.

**231. Seiches des grands lacs.** — Un des exemples les plus remarquables et les mieux étudiés des grandes ondes clapoteuses est le phénomène connu sous le nom de *Seiches* des lacs.

Les seiches de plusieurs lacs suisses, et en particulier celles du lac Léman, ont été décrites d'une manière très précise et très détaillée par M. Forel, professeur à l'Académie de Lausanne, à qui nous empruntons tout ce qui suit.

Nulle part les oscillations du lac, désignées sous le nom de seiches, ne sont plus fortes qu'à Genève, où elles ont atteint parfois une amplitude verticale d'un mètre, un mètre et demi et même deux mètres. On constate sur le lac Léman deux sortes d'oscillations, les unes longitudinales, les autres transversales ; la période des premières est de 72 minutes, celle des secondes de 10 minutes ; l'amplitude de ces dernières n'a jamais dépassé 12 centimètres. Ces durées s'accordent parfaitement avec la formule de Lagrange, en prenant pour L soit la longueur, soit la largeur du lac et pour H sa profondeur moyenne, d'environ 200 mètres.

M. Forel indique, comme se rattachant au même phénomène, de magnifiques oscillations rythmiques, très régulières, atteignant 45 centimètres d'amplitude avec une durée de 20 à 21 minutes, observées par M. Airy sur les tracés du marégraphe de Malte en 1872. Il donne aussi l'exemple de l'Euripe, détroit qui sépare la Béotie de l'île de Négrepont, dans lequel se produisent des courants assez intenses pour mettre en mouvement des roues de moulins, mais présentant cette particularité de changer de direction plusieurs fois par jour. Ordinairement, ce changement de direction se produit quatre fois par jour lunaire de 24<sup>h</sup> 50<sup>m</sup> et correspond à la marée ordinaire, mais quelquefois les changements sont beaucoup plus fréquents et se produisent 12 à 14 fois par jour, soit après une durée de 100 à 130 minutes. D'après M. Forel, ces courants sont dus, alors, à un mouvement d'oscillation des eaux du canal d'Atalante, analogue à celui qui a été constaté dans le lac Léman, c'est-à-dire à un grand clapotis. Le canal d'Atalante, qui s'étend au nord-ouest de l'Euripe, forme un bassin presque absolument fermé, d'une longueur de 115 kilomètres, et dont la profondeur moyenne est de 100 à 150 mètres.

M. Forel cite encore les seiches observées sur le lac George, en Australie, par M. H. C. Russell. La longueur de ce lac est de 29 kilomètres, sa profondeur moyenne de 5 m. 50 environ et la durée des oscillations de 131 minutes. Ces chiffres, comme les précédents, sont d'accord avec la formule de Lagrange.

## § 5

## COLONNES LIQUIDES OSCILLANTES

**232. Oscillations de l'eau dans les tubes.** — Indépendamment des mouvements oscillatoires de masse, comme ceux que nous venons d'étudier, les oscillations dans les tubes ou tuyaux présentent un grand nombre de particularités intéressantes dont il peut être utile de signaler les principales. L'étude de ces oscillations a été faite, surtout expérimentalement, par M. de Caligny, et l'on trouvera dans les deux volumes de son *Hydraulique* de très nombreuses expériences dans lesquelles la force vive du liquide en mouvement est transformée de la manière la plus ingénieuse, pour produire des effets variés.

La première, la plus simple et on pourrait dire l'expérience fondamentale consiste en ceci. Si dans un tube en U (fig. 108) placé

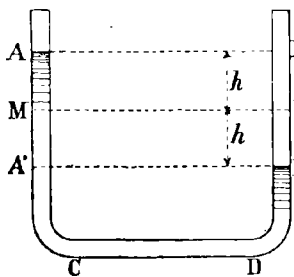


Fig. 108.

comme un siphon renversé, l'on a, dans l'une des deux branches, de l'eau à un niveau A supérieur à celui B auquel elle est maintenue dans la seconde et si on abandonne le liquide à lui-même, le niveau A s'abaissera et le niveau B se relèvera, mais ni l'un ni l'autre ne s'arrêteront lorsqu'ils auront atteint le niveau d'équilibre MN. En vertu de la vitesse acquise

alors par le liquide, le mouvement se continuera, et si les frottements sont négligeables, le niveau B remontera en B' et le niveau A s'abaissera en A', à des distances du niveau MN égales mais de sens contraire à celles où ils se trouvaient au commencement du mouvement. Puis le mouvement inverse se produira, et ainsi de suite. Les frottements seuls empêchent cet effet de se produire indéfiniment et diminuent chaque fois l'amplitude de l'oscillation.

Rien n'est plus simple que l'explication théorique de ce fait et le calcul de la durée théorique de l'oscillation. Soit  $2h$  la dénivellation primitive,  $2x$  cette dénivellation à une époque  $t$  quelconque,  $\omega$  la section transversale du tube supposée constante et  $L$  la longueur ACDB de la colonne oscillante ; la force accélératrice à l'époque  $t$  considérée sera en valeur absolue  $\pi\omega \cdot 2x$ . Si l'on compte les  $x$  posi-

tifs, à partir du niveau MN vers le bas, dans la branche AA', de manière qu'à l'origine du mouvement l'on ait  $x = -h$ , la force accélératrice sera positive lorsque  $x$  sera négatif et inversement ; on devra donc, pour mettre en évidence son signe réel, l'affecter du signe —. Alors, toute la masse  $\frac{\Pi}{g} \omega L$  étant animée de la même accélération  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , on aura pour l'équation du mouvement,

$$- \Pi \omega \cdot 2x = \frac{\Pi}{g} \omega L \frac{d^2x}{dt^2},$$

ou bien, en supprimant le facteur commun  $\Pi \omega$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{2g}{L} x,$$

dont l'intégrale, particularisée pour exprimer qu'à l'époque  $t = 0$  la vitesse est nulle et  $x = -h$ , est :

$$x = -h \cos \sqrt{\frac{2g}{L}} t.$$

C'est bien l'équation d'un mouvement oscillatoire pendulaire dont la période, ou le temps qui s'écoule entre les instants où le niveau parti de A revient à sa position primitive, est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{2L}{g}};$$

cette période dépend de L et nullement de la dénivellation primitive  $2h$ .

Un résultat analogue s'obtiendrait si le tube CD (fig. 109), qui

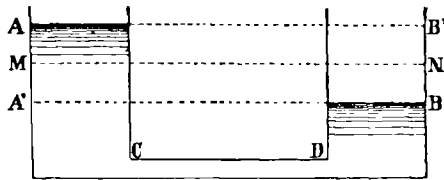


Fig. 109.

met en communication les deux tubes verticaux, était d'un diamètre différent de ceux ci. La durée de l'oscillation serait seule modifiée.

Si nous appelons alors  $\Omega$  l'aire de la section horizontale de chacun des bassins verticaux,  $H$  la hauteur du niveau d'équilibre  $MN$  au-dessus du tube  $CD$ ,  $L$  et  $\omega$  la longueur et la section transversale de ce tube,  $V$  la vitesse à un instant quelconque dans les bassins verticaux,  $u$  la vitesse au même instant dans le tube horizontal, nous aurons  $u = \frac{\Omega}{\omega} V$ .

Appliquons le théorème des forces vives à un déplacement infiniment petit  $dx$  du niveau dans les deux bassins, pendant lequel la force motrice égale alors à  $\Pi\Omega \cdot 2x$  a produit un travail  $\Pi\Omega \cdot 2x dx$ , auquel correspond un accroissement de force vive égal, d'une part, à  $\frac{\Pi}{g} 2\Omega H \cdot V dV$  et d'autre part à  $\frac{\Pi}{g} \omega u du$ . Remarquons d'ailleurs que si  $x$  et  $dx$  sont de même signe,  $V$  et  $dV$  sont de signes contraires, ou inversement. Nous écrivons donc l'équation :

$$- \Pi\Omega 2x dx = \frac{\Pi}{g} \Omega \cdot 2H V dV + \frac{\Pi}{g} \omega L u du.$$

Mettons pour  $u$  et  $du$  leurs valeurs en  $V$  et  $dV$ , il viendra :

$$\frac{1}{g} \left( H + \frac{L \Omega}{2 \omega} \right) V dV + x dx = 0.$$

D'où, en intégrant et remarquant que  $V = 0$  pour  $x = h$  :

$$\left( H + \frac{L \Omega}{2 \omega} \right) \frac{V^2}{2g} = \frac{h^2 - x^2}{2}.$$

La même équation, différenciée par rapport à  $t$ , donne, puisque  $V = \frac{dx}{dt}$  :

$$\frac{1}{g} \left( H + \frac{L \Omega}{2 \omega} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} = -x ;$$

en posant pour abrégir :

$$\lambda = H + \frac{L \Omega}{2 \omega},$$

elle devient :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{\lambda} x,$$

identique à celle que nous avons trouvée plus haut, sauf que la longueur  $\frac{L}{2}$  est remplacée par  $\lambda$ . La durée de l'oscillation totale sera

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g} + \frac{L}{2g} \frac{\Omega}{\omega}}$$

Cela suppose toujours que l'on néglige les frottements et aussi que les vitesses de tous les points, dans les bassins AA' et BB' sont, à une époque donnée, égales entre elles.

Bien que cette hypothèse soit assez éloignée de la réalité, elle donne cependant des résultats d'une approximation suffisante.

**233. Colonnes liquides oscillantes pour le remplissage ou la vidange des sas des écluses.** — L'emploi de colonnes liquides oscillantes, analogues à celles qui viennent d'être étudiées, a été proposée pour économiser l'eau consommée dans les écluses de navigation pour le passage des bateaux. Si les deux bassins verticaux, AA', BB' de la figure précédente représentent deux sas d'écluse accolés ou bien un sas et un bassin d'épargne de même section horizontale, le mouvement alternatif fera passer l'eau du sas dans le bassin ou inversement, et il suffira d'arrêter ce mouvement après la première demi-oscillation pour économiser entièrement toute l'eau des éclusées. Mais cela supposerait que les frottements sont négligeables et que la force vive de l'eau qui descend est utilisée tout entière pour remplir le bassin où le niveau s'élève. Il n'en est pas ainsi et on peut se rendre compte facilement que les pertes de force vive susceptibles d'être évaluées ne sont pas négligeables, sans compter celles dont l'évaluation est impossible<sup>1</sup>.

Les pertes de charge se composent d'abord de celle qui est due à l'entrée de l'eau dans le conduit CD, égale, d'après ce qui a été dit plus haut (n° 44), à  $\frac{1}{2} \frac{u^2}{g}$ ; puis de celle qui provient de l'épanouissement dans le second bassin de la veine liquide sortant de CD, égale à  $\frac{u^2}{2g}$ ; et enfin du frottement dans ce conduit CD. Si l'on appelle  $\chi$  son périmètre mouillé et  $b_1$  le coefficient relatif à la nature de ses parois, ce frottement sera exprimé par  $C \frac{\chi}{\omega} b_1 u^2$  et la perte de charge totale, si on la désigne par  $\zeta$ , sera ainsi :

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{u^2}{2g} + L \frac{\chi}{\omega} b_1 u^2 = u^2 \left( \frac{3}{4g} + L \frac{\chi}{\omega} b_1 \right),$$

<sup>1</sup>. Cette question a été traitée d'abord par M. de Lagrené, dans son *Cours de navigation intérieure*, tome III, pages 135 et suivantes; puis par M. Flamant, dans les *Annales des ponts et chaussées* (1881, 1<sup>er</sup> semestre, page 81).

ou bien, en exprimant  $u$  en fonction de  $V$  et appelant  $k$ , pour abrégé, le coefficient constant :

$$k = \frac{\Omega^2}{\omega^2} \left( \frac{3}{2} + 2Lg \frac{\zeta}{\omega} b_1 \right).$$

$$\zeta = \frac{V^2}{2g} \frac{\Omega^2}{\omega^2} \left( \frac{3}{2} + 2Lg \frac{\zeta}{\omega} b_1 \right) = k \frac{V^2}{2g}.$$

Cette perte de charge correspondra donc à un travail négatif  $\Pi\Omega\zeta dx$ , pour un déplacement  $dx$  de la surface libre de section  $\Omega$ , et si nous ajoutons ce terme à l'équation du mouvement écrite dans le numéro précédent, elle deviendra :

$$- \Pi 2x dx - \Pi\Omega\zeta dx = \frac{\Pi}{g} \Omega \cdot 2HV dV + \frac{\Pi}{g} \omega L u du.$$

ou bien, en divisant par  $\Pi\Omega$  et mettant pour  $\zeta$  sa valeur ci-dessus :

$$\frac{1}{2} \left( H + \frac{L}{2} \frac{\Omega}{\omega} \right) V dV + x dx + k \frac{V^2}{2g} dx = 0,$$

ou encore, eu égard à la signification de ce que nous avons appelé  $\lambda$  :

$$\lambda \frac{V dV}{g} + x dx + k \frac{V^2}{2g} dx = 0.$$

Si l'on fait  $y = \frac{V^2}{2g}$ , cette équation prend la forme simple :

$$\lambda \frac{dy}{dx} + x + ky = 0;$$

et son intégrale générale, en appelant  $C$  une constante, est :

$$y = \frac{\lambda}{k^2} - \frac{x}{k} + C e^{-\frac{k}{\lambda} x}.$$

Et si l'on détermine la constante de manière que pour  $x = -h$  la vitesse  $V$  soit nulle, ou  $y = 0$ , on trouvera, en définitive :

$$k \frac{V^2}{2g} = \frac{\lambda}{k} - x - \left( \frac{\lambda}{k} + h \right) e^{-\frac{k}{\lambda}(x+h)}.$$

On pourrait, en remplaçant  $V$  par  $\frac{dx}{dt}$ , trouver la loi du mouvement, ou exprimer  $x$  en fonction du temps, mais cela ne présente qu'un médiocre intérêt. Ce qui importe davantage, c'est de savoir de combien les résistances passives que l'on a évaluées diminueront



l'amplitude de la première oscillation. Or, à la fin de cette première oscillation, la vitesse  $V$  s'annule, il faut donc, pour trouver la hauteur à laquelle s'abaissera le niveau A, ou s'élèvera le niveau B par rapport au niveau d'équilibre, chercher la valeur de  $x$  pour laquelle  $V$  s'annule, ou bien résoudre l'équation :

$$\frac{\lambda}{k} - x - \left( \frac{\lambda}{k} + h \right) e^{-\frac{h}{\lambda}(x+h)} = 0,$$

qui peut s'écrire :

$$\lambda + kh = (\lambda - kx) e^{\frac{h}{\lambda}(x+h)}$$

En appliquant cette équation à un exemple donné par M. de Lagrené et pour lequel on avait :

$$\begin{aligned} \Omega &= 181^{\text{m}}, 22 & , & \quad L = 100^{\text{m}}, 00 & , & \quad H = 3^{\text{m}}, 30 \\ \omega &= 6^{\text{m}}, 89 & , & \quad \chi = 10^{\text{m}}, 71 & , & \quad h = 1^{\text{m}}, 20 \end{aligned}$$

j'ai trouvé pour  $x'$  la valeur  $x' = 0^{\text{m}}, 76$ , soit  $h - x' = 0,44$ . L'amplitude de l'oscillation serait donc diminuée de  $0^{\text{m}}, 44$  au moins, car bien des causes de perte de force vive restent, qui n'ont pas été comprises dans l'évaluation précédente. On devrait donc compter sur une réduction d'environ deux cinquièmes, et l'on n'économiserait, en réalité, que les trois cinquièmes du volume de l'éclusée au lieu de la totalité.

En faisant varier la longueur  $L$  de l'aqueduc de communication, l'aire  $\omega$  de sa section transversale et son périmètre mouillé  $\chi$ , l'on reconnaît facilement que les pertes de force vive seront d'autant moindres, et par suite l'économie réalisée d'autant plus grande, que la longueur  $L$  sera plus grande, que la section  $\omega$  sera plus grande et que le périmètre mouillé  $\chi$  sera plus petit. Les aqueducs à oscillations doivent donc être autant que possible longs et de section transversale circulaire très grande. Il y a, d'autre part, utilité évidente à en évaser les extrémités de manière à diminuer les pertes de charge à l'entrée, et il est préférable de n'avoir qu'un seul aqueduc plutôt que deux ou plusieurs présentant ensemble la même section transversale.

**234. Appareils de M. de Caligny.** — C'est sur des principes analogues que sont établis les appareils proposés par M. de Caligny pour le remplissage et la vidange des sas de navigation et qui ont été expérimentés principalement à l'écluse de l'Aubois, sur le canal latéral à la Loire. Ces appareils ont pour but, en vue d'éco-

nomiser l'eau : 1<sup>o</sup> de faire remonter dans le bief d'amont une partie des eaux du sas qui se vide ; 2<sup>o</sup> de faire entrer, dans le sas qui se remplit, une certaine quantité d'eau provenant du bief d'aval. Je ne puis ici que mentionner très sommairement ces appareils et renvoyer au second volume de l'*Hydraulique* de M. de Caligny, pour le détail des très nombreuses expériences auxquelles ils ont donné lieu, les diverses dispositions proposées par l'auteur, etc.

Voici en quoi ils consistent :

Soit (fig 110) AA'BB' le sas de l'écluse, AA' le niveau du bief d'amont, BB' celui du bief d'aval. Un aqueduc dit d'aspiration CDE, le plus long possible, vient déboucher dans le sas, généralement dans l'enclave des portes d'aval, en C. A son autre extrémité, en D et en E. l'aqueduc présente à sa partie supérieure deux orifices circulaires sur le pourtour desquels s'appuient deux tubes verticaux FF' et GG'. Le premier FF', dit tube d'amont, est placé dans un réservoir communiquant librement avec le bief d'amont et son extrémité supérieure F' est de quelques centimètres seulement au-dessus du niveau de ce bief. L'autre tube GG', dit tube d'aval, est de même dans un réservoir communiquant librement avec le bief d'aval au moyen d'un fossé le plus large possible, et son extrémité supérieure G' s'élève beaucoup au-dessus de celle F' du premier.

Supposons que, le sas étant plein jusqu'au niveau AA', il s'agisse de le vider. On soulève le tube GG'. l'eau sort par l'orifice E dans le bief inférieur, et la colonne liquide contenue dans l'aqueduc d'aspiration CDE prend une vitesse croissante. Dès que cette vitesse est devenue assez grande, on laisse retomber le tube GG'. L'eau continue son mouvement en vertu de la vitesse acquise et s'élève dans

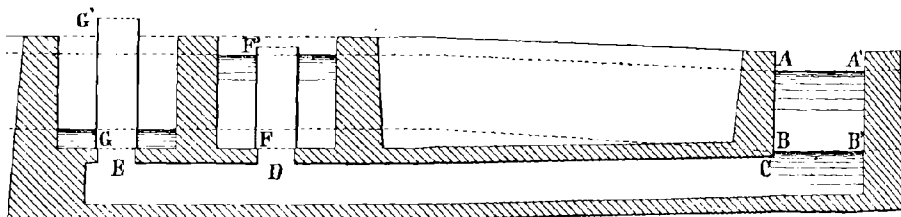


Fig. 110

les deux tubes verticaux GG' FF' ; elle dépasse le niveau F' de ce dernier et se déverse dans le bief supérieur. La vitesse dans l'aqueduc diminue progressivement et finirait par s'annuler, mais on recommence l'opération en soulevant une seconde fois le tube GG' ;

la vitesse augmente de nouveau et atteint encore une grandeur suffisante pour que, ce tube étant refermé, le niveau s'élève encore dans les deux tubes au-dessus du niveau F', ce qui correspond encore au déversement dans le bief d'amont d'une certaine quantité d'eau provenant du sas. Et ainsi de suite. Le volume d'eau rejeté dans le bief d'amont va en diminuant à chaque oscillation, et l'on arrête l'opération dès qu'elle ne donne plus un résultat suffisant ; on achève alors la vidange du sas en maintenant le tube GG' levé jusqu'à la fin.

Pour opérer le remplissage du sas, on doit faire manœuvrer alternativement les deux tubes. Le niveau dans le sas étant en BB', on lève le tube d'amont FF', l'eau d'amont passe par l'ouverture D et se rend dans le sas en faisant acquérir à la colonne liquide contenue dans l'aqueduc DC une vitesse croissante. Dès que cette vitesse est devenue assez grande, on laisse retomber le tube FF' et on ouvre le tube GG'. Le mouvement de l'eau se continuant dans l'aqueduc DC en vertu de la vitesse acquise, il tend à se produire, en arrière, dans la partie DE, un vide et une aspiration qui appelle l'eau du bief inférieur par l'orifice E. Lorsque le mouvement s'est arrêté, on abaisse le tube GG' et on relève le tube FF', c'est-à-dire que l'on recommence l'opération qui a pour effet, comme on voit, d'entraîner par l'ouverture E, dans l'aqueduc EDC et par suite dans le sas, un certain volume d'eau provenant du bief d'aval.

D'après des expériences très précises faites par M. Vallès, inspecteur général des ponts et chaussées, et dont il a été rendu compte à l'Académie des sciences le 18 janvier 1869, le rendement de cet appareil aurait été de 0,412 pendant le remplissage et de 0,386 pendant la vidange, soit en totalité de 0,798. Cela veut dire que si l'appareil n'avait pas existé, le remplissage de l'écluse aurait exigé un volume V pris au bief d'amont, volume que la vidange du sas aurait ensuite déversé dans le bief d'aval. Avec l'appareil, le remplissage de l'écluse a été fait au moyen de 0,412 V pris au bief d'aval et par conséquent de 0,588 V provenant du bief d'amont. Puis, la vidange du volume V a renvoyé dans le bief d'amont 0,386 V et a laissé écouler dans le bief d'aval 0,614 V. Le bief d'amont n'a donc fourni, en définitive, que  $(0,588 - 0,386) V = 0,202 V$ , et le bief d'aval n'a reçu de même que  $(0,614 - 0,412) V = 0,202 V$ . La dépense d'eau se trouve donc réduite au cinquième environ de ce qu'elle aurait été sans l'appareil.

Les manœuvres des tubes peuvent être rendues automatiques, on peut même n'avoir qu'un seul tube mobile, etc. L'étude analytique

des oscillations dont il vient d'être parlé conduirait à des équations extrêmement compliquées, desquelles il serait sans doute difficile de tirer des conclusions pratiques intéressantes. La question a, au contraire, été traitée expérimentalement de la manière la plus complète et on peut la considérer comme très suffisamment élucidée pour les applications que l'on voudrait faire des appareils dont il s'agit. Il convient d'ajouter que, moyennant l'adoption d'un diamètre suffisant pour l'aqueduc et les tubes, la durée de la manœuvre peut être réduite de manière à dépasser très peu celle que l'on aurait à faire par les procédés ordinaires.

## § 6

### MARÉES

**235. Marées de la mer** <sup>1</sup>. — C'est Newton qui, le premier, attribua le phénomène des marées à l'attraction luni-solaire et essaya d'en donner une explication. Laplace reprit la question et montra d'abord que, sous l'influence de forces qui reprennent périodiquement les mêmes valeurs, le mouvement des molécules liquides et celui du niveau doivent être périodiques et d'une période égale à celle des forces. Toutefois la théorie de Laplace était encore incomplète et ne rendait pas suffisamment compte des faits observés. Plusieurs tentatives ont été faites pour la perfectionner.

M. Hatt, ingénieur hydrographe, a remarqué que les forces attractives des astres qui agissent en un point de la terre ont surtout pour effet de modifier la direction de la verticale en ce point et c'est cette modification, bien plus que celle de la valeur même de la gravité qui a pour conséquence la production de la marée. Les forces dont il s'agit sont : les unes constantes ou lentement variables, les autres périodiques à période diurne ou à période semi-diurne. Dès lors, l'expression de la hauteur  $y$  du niveau de la mer au dessus du niveau d'équilibre en un point donné doit comprendre trois termes : un constant ou lentement variable et les deux autres périodiques, de mêmes périodes que les forces. A l'aide d'hypothèses et de

1. Tout ce paragraphe est extrait presque textuellement du *Cours de travaux maritimes* professé à l'École nationale des ponts et chaussées par M. le baron Quinette de Rochemont, inspecteur général, et publié (lithographié) en 1896.

raisonnements dont je me borne à faire connaître le résultat, M. Hatt établit la formule suivante qui donne cette dénivellation  $y$  sous l'action d'un astre dont  $\delta$  est la distance polaire,  $H$  l'angle horaire et  $\Delta$  la distance au centre de la terre :

$$y = A_0 + \frac{A_1}{\Delta^3} \sin \delta \cos \delta \cos (H - \alpha_1) + \frac{A_2}{\Delta^3} \sin^2 \delta \cos 2 (H - \alpha_2)$$

$A_0$  est une quantité très petite variant lentement en fonction de la déclinaison de l'astre ;  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes.

Si un autre astre agit en même temps sur le même point, il y produira une nouvelle dénivellation  $y'$  dont l'expression sera la même, avec des lettres accentuées applicables au nouvel astre, et qui s'ajoutera algébriquement à la précédente.

En y remplaçant les lettres par les valeurs numériques qui conviennent à la lune et au soleil, la formule s'applique à un point situé à la surface des mers ou sur une côte baignée par l'Océan. Elle ne représente qu'imparfaitement le phénomène de la marée en un point où celle-ci n'arrive qu'après avoir parcouru, sous forme d'onde dérivée, un espace peu profond.

Sur les côtes de France, l'onde diurne est faible, elle est beaucoup plus sensible dans le bassin de l'Océan Pacifique ; dans le golfe du Tonkin, elle subsiste seule, l'onde semi-diurne étant probablement masquée par une interférence. En général l'onde diurne ne se manifeste que par les différences plus ou moins grandes que présentent les heures et les hauteurs de deux pleines mers consécutives. Quelquefois, l'inégalité affecte le niveau de la basse mer plus que celui de la haute mer ; c'est ainsi qu'à Singapore, il y a des différences atteignant 1 m. 83 entre les niveaux de deux basses mers consécutives.

Sur les côtes d'Europe, à cause de la faiblesse de l'onde diurne, il suffit d'étudier l'onde semi-diurne dont la marée dépend presque exclusivement. Alors la formule donnant la dénivellation en un point se réduira à

$$y = \frac{A_2}{\Delta^3} \sin^2 \delta \cos 2 (H - \alpha_2) + \frac{A'_2}{\Delta'^3} \sin^2 \delta' \cos 2 (H' - \alpha'_2)$$

ou bien, en désignant simplement par  $A$  et  $A'$  les coefficients lentement variables  $\frac{A_2}{\Delta^3} \sin^2 \delta$  et  $\frac{A'_2}{\Delta'^3} \sin^2 \delta'$  :

$$y = A \cos 2 (H - \alpha) + A' \cos 2 (H' - \alpha')$$

ou bien encore en appelant  $\varphi$  la différence d'ascension droite de la lune et du soleil,

$$y = A \cos 2 (H - \alpha) + A' \cos 2 (H + \varphi - \alpha').$$

On peut réunir les deux termes en un seul, correspondant à l'onde lunaire, en posant :

$$B = \sqrt{A^2 + A'^2 + 2 AA' \cos 2 (\varphi + \alpha - \alpha')}$$

ce qui permet de mettre l'expression de  $y$  sous la forme :

$$y = B \cos 2 (H - \beta)$$

où  $\beta$  est une constante.

L'amplitude  $B$  de l'onde  $a$  pour maximum la somme  $A + A'$  et pour minimum la différence  $A - A'$  des deux ondes lunaire et solaire. Cette dernière étant à peu près le tiers de l'onde lunaire, l'amplitude des marées de vives eaux moyennes est à celle des mortes eaux moyennes dans le rapport de  $3 + 1$  à  $3 - 1$ , ou de 2 à 1.

On a prétendu que l'onde-marée prenait naissance dans le vaste bassin de l'Océan Pacifique d'où elle se propageait par dérivation par l'Océan Atlantique pour venir sur les côtes d'Europe. On a même cité, à l'appui de cette hypothèse la concordance entre la célérité de la propagation de la marée entre le Cap de Bonne-Espérance et Ouessant, et qui est de 176 mètres par seconde et celle que l'on déduirait de la formule de Lagrange :

$$(53) \quad V = \sqrt{gH}$$

en y mettant pour  $H$  la profondeur moyenne de l'Océan, soit 3.160 mètres environ <sup>1</sup>. Mais cette explication ne tient pas compte de la production de la marée dans l'Océan Atlantique, dont le bassin, pour être moins grand que celui du Pacifique, n'est cependant pas négligeable. Elle est de plus contredite par ce fait que, sur les côtes du Brésil, la marée se propage du Nord au Sud.

Par l'effet de l'attraction des astres, les eaux sont jetées alternativement sur les rives Est et Ouest de l'Océan ; ce mouvement peut ne donner lieu, au milieu du bassin, qu'à une faible oscillation verticale, mais il en est autrement sur les côtes où le mouvement horizontal est arrêté et où les eaux doivent s'accumuler et peuvent s'élever à une hauteur considérable.

<sup>1</sup>. *Etudes pratiques sur les marées fluviales et notamment sur le Mascaret*, par Comoy, Paris 1881.

Le mouvement ondulatoire une fois établi dans un bassin, les ondes successives s'y propagent en suivant approximativement les lois qui ont été données plus haut au sujet des ondes périodiques. On vient de voir que dans l'Atlantique, la célérité et la profondeur moyenne s'accordaient assez bien avec la formule de Lagrange ; il en est de même dans la Manche, où cette célérité moyenne, d'Ouesant à Boulogne n'est que de 21 mètres par seconde, ce qui correspond à une profondeur  $H = 45$  mètres peu différente de la moyenne donnée par les sondages de la Manche <sup>1</sup>. On doit considérer ces vérifications de la théorie sinon comme absolument fortuites, au moins comme dues principalement à ce que les bassins dans lesquels on les observe présentent des formes à peu près régulières. Nous verrons qu'elles ne se rencontrent pas lorsque la marée se propage dans des espaces de dimensions variables.

**236. Relation entre la hauteur de la marée et la profondeur de la mer.** — Nous avons vu plus haut que l'énergie d'une onde d'oscillation, produite dans une eau de profondeur indéfinie, avait pour expression.

$$\rho g \pi h^2 V^2.$$

Si donc, par suite d'une cause quelconque, l'une des deux quantités  $V$  ou  $h$ , la célérité de la propagation ou la hauteur des vagues, vient à varier, l'autre variera en raison inverse, si la cause dont il s'agit n'est pas accompagnée d'une perte sensible d'énergie. Pour l'onde-marée, on peut dire que la cause qui la produit (l'action combinée de la lune et du soleil) étant la même, l'énergie communiquée à l'onde est indépendante de la célérité de sa propagation ; ou bien encore que si cette onde, par suite de circonstances locales, arrive à se propager plus ou moins vite, sa hauteur diminuera ou augmentera en raison inverse. De la relation :

$$Vh = \text{const.}$$

qui exprime la conservation de son énergie, l'on déduit, en mettant pour  $V$  sa valeur en fonction de la profondeur  $H$  déduite de la formule de Lagrange :

$$(54) \quad h \sqrt{H} = \text{const.}$$

Cette relation a été donnée par M. Comoy (ouvrage cité p. 103). La hauteur de la marée serait donc, en chaque lieu, et toutes choses

1. Même ouvrage.

égales, inversement proportionnelle à la racine carrée de la profondeur de la mer. Les chiffres qui sont déduits de la formule (54), dans laquelle on donne à la constante la valeur 20 environ, s'accordent assez bien, d'après M. Comoy, avec les hauteurs des marées observées dans les mers de faible profondeur et avec les rares données que l'on possède sur celles du milieu des mers profondes.

Si l'on considère une molécule superficielle, depuis l'instant de l'étalement de jusant, au moment où elle se trouve à mi-marée et sur le point d'être atteinte par l'onde, jusqu'à l'instant de l'étalement de flot, au moment où elle se retrouve à mi-marée à son niveau primitif, elle s'est avancée, dans le sens de la propagation, d'une certaine quantité que nous désignerons par  $l$ ; sa vitesse moyenne, qui est celle du courant de flot, étant appelée  $U$ , le temps qui s'est écoulé entre les instants considérés est  $\frac{l}{U}$ . D'autre part, la demi-longueur d'onde étant  $L$  et  $V$  la célérité de la propagation, la surface de l'onde, pour parcourir la longueur  $L + l$  aura mis un temps exprimé par  $\frac{L + l}{V}$ . Egalant ces deux expressions, il vient :

$$l = \frac{LU}{V - U},$$

ou bien, en mettant pour  $U$  sa valeur tirée de la formule (8), page 417 :

$$(55) \quad l = \frac{Lh}{H - h}.$$

M. Comoy a donné les valeurs de  $U$  et de  $l$ , d'après les formules (8) et (55), pour diverses profondeurs  $H$  et il a trouvé un accord satisfaisant avec les observations.

**237. Courants de marée.** — La propagation de l'onde-marée entraîne un certain déplacement horizontal du liquide auquel il faut attribuer les courants alternatifs de marée. Si l'on appelle  $U$  la vitesse moyenne de ce courant et  $h$  la hauteur de l'onde supposée petite par rapport à la profondeur  $H$ , on pourra écrire entre ces quantités la relation approximative (8) de la page 417, qui n'exprime rien autre chose que la conservation du volume de la masse liquide, c'est-à-dire :

$$\frac{U}{V} = \frac{h}{H}$$

ou bien, en mettant pour la célérité  $V$  de propagation de l'onde sa valeur (53) qui vient d'être rappelée :



$$U = h \sqrt{\frac{g}{H}} ;$$

formule qui ne sera d'accord avec la réalité qu'autant que celle (53) le sera elle-même.

Dans l'hypothèse d'une courbe de marée régulière, au large, en mer libre, et dans les parages où l'onde-marée peut se propager sans aucun obstacle, la vitesse  $U$  du courant est la même, à tout instant, sur toute la profondeur. Elle atteint son maximum à la pleine mer et à la basse mer et elle s'annule en changeant de sens à la mi-marée.

Ce fait a été souvent vérifié. Parmi les nombreuses vérifications qui en ont été publiées je rappellerai, d'après M. Bourdelles<sup>1</sup>, aux remarquables travaux duquel je ferai de très nombreux emprunts, celle de l'amiral Edward Belcher qui a constaté, au large du Cap Vert, que jusqu'à 925 mètres de profondeur, le courant avait la même vitesse qu'à la surface.

Le courant de marée s'appelle *courant de flot* lorsqu'il marche dans le sens de la propagation de l'onde et *courant de jusant* en cas contraire. Peu sensible dans les mers profondes, où  $H$  est très grand, il augmente d'intensité à mesure que la profondeur diminue. Les états de la marée qui correspondent au moment où les courants de flot et de jusant cessent et sont bientôt après remplacés par les courants de sens contraires s'appellent *étales de flot* et *étales de jusant*. D'après ce qui vient d'être dit, en mer libre, les étales de flot et de jusant sont à la mi-marée. Mais il est relativement rare qu'il en soit ainsi : l'influence du fond et des rives introduit des perturbations plus ou moins grandes, et en général, les étales se produisent soit avant, soit après la mi-marée, et toujours à peu près de la même quantité au même lieu.

Une autre cause de perturbation est due à l'interférence de l'onde principale avec une autre onde secondaire produite soit par la réflexion de la première sur une côte accore, soit, plus souvent, par la propagation même de la première dans un espace qui lui

1. M. Bourdelles a publié dans les *Annales des ponts et chaussées* :  
 1<sup>o</sup> Etude du régime de la marée dans le canal de Suez, 1898, 3<sup>e</sup> trimestre ;  
 2<sup>o</sup> Distribution des vitesses suivant la verticale dans les courants de marée, 1898, 4<sup>e</sup> trimestre ;  
 3<sup>o</sup> Etude du régime de la marée dans la Manche, 1899, 3<sup>e</sup> trimestre.  
 4<sup>o</sup> Etude sur le régime de la marée dans les estuaires et dans les fleuves, 1900, 2<sup>e</sup> trimestre.

Ces quatre magistrales études contiennent un très grand nombre de faits et d'idées nouvelles où j'ai largement puisé.

fait décrire un circuit fermé. Ce phénomène de l'interférence de deux ondes opposées, ayant même amplitude horizontale, même célérité de propagation et même période, mais des amplitudes verticales différentes se traite facilement par le calcul ; les formules en ont été données par M. Ribière, dans une note à la suite d'un des mémoires cités de M. Bourdelles<sup>1</sup>. Si l'on appelle  $2L$  la longueur de chacune de ces ondes,  $2T$  leur période,  $V = \frac{L}{T}$  leur célérité de propagation,  $h_1$  et  $h_2$  leur demi-amplitude verticale au-dessus ou au-dessous du niveau moyen, et si l'on suppose qu'à l'époque  $t = 0$ , les deux profils des ondes passent par l'origine des coordonnées prise sur le niveau moyen, avec l'axe des  $x$  suivant la ligne de ce niveau, et qu'ils correspondent à la conjonction des deux ondes qui seraient ainsi à la même phase, les équations des profils de ces deux ondes seront :

$$y_1 = h_1 \sin \pi \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right), \quad y_2 = h_2 \sin \pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} \right);$$

et l'équation du profil de l'onde résultante sera, en appelant  $y$  son ordonnée

$$y = y_1 + y_2 = h_1 \sin \pi \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) + h_2 \sin \pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} \right),$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$y = K \sin \frac{\pi}{L} (x - \varphi),$$

en prenant

$$K^2 = h_1^2 + h_2^2 + 2h_1h_2 \cos \frac{2\pi t}{T},$$

et

$$\operatorname{tang} \frac{\pi \varphi}{L} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \operatorname{tang} \frac{\pi t}{T}.$$

Il résulte de cette formule qu'en chaque point l'amplitude maximum de l'oscillation a une valeur spéciale, dépendant de la position de ce point et comprise entre  $h_1 - h_2$  et  $h_1 + h_2$ . L'amplitude maximum  $h_1 + h_2$  se retrouve à des intervalles égaux à  $L$  et l'amplitude minimum  $h_1 - h_2$  au milieu de ces intervalles. En un point donné, la durée d'une oscillation complète est toujours égale à  $2T$ .

1. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1899, 3<sup>e</sup> trimestre, page 70.

De même, à un moment donné, la longueur totale de l'ondulation est toujours égale à  $2L$ ; sa célérité moyenne de propagation est donc égale à celle de chacune des ondes composantes, mais cette célérité varie avec le temps; on a en effet :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{L}{T}}{\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \sin^2 \frac{\pi t}{T} + \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \cos^2 \frac{\pi t}{T}},$$

qui est minimum pour  $t = 0$  et  $t = T$ ,

et maximum pour  $t = \frac{T}{2}$  et  $t = \frac{3T}{2}$ .

Quant aux points de rencontre des ondes composantes et aux positions des lignes de flux et de reflux, on les déduit de l'égalité :

$$y_1 = y_2 \quad \text{ou bien} \quad h_1 \sin \pi \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) = h_2 \sin \pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} \right),$$

qui donne

$$\text{tang} \pi \frac{x}{L} = \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \text{tang} \pi \frac{t}{T};$$

ce qui prouve que les lignes sont espacées d'une demi-longueur d'onde.

La célérité de leur déplacement est fournie par l'expression

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{L}{T}}{\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \cos^2 \frac{\pi t}{T} + \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} \sin^2 \frac{\pi t}{T}},$$

qui est minimum pour  $t = \frac{T}{2}$ ,  $t = \frac{3T}{2}$ , etc...

et maximum pour  $t = 0$ ,  $t = T$ ,  $t = 2T$ , etc.

Dans les cas où les deux ondes ont la même amplitude verticale  $h_1 = h_2$ , le mouvement résultant est celui qui a été étudié plus haut sous le nom de clapotis (pages 464 à 467). Les lois spéciales indiquées à ce paragraphe et qui résultent aussi des équations précédentes dans lesquelles on fait  $h_2 = h_1$ , sont énoncées par M. Ribière sous la forme suivante, plus en rapport avec l'étude spéciale des courants de marée que nous poursuivons ici :

1° Au moment des conjonctions, les vitesses s'accablent sur

toute l'étendue du canal, et l'amplitude de l'onde résultante est double de celle des ondes composantes ;

2<sup>o</sup> Au moment des oppositions, les vitesses atteignent leur maximum sur toute l'étendue du canal où règne le niveau moyen. Il ne se produit aucune dénivellation, pendant toute la marée, sur les points correspondant aux sommets des ondes en opposition, et en ces points la vitesse est plus grande que partout ailleurs ;

3<sup>o</sup> La position des lignes de flux et de reflux reste invariable durant toute la marée ; elle coïncide avec celle des sommets des ondes en conjonction.

Ces résultats sont confirmés par l'observation de ce qui se passe dans la mer d'Irlande, où deux houles de sens contraire et sensiblement de même altitude, se superposent.

La ligne de conjonction est en face de l'île de Man. En ce point, les deux ondes se superposent et produisent une marée dont l'amplitude est plus grande que partout ailleurs, en même temps qu'une étale générale. Il existe alors simultanément, dans le canal d'Irlande, deux courants de flot ayant des directions opposées et s'avancant des extrémités du canal vers le point où ils se rencontrent en se détruisant et où la mer monte. De même, au jusant, deux courants opposés partent de ce même point vers les extrémités du canal. Aux environs de ce point, les courants de flot et de jusant se renversent au moment de la pleine et de la basse mer et c'est à la mi-marée qu'ils atteignent leur plus grande vitesse.

La ligne des oppositions se trouve à Coustown et à 50 milles au sud de Dublin ; en ces points, le mouvement vertical de la marée est nul, tandis que les courants ont leur maximum de vitesse.

Lorsque les deux ondes sont inégales, comme dans la Manche, le phénomène est beaucoup plus compliqué. Cependant on constate encore une ligne de conjonction de haute et de basse mer entre les abords de Cayeux et ceux d'Hastings, et une ligne des oppositions entre les abords de Cherbourg et ceux de Swanage. Sur ces deux lignes, le renversement des courants s'opère à mi-marée et tous les phénomènes indiqués ci-dessus se produisent conformément à la théorie. Mais ailleurs, des perturbations dues à l'irrégularité des profondeurs et des largeurs rendent les faits beaucoup plus complexes. La description détaillée de toutes les observations a été donnée par M. Bourdelles qui a expliqué la plupart de ces perturbations à la loi simple définie par les équations précédentes.

En général, ainsi qu'on l'a dit, les courants de marée se meuvent en quelque sorte tout d'une pièce avec une même vitesse sur toute la hauteur, et le renversement de la vitesse s'y produirait au même

moment en tous les points. Cependant cette dernière loi ne se vérifie pas d'une façon absolue ; elle est au contraire en contradiction avec la plupart des observations qui s'accordent pour établir que le renversement de la vitesse commence toujours par la partie inférieure. L'avance de ce renversement paraît d'autant plus marquée que le point auquel on l'observe est plus éloigné des conditions de la mer libre et se trouve plus rapproché des côtes. Ainsi que l'a fait remarquer M. Bourdelles, qui a réuni un grand nombre de faits concordants, la cause de cette avance paraît devoir être attribuée au frottement, par suite duquel la vitesse au fond s'annule plus tôt qu'à la surface.

C'est surtout dans les golfes, comme celui de Gascogne et surtout comme la baie de Fundy, par exemple, que cet effet est le plus marqué. Comme on le dira plus loin, il se rencontre aussi, pour les mêmes motifs, dans les estuaires des grands fleuves ; mais là, le phénomène se complique de celui de l'écoulement des eaux douces.

Cette avance du renversement du courant, par suite du voisinage des côtes ou du fond, a pour conséquence la destruction de l'égalité des vitesses sur une même verticale. Il arrive en effet par exemple, à chaque marée, que le courant renversant plus tôt en bas qu'en haut, il y a un certain laps de temps pendant lequel on rencontre, sur une même verticale, deux courants superposés en sens contraire : le renversement du courant, commençant au fond, s'élève et atteint successivement les diverses couches jusqu'au moment où il se fait sentir à la surface. Les vitesses des diverses couches sont à chaque instant à des phases différentes de leur évolution, et ce n'est qu'à l'approche de leur maximum, quand l'avance n'a pas été trop grande, qu'elles reprennent à peu près la même valeur sur toute la hauteur.

Un phénomène du même ordre se produit également dans le sens horizontal par suite du voisinage des côtes. De même que le courant se renverse à des époques différentes sur une même verticale, il se renverse aussi à des époques différentes sur une même ligne horizontale perpendiculaire à la direction de la propagation de l'onde. Il en résulte des contre-courants qui se manifestent le long des côtes et qui sont tout à fait analogues à ceux qui se produisent sur le fond de la mer. Ces contre-courants, modifiés d'ailleurs par les sinuosités du littoral et par les circonstances locales, peuvent affecter les formes et les vitesses les plus variées.

Mais le voisinage des côtes a surtout pour effet de modifier, dans des proportions considérables, les conditions de propagation de

l'onde-marée. Dans un golfe dont les dimensions vont en se rétrécissant progressivement, l'énergie constante de l'onde, rencontrant des masses d'eau de plus en plus faibles, tend à leur imprimer des oscillations de plus en plus marquées. D'autre part, le frottement des eaux sur elles-mêmes et sur les côtes et le fond augmente avec les vitesses et tend à absorber une partie rapidement croissante de cette énergie ; et de ces deux causes qui agissent en sens contraire peuvent résulter, suivant les circonstances locales, les effets les plus différents.

C'est en général cependant dans le sens de l'augmentation de l'amplitude de l'oscillation que la compensation s'opère et on trouve, dans les golfes, des ondes dont la hauteur et la célérité de propagation sont beaucoup plus grandes que celles qui résulteraient de l'application de la formule de Lagrange, applicable à la propagation dans un espace de dimensions constantes. Ainsi, par exemple, M. Bourdelles rappelle que dans la baie de Fundy, la célérité de la propagation de l'onde atteint 81 mètres par seconde, ce qui, d'après la formule, correspondrait à une profondeur de 657 mètres, tandis que la profondeur réelle moyenne est bien inférieure à une centaine de mètres. Dans le golfe de Gascogne, où le rétrécissement est moins apparent, mais où il est en réalité au moins aussi marqué, par suite de l'existence d'un plateau sous-marin en avant des côtes, on constate une célérité de 100 mètres correspondant à une profondeur théorique de 1.000 mètres, alors que la profondeur moyenne effective est inférieure à 50 mètres.

On ne saurait donc trop se mettre en garde contre la tendance à laquelle on peut être exposé d'appliquer des formules à des phénomènes pour lesquels elles ne sont pas faites et dont les conditions ne sont pas identiquement celles qui ont servi de base aux hypothèses sur lesquelles elles ont été établies. Les mouvements ondulatoires définis et étudiés au commencement de ce chapitre sont des mouvements *possibles*, peut-être probables dans certaines circonstances toutes spéciales, mais *nullement nécessaires* : les mouvements réels peuvent en différer et en diffèrent toujours d'une façon plus ou moins notable. Les ondes périodiques, et en particulier celle de la marée, ne peuvent avoir quelque chance de se propager suivant les conditions de la théorie que dans un espace indéfini, ou tout au moins dans un canal dont les dimensions transversales seraient rigoureusement constantes. Il est probable qu'au milieu de l'Océan, l'onde-marée se produit dans des conditions qui se rapprochent beaucoup de celles de la théorie ; il en serait sans doute de même dans la mer d'Irlande et dans la Manche si le phé-

nomène ne s'y compliquait pas de la présence d'une deuxième onde qui marche en sens inverse en se superposant à la principale. Le caractère périodique de l'onde se trouve néanmoins très nettement établi au large.

Il n'en est plus de même lorsqu'on se rapproche des côtes. Sous l'influence d'actions perturbatrices diverses, et en particulier, à cause de la diminution progressive de la profondeur, l'onde marée tend à perdre la forme d'une onde périodique et à se rapprocher de celle d'une onde de translation. Les courants qui, en mer libre, renversent à la mi-marée, tendent à ne changer de sens qu'au moment de la haute ou de la basse mer, et le phénomène se complique, comme on l'a dit, des irrégularités et des sinuosités du littoral.

Avant d'aborder l'étude des marées fluviales ou du mouvement de la marée dans les estuaires, je vais examiner sommairement deux questions d'ordre plutôt théorique qui peuvent fournir, pour cette étude, des enseignements utiles.

**238. Variation du niveau de l'eau dans un bassin communiquant avec la mer.** — Soit proposé de trouver l'expression, en fonction du temps, de la variation du niveau de l'eau dans un bassin communiquant, par un orifice de dimensions restreintes, avec la mer ou avec un port où la marée se fait sentir. Le problème, posé dans toute sa généralité, serait bien difficile ; mais lorsque l'on peut admettre, pour la loi de variation du niveau dans la mer, une expression parabolique, il est susceptible d'une solution relativement simple qui a été donnée par M. de Saint-Germain, dans les comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 22 octobre 1894, et que je reproduis ici.

Supposons que l'on veuille se rendre compte des conditions de remplissage d'un bassin, dont la section horizontale présente une superficie constante  $\Omega$ , et qui communique avec la mer ou le port, par des orifices dont la superficie totale soit désignée par  $\omega$ . Admettons encore que ces orifices soient placés assez bas pour être constamment noyés et que, lorsqu'on les ouvrira, le niveau dans le port soit au moins aussi élevé que dans le bassin.

Rapportons les altitudes au niveau moyen de la mer et soient  $u$  et  $z$  les cotes positives ou négatives, au-dessus de ce niveau, des surfaces de l'eau dans le port et dans le bassin à une époque quelconque  $t$ . Si nous supposons la communication établie et  $u > z$ , le volume  $\Omega dz$  qui entre dans le bassin pendant le temps  $dt$  est, suivant la formule de l'écoulement par les orifices, en désignant par  $\mu$  le coefficient de débit relatif à l'orifice considéré, égal à

$\mu \approx \sqrt{2g(u-x)}$ .  $dt$ . Egalons ces deux expressions et posons, pour abréger,  $\frac{\mu\omega}{\Omega} \sqrt{2g} = 2m$ , nous obtenons l'équation :

$$(56) \quad \frac{dz}{dt} = 2m \sqrt{u-x}.$$

La quantité  $m$  est une donnée de la question. La hauteur  $u$  est aussi une fonction donnée du temps ; cette fonction est généralement compliquée, mais on peut, avec une approximation très suffisante, y substituer les fonctions indiquées ci-après et qui consistent à substituer, à la courbe de la marée, quatre arcs de parabole à axe vertical ayant leurs sommets aux points extrêmes. Il est facile de s'assurer, par une construction graphique, que ces arcs diffèrent en général assez peu de la courbe réelle. Comptons le temps à partir de la basse mer et soient  $2\theta$  et  $2\theta'$  les durées du flux et du reflux, de telle sorte que  $2\theta + 2\theta' = 12$  h. 25 m. 15 s. = 44.715 secondes, ou la durée totale d'une marée. Supposons que l'on ait :

$$\begin{array}{lll} \text{de } t = 0 & \text{à } t = \theta, & u = at^2 - a\theta^2 ; \\ \text{de } t = \theta & \text{à } t = 2\theta, & u = a\theta^2 - a(2\theta - t)^2 ; \\ \text{de } t = 2\theta & \text{à } t = 2\theta + \theta', & u = a\theta'^2 - a'(t - 2\theta)^2 ; \\ \text{de } t = 2\theta + \theta' & \text{à } t = 2\theta + 2\theta', & u = a'(2\theta^2 + 2\theta' - t)^2 - a'^2. \end{array}$$

Les coefficients  $a$  et  $a'$  sont déterminés par la hauteur de la marée. Si celle-ci est  $2h$  de manière que la haute mer et la basse mer diffèrent de  $h$  du niveau moyen, on aura  $a\theta^2 = a'\theta'^2 = h$ , ce qui permet de calculer  $a$  et  $a'$ .

Considérons la première période, entre la basse mer et le niveau moyen ( $0 < t < \theta$ ), l'équation (56) en l'élevant au carré et en y mettant pour  $u$  la fonction correspondante de  $t$ , prendra la forme :

$$(57) \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 4m^2z - 4m^2at^2 + 4m^2a\theta^2 = 0.$$

Si maintenant, au lieu des constantes  $a$  et  $m$ , nous en prenons deux autres,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , liées à celles-ci par les relations :

$$\beta_1 - \alpha_1 = m ; \quad \alpha_1 \beta_1 = a ;$$

c'est à-dire si nous posons :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + 4a} - m), \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + 4a} + m)$$

$\alpha_1$  et  $\beta_1$  étant ainsi que  $a$  et  $m$  des quantités connues, l'intégrale de l'équation (57) est :



$$(58) \left[ \sqrt{at^2 - a^2t^2 - z} - \alpha_1 t \right]^{\alpha_1} \left[ \sqrt{at^2 - a^2t^2 - z} + \beta_1 t \right]^{\beta_1} = A_1$$

ou

$$\left( \sqrt{u - z} - \alpha_1 t \right)^{\alpha_1} \left( \sqrt{u - z} + \beta_1 t \right)^{\beta_1} = A_1,$$

$A_1$  étant une constante à déterminer par les valeurs initiales de  $t$  et de  $z$ , c'est-à-dire par les valeurs de ces quantités au moment de l'ouverture des orifices.

On vérifie en effet facilement, en différentiant l'équation (58) par rapport à  $t$ , que l'on trouve :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(u-z)}{dt} + (\beta_1 - \alpha_1) \sqrt{u-z} - \alpha_1 \beta_1 t = 0;$$

ce qui, eu égard à la valeur de  $u = at^2 - a^2t^2$  et à celles de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ , revient à :

$$\frac{dz}{dt} = 2m\sqrt{u-z}$$

c'est-à-dire à l'équation (56).

Cette équation (58) entre  $t$ ,  $z$  et des quantités connues, résout entièrement le problème, en ce qu'elle permet de calculer  $z$  pour une valeur quelconque de  $t$  ou inversement. Elle exprime donc la loi de variation du niveau de l'eau dans le bassin pendant la première période,  $t < \theta$ .

Par des procédés identiques, on en trouve d'autres, absolument analogues, pour les trois autres périodes. Je ne les donne pas ici, on les trouvera dans le mémoire cité de M. de Saint-Germain.

Ces équations sont malheureusement d'une forme compliquée qui ne permet guère d'en proposer l'emploi dans la pratique. M. de Saint-Germain remarque il est vrai que les calculs auxquels elles donnent lieu se trouveront en général simplifiés par le fait que les nombres  $a$  et  $a'$  seront ordinairement petits par rapport à  $m^2$  et que, par suite, les  $\alpha$  seront petits par rapport aux  $\beta$  ; mais malgré cela, ces calculs seront toujours laborieux.

L'équation générale permet cependant une remarque intéressante, relative au cas où, au moment de la basse-mer, le bassin serait entièrement vide, c'est-à-dire au même niveau que cette basse mer ; et où les orifices de communication seraient ouverts. On a alors, pour  $t = 0$ ,  $z = u = -a^2t^2$ , et par suite  $A_1 = 0$ . Il en résulte, puisque  $\sqrt{u-z}$ ,  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont positifs, que l'on doit avoir :

$$\sqrt{u-z} - \alpha_1 t = 0;$$

car le second facteur entrant dans l'expression de  $A_1$  ne pourrait

s'annuler que pour une valeur négative de  $t$  ne répondant pas à la question. On en déduit :

$$u - z = \alpha_1^2 t,$$

c'est-à-dire que la différence de niveau, nulle à la basse mer, croît proportionnellement au carré du temps. A mi-marée, ou pour  $t = \theta$ , lorsque  $u = 0$ , on a :

$$z = -\alpha_1^2 \theta^2.$$

Le rapport de la dénivellation à l'amplitude  $h = a\theta^2$  de la demi-marée est  $\frac{\alpha_1^2}{a}$ . Cette dénivellation ne disparaît pas pendant la seconde période à la fin de laquelle elle reste exprimée par le produit de  $\theta^2$  et d'un coefficient positif de forme extrêmement compliquée. L'égalité des niveaux ne peut donc s'établir que pendant la marée descendante.

S'il s'agit au contraire d'un bassin préalablement rempli à un certain niveau et qui se vide dans une mer à niveau variable, l'équation différentielle (58) doit s'écrire :

$$-\frac{dz}{dt} = 2m\sqrt{z - u}.$$

Elle admet des solutions semblables aux précédentes, mais tout aussi compliquées. Si le bassin primitivement au niveau de la haute mer est mis en communication avec celle-ci au moment où la marée commence à baisser, on trouve encore que pendant la première période de ce mouvement (qui correspond à la troisième du problème précédent) la différence de niveau, d'abord nulle à la haute mer, croît proportionnellement au carré du temps et que lorsque la mer arrive au niveau moyen, ou pour  $u = 0$ , elle s'exprime, comme dans le cas précédent par :

$$z = \alpha_1'^2 \theta'^2,$$

$\alpha_1'$  étant un coefficient formé avec  $a'$  comme  $\alpha_1$  l'est avec  $a$ .

**239. Propagation de la marée dans un canal communiquant avec un réservoir indéfini.** — Considérons un canal horizontal et de section transversale constante communiquant, par une de ses extrémités avec la mer, et par l'autre, avec un réservoir assez vaste pour être regardé comme indéfini c'est-à-dire tel que le niveau y demeure constant. Soit A (fig. 111) le niveau moyen de la mer supposé le même que celui BC du réservoir indéfini et A<sub>2</sub>, A<sub>4</sub> les niveaux extrêmes atteints par la marée.

Admettons qu'il se soit établi, à un certain instant, un état d'équi-

libre de toute la masse liquide, le niveau de la mer étant en A, de telle sorte que la surface des eaux soit horizontale dans toute la longueur du canal. Supposons qu'ensuite le niveau s'élève jusqu'en A<sub>1</sub>. S'il restait immobile pendant assez longtemps en ce point, il

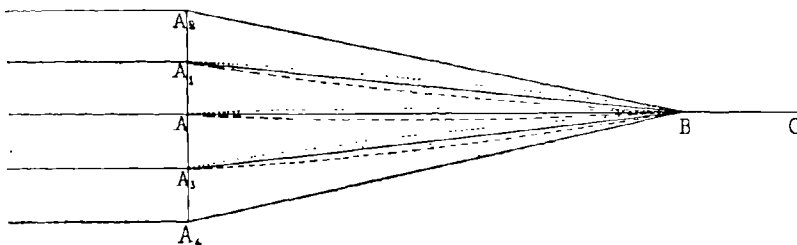


Fig. 111.

s'établirait, dans le canal, entre A<sub>1</sub> et B, un mouvement permanent défini par les équations des n<sup>os</sup> 131 et 132, pages 258 à 262 ci-dessus. Le niveau affecterait, entre ces deux points, la forme d'une courbe tangente en A<sub>1</sub> à l'horizontale et convexe vers le haut.

Mais les choses ne se passent pas ainsi. Le niveau est constamment variable et le régime permanent, correspondant à une hauteur quelconque telle que A<sub>1</sub>, n'a jamais le temps de s'établir. L'état d'équilibre lui-même, que nous avons admis lorsque le niveau était en A, à la hauteur de BC, ne pourrait se réaliser que si le niveau restait immobile en A pendant un temps suffisant.

Pendant la période ascendante, lorsque le niveau monte de A vers A<sub>2</sub>, il arrive à une hauteur quelconque A<sub>1</sub> avant que les eaux entrant par l'embouchure n'aient rempli complètement le triangle AA<sub>1</sub>B, il monte relativement plus vite en A qu'en un autre point intermédiaire entre A et B et la courbe de niveau prend une forme concave vers le haut, analogue à celle qui est figurée en ponctué long.

Au contraire, lorsque le niveau descend de A<sub>2</sub> vers A, comme il est constamment variable, sans arrêt, il quitte une position quelconque avant que l'état permanent correspondant se soit établi dans le canal, et la courbe de niveau sera alors convexe vers le haut, ou analogue à celle qui est figurée en ponctué rond. La convexité de cette courbe sera même supérieure à celle qui correspondrait au régime permanent.

Les mêmes effets se produiront dans la partie de l'oscillation qui se fait au-dessous du niveau d'équilibre, entre A et A<sub>4</sub>. Lorsque le niveau arrive en A<sub>3</sub> en descendant, la surface des eaux dans le canal

est convexe vers le haut, et elle est au contraire concave lorsque le niveau passe en  $A_3$ , en remontant. Les courbes en ponctué long représentent donc les niveaux pendant le flot, et celles en ponctué rond, les niveaux pendant le jusant.

Dans ces conditions, les vitesses en chaque point du canal, s'annuleront en se renversant au moment de la mi-marée, quand le niveau passe par le niveau moyen; elles seront maximum, soit au flot, soit au jusant, au moment où la dénivellation est la plus grande.

Le phénomène est, en réalité, beaucoup moins simple que ne l'indique la description précédente. L'onde-marée ne se transmet pas instantanément dans toute la longueur du canal, de sorte que les hautes eaux, les étales et les basses eaux ne sont pas simultanées dans toute son étendue, mais successives à raison du retard de la propagation de l'onde. La célérité de cette propagation, elle-même, est différente de ce qu'elle serait dans un canal à profondeur constante. Si l'on suppose le niveau de la mer maintenu immobile pendant un temps suffisant à une hauteur  $A_1$  et le régime permanent correspondant établi, avec une certaine vitesse moyenne d'écoulement  $U_1$ , une ondulation prenant naissance en  $A_1$ , se propagera vers B avec une célérité supérieure de  $U_1$ , environ à celle qui correspondrait à la profondeur. D'autre part l'onde-marée, en pénétrant dans le canal, possède une certaine énergie qui, sauf les pertes par le frottement, doit rester constante. Comme la profondeur diminue progressivement de  $A_2$  vers B, cette constance de l'énergie doit être obtenue par une augmentation des vitesses en chaque point, laquelle a encore pour conséquence une augmentation de la célérité. Pour ce motif, la célérité de propagation de l'onde et les vitesses de l'eau, qui à l'origine du canal, vers le point A se régleront d'après ce qui a été dit plus haut, pour les courants de marée, eu égard aux conditions et aux circonstances locales et pour la profondeur correspondant au niveau  $A_2$ , seront dans les profils suivants, plus grandes qu'elles ne le seraient dans un canal à surface libre horizontale et de même profondeur que ce profil; et la différence ira en croissant à mesure que l'on s'approchera du point B.

Ces faits ont été observés dans le canal de Suez entre la mer Rouge et les lacs Amers; ils ont été mis en lumière par une remarquable étude de M. Bourdelles (déjà citée) où le lecteur trouvera les explications détaillées qui n'ont pu trouver place ici.

**240. Courants d'écoulement dus à la dénivellation produite par la marée.** — Il semble évident, d'ailleurs, que les dénivellations produites par l'oscillation du niveau de la mer,

résultant du phénomène de la marée, doivent avoir pour conséquence, comme toute dénivellation produite par une cause quelconque, un écoulement dans le sens de la pente. Le phénomène peut, dans le cas des marées, être masqué par l'existence de vitesses en sens contraire, dues à d'autres causes, et en particulier au mouvement oscillatoire lui-même. Mais alors ces vitesses préexistantes se trouveront accélérées ou retardées (si elles ne sont pas annulées ou renversées) par celles que produirait la dénivellation.

Ainsi, dans l'exemple considéré au numéro précédent, pendant que le niveau de la mer monte de A à A<sub>1</sub>, il existe, dans le canal, une pente dirigée vers le point B qui donnerait lieu, à elle seule, à un écoulement et à des vitesses dans le sens AB. On peut dire, d'ailleurs, à l'appui de cette thèse, que pendant cette période d'ascension, il doit passer, par la section d'origine du canal un volume d'eau correspondant au triangle AA<sub>1</sub>B, et dont l'introduction ne peut avoir lieu sans vitesse. L'inverse aura lieu pendant le jusant. Dans la section d'origine A, les vitesses provenant de cet écoulement s'ajouteront, algébriquement, aux vitesses existant dans la même section par suite des courants de marée et dont la répartition et la loi de variation, comme nous l'avons dit, peuvent être très différentes suivant les circonstances locales.

Des phénomènes du même ordre interviennent lorsqu'une mer, où la marée se fait sentir, communique par un goulet étroit et de faible longueur, avec un bassin de grandes dimensions. Le goulet fonctionne alors, dans une certaine mesure, comme l'orifice inférieur, de section  $\omega$ , dont j'ai parlé au n<sup>o</sup> 238. Les vitesses y sont alternatives suivant les hauteurs relatives des niveaux de la mer et du bassin. L'assimilation ne peut être complète puisque la section d'écoulement du goulet varie avec le niveau, tandis que dans le problème traité au n<sup>o</sup> 238, la section  $\omega$  était supposée constante. Mais on peut en retenir, cependant, que les variations du niveau dans le bassin seront de moindre amplitude que dans la mer puisque ce n'est que dans la période descendante (après la pleine mer) et dans la période ascendante (après la basse mer) qu'il pourra y avoir égalité de niveau entre la mer et le bassin.

Ces circonstances sont réalisées dans le Bahiret de Bou-Grara, au sud de la Tunisie qui d'après M. Bourdelles, présente une superficie de 44.000 hectares et qui communique avec la mer par le canal d'Adjim. Au large de ce canal, les courants renversent et s'annulent aux basses et aux pleines mers, leur vitesse atteint son maximum à la mi-marée. Dans l'intérieur du Bahiret, la marée se produit environ trois heures après le moment où on l'observe au large. La

célérité de propagation est donc très faible et notablement inférieure à celle qui correspondrait à la profondeur moyenne du canal. Au contraire les vitesses maximum atteignent deux et trois nœuds (1 m. 00 et 1 m. 50 par seconde) et paraissent presque uniquement dues au remplissage et à la vidange du bassin.

**241. Marées fluviales.** — Les phénomènes qui viennent d'être décrits et qui sont déjà si complexes le deviennent encore bien plus dans la propagation de la marée à l'intérieur de l'estuaire d'un fleuve.

Le débit des eaux douces, et les vitesses auxquelles il donne lieu sont de nouvelles circonstances qui viennent encore modifier les conditions de cette propagation et qui sont extrêmement variables d'un fleuve à l'autre. Il est donc bien difficile de résumer en généralités la question, pourtant si importante, des marées fluviales. Elle a été étudiée par un grand nombre de savants et d'ingénieurs, mais ce que l'on peut trouver surtout d'intéressant dans ces études, ce sont les faits nombreux et divers qui sont rapprochés par les divers auteurs, et les généralisations qui en résultent. Quant aux déductions que l'on peut en tirer, elles ne sont, presque toujours, applicables qu'à un petit nombre de fleuves et présentent rarement un caractère de véritable généralité. Parmi ces études, je citerai surtout celle de M. Bourdelles qui fait peut-être exception, et dans laquelle l'auteur a pu dégager des lois, sinon générales, du moins d'une application fréquente.

La marée fluviale a plutôt le caractère d'une onde de translation que d'une onde d'oscillation : elle a en effet pour cause l'afflux progressif d'une certaine quantité d'eau de la mer qui pénètre dans le fleuve et produit à l'embouchure une intumescence qui se propage ensuite en remontant, à la manière de celles que nous avons étudiées au n° 215. Entre le moment où la tête de flot arrive à l'embouchure jusqu'au moment où y passe le sommet de l'onde, l'ascension continue de la marée, dit M. Bazin <sup>1</sup>, peut être assimilée à la formation successive d'ondes de translation qui se propagent les unes après les autres en remontant le fleuve.

Quant à la célérité de cette propagation, elle dépend surtout des conditions locales. D'une part, comme il a été dit plus haut, le rétrécissement progressif de l'estuaire peut avoir pour conséquence d'accroître cette célérité, d'autre part, elle peut être diminuée par la vitesse du courant des eaux douces et surtout par les obstacles

1. Recherches expérimentales sur la propagation des ondes.

divers qui absorbent l'énergie de l'onde. De très nombreux exemples sont rapportés par M. Bourdelles, je ne lui en emprunterai que deux : dans le fleuve Saint-Laurent, entre l'embouchure proprement dite (les Mingan) et l'île Bic, sur une longueur de 240 milles, la célérité moyenne dépasse 200 mètres par seconde, ce qui, d'après la formule de Lagrange, correspondrait à une profondeur de 4.000 mètres, alors que cette profondeur n'est guère, en moyenne, de plus de 150 mètres, correspondant à une célérité de moins de 40 mètres. Au contraire, dans la rivière Saguenay, affluent du Saint-Laurent en amont de l'île Bic, sur une longueur de 71 milles en amont du confluent, l'onde se propage avec une célérité de 19 mètres à la seconde, laquelle correspond à une profondeur théorique de 36 mètres, bien inférieure à la profondeur moyenne effective. Ainsi, dans le premier cas l'onde va beaucoup plus vite, et dans le second beaucoup moins vite que ne l'indiquerait la formule de Lagrange. On peut citer encore ce fait que dans la Gironde et sans doute aussi dans d'autres fleuves, la célérité de la propagation de l'onde est plus grande en morte eau qu'en vive eau, ce qui est en contradiction avec les indications théoriques, mais que M. Bourdelles explique avec vraisemblance par l'influence du frottement

On doit donc admettre que les conditions de la propagation de l'onde-marée à l'intérieur des fleuves ne sont pas susceptibles, dans l'état actuel de nos connaissances théoriques, d'être déterminées par le calcul. C'est à l'observation seule qu'il faut recourir pour s'en rendre compte.

Des divergences analogues, plus marquées encore peut-être, se rencontrent dans les vitesses des courants qui accompagnent cette propagation. Bien des éléments interviennent en effet dans la production de ces vitesses. Ce sont d'abord les conditions qui viennent d'être indiquées et qui influent sur la célérité de la propagation de l'onde, savoir, le rétrécissement progressif de l'estuaire et les obstacles qui s'opposent à cette propagation. Mais en outre il faut faire entrer en ligne de compte les vitesses correspondant au débit des eaux douces et celles qui peuvent être dues à des dénivellations analogues à celles dont il a été parlé plus haut au n° 239, il faut aussi tenir compte, dans une certaine mesure, de la répartition des vitesses dans la mer, à l'embouchure du fleuve. Il semblerait, *a priori*, que, toutes choses égales, les vitesses que l'on observera dans un estuaire devront être différentes suivant que, par exemple, les courants au large de l'embouchure renverseront au moment de la pleine mer et de la basse mer, ou qu'ils renverseront à mi-marée. Or, il résulte de nombreux exemples recueillis par M. Bourdelles

qu'il n'en est pas ainsi. Quelle que soit la forme de l'onde d'oscillation au large, elle se transforme aux abords de la côte au point que, sur le littoral, elle peut se confondre, pratiquement, avec une onde de translation. Dès lors, et notamment à l'embouchure des fleuves, les courants renversent aux basses et aux hautes mers en atteignant le maximum de leur vitesse aux environs de la mi-marée.

Ce que l'on observe partout aussi, c'est que le renversement des courants de flot et de jusant commence toujours au voisinage du fond et des rives et qu'il en est de même des vitesses maximum. La région où se produit l'étale, d'abord, puis le maximum de la vitesse, s'élève graduellement et se rapproche de la surface où elle se maintient pendant des durées variables. Il peut même arriver, comme sur le fleuve Congo, que le courant ne change jamais de sens à la surface. C'est seulement au fond et dans le voisinage, sur une hauteur variable avec le débit des eaux douces, que l'on observe un renversement du courant pendant une période plus ou moins courte.

L'amplitude de l'onde-marée, comme sa célérité, peut, suivant que l'influence de l'énergie ou celle des frottements est prédominante, aller en croissant et en décroissant à mesure que l'on s'avance à l'intérieur de l'estuaire. Dans le Saint-Laurent, la hauteur de la marée, qui n'est que de 1 m. 83 à l'embouchure, atteint 5 m. 35 à Québec, à 300 milles en amont. Dans la baie de Fundy, la hauteur de la marée est au cap Sable de 2 m. 00 à 2 m. 60, tandis qu'au fond de la baie, dans le Bassin des Mines, elle atteint de 12 m. 20 à 14 m. 60. Quoi qu'il en soit, en remontant suffisamment, on trouve toujours une région où l'amplitude de la marée s'efface graduellement jusqu'à finir par disparaître. Pour beaucoup de fleuves, cette région commence à l'embouchure même.

Le niveau moyen semble se maintenir à peu près sans variation sensible dans toute la région où l'amplitude de l'oscillation reste elle-même constante ou va en croissant. Il en résulte que la marée basse serait, à l'amont, à un niveau inférieur à celui d'aval. Toutefois les vérifications de ce fait semblent faire défaut, d'après M. Bourdelles. D'autre part, il semble aussi que la limite jusqu'à laquelle l'amplitude croît ou reste constante dépend aussi de cette amplitude et n'est pas la même en vive eau qu'en morte eau.

Plus loin, le niveau moyen se relève à mesure qu'on s'éloigne de l'embouchure, et il en est de même, en général, du lieu géométrique des hautes mers, tant de vive eau que de morte eau. Suivant les variations respectives de l'amplitude et du niveau moyen, on rencontre, dans les divers estuaires, les phénomènes les plus variés et quelquefois d'apparence contradictoire.



**242. Mouvement de l'eau dans un estuaire.** — Si l'étude détaillée de ce mouvement est extrêmement difficile et compliquée, comme on vient de le dire, on peut néanmoins se faire, en suivant la marche indiquée par M. Comoy, une idée de son ensemble. Pour cela, M. Comoy considère, dans le phénomène à étudier, trois périodes : la première s'étend depuis le moment où l'onde commence à s'introduire dans le fleuve jusqu'à celui où la pleine mer arrive à l'embouchure ; la deuxième, entre les instants où se produisent, à l'embouchure, la pleine mer et l'étalement de flot ; la troisième entre ce dernier instant et celui où l'onde disparaît à la limite de la partie maritime du fleuve.

Pendant la première période, les eaux provenant du fleuve viennent remplir l'espace compris entre la tête du flot et l'étalement de jusant, et la position de cette étalement est déterminée par l'importance du débit du fleuve : elle est d'autant plus éloignée de la tête du flot que le débit est plus considérable. En temps de crue, le jusant ne prend fin que longtemps après l'arrivée de la tête du flot et même, dans les crues très fortes, le courant ne se renverse pas et le jusant règne pendant toute la marée. Dans ce cas, il n'entre pas d'eau de mer dans le fleuve et toute l'intumescence de la marée fluviale est produite par l'eau du fleuve dont l'écoulement se trouve simplement ralenti ou arrêté par la surélévation des eaux de la mer. Mais lorsque, plus ordinairement, il se produit un renversement du courant, ou une étalement de jusant, toute la partie comprise entre le point où la vitesse s'annule ainsi, à chaque instant, et l'embouchure du fleuve doit la surélévation de son niveau à l'introduction dans le fleuve d'une certaine quantité d'eau de la mer. Si donc, pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  quelconque, on désigne par  $S$  la section du fleuve à son embouchure,  $v$  la vitesse moyenne de l'eau dans cette section,  $Sv\Delta t$  sera le volume d'eau de mer qui se sera introduit dans le fleuve, et si  $D$  est la distance moyenne, pendant le temps  $\Delta t$ , de l'étalement de jusant à l'embouchure,  $L$  la largeur moyenne du fleuve sur cette longueur  $D$  et  $\Delta h$  l'augmentation moyenne de la hauteur du niveau dans la même portion, on aura l'égalité :

$$Sv\Delta t = DL\Delta h.$$

Pendant la seconde période, comprise entre les instants où se produisent, à l'embouchure, la pleine mer et l'étalement de flot, le niveau baisse à l'embouchure ; le sommet de l'onde se trouve dans le fleuve à une certaine distance de l'embouchure, mais il entre néanmoins encore de l'eau de mer dans le fleuve jusqu'au moment de l'étalement de flot. Si l'on considère, à une époque quelconque de cette période, la position du sommet de l'onde dans le fleuve et si on

appelle  $D$  sa distance à la tête de flot,  $D'$  sa distance à l'embouchure,  $L$  et  $L'$  les largeurs moyennes du fleuve dans les parties correspondantes et  $\Delta h$  et  $\Delta h'$  les variations moyennes du niveau, le volume total compris entre le sommet de l'onde et la tête de flot s'est accru de  $DL\Delta h$ , celui qui se trouve entre l'embouchure et le sommet de l'onde a diminué de  $D'L'\Delta h'$  ; l'augmentation définitive du volume total, différence de ces deux quantités, doit être égale au volume d'eau de mer  $Sv\Delta t$  qui s'est introduit pendant le temps  $\Delta t$ . On a alors la relation :

$$Sv\Delta t + D'L'\Delta h' = DL\Delta h$$

applicable à la seconde période de la marée.

Enfin, la troisième période succède à l'instant où l'étale de flot se produit à l'embouchure, instant pour lequel  $v = 0$ . Dans cette troisième période, l'étale de flot s'avance dans le fleuve. L'onde fluviale se trouve alors entièrement constituée : on peut la diviser en trois parties : 1<sup>o</sup> celle qui est comprise entre la tête du flot et l'étale de jusant, dont l'accroissement de volume se trouve entièrement rempli par l'eau du fleuve ; 2<sup>o</sup> celle qui est comprise entre l'étale de jusant et l'étale de flot, dont le volume reste constant puisqu'il n'y entre ni n'en sort rien ; 3<sup>o</sup> celle qui est comprise entre l'étale de flot et l'embouchure dont la diminution de volume correspond à l'eau qui traverse l'embouchure en rentrant dans la mer. On peut écrire, pour chacune de ces trois parties, des égalités analogues aux précédentes.

**243. Mascaret.** — Il a été rappelé plus haut que, d'après M. Bazin, l'ascension de la marée à l'embouchure d'un fleuve peut être assimilée à la formation successive d'ondes de translation qui se propagent les unes après les autres en remontant. En raison de l'exhaussement progressif du niveau, ces ondes élémentaires s'avancent avec des vitesses de plus en plus grandes, elles tendent donc à se rejoindre et se rejoignent en effet. Leur réunion et leur superposition constitue le phénomène connu sous le nom de mascaret. C'est un ressaut brusque qui se produit, sur certains fleuves, à la tête de flot de l'onde marée fluviale. Il a des hauteurs variables suivant le lieu que l'on considère, suivant les différents fleuves, suivant l'importance de la marée, etc. Sa hauteur, sur les fleuves de France, ne dépasse guère trois mètres ; mais on en a signalé de cinq et six mètres de hauteur sur le Gange et sur le fleuve des Amazones. Il atteint son maximum en un certain point du fleuve et diminue ensuite progressivement en remontant. Il occupe presque toujours la largeur totale et présente, en plan, la forme d'une courbe concave vers l'amont du fleuve ; quelquefois, il prend une direction inclinée sur celle du courant.

Il conserve des formes lisses quand il se propage dans des eaux suffisamment profondes, il porte alors quelquefois le nom caractéristique de *rouleau d'eau*. Lorsque la profondeur devient trop faible, le mascaret déferle. Si, au contraire, la profondeur va en augmentant, il diminue, s'affaïsse et peut même disparaître.

Quand le mascaret a passé dans un lieu, le lit du fleuve se trouve rempli à une certaine hauteur au-dessus du niveau primitif, mais cette hauteur est généralement inférieure à celle du mascaret. Ce dernier caractère rapproche d'une façon étroite le phénomène du mascaret de l'intumescence que nous avons étudiée au n° 213 et qui était formée d'une lame d'une certaine épaisseur précédée d'une tête plus élevée. Nous avons trouvé que la hauteur de cette tête devait être égale à peu près aux  $\frac{3}{2}$  de celle de la lame qui la suit. Or, d'après Comoy (page 180), le mascaret de la Seine s'est élevé à Caudebec, le 19 septembre 1876, à 2<sup>m</sup>, 17 au-dessus des basses eaux du fleuve ; et, après le passage du mascaret, le lit du fleuve s'est trouvé exhaussé de 1 m. 47 seulement. Or, les  $\frac{2}{3}$  de 2 m. 17 sont de 1 m. 45.

Le mascaret est suivi d'ondes plus ou moins élevées, plus ou moins nombreuses suivant les circonstances et qui portent le nom d'*éteules*. Nous avons dit, à la page 432, comment la formule de la propagation des intumescences dans une eau tranquille de profondeur constante pouvait motiver et expliquer ces ondulations secondaires qui suivent la tête de l'onde principale.

Entre la célérité  $V$  de sa propagation, la vitesse  $v$  du courant de flot qui la suit, la profondeur primitive  $H$  des eaux et leur surelévation définitive  $h$ , on a la relation que nous avons établie (pages 416, 421 et 429 en note) et qui exprime simplement la conservation du volume des éléments liquides :

$$\frac{v}{V} = \frac{h}{h + H}$$

Les observations ont montré que cette formule s'accorde avec les faits.

La réunion des ondes successives qui constitue le mascaret ne se produit ni sur tous les fleuves ni à toutes les marées. Elle n'a lieu que dans certaines circonstances qui la rendent possible et qui dépendent de la forme et de la profondeur du lit et particulièrement de son embouchure, de la rapidité de l'élévation de la marée, etc. Elle exige, entre ces divers éléments, des relations qui ne paraissent pas, jusqu'à présent, suffisamment définies pour permettre de

prévoir le phénomène et d'en calculer toutes les conséquences autrement que par des formules empiriques.

**244. Détermination des vitesses dues aux marées fluviales.** — Les marées fluviales, ou plus généralement les courants qui se produisent dans la partie maritime des fleuves, ont été souvent mis à profit pour obtenir une modification du lit, l'enlèvement des hauts fonds, des bancs de sable, qui obstruent les estuaires. Il est utile, pour cela, de pouvoir déterminer les débits et par suite les vitesses moyennes dans diverses sections.

Les vitesses, dans la partie maritime d'un fleuve, varient en chaque point et à chaque instant; elles changent généralement de sens à chaque marée en s'annulant deux fois, aux étales de flot et de jusant, et il semble impossible de déterminer, par des observations directes, la loi de leur variation dans une section transversale donnée. Voici comment M. Lechalas a résolu le problème <sup>1</sup>.

Supposons que l'on ait levé exactement la forme d'un profil en travers en un point où l'on veut étudier la variation, avec le temps, des débits du fleuve, et que l'on ait disposé, en aval de ce point jusqu'à l'embouchure, et en amont jusqu'à la limite au delà de laquelle la marée ne se fait pas sentir, une série d'échelles dont les zéros ont été placés exactement au même niveau. Des observateurs, munis de montres bien réglées, notent les hauteurs d'eau à toutes ces échelles à des époques simultanées, de cinq en cinq minutes par exemple, ou de quart d'heure en quart d'heure, suivant le degré d'exactitude que l'on se propose d'obtenir. On conçoit que si les échelles sont assez rapprochées, si l'on a un plan exact du fleuve indiquant ses largeurs en chaque point et des profils en travers en nombre suffisant, on pourra, après avoir construit le profil longitudinal de la surface libre à chacune des époques d'observation, calculer les variations, pour chaque intervalle de cinq ou de quinze minutes, du volume des eaux entre le point où la marée commence à se faire sentir jusqu'au profil considéré. Le débit fluvial  $Q$  étant connu, en divisant, à chaque instant, l'accroissement de volume  $\Delta V$  correspondant à une de ces périodes par le nombre  $n$  de secondes (300 ou 900) qu'elle comprend, le débit dans le profil d'aval sera  $D = Q - \frac{\Delta V}{n}$ .

Pendant le jusant,  $\Delta V$  est négatif et par suite  $D$  est positif, Quelque temps après l'arrivée de la tête du flot,  $\Delta V$  s'annule, et  $D = Q$ , puis  $\Delta V$  devient positif, s'accroît peu à peu et lorsque  $\frac{\Delta V}{n} = Q$ , on a

1. Dans un rapport en date du 12 avril 1859, à l'appui du projet d'endiguement de la Basse-Loire, cité par M. Partiot.

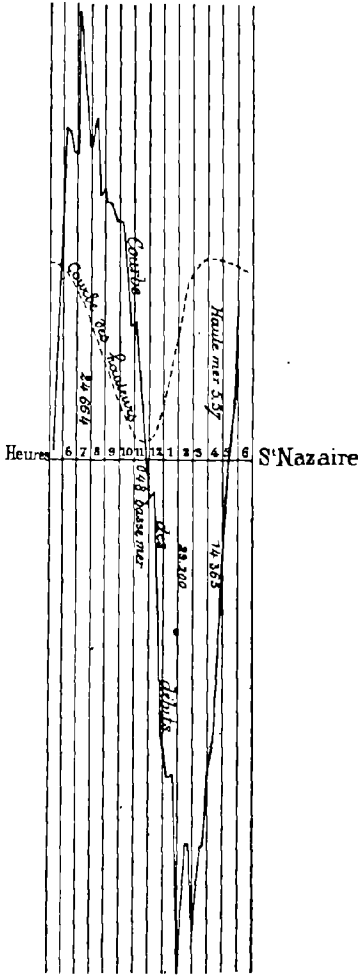
$D = 0$  ; c'est le moment de l'étale de jusant. Ensuite  $\Delta V$  continuant à croître,  $D$  devient négatif, puis s'annule de nouveau au moment de l'étale du flot et ainsi de suite.

Courbes des hauteurs et des débits à St-Nazaire.

On voit que l'on peut ainsi obtenir, au moyen de calculs, laborieux il est vrai, les débits  $D$  positifs ou négatifs, à chaque instant, dans une section déterminée, et par suite les vitesses moyennes correspondantes dans cette même section.

**245. Exemple. Courbes des débits à St-Nazaire.**

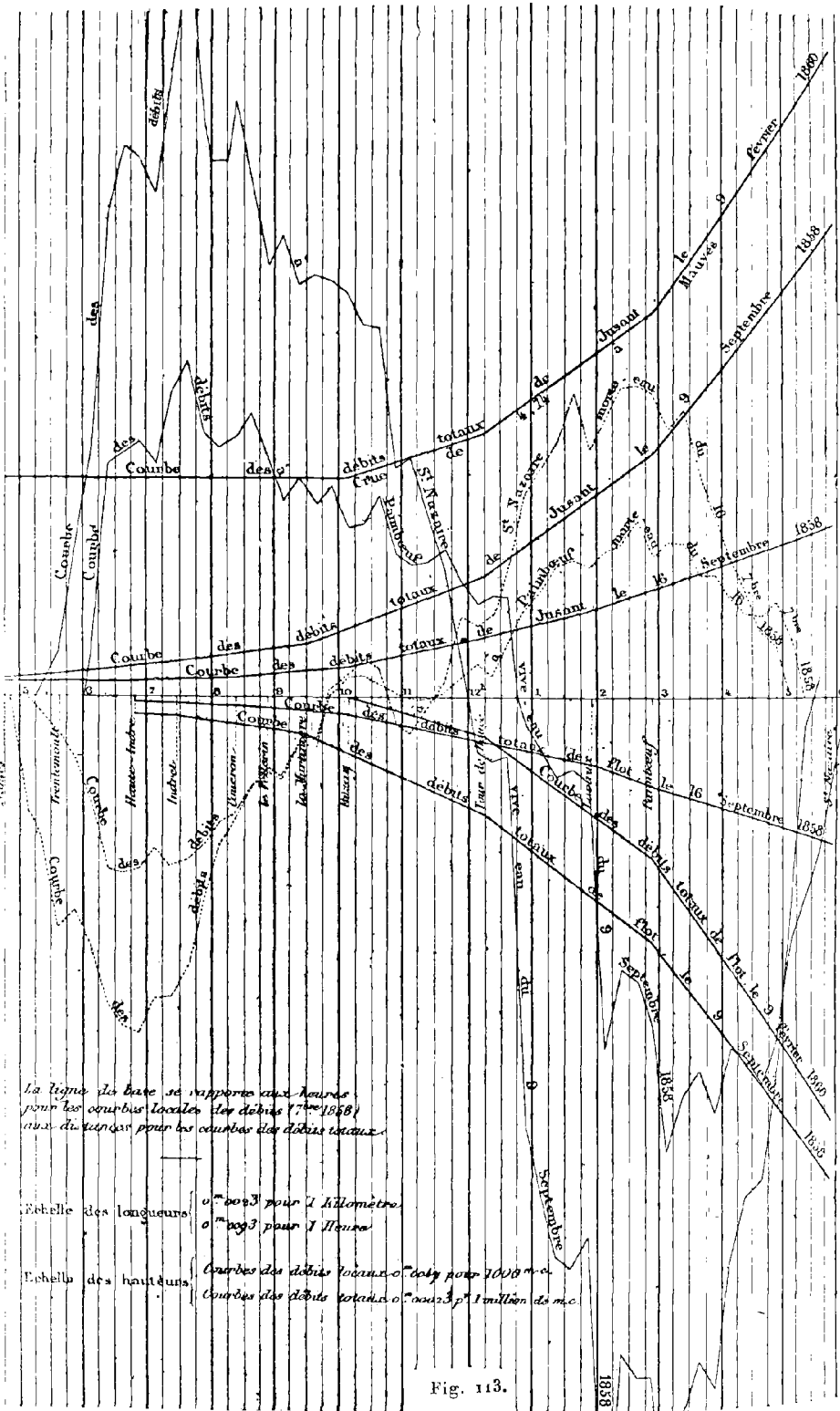
— La courbe ci-contre (fig. 112)<sup>1</sup>, obtenue de cette manière, montre comment ont varié les débits de la Loire, à Saint-Nazaire, le 9 septembre 1858, de cinq heures du matin à six heures du soir, pendant une marée de vive eau. Sur la même figure, on a représenté, aux mêmes heures, les hauteurs du niveau du fleuve au même point. On voit que le débit, d'abord nul un peu après cinq heures du matin, au moment de la plus grande élévation du niveau, a crû rapidement, de manière à atteindre son maximum positif (débit de jusant) un peu après sept heures. Le volume débité atteignait alors 24.664 mètres cubes par seconde. Puis le débit, décroissant un peu moins vite, s'annule de nouveau vers midi, un peu après le moment où la courbe des hauteurs passe par nos



ECHELLES:  
 0,01 --- pour cinq heures.  
 0,01 --- pour 4.000 m.<sup>3</sup>  
 0,025 --- pour 5<sup>m</sup> de hauteur.

Fig. 112.

1. Cette courbe est donnée dans les *Annales des ponts et chaussées*, à l'appui d'un mémoire de M. Lechalas sur l'endiguement de la Basse-Loire, 1865, 1<sup>er</sup> semestre.



minimum <sup>1</sup>. Il devient ensuite négatif, c'est-à-dire que la vitesse se renverse, et c'est le courant de flot qui s'établit jusque vers 5 h. 1/2 du soir, où ce courant s'annule et se renverse de nouveau pour reprendre la direction du jusant. Le maximum du débit de flot a atteint, ce jour là, le chiffre de 29.200 mètres, supérieur au maximum du débit de jusant. On voit, d'autre part, que la courbe des hauteurs présente, sur l'horizontale, une inclinaison plus forte pendant le flot que pendant le jusant : la variation de hauteur étant plus rapide, il est naturel que le débit maximum soit plus élevé. Ce fait ne se produit pas toujours, car la même planche des *Annales des ponts et chaussées*, d'où est extraite la figure précédente, en contient une autre relative au 8 février 1860, où le débit maximum de flot est inférieur au débit maximum de jusant, pendant une grande crue du fleuve.

En temps d'étiage, dans la Loire, le maximum de débit de flot dépassé toujours celui de jusant, à Saint-Nazaire. Dans la morte eau du 16 septembre 1858 qui a suivi la vive eau citée, du 9 septembre 1858, le débit maximum a été, au jusant : 9.930 mc. ; au flot : 10.930 mc.

#### 246. Courbes de débits totaux de flot et de jusant.

— On peut ensuite, lorsque l'on a ainsi mesuré les débits en un certain nombre de points d'un fleuve, calculer le débit total de jusant, ou de flot, pendant une marée : cela revient à mesurer au planimètre ou autrement l'aire de la courbe des débits dont on vient de donner un exemple pour Saint-Nazaire. Si l'on porte alors ces débits en ordonnées sur une ligne dont les abscisses sont les longueurs mesurées le long du fleuve, entre chacun des points où les observations ont eu lieu, on obtiendra les courbes des débits totaux de flot et de jusant depuis le point où la marée se fait sentir jusqu'à l'embouchure. La figure 113 donne un exemple de ces courbes pour la Basse-Loire ; elle est extraite d'un ouvrage de M. Lechalas, *Nantes et la Loire*. Elle montre, entre autres particularités, que le 9 février 1860, jour où se produisait une grande crue du fleuve, le flot s'est arrêté à Buzay, tandis que le 9 septembre 1858 il était remonté à plusieurs kilomètres en amont de Nantes <sup>2</sup>.

L'examen de pareilles courbes est indispensable pour l'étude de l'amélioration des estuaires des fleuves.

#### 247. Mélange de l'eau de mer et de l'eau douce. —

C'est par des considérations et des calculs analogues que l'on peut

1. « La mer commençait à remonter à 11 h. 1/2, dit l'auteur (page 68), mais « le courant du jusant ne cessa qu'à midi. La haute mer a été observée à 4 h. 3/4 ; « la fin du courant du flot n'a eu lieu qu'à 5 h. 1/2. »

2. Le point marqué *Trentemoult* sur la figure 113 correspond à l'extrémité aval du port maritime de Nantes.

se rendre compte de la façon dont se mélangent, dans un fleuve à marées, l'eau de mer et l'eau douce, ou, d'une manière plus générale, les eaux de provenances diverses qu'il reçoit, telles que celles d'un égout qui y seraient jetées. Supposons, avec M. le professeur Unwin<sup>1</sup>, à qui nous empruntons ce qui suit, que l'on ait levé un assez grand nombre de profils en travers, depuis le point où la marée se fait sentir jusqu'à l'embouchure du fleuve, pour pouvoir calculer très exactement les volumes d'eau qui se trouvent compris entre le profil d'origine A en amont et un certain nombre d'autres points, B, C, D... aussi bien au moment des basses eaux (étales de jusant) qu'au moment où l'eau atteint sa hauteur maximum dans

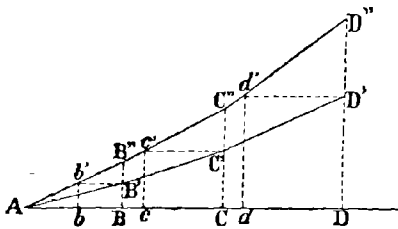


Fig. 114.

chacun des profils. Représentons ces volumes respectivement par  $v_1, v_2, v_3, \dots$  pour les basses eaux, et  $V_1, V_2, V_3, \dots$  pour les hautes eaux. Sur une ligne horizontale ABCD (fig. 114), où les distances entre les profils seront portées comme abscisses, portons, comme ordonnées, ces volumes, nous obtiendrons deux courbes telles que celles qui sont représentées sur la figure. Une ordonnée quelconque DD', par exemple, de la courbe inférieure, représente le volume d'eau qui restait dans le fleuve, au moment de la basse mer, entre les points A et D. A ce moment, les vitesses des molécules dans le profil D étaient nulles ; on peut donc admettre, à titre de première approximation, que l'effet du flot a été de refouler, vers l'amont, toute cette masse d'eau en lui imprimant des vitesses diverses, comme si une vanne, barrant toute la rivière en D, remontait avec le flot. Les différences de vitesse entre la surface et le fond ou les parois, la courbure des rives et les irrégularités du lit donneront au phénomène une bien plus grande complication, et produiront des échanges de liquide de part et d'autre de ce profil, mais l'effet général, considéré dans son ensemble, sera celui qui vient d'être défini. Mais, au moment de l'étales de flot, lorsque le mouvement s'arrêtera, le volume ainsi refoulé étant resté le même, n'occupera plus sur la rivière que la longueur Ad, obtenue en menant par le point D' une horizontale D'd' jusqu'à sa rencontre en d' avec la courbe qui représente les

<sup>1</sup> On the movement of water in a tidal river, with reference to the position of sewer outfalls, par W. Cauthorne Unwin, London, 1883.



volumes en hautes eaux. L'eau qui provient de la partie en aval du profil D ne remontera donc pas au-dessus du point  $d$ ; de même, celle qui provient de l'aval du profil C ne remontera pas au-dessus de  $c$ , sauf les mélanges partiels dus aux actions secondaires que l'on néglige dans cette approximation.

Ce calcul et cette construction négligent aussi le volume d'eau douce amené par le fleuve. Il suffit, pour en tenir compte, d'augmenter les volumes correspondant à l'eau basse  $v_1, v_2, v_3, \dots$  ou les ordonnées  $BB', CC', DD', \dots$  du volume d'eau  $Q$  débité par le fleuve pendant la durée du flot. On obtient ainsi, pour chaque profil, l'amplitude de l'oscillation de l'eau due à l'action de la marée. Pour la Tamise, cette amplitude serait de 13 à 17 kilomètres pour les localités en aval de Londres.

On peut se rendre compte de l'importance des mélanges partiels résultant des actions secondaires par la considération de l'état de salure de l'eau. Si les choses se passaient exactement comme nous l'avons supposé, la partie du fleuve comprise entre les profils A et D, par exemple, recevant, à chaque marée, un volume  $Q$  d'eau douce et perdant un volume égal d'eau salée, finirait par devenir entièrement douce. Or, la salure, en un point donné du fleuve, reste, lorsque le débit  $Q$  est lui-même constant, sensiblement constante ou se retrouve la même à la fin de chaque marée. Soit B le point du fleuve où la salure est nulle, si l'on admet qu'elle croisse uniformément depuis ce point jusqu'à l'embouchure, à une distance  $l$  du point B, où elle serait  $s_1$  (chaque mètre cube d'eau contenant  $s_1$  grammes de sel), sa valeur  $s_x$  à une distance quelconque  $x$  du point B sera  $s_x = \frac{x}{l} s_1$ . En tous cas, la salure  $s_x$  en chaque point du fleuve peut être trouvée, soit approximativement par cette formule, soit par analyse directe. Alors, dans cet espace de longueur  $x$  compris entre le point B et un point quelconque, il entre, pendant une marée,  $Q$  mètres cubes d'eau douce et il sort, puisque le volume se retrouve le même après la marée,  $Q$  mètres cubes d'eau salée, à une salure moyenne entre zéro et  $s_x$  ou égale à  $\frac{s_x}{2}$ . Il est donc sorti de l'espace considéré  $\frac{Qs_x}{2}$  grammes de sel qui ont dû y rentrer, puisque la salure est restée la même et qui correspondent à un volume  $Q_1$  d'eau de mer, déterminé par l'équation :

$$Q_1 s_1 = \frac{Qs_x}{2} \quad \text{d'où} \quad Q_1 = \frac{s_x}{s_1} \frac{Q}{2} = \frac{Qx}{2l}.$$

On peut calculer ce volume  $Q_1$  pour un certain nombre de profils

correspondant à un même nombre de valeurs de  $x$ , et le comparer au volume total qui passe à travers ce profil pendant une marée et qui a été déterminé précédemment. On trouve généralement une très petite fraction ; pour la Tamise, par exemple, cette fraction varie de  $\frac{1}{220}$  à  $\frac{1}{430}$ .

Des considérations et des calculs analogues peuvent être faits pour se rendre compte de la marche des eaux d'égout et de leur mélange progressif avec l'eau du fleuve. On en trouvera un exemple dans la brochure citée de M. Unwin.

**248. Amélioration des estuaires.** — Le problème de l'amélioration des estuaires des fleuves au moyen des courants alternatifs de la marée, est un des plus difficiles qui se présentent aux ingénieurs ; il est bien plus compliqué que celui de la correction des rivières dont le courant est constamment de même sens. Les mêmes principes généraux y sont applicables, c'est-à-dire que, par exemple, le courant tend toujours à se porter vers la rive concave, à la creuser, et au contraire à abandonner la rive convexe en y laissant des atterrissements. Mais le changement de sens du courant rend les effets bien plus incertains et moins déterminés. Les matières du fond, entraînées vers la mer par le jusant, sont ramenées en arrière par le flot et se déposent en des points souvent bien éloignés de ceux que les prévisions avaient indiqués. S'il est déjà difficile de formuler des règles à peu près générales pour les rivières ordinaires, la difficulté est bien autrement grande lorsqu'il s'agit de l'amélioration des estuaires, qui est, bien plus encore que celle des fleuves, une question d'espèces. Toutefois, je crois devoir reproduire ici, en partie, quelques-unes des considérations développées sur ce sujet par M. le professeur Franzius au troisième congrès de navigation intérieure tenu à Francfort-sur le-Mein en 1888.

« Le principe fondamental de toute régularisation dans la partie maritime d'un fleuve consiste à augmenter le plus possible la force vive de l'onde-marée, par suite le cube d'eau à l'entrée et à la sortie et la vitesse de cette eau.

« Plus facilement l'onde-marée se propage en chaque point du fleuve, plus le cube d'eau qui remonte à chaque marée est grand, et plus il augmente, tant à l'aller qu'au retour, la force vive du fleuve, c'est-à-dire la puissance qu'il a de creuser et d'entretenir un lit plus grand et surtout plus profond. »

Lorsque le fleuve présente une courbe très prononcée, il y a perte de force vive par le changement de direction rapide que doi-

vent y subir les ondes. De plus, toute courbe à petit rayon produit, dans les profils, des irrégularités qui diminuent aussi la force vive. On doit y remédier en reculant la rive convexe et en avançant la rive concave.

L'influence des bras est encore plus désastreuse et il est indispensable de fermer les plus défavorables. En général, ce sont les plus faibles qui sont les moins satisfaisants. La digue de fermeture doit, autant que possible, se trouver à l'amont du bras à fermer; l'ancien bras presque entier sert alors de bassin de chasse à la partie inférieure. En outre, les bras conservés fournissent le moyen le plus simple pour assécher les terres avoisinantes, aussi bien que dans l'ancien état des lieux <sup>1</sup>.

Préalablement à la fermeture d'un bras, il faut constituer l'autre de manière qu'il puisse recevoir seul le volume d'eau nécessaire; ce résultat est généralement obtenu au moyen de dragages.

Dans la partie correspondant aux hautes eaux, le profil doit être rétréci le moins possible; si les rives sont très irrégulières, il convient de les régulariser, mais il n'est pas indispensable que la régularité du lit supérieur soit très grande, car le courant est faible aux environs des parties hautes.

L'endigement à basse mer est au contraire fort important, car c'est lui qui renferme le lit permanent du fleuve et le courant le plus fort. L'onde-marée doit, dans cette partie du fleuve, remonter fort loin vers l'amont avec la résistance minimum. L'écartement des rives basses doit augmenter progressivement en descendant.

Si l'on tenait la crête des digues de basses eaux plus haute que le niveau des basses mers, on perdrait le bénéfice de l'avantageuse combinaison des deux profils. En outre, il se formerait des atterrissements en arrière des digues au-dessus du niveau des basses mers, ce qui produirait bientôt une diminution du cube d'eau entrant dans le fleuve pendant le flot.

Il convient donc d'établir des digues basses arasées au niveau des basses mers; les produits des dragages peuvent alors sans inconvénient être versés dans l'espace compris entre ces digues basses et les rives du fleuve, mais à la condition que les dépôts ne dépassent pas le niveau de la crête des digues basses.

Enfin, parmi les procédés de régularisation, figurent les dragages. Il est toujours difficile de prévoir les cas où les travaux de cette nature seront indispensables.

1. Ceci s'applique à l'amélioration d'estuaires débouchant dans des mers à marée. S'il s'agit de mers à niveau sensiblement constant, comme la Méditerranée, le golfe du Mexique, etc., l'expérience du Danube et du Mississipi semble indiquer, au contraire, qu'il y a avantage à se servir de l'un des petits bras du fleuve pour en faire la voie navigable.

Ils seront nécessaires si le fleuve doit avoir une profondeur plus grande que celle que permet d'obtenir la régularisation. Ils le sont encore, pendant la régularisation, pour accélérer l'effet des travaux d'endiguement pour venir en aide, en un point déterminé, à l'action d'un ouvrage voisin et, aussi, quand le fond est trop dur pour être attaqué par les eaux, même régularisées.

Des dragages sont toujours nécessaires pour entretenir une bonne voie navigable, même après une régularisation réussie, et cela parce que des tempêtes, des crues extraordinaires peuvent produire dans le lit des dépôts temporaires dont l'enlèvement doit être immédiat et que le courant n'effectuerait pas assez vite.

En résumé, le résultat doit être poursuivi par tous les moyens de nature à faciliter le plus possible la circulation du plus grand volume d'eau possible; mais ces moyens sont extrêmement variables suivant les circonstances, et pour les déterminer il ne faut pas moins qu'une étude longue et approfondie de l'estuaire particulier que l'on a en vue; ce n'est souvent qu'après de longues années d'observations, d'essais et de réflexions qu'un ingénieur peut se faire une opinion sur le système à choisir, sur le tracé à adopter pour les digues, etc. On a même, dans ces dernières années, procédé par la méthode expérimentale. M. Osborne Reynolds pour la Mersey, M. Vernon-Harcourt pour la Seine, ont fait des expériences sur des modèles à échelle réduite. M. l'inspecteur général Mengin a entrepris, pour l'estuaire de la Seine, de nouvelles expériences sur une échelle un peu plus grande. Il a fait exécuter un modèle qui comprend toute la côte du Calvados et la Seine maritime à l'échelle de  $\frac{1}{5000}$ . Les marées y étaient produites mécaniquement par un moteur à gaz et un réservoir supérieur fournissait un débit correspondant à celui de la Seine fluviale. Le mouvement des eaux a produit, dans les sables qui constituaient le fond du modèle, des déplacements, des dépressions, des bancs donnant, dans une certaine mesure, l'idée de ce qui se passe à l'embouchure de la Seine. Les résultats de ces expériences ont fourni de très utiles indications. Les travaux d'endiguement exécutés le long de la Seine maritime ont produit des améliorations considérables pour la navigation. En outre l'étiage s'est abaissé de quantités croissantes de l'aval vers l'amont de la partie soumise aux marées, et il en résulte plus de facilités qu'autrefois pour l'assainissement des terrains bas avoisinant le fleuve.

## CHAPITRE IX

# FLUIDES ÉLASTIQUES

§ 1. *Equations et formules générales.* — § 2. *Réservoirs d'air.* — § 3. *Mouvement des gaz.*

---

### § 1

#### ÉQUATIONS ET FORMULES GÉNÉRALES

**249. Gaz parfaits.** — Si, dans les questions concernant l'écoulement des liquides, il est possible, avec une approximation suffisante pour les besoins de la pratique, de négliger les effets des variations de température, cette simplification n'est plus possible dès qu'il s'agit des fluides élastiques. Il faut alors tenir compte de ces variations, des quantités de chaleur qui peuvent être gagnées ou perdues par le fluide et des changements de pression et de volume qui en sont la conséquence. Il faut aussi considérer le changement d'état possible du fluide, lorsqu'on l'étudie au voisinage de son point de liquéfaction ; mais cette étude, plus compliquée, ne rentre pas dans le cadre du présent ouvrage et je me bornerai à celle du mouvement des *gaz permanents*, c'est-à-dire considérés assez loin de leur point de liquéfaction pour que ce phénomène n'ait pas à intervenir et j'étudierai alors simplement, comme on le fait d'ordinaire, un *gaz parfait* auquel les lois de Mariotte et de Gay-Lussac soient rigoureusement applicables ; cela n'est vrai pour aucun gaz naturel, mais c'est suffisamment approché pour la plupart d'entre eux.

**250. Lois de Mariotte et de Gay-Lussac.** — Si nous désignons alors par  $p$  la pression du gaz, par  $v$  le volume corres-

pondant de l'unité de poids de ce fluide, par  $\alpha$  son coefficient de dilatation par degré centigrade, et par  $t$  la température, les lois de Mariotte et de Gay-Lussac expriment que la quantité :

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = \text{une constante.}$$

Représentons cette constante par  $\frac{R}{\alpha}$ . Le coefficient  $\alpha$  étant environ  $\alpha = 0.003663$ , son inverse  $\frac{1}{\alpha} = 273$ , et l'expression précédente prendra la forme :

$$\frac{pv}{273 + t} = R.$$

La quantité  $273 + t$  est ce que l'on appelle la température absolue, supposée comptée à partir du zéro absolu, lequel se trouve ainsi au point  $-273^\circ$  de l'échelle centigrade. Appelons  $T$  cette température absolue ou posons  $T = 273 + t$ , l'équation exprimant les lois de Mariotte et de Gay-Lussac sera :

$$(1) \quad pv = RT.$$

La constante  $R$  n'est pas la même pour tous les gaz. Si l'on considère deux gaz différents, à la même pression et à la même température, cette équation montre que  $R$  sera proportionnel à  $v$ , volume de l'unité de poids, ou inversement proportionnelle au poids de l'unité de volume, c'est-à-dire à la densité du fluide.

### 251. Effet de la chaleur sur un fluide élastique. —

Lorsque l'on communique à l'unité de poids d'un gaz une certaine quantité de chaleur, que je supposerai d'abord infiniment petite,  $dQ$ , la température de ce gaz augmente de  $dT$  et son volume augmente de  $dv$ . On admet que la quantité de chaleur fournie  $dQ$  se divise en deux parties produisant ces deux effets. La première partie est proportionnelle à l'élévation infiniment petite de la température ; elle sera donc, en appelant  $c$  un coefficient constant,  $cdT$ . La seconde est proportionnelle au travail extérieur produit par la variation de volume du gaz ; ce travail est  $p dv$  ; elle sera alors, en appelant  $A$  un autre coefficient constant,  $A p dv$ , et l'on écrira :

$$(2) \quad dQ = cdT + A p dv.$$

Supposons  $dv = 0$ , ou le volume du gaz maintenu constant, on a simplement  $dQ = cdT$ , ou bien  $Q = c (T_1 - T_0)$  ; le coefficient  $c$

mesure donc la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids d'un gaz pour élever sa température d'un degré centigrade, lorsque le volume de ce gaz est maintenu constant. C'est ce que l'on appelle la capacité calorifique du gaz à volume constant, ou bien aussi la chaleur spécifique du gaz à volume constant. Ce coefficient n'est pas le même pour tous les gaz. L'expérience montre qu'il varie très sensiblement en raison inverse de la densité des divers gaz.

Faisons maintenant  $dT = 0$ , ou supposons que la température du gaz ne varie pas. Nous avons  $dQ = Apdv$ , ou bien en intégrant :  $Q = A\int p dv$ . Si nous admettons que la température du gaz soit la mesure de son énergie interne, à la quantité de chaleur  $Q$  absorbée par le gaz correspond un travail extérieur  $\int p dv$  effectué par lui. Le coefficient  $A$  qui mesure la quantité de chaleur nécessaire pour produire l'unité de travail s'appelle l'équivalent calorifique du travail ; et son inverse  $\frac{1}{A}$ , qui exprime la quantité de travail correspondant à l'unité de chaleur, s'appelle l'équivalent mécanique de la chaleur. Il est le même, non seulement pour tous les gaz, mais pour tous les modes de transformation de chaleur en travail ou inversement. Lorsque l'on prend le kilogrammètre pour unité de travail et la calorie (quantité de chaleur nécessaire pour élever de  $0^\circ$  à  $1^\circ$  la température d'un kilogramme d'eau) pour unité de chaleur, on a environ  $A = 0,00236$  ou  $\frac{1}{A} = 423,5$ .

Maintenant que nous avons défini les coefficients  $c$  et  $A$ , reprenons l'équation complète :

$$dQ = c dT + A p dv,$$

et supposons que la température et le volume varient simultanément, mais que la pression reste constante. Appelons  $v_0$ ,  $T_0$ , le volume de l'unité de poids et la température dans l'état initial,  $v_1$  et  $T_1$  les mêmes quantités après que le gaz a reçu la quantité de chaleur quelconque  $Q$ . Nous aurons, en intégrant :

$$Q = c (T_1 - T_0) + A p (v_1 - v_0).$$

Or, d'après l'équation (1), il existe entre les températures  $T_0$ ,  $T_1$ , les volumes  $v_0$ ,  $v_1$  et la pression  $p$ , les relations :

$$p v_0 = R T_0 \quad , \quad p v_1 = R T_1.$$

D'où, en substituant :

$$Q = (T_1 - T_0) (c + AR).$$

La parenthèse  $(c + AR)$ , qui est un coefficient numérique, représente la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de poids du gaz pour élever sa température de un degré centigrade, lorsque la pression reste constante. C'est la capacité calorifique, ou la chaleur spécifique du gaz, à pression constante. On peut l'écrire :

$$c + AR = c \left( 1 + \frac{AR}{c} \right).$$

Or, d'après ce qui a été dit,  $R$  et  $c$  variant tous deux, d'un gaz à l'autre, en raison inverse de la densité, le rapport  $\frac{R}{c}$  est le même pour tous les gaz ; et nous pouvons écrire, en appelant  $k$  un coefficient numérique constant :

$$1 + \frac{AR}{c} = k, \quad \text{ou} \quad \frac{AR}{c} = k - 1.$$

La capacité calorifique à pression constante sera ainsi exprimée simplement par

$$kc.$$

Le coefficient  $k$ , le même pour tous les gaz, vaut sensiblement 1,41, soit à très peu près  $\frac{7}{5}$  ou encore  $\sqrt{2}$ . L'équation précédente qui en définit la valeur donne :

$$AR = c(k - 1) = \text{à peu près } \frac{2}{5}c.$$

Je n'ai pas à exposer ici les méthodes au moyen desquelles on est arrivé à déterminer les valeurs numériques des quantités  $A$ ,  $R$ ,  $k$ , et  $c$  ; elles sont du domaine de la physique.

**252. Transformation adiabatique.** — Reprenons encore l'équation générale :

$$dQ = cdT + Apdv,$$

à laquelle nous allons donner une autre forme. L'équation  $RT = pv$  étant différenciée donne :

$$RdT = pdv + vdp.$$

Éliminons  $dT$ , nous obtenons,

$$dQ = \frac{c}{R}(vdp + pdv) + Apdv ;$$



ou bien, en mettant au lieu de  $\frac{c}{R} + A$  la quantité égale  $\frac{kc}{R}$  :

$$dQ = \frac{c}{R} (vdp + kpdv).$$

Cherchons comment varie le volume de l'unité de poids en fonction de la pression, lorsque le gaz ne reçoit ni ne perd de chaleur, il suffit de faire  $dQ = 0$ , ou :

$$vdp + kpdv = 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dp}{p} + k \frac{dv}{v} = 0,$$

ou bien en intégrant :

$$(3) \quad pv^k = \text{une constante} = p_0 v_0^k.$$

Cette équation a été donnée par Laplace dont elle porte le nom ; on l'appelle aussi équation de Poisson.

La transformation que subit un gaz lorsqu'il n'éprouve ainsi ni gain ni perte de chaleur porte le nom de transformation *adiabatique*. Si, sur deux axes de coordonnées rectangulaires on porte les valeurs correspondantes de la pression  $p$  et du volume  $v$  de l'unité de poids du gaz, la courbe dont l'équation est  $pv^k = \text{const.}$  est une *ligne adiabatique*.

Une transformation adiabatique, sans gain ni perte de chaleur, est accompagnée d'une variation de température et d'une production (ou d'une consommation) de travail extérieur. Si le gaz est passé d'un état initial  $p_0, v_0$  à un autre état  $p_1, v_1$  par une transformation adiabatique, on a :

$$p_0 v_0^k = p_1 v_1^k ;$$

si  $T_0$  et  $T_1$  sont les températures correspondantes, on a aussi :

$$p_0 v_0 = RT_0, \quad p_1 v_1 = RT_1 ;$$

d'où l'on déduit facilement, par division membre à membre :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Une augmentation de température correspond à une augmentation de pression ou à une diminution de volume, et inversement. Par suite de la variation de température, l'énergie interne du gaz a

changé et une quantité d'énergie représentée par  $R(T_0 - T_1)$ , se trouve rendue disponible ou absorbée ; d'autre part, le travail extérieur correspondant à la transformation est lié à la variation de température par l'équation générale (2) dans laquelle on fait  $dQ = 0$ , ou bien :

$$cdT + \Lambda pdv = 0.$$

d'où l'on déduit, par intégration :

$$c(T_1 - T_0) + \Lambda \int_{v_0}^{v_1} pdv = 0.$$

Le travail extérieur serait  $\int_{v_0}^{v_1} pdv$  s'il n'y avait pas de changement de température, mais ce changement rend disponible un travail  $R(T_0 - T_1)$  de sorte que le travail extérieur total  $W$  sera :

$$W = \int_{v_0}^{v_1} pdv + R(T_0 - T_1) = \left(\frac{c}{\Lambda} + R\right)(T_0 - T_1) = \frac{kc}{\Lambda}(T_0 - T_1);$$

ce que l'on peut écrire, en égard aux relations qui viennent d'être trouvées :

$$(4) \quad W = \frac{kc}{\Lambda} T_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) = p_0 v_0 \frac{k}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Une production de travail extérieur sera donc accompagnée d'une diminution de température, et inversement une augmentation de température accompagnera la consommation d'un travail extérieur.

**253. Transformation isothermique ou isodynamique.** — Un gaz peut au contraire passer d'un état à un autre en conservant la même température, sa transformation est dite alors *isothermique*. L'équation  $pv = RT$ , lorsque la température  $T$  est constante, donne  $pv = \text{const.}$  et les hyperboles équilatères représentées par cette équation sont des *lignes isothermiques*. Il est facile de reconnaître qu'une transformation isothermique est nécessairement accompagnée de gain ou de perte de chaleur et de production ou de consommation de travail mécanique. Si l'on reprend en effet l'équation générale

$$dQ = cdT + \Lambda pdv,$$

et si l'on y suppose  $T$  constant, ou  $dT = 0$ , elle se réduit à :

$$dQ = Apdv;$$

ou bien, en y mettant pour  $p$  sa valeur déduite de  $p\nu = RT$  :

$$dQ = ART \frac{dv}{\nu}.$$

Et si l'on intègre entre les limites marquées par les états extrêmes, définis comme tout à l'heure par  $p_0, \nu_0$  et  $p_1, \nu_1$ , la quantité de chaleur qui devra être fournie au gaz, pour qu'il passe du volume  $\nu_0$  au volume  $\nu_1$ , en restant à la température constante  $T$ , sera :

$$Q = ART \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{dv}{\nu} = ART \text{Log.} \frac{\nu_1}{\nu_0}.$$

quantité qui ne peut être nulle si  $\nu_1$  est différent de  $\nu_0$ . Comme d'ailleurs, on a, la température  $T$  étant constante :

$$p_0 \nu_0 = p_1 \nu_1 = RT,$$

cette quantité peut s'exprimer comme il suit :

$$Q = Ap_0\nu_0 \text{Log.} \frac{\nu_1}{\nu_0} = Ap_1\nu_1 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1}.$$

Le travail extérieur  $\int_{\nu_0}^{\nu_1} pd\nu$  a pour expression, en le représentant encore par  $W$  :

$$(5) \quad W = \int_{\nu_1}^{\nu_0} pd\nu = p_0\nu_0 \text{Log.} \frac{\nu_1}{\nu_0} = p_1\nu_1 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1}$$

D'après ce que nous avons admis, la température du gaz étant constante, son énergie interne reste la même ; c'est pourquoi la transformation isothermique et la ligne qui la représente portent le nom de transformation et de ligne *isodynamiques*. La coïncidence de la ligne isodynamique avec la ligne isothermique n'a lieu que pour les gaz parfaits. Dans les autres fluides naturels, et en particulier dans les vapeurs, la température n'est pas la seule mesure de l'énergie interne, et les deux lignes ne coïncident pas.

**254. Valeurs numériques des coefficients.** — Voici, résumées dans un petit tableau, les valeurs numériques des coefficients qui figurent dans les formules précédentes et qui ne sont pas les mêmes pour les différents gaz.

Noms des gaz.	Poids du mètre cube	R	c	Volume d'un kilogramme
Air atmosphérique . . . . .	1 k 293	29.5	0,468	0mc 773 lit
Azote . . . . .	1 250	30.3	0,473	0 800
Oxygène . . . . .	1 429	26.7	0,455	0 700
Hydrogène . . . . .	0 0898	422.8	2,412	44 085
Acide carbonique . . . . .	1 977	19.1	0,442	0 506
Gaz d'éclairage (en moy.).	0 530	71.4	0,418	4 887

Le poids du mètre cube et le volume d'un kilogramme sont pris à la température zéro et sous la pression atmosphérique de 760 millimètres de mercure. Il est rappelé que les coefficients  $k$ ,  $A$  qui figurent aussi dans les formules ont la même valeur pour tous les gaz, soit :

$$k = 1,41, \quad A = 0,00236 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A} = 423,5.$$

Les unités sont le kilogramme par mètre carré pour les pressions, le kilogramme pour les poids et le mètre cube pour les volumes. Dans ces conditions la pression d'une atmosphère est représentée par 10334 kilogr. par mètre carré, c'est-à-dire par le nombre 10334. Chaque millimètre de mercure correspond, à très peu près, à une pression de 13 k. 6 par mètre carré. Il est bien évident que si, dans une formule, les pressions figurent simplement par leur rapport  $\frac{p_1}{p_0}$ , le choix de l'unité importe peu, pourvu que cette unité soit la

même pour les deux ; elles peuvent être toutes deux, par exemple, exprimées en millimètres de mercure. L'unité indiquée doit être conservée dans les formules où les pressions figurent isolément, par exemple dans celle de  $p_0 v_0 = RT_0$ , ou dans les autres analogues.

La pression est souvent exprimée par la quantité dont elle dépasse celle de l'atmosphère. Ainsi, on dira que la pression d'un gaz est de 20 millimètres d'eau ; cela veut dire que sa pression dépasse de 20 millimètres d'eau celle de l'atmosphère, qui est de 10334 millimètres d'eau ; cette pression serait ainsi exprimée par le nombre 10354.

Les températures  $T$  sont celles de l'échelle centigrade augmentées de 273°. Ainsi, la température de 15 degrés centigrades correspond à  $T = 273 + 15 = 288$ .

L'unité de travail est le kilogrammètre et l'unité de chaleur la calorie ; c'est en calories que se trouvera exprimée la quantité  $Q$  dans les formules où elle figure. Enfin la vitesse sera exprimée en mètres par seconde, si l'on met pour  $g$  la valeur  $9\text{ m. }8088$ .

**255. Application de la formule générale.** — Au moyen de l'équation générale (2) on peut résoudre beaucoup de problèmes relatifs aux transformations subies par un gaz permanent.

Supposons, par exemple, un gaz, dont l'état initial est défini par  $p_0, v_0, T_0$ , se dilatant en surmontant une pression constante  $p'$  inférieure à  $p_0$ , jusqu'à occuper un volume  $v_1$ , sans perte ni gain de chaleur. On demande de déterminer sa pression  $p_1$  et sa température  $T_1$  après l'expansion.

La pression  $p'$  étant constante, le travail extérieur  $\int_{v_0}^{v_1} p' dv$  sera simplement  $p' (v_1 - v_0)$  et l'équation générale (2), intégrée, donnera, en y faisant  $Q = 0$  :

$$0 = c (T_1 - T_0) + Ap' (v_1 - v_0),$$

équation dans laquelle tout est connu excepté  $T_1$  que l'on en déduira. Enfin, ayant calculé  $T_1$ , la pression finale  $p_1$  se trouvera par la relation  $p_1 v_1 = RT_1$ .

Si, au lieu du volume final  $v_1$ , on avait donné la pression finale  $p_1$  la même équation aurait fourni la valeur de  $v_1$  en fonction de  $v_0$ . En y adjoignant les deux relations  $p_0 v_0 = RT_0$  et  $p_1 v_1 = RT_1$ , ainsi que celle  $AR = c(k - 1)$ , on trouve :

$$v_1 = v_0 \frac{p_0 + (k - 1) p'}{p_1 + (k - 1) p'}.$$

On calcule ensuite  $T_1$  au moyen de  $p_1 v_1 = RT_1$ .

Si, comme cas particulier, on suppose que la pression  $p'$ , que le gaz doit surmonter pour se dilater, soit nulle, ce qui arrive lorsque l'on fait communiquer un réservoir rempli de gaz avec un autre où l'on a fait le vide, il faut, dans les équations précédentes, faire  $p' = 0$ . Il en résulte d'abord  $c (T_1 - T_0) = 0$ , ou bien  $T_1 = T_0$  :

la température du gaz reste constante ; puis  $p_1 = \frac{p_0 v_0}{v_1}$ . Ces conséquences ont été vérifiées par une expérience bien connue de Joule.

Les expressions (4) et (5) ci-dessus, du travail extérieur, dans les transformations adiabatiques ou isothermiques, résolvent d'ailleurs le problème consistant à chercher quel travail il sera nécessaire de

dépenser pour faire subir à un gaz une transformation déterminée, ou inversement. Il est inutile, lorsque la température reste constante, de tenir compte des phases successives de la transformation, et l'on peut alors se borner à comparer l'état final et l'état initial de la masse gazeuse.

Par exemple, s'il s'agit de trouver le travail nécessaire pour comprimer, à une pression effective de 6 kilog. par centimètre carré, un mètre cube d'air aspiré dans l'atmosphère, la pression atmosphérique étant de 1 k. 033 par cmq, la pression réelle à obtenir sera de 7 k. 033. Alors si la transformation est isothermique, on trouvera d'après (5) pour le travail cherché, désigné par W :

$$W = 10330 \times \text{Log} \frac{7,033}{1,033} = 19818 \text{ kilogrammètres.}$$

Si la transformation devait être adiabatique, soit sans gain ni perte de chaleur, la formule (4) fournirait, pour la valeur absolue de ce travail :

$$W = 10330 \times \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{7,033}{1,033} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right].$$

ce qui, faisant  $k = 1,41$ , donne :

$$W = 26532 \text{ kilogrammètres.}$$

Dans les appareils compresseurs d'air, il est assez difficile de savoir exactement laquelle de ces deux transformations se réalise : la température du gaz que l'on comprime est quelquefois à peu près la même à la fin qu'au commencement, quelquefois un peu plus élevée ; les organes de la machine, en contact avec le gaz, lui cèdent ou lui prennent de la chaleur suivant que, dans les diverses phases du travail, ils se trouvent à une température plus élevée ou plus basse que la sienne ; le plus souvent, dans les grands appareils surtout, on injecte de l'eau pendant la période de compression afin de maintenir la température à peu près constante et d'absorber la chaleur produite par la compression ; il en résulte en somme une transformation dans des conditions en quelque sorte intermédiaires entre celles qui correspondent aux deux hypothèses précédentes. Aussi prend-on, ordinairement, pour la valeur du travail cherché, un chiffre intermédiaire entre ceux que fournissent les deux formules. M. le professeur Riedler prend exactement la moyenne de ces deux chiffres : dans l'exemple précédent, il admettrait donc :

$$W = \frac{19818 + 26532}{2} = 23715 \text{ kilogrammètres.}$$

M. Kraft, ingénieur en chef des usines de Seraing, admet que la loi de la compression peut se représenter par la formule adiabatique, mais avec une valeur différente pour le coefficient  $k$ , cette valeur d'autant plus rapprochée de l'unité que le refroidissement de l'air est plus parfait. D'après des expériences assez nombreuses, faites par M. Joseph François, l'ingénieur bien connu, sur des compresseurs de son système, comprimant l'air à 5 atmosphères, il a été amené à prendre  $k = 1,18$  et, appliquant ce chiffre à l'exemple précédent, il trouve alors :

$$W = 23021 \text{ kilogrammètres,}$$

nombre peu différent de la moyenne calculée plus haut. M. Kraft augmente d'ailleurs de 3 o/o le chiffre obtenu pour tenir compte de l'influence des espaces nuisibles et arrive ainsi, pour cet exemple, à 23711 kgm par mètre cube d'air aspiré <sup>1</sup>.

Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer ici, à propos de ces compresseurs d'air, que l'on réalise une économie, dans le travail moteur, si, au lieu d'effectuer la compression en une seule fois on la produit par gradation ou en cascade, c'est-à-dire au moyen de compressions successives. Cette économie serait nulle si la compression s'effectuait suivant la loi isothermique ou si la température du gaz restait rigoureusement constante pendant tout son séjour dans l'appareil ; elle est d'autant plus grande que les conditions de la compression s'écartent davantage de celle-là, ou qu'elles se rapprochent de la loi adiabatique. Il est facile de se rendre compte de la différence.

Dans l'exemple précédent, supposons que la compression, au lieu d'être effectuée en une seule fois, jusqu'à obtenir la pression effective de 6 kilog., s'effectue en deux fois : un premier compresseur prenant l'air à la pression atmosphérique  $p_0 = 10330$  kil., et l'amenant à la pression  $p' = 40330$  kil., soit à une pression effective de 3 kilog. ; puis un second compresseur prenant cet air à la

1. Le travail mécanique ainsi calculé peut servir à trouver la puissance des moteurs destinés à actionner des compresseurs d'air, connaissant le rendement de ces appareils, c'est-à-dire le rapport entre le travail de la compression de l'air et celui du moteur, tous deux étant mesurés par les diagrammes tracés par des indicateurs de Watt placés sur les cylindres. Aux compresseurs installés au lac St-Fargeau par la Compagnie Popp, pour la distribution de la force motrice dans Paris, ce rapport, ou le rendement de ces compresseurs, a été trouvé de 0,85. Dans ces conditions, le travail moteur nécessaire pour comprimer à 6 k. de pression effective un mètre cube d'air aspiré est de  $\frac{23711}{0,85} = 27874$  kilogrammètres. Il en résulte qu'un cheval-vapeur pourra comprimer 2 lit. 688 par seconde ou 9 mc 6795 par heure,

pression  $p'$  et l'amenant à la pression définitive  $p_1 = 70330$  k, soit 6 kilog. effectifs. Si la transformation est rigoureusement isothermique, la valeur absolue du travail  $W_1$ , nécessaire pour la première compression, sera, d'après (5) :

$$W_1 = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{p'}{p_0};$$

et celle du travail  $W_2$ , nécessaire à la seconde compression :

$$W_2 = p' v' \operatorname{Log} \frac{p_1}{p'}.$$

De sorte que le travail total  $W = W_1 + W_2$  sera, puisque la température étant constante  $p'v' = p_0v_0 = RT$  :

$$W = p_0 v_0 \left( \operatorname{Log} \frac{p'}{p_0} + \operatorname{Log} \frac{p_1}{p'} \right) = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0};$$

comme si la compression s'était effectuée en une seule fois.

Mais si la transformation est adiabatique, ou bien si elle est, comme on vient de le dire, intermédiaire entre l'adiabatique et l'isothermique et exprimée par une relation  $p v^k = \text{constante}$ , dans laquelle la valeur de l'exposant  $k$  est supérieure à l'unité et au plus égale à 1,41, le travail nécessaire pour la première compression sera, en valeur absolue, d'après (4) :

$$W_1 = p_0 v_0 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p'}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right],$$

et dans la seconde compression :

$$W_2 = p' v' \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_1}{p'} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right].$$

Si l'on suppose qu'entre les deux compressions, la température de l'air ait été ramenée à sa valeur initiale,  $p'v'$  sera encore égale à  $p_0v_0$  et l'on aura, pour le travail total :

$$W = p_0 v_0 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p'}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} + \left( \frac{p_1}{p'} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 2 \right].$$

Avec les valeurs numériques précédentes de  $p_0$ ,  $p'$ ,  $p_1$ , ce travail total  $W$  prend les valeurs suivantes :

1° Dans l'hypothèse de la transformation isothermique, soit avec une seule, soit avec deux compressions successives,

$$W = 19818 \text{ kilogrammètres ;}$$



2° Dans l'hypothèse de la transformation adiabatique ( $k = 1,41$ ) et d'une seule compression . . .  $W = 26532$  kilogrammètres ;

3° Dans l'hypothèse de la transformation adiabatique et de deux compressions successives. . . .  $W = 23433$  kilogrammètres ;

4° Dans l'hypothèse intermédiaire,  $k = 1,18$ , et d'une seule compression . . . . .  $W = 23021$  kilogrammètres ;

5° Dans l'hypothèse intermédiaire et de deux compressions successives. . . . .  $W = 21620$  kilogrammètres ;

Dans cette dernière hypothèse, qui paraît correspondre aux conditions pratiques les plus ordinaires, l'économie obtenue en scindant la compression est de 1401 kilogrammètres, soit de plus de 6 o/o.

Il convient d'ajouter que le procédé des compressions successives a encore pour avantage de mieux régulariser le travail des machines motrices et d'éviter que les fortes pressions finales ne s'exercent sur les organes de grandes dimensions nécessaires à l'aspiration de grands volumes d'air à la pression atmosphérique.

On peut remarquer que le travail des machines motrices pourra d'autant mieux être utilisé et régularisé que les divers compresseurs entre lesquels il devra se répartir en consommeront des quantités plus égales. Il y a évidemment intérêt, si  $n$  est le nombre des compresseurs, à faire en sorte que chacun d'eux exige une fraction  $\frac{1}{n}$  de la puissance totale disponible.

Pour cela, quelle que soit l'expression du travail de chacun d'eux en fonction des pressions initiale et finale, il faut que les pressions successives réalisées à la fin de chaque compression partielle croissent en progression géométrique. En effet, s'il s'agit de faire passer un gaz de la pression initiale  $p_0$  à une pression définitive  $P$  au moyen de  $n$  compressions successives, et si  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n = P$  sont les pressions obtenues à la fin de chacune d'elles,  $v_0, v_1, \dots, v_n$  étant les volumes correspondants, le travail nécessité par la première compression sera :

1° Si elle s'effectue à température constante (isothermique).

$$W_1 = p_0 v_0 \text{Log} \frac{p_1}{p_0}$$

2° Si elle s'effectue sans absorption ni perte de chaleur (adiabatique) :

$$W_1 = p_0 v_0 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \quad (\text{avec } k = 1,41)$$

3° Si elle est intermédiaire, on peut, soit prendre cette dernière formule et faire, avec M. François,  $k = 1,18$ ; soit, avec M. Riedler, prendre pour l'expression du travail la moyenne des deux formules précédentes :

$$W_1 = p_0 v_0 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \text{Log} \frac{p_1}{p_0} + \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\}.$$

Quelle que soit la loi réelle inconnue suivant laquelle s'effectuera la compression, on peut toujours représenter le travail par

$$W_1 = p_0 v_0 f \left( \frac{p_1}{p_0} \right).$$

De même, le second compresseur, amenant le gaz de la pression  $p_1$  à la pression  $p_2$ , exigera un travail :

$$W_2 = p_1 v_1 f \left( \frac{p_2}{p_1} \right).$$

Si, après chaque compression on ramène le gaz à sa température initiale, on aura :  $p_1 v_1 = p_0 v_0$ ; et pour que  $W_2 = W_1$ , il faut que  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1}{p_0}$ . Il en sera de même pour les autres compressions, c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{p_2}{p_1} = \dots = \sqrt[n]{\frac{P}{p_0}}.$$

Cette répartition des pressions intermédiaires, outre qu'elle est favorable à la bonne utilisation du travail moteur, a aussi pour conséquence la réduction au minimum de ce travail, lorsque la compression ne s'opère pas suivant la loi isothermique. En effet, lorsque la température est constante, le travail total exprimé par

$$p_0 v_0 \left[ \text{Log} \frac{p_1}{p_0} + \text{Log} \frac{p_2}{p_1} + \dots + \text{Log} \frac{p_n}{p_{n-1}} \right]$$

est toujours égal à

$$p_0 v_0 \text{Log} \frac{P}{p_0}$$

quelles que soient les pressions intermédiaires  $p_1, p_2, \dots$ . Mais dans les autres cas, le travail total comprendra, dans son expression, une somme de termes tels que

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \dots + \left(\frac{p_n}{p_{n-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

dont le produit sera

$$\left(\frac{P}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

c'est-à-dire constant. Et l'on sait que cette somme sera la plus petite possible lorsque tous ces termes seront égaux.

La répartition des pressions, suivant les termes d'une progression géométrique, est donc toujours à recommander.

Ainsi, dans l'exemple numérique qui précède si, au lieu d'adopter, pour la pression intermédiaire  $p'$  le chiffre de 40330 kil. on avait pris conformément à cette règle,  $p' = \sqrt{p_0 p_1} = 26950$  kil., le travail nécessaire à la compression, au lieu d'être de 23433 kilogrammètres dans l'hypothèse de la transformation adiabatique, n'aurait été que de 22840 kilogrammètres, soit une différence en moins d'environ 2 o/o.

## § 2

### RÉSERVOIRS D'AIR

**256. Réservoirs d'air en communication avec les conduites d'eau.** — Lorsqu'une conduite contient une certaine quantité d'eau en mouvement, il arrive que, si l'écoulement est brusquement interrompu, la force vive de l'eau produit sur les parois de la conduite des pressions qui peuvent devenir assez fortes pour en occasionner la rupture. Cette force vive, en effet, ne peut être détruite que par un travail résistant dû à la déformation élastique des tuyaux, et il peut arriver que cette déformation dépasse les limites de l'élasticité et de la rupture. Le choc qui se produit ainsi et qui s'appelle le *coup de bélier*, peut s'atténuer par une fermeture progressive et non brusque des orifices d'écoulement, mais on a aussi recours dans le même but aux réservoirs d'air. L'emploi de cet appareil a pour effet de remplacer une portion de la paroi du tuyau par une matière élastique qui cède à la pression de l'eau sans danger de rupture. L'air du réservoir se comprime, sa pression augmente et produit le travail résistant nécessaire pour amortir la force vive de l'eau.

Si l'on désigne par  $D$  le diamètre de la conduite, par  $L$  sa longueur, par  $U$  la vitesse moyenne de l'eau, de manière que la demi-force vive à amortir soit, en appelant toujours  $\Pi$  le poids spécifique du liquide,  $\frac{\Pi}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} L \cdot \frac{U^2}{2}$ ; il faut que cette force vive soit détruite sans que la pression, dans le réservoir d'air, dépasse une valeur  $p_1$  fixée à l'avance et en vue de laquelle on a calculé la résistance des parois.

Soit  $p_0$  la pression dans la conduite et dans le réservoir d'air avant l'interruption de l'écoulement. Négligeons le travail dû à l'action de la pesanteur sur l'eau en mouvement, dans le temps assez court pendant lequel l'eau continue à se mouvoir en pénétrant dans le réservoir et en comprimant l'air qui s'y trouve enfermé; négligeons de même les frottements de l'eau sur les parois de la conduite pendant ce même temps; nous devons écrire l'égalité entre la demi-force vive de l'eau, dont l'expression vient d'être donnée, et le travail résistant produit par le gaz lorsque sa pression passe de  $p_0$  à  $p_1$ . La valeur de ce travail sera différente suivant les conditions thermiques de la compression; elle ne sera pas la même si la compression s'effectue à température constante, suivant la loi isothermique, ou bien si elle s'effectue sans perte ni gain de chaleur, suivant la loi adiabatique. Dans le premier cas, le travail négatif du gaz, par unité de poids, sera exprimé par  $p_0 v_0 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1}$ . Cette unité de poids, sous la pression initiale  $p_0$  occupe le volume  $v_0$ ; si l'on désigne donc par  $V_0$  le volume initial de l'air dans le réservoir, son travail négatif sera  $p_0 V_0 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1}$  et l'on aura l'équation :

$$\frac{\Pi}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} L \cdot \frac{U^2}{2} + p_0 V_0 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1} = 0,$$

qui permettra de calculer le volume initial  $V_0$  à donner au réservoir pour que la pression n'y dépasse pas  $p_1$ .

Il n'est pas probable que, dans la pratique, la compression du gaz se fasse suivant la loi isothermique. Il faudrait, pour cela, que le gaz cédât à ses parois une quantité de chaleur équivalente au travail qui vient d'être évalué. Il est à croire, au contraire, que pendant le temps très court de la compression, le gaz ne reçoit ni ne cède aucune quantité de chaleur appréciable. Sa température s'élève donc d'abord et il n'abandonne que plus tard la chaleur qui lui a été transmise sous forme de travail mécanique. Si l'on

suppose que la compression s'effectue suivant la loi adiabatique, le travail par unité de poids sera exprimé, comme nous l'avons vu plus haut, par la formule (4) du n° 252. Nous avons alors, pour déterminer  $V_0$ , l'équation :

$$\frac{\pi}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot L \cdot \frac{U^2}{2} + \frac{k p_0 V_0}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = 0,$$

dont le second terme est obtenu en mettant dans cette formule, au lieu de  $v_0$ , volume de l'unité de poids du gaz, le volume initial  $V_0$  du réservoir.

Cette hypothèse d'une compression adiabatique donnera pour  $V_0$  une valeur qui sera, en général, inférieure à celle que l'on obtiendrait en supposant la compression isothermique. Par exemple, si, pour abrégé, on représente par  $W$  le premier terme de chacune des deux équations précédentes, ou la demi-force vive à amortir, et si l'on veut que la pression, dans le réservoir, ne s'élève pas au delà du double de sa valeur initiale, il faudra faire  $\frac{p_1}{p_0} = 2$ , et alors le volume  $V_0$  à donner à ce réservoir sera, dans l'hypothèse isothermique :

$$V_0 = \frac{W}{p_0 \text{ Log. } 2} = 1,45 \frac{W}{p_0};$$

et dans l'hypothèse adiabatique, en prenant pour  $k$  la valeur approximative  $\frac{7}{5}$  :

$$V_0 = \frac{2}{7^{0,22} p_0} W = 1,30 \frac{W}{p_0}.$$

soit une différence d'environ un dixième en moins. Il est donc préférable de calculer dans l'hypothèse d'une compression isothermique, car il n'y a pas d'inconvénient à ce que le réservoir soit un peu trop grand.

**257. Réservoirs d'air placés sur une conduite d'eau alimentée par une pompe foulante.** — On calcule de la même manière les réservoirs d'air placés sur les conduites alimentées par des pompes foulantes, afin d'y régulariser le mouvement de l'eau. Entre les pompes et le réservoir, l'écoulement de l'eau est intermittent, le volume fourni oscille entre zéro, si la pompe est à simple effet, et un certain maximum. Le volume total fourni par la pompe dans un temps donné doit être écoulé, au delà du réservoir,

avec une vitesse se rapprochant le plus possible de l'uniformité. On y arrive en faisant en sorte que la pression, dans le réservoir d'air, ne varie qu'entre des limites assez étroites. Si l'on désigne par  $V_0$  le volume d'air lorsque la pression a sa plus faible valeur  $p_0$ , et par  $V_1$  ce volume lorsque la pression atteint sa valeur la plus grande  $p_1$ , une relation entre  $V_1$  et  $V_0$  sera donnée par les conditions d'alimentation de la conduite : la différence  $V_0 - V_1$  correspondra à l'excès du volume d'eau fourni par les pompes, dans une période de leur mouvement, sur le volume qui s'est écoulé avec une vitesse moyenne supposée constante. On peut donc admettre que la différence  $V_0 - V_1$  est une donnée de la question, il en est de même de la pression initiale  $p_0$ . Enfin, d'après le degré de régularité que l'on veut donner à l'écoulement, on limitera arbitrairement la différence  $p_1 - p_0$  entre les pressions extrêmes ou plutôt le rapport  $\frac{p_0}{p_1}$ . Le problème est

donc ainsi posé : connaissant ce rapport  $\frac{p_0}{p_1}$  et la différence  $V_0 - V_1$ , calculer  $V_0$ . On remarquera, d'ailleurs, que les volumes  $V_0$  et  $V_1$  d'une même masse de gaz sont proportionnels aux volumes de l'unité de poids que nous avons appelés  $v_0$  et  $v_1$ . Dans l'hypothèse isothermique, on aura :  $p_0 V_0 = p_1 V_1$ , ce qui donnera :

$$V_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)} (V_0 - V_1).$$

L'hypothèse adiabatique, où  $p_0 V_0^k = p_1 V_1^k$ , fournira :

$$V_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}} (V_0 - V_1).$$

L'exposant  $\frac{1}{k}$  qui affecte le rapport  $\frac{p_0}{p_1}$  dans cette seconde formule étant plus petit que l'unité, exposant du même rapport dans la première, la seconde valeur de  $V_0$  sera plus grande que la précédente. Lorsque le rapport  $\frac{p_0}{p_1}$  diffère peu de l'unité, ce que l'on doit chercher à réaliser, la dernière valeur de  $V_0$  vaut à peu près :

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}} (V_0 - V_1),$$

c'est-à-dire qu'elle est à peu près égale à la première multipliée

par  $k$  ou par  $\frac{7}{5}$ . Il est donc probable que dans les réservoirs calculés d'après l'hypothèse isothermique, la pression varie dans des limites un peu plus étendues que celles que l'on a supposées pour faire les calculs, ou que ces réservoirs sont un peu trop petits. En effet, les conditions doivent être, ici encore, intermédiaires entre celles qui répondent aux deux hypothèses.

§ 3

MOUVEMENT DES GAZ

**258. Écoulement par un orifice.** — Considérons un réservoir rempli de gaz, et dans lequel la pression soit maintenue constante et égale à  $p_0$  ; supposons que ce gaz s'écoule par un orifice de section  $\omega$ , muni d'un ajutage cylindrique ou d'un tuyau de même section  $\omega$  ; admettons aussi que la pression  $p_1$ , que ce gaz doit surmonter pour s'écouler ainsi, soit constante. Imaginons, par exemple, que le gaz du réservoir soit pressé par un piston AB (fig. 115)

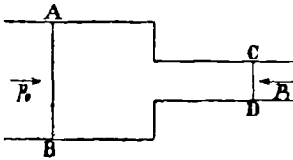


Fig. 115.

de section  $\omega$  qui se déplace sous l'action d'une pression constante  $p_0$  ; et que, de même, dans le tuyau d'écoulement se trouve un autre piston CD qui supporte sur sa face opposée une pression constante  $p_1$  (ces pistons sont, bien entendu, fictifs et simplement supposés remplacer des sections idéales faites à travers le fluide par des plans AB, CD).

Désignons par  $u$  la vitesse moyenne de l'écoulement dans le tuyau ; cette vitesse sera celle du piston CD. Le piston AB s'étant avancé d'une quantité telle que l'unité de poids du gaz ait passé par l'orifice, le volume décrit par ce piston est  $v_0$ , volume de l'unité de poids dans le réservoir, et le travail extérieur transmis au gaz par le piston AB est égal à  $p_0 v_0$ . Pendant le même temps, l'unité de poids du gaz qui s'est écoulée a repoussé le piston CD et lui a fait décrire un volume  $v_1$  égal à celui qu'elle occupe dans le tuyau d'écoulement. Le gaz a produit ainsi un travail extérieur  $p_1 v_1$ , et le travail qui lui a été transmis est, en totalité, la différence  $p_0 v_0 - p_1 v_1$ . Mais, d'autre part, l'unité de poids qui occupait le volume  $v_0$  occupe actuellement le volume  $v_1$  différent de  $v_0$ . L'é-

nergie interne de cette unité de poids a donc augmenté (algébriquement) de la quantité  $\int_{v_0}^{v_1} p dv$ . Cette augmentation de l'énergie interne qui est la conséquence du changement d'état doit s'ajouter au travail extérieur. Il en résulte que le travail total extérieur communiqué au gaz ou gagné par lui est ainsi :

$$p_0 v_0 - p_1 v_1 + \int_{v_0}^{v_1} p dv.$$

Ce résultat est conforme à ce que nous avons trouvé plus haut, page 514, avant l'équation (4).

Ce travail est employé à produire le mouvement. La force vive du gaz s'est augmentée du produit par  $\frac{u^2}{2}$  de la masse  $\frac{1}{g}$  de l'unité de poids qui s'est écoulée. On a ainsi l'équation, dite de Zeuner :

$$(6) \quad \frac{u^2}{2g} = p_0 v_0 - p_1 v_1 + \int_{v_0}^{v_1} p dv.$$

On a, d'autre part :

$$d(pv) = p dv + v dp,$$

ou bien

$$p_1 v_1 - p_0 v_0 = \int_{v_0}^{v_1} p dv + \int_{v_0}^{v_1} v dp ;$$

d'où, en substituant :

$$(7) \quad \frac{u^2}{2g} = - \int_{v_0}^{v_1} v dp = \int_{v_1}^{v_0} v dp.$$

Cette équation a été donnée par Saint-Venant bien avant Zeuner.

On peut donc encore donner à cette équation une autre forme, en y faisant intervenir les conditions thermiques. L'équation générale :

$$dQ = c dT + A p dv,$$

étant intégrée entre les deux états extrêmes désignés par les indices 0 et 1, donne en appelant Q la quantité de chaleur fournie au gaz dans sa transformation :

$$(8) \quad Q = c (T_1 - T_0) + A \int_{v_0}^{v_1} p dv.$$

D'autre part, l'équation de Mariotte et Gay-Lussac fournit :

$$p_0 v_0 = RT_0, \quad p_1 v_1 = RT_1.$$



Si, dans l'équation (6) nous substituons à  $p_0 v_0$  et à  $p_1 v_1$  ces valeurs, et si, au moyen de la précédente, nous éliminons l'intégrale

$\int_{v_0}^{v_1} p dv$ , nous obtiendrons :

$$(9) \quad \frac{u^2}{2g} = R(T_0 - T_1) + \int_{v_0}^{v_1} p dv,$$

ou bien :

$$\frac{u^2}{2g} = R(T_0 - T_1) + \frac{Q}{A} - \frac{A}{c}(T_1 - T_0)$$

ou bien, puisque  $c + AR = kc$ ,

$$(10) \quad \frac{u^2}{2g} = \frac{Q}{A} - \frac{kc}{A}(T_1 - T_0).$$

Sous l'une ou l'autre des formes précédentes, qui peuvent facilement se déduire de l'équation (4) ou de celle qui la précède, l'équation dite de Zeuner ou de Saint-Venant, permettra de résoudre les divers problèmes relatifs à l'écoulement d'un gaz sortant d'un réservoir.

Si, par exemple, l'écoulement se fait sans introduction ni soustraction de chaleur,  $Q = 0$ , l'équation (10) se réduit à :

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{kc}{A}(T_0 - T_1) = \frac{kc}{A}T_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right).$$

Nous avons vu plus haut que dans une transformation adiabatique on avait :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}};$$

Il en résulte, par conséquent, pour la vitesse  $u$  d'écoulement d'un fluide dans ces conditions :

$$(11) \quad u = \sqrt{2g \frac{kc}{A} T_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]},$$

formule dans laquelle  $T_0$ ,  $p_0$  et  $p_1$  sont supposées données.

Si l'écoulement se fait à température constante,  $T_1 = T_0$ , l'équation (9) donne simplement :

$$\frac{u^2}{2g} = \int_{v_0}^{v_1} p dv,$$

et nous avons trouvé plus haut que, dans ces conditions, l'on a :

$$\int_{v_0}^{v_1} p dv = p_0 v_0 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1} = RT_0 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1}.$$

On trouve alors :

$$(12) \quad u = \sqrt{2g RT_0 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1}},$$

formule qui donne  $u$ , si  $T_0$ ,  $p_0$  et  $p_1$  sont connus. Cette formule est celle qui a été donnée par Navier, avec  $p_0 v_0$  au lieu de  $RT_0$ . Elle était appliquée par lui à tous les cas d'écoulement, et l'on voit qu'elle n'est exacte que lorsque la température du gaz reste constante <sup>1</sup>.

1. Je dois parler ici, pour mémoire, de deux conséquences paradoxales qui ont été déduites de cette formule de Navier. La première, la plus singulière, peut-être, est que, pour  $p_1 = 0$ , la formule donne  $u = \infty$ . On verra, quelques lignes plus loin, que pour maintenir constante la température, ou pour rendre la formule applicable, il faut fournir au gaz une quantité de chaleur exprimée par  $A \frac{u^2}{2g}$ , c'est-à-dire infinie elle-même. Il y a donc impossibilité.

Mais calculons le volume de gaz dépensé sous la pression  $p_1$ . Si  $\omega$  est la section de l'orifice, ce volume sera  $\omega u$ , et si on le ramène à une autre pression donnée constante  $p_2$ , deviendra :

$$\frac{p_1 \omega u}{p_2} = \frac{\omega}{p} p_1 \sqrt{2g RT_0 \text{Log.} \frac{p_0}{p_1}}.$$

Le volume de gaz écoulé, mesuré à une pression constante quelconque  $p_2$ , est donc proportionnel au produit :

$$p_1 \sqrt{\text{Log.} \frac{p_0}{p_1}}.$$

Ce produit s'annule pour  $p_1 = 0$ , il en résulterait qu'un réservoir de gaz comprimé ne s'écoulerait pas dans le vide absolu. Il n'est pas nécessaire d'insister sur l'absurdité d'un pareil résultat, dont la vérification expérimentale a cependant tenté quelques physiciens.

En second lieu, si la pression  $p_0$ , à l'intérieur du réservoir est donnée, le volume écoulé, s'annulant pour  $p_1 = 0$  et pour  $p_1 = p_0$  passe, pour une valeur intermédiaire de  $p_1$ , par un maximum que l'on trouve en annulant la dérivée, par rapport à  $p_1$ , du produit qui précède. On trouve ainsi :

$$p_1 = \frac{p_0}{\sqrt{e}} = 0,607 p_0,$$

pour la valeur de la pression extérieure correspondant au maximum du débit.

L'expérience ne confirme nullement ces résultats paradoxaux, qui ne sont obtenus que parce que la formule de Navier suppose constante la température du gaz pendant l'écoulement, ce qui ne peut avoir lieu que moyennant une addition de chaleur déterminée.

En réalité les circonstances de l'écoulement sont fonction de la quantité de chaleur introduite, et si cette quantité est nulle, l'écoulement est réglé par la formule (11) et non par celle de Navier.

En réalité, dans les circonstances les plus ordinaires, c'est plutôt la formule (11) correspondant à l'écoulement adiabatique qu'il faut appliquer <sup>1</sup>. C'est généralement sans perte ni gain appréciable de chaleur que se produit l'écoulement d'un gaz qui sort d'un réservoir. Il se produit alors un abaissement de température et l'on peut calculer la température  $T_1$  de la veine qui s'écoule ; elle est :

$$T_1 = T_0 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Pour que la température restât constante, comme le suppose la formule (12) de Navier, il faudrait fournir au gaz une quantité de chaleur :

$$Q = A \frac{u^2}{2g} = ART_0 \text{ Log. } \frac{p_0}{p_1}.$$

L'expérience ne confirme pas absolument les résultats du calcul. Il se produit, au pourtour de l'orifice, des frottements qui absorbent une certaine quantité de travail, et la vitesse effective  $U$  est inférieure à la vitesse  $u$  donnée par la formule. On a ainsi, en appelant  $\gamma$  un coefficient plus petit que l'unité :

$$U = \gamma u.$$

Les expériences de Weisbach ont montré que, pour des orifices en mince paroi, le coefficient  $\gamma$  était environ 0,98. Avec des ajutages cylindriques très courts, sa valeur est descendue au-dessous de 0,80.

**259. Coefficients de débit pour l'air et pour la vapeur d'eau.** — Il se produit aussi, lorsque l'orifice est en mince paroi, une contraction de la veine fluide ; la section d'écoulement est inférieure à celle  $\omega$  de l'orifice, elle n'est qu'une fraction, représentée par un coefficient  $\mu < 1$ , de celle-ci, et le coefficient de débit, produit des deux coefficients  $\gamma$  et  $\mu$ , varie suivant la charge et suivant la forme des orifices.

M. George Wilson a exécuté un grand nombre d'expériences très précises afin de déterminer ce coefficient de débit. Il a opéré avec les précautions les plus minutieuses pour en assurer l'exactitude, et il en a donné la description détaillée et les résultats dans le journal

1. Il serait sans doute, en tout cas, toujours possible de rendre cette formule (11) conforme aux conditions thermiques de l'écoulement, en y adoptant, d'après les idées de M. Kraft, une valeur intermédiaire entre 1,41 et 1 pour le coefficient  $k$ .

l'*Engineering* de 1872, 1<sup>er</sup> semestre, auquel je renverrai le lecteur pour la description des procédés employés et les résultats de détail; je me bornerai à donner les résultats résumés.

Les expériences ont porté sur l'air atmosphérique et sur la vapeur d'eau : les lois observées sont les mêmes, les coefficients seuls paraissent un peu différents : légèrement plus élevés pour la vapeur que pour l'air.

Les coefficients donnés dans les deux tableaux qui suivent s'appliquent à l'écoulement par un orifice circulaire ayant la forme d'une *veine contractée*, ainsi définie : le diamètre de l'orifice, à l'intérieur du réservoir, étant pris pour unité, se trouve réduit progressivement de manière à n'être plus que 0,785 à une distance égale à la moitié de ce plus grand diamètre, c'est-à-dire que la section d'écoulement se trouve réduite de 1 à 0,616 environ. Le débit est calculé, naturellement, sur la section contractée qui, dans la plupart des orifices expérimentés, se trouvait prolongée cylindriquement sur une longueur plus ou moins grande; ces orifices présentaient ainsi, en somme, l'aspect d'un tuyau cylindrique évasé vers l'intérieur suivant la forme supposée de la veine fluide, de telle sorte que le diamètre à l'entrée se trouvait être d'environ 1,275 ou  $1 + \frac{11}{40}$  de celui du tuyau.

L'écoulement du gaz ou de la vapeur s'effectuait dans l'atmosphère, et la pression dans le réservoir, qui était maintenue constante, dépassait la pression atmosphérique de la quantité indiquée dans la première colonne du tableau sous le titre *pression d'écoulement*.

Les coefficients de débit indiqués au tableau doivent être diminués approximativement des corrections suivantes, savoir :

- 0,030, lorsque l'écoulement a lieu par un tube d'une longueur égale à une fois et demie environ son diamètre, les angles intérieurs de l'orifice étant bien arrondis ;
- 0,130 lorsque l'écoulement a lieu par un tube à arêtes vives d'une longueur comprise entre 1,25 et 2,50 fois le diamètre ;
- 0,235 id. id. longueur égale à 12 fois le diamètre ;
- 0,280 id. id. longueur égale à 24 fois le diamètre ;
- 0,360 lorsque l'écoulement a lieu par un orifice en mince paroi, (d'une épaisseur égale environ au dixième du diamètre de l'orifice), sous une pression très faible d'environ 40 millimètres d'eau ;
- 0,210 id. id. sous une pression d'environ une atmosphère.

Les expériences de M. Wilson lui ont d'ailleurs permis d'énoncer les remarques générales suivantes :

1<sup>o</sup> Tandis que dans l'écoulement d'un liquide par un orifice en forme de veine contractée, le volume écoulé est exactement égal à celui de la théorie, il est plus faible lorsqu'il s'agit d'un fluide élastique. La différence est extrêmement petite aux pressions inférieures à cinq millimètres d'eau, mais elle augmente avec la pression.

2<sup>o</sup> La différence dont il s'agit ou la diminution du volume de gaz écoulé paraît d'autant plus grande que le poids spécifique du gaz est lui-même plus grand : elle est plus grande pour l'air atmosphérique que pour la vapeur d'eau ; elle serait plus grande pour l'acide carbonique que pour l'air ; pour celui-ci que pour l'hydrogène, etc. Elle serait aussi plus grande, à pression d'écoulement égale, pour l'air comprimé que pour l'air à la pression ordinaire ; ainsi le coefficient de débit d'un orifice laissant écouler de l'air d'un réservoir à la pression de 1700 millimètres de mercure dans un autre à la pression de 1690 millimètres, soit avec une pression d'écoulement de 10 millimètres, serait plus faible que celui du même orifice laissant écouler dans l'atmosphère l'air d'un réservoir à la pression de 10 millimètres.

3<sup>o</sup> Les orifices ayant la forme de la veine contractée donnent, toutes choses égales, un débit supérieur aux orifices de toute autre forme.

4<sup>o</sup> Le coefficient de débit reste le même pour les orifices en forme de veine contractée lorsque le diamètre varie de un à trois centimètres.

5<sup>o</sup> Le coefficient de débit ne semble pas affecté par la température ; il reste le même quoique la température change, à la condition, toutefois, que l'on tienne compte de la modification correspondante du poids spécifique.

Je ne pense pas que ces résultats aient jamais été ni vérifiés ni contestés. En tout cas il semblerait intéressant d'établir, par de nouvelles expériences, la loi qui relie la variation du coefficient de débit au poids spécifique du fluide. Actuellement les chiffres donnés par M. Wilson sont les seuls un peu précis que je connaisse sur cette difficile et importante question.

Tableau des coefficients de débit de l'air dans l'atmosphère par des orifices en forme de veine contractée, d'après M. George Wilson<sup>1</sup>.

Pression d'écoulement		Coefficient de débit	Pression d'écoulement		Coefficient de débit
en millimètres d'eau	en grammes par centimètre carré		en mètres d'eau	en grammes par centimètre carré	
5 mm.	0gr 5	0,994	1 m »	100 gr	0,894
10	1 »	0,987	1 10	110	0,887
15	1 5	0,984	1 20	120	0,884
20	2 »	0,982	1 30	130	0,881
25	2 5	0,980	1 40	140	0,878
30	3 »	0,978	1 50	150	0,874
35	3 5	0,976	1 60	160	0,871
40	4 »	0,974	1 70	170	0,867
50	5 »	0,973	1 80	180	0,864
60	6 »	0,972	2 »	200	0,858
70	7 »	0,970	2 20	220	0,852
80	8 »	0,968	2 40	240	0,846
100	10 »	0,964	2 60	260	0,840
120	12 »	0,959	2 80	280	0,834
150	15 »	0,953	3 »	300	0,828
200	20 »	0,948	3 50	350	0,814
250	25 »	0,942	4 »	400	0,802
300	30 »	0,936	4 50	450	0,790
400	40 »	0,922	5 »	500	0,780
500	50 »	0,916	5 50	550	0,769
600	60 »	0,910	6 »	600	0,760
700	70 »	0,905	6 50	650	0,751
800	80 »	0,900	7 »	700	0,744
900	90 »	0,896	8 »	800	0,733

1. Dans les tableaux donnés par M. George Wilson, les coefficients de débit ne sont donnés que pour des pressions exprimées en nombres ronds de livres anglaises par pouce carré. Pour la commodité du lecteur français j'ai adopté les pressions en grammes ou en kilogrammes par centimètre carré et j'ai calculé, par interpolation, les coefficients de débit correspondants.

Tableau des coefficients de débit de la vapeur d'eau dans l'atmosphère par des orifices en forme de veine contractée, d'après M. George Wilson.

Pression d'écoulement		Coefficient de débit	Pression d'écoulement		Coefficient de débit
en millimètres de mercure	en grammes par centimètre carré		en atmosphères	en kilogrammes par centimètre carré	
50 mm.	67gr 8	0,930	1 atm 05	1 kil. 085	0,735
75	101 7	0,915	1 10	1 137	0,730
100	135 6	0,904	1 15	1 188	0,725
125	169 5	0,893	1 20	1 240	0,723
150	203 4	0,883	1 25	1 292	0,720
175	237 3	0,873	1 30	1 343	0,717
200	271 2	0,865	1 35	1 395	0,714
225	305 1	0,857	1 40	1 447	0,711
250	339 0	0,850	1 45	1 498	0,708
275	372 9	0,843	1 50	1 550	0,705
300	406 8	0,836	1 60	1 653	0,702
325	440 7	0,829	1 70	1 756	0,699
350	474 6	0,822	1 80	1 860	0,696
375	508 5	0,815	1 90	1 963	0,693
400	542 4	0,809	2 »	2 067	0,689
425	576 3	0,803	2 10	2 170	0,686
450	610 2	0,797	2 20	2 274	0,684
475	644 1	0,792	2 30	2 377	0,682
500	678 0	0,787	2 40	2 480	0,680
525	711 9	0,782	2 50	2 584	0,679
550	745 8	0,777	2 75	2 842	0,675
575	779 7	0,772	3 »	3 100	0,675
600	813 6	0,767	3 50	3 617	0,662
625	847 5	0,762	4 »	4 134	0,657
650	881 4	0,757	4 50	4 650	0,650
675	915 3	0,753	5 »	5 167	0,642
700	949 2	0,749	5 50	5 684	0,635
725	983 1	0,746	6 »	6 200	0,629
750	1017 0	0,742	6 50	6 717	0,624
760	1033 4	0,740	7 »	7 234	0,620

**260. Aspiration accompagnant la contraction de la veine gazeuse.** — Lorsqu'un gaz sort d'un orifice en mince paroi ou en paroi épaisse, et débouche dans l'atmosphère ou dans un autre milieu, le frottement des particules en mouvement sur celles qui sont en repos et qui entourent la veine gazeuse entraîne celles-ci et produit un vide relatif ou une diminution de pression analogue à celle que l'on constate dans un ajutage cylindrique où s'écoule une veine liquide. Cet effet d'entraînement est d'autant plus grand que la vitesse du gaz qui sort est plus rapide ou que la pression dans le réservoir est plus considérable.

Une observation qui met ce fait en évidence a été faite par M. Lauriol, ingénieur des ponts et chaussées<sup>1</sup>. Un entonnoir en

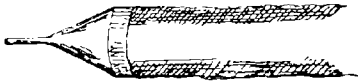


Fig. 116.

métal communique par le bout avec un réservoir contenant de l'hydrogène comprimé à 300 atmosphères. La communication peut être établie ou interrompue à l'aide d'un robinet. Au bout large est adapté un tube en

étouffe de soie vernie débouchant dans l'atmosphère ou dans une capacité où la pression est peu différente (fig. 116). Lorsqu'on établit la communication, le tuyau d'étouffe, au lieu de se gonfler sur toute sa longueur est aspiré vers l'intérieur de l'entonnoir, tout le long du



Fig. 117.

bord, comme on l'a représenté en coupe sur la fig. 117, et ne se gonfle qu'à un mètre environ de l'entonnoir.

**261. Écoulement varié des gaz. Remplissage d'un réservoir.** — Les formules précédentes (11) et (12), déduites de celle de Zeuner, donnent la vitesse d'écoulement d'un gaz sortant d'un réservoir à pression constante  $p_0$  lorsque la pression d'aval est constante et égale à  $p_1$ . Il est assez rare que le problème se présente avec cette simplicité, et le plus souvent le gaz sortant d'un réservoir sert à en remplir un autre où la pression est d'abord inférieure, puis va en croissant. La pression dans le réservoir alimentaire peut être considérée comme constante, soit à cause de ses grandes dimensions par rapport à celle du réservoir alimenté, soit plus ordinairement parce qu'il est maintenu à pression constante par des pompes ou des compresseurs dont le fonctionnement y introduit, à

1. *Journal de l'éclairage au gaz*, 20 février 1891.



chaque instant, une quantité de gaz égale à celle qui s'en écoule. Le remplissage progressif du récipient se fait au contraire à une pression croissante d'abord égale à  $p_1$  (ordinairement la pression atmosphérique), puis augmentant jusqu'à ce qu'elle devienne égale à celle  $p_0$  du réservoir alimentaire. Le remplissage est alors complet.

Ce problème a été traité pour la première fois par M. Haton de la Goupillière dans une note présentée à l'Académie des sciences dans les séances des 18, 26 octobre et 2 novembre 1886, à laquelle nous empruntons ce qui va suivre.

Désignons par  $V$  la capacité du récipient, primitivement plein de gaz à la pression  $p_1$ , qu'il s'agit de remplir en le mettant en communication avec un réservoir indéfini où la pression est maintenue constante,  $p_0$ . Appelons  $p$  la pression variable, intermédiaire entre  $p_1$  et  $p_0$ , qui se trouve à l'époque  $t$  dans le récipient  $V$ , et  $\Pi$  le poids de l'unité de volume, également variable, du gaz, à la même époque dans le même récipient. Le poids du gaz qu'il contiendra, à cette époque  $t$ , sera  $V\Pi$  et pendant un temps élémentaire  $dt$ , ce poids s'accroîtra de  $Vd\Pi$ . D'autre part, en désignant par  $\omega$  la section de l'orifice, par  $m$  le coefficient de débit et par  $u$  la vitesse d'écoulement à l'époque considérée, le volume écoulé pendant ce temps  $dt$  sera  $m\omega udt$  et le poids correspondant sera  $m\omega\Pi udt$ . Nous avons ainsi l'égalité :

$$Vd\Pi = m\omega\Pi udt.$$

Mais, pour reprendre les notations employées plus haut, nous avons, entre le poids  $\Pi$  de l'unité de volume et le volume  $v$  de l'unité de poids du gaz, la relation  $v\Pi = 1$  ou  $v d\Pi + \Pi dv = 0$ . Cela nous permet de remplacer, dans l'égalité précédente,  $d\Pi$  par  $-\frac{\Pi dv}{v}$  et de l'écrire :

$$\frac{m\omega}{V} dt = -\frac{1}{u} \frac{dv}{v}.$$

D'autre part, l'équation (7) de St-Venant nous donne la valeur de  $u$  :

$$\frac{a^2}{2g} = \int_v^{v_0} v dp = \int_v^{v_0} v \frac{dp}{dv} dv,$$

d'où, en substituant :

$$dt = -\frac{V}{m\omega\sqrt{2g}} \cdot \frac{dv}{v \sqrt{\int_v^{v_0} v \frac{dp}{dv} dv}}.$$

Et, pour avoir le temps  $t$  qui se sera écoulé depuis l'époque où le volume de l'unité de poids  $v$  avait la valeur  $v_1$  dans le récipient, c'est-à-dire depuis le commencement de l'écoulement jusqu'à celle où cette variable a une valeur quelconque  $v$ , il suffira d'intégrer cette expression entre les deux limites  $v_1$  et  $v$ . Puis, en faisant  $v = v_0$ , on aura la durée totale du remplissage.

L'intégrale qui figure sous le radical, en dénominateur, dépendra de la loi de variation de  $p$  avec  $v$ , et cette loi, elle-même, dépendra des conditions thermiques de l'écoulement.

Si, par exemple, l'écoulement est isotherme, c'est-à-dire si l'on fournit au gaz la quantité de chaleur nécessaire pour que sa température  $T$  reste constante, on aura toujours :

$$pv = RT, \quad p = \frac{RT}{v},$$

$$v \frac{dp}{dv} dv = -RT \frac{dv}{v}.$$

et par suite :

$$\int_v^{v_0} v \frac{dp}{dv} dv = RT \operatorname{Log} \frac{v_0}{v}.$$

D'où, en substituant :

$$dt = - \frac{V}{m\omega \sqrt{2gRT}} \frac{dv}{v \sqrt{\operatorname{Log} \frac{v}{v_0}}};$$

et par suite :

$$t = - \frac{V}{m\omega \sqrt{2gRT}} \int_{v_1}^{v_0} \frac{dv}{v \sqrt{\operatorname{Log} \frac{v}{v_0}}} = \frac{V}{m\omega} \sqrt{\frac{2}{gRT}} \left( \sqrt{\operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0}} - \sqrt{\operatorname{Log} \frac{v_0}{v_0}} \right)$$

On peut remplacer les rapports  $\frac{v_1}{v_0}$  et  $\frac{v}{v_0}$  par les rapports inverses des pressions  $\frac{p_0}{p_1}$  et  $\frac{p_0}{p}$  et si l'on fait  $v = v_0$  (ou  $p = p_0$ ) pour avoir la durée totale  $\mathfrak{E}$  du remplissage, on trouvera :

$$\mathfrak{E} = \frac{V}{m\omega} \sqrt{\frac{2}{gRT}} \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0}.$$

Mais il est rare que l'écoulement suive cette loi isothermique. Bien plus ordinairement, il s'effectue sans perte ni gain de chaleur,

c'est-à-dire suivant la loi adiabatique. On a alors, à une époque quelconque :

$$p v^k = p_0 v_0^k, \quad p = \frac{p_0 v_0^k}{v^k} = p_0 v_0^k v^{-k},$$

$$v \frac{dp}{dv} dv = -k p_0 v_0^k v^{-k-1} dv,$$

et par suite :

$$\int_v^{v_0} v \frac{dp}{dv} dv = \frac{k}{k-1} p_0 v_0^k (v_0^{1-k} - v^{1-k}) = \frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{1-k} \right];$$

d'où en substituant :

$$dt = - \frac{V}{m\omega \sqrt{2gRT} \frac{k}{k-1} p_0 v_0} \cdot \frac{dv}{v \sqrt{1 - \left( \frac{v_0}{v} \right)^{1-k}}}.$$

Pour effectuer cette intégration, M. Haton de la Goupillière prend comme variable auxiliaire :

$$x^2 = \left( \frac{v}{v_0} \right)^{1-k}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2dx}{x} = (1-k) \frac{dv}{v}.$$

ce qui donne, en substituant après avoir changé de signe :

$$dt = \frac{2V}{m\omega \sqrt{2gRkT} (k-1) x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'intégrale de  $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$  étant  $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ , on en déduit, en intégrant entre les limites  $v_1$  et  $v$  et remplaçant dans le résultat le rapport  $\frac{v_1}{v}$  par  $\left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}}$  :

$$t = \frac{V}{m\omega \sqrt{gRTk(k-1)}} \text{Log} \left[ \frac{\left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1-k}{2k}} \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}} \right)}{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}}} \right]$$

La durée totale  $\mathfrak{E}$  du remplissage, obtenue en faisant  $p = p_0$ , est :

$$\mathfrak{E} = \frac{V}{m\omega \sqrt{gRTk(k-1)}} \cdot \text{Log} \left[ \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{2k}} + \sqrt{\left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1} \right].$$

Pour un récipient de 1 mètre cube ( $V = 1\text{mc}$ ) et un orifice circu-

laire de 0 m. 10 de diamètre ( $\omega = \frac{\pi}{4} = 0^{\text{m}2},785$ ), une température de 20° centigrades ( $T = 293^{\circ}$ ) et un rapport des pressions égal à 2 ( $\frac{p_0}{p_1} = 2$ ), M. Haton a trouvé pour la durée du remplissage 4<sup>s</sup>,56. Lorsque, à la même température, le rapport des pressions prend les valeurs suivantes :

$$\frac{p_0}{p_1} = 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 10, \quad 20, \quad 30,$$

la durée du remplissage devient respectivement :

$$\bar{c} = 4^{\text{s}},56 ; 5^{\text{s}},16 ; 5^{\text{s}},57 ; 5^{\text{s}},88 ; 6^{\text{s}},85 ; 7^{\text{s}},87 ; 8^{\text{s}},49.$$

Lorsque  $\frac{p_0}{p_1}$  n'est que de 1,1, la durée du remplissage s'abaisse à six dixièmes de seconde.

La durée  $\bar{c}$  est proportionnelle au volume  $V$  et les valeurs qui viennent d'être écrites s'appliquent à la valeur  $V = 1$  mc. Elle est inversement proportionnelle à la superficie  $\omega$  de l'orifice par lequel le gaz s'écoule, ou au carré du diamètre de cet orifice s'il est circulaire. Les valeurs précédentes de  $\bar{c}$  s'appliquent à un orifice circulaire de 0 m. 1 de diamètre.

Enfin, elle varie suivant la nature du gaz en raison inverse de  $\sqrt{R}$ . Les valeurs ci-dessus se rapportent à l'air atmosphérique. Les variations de la température sont peu importantes en pratique : les valeurs calculées pour la température de 20° centigrades ou pour  $T = 293$ , seraient à peu près applicables aux températures comprises entre 10° et 30°, c'est-à-dire aux valeurs de  $T$  comprises entre 283 et 303, lesquelles correspondent à peu près aux cas les plus ordinaires de la pratique.

M. Haton de la Goupillière a traité également le problème qui consiste à trouver la durée de la vidange d'un réservoir dans un espace où la pression est constante, comme l'atmosphère. Ce problème semble avoir moins d'utilité pratique que celui qui vient d'être résolu. L'intégration des équations n'a pu s'y faire qu'en attribuant au coefficient  $k$  la valeur approximative  $\frac{7}{5}$ , et la formule à laquelle on arrive est plus compliquée que les précédentes.

### 262. Écoulement d'un gaz par une longue conduite.

— Le problème de l'écoulement permanent d'un gaz par une longue conduite a une application fréquente dans la distribution du

gaz qui sert à l'éclairage. Il ne pourrait se résoudre d'une manière rigoureuse, de même que tous ceux qui précèdent, que si l'on connaissait parfaitement les conditions thermiques de l'écoulement. Mais on peut, lorsqu'il s'agit des applications au gaz d'éclairage, supposer, avec une approximation suffisante, que la température du gaz reste constante. A la vérité cette hypothèse entraîne comme conséquence des échanges de chaleur entre le gaz et les parois de la conduite dans laquelle il s'écoule, car, ainsi que nous l'avons vu, toute transformation isothermique est nécessairement accompagnée de gain ou de perte de chaleur, et l'écoulement du gaz ne peut avoir lieu qu'autant que sa pression et sa densité varient d'un point à l'autre de la conduite. Mais ces variations sont faibles, en général, et s'effectuent lentement ; les petites variations de température, dont elles seraient accompagnées si le gaz ne recevait ni ne perdait de chaleur, disparaissent bien vite par suite du contact du gaz avec les parois de la conduite dont la température est maintenue constante par la terre qui l'entoure. Ces parois cèdent ou prennent au gaz les petites quantités de chaleur nécessaires pour le maintenir à une même température sans que la leur en soit sensiblement affectée.

Avec cette hypothèse de l'écoulement isothermique, le problème de l'écoulement du gaz dans une conduite devient plus facile.

Il reste toujours à déterminer l'action des parois sur le gaz, mais on l'exprime simplement, comme le frottement d'un liquide dans les mêmes conditions, par une fonction de la vitesse moyenne. Le problème peut alors se mettre en équation de la manière suivante :

Supposons que tous les filets du gaz dans une même section trans-

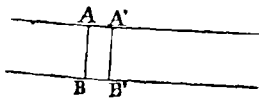


Fig. 118

versales aient des vitesses égales à la vitesse moyenne  $U$ , et considérons, dans une conduite à diamètre constant  $D$  (fig. 118), deux sections transversales infiniment voisines  $AB$ ,  $A'B'$  à une distance  $ds = Udt$  l'une de l'autre. Désignons, pour abrégé, par  $\omega$

l'aire  $\frac{\pi D^2}{4}$  et par  $\chi$  le périmètre  $\pi D$  de la section de la conduite, et

aussi par  $p$  la pression et par  $\Pi$  le poids spécifique du gaz dans l'espace infiniment petit considéré. La masse du gaz comprise entre

ces deux sections infiniment voisines sera  $\frac{\Pi}{g} \omega ds$ , et l'accroissement

de la quantité de mouvement de cette masse, rapporté à l'unité de temps, sera, si nous admettons que toutes les molécules passent simultanément de la vitesse  $U$  à la vitesse  $U + dU$ , le produit de cette masse par le rapport de  $dU$  à l'élément de temps  $dt$  pendant

lequel cette augmentation de vitesse a eu lieu. Ce sera ainsi :

$$\frac{\Pi}{g} \omega ds \frac{dU}{dt}.$$

Cet accroissement de la quantité de mouvement doit être égal à la somme des projections des forces sur la direction de la vitesse  $U$ , ou sur l'axe du tuyau. La pression sur la section  $AB$  est  $p\omega$ , sur la section  $A'B'$  elle est  $-(p + dp)\omega$ ; et ces deux forces se projettent en vraie grandeur. La pesanteur, ou le poids de la tranche considérée est  $\Pi\omega ds$  et sa projection sur l'axe sera, en appelant  $dz$  la différence de niveau des centres de gravité des sections  $AB$ ,  $A'B'$ , égale  $-\Pi\omega dz$ . Enfin le frottement, exprimé par une fonction  $f(U)$  de la vitesse moyenne, est proportionnel à la surface  $\chi ds$  sur laquelle il s'exerce; il vaudra donc ainsi  $-\chi f(U) ds$  et se projettera en vraie grandeur sur l'axe du tuyau. On aura, en réunissant tous ces termes, l'équation :

$$\frac{\Pi}{g} \omega ds \frac{dU}{dt} = -\omega dp - \Pi\omega dz - \chi f(U) ds.$$

ou, remplaçant dans le premier terme,  $\frac{ds}{dt}$  par  $U$  et divisant tous les termes par  $\Pi\omega$  :

$$\frac{U dU}{g} + \frac{dp}{\Pi} + dz + \frac{\chi}{\omega} \frac{f(U)}{\Pi} ds = 0;$$

équation tout à fait analogue à celle que nous avons trouvée plus haut pour les liquides.

Les expériences de M. Arson ont montré que, par analogie avec ce que Prony avait indiqué par l'écoulement de l'eau, le terme  $\frac{f(U)}{\Pi}$  qui représente le frottement peut s'exprimer par une fonction du second degré de  $U$  et que l'on peut poser :

$$\frac{f(U)}{\Pi} = aU + bU^2,$$

$a$  et  $b$  étant des coefficients numériques variables avec le diamètre de la conduite.

**263. Formule de l'écoulement.** — D'autre part, il y a entre  $\Pi$  et  $U$  une relation nécessaire qui exprime que le poids de gaz débité est le même, à travers toutes les sections de la conduite puisque le mouvement est supposé permanent; ce poids a pour

valeur, pendant l'unité de temps  $\Pi\omega U$ , et ce produit doit être constant ; comme d'ailleurs  $\omega$  est constant, il en résulte :

$$\Pi U = \text{constante.}$$

D'autre part, la température du gaz étant aussi, par hypothèse, la même dans toutes les sections, le poids spécifique  $\Pi$  est proportionnel à la pression ; le rapport  $\frac{p}{\Pi}$  est constant. Désignons-le par  $K$ , ou posons :

$$\frac{p}{\Pi} = K.$$

Le produit  $\Pi U$  étant constant, il en sera de même du produit  $pU$  et nous pourrons écrire, en appelant  $K'$  une nouvelle constante :

$$pU = K'.$$

Il en résulte :

$$U = \frac{K'}{p} \quad \text{et} \quad dU = -\frac{K' dp}{p^2}.$$

Substituons ces nouvelles notations dans l'équation précédente ; elle devient, après avoir multiplié tous les termes par  $p^2$ .

$$\frac{K'^2 dp}{gp} = p^2 dz + Kp dp + \frac{\chi}{\omega} (aKp + bK^2) ds.$$

Les deux termes  $p^2 dz$  et  $p ds$  ne sont pas immédiatement intégrables ; on ne pourrait les intégrer que si l'on connaissait la loi de variation de la pression  $p$  avec la longueur  $s$  de la conduite ou avec la différence de niveau  $z$  des sections successives ; mais, lorsqu'il s'agit de conduites dans lesquelles la pression varie peu, il est permis d'en négliger les variations dans les deux termes dont il s'agit, dont le premier surtout est ordinairement peu important, et d'y substituer, à la pression variable  $p$ , la valeur moyenne  $\frac{1}{2} (p_0 + p_1)$  entre les pressions  $p_0$  et  $p_1$  aux deux extrémités de la portion de conduite à laquelle on applique le calcul. Désignons par  $L$  la longueur totale de cette conduite, par  $h$  la différence de niveau de ses extrémités,  $h$  étant positif si l'extrémité d'aval est plus élevée que celle d'amont et négatif dans le cas contraire, l'intégration, effectuée sur la longueur  $L$  aux deux extrémités de laquelle existent les pressions  $p_0$  et  $p_1$ , donnera, en mettant pour  $\frac{\chi}{\omega}$  sa valeur  $\frac{4}{D}$  :

$$\frac{K'^2}{g} \text{Log.} \frac{p_1}{p_0} = \frac{(p_0 + p_1)^2}{4} h + K \frac{p_1^2 - p_0^2}{2} + \frac{4KL}{D} \left( a \frac{p_0 + p_1}{2} + bK' \right).$$

Suivant que l'on voudra calculer la vitesse moyenne  $U_0$  à l'entrée de la conduite ou  $U_1$  à la sortie, on remplacera, dans cette équation, la constante  $K'$  par  $p_0 U_0$  ou par  $p_1 U_1$ .

Si, par exemple, on veut connaître la vitesse  $U_0$  à l'entrée de la conduite, ce qui, dit M. Arson <sup>1</sup>, à qui nous empruntons ce calcul, conduit à une expression qui est en rapport plus direct avec les volumes observés dans les gazomètres, on trouve l'équation :

$$\begin{aligned} \left( \frac{4bL}{D} - \frac{1}{g} \text{Log.} \frac{p_1}{p_0} \right) U_0^2 + \frac{2aL}{D} \left( 1 + \frac{p_1}{p_0} \right) U_0 &= \\ = \frac{K}{2} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^2 \right] - \frac{h}{4} \left( 1 + \frac{p_1}{p_0} \right)^2. \end{aligned}$$

Au contraire si l'on veut connaître la vitesse  $U_1$  à la sortie, ce qui est en rapport plus direct avec les volumes mesurés à la consommation, on trouvera l'équation :

$$\begin{aligned} \left( \frac{4bL}{D} + \frac{1}{g} \text{Log.} \frac{p_0}{p_1} \right) U_1^2 + \frac{2aL}{D} \left( 1 + \frac{p_0}{p_1} \right) U_1 &= \\ = \frac{K}{2} \left[ \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^2 - 1 \right] - \frac{h}{4} \left( 1 + \frac{p_0}{p_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Chacune de ces équations est du second degré, soit en  $U_0$ , soit en  $U_1$  ; elle fournit donc deux valeurs pour l'inconnue ; mais en général, avec les données ordinaires de la pratique, l'une des racines est négative et ne répond pas à la question. Si, par suite de circonstances absolument exceptionnelles on trouvait deux racines positives, leur comparaison avec les données ne laisserait aucun doute sur celle qui doit être choisie et qui sera, en général, la plus grande.

**264. Valeur des coefficients.** — Il convient de remarquer que le coefficient  $K = \frac{p}{\Pi}$  représente le produit de la pression  $p$  par l'inverse du poids spécifique ou par le volume de l'unité de poids, que nous avons appelé  $v$  dans les numéros précédents. On a ainsi, d'après la loi de Mariotte, que nous supposons applicable :

$$K = \frac{p}{\Pi} = pv = RT.$$

La valeur de  $R$  a été donnée plus haut pour divers gaz et en par-

1. Expériences sur l'écoulement des gaz en longues conduites par M. Arson, ingénieur en chef de la Compagnie parisienne du Gaz. Paris 1867.



ticulier pour le gaz d'éclairage,  $T$  est la température absolue, ou celle de l'échelle centigrade augmentée de  $273^{\circ}$ .

Les coefficients  $a$  et  $b$  ont été déterminés par les expériences de M. Arson. Il a trouvé qu'ils sont variables avec le diamètre des conduites et qu'ils vont en décroissant, d'une manière très appréciable pour les petits diamètres, à mesure que cette dimension augmente. De plus, comme pour les conduites d'eau, la nature de la paroi influe sur la valeur de ces coefficients. Les chiffres ci-après se rapportent aux conduites en fonte, qui sont le plus généralement employées.

Diamètre de la conduite D	Coefficient a	Coefficient b
0,05	0,000702	0,000595
0,081	0,000589	0,000489
0,103	0,000560	0,000480
0,254	0,000237	0,000359
0,325	0,000151	0,000326
0,500	0,000020	0,000246

Dans les conduites en fer-blanc, des expériences ont été faites seulement avec des diamètres de 0 m. 05 et l'on a trouvé, pour  $a$  et  $b$  les valeurs suivantes :

$$a = 0,000738, \quad b = 0,000345.$$

Pour les diamètres intermédiaires des conduites en fonte, on interpolerait, afin d'avoir les valeurs correspondantes de  $a$  et de  $b$ . Pour les diamètres supérieurs à 0 m. 50, M. Arson pense que l'on peut prendre  $a = 0$  et :

$$b = 0,000202 \text{ pour } D = 0 \text{ m. } 60$$

$$b = 0,000200 \text{ pour } D = 0 \text{ m. } 70.$$

D'après la forme de la courbe jointe au travail de M. Arson, et qui représente les variations de  $b$  en fonction du diamètre  $D$ , on serait sans doute conduit à adopter, pour les diamètres supérieurs à 0 m. 70, une valeur constante, voisine de 0,000200, pour le coefficient  $b$ .

**265. Simplification de la formule.** — Les formules précédentes, destinées à donner la vitesse moyenne  $U_0$  ou  $U_1$  en fonction des pressions extrêmes  $p_0$  et  $p_1$ , sont assez compliquées ; on peut en général, dans les applications, les simplifier en leur conservant une approximation suffisante. D'abord, si les pressions  $p_0$  et  $p_1$  sont peu différentes l'une de l'autre, le rapport  $\frac{p_1}{p_0}$  est voisin

de l'unité, son logarithme est très petit et peut être négligé en présence du terme précédent lorsque la longueur  $L$ , qui affecte ce terme, est un peu grande. On peut aussi, dans le terme en  $U_0$  et dans le terme en  $h$ , remplacer par l'unité le rapport  $\frac{p_1}{p_0}$ ; et enfin le facteur  $1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2$  peut être écrit  $\left(\frac{p_1}{p_0} + 1\right)\left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)$  ou  $\frac{2(p_0 - p_1)}{p_0}$ . Avec ces simplifications, l'équation en  $U_0$  devient :

$$\frac{4L}{D} (aU_0 + bU_0^2) = K \frac{(p_0 - p_1)}{p_0} - h.$$

L'équation en  $U_1$  donnerait la même chose avec  $p_1$  au lieu de  $p_0$  au dénominateur du premier terme du second membre; les deux vitesses  $U_0$  et  $U_1$  sont donc elles-mêmes peu différentes.

Dans les applications, on considère qu'elles sont sensiblement égales et on adopte, pour la vitesse moyenne d'un gaz qui s'écoule par une conduite, une valeur moyenne  $U$  qui correspond à une pression moyenne intermédiaire entre  $p_0$  et  $p_1$ . Dans cette hypothèse simplificative, on remplacera donc, en même temps que  $U_0$  par  $U$ , la pression  $p_0$  par cette valeur moyenne, ou le rapport  $\frac{K}{p_0}$  par

l'inverse du poids spécifique du gaz, mesuré à cette pression moyenne et représenté par  $\Pi$ . Si, de plus, toujours en vue de simplifier, on suppose que les deux extrémités de la conduite sont au même niveau,  $h = 0$ ; et l'on obtient la formule suivante, qui est suffisante pour les applications à la distribution du gaz d'éclairage :

$$p_0 - p_1 = \frac{4L}{D} \Pi (aU + bU^2).$$

On peut, comme on l'a fait pour les liquides, représenter par  $J$  la perte de charge ou la perte de pression par unité de longueur, et poser  $J = \frac{p_0 - p_1}{L}$ . La formule devient alors :

$$J = \frac{4}{D} \Pi (aU + bU^2).$$

Cette formule est alors identique à celle de Prony, que nous avons donnée au n° 80 pour l'écoulement de l'eau, le poids spécifique  $\Pi$  étant alors égal à l'unité. On peut même remarquer que les coefficients numériques, proposés par Prony pour l'eau, sont peu différents de ceux que M. Arson a trouvés pour le gaz, lorsque le diamètre est un peu grand. C'est au moyen de cette formule

qu'ont été calculées par M. Arson les tables numériques servant à déterminer les diamètres des conduites de gaz qui, sous une pression donnée, doivent débiter un volume également donné.

Dans un remarquable travail intitulé : *Etude théorique sur l'écoulement des gaz en longues conduites*<sup>1</sup>, M. Lucien Monnier a établi, par des considérations purement théoriques, la formule suivante, pour la perte de charge dans les conduites :

$$J = 2729\sqrt{\delta} \frac{Q}{D^3},$$

dans laquelle  $J$  est la perte de charge en millimètres d'eau par mètre de longueur de la conduite,  $Q$  le volume débité en mètres cubes à l'heure,  $D$  le diamètre de la conduite en millimètres et  $\delta$  le poids spécifique du gaz, celui de l'air étant pris pour unité. Appliquée au gaz d'éclairage pour lequel  $\delta = 0,42$  environ, cette formule devient simplement :

$$J = 2000 \frac{Q}{D^3}.$$

Si l'on y remplace  $Q$  par sa valeur  $\frac{\pi D^2}{4} U$ , elle devient :

$$J = \frac{500 \pi}{D} \cdot U = \frac{1571}{D} \cdot U.$$

Elle ne serait donc autre que la précédente dans laquelle on ferait  $b = 0$  et où l'on déterminerait  $a$  par la relation  $4\pi a = \frac{1571 \times 3600}{10^3}$ , ce qui donnerait  $a = 0,00257$ .

Les expériences de M. Arson et les valeurs qu'il a trouvées pour le coefficient  $b$  semblent montrer qu'il n'est pas négligeable, bien qu'il diminue lorsque le diamètre de la conduite augmente ; mais elles ont également montré que le coefficient  $a$  diminue encore plus rapidement. Ce ne serait donc que pour les petits diamètres, et sans doute surtout alors pour les petites vitesses que la formule de M. Monnier aurait chance de donner des résultats suffisamment approchés. Je ne pense pas qu'elle soit appliquée.

**266. Conduites d'air comprimé.** — Les formules et surtout les coefficients numériques qui précèdent sont applicables au gaz d'éclairage et en général à tous les gaz dont la pression diffère

<sup>1</sup>. Publié dans le compte rendu du 14<sup>e</sup> Congrès de la Société technique de l'Industrie du gaz, tenu à Nancy en 1887.

peu de celle de l'atmosphère. Leurs résultats ne semblent pas concorder aussi bien avec les faits lorsque la pression est différente, et en particulier lorsqu'il s'agit de transporter de l'air comprimé sous une pression de plusieurs atmosphères. Des expériences sur ce sujet ont été faites avant le commencement des travaux de percement du tunnel du Mont-Cenis, par les soins de M. Sommeiller, mais elles n'ont porté que sur des conduites d'un très faible diamètre. Plus récemment, par suite des applications de l'air comprimé au transport et à la distribution de la force motrice, la question a pris une grande importance et de nouvelles expériences ont été entreprises à Paris, à l'usine construite par la Cie Popp à St-Fargeau, et M. le professeur Riedler en a rendu compte dans une brochure dont la traduction française a été publiée en 1891 et dont le tableau ci-après résume les principaux résultats<sup>1</sup>. Les pertes de charge dues au frottement ont été trouvées notablement plus faibles que celles qui auraient été déduites des tables de M. Arson.

Longueur de la conduite de 0,30 de diamètre	Volume écoulé par heure		Vitesse moyenne de l'air	Pression dans la conduite		Perte de charge	
	à la pression atmosphérique	à la pression moyenne de la conduite		au commencement	à la fin	totale	par kilomètre
mètres	m. c.	m. c.	m.	atmos.	atmos.	atmos.	atmos.
16302	13788	2206	8.67	6.25	4.25	2.0	0.12
16302	13833	2100	8.24	6.78	4.36	2.42	0.14
16302	11142	1485	5.83	7.125	5.84	1.285	0.07
16302	8306	1060	4.1	6.9	6.28	0.62	0.03
15002	6376	853	3.4	6.78	6.4	0.38	0.02
4403	10055	1297	5.09	6.9	6.6	0.3	0.07
4403	6767	967	2.8	7.125	6.95	0.175	0.04
4403	13833	1859	7.3	6.78	6.17	0.61	0.04
4403	11142	1408	5.53	7.125	6.7	0.425	0.14
3340	11142	1610	6.32	6.0	5.84	0.16	0.09
8759	8058	1071	4.2	6.65	6.39	0.26	0.048
3340	8058	1102	4.32	6.33	6.29	0.04	0.029
4403	8388	1126	4.42	6.75	6.5	0.25	8.056
4403	9099	1249	4.9	6.37	6.2	0.17	0.038

D'expériences faites antérieurement, à l'occasion des travaux du tunnel du St-Gothard, M. Stockalper, ingénieur en chef de ces tra-

1. *La distribution de la force par l'air comprimé dans Paris* (Procédés Victor Popp). Paris, 1891.

vaux, avait conclu que l'on pouvait prendre, pour calculer la perte de charge dans les tuyaux conduisant l'air comprimé, la *même formule et les mêmes coefficients* que pour l'eau. Il a donc proposé d'exprimer la perte de charge par unité de longueur, dans une conduite d'air comprimé par une expression de la forme :

$$J = \frac{4}{D} \Pi b_1 U^2$$

en prenant pour le coefficient  $b_1$  la forme :

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}$$

proposée par Darcy et les valeurs :

$$\alpha = 0,0002534 \quad , \quad \beta = 0,00000647,$$

correspondant à l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de fonte neuve (Voir n° 82, page 142).

Dans le même ordre d'idées, M. Unwin, après avoir constaté que ces valeurs donnaient, pour le coefficient  $b_1$ , des chiffres trop forts, a proposé, tout en conservant à la formule la même forme, des valeurs qui, réduites en mesures métriques, sont :

$$\alpha = 0,0001377 \quad , \quad \beta = 0,00001259.$$

Voici les valeurs du coefficient  $b_1$  qui résultent de l'adoption de ces chiffres :

Diamètres	Valeurs du coefficient $b_1$	
	D'après M. Stockalper	D'après M. Unwin
0,10	0,00032	0,00026
0,20	0,00029	0,00020
0,30	0,00027	0,00018
0,40	0,00027	0,00017
0,50	0,00027	0,00016
0,60	0,00026	0,00016
0,80	0,00026	0,00015
1,00	0,00026	0,00015

Les nombres de M. Unwin s'accordent mieux que ceux de M. Stockalper avec les résultats des expériences. En effet, d'après M. Stockalper lui-même, les résultats de quelques observations faites au Saint-Gothard ont donné :

pour	$D = 0,15$	$b_1 = 0,00023$
	$D = 0,20$	$b_1 = 0,00019$

ce qui concorde bien avec les chiffres de M. Unwin.

Comme pour l'écoulement de l'eau, d'autres formules ont été proposées. M. Lorenz en a donné une qui revient à la précédente dans laquelle le coefficient  $b_1$  varierait en raison inverse de la puissance 0,30933 du diamètre. Elle est, par suite, d'une application relativement laborieuse et son exactitude ne compense probablement pas la petite difficulté qu'elle présente à cet égard.

Les expériences sur ce sujet sont malheureusement assez peu nombreuses, car elles présentent de grandes difficultés. Les résistances accessoires, qui dans le cas de l'eau, sont généralement négligeables, ne le sont plus lorsqu'il s'agit de l'écoulement de l'air comprimé, et les variations de la température constituent également un élément dont il n'est pas toujours facile d'apprécier l'influence.

On peut s'en rendre compte, dans une certaine mesure, en examinant les résultats qui viennent d'être transcrits, des expériences de M. Riedler. Si l'on compare, par exemple, l'avant-dernière expérience à celle qui la précède, on remarque que, pour des débits à peu près égaux, des vitesses moyennes et des pressions très peu différentes, les pertes de charge ont été dans l'une de 0 atm. 012 par kilomètre, et dans l'autre de 0 atm. 056, soit plus de quatre fois et demie plus grande, sans que l'on puisse apercevoir le motif de cette grande différence.

Si donc, ce qui semble démontré, les tables données par M. Arson pour le gaz d'éclairage à faible pression ne s'appliquent pas au transport de l'air comprimé, il faut reconnaître que l'on ne possède pas, jusqu'à présent, de notions expérimentales suffisantes pour en proposer d'autres à leur place. On pourra donc, à défaut de ces tables spéciales, s'en tenir provisoirement au moins, à l'observation de M. Stockalper et appliquer, à la conduite de l'air comprimé, les formules, les coefficients et les tables dressées pour l'écoulement de l'eau dans les tuyaux.

C'est ce que fait, par exemple, M. Kraft, ingénieur en chef des usines de Seraing. Seulement, pour la vitesse moyenne  $U$  à introduire dans la formule de l'écoulement, il prend la vitesse à l'origine de la conduite, laquelle ne diffère pas notablement de la vitesse à l'extrémité, si la perte de charge totale n'est pas grande et si la conduite n'est pas longue. S'il en est autrement, il propose de diviser la conduite en plusieurs tronçons de petite longueur et de

calculer séparément la perte de charge pour chacun d'eux. Cela étant,  $\Pi$  désignant le poids du mètre cube à l'origine de la conduite et  $J$  la perte de charge par mètre de longueur, exprimée en hauteur d'air au poids spécifique  $\Pi$ , ou bien  $J\Pi$  la perte de charge par mètre exprimée en kilogrammes par mètre carré, il applique la formule de Darcy mise sous la forme :

$$\frac{J}{Q^3} = \frac{64b_1}{\pi^2 D^5},$$

en prenant, dans la table dressée par Bresse, dont est extraite celle qui porte le n° VII à la fin du présent volume, et pour les divers diamètres, les valeurs de  $\frac{J}{Q^3}$  réduites de moitié, c'est-à-dire qu'il les prend dans une table calculée d'après les coefficients proposés par Darcy pour la fonte neuve, tandis que celle de Bresse est applicable aux tuyaux en service.

Par exemple, s'il s'agissait de calculer la perte de charge due à la première des expériences ci-dessus de M. Riedler, on opérerait, d'après les idées de M. Kraft, de la façon suivante :

Le volume d'air écoulé par heure, mesuré à la pression atmosphérique, était de 13788 mc. La pression effective étant de 6 atm. 25, ou la pression totale de 7 atm. 25, le volume écoulé, mesuré à la pression initiale était, par seconde, de

$$\frac{13788}{7,25 \times 3600} = 0 \text{ mc. } 528 = Q.$$

La table VII, pour le diamètre 0 m. 30, donne  $\frac{J}{Q^3} = 1,468$ , dont la moitié est 0,734. Il en résulte :  $J = 0,734Q^3 = 0 \text{ m. } 2048$ .

D'autre part, le poids  $\Pi$  du mètre cube d'air, en supposant (ce qui n'est pas indiqué dans la brochure de M. Riedler) la pression atmosphérique à 760 mm. de mercure ou à 10.330 kil. par mètre carré, et la température à 15°, serait, à la pression effective de 6 atm. 25, exprimé par :

$$\Pi = \frac{1,293 \times 7,25 \times 273}{288} = 8 \text{ k. } 886.$$

Par suite, la perte de charge par mètre,

$$J\Pi = 0,2048 \times 8,886 = 1 \text{ k. } 820,$$

ou, par kilomètre, 1.820 kilogr. Or, la perte de charge observée a été de 2 atmosphères ou 20.660 kil. pour 16.502 m. de longueur, soit 1.252 kilogr. par kilomètre.

La différence entre le calcul et l'observation est fort grande, mais il convient de faire remarquer que d'après M. Riedler, il reste quelque incertitude sur les pertes de charge qu'il a mesurées et qui comprennent, outre la résistance due à la conduite proprement dite, celles qui étaient produites par le passage de l'air dans des réservoirs ou des purgeurs installés sur cette conduite. La perte de charge due au seul frottement serait donc plus faible que celle qui a été constatée, ce qui augmenterait encore l'écart avec les résultats de l'application des coefficients de Darcy.

Quoi qu'il en soit et pour les motifs exposés plus haut, l'usage des tables de Darcy, et en général de toutes les tables dressées pour le calcul des conduites d'eau <sup>1</sup>, pourra fournir une approximation de la perte de charge, dont il faudra bien se contenter en attendant mieux.

**267. Cas d'une conduite très longue.** — Lorsque la conduite est très longue, on peut, comme il a été dit plus haut, la diviser en plusieurs parties, pour chacune desquelles on calcule successivement la perte de charge; on trouve ainsi la pression et par suite le volume et la vitesse du gaz au commencement de chacune des sections en lesquelles la longueur a été partagée. Mais on peut aussi, en supposant que la perte de charge s'exprime en fonction du carré de la vitesse moyenne  $U$ , soit par la formule de Darcy, soit autrement, adopter le mode de calcul suivant, dont je dois la communication à l'obligeance de M. Kraft.

Soient, à l'origine de la conduite,  $p_1$  la pression,  $\Pi_1$  le poids de l'unité de volume,  $U_1$  la vitesse moyenne, et  $Q_1 = \frac{\pi D^2}{4} U_1$  le volume débité en une seconde. Représentons par  $p$ ,  $\Pi$ ,  $U$  et  $Q$  les quantités correspondantes, en un point quelconque de la conduite défini par son abscisse  $x$ , et par  $p_2$ ,  $\Pi_2$ ,  $U_2$  et  $Q_2$  les mêmes quantités à l'extrémité de la conduite, dont  $L$  sera la longueur totale. Nous aurons, entre ces quantités, les relations évidentes :

1. En particulier, on peut remarquer que les tables IV et V proposées au n° 86 fourniraient, pour l'exemple précédent, un résultat beaucoup plus approché que celles de Darcy. La table V donne, en effet, pour la valeur  $Q=0$  m. 528, le rapport  $\frac{J}{\gamma} = 0,33$  environ, et la table IV, pour  $D = 0,30$ , donne  $\gamma = 0,43$ . Il en résulte  $J = 0,33 \times 0,43 = 0,142$ .

Par suite,  $J\Pi = 0,142 \times 8,886 = 1$  k. 262, soit 1262 k. par kilomètre, alors que l'observation a donné 1.252 kilogr. L'accord est aussi satisfaisant que possible.



$$\Pi Q = \Pi_1 Q_1 = \Pi_2 Q_2 ; \quad \frac{p}{\Pi} = \frac{p_1}{\Pi_1} = \frac{p_2}{\Pi_2} .$$

La perte de charge pour une longueur infiniment petite  $dx$  étant représentée par  $\frac{dp}{\Pi}$ , on aura :

$$-\frac{1}{4} \frac{D dp}{\Pi dx} = b_1 U_2 = b_1 \left( \frac{4}{\pi D^2} \right)^2 Q^2 ,$$

ou en appelant C le coefficient supposé constant :  $C = \frac{64 b_1}{\pi^2 D^4}$ ,

$$dp = -C Q^2 \Pi dx = -C \frac{p_1}{p} \Pi_1 Q_1^2 dx .$$

Remarquant que C,  $p_1$ ,  $\Pi_1$  et  $Q_1$  sont des constantes, on trouvera en intégrant sur toute la longueur L de la conduite :

$$p_1^2 - p_2^2 = 2C p_1 \Pi_1 Q_1^2 L ;$$

ou

$$p_2 = p_1 \sqrt{1 - 2C \frac{\Pi_1}{p_1} Q_1^2 L} .$$

La pression décroît donc suivant une loi parabolique.

A une température donnée, le rapport  $\frac{\Pi_1}{p_1}$  est constant et égal à  $\frac{1}{RT}$ , soit, par exemple, à 10° et pour l'air atmosphérique :

$$\frac{\Pi_1}{p_1} = \frac{1}{29,9 \times 283} = 0,0001207 ;$$

alors, la perte de charge totale,  $p_1 - p_2$  s'exprime par :

$$p_1 - p_2 = p_1 \left( 1 - \sqrt{1 - 0,0002414 C Q_1^2 L} \right) .$$

Le coefficient numérique, sous le radical, varierait un peu avec la température, mais dans de très faibles proportions, et dans la plupart des applications pratiques on pourra lui conserver la valeur indiquée.

Si L n'est pas très grand, et que le dernier terme soit une petite fraction de l'unité, on a, à peu près :

$$\sqrt{1 - 2C \frac{\Pi_1}{p_1} Q_1^2 L} \doteq 1 - C \frac{\Pi_1}{p_1} Q_1^2 L ,$$

et par suite  $p_1 - p_2 = C \Pi_1 Q_1^2 L$ , comme nous l'avons admis dans les calculs approximatifs précédents; et ce qui revient à substituer, à la parabole qui représente la loi de décroissement de la pression, la droite qui lui est tangente à l'origine.

**268. Perte d'énergie due au transport de l'air comprimé.** — La perte de charge produite par le frottement de l'air dans les conduites ne représente pas, à beaucoup près, la perte d'énergie du gaz. En effet, pendant que la pression diminue, du fait de cette perte de charge, le volume correspondant du gaz augmente, et, si la température du gaz est restée constante, c'est-à-dire si les parois de la conduite lui ont restitué la chaleur qui correspond à sa détente, le travail mécanique que peut produire un mètre cube d'air à l'extrémité d'une longue conduite différera peu de celui qui a été nécessaire pour le comprimer.

Soit, comme ci-dessus,  $p_1$  et  $p_2$  les pressions à l'origine et à la fin de la conduite, de telle sorte que  $p_1 - p_2$  soit la perte de charge totale et  $p_0$  la pression de l'atmosphère, à laquelle a été pris l'air que l'on a comprimé et où se détendra cet air après avoir été utilisé. Le travail mécanique nécessaire à la compression par unité de poids est, comme on a dit (n° 252) :

$$W_1 = v_1 p_1 \frac{k}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right];$$

celui qui pourra être fourni par la détente de cet air, d'après la même formule :

$$W_2 = v_2 p_2 \frac{k}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

La température étant supposée constante,  $v_2 p_2 = v_1 p_1$ , et par suite le rendement de la conduite sera exprimé par :

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1 - \left( \frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Prenons par exemple la première expérience rapportée par M. Riedler, dans laquelle la perte de charge totale a été de 2 atmosphères, soit de 32 pour cent de la pression initiale effective qui était de 6 atm. 25. Nous avons  $\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{7,25}$  et  $\frac{p_0}{p_2} = \frac{1}{5,25}$ , et nous en déduisons le rendement :

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1 - 0,617}{1 - 0,592} = 0,875.$$

La perte d'énergie n'est donc que de 12 1/2 pour cent, au lieu de 32.

**269. Mouvement de l'air dans les galeries souterraines.** — La ventilation des galeries de mines donne lieu à un problème analogue à celui du transport de l'air comprimé dans les conduites. Les conditions d'écoulement y sont sensiblement les mêmes et paraissent pouvoir être calculées par des formules analogues. La différence de pression entre les extrémités étant généralement faible, ainsi que la vitesse d'écoulement, on peut alors se servir de la formule approximative

$$J = \frac{\chi}{\omega} \pi b U^2 ;$$

dans laquelle J représente la diminution de pression par unité de longueur et qui est celle de la page 546 ci-dessus dans laquelle on a fait le coefficient  $\alpha = 0$  et remplacé  $\frac{4}{D}$  par  $\frac{\chi}{\omega}$  afin de pouvoir tenir compte de la forme non circulaire des galeries.

Il en résulte que la diminution totale de pression, pour une longueur L sera

$$\Delta p = \frac{\chi}{\omega} \pi b U^2 L.$$

Dans cette formule  $\Pi$  représente le poids du mètre cube d'air, à la température et à la pression moyennes dans les galeries, c'est-à-dire que si  $\Pi_0$  est ce poids à 0° et sous la pression atmosphérique  $p_0$ , ou si  $\Pi_0 = 1^k.293$ , ce poids à la température  $t$  et à la pression  $p$  sera :

$$\Pi = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\Pi_0}{1 + \alpha t}.$$

De sorte que la formule précédente peut s'écrire :

$$\Delta p = \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{b \Pi_0}{1 + \alpha t} \cdot U^2 L$$

ou bien, en désignant le produit  $b \Pi_0$  par une seule lettre  $\beta$  :

$$\Delta p = \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{p}{p_0 (1 + \alpha t)} \cdot \beta U^2 L = \frac{\chi}{\omega} \cdot \frac{\Pi}{\Pi_0} \cdot \beta U^2 L.$$

M. Murgue<sup>1</sup> qui a donné la formule sous cette dernière forme, a trouvé les valeurs moyennes suivantes pour le coefficient  $\beta$  :

1° Dans les galeries qu'il appelle à *section normale* dans les quelles la surface  $\omega$  vaut environ 3 mq. 50 et le périmètre  $\chi$ , environ 7 mètres et qui sont rectilignes :

galeries voutées . . . . .	$\beta = 0,00033,$
galeries à parois nues. . . . .	$\beta = 0,00094,$
galeries cadrées . . . . .	$\beta = 0,00156.$

Lorsque la galerie au lieu d'être rectiligne, présente une certaine courbure, ces coefficients doivent être augmentés ; ainsi, le coefficient  $\beta = 0,00033$  qui correspond à une galerie voutée rectiligne devient,

lorsque la galerie est simplement sinueuse. . . . .	$\beta = 0,00051,$
— — — — — à courbure continué. . . . .	$\beta = 0,00062.$

2° Dans les galeries qu'il appelle à *petite section*, dans lesquelles la surface  $\omega$  n'est que de 2 mq. 50 environ avec un périmètre  $\chi = 6$  mètres environ, le coefficient  $\beta$  prend les valeurs suivantes :

galeries voutées . . . . .	$\beta = 0,00055,$
galeries à parois nues. . . . .	$\beta = 0,00122,$
galeries cadrées . . . . .	$\beta = 0,00238.$

On voit combi en la rugosité des parois augmente l'importance de la perte de charge. L'influence de cette rugosité paraît plus grande pour les gaz que pour les liquides, et c'est peut-être une des raisons pour lesquelles les expériences faites dans des conditions différentes sont plus difficilement comparables.

**270. Tables numériques.** — On trouvera à la fin de ce volume quelques tables destinées à faciliter les calculs relatifs aux fluides élastiques. D'abord la table XIV est un extrait de celles de M. Arson, dont il a été question plus haut (n° 265). Elle est à double entrée et donne, pour un certain nombre de diamètres usuels, la perte de charge, exprimée en mètres de hauteur d'eau pour mille mètres de longueur, ou en millimètres pour un mètre, correspondant à divers débits, soit d'air atmosphérique, soit de gaz d'éclairage. Mais comme il a été dit au n° 266, cette table ne paraît devoir donner des résultats à peu près exacts que pour le gaz d'éclairage,

1. *Recherches expérimentales sur les pertes de charge dans les parcours d'air souterrains.* Publiées dans le Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale, août 1863.

ou pour l'air à faible pression. Lorsque le volume débité devient un peu grand et que la vitesse dépasse deux ou trois mètres par seconde, les pertes de charge qu'on en déduit sont beaucoup trop fortes. Il ne faut donc en adopter les résultats qu'à titre d'indication. On obtiendrait en général, comme on a dit, des résultats du même ordre d'approximation en prenant, pour la perte de charge, les résultats donnés par les tables servant au calcul des conduites d'eau.

La table XV donne les valeurs de logarithmes naturels de tous les nombres, de centième en centième, compris entre 1 et 3, et de tous les nombres, de dixième en dixième, compris entre 1 et 10. Pour obtenir, au moyen de cette table, le logarithme naturel d'un nombre quelconque, il faut multiplier (ou diviser) le nombre donné par une puissance de 10 telle que le produit (ou le quotient) soit compris entre 1 et 10; puis chercher le logarithme de ce produit (ou de ce quotient) dans la première partie de la table s'il est inférieur à 3 et dans la seconde s'il est compris entre 3 et 10. Au logarithme trouvé, on retranchera (ou on ajoutera) le produit du logarithme naturel de 10, qui est 2,3026, par l'exposant de la puissance de 10 par laquelle on a multiplié (ou divisé) le nombre donné.

Exemple : Trouver le logarithme naturel de 0,0518.

Multiplions ce nombre par  $100 = 10^2$ , nous obtiendrons 5,18. La table donne  $\text{Log. } 5,10 = 1,629$  et  $\text{Log. } 5,20 = 1,649$ ,

Par interpolation, on trouve donc :  $\text{Log. } 5,18 = \begin{array}{r} 1,645 \\ - 4,605 \\ \hline \end{array}$

Retranchons  $2 \times 2,3026 =$

La différence sera,  $\text{Log. } 0,0518 = - 2,960$

Le logarithme est négatif, le nombre donné étant inférieur à l'unité.

De même, s'il s'agit de trouver le nombre correspondant à un logarithme naturel donné, on ajoutera à ce logarithme (ou l'on en retranchera) autant de fois 2,3026 qu'il sera nécessaire pour obtenir un total (ou un reste) positif compris entre 0 et 2,3026; la table donnera le nombre correspondant qu'il suffira de diviser (ou de multiplier) par la puissance de 10 dont l'exposant sera le nombre de fois que l'on aura ajouté (ou retranché) 2,3026.

Exemple : Trouver le nombre dont le logarithme naturel est 5,617.

Divisons ce logarithme par 2,3026, le quotient est 2 et le reste 1,0118; c'est-à-dire qu'en retranchant du logarithme donné deux fois 2,3026, il reste 1,012 environ, qui est le logarithme de 2,75. Le nombre dont le logarithme naturel est 5,617 est donc  $2,75 \times 10^2 = 275$ .

Les logarithmes naturels figurent dans toutes les formules relatives aux transformations isothermiques des gaz.

Enfin la table XVII donne les puissances  $\frac{k-1}{k}$  des nombres consécutifs, de centième en centième, entre 0 et 1, de dixième en dixième, entre 1 et 10 et d'unité en unité entre 10 et 100, et pour  $K=1.41$ . La puissance  $\frac{k-1}{k}$  des nombres compris entre 100 et 1.000 s'obtiendrait en multipliant celle des nombres correspondants compris entre 1 et 100 par la puissance  $\frac{k-1}{k}$  de 10 qui est 1,953, et ainsi de suite.

La table XVIII donne les mêmes puissances pour diverses valeurs de  $K$  comprises entre 1 et 1.41.

Ces tables XVII et XVIII, avec la table XIX, qui donne les inverses des nombres, rendent les calculs très faciles. Ainsi, par exemple, à la fin du n<sup>o</sup> 249, nous avons eu à calculer les puissances  $\frac{k-1}{k}$  des rapports  $\frac{1}{7.25}$  et  $\frac{1}{5.25}$ . La table XIX donne immédiatement :

$\frac{1}{7.25} = 0,138$  et  $\frac{1}{5.25} = 0,190$  environ. La table XVIII donne 0,553 pour 0,13 et 0,565 pour 0,14, soit par interpolation : 0,562 pour 0,138, puis 0,617 pour 0,190.

L'emploi de la table XIX, des inverses des nombres, exige un peu d'attention pour placer la virgule dans le résultat. On doit faire précéder ce résultat d'autant de zéros (dont le premier précède la virgule) qu'il y a de chiffres avant la virgule dans le nombre donné ; ou réciproquement, s'il y a un certain nombre de zéros au commencement du nombre donné, il y aura dans le résultat le même nombre de chiffres avant la virgule ; ainsi l'inverse de 286 sera 0,003497 et l'inverse de 0,051 sera 19,6 et ainsi de suite.

Cette table des inverses peut être appliquée, bien entendu, à toutes sortes de calculs dans lesquels elle apporte des simplifications.

## CHAPITRE X

# RÉSISTANCE DES FLUIDES

§ 1. *Etude théorique.* — § 2. *Etude expérimentale.*

---

### § 1.

#### ETUDE THÉORIQUE

**271. Action mutuelle des fluides et des solides en mouvement relatif.** — Le problème de l'action mutuelle des fluides et des solides en mouvement relatif, qui consiste à déterminer l'effort ou l'impulsion exercée sur un corps solide en repos par un fluide en mouvement, ou, inversement, la résistance opposée par un fluide en repos au mouvement d'un solide qui y est plongé, est un des plus difficiles de l'hydraulique. « Il est étonnant « que, dans un siècle aussi éclairé, on sache si peu de choses sur la « résistance des fluides, et que, tandis que l'on fait tous les jours « usage de l'eau et de l'air pour mouvoir nos machines ou conduire nos vaisseaux, nous n'ayons pas, ou plus d'expériences, si « la théorie est trop compliquée, ou plus de théorie, si elle doit « être le fruit de l'expérience. <sup>1</sup> » Cette phrase, écrite en 1786, est encore vraie aujourd'hui. Le problème de la résistance des fluides n'a été résolu théoriquement, par Bernoulli, que dans le cas simple où l'on cherche l'impulsion, contre une surface plane, d'une veine fluide de dimensions notablement plus faibles que l'étendue de cette surface. Lorsqu'il s'agit d'un corps solide plongé dans un fluide indéfini, on ne possède aujourd'hui que des essais de théorie très incomplets, à peine suffisants pour rendre compte des faits d'expérience, en petit nombre, qui ont été constatés.

1. Du Buat, *Principes d'hydraulique*, discours préliminaire.

**272. Impulsion d'une veine fluide contre un plan. —**

Considérons une veine fluide  $A'B'AB$  (fig. 119), dont la section transversale est  $\omega$  et la vitesse  $v$ , venant heurter un plan  $CD$ . A une certaine distance en avant de ce plan, la veine s'étale, les filets fluides se courbent en tournant leur convexité vers le plan et si celui-ci, comme nous le supposons, est assez étendu, les vitesses des filets deviennent, à une certaine distance, en des points tels que  $C, D$ , parallèles à la direction du plan. Écrivons l'équation qui exprime le théorème des quantités de mouvement projetées

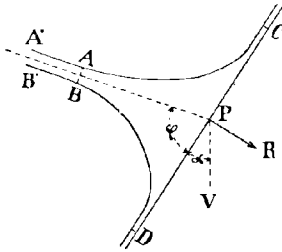


Fig. 119.

sur une direction perpendiculaire au plan heurté, pour la masse fluide comprise entre la section  $AB$ , où la veine commence à s'élargir et les points  $C, D$ , où les vitesses deviennent ainsi parallèles à l'obstacle. Désignons par  $P$  le poids de cette masse fluide et par  $R$  la pression normale qu'elle exerce sur le plan, son mouvement étant supposé arrivé à l'état de permanence. La quantité de mouvement de la masse dont il s'agit étant alors constante, l'accroissement de la quantité de mouvement totale se composera de celle du fluide qui sort de l'espace considéré, pendant l'unité de temps, diminuée de celle du fluide qui y entre. Or, la quantité de mouvement du fluide qui sort  $a$ , sur la perpendiculaire au plan, une projection nulle, puisque les vitesses aux points  $C, D$ , sont parallèles au plan. La masse fluide qui entre en  $AB$  dans l'unité de temps est  $\frac{\Pi}{g} v \omega$ , sa quantité de mouvement, si l'on suppose tous les filets ani-

més de la vitesse moyenne, vaut  $\frac{\Pi}{g} v^2 \omega$ , et la projection, sur la normale au plan, de cette quantité de mouvement est, en appelant  $\varphi$  l'angle de la veine liquide avec le plan,  $\frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin \varphi$ .

Les forces extérieures sont la pesanteur ou le poids  $P$  de la masse fluide, dont la projection sur la normale au plan sera  $P \sin \alpha$ , en appelant  $\alpha$  l'angle du plan avec la verticale, et la réaction de la surface heurtée, égale et contraire à l'impulsion  $R$  cherchée, qui se projette en vraie grandeur. L'équation des quantités de mouvement projetées sera ainsi :

$$0 - \frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin \varphi = P \sin \alpha - R.$$

On en déduit :



$$(1) \quad R = P \sin \alpha + \frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin \varphi.$$

L'impulsion  $R$  se compose de deux parties : la première  $P \sin \alpha$  est la pression statique due au poids de la masse fluide qui repose sur le plan, l'autre,  $\frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin \varphi$ , qui dépend de la vitesse, est réellement l'impulsion ou la pression dynamique qu'il s'agit d'évaluer. On peut l'écrire, en faisant abstraction de la première, qui s'annule d'ailleurs dans le cas où le plan est vertical :

$$R = \frac{\Pi}{g} \frac{\omega}{\sin \varphi} (v \sin \varphi)^2.$$

Elle est alors le produit de la densité du liquide,  $\frac{\Pi}{g}$ , par l'aire de la section faite dans la veine liquide par un plan parallèle à la surface heurtée,  $\frac{\omega}{g \sin \varphi}$ , et par le carré de la composante de la vitesse suivant la normale au plan  $(v \sin \varphi)^2$ .

Les résultats de cette formule ont été vérifiés par de nombreuses expériences.

Si le plan n'était pas assez large pour que les vitesses à la sortie fussent devenues parallèles à sa direction, ou si la surface heurtée, au lieu d'être plane, était courbe, le premier terme de l'équation ci-dessus, au lieu d'être zéro, devrait exprimer la projection, sur la direction  $R$ , de la quantité de mouvement du fluide sortant, de sorte qu'en appelant  $v_1$  la vitesse des filets fluides à la sortie,  $\varphi_1$  l'angle de cette vitesse (supposé le même pour toutes) avec la direction normale à  $R$ , ce terme serait  $\frac{\Pi}{g} \omega v v_1 \sin \varphi_1$ . L'expression de la résistance  $R$  serait alors en faisant abstraction de sa partie statique  $P \sin \alpha$  :

$$R = \frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin \varphi \left( 1 - \frac{v_1 \sin \varphi_1}{v \sin \varphi} \right).$$

La vitesse  $v_1$  est généralement inconnue, mais on peut admettre, comme approximation, lorsqu'il n'y a pas de frottement, qu'elle est égale à la vitesse initiale  $v$ . Alors :

$$R = \frac{\Pi}{g} \omega v^2 \sin \varphi \left( 1 - \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \right).$$

Lorsque, par exemple, la veine est reçue par un vase hémisphérique ou lorsque le plan sur lequel elle tombe normalement est

muni d'un rebord de hauteur convenable, qui oblige le fluide à retourner en arrière parallèlement à sa direction primitive,  $\sin \varphi = 1$  et  $\sin \varphi_1 = -1$  et

$$R = 2 \frac{\Pi}{g} \omega v^2.$$

L'impulsion est double de celle qui se serait produite sur un plan indéfini.

Ce résultat, donné pour la première fois par Euler, a été vérifié par les expériences de Morosi, de Savart et de Bidone.

**273. Impulsion d'un courant indéfini.** — Le problème devient beaucoup plus compliqué lorsque le corps solide, au lieu d'être simplement heurté par le fluide sur une de ses faces, se trouve entouré de toutes parts par un fluide indéfini en mouvement, qui presse aussi bien sur sa face postérieure que sur la face antérieure. Les géomètres du siècle dernier l'ont abordé en vain et se sont heurtés successivement à un résultat paradoxal donnant zéro pour l'impulsion ou la résistance dont il s'agit. Cette difficulté tient à ce que les fluides considérés par ces géomètres étaient des *fluides parfaits* dans lesquels le frottement intérieur est supposé nul, et, dans cette hypothèse, la même difficulté « subsistera toujours, dit « Bossut, de quelque manière qu'on détermine les vitesses des « filets du fluide : elle porte sur le principe même que son action « contre un corps exposé à son cours provient seulement de la pression de ce fluide. Si la chose est, en effet, ainsi, il s'ensuit que « toutes les fois que la figure du corps sera telle que les filets « fluides aient la même vitesse le long de la partie antérieure (ce « qui peut avoir lieu dans plusieurs cas), le fluide ne tendra à imprimer aucun mouvement au corps. » Bossut ajoute :

« Ce résultat est inadmissible. Il paraît donc qu'outre la pression, il se fait dans le fluide une perte de mouvement qui passe « au corps exposé à son courant. »

C'est, en effet, que l'impulsion dont il s'agit provient *uniquement* de ce que l'on appelle l'imperfection de la fluidité, c'est-à-dire de la production de frottements surtout intérieurs du fluide.

**274. Expression générale de l'impulsion.** — Considérons un liquide, ou plus généralement un fluide remplissant un espace indéfini, et animé, en tous ses points, de vitesses horizontales égales et constantes dans toute l'étendue d'un même filet fluide, c'est-à-dire supposons que ce fluide soit en état de mouvement per-

manent, uniforme, horizontal, afin de faire abstraction de la pesanteur ; admettons aussi, pour la même raison, que le poids du fluide soit négligeable. Dans cette hypothèse, toutes les particules fluides étant animées de vitesses égales et parallèles sont en repos relatif et les pressions sont partout normales aux surfaces sur lesquelles elles s'exercent. Si, dans une parcelle masse fluide en mouvement, nous plaçons un corps de dimensions finies, supposé retenu par un fil dans une position fixe, les filets fluides devront se dévier à la rencontre du solide ; mais l'expérience montre qu'à une certaine distance, aussi bien en avant et en arrière que latéralement, le mouvement primitif du fluide ne sera en rien modifié.

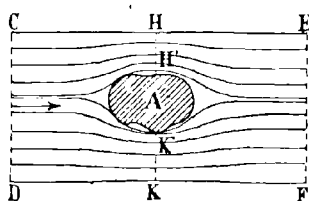


Fig. 120.

Si donc, de la masse fluide indéfinie, on abstrait celle qui serait comprise dans un cylindre horizontal CDFE (fig. 120) suffisamment large et long, entourant le corps solide de toutes parts, le mouvement de la masse fluide située en dehors de ce cylindre sera exactement le même que si le corps solide n'existait pas ; de sorte que, pour l'étude de l'impulsion qui lui est transmise par le fluide, il suffira de considérer la portion du fluide comprise dans ce cylindre.

Désignons alors par  $P$ ,  $P'$  les pressions totales qui s'exercent sur les deux sections extrêmes  $CD$ ,  $EF$  de ce cylindre, par  $\omega$  l'aire commune de ces deux sections, par  $v$  la vitesse commune de tous les filets fluides qui les traversent et par  $R$  l'impulsion totale, inconnue, exercée par le fluide sur le corps solide que nous supposons symétrique par rapport au courant, de façon que  $R$  soit parallèle à la direction des vitesses  $v$ .

Si nous appliquons à la masse fluide considérée le théorème des quantités de mouvement projetées sur la direction de l'axe horizontal du cylindre, nous aurons simplement, puisque nous abstrayons le poids du fluide qui, d'ailleurs, aurait une projection nulle, et que les pressions latérales sur le contour du cylindre, étant normales, disparaissent également :

$$R = P - P'.$$

Appliquons le théorème des forces vives pendant un temps  $dt$ , en appelant  $-T_f$  le travail total des frottements ou des composantes tangentielles des pressions des filets ou éléments fluides les uns sur les autres, ainsi que sur le corps plongé, pendant l'unité de temps ; ce travail sera, pendant le temps  $dt$ , exprimé par  $-T_f dt$ . Le tra-

vail de toutes les autres forces sera nul à l'exception de celui des pressions  $P$  et  $P'$ , lequel sera respectivement  $Pvdt$  et  $-P'vdt$ . Et comme la force vive est restée la même en tous les points, puisque le mouvement est permanent, nous aurons, pour l'équation des forces vives :

$$Pvdt - P'vdt - T_f dt = 0,$$

ou bien, en divisant par  $dt$  :

$$(P - P')v = T_f,$$

ce qui, combiné avec l'équation précédente, donne :

$$(2) \quad R = \frac{T_f}{v}.$$

On voit donc bien que l'impulsion  $R$  serait nulle si le travail des frottements  $T_f$  était lui-même égal à zéro.

Il s'agit d'appliquer ces principes généraux à des exemples particuliers, autant que peut le permettre l'imperfection de nos connaissances sur le frottement dont nous avons appelé  $T_f$  le travail pendant l'unité de temps.

Nous pouvons déjà en avoir une expression approchée en appliquant ce que nous avons dit aux n<sup>os</sup> 43 et 44 au sujet de l'écoulement permanent des fluides. D'après ce qui y est exposé, lorsque les vitesses du fluide vont en croissant graduellement, ce qui arrive lorsque la section transversale à travers laquelle il s'écoule diminue même brusquement, il ne se produit aucune perte de charge sensible, c'est-à-dire que le frottement intérieur est négligeable. Si, au contraire, la section transversale subit un accroissement brusque ou rapide, la vitesse décroissant rapidement, il en résulte une perte de charge ou de force vive égale au produit de la masse écoulee dans l'unité de temps par la moitié du carré de la vitesse perdue.

Mais ces variations de la vitesse, corrélatives à celles de l'étendue de la section d'écoulement, ne peuvent se calculer qu'autant que l'on connaît ces variations de grandeur de la section qui, dans notre hypothèse, serait indéfinie.

Les observations s'accordent à montrer que la déviation des filets fluides, produite dans une masse indéfinie, par un solide qui s'y trouve plongé, ne se fait pas sentir au delà d'une section transversale d'une étendue qui ne dépasse pas 4 à 8 fois celle du corps solide ; en d'autres termes l'aire  $\omega$  du cylindre tel que CDEF, qu'il faut considérer autour d'un solide A pour comprendre tous les

filets liquides qui sont déviés par la présence de ce solide, est comprise entre 4 et 8 fois l'aire de la section la plus large de ce corps, aire que nous désignerons par A. Ce rapport est le plus ordinairement compris entre 5 et 6,5.

**275. Théorie de Poncelet.** — Poncelet, en partant de ce fait, est parvenu à établir une théorie dont les résultats s'accordent assez bien avec ceux de l'expérience.

Soit  $\omega$  la section transversale CD (fig. 114) du cylindre fictif dont nous venons de parler, et  $\omega_1$  celle, telle que HH'KK', où les vitesses sont les plus grandes; si les vitesses moyennes, dans ces deux sections, sont  $v$  et  $v_1$ , on aura la relation :

$$v\omega = v_1\omega_1$$

exprimant la conservation du volume du liquide. D'après ce que nous venons de dire, le travail des frottements  $T_f$  est exprimé par la perte de charge due à l'élargissement brusque ou rapide que subit la section transversale entre HH'KK' et EF, ou en passant de la valeur  $\omega_1$  à la valeur  $\omega$ , et cette perte de charge correspond à la vitesse perdue  $(v_1 - v)$ ; le travail  $T_f$  a donc pour valeur, pour l'unité de temps,  $\frac{\Pi}{g} v\omega \frac{(v_1 - v)^2}{2}$  et ce travail, divisé par  $v$ , est égal à l'impulsion R, qui a ainsi pour expression, d'après l'équation (7) du n° 43, page 75 :

$$R = \frac{\Pi}{g} \omega \frac{(v_1 - v)^2}{2} .$$

On peut déduire directement cette équation du théorème de Bernoulli appliqué successivement aux deux portions du fluide comprises : la première entre la section initiale CD =  $\omega$  du cylindre fictif et la section la plus étroite HH'KK' =  $\omega_1$ , et la seconde, entre cette section et l'extrémité EF du cylindre où la section redevient  $\omega$ . On a, en désignant par  $p$ ,  $p_1$  et  $p'$  les pressions par unité de surface dans ces trois sections où les vitesses sont  $v$ ,  $v_1$  et  $v$ , les deux équations :

$$(3) \quad \frac{p}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_1}{\Pi} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p'}{\Pi} + \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} .$$

ce qui donne bien :

$$\frac{p - p'}{\Pi} = \frac{(v_1 - v)^2}{2g} ;$$

et puisque  $P = p\omega$  et  $P' = p'\omega$  :

$$R = P - P' = \frac{\Pi\omega (v_1 - v)^2}{g \cdot 2}.$$

La perte de charge exprimée par  $\frac{(v_1 - v)^2}{2g}$  devrait être augmentée du terme correctif  $\frac{v^2}{9 \cdot 2g}$  destiné à tenir compte de l'inégalité de vitesse des filets fluides et dont la signification a été donnée au n° 43, page 76 ; nous le négligeons provisoirement.

L'expression de l'impulsion  $R$  peut se mettre sous la forme :

$$R = \frac{\Pi}{g} A \frac{v^2}{2} \cdot \frac{\omega}{A} \left( \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \right)^2.$$

ce qui revient à :

$$(4) \quad R = KHA \frac{v^2}{2g};$$

en désignant par  $K$  le rapport :

$$K = \frac{\omega}{A} \left( \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \right)^2.$$

Le coefficient numérique  $K$  mesure ainsi l'impulsion, qui se trouve exprimée par le poids d'une colonne liquide ayant pour base la section transversale maximum  $A$  du corps heurté et pour hauteur le produit par  $K$  de la hauteur  $\frac{v^2}{2g}$  due à la vitesse des filets liquides en mouvement.

**276. Résultats de cette théorie.** — Lorsque le corps solide est terminé, vers l'avant, par une proue de forme hémisphérique ou ellipsoïdale, de manière que les filets fluides se divisent

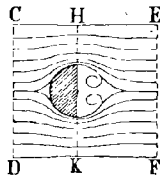


Fig. 121.

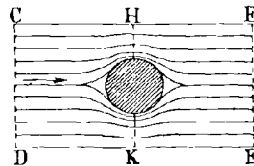


Fig. 122.

progressivement en restant toujours en contact avec sa surface, la

section la plus rétrécie  $\omega_1$  est égale à la différence  $\omega - A$ . Si, au contraire, le solide est terminé, à l'avant, par une surface plane, normale au courant, il se produit, au delà de ce plan, une contrac-

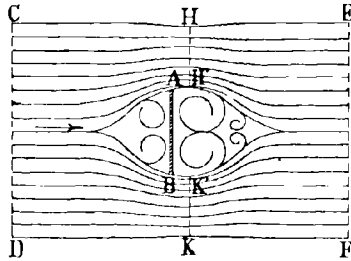


Fig. 123.

tion du courant fluide et la section la plus rétrécie n'est plus qu'une fraction  $m(\omega - A)$  de cette différence, le coefficient de contraction  $m$  ayant des valeurs variables.

Le coefficient d'impulsion  $K$  prend alors la forme suivante, obtenue en mettant dans son expression ci-dessus la valeur  $m(\omega - A)$  au lieu de  $\omega_1$  :

$$(5) \quad K = \frac{\omega}{A} \left( \frac{\frac{\omega}{A}}{m \left( \frac{\omega}{A} - 1 \right)} - 1 \right)^2 .$$

Et l'on voit qu'il ne dépend que des deux quantités  $m$  et  $\frac{\omega}{A}$ , toutes deux inconnues. Cette dernière formule s'applique d'ailleurs également au premier cas où il n'y a pas de contraction : il suffit d'y faire  $m = 1$ .

Il faut alors se servir des valeurs de  $K$  données par l'observation et chercher les grandeurs qu'il convient d'attribuer à ces deux quantités pour faire concorder cette formule avec les faits, et l'on pourra en étendre l'emploi à d'autres faits à peu près analogues. Il est bien entendu que les valeurs de  $\frac{\omega}{A}$  et de  $m$  doivent être comprises dans leurs limites probables, c'est-à-dire entre 4 et 8 environ pour la première et entre 0,70 et l'unité pour la seconde.

Lorsque le corps plongé a la forme d'une demi-sphère ou d'un demi-sphéroïde (fig. 121) tournant sa convexité vers l'amont, ou bien la forme d'une sphère entière (fig. 122) ou d'un sphéroïde entier, la valeur du coefficient  $K$  a été trouvée, expérimentalement,

comprise entre 0,50 et 0,60, plus voisine de ce dernier chiffre. La formule (5) donne  $K = 0,56$  pour  $m = 1$  et  $\frac{\omega}{A} = 3,50$ . La valeur  $m = 1$  suppose qu'il n'y a aucune contraction, ou que les directions des filets épousent exactement le contour du sphéroïde, ce qui semble assez probable. Pour  $m = 0,96$ , qui correspond à une très faible contraction, on a  $K = 0,60$  avec  $\frac{\omega}{A} = 4$ ; toutes valeurs qui se trouvent à peu près dans les limites indiquées.

Lorsque le corps plongé a la forme d'une plaque mince placée dans une direction perpendiculaire au courant (fig. 123), le coefficient  $m$  devient nécessairement plus petit et se trouve probablement voisin de 0,80. La valeur de  $K$ , pour une pareille plaque, a été trouvée de 1,80 à 1,90, et c'est ce que donne la formule (5) lorsque l'on y met pour  $m$  la valeur 0,80 et pour  $\frac{\omega}{A}$ , 3,80 environ. Cette formule peut donc s'accorder assez bien avec les observations, mais il semble difficile d'en étendre l'emploi à des exemples qui différeraient un peu de ceux qui ont servi à déterminer les coefficients, car on est forcé de faire alors des hypothèses sur les valeurs de  $m$  et de  $\frac{\omega}{A}$ ; et un très petit changement dans celle de  $m$  en produit un grand dans celle du coefficient cherché  $K$ : par exemple, pour  $\frac{\omega}{A} = 6$ , la formule donne  $K = 1,10$  lorsque  $m = 0,84$ , et  $K = 0,67$  avec  $m = 0,90$ .

**277. Utilité d'une seconde approximation.** — Il serait donc utile d'avoir une formule qui, dans une certaine mesure, pût tenir compte de la forme du solide, car c'est cette forme seule qui fournit des indications sur la valeur à attribuer à ce coefficient  $m$ . D'après sa définition, il ne dépend que de la forme du solide en avant de la section la plus large  $A$ , ou de la *proue*; si la forme de cette proue présente des courbures telles que les filets fluides ne s'écartent pas de sa surface,  $m$  a des valeurs voisines de l'unité; il décroît au contraire en se rapprochant de 0,80, qui paraît être sa limite inférieure, à mesure que la proue se raccourcit et disparaît, ce qui arrive quand le solide se termine, à sa face antérieure, par un plan perpendiculaire au courant. Mais ce n'est pas la proue seule qui influe sur la grandeur de l'impulsion du fluide, la configuration du solide, en arrière de sa section la plus large, la forme et les dimensions de la *poupe* peuvent modifier, dans des propor-



tions très notables, l'effort exercé par le liquide et la formule 5) est absolument impuissante à rendre compte de ces effets. La nécessité d'une formule plus complète n'est donc pas contestable. La seule tentative, à ma connaissance, qui ait été faite à ce sujet, est celle de Saint-Venant, dont je vais donner ici un aperçu sommaire <sup>1</sup>.

**278. Théorie de Saint-Venant.** — De Saint-Venant a eu surtout en vue d'exprimer l'influence de la longueur du solide et de la poupe, qui est complètement laissée de côté par la formule précédente. Il examine, pour cela, deux cas extrêmes :

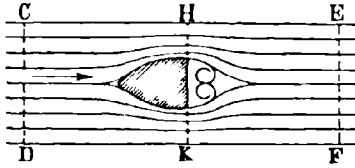


Fig. 124.

1<sup>o</sup> Le corps solide, dont la forme, vers l'amont, peut être quelconque, se termine, à l'arrière, par un plan qui coïncide avec sa section la plus large ; il est donc absolument dépourvu de poupe et sa longueur, abstraction faite de la proue, est aussi réduite que possible (fig. 124) ;

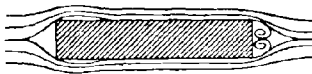


Fig. 125.

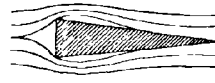


Fig. 126.

2<sup>o</sup> Le corps solide, avec ou sans proue, présente, au delà de sa section la plus large, ou bien une forme prismatique à section constante sur une longueur supérieure à deux ou trois fois sa largeur (fig. 125) ; ou bien des dimensions décroissantes suivant une loi quelconque (fig. 126).

**279. Cas d'un solide sans poupe.** — Le raisonnement qui a été fait plus haut (no 275) pour établir la formule (4) s'applique alors sans modification. Pour rendre cette formule plus rigoureuse, il suffit d'y ajouter ce qui a été négligé alors, savoir :

<sup>1</sup>. *Résistance des fluides. Mémoires de l'Académie des sciences*, tome XLIV 1887.

1° le terme correctif, égal à peu près à  $\frac{1}{9} \frac{v^2}{2g}$ , destiné à tenir compte de l'inégalité de vitesse des filets fluides ; 2° un terme destiné à évaluer les frottements sur la surface de la proue et qui s'ajoutent à l'impulsion dite.

Pour le premier terme correctif,  $\frac{1}{9} \frac{v^2}{2g}$ , qui doit être ajouté à  $\frac{(v_1 - v)^2}{2g}$ , il pourra être fondu avec celui-ci en faisant, sur le rapport des vitesses  $v$  et  $v_1$ , une hypothèse probable, au moins comme moyenne ou approximation. Le rapport de ces deux vitesses est l'inverse de celui des sections  $\omega$  et  $\omega - A$  ou  $m(\omega - A)$ . On peut admettre, d'après ce qui a été dit, que lorsque  $m = 1$ , ou qu'il n'y a pas de contraction,  $\frac{\omega}{A}$  est à peu près égal à 3,50 ; il en résulte alors  $\frac{\omega}{\omega - A} = \frac{7}{5}$ . La même valeur  $\frac{7}{5}$  se trouve, pour le rapport  $\frac{\omega}{m(\omega - A)}$ , avec  $m = 0,90$  et  $\frac{\omega}{A} = 5$ . Si on la considère comme une moyenne applicable à tous les cas, on aura  $\frac{v_1}{v} = \frac{7}{5}$ , ce qui donne  $v = \frac{5}{2}(v_1 - v)$ . Le terme correctif  $\frac{1}{9} \frac{v^2}{2g}$  vaudrait ainsi :

$$\frac{25}{36} \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = 0,70 \frac{(v_1 - v)^2}{2g}.$$

La formule ainsi corrigée deviendrait, en désignant par  $R_1$  la première partie de l'impulsion du liquide, due à la pression proprement dite, abstraction faite du frottement du liquide sur la proue :

$$R_1 = 1,70 \frac{\Pi}{g} \omega \frac{(v - v_1)^2}{2g} = \Pi A \frac{v^2}{2g} \cdot 1,7 \frac{\omega}{A} \left( \frac{\omega}{m(\omega - A)} - 1 \right)^2 ;$$

c'est-à-dire que le coefficient  $K_1$ , qui mesure cette impulsion partielle  $R_1$ , a pour expression :

$$K_1 = 1,7 \frac{\omega}{A} \left[ \frac{\frac{\omega}{A}}{m \left( \frac{\omega}{A} - 1 \right)} \right]^2.$$

Par une discussion très détaillée et délicate d'un certain nombre

de faits d'expérience, de St-Venant a trouvé que le coefficient numérique qui affecte cette formule est le quotient de deux nombres qu'il appelle  $N$  et  $q'$  ; le premier,  $N$ , celui par lequel il faut multiplier les forces vives dues aux différences des vitesses moyennes du fluide dans deux sections pour avoir les sommes des forces vives dues aux différences des vitesses réelles, a des valeurs comprises entre 1,80 et 2,10 et vaut, en moyenne, à peu près 1,9 ; le second,  $q'$ , celui par lequel il faut diviser ces sommes de forces vives pour tenir compte des variations des pressions sur les poupes fluides vaut à peu près 1,11, ce qui donne, pour le quotient,  $\frac{N}{q'}$ , 1,71 environ, au lieu du chiffre 1,70 qui vient d'être trouvé autrement, d'une façon bien moins rigoureuse.

Comme d'ailleurs cette valeur peut être variable, nous la représenterons par la lettre  $n$  et nous écrirons la première partie  $R_1$  de l'impulsion et le coefficient  $K_1$  correspondant sous la forme :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1 = n \frac{\pi \omega (v_1 - v)^2}{g \cdot 2g}, \\ K_1 = n \frac{\omega}{A} \left[ \frac{\frac{\omega}{A}}{m \left( \frac{\omega}{A} - 1 \right)} \right]^2 ; \end{array} \right.$$

étant entendu que le coefficient  $n$  vaut environ 1,70 :

**280. Influence du frottement.** — Il faut, à cette première partie, ajouter l'impulsion due au frottement, que nous désignerons par  $R_2$ . Elle est également faible et peut, en tout cas, être regardée comme proportionnelle à la surface,  $S$ , sur laquelle s'exerce ce frottement et qui, dans le cas d'un corps formé d'une simple proue, sera égale à toute la surface de cette proue ou à la surface entière du solide, à l'exception du plan par lequel nous le supposons terminé à sa partie postérieure. Cette impulsion  $R_2$ , produite par le frottement du fluide, sera ainsi le produit par  $S$  d'un certain nombre, qui variera avec la vitesse et sera probablement proportionnel au carré de la vitesse ou à  $\frac{v^2}{2g}$ . On peut alors représenter ce coefficient de frottement par  $\pi K_f$  et écrire :

$$R_2 = \pi K_f \frac{v^2}{2g} \cdot S = K_f \frac{S}{A} \cdot \pi A \frac{v^2}{2g}.$$

Je renverrai le lecteur au mémoire cité de St-Venant, pages 119 à 130, pour la discussion des faits d'expérience desquels il a déduit la valeur du coefficient numérique  $K_f$  dont le produit par  $\frac{v^2}{2g}$  exprime la hauteur d'une colonne fluide dont le poids est égal à la force de frottement sur l'unité de surface. Pour l'eau, cette valeur a été trouvée<sup>1</sup>, en moyenne, égale à 0,0031.

Alors, en adoptant ce chiffre, l'impulsion totale  $R = R_1 + R_2$  a pour expression :

$$(7) \quad R = \Pi \Lambda \frac{v^2}{2g} \left[ 1,7 \left( \frac{\frac{\omega}{\Lambda}}{m \left( \frac{\omega}{\Lambda} - 1 \right)} - 1 \right)^2 + 0,0031 \frac{S}{\Lambda} \right].$$

Le dernier terme, dû au frottement sur la proue, est souvent négligeable par rapport au premier, à moins que la proue ne soit très effilée et allongée, de façon que le rapport  $\frac{S}{\Lambda}$  soit grand. Pour une demi-sphère, par exemple,  $\frac{S}{\Lambda} = 2$ , et ce terme ne vaut que 0,006, tandis que le premier, en y mettant pour  $\frac{\omega}{\Lambda}$  les valeurs 4,5 et 5 et pour  $m$  l'unité, vaut respectivement 0,628 et 0,534. D'après les expériences les plus précises faites par M. le colonel Duchemin, le rapport  $\frac{\omega}{\Lambda}$  serait supérieur à 4, par conséquent cette formule donne des résultats qui concordent avec les observations, puisque l'impulsion sur une demi-sphère a été trouvée en moyenne de 0,58 environ.

### 281. Formule applicable à une plaque mince. —

La même formule, dans laquelle on supprimera le terme relatif au frottement, et où l'on donnera à  $m$  la valeur convenable, s'appliquera au cas d'une plaque mince placée normalement au courant.

L'impulsion sera exprimée par :

$$R = 1,7 \frac{\Pi}{g} \omega \frac{v_1 - v)^2}{2g}$$

ou

1. La valeur numérique 0,0031, donnée par St-Venant pour le coefficient de frottement  $K_f$ , a été déduite par lui d'observations faites dans un tout autre but. Il est probable que cette valeur aurait besoin d'être confirmée ou rectifiée par de nouvelles expériences instituées spécialement en vue de la déterminer.

$$R = \Pi A \frac{v^2}{2g} \cdot 1,7 \frac{\omega}{A} \left[ \frac{\frac{\omega}{A}}{m \left( \frac{\omega}{A} - 1 \right)} - 1 \right]^2$$

En mettant la valeur 0,83 pour  $m$  et 8,50 pour  $\frac{\omega}{A}$  on trouve pour le coefficient  $C$ , dont le produit par  $\Pi A \frac{v^2}{2g}$  donne la valeur de l'impulsion,  $K = 1,90$ . Les expériences ont donné des résultats qui s'approche beaucoup de ce chiffre. Le rapport  $\frac{\omega}{A}$  est ici bien supérieur à celui qui correspond au cas de la demi-sphère ou du corps avec proue ; cela tient à ce que la section  $\omega$  devrait être comparée, non

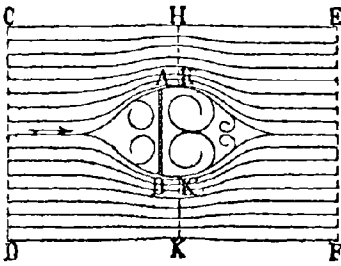


Fig. 127.

pas à la surface  $A$  qui est celle de la plaque, mais à celle, plus grande, qui comprend toute la partie du liquide en état de tourbillonnement, dans la section la plus contractée. Le rapport de la section  $\omega$  ou  $CD$  (fig. 127) à la portion  $H'K'$  de cette section où l'eau n'a pas d'écoulement est alors

$$\frac{\omega}{\omega - m(\omega - A)}$$

et, avec les valeurs  $m = 0,83$ , et  $\frac{\omega}{A} = 8,5$ , ce rapport n'est que de 3,75 environ, ce qui paraît à peu près d'accord avec l'observation.

L'accord serait peut-être encore plus parfait si l'on diminuait légèrement le coefficient 1,7 qui affecte la formule précédente. De nouvelles expériences seraient nécessaires pour déterminer la véritable valeur de ce coefficient, ou la manière dont il varie avec les diverses circonstances.

La même formule s'appliquera encore au cas où la plaque mince, au lieu d'être placée normalement au courant, fera un angle  $\varphi$  avec sa direction (fig. 128). On devra simplement y remplacer  $A$  par  $A \sin \varphi$ . On aura ainsi, pour l'impulsion sur une plaque oblique faisant un angle  $\varphi$  avec la direction du courant, cette impulsion étant estimée elle-même dans le sens du courant :

$$R = K \Pi A \sin \varphi \frac{v^2}{2g}$$

avec :

$$K = 1,70 \frac{\omega}{A \sin \varphi} \left( \frac{\omega}{m (\omega - A \sin \varphi)} - 1 \right)^2.$$

Cette expression fournit, pour des valeurs de l'angle  $\varphi$  comprises entre 90 et 45 degrés, des résultats à peu près conformes à ceux des expériences, lorsque l'on y met pour  $m$  et pour  $\frac{\omega}{A \sin \varphi}$  les mêmes

valeurs que plus haut pour  $m$  et pour  $\frac{\omega}{A}$ . Lorsque l'angle  $\varphi$  est plus

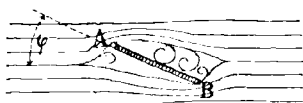


Fig. 128.

petit que 45 degrés, il faut augmenter la valeur du coefficient  $m$ . Alors, en effet, la contraction est moindre et elle s'annule même tout à fait pour les petites valeurs de l'angle  $\varphi$ , la perturbation apportée à l'écoulement du

liquide n'ayant lieu que d'un seul côté de la plaque. Il faudrait alors faire  $m = 1$ .

**282. Cas d'un corps prismatique court.** — Lorsque le corps, terminé à son avant par un plan perpendiculaire au courant, a une forme prismatique dont la largeur ne dépasse pas deux fois environ sa plus grande dimension transversale (fig. 129), il se comporte à peu près comme une plaque sans épaisseur : les filets liquides déviés se rejoignent seulement au delà de ce corps qui se

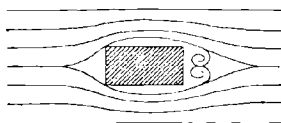


Fig. 129.

trouve tout entier dans la portion morte du courant, où l'eau ne coule pas. Toutefois, l'expérience montre que l'impulsion sur un prisme est un peu moindre que sur une plaque, ce qui tient sans doute à ce que la pression, en arrière du corps, est alors un peu plus grande que

derrière la plaque. Le coefficient mesurant l'impulsion devrait alors être diminué dans une proportion qui n'est pas déterminée et qui doit dépendre de la longueur du corps dont il s'agit.

Pour un cube, par exemple, le coefficient  $K$  aurait pour valeur 1,45, tandis que pour une plaque mince, nous avons dit qu'il était compris entre 1,80 et 1,90.

La théorie de Saint-Venant, qui est exposée, est impuissante à rendre compte de cette différence. On verra plus loin comment Du Buat en a donné une explication plausible.

**283. Cas d'un prisme allongé.** — Les choses se passent différemment si la longueur du corps est assez grande pour que les filets liquides, après en avoir quitté la surface, la rejoignent avant son extrémité d'aval (fig. 130).

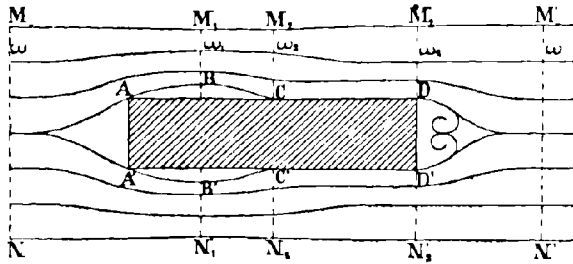


Fig. 130.

Considérons un pareil corps que nous supposons d'abord avoir la forme prismatique; les filets liquides écartés par la section AA', ayant quitté la surface latérale en BB' et l'ayant rejointe un peu plus loin en CC', ne la quitteront plus ensuite jusqu'à son extrémité DD'. Appelons, comme tout à l'heure  $\omega$  la section totale MN du cylindre comprenant tout le liquide dont le mouvement est troublé par la présence du corps,  $\omega_1$  la section la plus contractée en  $M_1BB_1N_1$ , et  $\omega_2$  la section d'écoulement  $M_2CC_2N_2$  autour du prisme,  $m$  le coefficient de contraction, c'est-à-dire posons, en appelant A l'aire de la section transversale du prisme :

$$\omega_1 = m(\omega - A) \quad , \quad \omega_2 = (\omega - A).$$

Appelons  $v, v_1, v_2$  les vitesses moyennes dans ces trois sections. D'après ce qui a été dit plus haut, l'impulsion totale R est égale au quotient, par  $v$ , du travail des frottements du liquide sur lui-même et sur le corps :

$$R = \frac{T_f}{v}.$$

Le travail des frottements du liquide sur lui-même est le produit de la perte de charge par le poids du liquide qui s'écoule, soit, pour l'unité de temps, par  $H\omega v$ . La perte de charge totale se compose de deux parties : celle qui correspond à l'élargissement de BB' en CC', et celle qui correspond à l'élargissement de DD' en M'N' de la section d'écoulement. La première a pour expression

$\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$  et la seconde  $\frac{(v_2 - v)^2}{2g}$ , auxquelles il faut ajouter les deux

termes correctifs que nous avons représentés en général par  $\frac{1}{9} \frac{v_2^2}{2g}$

et  $\frac{1}{9} \frac{v^2}{2g}$  et destinés à tenir compte de l'inégalité des vitesses dans les

sections. La répartition des vitesses dans les sections BB' et CC' est très sensiblement la même et l'on peut, sans grande erreur, négliger la correction qui, alors, serait certainement fort inférieure à la valeur moyenne  $\frac{1}{9} \frac{v_2^2}{2g}$  que nous avons indiquée. Entre les sections

DD' et MN', la répartition des vitesses change au contraire d'une manière beaucoup plus appréciable et cette variation est sensiblement la même que celle qui se produisait, dans les mêmes circonstances, à l'arrière d'une plaque mince ou du corps sans poupe que nous avons considéré d'abord. Nous devons donc multiplier la première de ces deux pertes de charge par un nombre  $n'$  égal ou peu supérieur à l'unité, et la seconde par un nombre  $n$  voisin de celui, 1,70, que nous avons trouvé dans le premier cas, et plutôt un peu inférieur. Nous prendrons approximativement 1,6 et nous renverrons au mémoire cité de St-Venant pour la justification détaillée et complète de la valeur de ces deux coefficients correctifs; nous les adoptons ici comme résultats d'expérience sans attacher aucune importance au raisonnement sommaire qui nous a renseignés sur leur grandeur.

Enfin l'impulsion doit être complétée par l'addition de l'effet du frottement sur les parois du corps qui comprendra d'abord le frottement sur la face d'amont, négligeable, et ensuite le frottement sur les parois latérales du prisme, de CC' en DD', c'est-à-dire sur toute la surface latérale de ce prisme, comprise entre son extrémité d'aval et une section CC' menée à une distance de son extrémité amont égale à deux fois environ sa dimension transversale. Cette surface étant désignée par S, l'impulsion totale sur le prisme sera :

$$(9) \quad R = n' \Pi \omega \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} + n \Pi \omega \frac{(v_2 - v)^2}{2g} + \Pi A \frac{v^2}{2g} K_f \frac{S}{A}.$$

En tenant compte des relations nécessaires :

$$v \omega = v_1 \omega_1 = v_1 m (\omega - A) = v_2 \omega_2 = v_2 (\omega - A),$$

on obtient :

$$(10) \quad R = \Pi \omega \frac{v^2}{2g} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega - A} \right)^2 \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 n' + \left( \frac{A}{\omega - A} \right)^2 n \right] + \Pi A \frac{v^2}{2g} K_f \frac{S}{A}$$



Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$R = K \cdot \Pi A \frac{v^2}{2g},$$

en appelant K le coefficient :

$$(11) \quad K = \frac{\frac{\omega}{A}}{\left(\frac{\omega}{A} - 1\right)^2} \left[ \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \left(\frac{\omega}{A}\right)^2 n' + n \right] + K_f \frac{S}{A},$$

ou bien, en mettant pour  $n$ ,  $n'$  et  $K_f$  les valeurs numériques que nous avons données :  $n = 1,6$ ,  $n' = 1$ ,  $K_f = 0,0031$  :

$$(12) \quad K = \frac{\frac{\omega}{A}}{\left(\frac{\omega}{A} - 1\right)^2} \left[ \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \left(\frac{\omega}{A}\right)^2 + 1,6 \right] + 0,0031 \frac{S}{A}.$$

Les deux nombres  $m$  et  $\frac{\omega}{A}$  sont toujours inconnus et c'est de leur grandeur que dépend celle du coefficient K. Les quelques faits d'expérience que l'on possède sont assez bien représentés par cette formule dans laquelle on donne à  $m$  une valeur comprise entre 0,75 et 0,80, et à  $\frac{\omega}{A}$  une valeur comprise entre 4 et 6. Ainsi, du Buat a trouvé pour l'impulsion sur un prisme carré dont la longueur était triple du côté de la base, le nombre  $K = 1,323$ . La formule, avec  $m = 0,75$ ,  $\frac{\omega}{A} = 6$ , et  $\frac{S}{A} = 4$  donnerait  $K = 1,356$ . L'accord est donc à peu près satisfaisant et il pourrait l'être absolument si l'on modifiait légèrement la valeur de  $m$ .<sup>1</sup>

Si nous admettons le chiffre trouvé par du Buat comme représentant l'impulsion sur un prisme à base carrée d'une longueur égale au triple du côté de la base, côté que nous appellerons  $a = \sqrt{A}$ , l'impulsion sur un prisme carré dont la longueur L serait plus grande que  $3a$  serait supérieure à celle-ci du frottement correspondant à la longueur  $L - 3a$ , soit à une surface  $S = 4a(L - 3a)$ .

1. D'après la discussion de quelques expériences, de St-Venant a trouvé que la valeur de  $m$  qui s'accordait le mieux avec leurs résultats était  $m = 0,757$ , ce qui donne  $\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = 0,10$ .

Le rapport  $\frac{S}{A} = \frac{S}{a^2}$  serait alors  $4 \left( \frac{L}{a} - 3 \right)$  et l'impulsion sur le prisme de longueur  $L$  :

$$R = K \Pi A \frac{v^2}{2g}$$

aurait pour son coefficient la valeur :

$$\begin{aligned} K &= 1,323 + 0,0031 \times 4 \left( \frac{L}{a} - 3 \right) \\ &= 1,230 + 0,0124 \frac{L}{a}. \end{aligned}$$

Cette même formule s'appliquerait à un corps solide de forme cylindrique à base circulaire ; la dimension  $a$  devrait alors être remplacée par le diamètre  $d$  du cercle de base. Le rapport  $\frac{S}{A}$  est alors, pour le cylindre entier,  $\frac{4\pi dL}{\pi d^2} = \frac{4L}{d}$ , ce qui donne encore 0,0124 pour le coefficient numérique du dernier terme.

On pourrait l'appliquer sans doute aussi, par extension, à un prisme d'une autre forme quelconque, en lui laissant la forme générale :

$$K = 1,323 + 0,0031 \frac{S}{A};$$

mais le coefficient 1,323 ne présente plus alors aucune garantie d'exactitude. On aurait besoin d'en déterminer la valeur par de nouvelles expériences.

**284. Prisme muni d'une proue.** — Si le prisme, carré ou circulaire, est muni d'une proue, assimilable à une demi-sphère qui supprime la contraction, le premier terme de la formule précédente (9) s'annule puisque  $v_1$  devient égal à  $v_2$  et le terme suivant prend la valeur  $0,58 \Pi A \frac{v^2}{2g}$  qui résulte de l'expérience pour le cas d'une demi-sphère et qui correspond à une valeur du rapport  $\frac{v_2}{A}$  comprise entre 4,5 et 5, comme nous l'avons dit. La résistance d'un prisme carré ou d'un cylindre de longueur  $L$ , muni d'une proue, a donc pour coefficient :

$$K = 0,58 + 0,0124 \frac{L}{a}$$

$a$  étant le côté du carré ou le diamètre de la circonférence de la base du cylindre.

On voit, en rapprochant cette formule de la précédente, quelle diminution considérable produit, sur la résistance, l'addition d'une proue convenablement tracée. Il est même probable que le chiffre 0,58, qui s'applique à la demi-sphère, pourrait être diminué sensiblement si la forme de la proue était plus effilée.

**285. Influence de la poupe.** — Mais l'influence de la poupe n'est pas moindre. Pour l'apprécier, autant que peut le permettre la complication du phénomène, nous supposerons que les filets fluides, déviés par la proue et ayant passé la section  $AB = A$  la plus large du corps solide (fig. 131), s'en écartent d'abord un peu et viennent le rejoindre un peu plus loin en  $CD$ , la section du corps, en ce point, étant désignée par  $A'$ , et que ces filets accompagnent ensuite la poupe solide jusqu'à son extrémité en se raccordant avec le sens du mouvement général. Nous admettrons que dans l'élargissement graduel de la section d'écoulement, depuis  $CD$  jusqu'à l'extrémité  $E$ , il ne

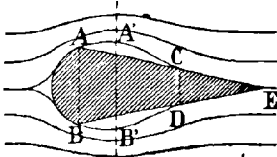


Fig. 131.

se produise, dans le liquide, aucune perte de force vive et que la seule perte de charge provienne de l'élargissement que nous supposons plus rapide, entre la section  $A'B'$  où les vitesses sont les plus grandes et la section  $CD$  où les filets fluides rejoignent la surface latérale du corps solide. L'impulsion du liquide sera due alors à la perte de charge dont il s'agit, au frottement sur la proue, qui sera souvent négligeable, et au frottement sur la poupe, entre  $CD$  et l'extrémité  $E$ . Le coefficient de ce dernier frottement sera sans doute différent de celui qui correspondrait à une surface parallèle au courant. En raison de l'élargissement, même graduel et lent de la section d'écoulement, le mouvement du liquide est nécessairement moins régulier, il est accompagné de petits tourbillonnements partiels, et la perte d'énergie ou le frottement est plus grand que si la section restait constante. Le coefficient de frottement, que nous avons dit être de 0,0031 pour le cas ordinaire, devrait donc être augmenté dans une proportion inconnue mais probablement assez grande.

Alors, si nous désignons le coefficient inconnu par  $K'f$  et par  $S$  la surface de la poupe entre  $CD$  et l'extrémité  $E$ , le frottement dont il

$$\text{s'agit s'exprimera par } K'f \frac{S}{A} \pi A \frac{v^2}{2g}.$$

Pour estimer l'impulsion due à la perte de charge entre A'B' et CD, nous supposons que la section d'écoulement en A'B' a sensiblement la même valeur,  $\omega - A$ , qu'en AB. En CD, cette section d'écoulement est  $\omega - A'$  et les vitesses  $v_1$  et  $v_2$ , dans ces deux sections, sont liées à la vitesse  $v$  par la relation :

$$v\omega = v_1(\omega - A) = v_2(\omega - A').$$

La perte de charge entre A'B' et CD est ainsi :

$$\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left( \frac{\omega v}{\omega - A} - \frac{\omega v}{\omega - A'} \right)^2,$$

De sorte que l'impulsion R aura pour expression :

$$(13) \quad R = n \Pi \omega \frac{1}{2g} \left( \frac{\omega v}{\omega - A} - \frac{\omega v}{\omega - A'} \right)^2 + K' f \Pi A \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{S}{A} \\ = K \cdot \Pi A \frac{v^2}{2g}$$

en désignant par K le coefficient :

$$(14) \quad K = n \frac{\omega}{A} \left( \frac{\omega}{\omega - A} - \frac{\omega}{\omega - A'} \right)^2 + K' f \frac{S}{A}.$$

Dans cette formule, on pourra donner à  $n$  la valeur 1,7, à  $\frac{\omega}{A}$  une valeur voisine de 4,5 ou 5, comme nous l'avons trouvé plus haut. Quant à  $A'$ , on ne peut faire que des hypothèses ; sa grandeur, par rapport à A, sera d'autant plus élevée que la poupe sera plus allongée et aussi que la distance AC sera plus petite, c'est-à-dire que les filets fluides auront été moins déviés par la proue. Si, par exemple, on suppose qu'au point C, où les filets rejoignent la surface latérale du corps, les dimensions transversales de celui-ci soient les  $\frac{2}{3}$  de celles de la section A, on aura  $A' = \frac{4}{9} A$  et, alors, avec  $\frac{\omega}{A} = 5$  :

$$(15) \quad K = 0,20 + K' f \frac{S}{A}.$$

Des expériences faites par Bossut, d'Alembert et Condorcet sur un corps en forme de navire ont donné, en moyenne :

$$K = 0,25.$$

En prenant donc une valeur plausible pour le coefficient  $K' f$  qui

exprime le frottement sur la poupe (et qui doit être plus grand que 0,0031), la formule (15) pourrait fournir des résultats conformes à ceux de l'expérience.

La formule (13) pour R ou celle (14) pour K s'étendrait même au cas où la poupe serait extrêmement allongée et très bien raccordée avec la proue. Alors A' devrait être pris égal à A, le premier terme disparaîtrait et devrait être remplacé par le frottement sur la proue qui pourrait n'être plus négligeable. Il ne resterait, pour l'impulsion, que l'effet du frottement du liquide contre les parois du corps. Le coefficient de ce frottement serait  $K_f = 0,0031$  pour la proue, et  $K'_f$  supérieur à cette valeur pour la poupe. On pourrait adopter un coefficient moyen, applicable à toute la surface et qui ne serait sans doute pas très éloigné de 0,004. Alors si la surface totale S exposée au frottement atteint 40 fois celle A du maître couple, on obtient  $K = 0,16$ , valeur à laquelle on arrive en effet pour les navires dont les formes sont très bien étudiées. Il est bien entendu que le chiffre de 0,004 n'est donné ici qu'à titre d'exemple et n'est basé sur aucune observation. Le coefficient  $K = 0,16$  se rapporte, d'ailleurs, à des navires ou à des corps flottants, tandis que les autres chiffres donnés plus haut sont relatifs à des corps entièrement plongés, ce qui doit probablement donner lieu à de petites différences, comme il sera dit plus loin au n° 292.

**286. Pyramides ou cônes tronqués. Pièces de bois en grume.** — La formule (9) et le raisonnement d'où on l'a déduite peuvent donner l'explication de ce fait bien connu dans les chantiers des ports, qu'une pièce de bois, ayant la forme d'un tronc de cône ou de pyramide très allongé, étant tirée dans l'eau, offre moins de résistance quand on la tire par le gros bout que lorsqu'elle présente au contraire, son petit bout en avant.

Soient  $A_p$  et  $A_g$  (fig. 132) les sections extrêmes d'une pareille pièce de charpente, A sa section moyenne

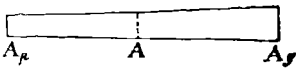


Fig. 132

$= \frac{A_p + A_g}{2}$  et  $\alpha$  la demi-différence

de ces deux sections extrêmes, de sorte que  $A_g = A + \alpha$  et  $A_p = A - \alpha$ . La différence  $A_g - A_p = 2\alpha$  est assez petite, eu égard à la longueur L de la pièce, pour que, sur une petite étendue, près de chacune de ses extrémités, cette pièce puisse être regardée comme prismatique. Alors si nous appelons  $R_p$  et  $R_g$  la résistance que rencontre la pièce suivant que c'est le petit ou le gros bout qui est exposé au courant, nous devons, dans la formule (10), pour avoir  $R_p$  remplacer, dans le premier terme qui

se rapporte à l'extrémité d'amont,  $A$  par  $A_p$  et dans le second au contraire,  $A$  par  $A_g$ . Inversement pour obtenir  $R_g$  nous remplacerons, dans le premier terme,  $A$  par  $A_g$  et dans le second,  $A$  par  $A_p$ . Admettons encore pour faciliter la comparaison, que le terme provenant du frottement,  $\Pi A \frac{u^2}{2g} K_f \frac{S}{A}$  soit le même dans les deux cas et désignons-le simplement par  $R_f$ ; l'application de cette formule (10) nous donnera :

$$R_p = \Pi \omega \frac{v^2}{2g} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega - A_p} \right)^2 \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 n' + \left( \frac{A_g}{\omega - A_g} \right)^2 n \right] + R_f$$

$$R_g = \Pi \omega \frac{v^2}{2g} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega - A_g} \right)^2 \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 n' + \left( \frac{A_p}{\omega - A_p} \right)^2 n \right] + R_f$$

et, par suite, la différence :

$$R_p - R_g = \Pi \omega \frac{v^2}{2g} \left[ \left\{ \left( \frac{\omega}{\omega - A_p} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega - A_g} \right)^2 \right\} \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 n' + \left\{ \left( \frac{A_g}{\omega - A_g} \right)^2 - \left( \frac{A_p}{\omega - A_p} \right)^2 \right\} n \right]$$

Mettons pour  $n'$  et  $n$  leurs valeurs données plus haut, savoir  $n' = 1$   $n = \frac{5}{3}$  environ; remplaçons  $A_p$  et  $A_g$  par  $A - \alpha$  et  $A + \alpha$  et réduisons, il viendra, en définitive :

$$R_p - R_g = \Pi \omega \frac{v^2}{2g} \frac{4\omega^2 \alpha (\omega - A)}{[(\omega - A)^2 - \alpha^2]^2} \left[ \frac{5}{3} \left( \frac{A}{\omega} + \frac{\alpha^2}{\omega (\omega - A)} \right) - \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 \right]$$

Le dernier terme, négatif, de la parenthèse,  $\left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2$ , vaut  $\frac{4}{16}$  lorsque  $m = \frac{4}{3}$  et  $\frac{1}{9}$  lorsque  $m = \frac{3}{4}$ . D'après ce qui a été dit des valeurs probables de  $m$ , on doit donc regarder ce terme comme restant toujours compris entre ces deux limites :  $\frac{1}{9} = 0,1111$  et  $\frac{1}{16} = 0,0625$ .

Le terme précédent renferme d'abord  $\frac{5}{3} \frac{A}{\omega}$ , qui pour les valeurs de  $\frac{\omega}{A} = 4,5$  ou  $6$ , vaut  $\frac{5}{12} = 0,4166..$ ,  $\frac{5}{15} = 0,3333..$ ,  $\frac{5}{18} = 0,2777$ ; cette première partie est donc toujours supérieure au terme négatif; et il faut y ajouter encore la quantité  $\frac{5}{3} \frac{\alpha^2}{\omega (\omega - A)}$ , toujours positive. La différence  $R_p - R_g$  sera positive, c'est-à-dire que  $R_p$  sera toujours plus grand que  $R_g$ , ce qui est conforme à l'observation.

Cette différence, en mettant pour  $m$  et  $\frac{\omega}{A}$  les valeurs les plus probables  $m = 0,757$ ,  $\frac{\omega}{A} = 5$ , atteint :

$$R_p - R_g = \pi A \frac{v^3}{2g} \times 1,80 \frac{\alpha}{A}.$$

ce qui revient à dire que le coefficient de résistance est augmenté de  $1,80 \frac{\alpha}{A}$  lorsque l'on tire la pièce par le petit bout au lieu de la tirer par le gros. En désignant par  $K$  (sans indice) le coefficient de résistance d'une pièce prismatique dont la section transversale serait égale à la moyenne  $A = \frac{A_p + A_g}{2}$  des deux sections extrêmes, par  $K_p$  et  $K_g$  les coefficients de résistance de la pyramide tronquée lorsque c'est le petit bout ou le gros bout qui se trouve exposé au courant, on aurait ainsi :

$$K_p = K + 0,90 \frac{\alpha}{A} = K + 0,90 \frac{A_g - A_p}{A_g + A_p},$$

$$K_g = K - 0,90 \frac{\alpha}{A} = K - 0,90 \frac{A_g - A_p}{A_g + A_p}.$$

Le coefficient  $K$  a pour valeur 1,32 environ lorsqu'il s'agit de prismes coupés perpendiculairement à leur longueur, sans proue ni poupe <sup>1</sup>,

1. De Saint-Venant, dans son mémoire cité, pages 184 et suivantes, compare les coefficients  $K_g$  et  $K_p$  à celui  $K'$  qui correspondrait à un prisme tronqué ayant la section la plus grande  $A_g = A + \alpha$  du gros bout de la pyramide. Il trouve alors :

$$K_g = K' - 2,60 \frac{\alpha}{A},$$

$$K_p = K' - 0,80 \frac{\alpha}{A}.$$

La différence entre  $K_p$  et  $K_g$  est bien de  $1,80 \frac{\alpha}{A}$ , mais les deux coefficients de résistance sont, comme on pouvait le prévoir, inférieurs à celui du prisme qui sert de comparaison. Il m'a paru plus simple de comparer avec le prisme ayant pour section la section moyenne  $A$  de la pyramide. On trouve alors qu'à des termes près de l'ordre de  $\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2$  qui sont négligeables, le coefficient  $K$  correspondant à ce prisme est la moyenne arithmétique de  $K_p$  et de  $K_g$ . Le calcul, qui ne présente aucune difficulté, est seulement un peu long, c'est pourquoi je ne le donne pas ici.

On trouvera, dans le mémoire cité de Saint-Venant, une autre application de la même formule à un corps ayant la forme d'un tronc de pyramide suivi d'une partie prismatique de dimensions transversales moindres ; mais cette application ne semble pas avoir un grand intérêt pratique.

## § 2

### ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

**287. Recherches de Du Buat.** — Après cet exposé d'une théorie qui ne donne, en définitive, qu'une solution incomplète du problème, je crois utile de rappeler quelques-uns des résultats expérimentaux constatés par Du Buat et certaines des conséquences qu'il en avait déduites. Cet exposé complètera, sur quelques points, la théorie précédente et montrera surtout dans quel sens elle devrait être rectifiée pour se rapprocher encore davantage des données de l'expérience.

Les recherches de Du Buat se sont portées principalement sur l'impulsion exercée, par un courant indéfini, sur des corps prismatiques, c'est-à-dire à section constante, terminés à l'avant et à l'arrière par des plans perpendiculaires à la direction du courant, c'est-à-dire sans poupe ni poupe, mais de longueur variable, cette définition comprenant le cas d'une longueur très petite ou de la plaque mince.

**288. Pression vive et non-pression.** — Faisant abstraction du frottement du liquide sur la surface latérale, Du Buat remarque d'abord que l'impulsion du liquide est due à la différence des pressions exercées par ce liquide sur les deux bases du prisme. La pression sur la base d'amont est plus grande et la pression sur la base d'aval est plus faible que celle que l'on observerait au même point du courant si le prisme n'existait pas. Les différences ont été désignées par lui sous les noms de *pression vive* et de *non-pression*. Si l'on appelle  $p$  la pression moyenne dans le courant, le prisme étant enlevé, que Du Buat appelle la *pression morte*,  $p_1$  la pression moyenne sur la base d'amont et  $p_2$  la pression moyenne sur la base d'aval, on a  $p_1 > p > p_2$ , et  $A(p_1 - p)$  est la pression vive sur le prisme,  $A(p - p_2)$  la non-pression ; l'impul-



sion totale  $R$  est la somme de la pression vive et de la non-pression <sup>1</sup> :

$$R = A (p_1 - p) + A (p - p_2) = A (p_1 - p_2).$$

Les hauteurs représentatives des pressions dont il s'agit peuvent s'exprimer en fonction de la hauteur  $\frac{v^2}{2g}$  due à la vitesse  $v$  du courant, et l'on peut écrire en appelant  $m$  et  $q$  deux coefficients numériques qui mesureront respectivement la pression vive et la non-pression :

$$\frac{p_1 - p}{\Pi} = m \frac{v^2}{2g}; \quad \frac{p - p_2}{\Pi} = q \frac{v^2}{2g}.$$

Alors, l'impulsion totale :

$$R = (m + q) \Pi A \frac{v^2}{2g}.$$

Cela revient à dire que le coefficient d'impulsion  $K$  est la somme des deux coefficients  $m$  et  $q$  de la pression vive et de la non-pression.

Du Buat a déterminé séparément les valeurs de ces deux coefficients. Il a constaté d'abord que la pression sur la face d'amont du prisme était loin d'être constante en tous les points. Au centre de la base, quelle que soit la dimension de celle-ci, elle est toujours à peu près égale à une fois et demie la pression morte  $\Pi \frac{v^2}{2g}$ ; elle décroît d'une façon régulière depuis le centre jusqu'aux bords où elle devient inférieure à cette pression morte. La théorie du mouvement des filets liquides pourrait rendre compte de ce fait : ceux-ci tournent, en effet, leur convexité vers le centre de la plaque, tandis que, près des bords, ils deviennent concaves. La valeur moyenne de  $m$ , pour une surface normale au courant, a été trouvée par Du Buat de 1,186. Elle est, comme on pouvait le supposer, indépendante de la longueur du prisme dont la surface heurtée forme la base.

1. On trouve, dans certains traités d'hydraulique, une détermination analytique de la pression vive et de la non-pression, dans le cas d'une plaque mince, d'après l'équation (3) ci-dessus en supposant que la pression sur la face aval, ici appelée  $p_2$ , est celle appelée  $p_1$ , qui existe dans la section la plus contractée, et que la pression morte, ici appelée  $p$ , est celle, appelée plus haut  $p'$ , qui existe dans la section d'aval où les vitesses sont redevenues parallèles. Mais ces hypothèses sont probablement loin d'être exactes et le calcul dont il s'agit ne présente aucun intérêt.

Il n'en est pas de même de la non-pression. A mesure que le corps s'allonge, les filets liquides, qui ont été déviés et qui ont pris des vitesses obliques plus grandes que celles du fluide ambiant, s'étendent de plus en plus à travers ce fluide et y perdent peu à peu leur excès de vitesse ; quand ils viennent à passer en face de la base postérieure du prisme, cet excès de vitesse aura été d'autant plus atténué que le prisme sera plus long. Or, la non-pression est due uniquement à la vitesse des molécules fluides qui passent à l'angle de cette base postérieure ; elle sera donc d'autant plus grande que le prisme sera plus court. La théorie exposée plus haut ne tient pas compte de cet épanouissement progressif des filets fluides et de la diminution qui en résulte pour la vitesse, lorsque le prisme s'allonge : ce n'est pas par un cylindre, mais par un cône que devrait être limitée la masse liquide dont le mouvement est influencé par la présence du solide. Il est évident, en effet, que si l'on considère un prisme extrêmement long, on rencontrera, à une distance assez grande de sa base d'amont, une section transversale du courant liquide dans laquelle toutes les vitesses seront devenues sensiblement égales dans une très grande étendue. A l'extrémité d'aval d'un pareil prisme, les filets latéraux n'exerceront, sur la masse fluide formant en quelque sorte la poupe fluide, qu'une action d'entraînement très réduite, la laisseront sensiblement en repos et ne se rejoindront qu'à une distance beaucoup plus grande que s'ils étaient passés en face de cette extrémité avec des vitesses plus grandes, ou si le prisme avait été plus court.

Il résulte de là que, toutes choses égales, la valeur de la non-pression, ou du coefficient  $q$  qui la mesure, est d'autant moindre que la longueur  $L$  du prisme est plus grande. D'ailleurs ce n'est pas la seule longueur  $L$  qui doit entrer en considération, mais le rapport de cette longueur à la dimension transversale du prisme, laquelle est proportionnelle à  $\sqrt{A}$ . La grandeur du coefficient  $q$  varierait donc en sens inverse du rapport  $\frac{L}{\sqrt{A}}$ . Du Buat, d'après des expériences peu nombreuses, indique, sans y attacher d'importance, une relation de la forme  $\frac{0,10}{q} = \log. \left( \frac{L}{\sqrt{A}} + 1,42 \right)$ , le logarithme étant vulgaire. Il a trouvé, pour une plaque mince de forme carrée,  $q = 0,67$ , pour un prisme carré de forme cubique ( $L = \sqrt{A}$ ),  $q = 0,271$  et pour un prisme carré d'une longueur triple du côté de la base ( $L = 3\sqrt{A}$ ),  $q = 0,153$ . Si, à ces valeurs de  $q$ , on ajoute celle de  $m$  indiquée plus haut,  $m = 1,186$ , qui est indépendante de la longueur du prisme, on trouve ainsi :

pour la plaque carrée, mince;	$K = m + q = 1,856,$
pour le cube,	$K = 1,457,$
pour le prisme carré,	$K = 1,339.$

La non-pression, comme la pression vive, n'est pas la même en tous les points de la surface postérieure du corps heurté; elle est plus grande près des bords et moindre vers le centre,

**289. Variation avec la vitesse.** — Les chiffres qui précèdent ont été déterminés avec des vitesses d'environ un mètre par seconde; ils ne semblent exacts que pour les vitesses s'écartant peu de cette valeur. Le coefficient de pression vive,  $m$ , paraît à peu près constant, c'est-à-dire que la pression vive varie à peu près comme le carré de la vitesse; mais il n'en est pas de même du coefficient de non-pression,  $q$ , qui augmente avec la vitesse. Presque nul quand la vitesse est faible, puisqu'alors le liquide situé en arrière du corps est à peine entraîné et exerce une pression à peu près égale à la pression hydrostatique, il peut atteindre l'unité lorsque la vitesse est assez grande pour que ce liquide soit complètement entraîné et que le vide se fasse derrière le corps. La loi de la variation de ce coefficient  $q$  avec la vitesse  $v$  n'a pas été déterminée, mais quelle qu'elle soit, on peut conclure de ce qui vient d'être dit que la non-pression croît plus rapidement que le carré de la vitesse, au moins jusqu'à la valeur limite à laquelle le vide complet se produit. A partir de ce moment, si la vitesse continue à augmenter, le coefficient de non-pression reste constant et égal à l'unité.

Il en résulte que le coefficient  $K$  exprimant l'impulsion est lui-même fonction croissante de la vitesse, ou, ce qui revient au même, que l'impulsion d'un fluide en mouvement sur un corps prismatique doit s'exprimer par une fonction de la vitesse croissant plus rapidement que la seconde puissance. Cette fonction est encore inconnue, et les faits d'observation que l'on possède jusqu'à présent sont insuffisants pour la déterminer.

Le coefficient de pression vive, lui-même,  $m$ , n'est pas absolument constant; les expériences de Du Buat ont montré qu'il est un peu plus grand pour les très faibles vitesses, mais, d'après ces expériences, la variation de ce coefficient serait beaucoup moins appréciable que celle du coefficient de non-pression  $q$ .

**290. Différence entre l'impulsion d'un liquide en mouvement sur un solide en repos et la résistance opposée au mouvement d'un solide par un liquide en**

**repos.** — Ces observations, ainsi que les chiffres qui ont été donnés plus haut s'appliquent à l'impulsion exercée par un liquide en mouvement, animé d'une vitesse constante, sur un solide en repos. Les résultats sont différents lorsque c'est le solide qui se meut dans un liquide immobile.

Ce fait, bien qu'il ait été constaté de la façon la plus formelle par divers observateurs, semble paradoxal, et les savants ne l'ont pas admis sans réserves. De St-Venant, par exemple, à la page 161 de son *Mémoire cité sur la Résistance des fluides*, dit : les expériences « donnent des résultats généralement moindres, souvent « d'un quart, lorsque le corps se meut que lorsque c'est le fluide, ce « qui doit tenir à quelque source d'erreur dans le mode d'appré-  
« ciation de l'impulsion ou de la résistance, ou à quelque cause étran-  
« gère et très influente ; en sorte que l'on ne sait auquel des deux  
« résultats expérimentaux on doit croire, et il y a lieu de douter de  
« tous deux. Il serait, en effet, contraire aux principes fondamen-  
« taux de la dynamique et aux faits astronomiques ou terrestres  
« les mieux avérés, de penser qu'en communiquant au corps et au  
« fluide une vitesse uniforme commune, égale et contraire à celle  
« que possède l'un ou l'autre, on change par cela seul leur action  
« mutuelle, ce qui ferait dépendre l'impulsion de l'eau des fleuves  
« de l'orientation de leurs cours, etc. Tant que l'on n'aura pas mis  
« complètement d'accord les expériences d'impulsion des fluides en  
« mouvement et les expériences de résistance des fluides en repos,  
« c'est vainement que l'on tentera d'attribuer des valeurs défini-  
« tives aux quantités indéterminées dont nous parlons. »

Ce raisonnement serait exact si les vitesses de toutes les molécules fluides étaient rigoureusement égales et parallèles entre elles. Mais même dans un courant indéfini dont le régime est uniforme, ce ne sont que les vitesses moyennes locales qui satisfont à cette condition ; les vitesses réelles sont à chaque instant divergentes et variables d'un instant à l'autre. Le liquide qui s'écoule à travers une section A, égale à celle du corps solide, possède en réalité, pour un même débit, une force vive notablement plus grande que si toutes les vitesses étaient égales et parallèles. C'est cette force vive qui se détruit en partie par les chocs contre le solide, sous forme de frottement, et qui produit autour du solide une agitation d'autant plus grande qu'elle a, elle-même, une valeur plus élevée. Cette agitation, presque entièrement perdue pour l'écoulement, donne lieu au frottement du liquide sur lui-même, ou au travail négatif (designé plus haut par  $T_f$ ) qui, divisé par la vitesse moyenne, est la mesure de l'impulsion du liquide sur le solide. Il n'est donc pas surprenant, et

il est au contraire conforme à l'examen théorique du phénomène, que l'impulsion d'un courant sur un solide en repos soit, pour une même vitesse, supérieure à la résistance éprouvée par le solide en mouvement dans le fluide en repos.

Du Buat a trouvé que, lorsqu'une surface mince se meut dans l'eau, à une vitesse voisine d'un mètre par seconde, le coefficient de pression vive  $m$  est à peu près égal à l'unité, et le coefficient de non-pression  $q$ , à 0,433. La résistance totale  $K' = m + q$  est donc alors de 1,433, tandis que l'impulsion est de 1,856 sur la plaque immobile.

Le rapport de ces deux nombres est sensiblement celui de 10 à 13, mais il n'est pas constant et il augmente à mesure qu'on considère des corps plus longs, ce qui peut être attribué, en partie, à l'influence du frottement sur les parois.

Du Buat a aussi mesuré la résistance au mouvement, dans l'eau en repos, d'un corps sphérique et il a trouvé, pour des vitesses ne s'écartant pas beaucoup d'un mètre, une résistance exprimée par :

$$R = 0,50 \Pi A \frac{v^2}{2g}.$$

Le coefficient de résistance est donc 0,50. Borda avait trouvé 0,55, et la discussion d'observations faites par Newton sur la durée de la chute de sphères solides dans l'eau a donné comme moyenne, pour ce coefficient, la valeur 0,523. Cette valeur augmenterait avec la vitesse, ainsi qu'il vient d'être dit plus haut pour les corps prismatiques.

### 291. Résistance ou impulsion des fluides élastiques.

**Pression du vent.** -- Les mêmes coefficients s'appliquent, à très peu près, à tous les fluides dont la résistance ou l'impulsion sont, toutes choses égales, sensiblement proportionnelles au poids spécifique  $\Pi$ , qui figure dans la formule. Pour ce qui est, par exemple, de la pression du vent sur une plaque mince normale à sa direction, on aurait comme ci-dessus :

$$R = 1,856 \Pi A \frac{v^2}{2g}.$$

Le poids spécifique de l'air, à la température de la glace fondante et sous la pression de 760 millimètres, est de 1 k. 293 ; à 12 degrés centigrades, et sous la pression de 0 m. 750, conditions qui se rapprochent plus de celles des tempêtes, il est de 1 k. 222. Il vient ainsi en substituant :

$$R = 0,116 Av^2,$$

pour les vitesses d'environ un mètre par seconde; le coefficient 0,116 devant être un peu augmenté pour les vitesses plus grandes. On prend ordinairement, en moyenne, et en nombre rond :

$$R = 0,125 Av^2 = \frac{1}{8} Av^2.$$

En Angleterre, on se sert d'une formule qui réduite en mesures françaises équivaut à

$$R = \frac{Av^2}{5}.$$

Certaines expériences de Borda et de Hutton avaient montré que l'impulsion de l'air n'était pas proportionnelle à la surface  $A$  de la plaque heurtée et avaient amené ce dernier à proposer d'affecter cette surface  $A$  de l'exposant 1,1. La pression augmenterait ainsi plus vite que la surface. Cette conséquence est tout à fait contraire à l'analyse du phénomène faite d'après les idées de Du Buat. Si l'on admet avec lui que la pression vive soit sensiblement proportionnelle à la surface heurtée, on ne peut faire la même hypothèse pour la non-pression. Celle-ci, en effet, se produit le long du périmètre de la face postérieure de la plaque, elle est presque nulle vers le milieu lorsque cette plaque est très étendue; il en résulte que, toutes choses égales, la non-pression doit être plus grande, proportionnellement, sur les petites plaques que sur les grandes. On comprend, en effet, que la vitesse limite susceptible de faire le vide complet derrière une plaque heurtée doit être beaucoup moindre lorsque cette plaque est de petites dimensions. Par conséquent, pour une même vitesse, l'impulsion totale du vent doit être plus grande, par unité superficielle, sur de petites surfaces que sur des surfaces étendues.

Cela est tout à fait d'accord avec les très nombreuses observations faites, dans l'île de Garvie, pendant la construction du pont sur le Forth, sous la direction de M. Benjamin Baker. Les pressions du vent y ont été observées simultanément sur une large plaque rectangulaire de 6 m. 00 sur 4 m. 50 et sur une petite plaque circulaire de 0 m. 39 de diamètre. La pression sur la petite plaque a toujours été beaucoup plus élevée, par unité superficielle, que celle sur la grande plaque. Le rapport des deux chiffres varie de 1,27 à 2,83; il est, en moyenne, de 1,70 environ, pour les observations correspondant aux coups de vent violents. La grande amplitude des

variations de ce rapport met d'ailleurs en évidence le fait bien connu de l'irrégularité de la pression du vent qui se fait sentir par rafales.

**292. Résistance au mouvement des corps flottants.**

— Tout ce qui précède s'applique exclusivement à des corps solides entièrement immergés dans un fluide indéfini qui les environne de toutes parts. La question de la résistance au mouvement des corps flottants à la surface de l'eau, bien qu'elle s'y rattache assez étroitement, en diffère toutefois assez pour que les coefficients numériques trouvés dans le premier cas ne soient pas applicables au second. Les conditions du mouvement relatif ne sont pas, en effet, exactement les mêmes. Si l'on suppose, par exemple, une plaque mince placée en travers et à la surface d'un courant, il se produira en amont de cette plaque un bourrelet liquide, et en aval, surtout vers les angles, une dépression qui mettront en évidence la pression vive et la non-pression; mais les trajectoires des molécules superficielles sont alors très différentes de ce que seraient celles des molécules déviées par la plaque si celle-ci était entièrement immergée.

Les données expérimentales relatives aux corps flottants de formes géométriques simples manquent complètement. On ne possède guère, sur cette question si importante, que des observations sur la résistance des navires de mer, pour des formes tout à fait spéciales, et les résultats des remarquables *Recherches expérimentales sur le matériel de la batellerie*, poursuivies de 1890 à 1897 par M. de Mas, dans un but également tout spécial, mais dont je crois devoir donner ici un résumé assez détaillé, en raison de leur importance pratique et de la confirmation qu'elles ont donnée à quelques-unes des idées développées dans les numéros précédents.

**293. Expériences de M. de Mas.** — Ces expériences ont été entreprises, par l'ordre de l'Administration, en vue de déterminer la meilleure forme à donner aux bateaux de navigation intérieure. M. de Mas a, dans ce but, combiné et installé les appareils les plus ingénieux et les plus précis pour leur donner toute l'exactitude désirable, je renverrai, pour cette partie de son travail, ainsi que pour tous les détails qui ne pourront trouver place ici, à l'ouvrage qu'il a publié <sup>1</sup>.

Les recherches ont eu pour but de déterminer comment varie le

<sup>1</sup>. *Recherches expérimentales sur le matériel de la batellerie*, par M. F. B. de Mas, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Paris, Imprimerie Nationale, 1891-1897.

coefficient de résistance avec les divers éléments dont il paraît dépendre. M. de Mas a étudié successivement ou simultanément l'influence, sur la valeur de ce coefficient :

- 1° de la vitesse,
- 2° des formes, tant à l'avant qu'à l'arrière,
- 3° de la surface mouillée,
- 4° de la longueur,
- 5° du rapport des sections transversales du corps flottant et du cours d'eau,
- 6° de la forme de la section transversale du cours d'eau.

Ayant surtout en vue la recherche de la meilleure forme à donner aux bateaux de navigation intérieure, pour diminuer les efforts de traction, il a rapporté ces efforts, non pas l'unité de surface du maître couple, mais à la tonne de déplacement de chaque bateau. Il a d'abord défini ce qu'il a appelé le *coefficient de déplacement*, que l'on pourrait appeler aussi « coefficient d'affinement » et qui est le quotient, toujours inférieur à l'unité, du déplacement réel du bateau par le volume du parallélépipède rectangle circonscrit à la partie immergée, et qui donne, en somme, la mesure du sacrifice fait à la forme dans la construction du bateau.

Ici, au contraire, où j'ai surtout en vue les conséquences plus générales que l'on pourrait tirer de ces expériences, j'ai rapporté les efforts au mètre carré de la section transversale du maître couple ; c'est-à-dire que j'ai calculé les valeurs qu'il faudrait attribuer au coefficient  $K$  dans la formule

$$R = K \Pi A \frac{v^2}{2g}$$

pour qu'elle donne la résistance  $R$  constatée par l'expérience.

Les expériences ont été faites sur la Seine, c'est-à-dire sur un cours d'eau dont les dimensions sont très grandes et peuvent être regardées comme infinies par rapport à celles des bateaux, et sur le canal de Bourgogne où, au contraire, le bateau occupe une étendue relativement importante de la section transversale.

Je ne donne pas tous les résultats rapportés par M. de Mas. Quelques-uns des bateaux expérimentés présentaient de telles analogies de formes, que les efforts constatés ne diffèrent que de quelques kilogrammes ; il m'a semblé suffisant alors, de ne transcrire ici que les chiffres relatifs à l'un d'eux. Le lecteur qui désirera plus de détails les trouvera dans l'ouvrage cité.

**294. Influence de la vitesse.** — Une des conséquences



qui semblent se déduire, d'une façon incontestable, des expériences de M. de Mas, c'est que le coefficient K varie avec la vitesse ou, ce qui revient au même, que la résistance R ne varie pas comme le carré de la vitesse. Dans ses conclusions, M. de Mas dit : Les expériences ont permis de vérifier « que pour un bateau immergé d'une quantité donnée, la résistance n'est pas proportionnelle au carré de la vitesse, elle croît plus vite ».

M. de Mas, à l'appui de cette opinion cite surtout les expériences qu'il a faites sur la Seine, avec quatre bateaux dont les noms sont donnés au tableau suivant qui résume les résultats de ses observations.

Nom du bateau et enfoucement	Coefficient de résistance K, pour les vitesses de										
	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	
<i>Péniche St-Cloud</i>	0.65	0.966	0.604	0.569	0.580	0.607	0.641	0.680	0.721	0.764	0.808
	0.80	0.942	0.569	0.549	0.564	0.577	0.621	0.657	0.693	0.736	0.779
	1.00	0.942	0.659	0.586	0.573	0.585	0.610	0.643	0.682	0.721	0.765
	1.30	0.869	0.616	0.547	0.534	0.545	0.567	0.598	0.635	0.675	0.718
	1.60	0.863	0.598	0.536	0.525	0.535	0.558	0.590	0.627	0.670	0.718
	1.83	0.926	0.575	0.518	0.515	0.530	0.555	0.586	0.622	0.663	0.707
<i>Flûte Jeanne</i>	0.65	0.867	0.580	0.472	0.441	0.425	0.454	0.465	0.477	0.487	0.495
	0.79	0.745	0.497	0.424	0.437	0.435	0.450	0.462	0.472	0.480	0.486
	1.00	0.753	0.518	0.460	0.435	0.437	0.445	0.459	0.470	0.479	0.487
	1.30	0.580	0.459	0.419	0.404	0.415	0.427	0.439	0.448	0.456	0.463
	1.60	0.540	0.402	0.371	0.356	0.364	0.382	0.402	0.408	0.419	0.425
	1.83	0.515	0.360	0.351	0.365	0.376	0.386	0.407	0.413	0.418	0.429
<i>Bateau Epsilon</i>	0.65	0.773	0.435	0.333	0.344	0.371	0.397	0.420	0.439	0.455	0.469
	0.79	0.745	0.397	0.344	0.348	0.331	0.349	0.365	0.382	0.397	0.411
	1.00	0.628	0.377	0.307	0.294	0.306	0.321	0.338	0.354	0.376	0.392
	1.30	0.531	0.362	0.306	0.293	0.317	0.330	0.328	0.340	0.355	0.372
	1.60	0.471	0.343	0.305	0.294	0.298	0.311	0.320	0.331	0.341	0.351
	1.83	0.446	0.326	0.297	0.298	0.299	0.303	0.309	0.318	0.328	0.339
<i>Toue Eole</i>	0.65	0.580	0.338	0.311	0.302	0.301	0.306	0.313	0.323	0.334	0.346
	0.80	0.549	0.333	0.296	0.289	0.292	0.299	0.307	0.318	0.328	0.340
	1.00	0.565	0.314	0.278	0.275	0.279	0.286	0.295	0.304	0.314	0.324
	1.30	0.483	0.290	0.263	0.260	0.263	0.268	0.275	0.282	0.290	0.297
	1.60	0.471	0.275	0.253	0.253	0.257	0.264	0.271	0.278	0.285	0.292
	1.83	0.480	0.292	0.255	0.247	0.247	0.252	0.258	0.266	0.275	0.285

Il faut laisser de côté les résultats des observations sur les vitesses inférieures à un mètre environ. Pour les vitesses plus faibles,

M. de Mas explique qu'il est extrêmement difficile d'obtenir des résultats exacts et il montre que, d'après les procédés de mesurage qu'il a employés, *les petites résistances observées sont nécessairement exagérées et d'autant plus exagérées qu'elles sont plus petites.*

Abstraction étant faite des trois premières colonnes, correspondant à ces faibles vitesses, on constate, d'une façon incontestable que le coefficient de résistance  $K$  augmente avec la vitesse.

M. de Mas a essayé de l'exprimer par une puissance de la vitesse d'un exposant supérieur à 2. Il a essayé une formule de la forme

$$R = a A v^3 + b \chi v^{2.5},$$

dans laquelle  $a$  et  $b$  sont des coefficients numériques variables avec chaque bateau et  $\chi$  le périmètre mouillé de la section du maître couple. Dans les bateaux expérimentés cette section était rectangulaire, d'une largeur  $l$ , généralement voisine de 5 m.00 et d'un enfoncement variable  $t$ . On a, dans ces conditions,  $A = lt$  et  $\chi = l + 2t$ . Bien que cette formule lui ait donné des résultats assez satisfaisants il en a essayé une autre, dans laquelle la vitesse figure avec un même exposant dans les deux termes, et il a adopté, pour cet exposant la valeur 2,25 qui a été proposée par les ingénieurs de la navigation du Danube, à la suite d'expériences spéciales. Il écrit alors plus simplement

$$R = (a + bt) v^{2.25}.$$

On trouvera, dans son ouvrage, les résultats de la comparaison des résultats de ces deux formules avec ceux des expériences. En choisissant convenablement les coefficients numériques  $a$  et  $b$  pour chacun des quatre bateaux qui figurent au tableau précédent, M. de Mas arrive à ce que les écarts entre les résistances calculées et celles qu'il a observées ne dépassent guère 10 à 12 pour cent, à l'exception bien entendu, des faibles vitesses pour lesquelles cet écart atteint et dépasse même souvent 60 pour cent. Les valeurs numériques qu'il propose, pour les coefficients  $a$  et  $b$  sont les suivantes pour la péniche *Saint-Cloud* :

$$a = 21,3 ; b = 128,6.$$

Elles sont différentes pour les autres bateaux.

J'ai, de mon côté, cherché à exprimer le coefficient  $K$  en fonction de la vitesse au moyen d'une formule relativement simple, et je suis arrivé à la suivante qui donne une approximation au moins égale à celle qu'a obtenue M. de Mas :

$$K = \left( a + \frac{b}{A} \right) (v + c)$$

Pour la péniche *Saint-Cloud* ; avec  $a = 0,08$ ,  $b = 0,07$  et  $c = 5,00$ , on arrive à des résultats très satisfaisants.

Si la forme binôme  $a + bt$  de la formule de M. de Mas, ou  $a + \frac{b}{A}$  de celle-ci, peut se justifier, d'après les considérations qui ont conduit à trouver les formules (11) ou (15) ci-dessus, qui sont également binômes, il faut, pour expliquer la présence de la vitesse  $v$  dans le coefficient  $K$ , ou un exposant différent de 2 dans l'expression de la résistance  $R$ , avoir recours à ce qui a été dit précédemment sur l'augmentation de la non-pression avec la vitesse. C'est ce phénomène, non encore analysé, qui peut expliquer la variation du coefficient de résistance avec la vitesse.

Cette variation est d'ailleurs absolument démontrée, comme on le voit ; la loi seule reste inconnue.

Les mêmes expériences ont mis en évidence une autre conséquence exprimée par M. de Mas dans les termes suivants : « pour un bateau animé d'une vitesse donnée, la résistance n'est pas proportionnelle à la surface  $A$  (du mâtte couple), elle croît moins vite » Cela revient à dire que le coefficient de résistance  $K$  diminue quand la section  $A$  augmente. C'est évident d'après la forme théorique de ce coefficient, donnée par les formules (11) ou (15) ci-dessus ; et c'est ce qui justifie la forme binôme,  $a + bt$ , proposée par M. de Mas, ou bien celle  $a + \frac{b}{A}$  de la formule précédente.

**295. Influence sur les formes, tant à l'arrière qu'à l'avant.** — La mise en évidence de cette influence était le but principal poursuivi par M. de Mas et il l'a atteint de la manière la plus heureuse. Le fait en lui-même est indiscutable et n'était pas contesté, ce qu'il importait de savoir c'était si l'on pouvait obtenir une diminution appréciable de l'effort de traction sans diminuer notablement la capacité utile du bateau c'est-à-dire, en adoptant la définition donnée plus haut, sans que le *coefficient de déplacement* du bateau subisse une réduction trop forte.

Déjà, en comparant les chiffres du tableau précédent, on voit que pour un même enfoncement et une même vitesse, les deux derniers bateaux n'exigent guère qu'un effort de traction égal à la moitié environ de celui que demande le premier.

Mais les expériences résumées dans le tableau suivant sont encore

plus décisives; elles ont porté sur un certain nombre de bateaux parmi lesquels je n'ai conservé que deux péniches, une toue, cinq flûtes, un chaland en fer et un bateau du type dit *bateau prussien*.

Désignation du bateau	Enfoncement	Coefficient de déplacement	Valeurs du coefficient K pour les vitesses de				
			0 m 50	1 m.	1 m 50	2 m.	2 m 50
Péniche <i>Dalila</i> ...	1.81	0.99	1.00	0.74	0.74	0.79	»
id. ....	1.60	0.99	1.00	0.74	0.74	0.79	»
Péniche <i>Ourouki</i> ...	1.81	0.99	1.03	0.75	0.76	»	»
id. ....	1.60	0.99	1.04	0.75	0.76	»	»
Toue <i>Désirée</i> .....	1.36	0.97	0.40	0.29	0.30	0.34	0.36
id. ....	1.60	0.97	0.43	0.31	0.29	0.29	0.31
Flûte <i>le Castor</i> ...	1.66	0.95	0.68	0.47	0.45	0.48	0.51
<i>le Lyonnais</i> ...	1.47	0.94	0.81	0.53	0.42	0.45	0.47
<i>la Julie</i> ...	1.43	0.95	0.92	0.56	0.30	0.50	0.54
<i>Alma</i> .....	1.60	0.95	0.53	0.40	0.39	0.41	0.44
<i>Pour nous</i> ..	1.60	0.94	0.50	0.37	0.36	0.38	0.41
Chaland <i>Panama</i> ...	1.42	0.90	0.41	0.29	0.26	0.25	0.24
Prussien <i>Remesch</i> ...	1.30	0.935	0.27	0.25	0.25	0.27	0.26

On voit qu'aux vitesses de 1 m. 00 et de 1 m. 50 par seconde qui représentent 3 k. 6 et 5 k. 4 à l'heure et qui sont très couramment pratiquées, le coefficient de résistance varie de 0,75 environ à 0,25 soit de 3 à 1, alors que le coefficient de déplacement ne descend que de 0,99 à 0,94 environ, soit de cinq pour cent seulement.

Les bateaux expérimentés ne diffèrent que par leurs formes à l'avant et à l'arrière. En comparant les différentes formes avec les chiffres qui précèdent et avec ceux de ses autres expériences, M. de Mas est arrivé à conclure que le relèvement de l'arrière du bateau double les avantages obtenus par le relèvement de l'avant, ou que l'importance des formes est aussi importante à l'arrière qu'à l'avant. Je crois même que l'on pourrait affirmer que l'influence des formes d'arrière est prépondérante. La meilleure forme à donner, d'après ces expériences, au bateau de navigation intérieure serait celle de *cuil-ler* que présente le bateau prussien *Remesch*, et qui est compatible avec un coefficient de déplacement élevé atteignant presque 0,94.

Les différences qui viennent d'être constatées s'atténuent considérablement lorsqu'au lieu d'être traînés sur un cours d'eau dont la section peut être regardée comme infinie par rapport à la leur, ils le sont au contraire sur un canal de dimensions restreintes. Les

résultats du tableau suivant d'expériences faites soit avec les mêmes bateaux, soit avec des bateaux semblables sur le canal de Bourgogne le montrent d'une façon évidente.

Désignation du bateau	Enfoncement	Coefficient de déplacement	Valeurs du coefficient K pour les vitesses de				
			0 m 25	0 m 50	0 m 75	1 m.	1 m 25
Péniche <i>Mascaret</i> .....	1.00	0.992	1.38	1.44	1.43	1.43	1.28
id. ....	1.30	0.990	1.59	1.37	1.39	1.41	1.56
id. ....	1.60	0.988	1.68	1.70	1.80	2.10	2.63
Flûte <i>Paulin</i> .....	1.00	0.968	1.00	0.78	0.78	0.80	0.88
id. ....	1.30	0.966	1.11	0.92	0.93	0.97	1.08
id. ....	1.60	0.963	1.30	1.15	1.18	1.24	1.40
id. ....	1.80	0.960	1.50	1.50	1.59	1.75	2.08
Flûte <i>Avant-garde</i> .....	1.00	0.957	1.00	0.75	0.73	0.74	0.82
id. ....	1.30	0.954	1.06	0.85	0.84	0.86	0.95
id. ....	1.60	0.950	1.26	1.10	1.12	1.18	1.33
Flûte <i>Petite Jeanne</i> .....	1.00	0.931	0.94	0.69	0.69	0.68	0.73
id. ....	1.30	0.927	1.15	0.80	0.78	0.79	0.87
Toue <i>Célestin</i> .....	1.00	0.977	1.00	0.72	0.69	0.70	0.75
id. ....	1.30	0.973	1.06	0.82	0.81	0.82	0.91
id. ....	1.60	0.968	1.26	1.06	1.08	1.12	1.24
Bateau prussien <i>Remesch</i> .....	1.00	0.954	0.83	0.61	0.58	0.58	0.61
id. ....	1.30	0.935	0.84	0.67	0.65	0.65	0.73

Pour les vitesses de 0 m. 75 et de 1 m. 00 qui sont les plus ordinaires sur les canaux, les résistances correspondant aux péniches et au bateau prussien sont à peu près dans le rapport de 2 à 1 seulement, tandis que nous avons constaté sur la Seine le rapport de 3 à 1. Cette différence se rattache d'ailleurs à l'influence du rapport des sections mouillées du bateau et du canal, que nous examinerons plus loin.

**296. Influence de la surface mouillée.** — Sous cette rubrique, M. de Mas a cherché à se rendre compte de l'effet, sur la résistance, du degré de rugosité de la paroi mouillée du bateau. Pour cela, il a comparé les résistances, toutes choses égales, d'un bateau dont la surface avait été ramenée, par un nettoyage profond, à l'état naturel et du même bateau recouvert de toile cirée. Il a trouvé que la résistance a été réduite dans des proportions variant de 27 à 48 pour cent, suivant les vitesses, par le seul fait d'avoir substitué à la surface passablement rugueuse de la coque

(bois ramené à l'état naturel) une surface parfaitement lisse (toile cirée).

Ce résultat pouvait être prévu. Il montre que le coefficient de frottement représenté par  $K_f$  ou  $K'_f$  dans les formules (11) ou (15) des pages 577 et 580, varie avec l'état de rugosité de la surface mouillée et que la valeur numérique 0,0031 que nous lui avons attribuée dans la formule (12), d'après certains résultats expérimentaux, n'est applicable qu'à un état particulier de cette surface. Les données expérimentales sont d'ailleurs trop peu nombreuses pour que l'on puisse en déterminer les variations.

**297. Influence de la longueur.** — M. de Mas a expérimenté trois bateaux présentant à l'avant et à l'arrière des formes aussi identiques que possible et ne différant que par la longueur qui, à l'enfoncement de 1 m. 60 auquel ces expériences ont été faites était respectivement de 37 m. 99 pour le premier, de 30 m. 03 pour le second et de 20 m. 55 pour le troisième. Il a trouvé, à toutes les vitesses, des résistances identiques pour ces trois bateaux.

Cela n'a rien d'in vraisemblable, après ce qui a été dit, au n° 288 de la diminution de la *non-pression* lorsque croît la longueur du prisme flottant. Il se trouve que, dans le cas particulier observé, cette diminution de la non-pression compense exactement l'augmentation de résistance due à ce que le frottement s'exerce sur une surface plus étendue. C'est là sans doute un hasard d'expérience.

On peut supposer, toutefois, qu'une compensation analogue se serait sans doute produite, peut-être pas aussi complètement, si l'état de la surface mouillée avait été modifié. On doit admettre, en effet, que le cône, dont j'ai parlé au n° 288 pour expliquer la diminution de la non-pression quand la longueur augmente, sera vraisemblablement d'autant plus ouvert que la rugosité de la surface sera plus grande et que, ce que l'on pourra gagner d'un côté, en diminution de la non-pression, pourra être perdu de l'autre par une augmentation du frottement, de sorte qu'il s'établira toujours, sinon une compensation exacte, au moins quelque chose d'approchant.

Dans le même ordre d'idées, M. de Mas a observé et comparé les efforts de traction nécessaires pour mettre en mouvement des bateaux attelés en convoi, les uns derrière les autres. Il existe, en pratique, trois modes d'attelage en convoi : l'attelage à longues remorques, où chaque bateau est distant du précédent d'une lon-

gueur de bateau (dans l'espèce, 40 mètres environ); l'attelage à remorques croisées où chaque bateau n'est plus distant du précédent que d'une douzaine de mètres et l'attelage *nez sur cul*, selon l'expression un peu crue, mais très suggestive des marinières.

Dans l'attelage à longues remorques, l'effort nécessaire pour mouvoir le convoi est très sensiblement égal à la somme des efforts exigés pour chaque bateau considéré isolément.

Dans l'attelage à remorques croisées, cet effort est inférieur à la somme des efforts partiels, d'environ 10 à 15 pour cent, suivant les vitesses.

Enfin, dans l'attelage nez sur cul, l'avantage est encore plus marqué et la différence a varié entre 15 et 24 pour cent. Elle est d'autant moindre, dans les deux cas, que la vitesse est plus faible.

Il convient d'ajouter que le convoi expérimenté comprenait des bateaux d'enfoncement très différent (0 m. 50 et 1 m. 60) et que l'avantage de l'attelage intensif aurait sans doute été notablement accru si cet enfoncement avait été le même.

Cependant M. de Mas fait connaître que, d'après les marinières, un convoi de bateaux attelés nez sur cul ne peut se conduire convenablement que si le bateau le plus rapproché du remorqueur est vide ou très peu chargé, les bateaux les plus lourds étant placés en queue. Il n'a pas cherché à déterminer l'ordre d'attelage qui correspondait au minimum d'effort.

**298. Influence du rapport des sections transversales du corps flottant et du cours d'eau.** — Cette influence est depuis longtemps connue. Du Buat avait montré que la résistance au mouvement d'un corps flottant augmente lorsque diminue la section transversale du canal, rempli d'eau en repos, sur lequel il flotte. Il avait même donné pour exprimer le coefficient de résistance  $K$  sur le canal en fonction de celui  $K_1$ , applicable au même corps sur un liquide indéfini, la relation

$$K = \frac{8,46}{\frac{\Omega}{A} + 2} K_1,$$

dans laquelle  $A$  étant toujours la section transversale du corps flottant,  $\Omega$  représente celle du canal.

Il est évident que cette relation empirique ne peut s'accorder avec les faits d'observation que dans les limites très étroites qui comprennent les expériences desquelles elle a été déduite. En par-

ticulier, elle ne s'applique qu'aux vitesses voisines de 1 m. 00 par seconde et pour des valeurs du rapport  $\frac{\Omega}{A}$  supérieures à 1,50 et inférieures à 6,46.

Un des résultats mis en évidence par M. de Mas, c'est que le rapport  $\frac{K}{K_1}$  que, pour abrégé, je représenterai par C, dépend de la vitesse et augmente assez rapidement avec elle. Voici, en effet, les chiffres qu'il a trouvés :

Enfoncement et voies navigables	Rapport des sections $\frac{\Omega}{A}$	Valeurs du rapport $C = \frac{K}{K_1}$ pour les vitesses de					
		0 m 25	0 m 50	0 m 75	1 m.	1 m 25	
Enfoncement de 1 m.	Seine.....	116.04	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	Dérivation de Joigny..	8.34	1.00	1.00	1.03	1.41	1.20
	Canal de Bourgogne...	5.89	1.33	1.42	1.56	1.67	1.83
	Canal de la Cure.....	4.64	1.41	1.48	1.63	1.85	2.07
	Canal du Nivernais....	3.82	1.50	1.70	1.95	2.28	2.66
Enfoncement de 1 m. 30	Seine.....	89.30	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	Dérivation de Joigny..	6.39	1.17	1.26	1.38	1.49	1.60
	Canal de Bourgogne...	4.54	1.74	1.84	1.98	2.10	2.26
	Canal de la Cure.....	3.57	1.92	2.13	2.38	2.75	3.17
	Canal du Nivernais....	2.94	2.67	3.05	3.82	4.70	5.58
Enfoncement de 1 m. 60	Seine.....	72.49	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	Dérivation de Joigny..	5.19	1.42	1.56	1.74	1.94	2.20
	Canal de Bourgogne...	3.68	2.46	2.71	3.00	3.28	3.59
	Canal de la Cure.....	2.90	2.56	2.93	3.67	4.79	5.80
	Canal du Nivernais....	"	"	"	"	"	"

La forme relativement simple proposée par Du Buat pour le coefficient C est donc inadmissible : pour une même valeur du rapport  $\frac{\Omega}{A}$  ce coefficient prend des valeurs qui peuvent varier du simple au double si la vitesse passe de 0 m. 25 à 1 m. 25 par seconde. Le même reproche pourrait être fait à toute autre formule analogue, d'après laquelle C serait indépendant de la vitesse, aussi je ne parle pas d'une formule citée par M. de Mas et proposée par M. E. Sweet, ingénieur américain, qui semble d'ailleurs encore plus imparfaite que celle de Du Buat.

D'autre part, M. de Mas a vérifié ce fait que la variation du coeffi-



cient de résistance n'est pas la même sur un canal étroit ou sur un fluide indéfini, l'influence des formes est d'autant moins appréciable que le rapport  $\frac{\Omega}{A}$  est plus petit. « En effet, dit Du Buat, quand le corps occupe toute la capacité du canal, la résistance se réduit à refouler le fluide en avant ; et dans ce cas, la forme de la partie antérieure est absolument indifférente à cet effet ». Ne serait-ce pas à l'observation peut-être instinctive de ce fait que l'on pourrait attribuer l'adoption, pour la plupart des bateaux de canaux, de formes à peu près rectangulaires, occasionnant une grande résistance au mouvement, mais qu'il n'y avait pas d'intérêt réel à modifier tant que ces bateaux devaient parcourir des canaux à section rétrécie ?

**299. Influence de la forme de la section transversale du cours d'eau.** — Ce n'est pas seulement la grandeur de

la section transversale du cours d'eau, ou plutôt le rapport  $\frac{\Omega}{A}$  de cette section à celle du corps flottant qui influe, toutes choses égales, sur la valeur du coefficient C, mais aussi la forme de cette section transversale, ou plus exactement, la plus ou moins grande ressemblance entre cette section et celle du corps flottant. M. de Mas a constaté que pour une même valeur du rapport  $\frac{\Omega}{A}$ , le coefficient C était moindre lorsque le canal était rectangulaire, comme le bateau lui-même, que lorsqu'il était à section trapézoïdale. De même, ce coefficient est d'autant plus élevé que la profondeur du cours d'eau diffère moins de l'enfoncement du bateau : il est très important, pour diminuer la résistance, qu'il reste, entre le fond du bateau et celui du canal, une couche d'eau d'une grande épaisseur, et M. de Mas a montré que cette diminution était très sensible tant que la distance dont il s'agit n'atteignait pas un mètre, et il en a conclu qu'il y aurait un avantage considérable à approfondir de 1 mètre le profil type de nos canaux sans changer l'enfoncement maximum que les bateaux peuvent prendre aujourd'hui<sup>1</sup>.

En résumé, ses expériences établissent nettement que :

1. Dans le même ordre d'idées, je crois pouvoir rappeler ici que dès 1880, lors de la présentation de l'avant-projet du canal du Nord sur Paris, j'avais proposé d'ouvrir cette voie nouvelle avec une profondeur de 2 m. 50. pour des bateaux de 1 m. 80 d'enfoncement.

1° Pour une même valeur du rapport  $\frac{\Omega}{A}$ , le coefficient de résistance varie avec la forme de la section du canal ;

2° Pour une même valeur du rapport  $\frac{\Omega}{A}$  et pour des sections de forme similaire, le coefficient de résistance diminue quand le mouillage augmente.

Enfin il paraît certain que l'état des parois du canal influe aussi sur la résistance. Toutes choses égales, la résistance au mouvement sera moindre dans une voie dont les berges sont défendues par un perré maçonné bien lisse que dans une autre où elles seraient recouvertes d'une végétation plus ou moins touffue de joncs et de roseaux.

**300. Résumé.** — Si j'ai donné avec autant de détails les résultats des expériences de M. de Mas, c'est surtout à cause du grand intérêt pratique qu'elles peuvent présenter en ce qu'elles conduiront à adopter, pour les bateaux et pour les canaux de navigation intérieure, des formes plus rationnelles que celles qui sont aujourd'hui en usage ; mais c'est aussi pour montrer combien est compliquée et difficile la question de la résistance des fluides. Sur toutes les causes qui peuvent influencer sur la grandeur de l'effort à exercer pour mouvoir, dans une eau tranquille, un corps déterminé, on n'a que de vagues indications, on sait tout au plus le sens de la variation de cet effort avec chacune de ces causes, mais on est bien loin de connaître un rapport précis permettant de conclure la résistance d'un corps de forme différente, ou placé dans des conditions différentes de ceux qui ont été expérimentés et observés.

Par exemple, en ce qui concerne l'influence de la vitesse, M. de Mas, tout en indiquant une formule nouvelle, de la forme

$$R = (a + bt)v^{2,25}$$

a cru devoir montrer qu'elle ne s'accorde pas mieux, avec les faits d'observation, qu'une autre, un peu moins simple peut-être, mais qui se rapprocherait sans doute davantage des indications de la théorie.

Mais c'est surtout en ce qui concerne l'influence de la forme et de la grandeur de la section transversale du canal que les résultats des expériences, s'ils sont très probants au point de vue des conséquences à en tirer dans les applications, paraissent impossibles à être exprimés par une formule au moyen de laquelle on pourrait

espérer connaître ce qui se passe dans des conditions un peu différentes de celles des expériences.

Il faut donc se borner à ne tirer de ces expériences que les conclusions très importantes d'ailleurs qu'en a déduites M. de Mas et qui peuvent avoir la plus heureuse influence sur l'avenir de l'industrie de la navigation intérieure.

---



# ANNEXES

---

## DOCUMENTS ET RENSEIGNEMENTS CONCERNANT LES IRRIGATIONS<sup>1</sup>

---

### A. Lois et arrêtés généraux.

---

**I. Loi en forme d'instruction, des 12-20 août 1790.** — Les administrations de département doivent rechercher et indiquer le moyen de procurer le libre cours des eaux, d'empêcher que les prairies ne soient submergées par la trop grande élévation des écluses des moulins et par les autres ouvrages d'art établis sur les rivières ; de diriger enfin, autant qu'il sera possible, toutes les eaux de leur territoire vers un but d'utilité générale d'après les principes de l'irrigation..

**II. Loi du 6 octobre 1791.** — *Titre I. Section I. Article 4.* — Nul ne peut se prétendre propriétaire exclusif des eaux d'un fleuve ou d'une rivière navigable ou flottable ; en conséquence, tout propriétaire riverain peut, en vertu du droit commun, y faire des prises d'eau<sup>2</sup> sans néanmoins en détourner ni embarrasser le cours d'une manière nuisible au bien général et à la navigation établie.

1. Ces documents s'appliquent principalement aux retenues établies en vue d'ouvrir une prise d'eau destinée à l'irrigation ou à un autre usage quelconque.

2. Voir ci-après l'article 10 de l'arrêté du 19 ventôse an VI qui indique les conditions dans lesquelles ces prises d'eau doivent être effectuées.

*Titre II. — Art. 15.* — Personne ne pourra inonder l'héritage de son voisin, ni lui transmettre volontairement les eaux d'une manière nuisible, sous peine de payer le dommage et une amende qui ne pourra excéder la somme du dédommagement.

*Art. 16.* — Les propriétaires ou fermiers des moulins ou usines construits ou à construire seront garantis de tous dommages que les eaux pourraient causer aux chemins et aux propriétés voisines, par la trop grande élévation du déversoir ou autrement. Ils seront forcés de tenir les eaux à une hauteur qui ne nuise à personne et qui sera fixée par le directoire du département, d'après l'avis du directoire de district. En cas de contravention, la peine sera une amende qui ne pourra excéder la somme du dédommagement <sup>1</sup>.

### III. Arrêté du gouvernement du 19 ventôse an VI. —

*Art. 9.* — Il est enjoint aux administrations centrales et municipales, et aux commissaires du Directoire exécutif établis près d'elles, de veiller avec la plus sévère exactitude à ce qu'il ne soit établi par la suite aucun pont, aucune chaussée permanente ou mobile, aucune écluse ou usine, aucun batardeau, moulin, digue ou autre obstacle quelconque au libre cours des eaux dans les rivières navigables ou flottables, dans les canaux d'irrigation ou de dessèchement généraux, sans en avoir préalablement obtenu la permission de l'administration centrale, qui ne pourra l'accorder que de l'autorisation expresse du Directoire exécutif.

*Art. 10.* — Ils veilleront pareillement à ce que nul ne détourne le cours des eaux des rivières et canaux navigables ou flottables, et n'y fasse des prises d'eau ou saignées pour l'irrigation des terres, qu'après y avoir été autorisé par l'administration centrale, et sans pouvoir excéder le niveau qui aura été déterminé.

1. Ces pénalités sont modifiées par l'article 457 du Code pénal.

**B. Documents législatifs spéciaux aux irrigations.**

---

**IV. Code civil. — Art. 644.** — Celui dont la propriété borde une eau courante autre que celle qui est déclarée dépendance du domaine public par l'art 538, au titre de la Distinction des biens, peut s'en servir à son passage pour l'irrigation de ses propriétés. Celui dont cette eau traverse l'héritage peut même en user dans l'intervalle qu'elle y parcourt, mais à la charge de la rendre, à la sortie de ses fonds, à son cours ordinaire.

**Art. 645.** — S'il s'élève une contestation entre les propriétaires auxquels ces eaux peuvent être utiles, les tribunaux en prononçant, doivent concilier l'intérêt de l'agriculture avec le respect dû à la propriété ; et, dans tous les cas, les règlements particuliers et locaux sur le cours et l'usage des eaux doivent être observés.

**V. Loi du 29 avril 1845. — Art. 1.** — Tout propriétaire qui voudra se servir, pour l'irrigation de ses propriétés, des eaux naturelles ou artificielles dont il a le droit de disposer, pourra obtenir le passage de ces eaux sur les fonds intermédiaires, à la charge d'une juste et préalable indemnité.

Sont exceptés de cette servitude les maisons, cours, jardins, parcs et enclos attenants aux habitations.

**Art. 2.** — Les propriétaires des fonds inférieurs devront recevoir les eaux qui s'écouleront des terrains ainsi arrosés, sauf l'indemnité qui pourra leur être due.

Seront également exceptés de cette servitude les maisons, cours, jardins, parcs et enclos attenants aux habitations.

**Art. 3.** — La même faculté de passage sur les fonds intermédiaires pourra être accordée au propriétaire d'un terrain submergé en tout ou en partie, à l'effet de procurer aux eaux nuisibles leur écoulement.

**Art. 4.** — Les contestations auxquelles pourront donner lieu l'établissement de la servitude, la fixation du parcours de la conduite d'eaux, de ses dimensions et de sa forme, et les indemnités dues, soit au propriétaire du fonds traversé, soit à celui du fonds qui recevra l'écoulement des eaux, seront portées devant les tribunaux qui, en prononçant, devront concilier l'intérêt de l'opération avec le respect dû à la propriété.

Il sera procédé devant les tribunaux comme en matière sommaire, et, s'il y a lieu à expertise, il pourra n'être nommé qu'un seul expert.

*Art. 5.* — Il n'est aucunement dérogé, par les présentes dispositions, aux lois qui règlent la police des eaux.

**VI. Loi du 11 juillet 1847.** — *Art. 1.* — Tout propriétaire qui voudra se servir, pour l'irrigation de ses propriétés, des eaux naturelles ou artificielles dont il a le droit de disposer, pourra obtenir la faculté d'appuyer sur la propriété du riverain opposé les ouvrages d'art nécessaires à sa prise d'eau, à charge d'une juste et préalable indemnité.

Sont exceptés de cette servitude, les bâtiments, cours et jardins attenants aux habitations.

*Art. 2.* — Le riverain sur le fonds duquel l'appui sera réclamé pourra toujours demander l'usage commun du barrage, en contribuant pour moitié aux frais d'établissement et d'entretien ; aucune indemnité ne sera respectivement due dans ce cas, et celle qui aura été payée devra être rendue.

Lorsque cet usage commun ne sera réclamé qu'après le commencement ou la confection des travaux, celui qui le demandera devra supporter seul l'excédant de dépense auquel donneront lieu les changements à faire au barrage pour le rendre propre à l'irrigation des deux rives.

*Art. 3.* — Les contestations auxquelles pourra donner lieu l'application des deux articles ci-dessus seront portées devant les tribunaux.

Il sera procédé comme en matière sommaire, et s'il y a lieu à expertise, le tribunal pourra ne nommer qu'un seul expert.

*Art. 4.* — Il n'est aucunement dérogé, par les présentes dispositions, aux lois qui règlent la police des eaux.



## EXEMPLES D'OUVRAGES CONCERNANT LES IRRIGATIONS

---

Les problèmes auxquels peut donner lieu l'établissement et l'usage de canaux d'irrigation sont très divers.

Celui de l'ouverture proprement dite du canal, de la pente à lui donner, des dimensions à adopter pour sa section transversale, etc., a été traité dans le § 3 du chapitre V relatif aux canaux découverts, il n'y a rien de particulier à y ajouter ici.

Un autre problème est celui de la répartition des eaux entre les divers intéressés.

Cette répartition peut se faire en attribuant, à chacun d'eux, la jouissance de toutes les eaux du canal pendant un temps déterminé. Voici par exemple comment est distribuée l'eau du canal de Thuir, ou canal royal, créé en 1427 et qui arrose 1346 hectares dans la plaine de Perpignan <sup>1</sup>.

Les communes d'Ill et de Neffiach jouissent de l'eau pendant 24 heures à partir du dimanche à 5 heures du matin.

Millias, pendant 24 heures à partir du lundi, 5 heures du matin.

Saint-Filin d'amont, pendant 31 heures à partir du mardi, 5 heures du matin.

Soler, pendant 24 heures à partir du mercredi, à midi.

Thuir, pendant 17 heures à partir du jeudi, à midi.

Canohès et Toulougas, pendant 24 heures à partir du vendredi, à 5 heures du matin.

Perpignan, pendant 24 heures à partir du samedi, à 5 heures du matin.

Mais ce mode de répartition ne s'applique ordinairement qu'aux canaux secondaires ; il est souvent nécessaire de partager d'une façon permanente le volume d'eau suivant des proportions déterminées.

Partout où l'on peut disposer d'une petite chute, l'appareil partiteur le plus exact est le déversoir. Si, sur le contour d'un

1. *La petite culture*, par Gustave Heuzé. Paris, 1891. Dans l'Encyclopédie agricole et horticole de M.-C. Lechalas.

bassin, on place deux déversoirs dont les crêtes sont exactement arasées à la même hauteur, les débits seront à très peu près proportionnels aux longueurs de ces ouvrages (en négligeant la petite correction due à la contraction latérale), et ils resteront proportionnels quelle que soit la variation du niveau.

Souvent le problème n'est pas aussi simple et se complique de conditions particulières. Il peut arriver, par exemple, que l'un des deux participants doit recevoir un volume d'eau déterminé. On règle alors quelquefois le débit au moyen d'une vanne de prise d'eau placée à l'entrée du canal ; souvent aussi le débit se mesure par des orifices d'une section déterminée auxquels on donne le nom de *modules* et qui sont différents dans les diverses régions.

Ces modules, ou orifices de dimensions constantes, ne donnent le débit en vue duquel ils sont établis qu'autant qu'ils fonctionnent sous une charge d'eau déterminée. Si la charge augmente ou diminue, le débit de l'orifice varie dans le même sens. Cependant, dans bien des régions, le débit se règle par modules, c'est-à-dire par la grandeur seule des orifices et l'on ne semble tenir aucun compte de la charge.

Dans le Roussillon, par exemple, d'après M. Heuzé, on évalue le volume d'eau par *meule* ou *œil*. Un œil est une ouverture circulaire faite dans une dalle que l'on place dans la berge du canal. D'après les renseignements qui m'ont été donnés par M. Sorel, ingénieur à Perpignan, l'œil a rarement moins de 0 m. 20 et rarement plus de 0 m. 30 de diamètre. Un œil de 9 pouces (0 m. 25) de diamètre est réputé fournir le volume d'eau désigné, dans les anciens titres, sous le nom de meule. D'après M. Heuzé, un œil d'une meule, c'est-à-dire fournissant le volume d'eau nécessaire à mouvoir une meule de moulin, suffit à l'irrigation de 32 à 33 hectares.

On comprend combien peut être différent le débit d'un pareil orifice suivant qu'il est placé plus ou moins au-dessous du niveau d'amont. Ce mode de mesurage ne peut donc être recommandé lorsque le niveau est variable ; mais il peut, au contraire donner des résultats satisfaisants si, d'une manière quelconque, par un déversoir régulateur, par exemple, le niveau se trouve maintenu à très peu près constant.

Je vais donner deux exemples d'ouvrages partiteurs ainsi établis, dont je dois la communication à l'obligeance de M. Sorel.

Parmi les usagers de l'eau de la rivière du Tech se trouve le moulin Vilar, qui, d'après ses titres, a droit à un volume de 600 litres d'eau. Sur la berge du canal qui l'alimente, on a construit un déversoir A (fig. 133) dont la crête est arasée à 0 m. 60 au-

dessus du plafond BC et qui sert à régulariser le niveau. Le canal est barré, un peu en aval du déversoir régulateur A par un autre déversoir DEFH, dont la crête EF se trouve à 0 m. 47 au-dessous du

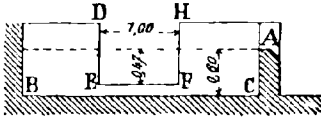


Fig. 133

niveau de celle A du premier et dont la largeur EF est de 1 m. 00. Dans ces conditions, lorsque le niveau, dans le canal, atteint la crête A du déversoir régulateur, le déversoir alimentaire EF débite les 600 litres

par seconde auxquels a droit le moulin Vilar. Le niveau ne peut d'ailleurs s'élever beaucoup au-dessus de la crête du déversoir régulateur, car le canal d'amenée a des dimensions et une pente telles qu'il ne peut guère débiter plus des 600 litres dont il s'agit, et dans ces conditions, la longueur du déversoir régulateur, qui est de 20 mètres, aurait pu être beaucoup réduite sans inconvénient. D'une manière générale, la longueur du déversoir régulateur doit être calculée de manière qu'il puisse livrer passage à l'excédent possible du débit sans surélévation notable.

Si, par exemple, les dimensions du canal d'amenée étaient telles que, dans les conditions ordinaires, il pût débiter un mètre cube, il faudrait que le déversoir régulateur livrât passage à  $1000 - 600 = 400$  litres par seconde et, pour cela, une longueur de 10 mètres aurait pu être motivée, puisqu'un déversoir débite environ 20 litres par seconde avec une tranche d'eau de 0,05 d'épaisseur. La dimension du déversoir alimentaire aurait pu être diminuée, ou le niveau de sa crête exhaussé en conséquence de cette surélévation de 0,05, considérée comme normale.

Voici un autre exemple un peu plus compliqué, et qui peut servir de type dans beaucoup de circonstances ; c'est l'ouvrage régulateur du canal des Albères, dérivé aussi de la rivière du Tech.

Ce canal doit laisser aux arrosants inférieurs un volume d'eau de 1509 litres (y compris les 600 litres pris et rendus par le moulin Vilar) avant de recevoir l'eau de la rivière.

Voici les dispositions adoptées dans ce but (fig. 134).

A est le canal d'amenée des eaux, B est le canal des arrosants inférieurs ou canal de fuite et C est l'origine du canal des Albères : à l'origine du canal B des arrosants inférieurs se trouve un déversoir DD' de 2 m. 50 de longueur et dont la crête est à 0,99 au-dessus du fond du canal, et, au-dessous de la crête de ce déversoir, un orifice de jauge rectangulaire IIII' de 0,25 de hauteur et 2 m. 23 de longueur, placé à 0,25 au-dessus du fond. Le canal des Albères ne peut recevoir que l'eau qui passe au-dessus d'un déversoir EE'F,

de 6,75 de longueur, dont la crête est 0,75 au-dessus du fond du canal d'amenée. Dans ces conditions, si le niveau de l'eau affleure

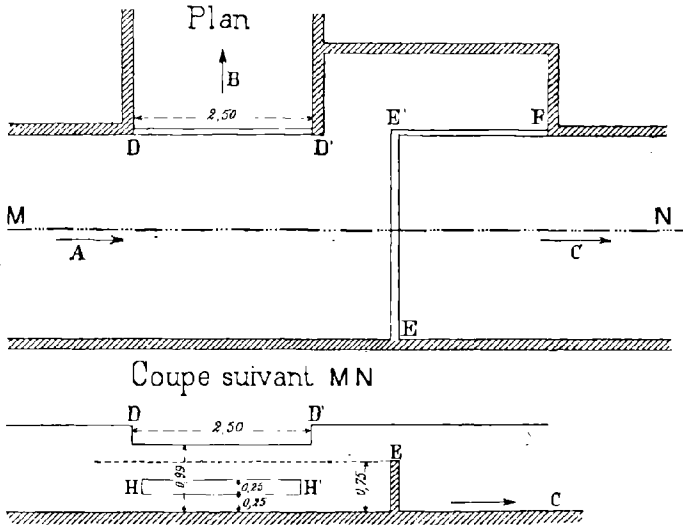


Fig. 134.

la crête E du déversoir alimentaire, le canal des Albères ne reçoit rien, et les arrosants inférieurs reçoivent, par l'orifice de jauge HH', un volume de  $0,62 \times 2,23 \times 0,25 \times \sqrt{2g} \times 0,375 = 936$  litres environ qui, ajoutés aux 600 litres environ rendus par le moulin Vilar, leur donnent largement les 1509 litres auxquels ils ont droit avant que le canal des Albères reçoive rien.

Lorsque le niveau du canal d'amenée atteint celui de la crête du déversoir régulateur DD', le canal des Albères reçoit par une tranche de 0,24 d'épaisseur et de 6 m. 75 de longueur un volume de 1405 litres environ. Il a droit à 1200 litres.

Alors, le débit de l'orifice de jauge HH', au lieu de 936 litres, devient 1199 litres. Les arrosants inférieurs reçoivent donc en trop  $1199 + 600 - 1509 = 290$  litres, soit 19 p. %, tandis que le canal des Albères reçoit en trop seulement  $1405 - 1200 = 205$  litres, ou 17 p. %. Il se trouve donc un peu moins bien partagé que les arrosants inférieurs dans la répartition de l'excédant de débit de la rivière.

Il serait d'ailleurs très difficile de réaliser exactement le partage des excédants proportionnellement aux dotations. Par exemple lorsque le niveau, dans le canal d'amenée, s'élève à 0,05 au-dessus

du déversoir régulateur DD', le canal des Albères reçoit une tranche d'eau de 0,29, soit environ 1863 litres, ou 663 litres en trop, ou encore une proportion de 1,55 de sa dotation normale 1200 litres.

Les arrosants inférieurs reçoivent alors par l'orifice de jauge :

$0,62 \times 2,23 \times 0,25 \times \sqrt{2g \times 0,665} = 1248$  litres  
par le déversoir régulateur :

$0,40 \times 2,50 \times 0,05 \times \sqrt{2g \times 0,05} = 49$   
par le moulin Vilar :  $\frac{600 \text{ litres}}{1897 \text{ litres}}$   
ou en totalité :

au lieu de 1509 qui constituent leur dotation normale ; la proportion n'est que 1,26 environ. Ils se trouvent donc bien moins avantagés que le canal des Albères.

On arriverait à une répartition plus équitable, ou plus proportionnelle aux dotations, en allongeant le déversoir régulateur DD'. En réalité les différences ou inégalités théoriques qui viennent d'être signalées se trouvent atténuées dans une forte proportion par les pertes à travers les barrages. C'est sans doute la raison pour laquelle le projet d'allongement du déversoir n'a pas été exécuté.

On aurait pu aussi régulariser le débit de l'orifice de jauge III' en le plaçant à un niveau plus bas. Si, par exemple, il était abaissé de 0 m 50, la charge sur le centre de cet orifice serait de 0,875 lorsque l'eau commence à entrer dans le canal des Albères ; elle deviendrait 1 m. 115 lorsque l'eau affleure le déversoir régulateur :

le débit ne varierait donc que dans le rapport de  $\sqrt{\frac{1,115}{0,875}} = 1,11$ , tandis qu'avec le dispositif adopté, la variation des débits est dans le rapport de  $\sqrt{\frac{0,615}{0,375}} = 1,28$ . Sur un débit normal de 909 litres, la variation ne serait que de  $909 \times 0,11 = 100$  litres au lieu de  $909 \times 0,28 = 254$  litres.

Le fonctionnement de ces appareils suppose que l'orifice débouche à l'air libre et n'est jamais noyé. Il faut pour cela que le canal inférieur soit toujours convenablement entretenu, et il faut surtout que la chute ou perte de charge que nécessitent ces ouvrages régulateurs ait été prévue dans les projets de canaux, ce qui souvent est omis. On se trouve alors extrêmement gêné pour les établir ; la chute qu'ils exigent ne peut se trouver que par une réduction de la pente des canaux inférieurs, et cette réduction peut être la cause d'envasements qui les obstruent et maintiennent l'eau d'aval à un niveau supérieur à celui de l'orifice.

Les déversoirs exigent beaucoup moins de chute que les orifices de jauge, car un orifice ne peut guère avoir moins de 0 m. 20 de hauteur et il faut que son bord supérieur soit au moins à une profondeur de 0 m. 20 au-dessous du niveau d'amont. Il est même bien préférable, au point de vue de la régularité du débit, que cette profondeur soit plus grande. Pour qu'un orifice de jauge puisse être établi, il est donc nécessaire de disposer d'une chute d'au moins 0 m. 40 et il vaut mieux avoir beaucoup plus. Tandis que pour établir un déversoir, et pour que sa crête ne soit pas noyée, il suffit d'une différence de niveau égale à l'épaisseur de la lame déversante, qui peut être réduite à 0 m. 20 ou 0 m. 25, et même au-dessous.

Je donnerai encore comme exemple l'ouvrage construit pour le partage des eaux attribuées au canal de Rondole, dans la vallée de l'Eyne. Le volume de ces eaux est fixé par l'article 1<sup>er</sup> du décret du 28 décembre 1879 ainsi conçu : « Les eaux de la rivière d'Eyne « seront partagées entre cette rivière et le canal de Rondole dans « la proportion de 1/3 pour la rivière et 2/3 pour le canal. Toute- « fois le volume attribué au canal ne pourra, dans aucun cas, « dépasser le chiffre de 300 litres par seconde ».

L'eau est amenée dans un bassin de partage A (fig. 135) dont

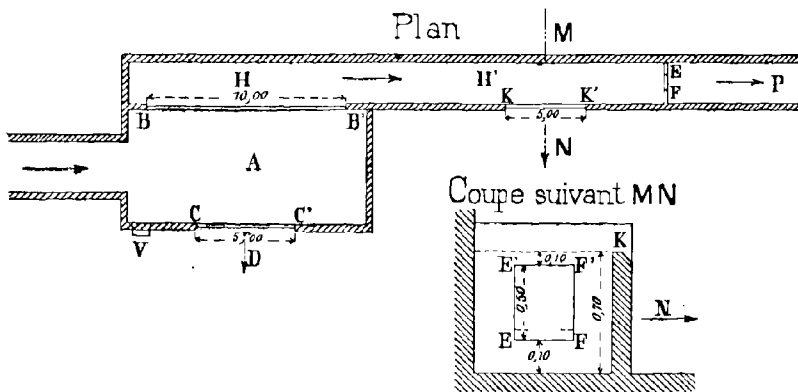


Fig. 135

elle sort par deux déversoirs BB' et CC' placés en face l'un de l'autre sur le même axe, ayant l'un dix mètres et l'autre cinq mètres de longueur. Une vanne V sert à vider le bassin, qui a un mètre de profondeur au-dessous des crêtes des déversoirs. Sur le canal HH' est établi, en EF, un orifice de jauge précédé d'un déversoir KK' de

5 mètres de longueur, dont la crête est à 0 m. 70 au-dessus du fond du canal. L'orifice de forme rectangulaire EEFF a 0 m. 37 de largeur et 0 m. 50 de hauteur, son arête supérieure est à 0 m. 10 au-dessous du déversoir K.

Lorsque l'eau affleure ce déversoir, l'orifice débite  $0,62 \times 0,37 \times 0,50 \times \sqrt{2g} \times 0,35 = 300$  litres environ. Si le niveau de l'eau s'élève à 0 m. 05 plus haut, le débit s'élève à la vérité à 320 litres au lieu de 300, mais le déversoir KK' donne alors 100 litres environ, et le déversoir CC' donne  $\frac{1}{2}(320 + 100) = 210$  litres. La rivière d'Eyne où se réunissent les eaux de ces deux déversoirs reçoit donc en totalité 310 litres. Avec une alimentation aussi abondante, il importe peu que le canal de Rondole reçoive 20 litres de plus que sa dotation ; tous les besoins sont largement pourvus.

On aurait pu arriver, si cela avait été utile, à un débit un peu plus constant pour ce canal, en donnant à l'orifice EEFF une forme rectangulaire plus large et moins haute, et en laissant toujours son arête inférieure à 0 m. 60 au-dessous de la crête du déversoir K. Si, par exemple, on ne lui avait donné qu'une hauteur de 0 m. 20, au lieu de 0 m. 50, la charge sur son centre aurait été de 0 m. 50. Il aurait fallu que sa largeur fût portée à 0 m. 77 au lieu de 0 m. 37, mais alors une surélévation de 0 m. 05 du niveau aurait augmenté la charge sur le centre de  $\frac{1}{10}$  seulement. Le débit se serait

trouvé être de  $300 \sqrt{\frac{55}{50}}$ , soit 312 litres environ ; tandis que, avec la disposition adoptée, la même surélévation porte la charge de 0 m. 35 à 0 m. 40 et augmente le débit dans le rapport de  $\sqrt{\frac{40}{35}}$  ce qui le porte à 320 litres environ.

La variation n'a, dans l'espèce, aucune importance, et ce qui vient d'être dit n'est destiné qu'à servir d'exemple.

On indique quelquefois, comme appareil destiné à régulariser le débit d'un orifice, la disposition suivante usitée dans le module milanais. L'eau à débiter s'écoule par un premier orifice O (fig. 136) percé dans une paroi verticale BC ; elle est reçue dans un bassin rectangulaire dans la paroi DE duquel, en face de la première ouverture O, se trouve percé un autre orifice plus petit, O'. L'eau se maintient, dans le bassin, à un niveau MM' intermédiaire entre celui d'amont AA' et celui du centre des orifices O et O'.

Désignons par H la chute nette dont on dispose, c'est à-dire la

hauteur à laquelle le niveau d'amont peut être placé au-dessus du centre  $O'$  de l'orifice d'écoulement, par  $h$  la hauteur, au-dessus de ce même orifice, du niveau de l'eau dans le bassin intermédiaire,

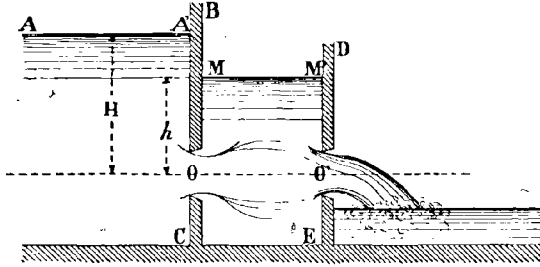


Fig. 136.

par  $\omega$  et  $\omega'$  les superficies des deux orifices et par  $m$  le coefficient de contraction, supposé le même pour les deux. Le régime permanent étant établi, le volume  $Q$  écoulé dans l'unité de temps par l'orifice  $O$  sera :

$$Q = m\omega \sqrt{2g(H - h)}.$$

Le même volume devra passer en même temps par l'orifice  $O'$ , on devra donc avoir aussi :

$$Q = m\omega' \sqrt{2gh}.$$

D'où, en éliminant  $h$  :

$$Q = m \frac{\omega\omega'}{\sqrt{\omega^2 + \omega'^2}} \sqrt{2gH} = m\omega_1 \sqrt{2gH}.$$

Le débit est le même que si, sous la charge donnée  $H$ , l'écoulement s'effectuait par un orifice ayant une superficie  $\omega_1$  égale à  $\frac{\omega\omega'}{\sqrt{\omega^2 + \omega'^2}}$  ; et cela quelle que soit la hauteur totale  $H$ . Il ne se trouve donc en aucune façon régularisé, lorsque le niveau d'amont varie. La véritable manière de régulariser le débit consiste à donner à la charge  $H$ , sur l'orifice, la plus grande valeur possible : pour une même variation  $\Delta H$  de charge, la variation proportionnelle du débit sera :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \Delta H \cdot \frac{1}{2H}$$



c'est-à-dire qu'elle sera inversement proportionnelle à la charge  $H$ . Dans chaque cas particulier on obtient pour  $H$  la plus grande valeur possible en plaçant le centre de l'orifice le plus près possible du niveau d'aval, ce qui conduit à adopter des orifices très larges, mais d'une faible hauteur.

Lorsqu'on ne peut disposer d'aucune chute, le problème de la division du débit d'un canal en deux ou plusieurs parties devient beaucoup plus difficile, et voici comment on peut le résoudre lorsque ces parties doivent être égales entre elles.

Alors, à la suite d'un élargissement  $A$  (fig. 137) du canal d'amenée formant bassin d'une forme régulière et rectiligne, on ouvre des canaux parallèles,  $BC$ ,  $BC$ ,... en nombre égal à celui des parts à obtenir, aussi exactement que possible égaux entre eux dans toutes leurs parties et que l'on prolonge en ligne droite aussi loin qu'on le peut. L'égalité du volume débité par chacun de ces canaux

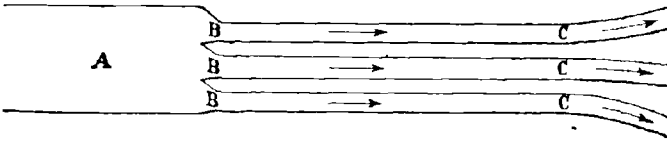


Fig. 137

sera d'autant plus exactement obtenue que leur longueur commune  $BC$  sera plus grande. La vitesse de l'eau dans chacun d'eux est influencée par l'état de la partie située en aval, lequel se traduit, au point de vue de l'écoulement, par une hauteur déterminée du niveau à l'extrémité  $C$ , ce niveau étant d'autant plus bas que les conditions de l'écoulement en aval sont plus faciles. Toutefois si, comme nous le supposons, la forme de ces canaux au point  $C$  est rendue invariable, de telle sorte que leurs sections transversales s'y retrouvent toujours égales, la différence de niveau d'un canal à l'autre ne pourra y être très grande, et si les canaux  $BC$  sont assez longs, la pente superficielle restera sensiblement la même dans chacun d'eux, quelles que soient ces différences de niveau au point  $C$ ; les différences de pente seront d'autant plus faibles que la longueur  $BC$  sera plus grande.

Lorsque les parts doivent être inégales, on se contente souvent, comme approximation, d'opérer de la même manière et de donner aux canaux partiteurs, avec une profondeur commune, des largeurs proportionnelles aux volumes qu'ils doivent débiter. Ce n'est évidemment qu'une solution imparfaite, car la vitesse de l'eau, qui dépend du rayon moyen, n'est pas la même dans ces canaux de largeur différente.

On obtiendrait un résultat plus approché en tenant compte de cette variation du rayon moyen, ce qui peut se faire simplement comme il suit. Appelons  $Q$  et  $Q'$  les débits des deux canaux et soit donné le rapport  $\frac{Q}{Q'}$ . Supposons que les deux canaux à ouvrir doivent avoir des sections transversales rectangulaires de largeurs  $l$ ,  $l'$  et même profondeur  $h$ ; soit  $I$  leur pente commune. Nous pouvons adopter, comme première approximation, la proportionnalité de la largeur aux débits, écrire  $\frac{l'}{l} = \frac{Q'}{Q}$ , et, avec les largeurs approximatives ainsi calculées, déterminer, d'après la nature des parois des canaux et leurs rayons moyens  $\frac{lh}{l+2h}$  et  $\frac{l'h}{l'+2h}$ , les valeurs des coefficients d'écoulement. Appelons  $b$  et  $b'$  ces deux valeurs qui seront fournies par les tables. Les équations du mouvement seront :

$$\frac{lh}{l+2h} I = b \frac{Q^2}{l^2 h^2} \quad \text{et} \quad \frac{l'h}{l'+2h} I = b' \frac{Q'^2}{l'^2 h^2}.$$

Divisons ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\frac{l'^2}{l^2} = \frac{b' Q'^2 l' + 2h}{b Q^2 l + 2h};$$

équation du troisième degré en  $l'$  qui servira à trouver la valeur de cette inconnue, si l'on y suppose données  $l$  et  $h$ . Pour la résoudre, on peut, avec une approximation suffisante, remplacer dans le second membre, l'inconnue  $l'$  par la valeur approchée  $l' = \frac{Q'l}{Q}$ . On trouve alors :

$$\frac{l'}{l} = \frac{Q'}{Q} \sqrt{\frac{b'(l + 2h \frac{Q}{Q'})}{b(l + 2h)}}.$$

Pour que la largeur ainsi trouvée donne le débit  $Q'$  désiré, il faut que les canaux de largeur  $l$  et  $l'$  soient assez longs, comme il a été dit pour le cas de partage en parties égales.

On établirait facilement une formule analogue pour le cas où les canaux partiteurs, au lieu d'être rectangulaires, auraient une section en forme de trapèze.

On a quelquefois à répartir les eaux d'une rivière entre plusieurs zones d'irrigation échelonnées le long de son lit. Pour cela, et afin d'attribuer à chaque zone le même coefficient d'irrigation, c'est-à-

dire le même volume d'eau par hectare, on constitue les orifices de prise d'eau par des orifices rectangulaires, munis de vannes fonctionnant sous des charges constantes et dont les largeurs sont proportionnelles aux surfaces à irriguer. En élevant toutes les vannes à la même hauteur, on donne à chaque zone d'irrigation un volume d'eau proportionnel à sa surface.

Si l'on représente par  $Q$  le débit disponible, par  $S$  la surface totale à irriguer, chaque hectare recevra ainsi un volume  $\frac{Q}{S}$ . Mais la question se complique notablement par suite des colatures

Le débit disponible, au droit des prises d'eau inférieures, se trouve augmenté du volume des colatures, et aussi du débit des affluents que peut recevoir le cours d'eau principal ; et l'on comprend qu'avec un même débit initial  $Q$  on puisse fournir à chacun des hectares irrigables un volume bien supérieur à  $\frac{Q}{S}$  si l'on tient compte de ces ressources supplémentaires. La difficulté consiste alors à répartir, aussi également que possible entre les intéressés, la totalité des eaux disponibles. Si l'égalité absolue n'est pas possible, il faut faire en sorte, au moins, qu'aucune zone d'irrigation ne soit moins favorisée qu'une autre située à l'amont, ou, en d'autres termes, que le coefficient d'irrigation, s'il n'est pas le même pour toutes les zones, aille en croissant de l'amont à l'aval.

Supposons que les divers ouvrages de prise d'eau au nombre de  $N$  soient numérotés de l'amont à l'aval, 1, 2, 3, ...  $N$ , et soient  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_N$ , les surfaces irriguables des zones correspondantes. Désignons par  $d_1, d_2, \dots, d_N$ , les volumes d'eau distribués à chaque zone ; ce que l'on doit chercher à réaliser, c'est que l'on ait :

$$\frac{d_1}{s_1} = \frac{d_2}{s_2} = \dots = \frac{d_N}{s_N} ;$$

et, en même temps, que toute l'eau soit utilisée, c'est-à-dire que le dernier volume  $d_N$  distribué soit égal au volume restant disponible dans la rivière au droit du dernier ouvrage. Pour préciser, appelons  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ , les débits disponibles au droit de chaque ouvrage de prise d'eau, ces débits tenant compte des colatures, etc. Il faut, pour que toute l'eau soit utilisée, que  $d_N = q_N$ . Mais, d'autre part, en aucun des points de la rivière, on ne peut distribuer plus d'eau qu'on n'en possède, c'est-à-dire qu'à une prise d'eau quelconque de rang  $n$  on devra toujours avoir  $d_n < q_n$ . Or,  $d_n = \frac{q_N}{s_N} s_n$ . La réglementation uniforme ne sera donc pas possible si, en un point quelconque du canal, on a

$$q_n < \frac{qN}{sN} s_n.$$

Lorsque cela se présente, on divise le périmètre total à irriguer en deux sections à chacune desquelles on attribue un coefficient d'irrigation différent. La première comprend les zones 1, 2...  $n$  et le coefficient d'irrigation  $y$  est pris égal à  $\frac{q_n}{s_n}$ ; la seconde comprend les zones

$(n + 1), (n + 2) \dots N$  et le coefficient d'irrigation  $y$  est  $\frac{qN}{sN}$ . Et l'on conçoit que, pour la même raison, l'on puisse être conduit à adopter trois, quatre, etc. coefficients d'irrigation. Mais, en opérant ainsi, on rend minimum l'écart entre ces différents coefficients et l'on ne permet pas à une zone quelconque d'être moins favorisée qu'aucune de celles situées à l'amont.

Ce mode de répartition, appliqué par M. l'ingénieur Raby aux territoires de Tocqueville (Algérie), a donné entière satisfaction aux intéressés et il va de nouveau être appliqué à plusieurs autres cours d'eau des hauts plateaux de l'arrondissement de Sétif.



# ABAQUE

## POUR LE CALCUL DES DISTRIBUTIONS D'EAU

---

M. L. Bertrand, chef de bataillon du génie, a donné, dans la *Revue du Génie militaire*, la description et l'usage d'un abaque qu'il a imaginé, en appliquant et perfectionnant les méthodes de M. d'Ocagne, et qui est destiné à faciliter la solution des problèmes relatifs à la distribution des eaux. Je vais donner ci-après une courte analyse du très intéressant mémoire de M. Bertrand auquel est emprunté presque textuellement tout ce qui va suivre.

**Principe de l'abaque.** — Soit une équation de la forme

$$z = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n$$

dans laquelle  $z$  est une fonction linéaire des  $n$  variables  $y_1, y_2, \dots, y_n$  et où  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des constantes. Si à partir d'un axe des  $x$  pris pour origine, on porte, sur des ordonnées parallèles, choisies arbitrairement, à des abscisses  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , des longueurs proportionnelles à  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , le second membre de l'équation précédente représente la somme des moments, par rapport à l'axe des  $x$ , de forces parallèles  $a_1, a_2, \dots, a_n$  supposées appliquées aux extrémités des longueurs  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Les coordonnées  $X$  et  $Y$  du point d'application de la résultante de ces forces auront pour expression :

$$X = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$
$$Y = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{z}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$X$  ne dépend que des  $a$  et des  $x$ , qui sont invariables, les  $a$  étant, par hypothèse, des constantes et les  $x$  ayant été pris arbitrairement. Le point d'application de la résultante se trouve toujours sur une même ordonnée dont l'abscisse  $X$  se trouve ainsi déterminée. Il

suffira donc, si l'on peut trouver ce point d'application, de mesurer son ordonnée à une échelle déterminée, pour avoir la valeur cherchée de  $x$ .

On sait comment la détermination géométrique de ce point d'application se ramène à celle du point d'application de la résultante de deux forces parallèles. La résultante (1, 2) des deux premières (1) et (2) composée avec la troisième force (3) donne la résultante (1, 2, 3) du système de ces trois forces. Puis la résultante (1, 2, 3) avec (4) donnera la résultante (1, 2, 3, 4) du système des quatre forces et ainsi de suite. Il est clair d'ailleurs que l'on peut opérer dans un ordre quelconque ; par exemple (2) et (3) composées donneront (2, 3) qui avec (4) donnera (2, 3, 4), et celle-ci composée avec (1) donnera la même résultante (1, 2, 3, 4) et le même point d'application.

Soit le cas de deux termes, ou l'équation

$$x_{12} = a_1 y_1 + a_2 y_2.$$

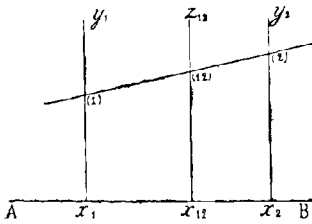


Fig 138.

La figure se réduit à celle ci-contre (fig. 138). Sur la droite AB, ayant pris arbitrairement les points  $x_1$ ,  $x_2$ , puis déterminé le point  $x_{12}$ , correspondant à l'abscisse X (lequel partage la distance  $x_1 x_2$ , en deux parties inversement proportionnelles à  $a_1$  et à  $a_2$ ), et mené les ordonnées de ces trois points, si l'on porte sur les ordonnées de  $x_1$  et de  $x_2$  des lon-

gueurs  $y_1$  et  $y_2$  quelconques, et si l'on joint par une droite les extrémités (1), (2) de ces ordonnées, le point (12) où cette droite rencontrera l'ordonnée de  $x_{12}$  sera le point d'application de la résultante des deux forces parallèles appliquées en (1) et (2), et la valeur de  $x$  sera mesurée, à une échelle déterminée par la longueur de l'ordonnée de ce point (12).

Si donc on a gradué, à des échelles convenables, les trois ordonnées dont il s'agit, on pourra par le tracé de la droite (12) et une simple lecture, avoir la valeur de  $x_{12} = a_1 y_1 + a_2 y_2$ : Et cela, quelles que soient les valeurs variables de  $y_1$  et de  $y_2$ .

Réciproquement, si l'on connaît  $x_{12}$  et l'une des deux variables  $y$  la même construction donnera l'autre.

De même, la figure 139 permet de calculer la valeur de la fonction

$$x_{123} = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3$$

et aussi les trois combinaisons partielles

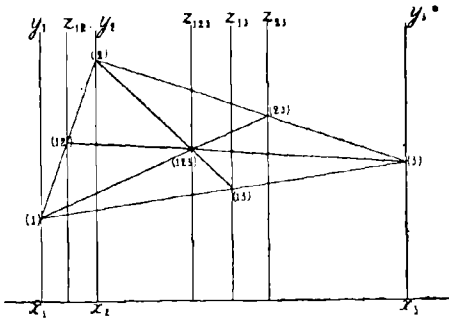


Fig. 139

$$\begin{aligned} x_{23} &= a_2 y_2 + a_3 y_3, \\ x_{13} &= a_1 y_1 + a_3 y_3, \\ x_{12} &= a_1 y_1 + a_2 y_2 \end{aligned}$$

Et l'on voit, en continuant de la même manière, que l'on pourra construire un abaque composé de lignes parallèles à raison d'une seule ligne pour chaque variable  $y$  qui pourra donner non seulement la valeur

d'une fonction  $z$  de ces  $n$  variables

$$z = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n,$$

mais encore une quelconque des fonctions linéaires de même forme dans lesquelles cette équation peut se décomposer, quels que soient le nombre de ces termes et leur position dans la série. Evidemment encore, la même figure donnerait la valeur de l'une quelconque des variables  $y$  en fonction des  $n - 1$  autres et de  $z$ .

Une fonction de la forme

$$v = u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_n^{m_n}$$

dont le second membre est un monôme produit de puissances à exposants constants de variables  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , se ramène à la forme précédente en prenant les logarithmes des deux membres. On a alors, en effet :

$$\log v = m_1 \log u_1 + m_2 \log u_2 + \dots + m_n \log u_n.$$

Et il suffira, pour trouver graphiquement la valeur  $v$  en fonction des  $n$  variables  $u$ , ou bien l'une quelconque de ces variables en fonction des  $n - 1$  autres et de  $v$ , de construire un abaque semblable à celui qui vient d'être décrit, en portant sur les ordonnées des graduations proportionnelles non plus aux variables elles-mêmes, mais à leurs logarithmes, ce qui est facile en s'aidant d'une règle à calcul.

**Application au calcul des conduites d'eau.** — M. Bertrand prend la formule que j'ai proposée au n° 85 ci-dessus, sous la forme

$$D^5 J^4 = a^4 U^7,$$

et qui se prête à la construction d'un abaque logarithmique donnant l'une des trois quantités  $D$ ,  $J$  ou  $U$  en fonction des deux autres. Mais M. Bertrand remarque avec raison que d'autres quantités, dépendant de celles-là, peuvent être intéressantes à déterminer en même temps de la même manière graphique.

Ces nouvelles variables sont d'abord :

Le DÉBIT  $Q$ , lié à la vitesse  $U$  et au diamètre  $D$  par la relation

$$4 Q = \pi D^2 U;$$

qui permet de mettre la formule précédente sous la forme

$$D^{19} J^4 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^7 a^4 Q^7$$

Pour simplifier l'écriture, on peut représenter par une seule lettre  $c$  le produit constant  $\left(\frac{4}{\pi}\right)^7 a^4 = c$ , et écrire

$$D^{19} J^4 = c Q^7.$$

La LONGUEUR *totale*  $L$  et la PERTE DE CHARGE *totale*  $H$  de la conduite, liées à la perte de charge par unité de longueur  $J$ , par la relation

$$H = L J.$$

Pour distinguer la perte de charge totale  $H$  de la perte de charge par unité de longueur, M. Bertrand réserve le nom de *perte de charge* à la première,  $H$ , de ces deux quantités, et désigne la seconde,  $J$ , par le nom de *pente de la ligne de charge*, ou simplement de PENTE.

Avec ces nouvelles quantités, la formule s'écrit :

$$D^{19} H^4 = c L^4 Q^7. \quad \text{ou bien } H = c^{\frac{1}{4}} L^{\frac{7}{4}} Q^{-\frac{19}{4}}.$$

En outre, il peut être utile de considérer les quantités suivantes :

LA RÉSISTANCE. — M. Bertrand appelle ainsi la fonction  $H Q^{-\frac{7}{4}}$ , que je représenterai par la lettre  $G$  en posant, par conséquent :

$$G = H Q^{-\frac{7}{4}} = c^{\frac{1}{4}} L D^{-\frac{19}{4}}.$$

ou bien

$$G^4 Q^7 = H^4 \quad \text{et } G^4 D^{19} = c L^4.$$



La quantité désignée par  $\gamma$  au n° 87 n'est autre chose que la résistance par unité de longueur de la conduite :  $\gamma = \frac{G}{L}$ .

Si l'on a une conduite formée de plusieurs tuyaux de diamètres différents,  $D_1, D_2, \dots$  et de longueurs respectives  $L_1, L_2, \dots$ , placés au bout les uns des autres et dans lesquels passe le même débit  $Q$ , la perte de charge totale sera évidemment

$$H = c^4 Q^7 \left( L_1 D_1^{-19/4} + L_2 D_2^{-19/4} + \dots \right).$$

La résistance totale  $G$  sera ainsi la somme des résistances  $G_1 + G_2 + \dots$  des diverses portions de la conduite. On voit que la résistance ainsi définie est l'analogie de la résistance électrique des conducteurs.

Le DÉBOUCHÉ. — Le débouché d'une conduite est, en quelque sorte, la propriété inverse de la résistance. M. Bertrand désigne par ce nom la fonction  $Q H^{-4/7}$  que je représenterai par  $B$ .

$$B = Q H^{-4/7} = c^{-4/7} L^{-4/7} D^{19/7}$$

ou bien

$$B^7 H^4 = Q^7 \quad \text{et} \quad c^4 B^7 L^4 = D^{19}.$$

Si deux réservoirs sont réunis par un certain nombre de tuyaux de diamètres  $D_1, D_2, \dots$  et de longueurs respectives  $L_1, L_2, \dots$ , de manière que la perte de charge totale  $H$  soit la même pour tous, le débit total  $Q$  aura pour expression

$$Q = c^{-4/7} H^{4/7} \left( L_1^{-4/7} D_1^{19/7} + L_2^{-4/7} D_2^{19/7} + \dots \right)$$

Le débouché total  $B$  sera ainsi la somme des débouchés  $B_1, B_2, \dots$  des divers tuyaux.

Le débouché ainsi défini est l'analogie de la conductibilité d'un fil pour l'électricité.

La PUISSANCE. — Si l'on a à étudier les différentes combinaisons de diamètre et de perte de charge qui peuvent se présenter sur une conduite à établir, dont on connaît seulement la longueur totale  $L$  et le débit  $Q$ , il sera avantageux, dit M. Bertrand, de calculer une

fois pour toutes la fonction  $L Q^{1/7}$ , de manière à connaître le dernier membre de l'équation mise sous la forme suivante. Cette fonc-

tion est appelé par lui la *puissance* de la conduite, je la représenterai par  $F$  en écrivant :

$$F = c^{-\frac{1}{4}} H D^{\frac{19}{4}} = L Q^{\frac{7}{4}}.$$

La VARIATION DU PRIX. — M. Bertrand désigne ainsi l'expression  $\frac{4}{19} \frac{D}{J}$  et voici pourquoi : Etant donné un tuyau de longueur déterminée, on peut, tout en laissant son débit constant, faire varier en sens inverses le diamètre et la perte de charge entre ses deux extrémités, autrement dit le prix et la perte de charge, puisque, pour la longueur donnée, le prix est sensiblement proportionnel au diamètre.

De l'équation écrite plus haut

$$D^{19} H^4 = c L^4 Q^7,$$

on déduit facilement, par différentiation, le second membre étant considéré comme constant :

$$\frac{dD}{D} = - \frac{4}{19} \frac{dH}{H}.$$

ou bien

$$d(LD) = - \frac{4}{19} \frac{LD}{H} dH = - \frac{4}{19} \frac{D}{J} \cdot dH.$$

Par conséquent la variation de prix, proportionnelle à la variation du produit  $LD$ , est égale à la variation de perte de charge multipliée par la fonction  $-\frac{4}{19} \frac{D}{J}$ . Elle est positive si la perte de charge a diminué et négative si cette perte de charge a augmenté. Je désignerai par  $E$  cette fonction dite *variation du prix*, en posant

$$E = \frac{4}{19} \frac{D}{J} \quad \text{ou} \quad 19 E J = 4 D.$$

Lorsque l'on veut résoudre le problème de l'établissement d'une conduite avec la condition du minimum de la dépense, ou de l'économie maximum, il faut faire en sorte que le prix soit minimum et que par suite la variation soit nulle. Nous en donnerons un exemple plus loin.

On voit que toutes les quantités ainsi définies, et qui à un titre quelconque peuvent figurer dans le calcul d'une distribution d'eau, sont liées entre elles par des expressions monômes qui peuvent se traduire en abaques logarithmiques.

**Description et propriétés de l'abaque.** — L'abaque construit d'après les principes qui viennent d'être exposés est donné sur la page 635, ci-après. Il comprend neuf droites parallèles sur lesquelles sont portées des graduations logarithmiques analogues à celles de la règle à calcul. Autrement dit, sur chacune de ces droites, une même distance constante, limitée par deux grands traits, sépare deux nombres dont l'un est décuple de l'autre; elle correspond ainsi à un ordre décimal, unités, dizaines, centaines, dixièmes, centièmes, etc.

Cette longueur, représentant l'unité dont la dénomination est écrite à côté, est divisée en parties inégales dont les points de séparation sont chiffrés 1, 2... 9. Celles-ci, à leur tour ont été subdivisées, tant que la chose a été possible, en deux, cinq ou dix parties, distinguées par des traits encore plus courts. De cette manière on peut, après le premier chiffre lu directement, et suivi de la virgule, placer la première et quelquefois la seconde des décimales qui le suivent, lues ou appréciées à l'estime.

Ces échelles portent en tête les désignations des quantités qu'elle représentent, et dont on vient de donner les définitions ainsi que les expressions algébriques. En se reportant à ces définitions, ainsi qu'aux généralités exposées au commencement, on reconnaît que l'abaque donne, sur une même droite transversale, les groupes de quantités désignés ci-après.

1<sup>o</sup> le débit  $Q$ , le diamètre  $D$ , la pente de la ligne de charge  $J$ , la vitesse  $U$  et la variation du prix  $E$ .

2<sup>o</sup> le diamètre  $D$ , la longueur  $L$ , la résistance  $G$  et le débouché  $B$ .

3<sup>o</sup> le débit  $Q$ , la résistance  $G$  et le débouché  $B$ , et la perte de charge totale  $H$ .

4<sup>o</sup> la longueur  $L$ , le débit  $Q$  et la puissance  $F$ .

5<sup>o</sup> le diamètre  $D$ , la perte de charge  $H$  et la puissance  $F$ .

6<sup>o</sup> la perte de charge  $H$ , la longueur  $L$ , et la pente de la ligne de charge  $J$ .

Il résulte de là que si l'on connaît deux données, la transversale correspondante est déterminée et détermine à son tour l'autre élément ou les autres éléments du même groupe.

Si l'on possède deux éléments d'un groupe et un troisième élément d'un groupe différent, tous les autres éléments s'en déduisent <sup>1</sup>.

1. On suppose toutefois que parmi les deux éléments donnés dans le premier groupe ne sont pas compris la vitesse et la variation du prix.

En effet, le polygone est déterminé lorsqu'on connaît trois de ses nœuds non en ligne droite. Supposons par exemple que l'on connaisse Q, G et D.

Q et G donneront H,

Q et D donneront J,

H et D donneront F,

G et D, ou H et J, ou B et F, donneront L.

Le polygone tracé au haut des échelles de l'abaque est la traduction graphique des relations qui viennent d'être rappelées.

Les échelles adoptées sont les suivantes :

Pour la longueur L, la perte de charge H, le diamètre D, c'est le mètre avec ses multiples ou ses sous-multiples. Il n'y a aucune difficulté.

La vitesse U est exprimée en mètres par seconde. Sur la même ordonnée une autre échelle donne les valeurs de  $\frac{U^2}{2g}$  également en mesures métriques.

Le débit Q est exprimé par deux échelles, à gauche, le débit par seconde, à droite, le débit par minute, en litres, multiples ou sous-multiples, et en mètres cubes pour les grands débits.

La pente J est un rapport de deux longueurs H et L et par suite un nombre abstrait, exprimé en unités ou fractions décimales de l'unité. dixièmes, centièmes, etc.

Il en est de même des autres quantités la résistance, le débouché, la puissance et la variation du prix.

On a pris pour unité de résistance celle qui correspond à un débit de 1 mètre cube par seconde sous une perte de charge de 1 mètre ;

pour unité de débouché celui d'un tuyau qui débite 1 mètre cube par seconde sous une perte de charge de 1 mètre ;

pour la variation du prix, l'unité correspond aux valeurs de D et de J pour lesquelles la fonction  $\frac{4 D}{19 J}$  est égale à 1.

Au lieu de tracer effectivement des lignes sur l'abaque, il est plus simple, plus rapide et plus propre d'y appliquer soit un fil tendu, soit une bande transparente en papier, en celluloid, etc. sur laquelle est tracée préalablement une ligne droite.

On peut manœuvrer ce fil ou cette bande soit à l'aide des doigts, soit, ce qui vaut mieux, au moyen de deux pointes aiguës, aiguilles, traçoirs, etc. De cette manière, lorsqu'on a amené la pointe sur une graduation, on peut faire pivoter la droite autour de ce point sans aucun glissement ni déplacement.

**Exemples d'application de l'abaque.** — Ce qui précède montre que l'on peut, par le simple tracé d'une droite, résoudre le problème consistant à trouver le troisième élément d'un des groupes suivants, lorsque l'on connaîtra les deux autres :

- 1<sup>er</sup> groupe : Débit Q, Diamètre D, Pente J.
- 2<sup>e</sup> — Résistance G, Diamètre D, Longueur L.  
(ou Débouché B)
- 3<sup>e</sup> — Débit Q, Résistance G, Perte de charge H.  
(ou Débouché B)
- 4<sup>e</sup> — Débit Q, Puissance F, Longueur L.
- 5<sup>e</sup> — Diamètre D, Perte de charge H, Puissance F.
- 6<sup>e</sup> — Perte de charge H, Pente J, Longueur L.

Au lieu de la résistance G, on peut mettre partout le débouché B. De plus le 1<sup>er</sup> groupe fera connaître immédiatement la vitesse U et la variation du prix E.

On peut combiner ensemble ces solutions de manière à les appliquer à une variété extrêmement grande de questions.

Par exemple, supposons donnés la longueur L, la perte de charge H, et le débit Q ; on cherche le diamètre D.

La figure montre que, pour aller en D on peut suivre les marches ci-après indiquées :

- 1<sup>o</sup> de L et H, déduire J ; puis de J et Q, déduire D ;
- 2<sup>o</sup> de L et Q, déduire F ; puis de H et F, déduire D ;
- 3<sup>o</sup> de H et Q déduire G ; puis de G et L, déduire D.

Ces trois marches sont absolument équivalentes ; mais on comprend que pour certaines questions, il y ait avantage à déterminer soit J, soit F, soit G, et l'on fera son choix en conséquence.

1<sup>er</sup> *Problème.* — Une conduite est formée de trois parties AB, BC, CD placées bout à bout et ayant les dimensions suivantes :

- AB . . . Longueur L = 120 m. . . Diamètre D = 12 cm.
- BC . . . . . L = 60 m. . . . . D = 8 cm.
- CD . . . . . L = 83 m. . . . . D = 6 cm.

Elle est parcourue par un débit de 8 litres par seconde, quelles sont les pertes de charge partielle et totale ?

Nous calculerons, pour chaque portion de conduite, sa résistance (problème du 2<sup>e</sup> groupe ci-dessus), nous trouverons ainsi

pour AB, . . . . .	Résistance G = 4.500
BC . . . . .	G = 17.000
CD . . . . .	G = 80.000

Et par suite la résistance totale . . . . . G = 101.500

Au moyen de ces valeurs de G et de celle du débit de Q = 8

litres par seconde, nous trouverons (troisième groupe) les valeurs suivantes de  $H$  :

de A en B. . . . .	Perte de charge	$H = 1 \text{ m. } 0$
de B en C. . . . .		$H = 3 \quad 6$
de C en D. . . . .		$H = 17 \quad 0$
Et pour toute la conduite. . . . .		$H = 21 \text{ m. } 6$

2° *Problème.* — Supposons maintenant que les trois conduites ci dessus, au lieu d'être placées bout à bout, aient leurs extrémités communes, de telle manière que la cote piézométrique soit la même pour toutes à chacune de ces extrémités. Suivant quelle proportion le courant se partagera-t-il entre elles, en admettant que la perte de charge totale soit, par exemple, de 18 mètres ?

Nous calculerons, pour chaque conduite, son débouché (2° groupe), ce qui nous donnera

pour AB, . . . . .	Débouché $B = 0,0082$
BC. . . . .	$B = 0,0038$
CD. . . . .	$B = 0,0016$

Et pour l'ensemble . . . . .  $B = 0,0136$

Au moyen de ces valeurs de  $B$  et de celle de la perte de charge  $H = 18 \text{ m.}$ , nous trouverons encore (3° groupe) les débits suivants :

AB. . . . .	Débit $Q = 43, \text{ lit.}$
BC. . . . .	$Q = 20, \text{ lit.}$
CD. . . . .	$Q = 8, \quad 2$

Et pour l'ensemble . . . . .  $Q = 71, \quad 2.$

3° *Problème.* — Reprenons le problème des conduites branchées du n° 94, page 164, ainsi que la figure et les notations de ce paragraphe. Supposons données

les altitudes des trois réservoirs :

$$z_1 = 11 \text{ m. } 20, \quad z_2 = 6 \text{ m. } 50, \quad z_3 = 3 \text{ m. } 70;$$

les longueurs des trois conduites :

$$L_1 = 1.350 \text{ m.}, \quad L_2 = 600 \text{ m.}, \quad L_3 = 200 \text{ m.};$$

les diamètres des deux premières :

$$D_1 = 0 \text{ m. } 20, \quad D_2 = 0 \text{ m. } 18;$$

et proposons-nous de trouver le diamètre  $D_3$  qu'il sera nécessaire de donner à la troisième conduite DC pour obtenir en C un débit de 3 litres par seconde, c'est-à-dire  $Q_3 = 3$  litres.

Tout serait déterminé si l'on connaissait la cote piézométrique au point de branchement D, que nous désignerons par  $z$ . Cette cote doit avoir une valeur telle que la somme  $Q_1 + Q_2$  ou la différence  $Q_1 - Q_2$  des débits des deux premières conduites soit égale à  $Q_3$ .

Cherchons d'abord dans quel sens doit avoir lieu l'écoulement dans la conduite intermédiaire. Pour cela, attribuons à  $x$  la valeur  $x_1$ ; ce qui nous donnera  $H_2 = 0$  et par suite  $Q_2 = 0$ .

Dans cette hypothèse  $H_1 = x_1 - x = 11 \text{ m. } 20 - 6 \text{ m. } 50 = 4 \text{ m. } 70$ .

D'autre part, les données  $L_1$  et  $D_1$  nous permettent de déterminer la résistance  $G_1$  de la première conduite; l'abaque donne  $G_1 = 4 \text{ } 000$ . Cette valeur combinée avec celle de  $H_1$  donne le débit  $Q_1 = 21$  litres supérieur à ce que doit être  $Q_2$ . Par conséquent une partie de l'eau arrivant en D doit s'écouler dans le réservoir intermédiaire, la cote piézométrique  $x$  doit être augmentée, d'une part pour diminuer le débit  $Q_1$ , d'autre part pour augmenter  $Q_2$  de façon à ce que la différence  $Q_1 - Q_2$  devienne égale à 3 litres.

Donnons à cette cote  $x$  une valeur arbitraire  $x = 9 \text{ m.}$  par exemple. Il en résultera les valeurs suivantes :

$$H_1 = x_1 - x = 11 \text{ m. } 20 - 9 \text{ m. } 00 = 2 \text{ m. } 20;$$

$$H_2 = x - x_2 = 9 \text{ m. } 00 - 6 \text{ m. } 50 = 2 \text{ m. } 50.$$

La résistance  $G_2$  de la seconde conduite étant calculée d'après les données  $L_2$  et  $D_2$  se trouve être  $G_2 = 2.800$ .

Avec ces valeurs,  $H_1$  et  $G_1$  d'une part,  $H_2$  et  $G_2$  de l'autre, l'abaque fournit  $Q_1 = 13 \text{ lit. } 6$ ,  $Q_2 = 18 \text{ litres}$ .

La différence  $Q_1 - Q_2$  est alors négative et égale à  $-4 \text{ lit. } 4$ . Cela montre que la valeur supposée pour  $x$  ne pourra jamais être réalisée : la conduite DB ne peut pas avoir un débit supérieur à celui de AD. Mais cette impossibilité ne nous empêchera pas de tirer parti du résultat obtenu.

Nous pouvons en effet construire une courbe d'erreur avec les données suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{pour } x = 4.65, \quad Q_1 - Q_2 = 21 \quad , \\ \quad \quad \quad x = 9.00 \quad \quad Q_1 - Q_2 = -4,4 \quad . \end{array}$$

La construction de cette courbe d'erreur, ou la règle de trois ordinaire nous montrera que la valeur de  $x$  qui donnera  $Q_1 - Q_2 = 3$  devra être voisine de  $8 \text{ m. } 3$ .

Avec cette nouvelle valeur  $x = 8, 3$ , nous obtiendrons successivement en opérant de la même manière

$$H_1 = x_1 - x = 11,2 - 8,3 = 2,9 \quad \text{et} \quad Q_1 = 19,0$$

$$H_2 = x - x_2 = 8,3 - 6,5 = 1,8 \quad \quad \quad Q_2 = 15,3$$

$$\text{D'où la différence} \quad \quad \quad Q_1 - Q_2 = 3,7$$

cette différence est encore un peu trop forte, et on peut la diminuer en augmentant un peu la valeur de  $x$ . Pour  $x = 8,4$ , on trouve de même

$$\begin{array}{lcl} H_1 = 3,8 & \text{et} & Q_1 = 18,6 \\ H_2 = 1,9 & & Q_2 = 15,7 \\ \text{D'où} & Q_1 - Q_2 = & \frac{2,8}{2,8} \end{array}$$

La valeur à adopter pour  $z$  serait donc comprise entre 8,3 et 8,4, plus près de celle-ci, soit environ 8,38 ; mais une telle approximation n'est pas nécessaire. Il est même préférable de prendre un chiffre approché par défaut, qui donnera pour le diamètre cherché  $D_3$  une valeur un peu trop grande. On prendra donc définitivement  $z = 8,3$ , d'où  $H_3 = z - z_3 = 8,3 - 3,7 = 4,6$ . Avec  $H_3 = 4,6$  et  $Q_3 = 3$ , on trouvera la résistance  $G_3 = 120.000$  et ce chiffre, combiné avec la longueur  $L_3 = 200$ , donnera le diamètre cherché  $D_3 = 6 \text{ cm. } 7 = 0 \text{ m. } 067$ .

*4<sup>e</sup> Problème.*—Comme dernier problème, et pour donner un exemple de l'emploi de la colonne de l'abaque intitulée *variation du prix* nous résoudrons la question suivante. Etant donné toujours le même système des trois réservoirs, avec les données numériques suivantes :

Cotes piézométriques :

$$z_1 = 18 \text{ m.}, \quad z_2 = 16 \text{ m.}, \quad z_3 = 4 \text{ m.};$$

Longueurs :

$$L_1 = 2.800 \text{ m.}, \quad L_2 = 3.500 \text{ m.}, \quad L_3 = 4.200 \text{ m.};$$

Débites :

$$Q_1 = 240 \text{ lit.}, \quad Q_2 = 300 \text{ lit.}, \quad Q_3 = 540 \text{ lit.},$$

on demande de calculer les diamètres qui donneront le minimum de dépense en argent.

Nous prendrons encore comme variable arbitraire la cote piézométrique  $z$  du point de branchement. Elle doit être intermédiaire entre celles des deux derniers réservoirs puisque le débit  $Q_3$  est égal à la somme des deux autres. Prenons pour première valeur la moyenne arithmétique soit  $z = 10 \text{ m.}$  Il en résulte  $H_1 = 8$ ,  $H_2 = 6$  et  $H_3 = 6$ . Avec les données  $L$  et  $Q$  pour chaque conduite, nous pouvons déterminer la puissance  $F$ , avec  $F$  et  $H$ , nous trouverons le diamètre  $D$  et avec  $D$  et  $Q$ , la variation de prix  $E$ . Les valeurs numériques sont les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} F_1 = 250, & D_1 = 0,52, & E_1 = 4.200 \\ F_2 = 450, & D_2 = 0,63, & E_2 = 9.900 \\ F_3 = 1500, & D_3 = 0,80, & E_3 = \frac{12.000}{2.100} \end{array}$$

Différence

Il convient de remarquer que le prix varie dans la 3<sup>e</sup> conduite en sens inverse de sa variation dans les deux premières ; en effet, quand



on augmentera le diamètre  $x$ , on diminuera la perte de charge et par suite on augmentera le diamètre et le prix dans les deux premières, tandis qu'on augmentera la perte de charge et qu'on diminuera le diamètre et le prix dans la troisième. Les variations sont donc de signe contraire, c'est pourquoi on en a calculé la différence. Pour annuler cette différence, il faut augmenter la dernière et diminuer les deux premières, c'est-à-dire diminuer  $x$ . Prenons donc  $x = 9$  m.

Il en résultera avec les valeurs déjà trouvées des puissances F et

$H_1 = 9$ m.,	$D_1 = 0,50$ ,	$E_1 = 3.500$	}	10.300,
$H_2 = 7$ m.,	$D_2 = 0,60$ ,	$E_2 = 6.800$		
$H_3 = 5$ m.,	$D_3 = 0,80$ ,	$E_3 =$		
	Différence			15.000, — 4.700.

La différence étant 2.100 pour  $x = 10$  et — 4.700 pour  $x = 9$ , sera nulle approximativement pour  $x = 9$  m. 7.

Avec cette valeur on trouve, soit directement par l'abaque, soit par interpolation entre les valeurs déjà trouvées :

$$D_1 = 0,51, \quad D_2 = 0,62, \quad D_3 = 0,81.$$

Ces diamètres donneront la solution la plus économique.

L'abaque, comme les tables numériques de la fin du volume, est établi dans l'hypothèse où le coefficient  $a$  de la formule du n° 85 aurait la valeur 0,00092 que j'ai cru pouvoir lui attribuer. M. Bertrand a remarqué que cette formule pouvant s'écrire

$$D^{19} H^8 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^7 a^4 L^4 Q^7 ;$$

adopter pour le coefficient  $a$  une autre valeur  $a_1$  équivaut à remplacer la longueur  $L$  du tuyau pour une longueur fictive  $L_1$

$$L_1 = \frac{a_1}{a} L ;$$

et tous les autres éléments restent les mêmes.

Il suffirait donc d'avoir, sur la verticale de l'abaque où se lisent les longueurs  $L$ , plusieurs graduations correspondant aux valeurs diverses  $a_1, a_2, \dots$  que l'on voudrait adopter pour ce coefficient.

La valeur  $a = 0,00092$  s'applique aux tuyaux de fonte en service. Pour la fonte neuve, il faudrait prendre  $a_1 = 0,00074$ , et par suite  $\frac{a_1}{a} = 0,8$  environ. Pour le plomb, le verre, on prendrait  $\frac{a_2}{a} = 0,6$ .

Comme les longueurs de l'ordonnée sont proportionnelles aux logarithmes, la division de l'échelle des  $L_1$  ne différera de celle des  $L$  que par le point de départ :  $\log L_1 = \log L + \log \frac{a_1}{a}$ . L'échelle où on lira directement les  $L_1$  sera donc la même que celle des  $L$  déplacée de manière à ce que la division 1 corresponde par exemple avec la division 0,8 s'il s'agit de la fonte neuve, avec la division 0,6 s'il s'agit du plomb et du verre, etc.

---





# TABLES NUMÉRIQUES

---

TABLE I

Hauteurs  $h$  correspondant aux vitesses  $v$ 

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

$v$	$h$	$v$	$h$
0 m 10	0 m 0005	4 m 10	0 m 86
0 20	0 002	4 20	0 90
0 30	0 005	4 30	0 94
0 40	0 008	4 40	0 99
0 50	0 013	4 50	1 03
0 60	0 018	4 60	1 08
0 70	0 025	4 70	1 13
0 80	0 033	4 80	1 17
0 90	0 041	4 90	1 22
1 00	0 051	5 00	1 27
1 10	0 062	5 10	1 33
1 20	0 073	5 20	1 38
1 30	0 086	5 30	1 43
1 40	0 100	5 40	1 49
1 50	0 115	5 50	1 54
1 60	0 130	5 60	1 60
1 70	0 147	5 70	1 66
1 80	0 165	5 80	1 71
1 90	0 184	5 90	1 77
2 00	0 204	6 00	1 84
2 10	0 225	6 10	1 90
2 20	0 247	6 20	1 96
2 30	0 270	6 30	2 02
2 40	0 294	6 40	2 09
2 50	0 319	6 50	2 15
2 60	0 345	6 60	2 22
2 70	0 372	6 70	2 29
2 80	0 400	6 80	2 36
2 90	0 429	6 90	2 43
3 00	0 459	7 00	2 50
3 10	0 490	7 10	2 57
3 20	0 522	7 20	2 64
3 30	0 555	7 30	2 72
3 40	0 589	7 40	2 79
3 50	0 624	7 50	2 87
3 60	0 661	7 60	2 94
3 70	0 698	7 70	3 02
3 80	0 736	7 80	3 10
3 90	0 775	7 90	3 18
4 00	0 816	8 00	3 26

TABLE I<sup>bis</sup>Vitesses  $v$  dues à des hauteurs données  $h$ 

$$v = \sqrt{2gh}$$

$h$	$v$	$h$	$v$
0 m 0001	0 m 044	0 m 043	0 m 940
0 0002	0 063	0 050	0 990
0 0003	0 077	0 055	1 039
0 0004	0 089	0 060	1 088
0 0005	0 099	0 065	1 129
0 0006	0 108	0 070	1 172
0 0007	0 117	0 075	1 213
0 0008	0 125	0 080	1 253
0 0009	0 133	0 090	1 329
0 0010	0 140	0 100	1 401
0 0012	0 153	0 11	1 468
0 0015	0 171	0 12	1 534
0 0020	0 198	0 13	1 597
0 0025	0 221	0 14	1 657
0 0030	0 243	0 15	1 715
0 0035	0 262	0 16	1 77
0 0040	0 280	0 18	1 88
0 0045	0 297	0 20	1 98
0 0050	0 313	0 22	2 08
0 0060	0 343	0 24	2 17
0 007	0 370	0 26	2 26
0 008	0 395	0 28	2 34
0 009	0 420	0 30	2 43
0 010	0 443	0 35	2 62
0 011	0 464	0 40	2 80
0 012	0 485	0 45	2 97
0 013	0 505	0 50	3 13
0 014	0 524	0 55	3 28
0 015	0 542	0 60	3 43
0 016	0 560	0 65	3 57
0 018	0 594	0 70	3 71
0 020	0 626	0 75	3 84
0 022	0 657	0 80	3 96
0 024	0 686	0 90	4 20
0 026	0 714	1 00	4 43
0 028	0 741	1 20	4 85
0 030	0 767	1 50	5 42
0 032	0 792	2 00	6 26
0 035	0 829	3 00	7 67
0 040	0 886	4 00	8 86

TABLE II

Débits d'un déversoir sous une charge  $H$  pour diverses valeurs du coefficient de débit  $m$  (voir page 126).

H	$H\sqrt{2gH}$	Débit, par mètre de largeur, lorsque $m =$							
		0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70
0 m 030	0.0495	litres 17 32	litres 19 80	litres 22 27	litres 24 75	litres 27 22	litres 29 70	litres 32 18	litres 34 65
0 035	0.0571	19 98	22 84	25 69	28 55	31 40	34 26	37 12	39 97
0 060	0.0651	22 78	26 04	29 29	32 55	35 80	39 06	42 32	45 57
0 065	0.0734	25 69	29 36	33 03	36 70	40 37	44 04	47 71	51 38
0 070	0.0820	28 70	32 80	36 40	41 00	45 10	49 20	53 30	57 40
0 075	0.0910	31 85	36 40	40 95	45 50	50 05	54 60	59 15	63 70
0 080	0.1002	35 07	40 08	45 09	50 10	55 11	60 12	65 13	70 14
0 085	0.1098	38 43	43 92	49 41	54 90	60 39	65 88	71 37	76 86
0 090	0.1196	41 86	47 84	53 82	59 80	65 78	71 76	77 74	83 72
0 095	0.1297	45 39	51 88	58 36	64 85	71 33	77 81	84 31	90 78
0 10	0.140	49 0	56 0	63 0	70 0	77 0	84 0	91 0	94 0
0 11	0.162	56 7	64 8	72 9	81 0	89 1	97 2	105 3	113 4
0 12	0.184	64 4	73 6	82 8	92 0	101 2	110 4	119 6	128 8
0 13	0.208	72 8	83 2	93 6	104 0	114 4	124 8	135 2	145 6
0 14	0.232	81 2	92 8	104 4	116 0	127 6	139 2	150 8	162 4
0 15	0.257	89 9	102 8	115 6	128 5	141 3	154 2	167 1	179 9
0 16	0.283	99 1	113 2	127 3	141 5	155 6	169 8	183 9	198 1
0 17	0.310	108 5	124 0	139 5	155 0	170 5	186 0	201 5	217 0
0 18	0.338	118 3	135 2	152 1	169 0	185 9	202 8	219 7	236 6
0 19	0.367	128 4	146 8	165 1	183 5	201 8	220 2	238 6	256 9
0 20	0.396	139	158	178	198	218	238	257	277
0 21	0.426	149	170	192	213	234	256	277	298
0 22	0.457	160	183	205	228	251	274	297	320
0 23	0.489	171	196	220	244	269	293	318	342
0 24	0.521	182	208	234	260	286	312	338	364
0 25	0.554	194	222	249	277	305	332	360	388
0 26	0.587	205	235	264	293	323	352	382	411
0 27	0.621	217	248	279	310	342	373	404	435
0 28	0.656	230	262	295	328	361	394	426	459
0 29	0.692	242	277	311	346	381	415	450	484
0 30	0.728	255	291	328	364	400	437	473	509
0 31	0.765	268	306	344	382	421	459	497	535
0 32	0.802	281	321	361	401	441	481	521	561
0 33	0.840	294	336	378	420	462	504	546	588
0 34	0.878	307	351	395	439	483	527	571	615
0 35	0.917	321	367	413	458	504	550	596	642
0 36	0.957	335	383	431	478	526	574	622	670
0 37	0.997	349	399	449	498	548	598	648	698
0 38	1.038	363	415	467	519	571	623	675	726
0 39	1.079	378	432	485	540	593	647	701	755



TABLE II

Débîts d'un déversoir sous une charge  $H$  pour diverses valeurs du coefficient de débit  $m$  (voir page 126).

H	$H\sqrt{2gH}$	Débîts, par mètre de largeur, lorsque $m =$							
		0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70
		litres	litres	litres	litres	litres	litres	litres	litres
0 m 40	1.13	395	452	508	565	621	678	734	791
0 42	1.21	423	484	544	603	665	726	786	847
0 44	1.29	441	516	580	645	709	774	838	903
0 46	1.38	483	552	621	690	769	828	897	966
0 48	1.47	514	588	661	735	808	882	955	1.029
0 50	1.57	549	628	706	783	863	942	1.020	1.099
0 52	1.66	581	664	747	830	913	996	1.079	1.162
0 54	1.76	616	704	792	880	968	1.056	1.144	1.232
0 56	1.86	651	744	837	930	1.023	1.116	1.209	1.302
0 58	1.96	686	784	882	980	1.078	1.176	1.274	1.372
0 60	2.06	721	824	927	1.030	1.133	1.236	1.339	1.442
0 62	2.16	756	864	972	1.080	1.188	1.296	1.404	1.512
0 64	2.27	791	908	1.021	1.135	1.248	1.362	1.475	1.589
0 66	2.37	829	948	1.066	1.185	1.303	1.422	1.540	1.659
0 68	2.48	868	992	1.116	1.240	1.364	1.488	1.612	1.736
0 70	2.59	906	1.036	1.165	1.295	1.424	1.554	1.683	1.813
0 72	2.71	948	1.084	1.219	1.355	1.490	1.626	1.761	1.897
0 74	2.82	987	1.128	1.269	1.410	1.551	1.692	1.833	1.974
0 76	2.93	1.025	1.172	1.318	1.465	1.611	1.758	1.904	2.051
0 78	3.05	1.067	1.220	1.372	1.525	1.677	1.830	1.982	2.135
0 80	3.17	1.109	1.268	1.426	1.585	1.743	1.902	2.060	2.219
0 85	3.47	1.214	1.383	1.561	1.735	1.908	2.082	2.255	2.429
0 90	3.78	1.323	1.512	1.701	1.890	2.079	2.268	2.457	2.646
0 95	4.10	1.435	1.640	1.845	2.050	2.255	2.460	2.665	2.870
1 00	4.43	1.550	1.772	1.993	2.215	2.436	2.658	2.879	3.101
1 05	4.77	1.669	1.908	2.146	2.385	2.623	2.862	3.100	3.339
1 10	5.11	1.778	2.044	2.299	2.555	2.810	3.066	3.321	3.577
1 15	5.46	1.911	2.184	2.457	2.730	3.003	3.276	3.549	3.822
1 20	5.82	2.037	2.328	2.619	2.910	3.201	3.492	3.783	4.074
1 25	6.19	2.166	2.476	2.785	3.095	3.404	3.714	4.023	4.333
1 30	6.56	2.296	2.624	2.952	3.280	3.608	3.936	4.264	4.592
1 35	6.95	2.432	2.780	3.127	3.475	3.822	4.170	4.517	4.865
1 40	7.34	2.569	2.936	3.303	3.670	4.037	4.404	4.771	5.138
1 45	7.73	2.705	3.092	3.478	3.865	4.251	4.638	5.024	5.411
1 50	8.14	2.849	3.256	3.663	4.070	4.477	4.884	5.291	5.698
1 60	8.96	3.136	3.584	4.032	4.480	4.928	5.376	5.824	6.272
1 70	9.82	3.437	3.928	4.419	4.910	5.401	5.892	6.383	6.874
1 80	10.70	3.745	4.280	4.815	5.350	5.885	6.420	6.955	7.490
1 90	11.60	4.060	4.640	5.220	5.800	6.380	6.960	7.540	8.120
2 00	12.52	4.382	5.008	5.634	6.260	6.886	7.512	8.138	8.764

TABLE III

Débit des conduites en fonction de la vitesse moyenne.

Vitesses en mètres par seconde	Débits en litres par seconde dans une conduite d'un diamètre de :					
	Petits diamètres					
	0m,06	0m,08	0m,10	0m,12	0m,15	0m,20
0m,10	0 lit 2827	0 lit 5027	0 lit 7854	1 lit 1310	1 lit 7671	3 lit 1416
0 20	0 5655	1 0053	1 5708	2 2620	3 5343	6 2832
0 30	0 8482	1 5080	2 3562	3 3929	3 3014	9 4248
0 40	1 1310	2 0106	3 1416	4 5239	7 0686	12 5664
0 50	1 4137	2 5133	3 9270	5 6549	8 8357	15 7080
0 60	1 6965	3 0159	4 7124	6 7859	10 6029	18 8495
0 70	1 9792	3 5186	5 4978	7 9158	12 3700	21 9911
0 80	2 2620	4 0212	6 2832	9 0478	14 1372	25 1327
0 90	2 5447	4 5239	7 0686	10 1788	15 9043	28 2743
Diamètres moyens						
	0m,25	0m,30	0m,35	0m,40	0m,50	0m,60
0m,10	4 lit 909	7 lit 069	9 lit 621	12 lit 566	19 lit 635	28 lit 274
0 20	9 817	14 137	19 242	25 133	39 270	56 549
0 30	14 726	21 206	28 863	37 699	58 905	84 823
0 40	19 635	28 274	38 484	50 265	78 540	113 098
0 50	24 544	35 343	48 105	62 832	98 175	141 372
0 60	29 452	42 412	57 727	75 398	117 810	169 646
0 70	34 361	49 480	67 348	87 965	137 444	197 921
0 80	39 270	56 549	76 969	100 331	157 079	225 195
0 90	44 178	63 617	86 390	113 097	176 814	254 470
Grands diamètres						
	0m,70	0m,80	0m,90	1m,00	1m,10	1m,20
0m,10	38 lit 48	50 lit 27	63 lit 62	78 lit 54	95 lit 03	113 lit 40
0 20	76 97	100 53	127 23	157 08	190 07	226 20
0 30	115 45	150 80	190 85	235 62	285 10	339 29
0 40	153 94	201 06	254 47	314 16	380 13	452 39
0 50	192 42	254 33	318 09	392 70	475 17	565 49
0 60	230 91	304 59	381 70	471 24	570 20	678 59
0 70	269 39	351 86	445 32	549 78	665 23	791 68
0 80	307 88	402 12	508 94	628 32	760 27	904 78
0 90	346 36	452 39	572 56	706 86	855 30	1017 88

TABLE III bis

Vitesse moyenne dans les conduites en fonction du débit

Débits en litres par seconde	Vitesses moyennes en mètres par seconde dans une conduite d'un diamètre de :					
	Petits diamètres					
	0m,06	0m,08	0m,10	0m,12	0m,15	0m,20
1 lit	0,35368	0,49894	0,42732	0,08842	0,05659	0,03183
2	0,70735	0,39789	0,25465	0,47684	0,41348	0,06366
3	1,06103	0,59583	0,38197	0,26526	0,16976	0,09549
4	1,41471	0,79577	0,50930	0,35368	0,22635	0,12732
5	1,76838	0,99471	0,63652	0,44210	0,28294	0,15916
6	2,12206	1,19366	0,76394	0,53051	0,33953	0,19099
7	2,47574	1,39260	0,89127	0,61893	0,39612	0,22282
8	2,82942	1,59154	1,01859	0,70735	0,45270	0,25465
9	3,18309	1,79049	1,14592	0,79577	0,50929	0,28648
Diamètres moyens						
	0m,25	0m,30	0m,35	0m,40	0m,50	0m,60
10 lit	0,20372	0,44147	0,40394	0,07958	0,05093	0,03537
20	0,40744	0,28294	0,20788	0,15915	0,10186	0,07073
30	0,61115	0,42441	0,31181	0,23873	0,15279	0,10610
40	0,81847	0,56588	0,41575	0,31831	0,20372	0,14447
50	1,01859	0,70735	0,51969	0,39789	0,25465	0,17684
60	1,22231	0,84882	0,62363	0,47746	0,30558	0,21221
70	1,42603	0,99029	0,72757	0,55704	0,35651	0,24757
80	1,62974	1,13176	0,83150	0,63662	0,40744	0,28294
90	1,83346	1,27323	0,93544	0,71619	0,45836	0,31834
Grands diamètres						
	0m,70	0m,80	0m,90	1m,00	1m,10	1m,20
100 lit	0,25984	0,19894	0,15749	0,12732	0,10523	0,08842
200	0,51969	0,39789	0,31438	0,25465	0,21045	0,17684
300	0,77953	0,59583	0,47157	0,38197	0,31568	0,26526
400	1,03938	0,79577	0,62876	0,50930	0,42090	0,35368
500	1,29922	0,99471	0,78595	0,63662	0,52613	0,44210
600	1,55906	1,19366	0,94314	0,76394	0,63136	0,53051
700	1,81891	1,39260	1,10033	0,89127	0,73658	0,61893
800	2,07875	1,59154	1,25752	1,01859	0,84184	0,70735
900	2,33870	1,79049	1,41471	1,14592	0,94703	0,79577

TABLE IV

Valeurs du coefficient  $\gamma$  pour le calcul des tuyaux de conduite.

(Voir page 153)

D	$\gamma$	D	$\gamma$
0m,01	4.427.000	0m,33	0,271
0 015	635 000	0 34	0,235
0 02	164.500	0 35	0,205
0 025	57.100	0 36	0,179
0 03	24.000	0 37	0,157
0 04	6.100	0 38	0,139
0 05	2.400	0 39	0,123
0 06	890	0 40	0,107
0 07	430	0 41	0,097
0 08	227	0 42	0,086
0 09	130	0 43	0,077
0 10	79	0 44	0,069
0 11	50	0 45	0,062
0 12	33	0 46	0,056
0 13	22,6	0 47	0,051
0 14	15,9	0 48	0,046
0 15	11,5	0 49	0,041
0 16	8,44	0 50	0,0377
0 17	6,33	0 52	0,0343
0 18	4,83	0 55	0,0240
0 19	3,73	0 60	0,0158
0 20	2,93	0 65	0,0108
0 21	2,32	0 70	0,0076
0 22	1,86	0 75	0,0055
0 23	1,51	0 80	0,0040
0 24	1,23	0 85	0,0030
0 25	1,01	0 90	0,0023
0 26	0,84	0 95	0,0018
0 27	0,70	1 00	0,0014
0 28	0,59	1 05	0,00110
0 29	0,50	1 10	0,00089
0 30	0,43	1 20	0,00059
0 31	0,36	1 30	0,00040
0 32	0,314	1 40	0,00028

TABLE V

Valeurs du rapport  $\frac{J}{\gamma}$  et de son inverse  $\frac{\gamma}{J}$  pour le calcul des tuyaux de conduite

(Voir page 153)

Q		$\frac{J}{\gamma}$	$\frac{J}{\gamma}$	Q		$\frac{\gamma}{J}$	$\frac{J}{\gamma}$	Q		$\frac{\gamma}{J}$	$\frac{J}{\gamma}$	
mc.	lit.			mc.	lit.			mc.	lit.			
0,000	10	10.000.000	0,00000	0100	0,002	2,00	53.000	0,00001	89	0,040	280	0,00358
	11	8.464.000	0,00000	0118	2.10	49.000	0,00002	06	45	227	0,00440	
	12	7.268.000	0,00000	0138	2.20	45.000	0,00002	24	50	189	0,00529	
	13	6.318.000	0,00000	0158	2.30	41.000	0,00002	42	55	160	0,00625	
	14	5.550.000	0,00000	0180	2.40	38.000	0,00002	61	60	137	0,00727	
	15	4.919.000	0,00000	0203	2.50	36.000	0,00002	80	65	120	0,00837	
	16	4.393.000	0,00000	0228	2.60	33.400	0,00002	97	70	105	0,00953	
	17	3.951.000	0,00000	0253	2.80	29.300	0,00003	41	75	93	0,0107	
	18	3.575.000	0,00000	0280	3.00	26.000	0,00003	85	80	83	0,0120	
	19	3.252.000	0,00000	0308	3.50	19.000	0,00005	05	90	68	0,0148	
	20	2.973.000	0,00000	0337	4.00	15.700	0,00006	57	0,100	56	0,0178	
	21	2.730.000	0,00000	0367	4.50	12.800	0,00007	81	110	48	0,0210	
	22	2.516.000	0,00000	0398	5.00	10.600	0,00009	43	120	41	0,0245	
	23	2.328.000	0,00000	0429	5.50	9.000	0,00011	1	130	36	0,0281	
	24	2.161.000	0,00000	0463	6.00	7.700	0,00012	9	140	31	0,0320	
	25	2.012.000	0,00000	0497	6.50	6.700	0,00014	9	150	28	0,0361	
	26	1.878.000	0,00000	0532	7.00	5.900	0,00017	0	160	24,7	0,0405	
	28	1.650.000	0,00000	0606	7.50	5.230	0,00019	1	170	22,2	0,0450	
	30	1.462.000	0,00000	0685	8.00	4.670	0,00021	4	180	20,1	0,0497	
	35	1.117.000	0,00000	0900	9.00	3.810	0,00026	3	190	18,3	0,0546	
	40	884.000	0,00000	113	0,010	3.160	0,00031	6	200	16,7	0,0599	
	45	719.000	0,00000	139	11	2.680	0,00037	4	210	15,35	0,0652	
	50	598.000	0,00000	167	12	2.300	0,00043	5	220	14,15	0,0707	
	55	506.000	0,00000	197	13	2.000	0,00050	0	230	13,09	0,0764	
	60	435.000	0,00000	230	14	1.750	0,00057	0	240	12,15	0,0822	
	65	378.000	0,00000	265	15	1.560	0,00064	3	250	11,31	0,0884	
	70	332.000	0,00000	301	16	1.390	0,00072	0	260	10,56	0,0947	
	75	294.000	0,00000	340	17	1.250	0,00080	0	280	9,28	0,108	
	80	263.000	0,00000	380	18	1.130	0,00088	5	300	8,22	0,122	
	90	214.000	0,00000	469	19	1.030	0,00097	2	350	6,28	0,159	
0,001	100	178.000	0,00000	562	20	940	0,00106		400	4,97	0,201	
	1.10	151.000	0,00000	665	21	860	0,00116		450	4,04	0,247	
	1.20	129.000	0,00000	775	22	796	0,00126		500	3,36	0,297	
	1.30	112.000	0,00000	892	23	736	0,00136		550	2,85	0,351	
	1.40	99.000	0,00001	01	24	683	0,00147		600	2,44	0,409	
	1.50	87.000	0,00001	14	25	636	0,00157		650	2,12	0,470	
	1.60	78.000	0,00001	28	26	594	0,00168		700	1,87	0,535	
	1.70	70.000	0,00001	42	28	522	0,00192		750	1,65	0,605	
	1.80	64.000	0,00001	57	30	462	0,00216		800	1,48	0,677	
	1.90	58.000	0,00001	73	35	353	0,00283		900	1,20	0,832	
									1,000	1,00	1,000	

TABLE VI

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0 <sup>m</sup> ,06	0 <sup>m</sup> ,08	0 <sup>m</sup> ,10	0 <sup>m</sup> ,12	0 <sup>m</sup> ,15	0 <sup>m</sup> ,20
0 <sup>mc</sup> 000lit040	0,0000179	0,0000045	0,0000016	0,0000007	0,0000002	»
045	0,0000220	0,0000056	0,0000019	0,0000008	0,0000003	0,0000001
050	0,0000264	0,0000067	0,0000023	0,0000010	0,0000003	0,0000001
055	0,0000313	0,0000079	0,0000027	0,0000011	0,0000004	0,0000001
060	0,0000364	0,0000092	0,0000032	0,0000013	0,0000005	0,0000001
065	0,000042	0,0000106	0,0000037	0,0000015	0,0000005	0,0000001
070	0,000048	0,0000122	0,0000042	0,0000018	0,0000006	0,0000001
075	0,000054	0,0000137	0,0000048	0,0000020	0,0000007	0,0000002
080	0,000060	0,0000154	0,0000054	0,0000022	0,0000008	0,0000002
090	0,000074	0,0000189	0,0000066	0,0000027	0,0000009	0,0000002
0 <sup>mc</sup> 000lit10	0,000089	0,0000227	0,0000079	0,0000033	0,0000011	0,0000003
11	0,000105	0,0000268	0,0000094	0,0000039	0,0000014	0,0000003
12	0,000123	0,0000313	0,0000109	0,0000045	0,0000016	0,0000004
13	0,000141	0,0000359	0,0000124	0,0000052	0,0000019	0,0000005
14	0,000160	0,0000409	0,0000142	0,0000059	0,0000021	0,0000005
15	0,000181	0,000046	0,0000160	0,0000067	0,0000023	0,0000006
16	0,000203	0,000052	0,0000179	0,0000075	0,0000026	0,0000007
17	0,000225	0,000057	0,0000199	0,0000083	0,0000029	0,0000007
18	0,000249	0,000064	0,0000220	0,0000092	0,0000032	0,0000008
19	0,000274	0,000070	0,0000242	0,0000102	0,0000035	0,0000009
20	0,000300	0,000077	0,0000265	0,0000111	0,0000038	0,0000009
21	0,000327	0,000083	0,0000289	0,0000121	0,0000044	0,0000010
22	0,000356	0,000090	0,0000313	0,0000131	0,0000045	0,0000011
23	0,000382	0,000097	0,0000338	0,0000142	0,0000049	0,0000012
24	0,000412	0,000105	0,0000364	0,0000153	0,0000053	0,0000013
25	0,00044	0,000113	0,000039	0,0000164	0,0000057	0,0000014
26	0,00047	0,000121	0,000042	0,0000176	0,0000061	0,0000015
28	0,00054	0,000138	0,000048	0,0000201	0,0000069	0,0000017
30	0,00061	0,000156	0,000054	0,0000227	0,0000079	0,0000020
35	0,00080	0,000204	0,000074	0,0000298	0,0000103	0,0000026
0 <sup>mc</sup> 000lit40	0,00100	0,000257	0,000087	0,000037	0,0000130	0,0000033
0 45	0,00124	0,000316	0,000109	0,000046	0,0000160	0,0000041
0 50	0,00149	0,000379	0,000131	0,000055	0,0000192	0,0000049
0 55	0,00176	0,000447	0,000155	0,000065	0,0000226	0,0000058
0 60	0,00205	0,000522	0,000181	0,000076	0,0000263	0,0000067
0 65	0,00237	0,00060	0,000211	0,000088	0,000030	0,0000077
0 70	0,00276	0,00068	0,000244	0,000099	0,000034	0,0000088
0 75	0,00303	0,00077	0,000288	0,000112	0,000039	0,0000099
0 80	0,00339	0,00086	0,000299	0,000125	0,000044	0,0000111
0 90	0,00418	0,00107	0,000369	0,000155	0,000054	0,0000137
0 <sup>mc</sup> 001lit00	0,0050	0,00128	0,00044	0,000186	0,000064	0,0000164
1 10	0,0059	0,00151	0,00052	0,000221	0,000076	0,0000194
1 20	0,0069	0,00176	0,00061	0,000257	0,000089	0,0000227
1 30	0,0079	0,00203	0,00070	0,000295	0,000102	0,0000261
1 40	0,0090	0,00229	0,00079	0,000333	0,000116	0,0000295
1 50	0,0102	0,00259	0,00090	0,00038	0,000131	0,0000334
1 60	0,0114	0,00291	0,00101	0,00042	0,000147	0,0000375
1 70	0,0127	0,00322	0,00112	0,00047	0,000163	0,0000416
1 80	0,0140	0,00357	0,00124	0,00052	0,000180	0,0000460
1 90	0,0154	0,00393	0,00136	0,00057	0,000199	0,0000507

TABLE VI (suite)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0 <sup>m</sup> ,06	0 <sup>m</sup> ,08	0 <sup>m</sup> ,10	0 <sup>m</sup> ,12	0 <sup>m</sup> ,15	0 <sup>m</sup> ,20
0 <sup>m</sup> c002lit00	0,0168	0,0043	0,00149	0,00062	0,000217	0,000055
2 10	0,0184	0,0047	0,00162	0,00068	0,000236	0,000060
2 20	0,0199	0,0051	0,00176	0,00074	0,000256	0,000065
2 30	0,0215	0,0055	0,00190	0,00080	0,000277	0,000071
2 40	0,0232	0,0059	0,00205	0,00086	0,000299	0,000076
2 50	0,0249	0,0064	0,00220	0,00092	0,00032	0,000082
2 60	0,0266	0,0068	0,00235	0,00099	0,00034	0,000087
2 80	0,0304	0,0077	0,00268	0,00112	0,00039	0,000100
3 00	0,0343	0,0087	0,00303	0,00127	0,00044	0,000113
3 50	0,0450	0,0115	0,00397	0,00168	0,00058	0,000148
4 00	0,057	0,0145	0,0050	0,00211	0,00073	0,000186
4 50	0,070	0,0177	0,0061	0,00259	0,00090	0,000228
5 00	0,084	0,0214	0,0074	0,00312	0,00108	0,000276
5 50	0,099	0,0252	0,0087	0,00366	0,00128	0,000325
6 00	0,115	0,0293	0,0101	0,00426	0,00148	0,000378
6 50	0,126	0,0338	0,0117	0,0049	0,00171	0,00044
7 00	0,151	0,0386	0,0134	0,0056	0,00195	0,00050
7 50	0,170	0,0434	0,0150	0,0063	0,00219	0,00056
8 00	0,191	0,0486	0,0168	0,0071	0,00245	0,00063
9 00	»	0,0597	0,0207	0,0087	0,00301	0,00077
0 <sup>m</sup> c010lit	»	0,072	0,0249	0,0104	0,0036	0,00092
11	»	0,085	0,0294	0,0124	0,0043	0,00109
12	»	0,099	0,0342	0,0143	0,0050	0,00127
13	»	0,114	0,0394	0,0166	0,0057	0,00146
14	»	0,129	0,0449	0,0189	0,0065	0,00167
15	»	0,146	0,051	0,0213	0,0074	0,00188
16	»	»	0,057	0,0238	0,0083	0,00211
17	»	»	0,063	0,0265	0,0092	0,00234
18	»	»	0,070	0,0293	0,0102	0,00259
19	»	»	0,076	0,0322	0,0112	0,00284
20	»	»	0,083	0,0350	0,0122	0,00310
21	»	»	0,091	0,0383	0,0133	0,00340
22	»	»	0,099	0,0416	0,0145	0,00369
23	»	»	0,107	0,0449	0,0157	0,00398
24	»	»	»	0,0485	0,0169	0,00430
25	»	»	»	0,052	0,0181	0,0046
26	»	»	»	0,056	0,0193	0,0049
28	»	»	»	0,063	0,0220	0,0056
30	»	»	»	0,071	0,0247	0,0063
35	»	»	»	»	0,0324	0,0083
0 <sup>m</sup> c040lit	»	»	»	»	0,041	0,0105
45	»	»	»	»	0,051	0,0129
50	»	»	»	»	0,061	0,0155
55	»	»	»	»	»	0,0183
60	»	»	»	»	»	0,0213
65	»	»	»	»	»	0,0245
70	»	»	»	»	»	0,0279
75	»	»	»	»	»	0,0313
80	»	»	»	»	»	0,0351
90	»	»	»	»	»	0,0433

TABLE VI (Suite)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0 <sup>m</sup> ,25	0 <sup>m</sup> ,30	0 <sup>m</sup> ,35	0 <sup>m</sup> ,40	0 <sup>m</sup> ,50	0 <sup>m</sup> ,60
0 <sup>m</sup> c000 <sup>lit</sup> 40	0,0000014	0,0000047	0,0000023	0,0000012	0,0000004	0,0000002
0 45	0,00000140	0,0000060	0,0000028	0,0000015	0,0000005	0,0000002
0 50	0,00000169	0,0000074	0,0000034	0,0000018	0,0000006	0,0000002
0 55	0,00000199	0,0000084	0,0000040	0,0000021	0,0000007	0,0000003
0 60	0,00000232	0,0000098	0,0000047	0,0000025	0,0000008	0,0000003
0 65	0,00000268	0,0000113	0,0000054	0,0000028	0,0000010	0,0000004
0 70	0,00000304	0,0000132	0,0000062	0,0000032	0,0000011	0,0000005
0 75	0,00000343	0,0000145	0,0000070	0,0000036	0,0000013	0,0000005
0 80	0,00000384	0,0000162	0,0000078	0,0000041	0,0000014	0,0000006
0 90	0,00000474	0,0000200	0,0000096	0,0000050	0,0000017	0,0000007
0 <sup>m</sup> c001 <sup>lit</sup> 00	0,0000057	0,0000240	0,0000115	0,0000060	0,0000021	0,0000009
1 10	0,0000067	0,0000283	0,0000136	0,0000074	0,0000024	0,0000010
1 20	0,0000078	0,0000330	0,0000159	0,0000083	0,0000028	0,0000012
1 30	0,0000090	0,0000380	0,0000183	0,0000095	0,0000033	0,0000014
1 40	0,0000102	0,0000430	0,0000207	0,0000108	0,0000038	0,0000016
1 50	0,0000115	0,000049	0,0000234	0,0000122	0,0000043	0,0000018
1 60	0,0000129	0,000054	0,0000262	0,0000137	0,0000048	0,0000020
1 70	0,0000144	0,000061	0,0000291	0,0000152	0,0000053	0,0000022
1 80	0,0000159	0,000067	0,0000322	0,0000168	0,0000059	0,0000024
1 90	0,0000175	0,000073	0,0000355	0,0000185	0,0000065	0,0000027
2 00	0,0000191	0,000081	0,000039	0,0000203	0,0000071	0,0000030
2 10	0,0000205	0,000088	0,000042	0,0000221	0,0000077	0,0000032
2 20	0,0000226	0,000095	0,000046	0,0000240	0,0000084	0,0000035
2 30	0,0000247	0,000103	0,000049	0,0000260	0,0000091	0,0000038
2 40	0,0000264	0,000111	0,000053	0,0000280	0,0000098	0,0000041
2 50	0,0000283	0,000119	0,000057	0,000030	0,0000105	0,0000044
2 60	0,0000302	0,000127	0,000061	0,000032	0,0000113	0,0000047
2 80	0,0000345	0,000145	0,000070	0,000037	0,0000128	0,0000054
3 00	0,0000389	0,000164	0,000079	0,000041	0,0000145	0,0000061
3 50	0,0000540	0,000215	0,000103	0,000054	0,0000190	0,0000080
4 00	0,000064	0,000272	0,000131	0,000068	0,000024	0,0000101
4 50	0,000079	0,000337	0,000160	0,000084	0,000029	0,0000123
5 00	0,000095	0,000402	0,000193	0,000101	0,000035	0,0000149
5 50	0,000112	0,000473	0,000228	0,000119	0,000042	0,0000175
6 00	0,000130	0,000550	0,000264	0,000138	0,000049	0,0000204
6 50	0,000151	0,00063	0,00030	0,000160	0,000056	0,0000236
7 00	0,000172	0,00072	0,00035	0,000182	0,000064	0,0000269
7 50	0,000193	0,00081	0,00039	0,000205	0,000072	0,0000303
8 00	0,000216	0,00091	0,00044	0,000230	0,000081	0,0000339
9 00	0,000266	0,000112	0,00054	0,000283	0,000099	0,0000416
0 <sup>m</sup> c010 <sup>lit</sup>	0,00032	0,000135	0,00065	0,000034	0,0000119	0,0000050
11	0,00038	0,000159	0,00077	0,000040	0,0000141	0,0000059
12	0,00044	0,000185	0,00089	0,000047	0,0000164	0,0000069
13	0,00051	0,000213	0,00103	0,000054	0,0000188	0,0000079
14	0,00058	0,000243	0,00117	0,000061	0,0000214	0,0000090
15	0,00065	0,000274	0,00132	0,000069	0,0000242	0,0000102
16	0,00073	0,000307	0,00148	0,000077	0,0000271	0,0000114
17	0,00081	0,000341	0,00164	0,000086	0,0000301	0,0000127
18	0,00090	0,000377	0,00181	0,000095	0,0000333	0,0000140
19	0,00099	0,000414	0,00199	0,000104	0,0000366	0,0000154



TABLE VI (Suite)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0 <sup>m</sup> ,25	0 <sup>m</sup> ,30	0 <sup>m</sup> ,35	0 <sup>m</sup> ,40	0 <sup>m</sup> ,50	0 <sup>m</sup> ,60
0 <sup>m</sup> c020lit	0,00107	0,00045	0,000217	0,000113	0,000040	0,0000168
21	0,00117	0,00049	0,000238	0,000124	0,000044	0,0000184
22	0,00127	0,00054	0,000258	0,000135	0,000047	0,0000200
23	0,00138	0,00058	0,000279	0,000146	0,000051	0,0000216
24	0,00149	0,00063	0,000301	0,000157	0,000055	0,0000233
25	0,00159	0,00067	0,00032	0,000168	0,000059	0,0000249
26	0,00170	0,00072	0,00034	0,000179	0,000063	0,0000266
28	0,00195	0,00082	0,00039	0,000206	0,000072	0,0000304
30	0,00219	0,00092	0,00044	0,000232	0,000081	0,0000342
35	0,00287	0,00121	0,00058	0,000304	0,000106	0,0000418
40	0,0036	0,00153	0,00073	0,00038	0,000135	0,000057
45	0,0044	0,00188	0,00090	0,00047	0,000166	0,000070
50	0,0054	0,00226	0,00108	0,00057	0,000199	0,000084
55	0,0063	0,00266	0,00128	0,00067	0,000235	0,000099
60	0,0074	0,00310	0,00149	0,00078	0,000274	0,000115
65	0,0085	0,00356	0,00171	0,00090	0,00031	0,000133
70	0,0096	0,0041	0,00195	0,00102	0,00036	0,000151
75	0,0108	0,0046	0,00219	0,00115	0,00040	0,000169
80	0,0121	0,0051	0,00246	0,00128	0,00045	0,000190
90	0,0150	0,0063	0,00303	0,00158	0,00056	0,000234
100	0,0180	0,0076	0,0036	0,00191	0,00067	0,000282
110	0,0213	0,0089	0,0043	0,00226	0,00079	0,000333
120	0,0248	0,0104	0,0050	0,00263	0,00092	0,000388
130	0,0284	0,0120	0,0058	0,00302	0,00105	0,000445
140	0,0324	0,0136	0,0066	0,00343	0,00120	0,000507
150	»	0,0154	0,0074	0,0039	0,00136	0,00057
160	»	0,0173	0,0083	0,0043	0,00153	0,00064
170	»	0,0192	0,0092	0,0048	0,00170	0,00071
180	»	0,0212	0,0102	0,0053	0,00187	0,00079
190	»	0,0233	0,0112	0,0058	0,00206	0,00086
200	»	0,0255	0,0123	0,0064	0,00226	0,00095
210	»	0,0278	0,0134	0,0070	0,00245	0,00103
220	»	»	0,0145	0,0076	0,00265	0,00112
230	»	»	0,0157	0,0082	0,00288	0,00121
240	»	»	0,0169	0,0088	0,00309	0,00130
250	»	»	0,0181	0,0095	0,0033	0,00140
260	»	»	0,0194	0,0102	0,0035	0,00150
280	»	»	0,0221	0,0115	0,0041	0,00171
300	»	»	»	0,0131	0,0046	0,00193
350	»	»	»	0,0170	0,0060	0,00252
400	»	»	»	»	0,0076	0,0032
450	»	»	»	»	0,0093	0,0039
500	»	»	»	»	0,0112	0,0047
550	»	»	»	»	0,0132	0,0056
600	»	»	»	»	»	0,0065
650	»	»	»	»	»	0,0074
700	»	»	»	»	»	0,0085
750	»	»	»	»	»	0,0096
800	»	»	»	»	»	0,0131
900	»	»	»	»	»	»

TABLE VI (Suite)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0 <sup>m</sup> ,70	0 <sup>m</sup> ,80	0 <sup>m</sup> ,90	1 <sup>m</sup> ,00	1 <sup>m</sup> ,10	1 <sup>m</sup> ,20
0 <sup>m</sup> c002lit 0	0,00000044	0,00000008	0,00000004	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2 1	0,00000016	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2 2	0,00000017	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002	0,00000001
2 3	0,00000019	0,00000010	0,00000006	0,00000004	0,00000002	0,00000001
2 4	0,00000020	0,00000011	0,00000006	0,00000004	0,00000002	0,00000001
2 5	0,00000021	0,00000011	0,00000006	0,00000004	0,00000002	0,00000001
2 6	0,00000023	0,00000012	0,00000007	0,00000004	0,00000003	0,00000002
2 8	0,00000026	0,00000014	0,00000008	0,00000004	0,00000003	0,00000002
3 0	0,00000029	0,00000015	0,00000009	0,00000005	0,00000003	0,00000002
3 5	0,00000038	0,00000020	0,00000011	0,00000007	0,00000004	0,00000003
4 0	0,00000048	0,00000025	0,00000014	0,00000009	0,00000006	0,00000004
4 5	0,00000059	0,00000031	0,00000018	0,00000011	0,00000007	0,00000005
5 0	0,00000072	0,00000038	0,00000021	0,00000013	0,00000008	0,00000005
5 5	0,00000084	0,00000045	0,00000025	0,00000015	0,00000010	0,00000007
6 0	0,00000098	0,00000052	0,00000030	0,00000018	0,00000012	0,00000008
6 5	0,00000114	0,00000060	0,00000034	0,00000021	0,00000013	0,00000009
7 0	0,00000129	0,00000068	0,00000039	0,00000024	0,00000015	0,00000010
7 5	0,00000145	0,00000077	0,00000044	0,00000027	0,00000017	0,00000011
8 0	0,00000163	0,00000086	0,00000049	0,00000030	0,00000019	0,00000013
9 0	0,00000200	0,00000106	0,00000060	0,00000037	0,00000024	0,00000016
0 <sup>m</sup> c010lit	0,00000241	0,00000127	0,00000073	0,00000044	0,00000028	0,00000019
11	0,00000285	0,00000151	0,00000087	0,00000052	0,00000033	0,00000022
12	0,00000332	0,00000176	0,00000101	0,00000061	0,00000039	0,00000026
13	0,00000381	0,00000202	0,00000115	0,00000070	0,00000045	0,00000030
14	0,00000434	0,00000230	0,00000131	0,00000080	0,00000051	0,00000034
15	0,0000049	0,00000260	0,00000148	0,00000090	0,00000058	0,00000039
16	0,00000553	0,00000291	0,00000166	0,00000101	0,00000065	0,00000044
17	0,0000061	0,00000323	0,00000185	0,00000112	0,00000072	0,00000048
18	0,0000067	0,00000357	0,00000204	0,00000124	0,00000079	0,00000053
19	0,0000074	0,00000392	0,00000224	0,00000136	0,00000087	0,00000058
20	0,0000081	0,0000043	0,00000245	0,00000148	0,00000095	0,00000063
21	0,0000088	0,0000047	0,00000268	0,00000162	0,00000104	0,00000069
22	0,0000096	0,0000051	0,00000291	0,00000176	0,00000113	0,00000075
23	0,0000104	0,0000055	0,00000315	0,00000191	0,00000123	0,00000082
24	0,0000112	0,0000059	0,00000339	0,00000206	0,00000132	0,00000088
25	0,0000120	0,0000064	0,0000036	0,00000220	0,00000142	0,00000095
26	0,0000128	0,0000068	0,0000039	0,00000233	0,00000152	0,00000101
28	0,0000146	0,0000077	0,0000044	0,00000269	0,00000173	0,00000115
30	0,0000166	0,0000088	0,0000050	0,00000302	0,00000196	0,00000131
35	0,0000216	0,0000114	0,0000065	0,00000396	0,00000253	0,00000170
40	0,000027	0,0000144	0,0000083	0,0000050	0,0000032	0,00000211
45	0,000033	0,0000177	0,0000102	0,0000062	0,0000039	0,00000259
50	0,000040	0,0000214	0,0000122	0,0000074	0,0000047	0,00000312
55	0,000048	0,0000252	0,0000144	0,0000087	0,0000056	0,00000368
60	0,000055	0,0000293	0,0000168	0,0000102	0,0000065	0,00000428
65	0,000064	0,0000338	0,0000193	0,0000117	0,0000074	0,00000493
70	0,000073	0,0000385	0,0000220	0,0000133	0,0000085	0,00000561
75	0,000081	0,0000432	0,0000248	0,0000150	0,0000093	0,00000630
80	0,000091	0,0000485	0,0000277	0,0000168	0,0000107	0,00000707
90	0,000113	0,0000599	0,0000341	0,0000207	0,0000132	0,00000872

TABLE VI (Suite)

Perte de charge J par mètre de longueur dans les conduites

Débits	Valeurs de J pour les diamètres de :					
	0 <sup>m</sup> ,70	0 <sup>m</sup> ,80	0 <sup>m</sup> ,90	1 <sup>m</sup> ,00	1 <sup>m</sup> ,10	1 <sup>m</sup> ,20
0 <sup>m</sup> 100lit	0,000136	0,000072	0,000041	0,0000249	0,0000159	0,0000105
110	0,000160	0,000082	0,000048	0,0000294	0,0000187	0,0000123
120	0,000186	0,000099	0,000057	0,0000343	0,0000218	0,0000144
130	0,000214	0,000113	0,000065	0,0000393	0,0000250	0,0000165
140	0,000244	0,000129	0,000074	0,0000448	0,0000285	0,0000188
150	0,000275	0,000146	0,000083	0,000051	0,0000321	0,0000213
160	0,000309	0,000164	0,000093	0,000057	0,0000360	0,0000238
170	0,000343	0,000182	0,000104	0,000063	0,0000400	0,0000265
180	0,000379	0,000201	0,000115	0,000070	0,0000442	0,0000292
190	0,000416	0,000220	0,000126	0,000076	0,0000486	0,0000322
0 <sup>m</sup> 200lit	0,00046	0,000242	0,000138	0,000084	0,000053	0,0000353
210	0,00050	0,000263	0,000150	0,000091	0,000058	0,0000384
220	0,00054	0,000285	0,000163	0,000099	0,000063	0,0000416
230	0,00058	0,000308	0,000176	0,000107	0,000068	0,0000450
240	0,00062	0,000331	0,000189	0,000115	0,000073	0,0000484
250	0,00067	0,000356	0,000204	0,000124	0,000079	0,000052
260	0,00072	0,00038	0,000219	0,000132	0,000084	0,000056
280	0,00082	0,00044	0,000249	0,000151	0,000096	0,000064
300	0,00093	0,00049	0,000281	0,000171	0,000108	0,000072
350	0,00121	0,00064	0,000367	0,000223	0,000144	0,000094
400	0,00153	0,00081	0,00046	0,00028	0,000179	0,000118
450	0,00188	0,00100	0,00057	0,00033	0,000220	0,000145
500	0,00226	0,00120	0,00069	0,00042	0,000264	0,000175
550	0,00267	0,00141	0,00081	0,00049	0,000312	0,000207
600	0,00312	0,00165	0,00094	0,00057	0,000364	0,000241
650	0,00358	0,00190	0,00108	0,00066	0,00042	0,000277
700	0,00408	0,00216	0,00124	0,00075	0,00048	0,000315
750	0,00461	0,00244	0,00140	0,00085	0,00054	0,000356
800	0,00515	0,00273	0,00156	0,00095	0,00060	0,000399
900	0,00633	0,00335	0,00192	0,00116	0,00074	0,000490
1 <sup>m</sup> 000lit	0,00762	0,00404	0,00231	0,00140	0,00089	0,00059
1 100	0,00899	0,00475	0,00256	0,00165	0,00105	0,00070
1 200	»	0,00557	0,00302	0,00193	0,00123	0,00081
1 300	»	0,00638	0,00348	0,00221	0,00141	0,00093
1 400	»	0,00727	0,00416	0,00252	0,00160	0,00106
1 500	»	0,00818	0,00469	0,00284	0,00181	0,00120
1 600	»	»	0,00510	0,00319	0,00203	0,00134
1 700	»	»	0,00578	0,00354	0,00225	0,00149
1 800	»	»	0,00647	0,00392	0,00249	0,00165
1 900	»	»	0,00711	0,00431	0,00274	0,00181
2 000	»	»	»	0,00472	0,00300	0,00199
2 100	»	»	»	0,00514	0,00327	0,00216
2 200	»	»	»	0,00557	0,00354	0,00234
2 300	»	»	»	0,00601	0,00382	0,00252
2 400	»	»	»	»	0,00412	0,00272
2 500	»	»	»	»	0,00442	0,00292
2 600	»	»	»	»	0,00473	0,00313
2 800	»	»	»	»	0,00539	0,00357
3 000	»	»	»	»	»	0,00403
3 500	»	»	»	»	»	»

TABLE VII

Valeurs du rapport  $\frac{J}{Q^2}$  de la perte de charge  $J$  au carré du débit  $Q$   
d'un tuyau de conduite :

1° d'après les coefficients de Darcy pour les tuyaux en fonte avec dépôts ;  
2° d'après la formule de M. Robert Manning, n° 83.

DARCY				ROBERT MANNING			
D	$\frac{J}{Q^2}$	D	$\frac{J}{Q^2}$	D	$\frac{J}{Q^2}$	D	$\frac{J}{Q^2}$
0,01	116.790.000	0,29	1,744	0,01	61.730.000	0,29	0,979
0,013	16.696.000	0,30	1,468	0,013	7.100.000	0,30	0,818
0,02	2.333.500	0,31	1,243	0,02	1.531.300	0,31	0,686
0,025	680.350	0,32	1,058	0,025	466.000	0,32	0,580
0,03	250.400	0,33	0,903	0,03	176.130	0,33	0,492
0,04	52.592	0,34	0,778	0,04	37.950	0,34	0,419
0,05	15.891	0,35	0,672	0,05	11.550	0,35	0,359
0,06	6.026	0,36	0,582	0,06	4.367	0,36	0,309
0,07	2.669	0,37	0,507	0,07	1.920	0,37	0,267
0,08	1.323	0,38	0,443	0,08	942	0,38	0,232
0,09	714,7	0,39	0,388	0,09	503,	0,39	0,201
0,10	412,7	0,40	0,341	0,10	285,50	0,40	0,1762
0,11	251,5	0,42	0,267	0,11	172,30	0,42	0,1360
0,12	160,2	0,45	0,188	0,12	108,30	0,45	0,0941
0,13	103,9	0,48	0,136	0,13	70,70	0,48	0,0662
0,14	72,3	0,50	0,1106	0,14	47,60	0,50	0,0536
0,15	50,7	0,52	0,0907	0,15	33,00	0,52	0,0433
0,16	36,4	0,55	0,0684	0,16	23,40	0,55	0,0322
0,17	26,6	0,60	0,0441	0,17	16,92	0,60	0,0203
0,18	19,9	0,65	0,0294	0,18	12,46	0,65	0,01323
0,19	15,06	0,70	0,0203	0,19	9,34	0,70	0,00891
0,20	11,59	0,75	0,01433	0,20	7,11	0,75	0,00616
0,21	9,03	0,80	0,01035	0,21	5,48	0,80	0,00437
0,22	7,12	0,85	0,00763	0,22	4,28	0,85	0,00316
0,23	5,67	0,90	0,00573	0,23	3,37	0,90	0,00233
0,24	4,57	0,95	0,00436	0,24	2,69	0,95	0,00175
0,25	3,71	1,00	0,00337	0,25	2,16	1,00	0,00133
0,26	3,04	1,05	0,00264	0,26	1,75	1,05	0,00102
0,27	2,51	1,10	0,00209	0,27	1,43	1,10	0,00080
0,28	2,08	1,20	0,00135	0,28	1,18	1,20	0,00040

TABLE VIII

Valeurs du coefficient  $b$  correspondant aux valeurs du coefficient

$$C = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad (\text{voir page 186}).$$

C	b	C	b
15	0,0044	55	0,00033
16	0,0039	56	0,00032
17	0,0035	57	0,00031
18	0,0031	58	0,00030
19	0,0028	59	0,00029
20	0,0025	60	0,00028
21	0,0023	61	0,00027
22	0,0021	62	0,00026
23	0,0019	63	0,00025
24	0,0017	64	0,00024
25	0,00160	65	0,000240
26	0,00148	66	0,000230
27	0,00137	67	0,000223
28	0,00128	68	0,000216
29	0,00119	69	0,000209
30	0,00111	70	0,000204
31	0,00104	72	0,000193
32	0,00098	74	0,000182
33	0,00092	76	0,000172
34	0,00086	78	0,000163
35	0,00081	80	0,000156
36	0,00077	82	0,000149
37	0,00073	84	0,000142
38	0,00069	86	0,000135
39	0,00066	88	0,000129
40	0,00062	90	0,000123
41	0,00059	92	0,000118
42	0,00057	94	0,000113
43	0,00054	96	0,000108
44	0,00051	98	0,000104
45	0,00049	100	0,000100
46	0,00047	105	0,000091
47	0,00045	110	0,000083
48	0,00043	115	0,000075
49	0,00042	120	0,000069
50	0,00040	125	0,000064
51	0,00039	130	0,000059
52	0,00037	140	0,000051
53	0,00036	150	0,000044
54	0,00034		

TABLE IX

Valeurs du coefficient C de la formule  $U=C\sqrt{Ri}$ , d'après M. Bazin

(page 189)

Rayon moyen	Parois très unies (ciment, bois raboté, etc.).	Parois unies (planches, briques, pierres de taille).	Parois en maçonnerie de moellons	Parois de nature mixte (talus perreyés)	Canaux en terre dans les conditions ordinaires	Canaux en terre très irréguliers
0m05	68.5	50.7	28.4	18.1	12.8	9.9
0.06	69.8	52.6	30.2	19.4	13.8	10.7
0.07	70.9	54.2	31.7	20.6	14.7	11.4
0.08	71.8	55.6	33.1	21.7	15.5	12.1
0.10	73.1	57.7	35.5	23.6	17.0	13.3
0.12	74.1	59.5	37.4	25.2	18.3	14.4
0.14	75.0	60.9	39.0	26.7	19.4	15.3
0.16	75.6	62.1	40.5	27.8	20.4	16.2
0.18	76.2	63.2	41.8	29.0	21.4	17.0
0.20	76.7	64.1	42.9	30.0	22.3	17.7
0.22	77.1	64.9	44.0	30.9	23.1	18.4
0.24	77.5	65.5	44.8	31.8	23.8	19.0
0.26	77.8	66.2	45.7	32.6	24.5	19.6
0.28	78.1	66.8	46.5	33.4	25.2	20.2
0.30	78.4	67.3	47.3	34.1	25.8	20.7
0.35	79.0	68.4	48.8	35.7	27.2	22.0
0.40	79.4	69.4	50.4	37.1	28.5	23.1
0.45	79.8	70.2	51.6	38.4	29.6	24.1
0.50	80.2	70.9	52.7	39.5	30.6	25.0
0.55	80.4	71.5	53.7	40.5	31.6	25.9
0.60	80.7	72.1	54.6	41.4	32.5	26.7
0.65	80.9	72.6	55.4	42.3	33.3	27.4
0.70	81.1	73.0	56.1	43.1	34.1	28.1
0.80	81.5	73.8	57.4	44.6	35.5	29.4
0.90	81.8	74.4	58.6	45.9	36.7	30.6
1.00	82.0	75.0	59.6	47.0	37.8	31.6
1.10	82.2	75.4	60.5	48.0	38.8	32.6
1.20	82.4	75.9	61.3	48.9	39.7	33.5
1.30	82.6	76.3	62.0	49.8	40.6	34.3
1.50	82.9	76.9	63.2	51.3	42.2	35.8
1.70	83.1	77.5	64.3	52.6	43.6	37.1
2.00	83.4	78.1	65.6	54.3	45.3	38.9
2.50	83.7	79.0	67.4	56.6	47.7	41.2
3.00	84.0	79.6	68.7	58.3	49.7	43.3
3.50	84.2	80.1	69.8	59.8	51.3	44.9
4.00	84.4	80.5	70.7	61.0	52.7	46.4
5.00	84.7	81.2	72.1	63.0	55.0	48.8
10.00	85.3	82.8	75.9	68.5	61.6	56.0
15.00	85.6	83.5	77.7	71.3	65.1	60.9
20.00	85.8	84.0	78.8	73.0	67.3	62.5

TABLE X  
Valeurs du coefficient C de la formule  $U = C\sqrt{RI}$ ,  
d'après M. Rob. Manning.

(page 194)

Rayon moyen	PAROIS							
	très unies	unies	peu unies	rugueu- ses	en terre	en gravier	irrégu- lières	très irrégul
0.05	60.7	46.7	35.2	30.4	24.3	20.2	17.6	15.2
0.06	62.6	48.2	36.3	31.3	25.0	20.9	18.2	15.6
0.07	64.2	49.4	37.2	32.1	25.7	21.4	18.6	16.0
0.08	65.6	50.5	38.0	32.8	26.2	21.9	19.0	16.4
0.10	68.1	52.4	39.5	34.0	27.2	22.7	19.7	17.0
0.12	70.2	54.4	40.7	35.1	28.1	23.4	20.4	17.5
0.14	72.1	55.6	41.8	36.0	28.8	24.0	20.9	18.0
0.16	73.6	56.7	42.7	36.8	29.4	24.5	21.3	18.4
0.18	75.2	57.9	43.6	37.6	30.1	25.1	21.8	18.8
0.20	76.5	58.9	44.4	38.2	30.6	25.5	22.2	19.1
0.22	77.7	59.8	45.1	38.8	31.1	25.9	22.5	19.4
0.24	78.8	60.7	45.7	39.4	31.5	26.3	22.9	19.7
0.26	79.9	61.5	46.3	39.9	32.0	26.6	23.2	20.0
0.28	80.9	62.3	46.9	40.4	32.4	27.0	23.5	20.2
0.30	81.8	63.0	47.4	40.9	32.7	27.3	23.7	20.4
0.35	83.9	64.6	48.7	42.0	33.6	28.0	24.3	21.0
0.40	85.8	66.1	49.8	42.9	34.3	28.6	24.9	21.4
0.45	87.5	67.4	50.7	43.8	35.0	29.2	25.4	21.9
0.50	89.1	68.6	51.7	44.6	35.6	29.7	25.8	22.3
0.55	90.5	69.7	52.5	45.3	36.2	30.2	26.2	22.6
0.60	91.8	70.7	53.2	45.9	36.7	30.6	26.6	22.9
0.65	93.1	71.7	54.0	46.6	37.2	31.0	27.0	23.3
0.70	94.2	72.5	54.6	47.1	37.7	31.4	27.3	23.6
0.80	96.4	74.2	55.9	48.2	38.6	32.1	28.0	24.1
0.90	98.3	75.7	57.0	49.1	39.3	32.8	28.5	24.6
1.00	100.0	77.0	58.0	50.0	40.0	33.3	29.0	25.0
1.10	101.6	78.2	58.9	50.8	40.6	33.9	29.5	25.4
1.20	103.1	79.4	59.8	51.5	41.2	34.4	29.9	25.8
1.30	104.5	80.5	60.6	52.2	41.8	34.8	30.3	26.1
1.50	107.0	82.4	62.1	53.5	42.8	35.7	31.0	26.7
1.70	109.2	84.1	63.3	54.6	43.7	36.4	31.7	27.3
2.00	112.0	86.2	65.0	56.0	44.8	37.3	32.5	28.0
2.50	116.5	89.7	67.6	58.2	46.6	38.8	33.8	29.1
3.00	120.0	92.4	69.6	60.0	48.0	40.0	34.8	30.0
3.50	123.2	94.9	71.5	61.6	49.3	41.1	35.7	30.8
4.00	126.0	97.0	73.1	63.0	50.4	42.0	36.5	31.5
5.00	131.0	100.8	76.0	65.5	52.4	43.7	38.0	32.7
10.00	147.0	113.1	85.3	73.5	58.8	49.0	42.6	36.7
15.00	157.0	120.9	91.1	78.5	62.8	52.3	45.5	39.4
20.00	165.0	127.0	95.7	82.5	66.0	55.0	47.8	41.2

TABLE XI

Valeurs du coefficient C de la formule  $U = C\sqrt{RI}$ ,  
d'après Ganguillet et Kutter (page 189).

	Rayon moyen	Pentes I =						
		0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,0010	0,0100
Parois très unies $n = 0,010$	0 <sup>m</sup> ,05	38	44	51	54	56	57	58
	0 10	49	56	61	65	68	70	71
	0 20	63	70	74	77	78	79	80
	0 30	72	77	81	84	85	86	86
	0 50	83	86	88	90	91	91	91
	1 00	100	100	100	100	100	100	100
	2 00	115	111	109	107	106	105	105
	3 00	124	117	113	111	110	109	108
	5 00	134	123	118	115	113	112	111
	15 00	151	135	125	121	118	117	116
	Parois unies $n = 0,013$	0 <sup>m</sup> ,05	28	31	35	38	40	41
0 10		36	30	44	47	49	50	51
0 20		46	50	53	56	58	59	59
0 30		53	57	60	63	64	64	65
0 50		62	65	67	69	69	70	70
1 00		77	77	77	77	77	77	77
2 00		90	87	85	84	83	82	82
3 00		99	94	89	88	87	86	85
5 00		108	100	93	91	90	89	88
15 00		125	114	102	98	96	94	92
Parois peu unies $n = 0,017$		0 <sup>m</sup> ,05	19	22	24	26	28	29
	0 10	25	29	32	34	35	36	36
	0 20	34	37	39	41	42	42	43
	0 30	40	43	45	46	47	47	48
	0 50	47	49	50	51	51	52	52
	1 00	58	58	58	58	58	58	58
	2 00	71	69	67	66	65	64	64
	3 00	78	74	71	70	69	68	68
	5 00	87	79	75	73	72	71	70
	15 00	105	90	83	79	77	76	75
	Parois rugueuses $n = 0,020$	0 <sup>m</sup> ,05	15	18	20	21	23	23
0 10		21	23	25	28	29	29	30
0 20		28	30	32	34	35	36	36
0 30		33	35	37	38	39	40	40
0 50		40	41	42	43	43	44	44
1 00		50	50	50	50	50	50	50
2 00		61	59	57	56	56	55	55
3 00		69	54	61	59	59	58	58
5 00		76	70	66	63	62	61	61
15 00		94	81	74	70	68	67	66



TABLE XI (Suite)

Valeurs du coefficient C de la formule  $U = C\sqrt{RI}$ ,  
d'après Ganguillet et Kutter.

	Rayon moyen	Pentes I =						
		0,000025	0,00005	0,0001	0,0002	0,0004	0,0010	0,0100
Parois en terre $n = 0,025$	0m,05	12	13	15	16	17	18	18
	0 10	17	18	19	20	21	22	22
	0 20	22	23	24	25	26	27	27
	0 30	26	28	29	30	30	31	31
	0 50	31	32	33	34	34	35	35
	1 00	40	40	40	40	40	40	40
	2 00	50	48	47	46	45	45	45
	3 00	56	53	51	49	48	48	47
	5 00	64	59	54	53	52	51	50
	15 00	81	71	63	59	57	56	55
Parois en gravier $n = 0,030$	0m,05	10	11	12	13	13	14	14
	0 10	13	14	15	16	17	18	18
	0 20	18	19	19	20	21	22	22
	0 30	21	22	23	24	24	25	25
	0 50	25	26	27	27	28	29	29
	1 00	33	33	33	33	33	33	33
	2 00	42	41	40	40	39	38	38
	3 00	48	45	43	42	42	41	41
	5 00	56	51	47	45	44	43	43
	15 00	72	62	55	52	51	49	48
Parois irrégulières $n = 0,035$	0m,05	8	9	9	10	10	11	11
	0 10	11	12	12	13	13	14	14
	0 20	15	16	16	17	17	18	18
	0 30	18	19	19	20	20	21	21
	0 50	22	23	23	23	24	24	24
	1 00	29	29	29	29	29	29	29
	2 00	36	35	34	34	33	33	33
	3 00	42	40	38	37	36	36	36
	5 00	49	45	43	42	41	40	39
	15 00	65	56	51	47	45	44	43
Parois très irrégulières $n = 0,040$	0m,05	6	7	7	8	8	9	9
	0 10	9	10	11	11	12	12	12
	0 20	13	14	14	15	15	16	16
	0 30	15	16	17	18	18	18	18
	0 50	19	19	20	20	21	21	21
	1 00	25	25	25	25	25	25	25
	2 00	32	31	31	30	30	29	29
	3 00	37	35	34	33	32	32	32
	5 00	44	41	39	38	37	36	35
	15 00	59	52	46	43	42	41	40

TABLE XII  
Surfaces  $\omega$  et rayons moyens R des sections transversales  
en forme de trapèze.

Rapport de la largeur au plafond $l$ à la profondeur $h$	Rapport de la profondeur $h$ à la largeur au plafond $l$	Parois verticales	TALUS				
			à 1 de base pour 2 de hauteur	à 45 degrés	à 3 de base pour 2 de hauteur	à 2 de base pour 1 de hauteur	à 3 de base pour 1 de hauteur
$\frac{l}{h}$	$\frac{h}{l}$		Rapports des surfaces au carré de la profondeur : $\frac{\omega}{h^2}$				
0.25	4.00	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	3.25
0.50	2.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.50
0.75	1.33	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.75
1.00	1.00	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	4.00
1.25	0.80	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	4.25
1.50	0.67	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.50
1.75	0.57	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.75
2.00	0.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	5.00
2.50	0.40	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.50
3.00	0.33	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00
4.00	0.25	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	7.00
5.00	0.20	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	8.00
6.00	0.17	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	9.00
8.00	0.125	8.00	8.50	9.00	9.50	10.00	11.00
10.00	0.10	10.00	10.50	11.00	11.50	12.00	13.00
15.00	0.07	15.00	15.50	16.00	16.50	17.00	18.00
20.00	0.05	20.00	20.50	21.00	21.50	22.00	23.00
			Rapports des rayons moyens à la profondeur : $\frac{R}{h}$				
0.25	4.00	0.11	0.30	0.41	0.45	0.48	0.49
0.50	2.00	0.20	0.36	0.45	0.49	0.50	0.51
0.75	1.33	0.27	0.42	0.49	0.52	0.52	0.53
1.00	1.00	0.33	0.46	0.52	0.54	0.55	0.55
1.25	0.80	0.38	0.50	0.55	0.56	0.57	0.56
1.50	0.67	0.43	0.53	0.58	0.59	0.59	0.58
1.75	0.57	0.47	0.56	0.60	0.61	0.60	0.59
2.00	0.50	0.50	0.59	0.62	0.62	0.63	0.60
2.50	0.40	0.56	0.63	0.66	0.66	0.65	0.62
3.00	0.33	0.60	0.67	0.69	0.68	0.67	0.64
4.00	0.25	0.67	0.72	0.73	0.72	0.71	0.68
5.00	0.20	0.70	0.76	0.77	0.76	0.74	0.71
6.00	0.17	0.75	0.79	0.79	0.78	0.76	0.73
8.00	0.125	0.80	0.83	0.83	0.82	0.80	0.77
10.00	0.10	0.83	0.86	0.86	0.85	0.83	0.80
15.00	0.07	0.88	0.90	0.90	0.89	0.87	0.84
20.00	0.05	0.91	0.92	0.92	0.91	0.90	0.87

TABLE XIII

Valeurs de la fonction  $\psi(x)$  de Bresse pour les canaux découverts

(page 246)

$\frac{1}{x}$	$x$	$\psi(x)$	$\frac{1}{x}$	$x$	$\psi(x)$
10.0	0.10	-0.505	0.99	1.01	1.416
5.00	0.20	-0.404	0.98	1.02	1.191
3.33	0.30	-0.302	0.97	1.03	1.060
2.50	0.40	-0.198	0.96	1.04	0.970
2.22	0.45	-0.144	0.95	1.05	0.895
2.00	0.50	-0.088	0.94	1.06	0.838
1.82	0.55	-0.029	0.93	1.07	0.783
1.67	0.60	+0.032	0.93	1.08	0.749
1.54	0.65	0.099	0.92	1.09	0.712
1.43	0.70	0.171	0.91	1.10	0.676
1.39	0.72	0.202	0.90	1.11	0.651
1.35	0.74	0.235	0.89	1.12	0.626
1.33	0.75	0.252	0.88	1.13	0.602
1.32	0.76	0.270	0.88	1.14	0.580
1.30	0.77	0.288	0.87	1.15	0.561
1.28	0.78	0.306	0.86	1.16	0.541
1.27	0.79	0.326	0.85	1.17	0.525
1.25	0.80	0.346	0.85	1.18	0.509
1.23	0.81	0.367	0.84	1.19	0.493
1.22	0.82	0.387	0.83	1.20	0.479
1.20	0.83	0.411	0.82	1.22	0.454
1.19	0.84	0.435	0.80	1.25	0.420
1.18	0.85	0.460	0.77	1.30	0.373
1.16	0.86	0.487	0.74	1.35	0.335
1.15	0.87	0.516	0.71	1.40	0.304
1.14	0.88	0.546	0.69	1.45	0.277
1.12	0.89	0.578	0.67	1.50	0.257
1.11	0.90	0.614	0.62	1.60	0.218
1.10	0.91	0.652	0.59	1.70	0.190
1.09	0.92	0.695	0.56	1.80	0.166
1.08	0.93	0.743	0.53	1.90	0.146
1.06	0.94	0.798	0.50	2.00	0.132
1.05	0.95	0.862	0.44	2.25	0.102
1.04	0.96	0.940	0.40	2.50	0.082
1.03	0.97	1.040	0.33	3.00	0.055
1.02	0.98	1.178	0.29	3.50	0.041
1.01	0.99	1.412	0.25	4.50	0.031
1.00	1.00	$\infty$	0.20	5.00	0.020

TABLE XIV

**Pertes de charge**  
dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte,  
d'après M. Arson.

Volumés écoulés		Pertes de charge, en mètres d'eau, pour 1000 mètres de longueur					
en litres par seconde	en mètres cubes par heure	Diamètre 0 <sup>m</sup> ,05		Diamètre 0 <sup>m</sup> ,081		Diamètre 0 <sup>m</sup> ,10	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
1 lit	3 <sup>mc</sup> 6	0,053	0,022	0,008	0,003	0,004	0,002
2	7 2	0,137	0,056	0,019	0,008	0,009	0,004
3	10 8	0,234	0,104	0,032	0,013	0,014	0,006
4	14 4	0,402	0,165	0,048	0,020	0,021	0,009
5	18 0	0,582	0,239	0,066	0,027	0,028	0,011
6	21 6	0,794	0,326	0,086	0,035	0,036	0,015
7	25 2	1,038	0,426	0,108	0,044	0,045	0,018
8	28 8	1,314	0,539	0,134	0,055	0,054	0,022
9	32 4	1,622	0,665	0,161	0,066	0,065	0,026
10	36 0	1,961	0,804	0,190	0,078	0,076	0,031
11	39 6	2,332	0,956	0,222	0,091	0,088	0,036
12	43 2	2,734	1,121	0,257	0,105	0,100	0,041
13	46 8	3,169	1,299	0,293	0,120	0,114	0,047
14	50 4	3,636	1,491	0,332	0,136	0,128	0,053
15	54 0	4,134	1,695	0,374	0,153	0,144	0,059
16	57 6	»	»	0,419	0,172	0,159	0,065
18	64 8	»	»	0,512	0,210	0,194	0,079
20	72 0	»	»	0,616	0,252	0,231	0,095
22	79 2	»	»	0,729	0,299	0,272	0,111
25	90 0	»	»	0,917	0,376	0,339	0,139
30	108	»	»	1,276	0,523	0,466	0,191
35	126	»	»	1,695	0,695	0,613	0,251
40	144	»	»	2,172	0,890	0,780	0,320
45	162	»	»	»	»	0,966	0,396
50	180	»	»	»	»	1,174	0,481

TABLE XIV (Suite)

**Pertes de charge**  
**dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte,**  
**d'après M. Arson.**

Volumens écoulés		Pertes de charge, en mètres d'eau, pour 1000 mètres de longueur					
en litres par seconde	en mètres cubes par heure	Diamètre 0 <sup>m</sup> ,15		Diamètre 0 <sup>m</sup> ,20		Diamètre 0 <sup>m</sup> ,25	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
5 <sup>lit</sup>	18 <sup>mc</sup>	0,005	0,002	0,0015	0,0006	0,0005	0,0002
10	36	0,013	0,005	0,0037	0,0015	0,0013	0,0005
15	54	0,023	0,010	0,0063	0,0026	0,0022	0,0009
20	72	0,036	0,015	0,0094	0,0038	0,0032	0,0013
25	90	0,051	0,021	0,0130	0,0053	0,0044	0,0018
30	108	0,068	0,028	0,0172	0,0076	0,0057	0,0023
35	126	0,080	0,033	0,022	0,009	0,0073	0,0030
40	144	0,111	0,045	0,027	0,011	0,0089	0,0036
45	162	0,135	0,056	0,033	0,013	0,0108	0,0044
50	180	0,162	0,066	0,039	0,016	0,0127	0,0052
60	216	0,224	0,092	0,053	0,022	0,0174	0,0070
70	252	0,295	0,121	0,068	0,028	0,022	0,009
80	288	0,375	0,154	0,086	0,035	0,028	0,011
90	324	0,466	0,191	0,106	0,044	0,034	0,014
100	360	0,565	0,232	0,128	0,053	0,041	0,017
110	396	0,674	0,276	0,152	0,062	0,048	0,020
120	432	0,793	0,325	0,179	0,073	0,056	0,023
130	468	0,922	0,378	0,206	0,085	0,065	0,027
140	504	»	»	0,236	0,097	0,074	0,031
150	540	»	»	0,268	0,110	0,085	0,035
160	576	»	»	0,303	0,124	0,095	0,039
180	648	»	»	0,377	0,155	0,118	0,048
200	720	»	»	0,459	0,188	0,143	0,059
220	792	»	»	0,550	0,225	0,171	0,070
250	900	»	»	0,701	0,287	0,217	0,089

TABLE XIV (Suite)

**Pertes de charge**  
dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte,  
d'après M. Arson.

Volumés écoulés		Pertes de charge, en mètres d'eau, pour 1000 mètres de longueur					
en litres par seconde	en mètres cubes par heure	Diamètre 0m,30		Diamètre 0m,35		Diamètre 0m,40	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
20 <sup>lit</sup>	72 <sup>mc</sup>	0,0013	0,0005	0,0005	0,0002	0,0002	0,0004
40	144	0,0036	0,0015	0,0015	0,0006	0,0007	0,0003
60	216	0,0067	0,0027	0,0029	0,0012	0,0013	0,0005
80	288	0,0108	0,0044	0,0046	0,0019	0,0020	0,0008
100	360	0,0157	0,0064	0,0068	0,0028	0,0030	0,0012
120	432	0,0216	0,0088	0,0094	0,0038	0,0042	0,0017
140	504	0,0285	0,0117	0,0123	0,0051	0,0055	0,0022
160	576	0,0352	0,0148	0,0157	0,0064	0,0069	0,0028
180	648	0,045	0,018	0,0194	0,0080	0,0086	0,0035
200	720	0,054	0,022	0,0235	0,0096	0,0104	0,0042
220	792	0,065	0,026	0,0281	0,0115	0,0124	0,0051
240	864	0,076	0,031	0,0330	0,0135	0,0148	0,0060
250	900	0,082	0,033	0,0357	0,0147	0,0159	0,0065
260	936	0,088	0,036	0,0384	0,0158	0,0171	0,0070
280	1008	0,102	0,042	0,044	0,0180	0,0198	0,0081
300	1080	0,116	0,047	0,050	0,021	0,0227	0,0093
320	1152	0,130	0,053	0,057	0,023	0,0257	0,0105
360	1296	0,164	0,067	0,071	0,029	0,0322	0,0132
400	1440	0,200	0,082	0,087	0,036	0,0391	0,0160
450	1620	0,250	0,102	0,109	0,045	0,0490	0,0202
500	1800	»	»	0,133	0,055	0,061	0,025
600	2160	»	»	0,189	0,078	0,087	0,035
700	2520	»	»	0,256	0,105	0,117	0,048
800	2880	»	»	»	»	0,152	0,062
900	3240	»	»	»	»	0,191	0,078

TABLE XIV (Suite)

**Pertes de charge**  
dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte,  
d'après M. Arson.

Volumes écoulés		Pertes de charge, en mètres d'eau, par 1000 mètres de longueur					
en litres par seconde	en mètres cubes par heure	Diamètre 0 <sup>m</sup> ,50		Diamètre 0 <sup>m</sup> ,60		Diamètre 0 <sup>m</sup> ,70	
		Air	Gaz	Air	Gaz	Air	Gaz
50 <sup>lit</sup>	180 <sup>mc</sup>	0,0002	0,0001	0,00006	0,00002	0,00002	0,00001
100	360	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001	0,00009	0,00004
150	540	0,0016	0,0006	0,0005	0,0002	0,00022	0,00009
200	720	0,0028	0,0011	0,0009	0,0004	0,0004	0,00016
250	900	0,0043	0,0018	0,0014	0,0006	0,0006	0,00025
300	1080	0,0062	0,0025	0,0021	0,0009	0,0009	0,00036
350	1260	0,0084	0,0034	0,0029	0,0012	0,0012	0,0005
400	1440	0,0109	0,0045	0,0038	0,0015	0,0016	0,0006
450	1620	0,0118	0,0056	0,0048	0,0019	0,0020	0,0008
500	1800	0,0169	0,0069	0,0059	0,0024	0,0025	0,0010
600	2160	0,0243	0,0099	0,0085	0,0035	0,0035	0,0014
700	2520	0,0330	0,0135	0,0115	0,0047	0,0049	0,0020
800	2880	0,0429	0,0176	0,0151	0,0062	0,0063	0,0026
900	3240	0,054	0,022	0,0191	0,0078	0,0081	0,0033
1000	3600	0,067	0,027	0,0235	0,0096	0,0100	0,0041
1100	3960	0,081	0,033	0,028	0,0116	0,0120	0,0049
1200	4320	0,096	0,039	0,034	0,014	0,0143	0,0058
1300	4680	0,112	0,046	0,040	0,016	0,0168	0,0069
1400	5040	0,130	0,053	0,046	0,019	0,0194	0,0080
1500	5400	»	»	0,053	0,022	0,0222	0,0091
1600	5760	»	»	0,060	0,025	0,025	0,0104
1800	6480	»	»	0,076	0,031	0,032	0,0133
2000	7200	»	»	»	»	0,040	0,0163
2200	7920	»	»	»	»	0,048	0,020
2500	9000	»	»	»	»	0,062	0,025

TABLE XV

## Logarithmes naturels ou népériens

1° de centième en centième, pour les nombres compris entre 1 et 3

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,039	0,049	0,058	0,068	0,077	0,086	9
1,1	0,095	0,104	0,113	0,122	0,131	0,140	0,148	0,157	0,165	0,174	8
1,2	0,182	0,191	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231	0,239	0,247	0,255	7
1,3	0,262	0,270	0,278	0,285	0,293	0,300	0,307	0,315	0,322	0,329	7
1,4	0,336	0,344	0,351	0,358	0,365	0,372	0,378	0,385	0,392	0,399	6
1,5	0,405	0,412	0,419	0,425	0,432	0,438	0,445	0,451	0,457	0,464	6
1,6	0,470	0,476	0,482	0,487	0,495	0,501	0,507	0,513	0,519	0,525	6
1,7	0,531	0,536	0,542	0,548	0,554	0,560	0,565	0,571	0,577	0,582	6
1,8	0,588	0,593	0,599	0,604	0,610	0,615	0,621	0,626	0,631	0,637	5
1,9	0,642	0,647	0,652	0,657	0,663	0,668	0,673	0,678	0,683	0,688	5
2,0	0,693	0,698	0,703	0,708	0,713	0,718	0,723	0,727	0,732	0,737	5
2,1	0,742	0,747	0,751	0,756	0,761	0,765	0,770	0,775	0,779	0,784	4
2,2	0,788	0,793	0,797	0,802	0,806	0,811	0,815	0,820	0,824	0,829	4
2,3	0,833	0,837	0,842	0,846	0,850	0,854	0,859	0,863	0,867	0,871	4
2,4	0,875	0,880	0,884	0,888	0,892	0,896	0,900	0,904	0,908	0,912	4
2,5	0,916	0,920	0,924	0,928	0,932	0,936	0,940	0,944	0,948	0,952	4
2,6	0,956	0,959	0,963	0,967	0,971	0,975	0,978	0,982	0,986	0,989	4
2,7	0,993	0,997	1,001	1,004	1,008	1,012	1,015	1,019	1,022	1,026	4
2,8	1,030	1,033	1,037	1,040	1,044	1,047	1,051	1,054	1,058	1,061	4
2,9	1,065	1,068	1,072	1,075	1,078	1,082	1,085	1,089	1,092	1,095	4

2° de dixième en dixième, pour les nombres compris entre 1 et 10.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
1,	0,000	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470	0,531	0,588	0,642	51
2,	0,693	0,742	0,788	0,833	0,875	0,916	0,955	0,993	1,030	1,065	34
3,	1,099	1,131	1,163	1,194	1,224	1,253	1,281	1,308	1,335	1,361	25
4,	1,386	1,411	1,435	1,459	1,482	1,504	1,526	1,548	1,569	1,589	20
5,	1,609	1,629	1,649	1,668	1,686	1,705	1,723	1,740	1,758	1,775	17
6,	1,792	1,808	1,824	1,840	1,856	1,872	1,887	1,902	1,917	1,931	15
7,	1,946	1,960	1,974	1,988	2,001	2,015	2,028	2,041	2,054	2,067	12
8,	2,079	2,092	2,104	2,116	2,128	2,140	2,152	2,163	2,175	2,186	11
9,	2,197	2,208	2,219	2,230	2,241	2,251	2,262	2,272	2,282	2,292	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.



TABLE XVI

## Valeurs des fonctions hyperboliques

$x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$
0,00	0,000	1,000	0,000	0,75	0,822	1,295	0,635
0,02	0,020	1,000	0,020	0,80	0,888	1,337	0,664
0,04	0,040	1,001	0,040	0,85	0,955	1,383	0,691
0,06	0,060	1,002	0,060	0,90	1,027	1,433	0,716
0,08	0,080	1,003	0,080	0,95	1,099	1,486	0,740
0,10	0,100	1,005	0,100	1,00	1,175	1,543	0,762
0,12	0,120	1,007	0,119	1,05	1,254	1,604	0,782
0,14	0,140	1,010	0,139	1,10	1,336	1,669	0,800
0,16	0,161	1,013	0,159	1,15	1,420	1,737	0,818
0,18	0,181	1,016	0,178	1,20	1,509	1,811	0,834
0,20	0,201	1,020	0,197	1,25	1,602	1,889	0,848
0,25	0,253	1,031	0,245	1,50	2,429	2,353	0,905
0,30	0,305	1,045	0,291	2,00	3,627	3,762	0,954
0,35	0,357	1,062	0,336	2,50	6,050	6,132	0,987
0,40	0,411	1,081	0,380	3,00	10,02	10,07	0,993
0,45	0,465	1,103	0,422	4,00	27,29	27,31	0,999
0,50	0,521	1,128	0,462	5,00	74,20	74,21	1,000
0,55	0,578	1,155	0,500	6,00	201,5	201,5	1,000
0,60	0,637	1,186	0,537	8,00	1490	1490	1,000
0,65	0,696	1,219	0,572	10,00	11013	11013	1,000
0,70	0,759	1,255	0,604	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1,000

TABLE XVII

Valeurs des puissances  $\frac{k-1}{k} = 0,29, \dots$  des nombres consécutifs

( $k$  étant la constante spécifique des gaz, rapport des capacités calorifiques à pression constante et à volume constant)

1° de centième en centième, pour les nombres compris entre 0 et 1

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0,0	0,000	0,262	0,321	0,361	0,392	0,418	0,441	0,462	0,480	0,497	51
0,1	0,512	0,526	0,540	0,553	0,565	0,576	0,587	0,597	0,607	0,617	9
0,2	0,626	0,636	0,645	0,653	0,660	0,668	0,676	0,683	0,694	0,698	6
0,3	0,704	0,711	0,718	0,724	0,731	0,737	0,743	0,749	0,755	0,760	6
0,4	0,761	0,772	0,777	0,782	0,788	0,793	0,798	0,803	0,808	0,813	4
0,5	0,817	0,822	0,827	0,831	0,836	0,840	0,845	0,850	0,854	0,858	4
0,6	0,862	0,866	0,870	0,874	0,878	0,882	0,886	0,890	0,894	0,898	4
0,7	0,902	0,906	0,909	0,913	0,917	0,920	0,924	0,928	0,931	0,934	3
0,8	0,937	0,941	0,944	0,948	0,951	0,954	0,958	0,961	0,964	0,967	3
0,9	0,970	0,773	0,976	0,979	0,982	0,985	0,988	0,991	0,994	0,997	3

2° de dixième en dixième pour les nombres compris entre 0 et 10.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0,	0,000	0,512	0,626	0,704	0,766	0,817	0,862	0,902	0,937	0,970	30
1,	1,000	1,028	1,054	1,079	1,103	1,125	1,146	1,166	1,186	1,205	18
2,	1,223	1,240	1,257	1,274	1,290	1,305	1,321	1,335	1,349	1,363	13
3,	1,376	1,390	1,403	1,415	1,427	1,439	1,451	1,463	1,475	1,486	11
4,	1,497	1,507	1,518	1,528	1,538	1,548	1,558	1,568	1,577	1,587	9
5,	1,596	1,606	1,615	1,624	1,633	1,642	1,651	1,659	1,668	1,676	8
6,	1,684	1,692	1,700	1,708	1,716	1,723	1,731	1,738	1,746	1,754	7
7,	1,761	1,769	1,776	1,783	1,790	1,797	1,804	1,811	1,817	1,824	6
8,	1,830	1,837	1,844	1,850	1,857	1,863	1,870	1,876	1,882	1,888	8
9,	1,894	1,900	1,906	1,912	1,918	1,924	1,930	1,936	1,942	1,947	6

3° d'unité en unité, pour les nombres compris entre 0 et 100.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
0	0,000	1,000	1,223	1,376	1,497	1,596	1,684	1,761	1,830	1,894	59
10	1,933	2,008	2,060	2,108	2,154	2,197	2,240	2,280	2,318	2,354	36
20	2,390	2,424	2,457	2,489	2,520	2,550	2,580	2,608	2,635	2,662	26
30	2,688	2,714	2,739	2,764	2,788	2,812	2,835	2,857	2,880	2,902	24
40	2,923	2,945	2,965	2,985	3,005	3,025	3,045	3,064	3,083	3,101	18
50	3,119	3,137	3,155	3,172	3,190	3,207	3,224	3,241	3,258	3,274	15
60	3,289	3,305	3,321	3,336	3,352	3,367	3,382	3,397	3,412	3,426	14
70	3,440	3,455	3,469	3,483	3,497	3,510	3,524	3,537	3,550	3,563	13
80	3,576	3,589	3,602	3,615	3,628	3,640	3,653	3,665	3,677	3,689	12
90	3,701	3,713	3,725	3,737	3,749	3,761	3,773	3,784	3,795	3,805	11

TABLE XVIII

Valeurs des puissances  $\left(\frac{k-1}{k}\right)$  de divers nombres N pour les valeurs indiquées de  $k$

Nombres N	$k=1.111\dots$	$k=1.25$	$k=1.333\dots$	$k=1.41\dots$
	$\frac{k-1}{k}=0.10$	$\frac{k-1}{k}=0.20$	$\frac{k-1}{k}=0.25$	$\frac{k-1}{k}=0.29$
0.01	0.631	0.398	0.316	0.262
0.02	0.676	0.457	0.376	0.321
0.03	0.704	0.496	0.416	0.361
0.04	0.725	0.525	0.447	0.392
0.05	0.741	0.549	0.473	0.418
0.06	0.755	0.570	0.495	0.441
0.08	0.777	0.603	0.532	0.480
0.10	0.794	0.631	0.562	0.512
0.12	0.809	0.654	0.589	0.540
0.15	0.827	0.684	0.622	0.576
0.20	0.851	0.725	0.669	0.626
0.25	0.871	0.758	0.707	0.668
0.30	0.887	0.786	0.740	0.704
0.40	0.912	0.833	0.795	0.766
0.50	0.933	0.871	0.841	0.817
0.60	0.950	0.903	0.880	0.862
0.80	0.978	0.956	0.946	0.937
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000
1.20	1.018	1.037	1.047	1.054
1.50	1.041	1.085	1.107	1.125
2.00	1.072	1.149	1.189	1.223
2.20	1.096	1.201	1.257	1.305
3.00	1.116	1.246	1.316	1.376
4.00	1.149	1.320	1.414	1.497
5.00	1.175	1.380	1.495	1.596
6.00	1.196	1.431	1.565	1.684
8.00	1.231	1.516	1.682	1.830
10.00	1.259	1.585	1.778	1.953
12.00	1.282	1.644	1.861	2.060
15.00	1.311	1.719	1.968	2.197
20.00	1.349	1.821	2.115	2.390
25.00	1.380	1.904	2.236	2.550
30.00	1.405	1.974	2.340	2.688
40.00	1.446	2.092	2.515	2.923
50.00	1.478	2.187	2.659	3.119

TABLE XIX

Inverses  $\frac{1}{N}$  (Voir page 558).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	40000	9901	9804	9709	9645	9524	9434	9346	9259	9174	83
11	9091	9009	8928	8849	8772	8696	8621	8547	8474	8403	70
12	8333	8264	8197	8130	8064	8000	7937	7874	7812	7752	60
13	7692	7633	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7247	7194	51
14	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711	44
15	6667	6622	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289	39
16	6250	6211	6173	6135	6097	6061	6024	5988	5952	5917	35
17	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5586	30
18	5556	5525	5495	5465	5434	5405	5376	5347	5319	5291	28
19	5263	5235	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	25
20	5000	4975	4950	4926	4902	4978	4854	4831	4808	4784	22
21	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	21
22	4545	4524	4504	4484	4464	4444	4424	4405	4386	4367	19
23	4348	4329	4310	4292	4273	4255	4237	4219	4201	4184	17
24	4167	4149	4132	4115	4098	4081	4065	4048	4032	4016	16
25	4000	3984	3968	3952	3937	3921	3906	3891	3876	3861	15
26	3846	3831	3816	3802	3788	3774	3760	3746	3732	3718	14
27	3704	3690	3676	3662	3649	3636	3623	3610	3597	3584	13
28	3571	3558	3546	3533	3521	3509	3497	3484	3472	3460	12
29	3448	3436	3425	3413	3401	3389	3378	3367	3356	3344	11
30	3333	3322	3311	3300	3289	3278	3268	3257	3247	3236	10
31	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	10
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

## INDEX ALPHABÉTIQUE

- Abaque**, pour le calcul des distributions d'eau, 621, 635.
- Abbot**, 191, 203, 207, 308.
- Absolue** (température), 510.
- Acide carbonique**, 516.
- Adda**, 349.
- Adhérentes**(nappes), 406; — *id.* modifiées par une retenue d'aval, 409.
- Adiabatique**, 512.
- Adjim** (canal d'), 493.
- Affinement** (coefficient d'), 592.
- Affouillements** produits par les piles d'un pont, 281.
- Agitation tourbillonnaire**, 72.
- Air atmosphérique**, 516, 534; — comprimé, 519.
- Airy**, 467.
- Ajulage**, 82; — conique, 85; — cylindrique extérieur, 83; — rentrant, 82.
- Albères** (canal des), 611.
- Allard**, 401, 403.
- Allier**, 404.
- Amélioration des estuaires**, 506.
- Amers** (Lacs), 439.
- Appareils compresseurs d'air**, 519; — de M. de Caligny, 473; partiteurs, 610.
- Application des formules de l'écoulement**, 420; — dans les tuyaux 152; — dans les canaux découverts, 219; — par les déversoirs, 122; — par les orifices, 420.
- Aquatiques** (herbes), 214.
- Archimède** (principe d'), 12, 14.
- Ardèche**, 396, 406.
- Arson**, 542.
- Arve**, 202.
- Aspiration accompagnant la contraction de la veine**, 535.
- Atalante** (canal d'), 467.
- Atlantique** (Océan), 478.
- Atténuation des effets des crues**, 407.
- Aubois** (écluse de l'), 473.
- Aubuisson** (d'), 140.
- Auric**, 404.
- Avantages des digues submersibles**, 411.
- Azote**, 516.
- Baccarini**, 400.
- Baker** (Benjamin), 590.
- Balance de torsion**, 359.
- Bâle**, 203, 207.
- Barrages noyés**, 117.
- Barsac**, 318.
- Bassin communiquant avec la mer**, 487.
- Batons lestés**, 353.
- Baumgarten**, 126, 132, 203, 289, 310, 393.
- Bazacle** (barrage du), 118.
- Bazin**, 38, 46, 53, 59, 69, 79, 90, 105, 113, 126, 130, 158, 177, 187, 197, 207, 269, 378, 413, 441.
- Beaucaire**, 396.
- Bechmann**, 146.
- Bélanger**, 30, 130.
- Belcher**, 481.
- Belgrand**, 218, 397.
- Bélier** (coup de), 523.
- Bérard**, 301.
- Bernoulli**, 29, 559.
- Bertrand**, 621.
- Bidone**, 63, 126, 130, 441.
- Bisinusoïde**, 323.
- Boileau**, 353.
- Bonne-Espérance** (cap de), 478.
- Borda**, 82, 590.
- Bossut**, 562.
- Bou-Grara**, 493.
- Bouguer**, 16.
- Boulogne**, 479.
- Bourdelles**, 439, 481.
- Boussinesq**, 23, 39, 43, 47, 68, 78, 90, 127, 136, 147, 156, 234, 244, 268, 324, 367, 393, 441.
- Boys** (du), 301, 349.
- Branchées** (conduites), 161.
- Bresse**, 151, 163, 245.
- Brünings**, 359.
- Buat** (du), 80, 118, 141, 146, 218, 293, 559, 584.
- Californie**, 311.
- Caligny** (de) 31, 80, 158, 366, 468.

- Cambuzat**, 400.  
*Canal* à plafond horizontal, 258 ; — de dérivation, 215 ; — de Craponne, 131 ; — de Marseille, 311 ; — de Rondole, 614 ; — de Thuir, 609 ; — du Gange, 195 ; — des Albères, 611.  
*Canaux* découverts, 183.  
*Capacité calorifique* à pression constante, 512 ; — à volume constant, 511.  
*Carène*, 14.  
*Cascade* (compression en), 519.  
**Caudebec**, 499.  
*Causes* de perte de charge, 72.  
**Cayeux**, 484.  
*Célérité*, 415.  
*Centre* de carène, 14 ; — de pression, 11.  
*Chaleur spécifique*, 511.  
*Champs d'inondation*, 392.  
*Charge* (perte de), 34 ; — (plan de), 7, 30.  
**Cherbourg**, 484.  
*Choc* des lames, 461.  
*Chronomètre* remplacé par un pendule, 353.  
*Circonstances* accidentelles du mouvement, 57.  
*Clapotis*, 464.  
**Cloué**, 462.  
*Coefficient* artésien, 346 ; — de 59 ; — de débit des orifices, 58 ; — (*id.*) pour l'air et pour la vapeur d'eau, 531 ; — de débit des déversoirs, 100 ; — de fixité d'un cours d'eau, 291, 335 ; — de déplacement ou d'affinement, 592 ; — de frottement intérieur des liquides, 46.  
**Collignon**, 65.  
*Colonne* piézométrique, 30.  
*Colonnes* liquides oscillantes, 468.  
**Collo**, 460.  
**Cosmoy**, 409, 479, 497.  
*Composante* verticale ou transversale de la vitesse, 209.  
*Compresseurs* d'air, 519.  
*Compression* par gradation ou en cascade, 519.  
*Compteur* Venturi, 87.  
*Conditions* pour que le ressaut se produise, 126.  
*Conduites* d'eau, 137 ; — de gaz, 540 ; — d'air comprimé, 547 ; — à débit variable, 162 ; — à diamètre variable, 160 ; — élévatoire, 169 ; — branchées, 164 ; — en dérivation, 171 ; — partant d'un réservoir, 155.  
*Cônes tronqués* (résistance au mouvement des), 581.
- Congo**, 496.  
**Connecticut**, 104.  
*Consolidation* des coudes des conduites, 175.  
*Construction* de la courbe du remous, 253.  
*Continuité* (équation de), 24.  
*Contraction* de la veine liquide, 57 ; — (*id.*) gazeuse, 531 ; — incomplète, 62 ; — latérale dans les déversoirs, 102.  
**Cornaglia**, 464.  
*Corps* flottants, 15, 591 ; — immergés, 14.  
*Correction* des coefficients de débit des déversoirs, 101 ; — des orifices, pour l'air et la vapeur d'eau, 532.  
**Cosserat**, 260.  
*Coudes* (perte de charge due aux), 80 ; — (consolidation des), 175.  
**Couette**, 49, 51, 210.  
*Coups de bélier*, 523.  
*Courant* liquide, 25, 35 ; — s d'écoulement dus à la marée, 492 ; — s de marée, 480.  
*Courbe* des courbures, 321 ; — des débits, 383, 501 ; — des débits de flot et de jusant, 503 ; — du remous, 253 ; — métacentrique, 16.  
*Courbes* (écoulement dans les), 329 ; — (succession des), 325.  
*Courbure* des filets liquides, 233.  
*Cours d'eau*, distinction en deux catégories, 129 ; — à faible pente, 240, 244, 255 ; — à forte pente, 240, 263 ; — à l'état d'équilibre stable, 289 ; — naturels, 44, 233 ; — tranquille, 129, 398 ; — torrentueux, 129 ; — torrentiels, 398.  
**Coustown**, 484.  
**Craponne** (canal de), 131.  
**Crau** (pont de), 131.  
**Crépin**, 227.  
*Crête* épaisse, 91, 111 ; — mince, 90, 92.  
*Critique* (profondeur), 242.  
*Crues* des cours d'eau, 382 ; — (prévision des), 397 ; — (atténuation des effets des), 407.  
**Cunningham**, 195, 303, 207.  
*Curviligne* (lit), 323.  
**Cuvinot**, 349.
- Danger* des digues insubmersibles, 440.  
**Danube**, 207.  
**Darcy**, 51, 126, 144, 176, 187 ; — (tube de), 358.  
**Dausse**, 292.  
**Deacon**, 312.  
**Decize**, 404.

- Débit**, 25 ; — des sources, 397 ; — d'un orifice, 58 ; — d'un puits ordinaire, 341 ; — d'un puits artésien, 343 ; — solide d'un cours d'eau, 309.
- Débit maximum** (section qui donne le), 210 ; — (vitesse de propagation du), 390.
- Débîts** (courbe des), 383, 501.
- Débouché** d'une conduite, 625.
- Déferlement**, 457.
- Défontaine**, 203.
- Delaunay**, 347.
- Delemer**, 156.
- Démétriadès**, 346.
- Dépense**, 25.
- Déplacement** (coefficient de), 592.
- Déprimées** (nappes), 105.
- Dérivation** (canal de), 215 ; — (conduite en), 171.
- Déversantes** (nappes), 105.
- Déversoirs**, 90 ; — à crête épaisse, 91, 111 ; — en mince paroi, 90, 92 ; — inclinés, 95 ; — à talus, 113 ; — noyés, 117 ; — (jaugage par), 350.
- Différence** entre l'impulsion d'un fluide et sa résistance, 587.
- Diffusion** d'un corps dans un dissolvant, 343.
- Digoïn**, 405.
- Diques** submersibles et insubmersibles, 409 ; — transversales, 331.
- Distributions d'eau** (calcul des), 621.
- Divagation** du thalweg, 325.
- Division** des cours d'eau en deux catégories, 129, 240.
- Djidiouïa**, 87.
- Dniestre**, 290.
- Doublets flotteurs**, 207, 355.
- Dragages**, 507.
- Duchemin**, 572.
- Dublin**, 484.
- Duponchel**, 310, 311.
- Dupuit**, 164, 248, 252, 300, 307, 338, 378.
- Durance**, 310.
- Durand-Claye**, 281.
- Ecartement** des rives d'un cours d'eau, 326.
- Ecluses** de navigation, 471.
- Écoulement** à travers des terrains perméables, 338 ; — dans un lit curviligne, 323, 329 ; — par les orifices, 65 ; — dans les conduites, 176 ; — dans les canaux découverts, 192 ; — souterrain, 338, 393 ; — varié des gaz, 536 ; — d'un gaz par un orifice, 527 ; — (*id.*) par une longue conduite, 540.
- Eddystone**, 461.
- Effet** de la différence de vitesse des filets liquides, 38, 302 ; — de la chaleur sur un fluide élastique, 510 ; — d'un élargissement du lit d'un canal, 273 ; — d'un endiguement, 292 ; — d'un long étranglement, 270 ; — du reboisement des montagnes, 397.
- Élargissement** brusque ou rapide de la section d'un courant liquide, 73 ; — ou étranglement du lit, 270.
- Elbe**, 407.
- Ellis**, 98.
- Emmagasinement** des crues, 384.
- Emmery**, 203.
- Endiguement**, 292 ; — submersible ou insubmersible, 411. — des estuaires, 507.
- Énergie totale** de l'onde solitaire, 435 ; — d'une onde d'oscillation, 457 ; — d'une onde de translation, 423 ; — d'un tourbillon, 135.
- Entraînement**, 295.
- Entrée** de l'eau dans un tuyau (perte de charge due à l'), 155.
- Épaisseur** des tuyaux en fonte, 168.
- Épis noyés**, 335.
- Équation** de continuité, 24 ; — du mouvement non permanent, 376 ; — du mouvement varié, 43, 231 ; — générale de l'hydrostatique, 4 ; — s générales de l'hydrodynamique, 21 ; — fondamentale de l'hydraulique, 27.
- Équilibre** des corps flottants, 15 ; — des corps immergés, 10, 14 ; — des fluides, 4.
- Équivalent mécanique** de la chaleur, 511.
- Étule**, 391, 481.
- État** ondulatoire d'une masse liquide, 453.
- Éteules**, 499.
- Étranglement** brusque, 76, 278 ; — long, 270 ; — de longueur restreinte, 272 ; — graduel, mais peu long, 275 ; — ou élargissement du lit, 270.
- Estuaires**, 497, 507.
- Euler**, 562.
- Euripe** (détroit de l'), 467.
- Eyne**, 614.
- Eytelwein**, 140, 187, 280.
- Fargue**, 283, 293, 317, 337, 349.
- Feeders** électriques, 175.
- Filage** de l'huile, 462.
- Filet** liquide, 31.
- Fixité** d'un cours d'eau, 291, 335.
- Flamant**, 68, 471.
- Flot**, 481 ; — de fond, 462.
- Flotteur** (vitesse d'un) sur un courant, 300.

- Flotteurs*, 352; — (doubles), 207, 355.  
*Fluides*, 1; — élastiques, 509; — parfaits, 1; — (résistance des), 559; — pesants, 6.  
*Fluviales* (marées), 494.  
*Fond de sable* (rivières à), 313.  
*Force vive* d'un courant liquide, 35.  
**Forel**, 467.  
*Forme* à donner au lit pour obtenir un profil en long déterminé, 320; — des rives, 317; — des surfaces de niveau dans la houle, 449; — (influence de la) sur la résistance des corps flottants, 595.  
*Formule* de Lagrange, 459; — de Laplace ou de Poisson, 513; — de Zeuner ou de St-Venant, 528.  
*Formules* approximatives pour les crues, 393, 400; — pour la vitesse moyenne dans un courant, 198; — de M. Bazin pour la répartition des vitesses, 197; — pour les tuyaux de conduite, 137, 149; — pour les canaux découverts, 186.  
**Foss**, 150.  
**Fossa-Mancini**, 342.  
**Fourneyron**, 152.  
**Fournié**, 144.  
**Francis**, 98, 102, 210, 306.  
**Franck**, 143.  
**François** (Joseph), 519.  
**Franzius**, 506.  
**Freemann**, 179.  
*Frottement*, 2; — intérieur des liquides, 46; — extérieur d'un courant liquide, 376; — d'un courant fluide sur un corps immergé, 571.  
**Fteley**, 98.  
**Fundy** (baie de), 485, 496.  
  
*Galeries souterraines*, 555.  
**Gange** (canal du), 195, 203, 207.  
**Ganguillet**, 145, 188, 189.  
**Garonne**, 203, 293, 310, 349.  
**Garvie** (île de), 590.  
**Gascogne** (golfe de), 485.  
**Gauckler**, 142, 146, 191.  
**Gay**, 152.  
**Gay-Lussac**, 509.  
*Gaz d'éclairage*, 516, 545; — parfait, 509; — permanent, 509; — (mouvement des), 527.  
**George** (lac), 467.  
**Gerstner**, 445.  
**Girardon**, 337.  
**Gironde**, 495.  
**Gordon**, 203, 207.  
**Graeff**, 61, 63, 207, 348, 363, 390, 393, 409.  
  
**Gras** (Scipion), 307.  
*Grèves* de la Loire, 289.  
*Gueule-bée*, 83.  
**Guglielmini**, 294.  
**Guillemain**, 328.  
  
**Hagen**, 142.  
**Hamiz** (barrage du), 87.  
**Harlacher**, 207, 210, 361, 364, 407.  
**Hastings**, 484.  
**Haton de la Goupillière**, 537.  
**Hatt**, 476.  
*Hauteur* de la marée, 479; — du déversoir, 96; — représentative de la pression, 6.  
**Hégly**, 118.  
*Herbes aquatiques*, 214.  
**Herschel**, 87, 104.  
**Heuzé**, 609.  
**Holyoke**, 104.  
**Hooker**, 303.  
*Houle*, 445.  
**Humphreys**, 191, 203, 207, 308.  
**Hutton**, 590.  
*Hydraulique*, 2; — (équation fondamentale de l'), 27.  
*Hydrogène*, 516.  
*Hydrostatique*, 2; — (équation générale de l'), 4.  
  
*Immergés* (équilibre des corps), 10.  
*Imperméables* (terrains ou versants), 398.  
*Impulsion* des fluides élastiques, 589; — d'un courant indéfini, 562; — d'une veine fluide, 560; — (différence entre l') et la résistance, 587.  
*Inclinés* (déversoirs), 95, 113.  
*Inflexion*, 318.  
*Influence* de la forme des rives, 317; — de la hauteur du déversoir, 96; — de la largeur du canal sur la résistance des corps flottants, 599; — de la vitesse, 592; — des formes, 595; — de la surface mouillée, 597; — de la longueur, 598; — des herbes aquatiques, 214; — du frottement dans l'impulsion d'un courant, 571.  
*Initiale* (onde), 432.  
*Intégration* (formule d') du général Partemtier, 350.  
*Intumescence* limitée, 431; — très allongée, 437.  
*Inversion* de la veine, 69.  
**Irrawaddi**, 203, 207.  
*Irrigations*, 605 à 620; — (coefficient d'), 619.  
*Isodynamique*, 514.



- Isothermique*, 514.
- Jardin**, 87.
- Jaugeages**, 347 ; — des grands cours d'eau, 348, 351 ; — par déversoir, 350 ; — par profils en travers, 349.
- Joues d'un déversoir**, 90.
- Joule**, 517.
- Jusant**, 481.
- Kehl**, 203.
- Kleitz**, 383.
- Kraft**, 519, 550, 552.
- Kutter**, 145, 188, 189, 206.
- Lacs Amers**, 439.
- Lagrange**, 459, 466.
- Lagrené (de)**, 471.
- Lajerhjelm**, 71.
- Lampe**, 143.
- Lance des pompes à incendie*, 179.
- Langon**, 349.
- Laplace**, 476, 513.
- Largeur du canal (influence de la) sur la résistance des corps flottants*, 599.
- Latham (Baldwin)**, 310.
- Lauriol**, 536.
- Lausanne**, 467.
- Lawrence**, 179.
- Lechalas**, 309, 313, 328, 500.
- Leferme**, 461.
- Léman (lac)**, 407, 409, 467.
- Lemoine**, 406.
- Léonard de Vinci**, 355.
- Lesbros**, 59, 95, 118.
- Levées transversales*, 331.
- Leveillé**, 203.
- Lévy**, 142.
- Libre (nappe)**, 100, 106.
- Ligne adiabatique*, 513 ; — de charge, 439 ; — isothermique, 514.
- Liquide pesant tournant d'un autour axe vertical*, 7 ; — (*id*) horizontal, 9.
- Limitation de la vitesse dans les conduites*, 154.
- Lit curviligne*, 323 ; — mobile, 286.
- Loi de Guglielmini*, 294 ; — de la pente du fond, 320 ; — de Poisson, 513 ; — *s* applicables aux rivières à fond mobile, 334 ; — *s* de Belgrand, 398 ; — *s* de Mariotte et de Gay-Lussac, 509.
- Loire**, 308, 313, 348, 393, 400, 404, 408, 501.
- Lokhtine**, 349.
- Longue (mer)**, 462.
- Longueur à donner à un déversoir*, 124 ; — d'une onde d'oscillation, 453 ; — réduite d'une conduite, 164 ; — (influence de la) sur la résistance, 598.
- Lorenz**, 550.
- Lowell**, 102.
- Lyon**, 396.
- Mahan**, 402.
- Maigre**, 285, 318.
- Malte**, 467.
- Man (île de)**, 484.
- Manche**, 460.
- Manchester (canal de)**, 312.
- Manning (Robert)**, 145, 190.
- Mantes**, 319.
- Marées de la mer*, 476 ; — fluviales, 494.
- Mariotte**, 6, 355, 509.
- Marmande**, 310.
- Marseille (canal de)**, 311.
- Mary**, 118, 151, 400.
- Mas (de)** 591.
- Masoni**, 150.
- Mascaret**, 498.
- Maximum (vitesse) dans un canal découvert*, 499 ; — (*id*) dans un tuyau, 178 ; — *s* successifs de la vitesse, du débit et de la hauteur d'une crue, 385.
- Mazoyer**, 401, 404.
- Méditerranée**, 460.
- Mélange de l'eau de mer et de l'eau douce*, 503.
- Mengin**, 327, 508.
- Métacentre**, 16.
- Meulan**, 203.
- Meule**, 610.
- Michal**, 343.
- Mince paroi*, 57, 92.
- Mississippi**, 191, 203, 207, 303.
- Mobilité du lit*, 283.
- Module*, 610 ; — milanais, 613 ; — d'accroissement kilométrique, 327.
- Moldau**, 407.
- Monnier**, 547.
- Mont-Cenis**, 548.
- Montée**, 401.
- Morte (position) d'un courant*, 74, 85 — (pression), 585.
- Morosi**, 562.
- Mouille**, 285, 318.
- Moulinet*, de Woltmann, 361 ; — de M. Harlacher, 361.
- Moulins**, 404.
- Mouvement du gaz*, 527 ; — des liquides en général, 21 ; — permanent, 23, 28 ; — uniforme, 43 ; — uniforme dans les canaux, 184 ; — non perma-

- nent, 367 ; — **varié**, 231, 536 ; — **s**  
 ondulatoires, 413 ; — de l'eau dans un  
 estuaire, 497 ; — de l'air dans les ga-  
 leries souterraines, 555.  
*Moyenne locale*, 23.  
**Murgue**, 556.
- Nantes**, 503.  
*Nappes déversantes*, 105 ; — adhéren-  
 tes, 106 ; — libres, 100, 106 ; — dépri-  
 mées, 106 ; — noyées en dessous, 108.  
**Navier**, 176, 530.  
**Negretti**, 332.  
**Nevers**, 404.  
**Newton**, 176, 476.  
*Niveau*, 5 ; — piézométrique, 30 ; —  
 d'équilibre et — moyen d'une masse  
 liquide en état d'oscillation, 454.  
*Nivellement barométrique*, 7.  
*Non-permanent* (mouvement), 367.  
*Non-pressure*, 109, 585.  
*Non-translatoires* (mouvements), 72.  
*Noyé* (orifice), 64 ; — (déversoir), 117.
- Ohio**, 402.  
*Œil*, 610.  
*Onde fluviale*, 443 ; — initiale, 432 ; —  
 solitaire, 269, 444, 433 ; — de trans-  
 lation, 443 ; — d'oscillation, 445 ; —  
 marée, 449, 477.  
*Ondulation d'une masse liquide*, 452.  
**Oneglia** (Oneille), 464.  
*Orthogonales* (levées), 333.  
*Orifices*, 57 ; — carrés, 60 ; — circulaires,  
 60 ; — en mince paroi, 57 ; — noyés,  
 64 ; prolongés par des canaux, 64 ; —  
 rectangulaires, 61, 64 ; — en forme  
 de veine contractée, 532.  
*Oscillantes* (colonnes liquides), 471.  
*Oscillation* de l'eau dans les tubes,  
 468 ; — des corps flottants, 18.  
**Ouessant**, 478.  
*Oxygène*, 516.
- Panama**, 299.  
*Parfait* (fluide), 1 ; — (gaz), 509.  
**Parmentier**, 350.  
*Paroi mince*, 57, 92 ; — épaisse, 62, 111.  
**Partiot**, 289, 297, 308, 500.  
*Partiteurs* (appareils), 610.  
*Passage* dans une section rétrécie, 76 ;  
 — de l'eau sous un pont, 278 ; — d'un  
 écoulement par orifice à un écoule-  
 ment par déversoir, 118.  
**Péclot**, 78.  
*Pendule*, remplaçant un chronomètre,  
 353.
- Péniches flamandes*, 593.  
*Pente faible ou forte*, 240 ; — d'équilibre  
 d'un cours d'eau, 291 ; — la plus écono-  
 mique d'un canal de dérivation, 215 ;  
 — du fond (loi de la), 320 ; — de la  
 ligne de charge, 624.  
*Permanent* (gaz), 509 ; — (mouvement),  
 23, 28.  
*Perméables* (terrains ou versants), 398.  
**Perpignan**, 609.  
**Perrodil** (de), 359.  
*Perte de charge*, 34 ; — due à l'entrée  
 dans un tuyau, 155 ; — due à un élar-  
 gissement brusque, 73 ; — due au res-  
 saut, 129 ; — due aux coudes, 80.  
*Perte d'énergie due au transport de l'air*  
 comprimé, 554.  
*Perte de poids des corps immergés*, 14.  
**Pertuiset**, 393.  
**Philippeville**, 460.  
**Picard**, 214.  
*Pièces de bois en grume*, 581.  
*Piézomètre*, 30 ; — différentiel, 30.  
*Piles des ponts*, 281.  
**Pinay** (digue de), 408.  
**Pitot**, 356.  
*Plafond horizontal*, 258.  
*Plan de charge*, 7, 30.  
*Plaque mince* (impulsion sur une), 568.  
**Pò**, 410.  
*Poids des tuyaux en fonte*, 167.  
**Poiseuille**, 143, 145.  
**Poisson**, 176, 513.  
*Pompe foulante* (réservoir d'air en com-  
 munication avec une), 525.  
**Poncelet**, 59, 93, 565.  
*Pont* (passage de l'eau sous un), 287.  
**Pont-à-Mousson**, 167.  
**Pont-St-Ange**, 282.  
**Pont-St-Esprit**, 396.  
**Popp**, 519.  
**Possenti**, 400.  
*Pouls* des rivières, 210.  
*Poupe*, 569, 579.  
*Précautions* dans les opérations de jau-  
 geage, 365.  
*Pression morte*, 585 ; — vive, 584 ; —  
 du vent, 589 ; — dans un liquide en  
 état d'ondulation, 443 ; — hydrosta-  
 tique, 2.  
*Prévision*, des crues, 397.  
*Principe d'Archimède*, 12, 14.  
*Prisme carré flottant*, 18 ; — court  
 (impulsion sur un), 574 ; — allongé  
 (*id*) 575 ; — muni d'une proue (*id*),  
 578.  
*Prix* des tuyaux de conduite, 167.

- Problème des trois réservoirs*, 165 ; — *s.* divers sur les conduites, 155 ; — *id.* sur les canaux découverts, 219.  
*Profil longitudinal* du ressaut, 266.  
*Profil en long* (relation du) avec la forme du lit, 320.  
*Profondeur critique*, 242 ; — de la mer, 479.  
**Prony**, 140, 186, 205.  
*Propagation des ondes* dans un liquide en mouvement, 439 ; — des ondes de translation, 414 ; — de la houle, 453 ; — d'une crue, 387 ; — du débit maximum, 390 ; — de la marée dans un canal, 490.  
*Proue*, 568.  
*Puissance d'une conduite*, 625 ; — de suspension d'un courant liquide, 307.  
*Puits ordinaire*, 344 ; — artésien, 343.  
*Pyramides tronquées* (impulsions sur les), 581.  
*Quantité de mouvement d'un courant liquide*, 35 ; — d'une onde de translation, 416.  
**Québec**, 496.  
**Quinette de Rochemont**, 460, 476.  
**Raby**, 620.  
**Raconnay**, 203.  
*Rapport de la vitesse maximum à la vitesse moyenne* dans un courant, 199 ; — dans une conduite, 176.  
*Rapport du débit des crues à celui de l'étiage*, 400.  
**Rateau**, 359, 362.  
*Rayon moyen*, 44 ; — maximum, 210.  
*Reboisement des montagnes*, 397.  
*Réduite* (longueur), 164.  
*Régime des rivières à fond de sable*, 313 ; — graduellement varié, 158.  
*Règle de Dupuit*, 164.  
*Régularisation des rivières*, 334.  
**Remous**, 242 ; — d'exhaussement, 243, 244 ; — d'abaissement, 243, 255.  
*Remplissage d'un réservoir de gaz*, 536 ; — ou vidange d'un sas d'écluse, 471.  
*Répartition des vitesses dans les conduites*, 176 ; — dans un courant, 192 ; — sur une verticale, 195 ; — sur une horizontale, 207.  
*Réservoir prismatique ou pyramidal*, 120 ; — (temps nécessaire à la vidange d'un), 121 ; — (remplissage d'un) de gaz, 536.  
*Réservoirs pour l'atténuation des effets des crues*, 407 ; — d'air en communication avec les conduites d'eau, 523.  
*Résistance des fluides*, 559 ; — des fluides élastiques, 589 ; — (différence) entre la) et l'impulsion, 587 ; — au mouvement des corps flottants, 591 ; — d'une conduite, 624.  
**Ressac**, 461.  
**Ressaut**, 126, 240, 257, 417 ; (profil longitudinal du), 266.  
*Rétrécissement du champ d'inondation*, 411 ; — du lit d'un cours d'eau, 292.  
**Reynolds**, 143, 508.  
**Rhin**, 203, 207.  
**Rhône**, 308, 349, 396.  
**Rivière** 482.  
**Riedler**, 518, 548.  
*Rigoles* (petites) d'irrigation, 192.  
**Ritter**, 359.  
*Rivières*, 129, 241 ; — à fond de sable, 313 ; — (régularisation des), 334 — (pouls des), 210.  
**Roanne**, 273, 348, 400.  
**Rondole**, (canal de), 614.  
**Roorkee**, 207.  
**Roquefavour**, 131.  
**Rougé** (mer), 439.  
*Rouveau d'eau* 499.  
**Russell**. (H. C.). 467.  
**Russell** (Scott), 413.  
**Saguenay**, 495.  
**Sainjon**, 289, 297.  
**Saint-Fargeau**, 548.  
**Saint-Germain** (de), 487.  
**Saint-Gothard**, 548.  
**Saint-Laurent**, 495.  
**Saint-Nazaire**, 501.  
**Saint-Venant** (de), 18, 43, 68, 76, 81, 140, 187, 232, 415, 569.  
**Salles**, 118.  
**Salonique**, 346.  
*Salure des eaux d'un estuaire*, 505.  
**Saône**, 203.  
**Savart**, 562.  
*Sas d'écluse* (remplissage ou vidange d'un), 471.  
*Section circulaire ou demi-circulaire*, 44, 53 ; — rectangulaire très large, 44, 52 ; — rétrécie, 76 ; — qui donne le débit maximum, 210.  
*Seiches des grands lacs*, 466.  
**Seine**, 203, 206, 349, 400.  
*Service en route*, 162.  
**Sétif**, 620.  
*Seuil d'un déversoir*, 90 ; — épais, 111.  
*Seuils de soutènement du lit*, 335.  
**Simpson**, 350.  
**Singapore**, 477.  
**Smith** (Hamilton), 59, 104.

- Sinusoïde* (forme de l'onde marée), 449.  
*Solide* (débit), 309.  
*Solitaire* (onde), 269, 414, 433.  
**Somme**, 400.  
**Sommeiller**, 548.  
**Sonnet**, 205.  
**Sorel**, 171, 610.  
*Sources* (débit des), 397.  
*Souterrain* (écoulement), 338, 393.  
*Spirale-volute*, 321.  
*Stabilité* d'un cours d'eau, 289 ; — de l'onde solitaire, 435 ; — de l'équilibre des corps flottants, 15 ; — *id.* des corps immergés, 14.  
**Stearns**, 98.  
**Stockalper**, 548.  
*Submersibles* (digues), 409.  
*Succession des courbes*, 325.  
**Suez** (canal de), 439.  
**Suisse** (cours d'eau torrentiels de la), 206.  
*Superficiel* (ressaut), 426.  
*Superposition* de deux houles de sens contraire, 464, 482.  
**Surell**, 308.  
*Surfaces de niveau*, 5 ; — dans la houle, 448.  
*Surflexion*, 348.  
*Suspension*, 300.  
**Swanage**, 484.  
  
*Tachomètre* de Brünnings, 359.  
**Tadini**, 487.  
**Tamise**, 505.  
**Tech**, 611.  
**Telford**, 298.  
*Température absolue*, 510.  
*Tension superficielle* des liquides, 308.  
*Terrains perméables et imperméables*, 398.  
*Thalweg*, 325.  
*Théorème* de Bernoulli, 29 ; — de Torricelli, 57.  
**Thoulet**, 304.  
**Thuir** (canal de), 609.  
**Thrupp**, 444.  
**Tocqueville** (Algérie), 620.  
*Torrents*, 429, 241, 398.  
*Toue* de la Saône, 593.  
*Tourbillonnaire* (agitation), 72.  
*Tourbillons*, 433.  
*Tranquille* (cours d'eau), 429, 398.  
*Transformation* adiabatique, 512 ; — isothermique ou isodynamique, 514.  
*Transmission* du travail à distance, 173, 554.  
*Transport* de l'air comprimé, 547.  
  
*Transversales* (digues), 331.  
*Travaux d'endiguement*, 292, 336, 384, 409.  
*Trochoïde*, 449.  
*Tube* de Pitot, 356 ; — de Darcy, 358.  
*Turbinage*, 9.  
*Tuyaux* de conduite, 437.  
  
*Uniforme* (mouvement), 45 ; — (*id.*) dans les canaux découverts, 184.  
**Unwin**, 443, 168, 504, 549.  
*Usage des tables* pour les conduites d'eau, 150 ; — (*id.*) de gaz, 556 ; — pour les canaux découverts, 219.  
  
*Vagues* de la mer, 460.  
**Valence**, 349.  
*Vallés, submersible*, 409.  
**Vallès** 475.  
*Variation* de la pression dans le voisinage d'un orifice, 65 ; — de la vitesse en chaque point d'un courant, 208 ; — du débit des sources, 397 ; — des vitesses dans les conduites, 176 ; — du niveau de l'eau dans un bassin communiquant avec la mer, 487 ; — du prix d'une conduite d'eau, 626.  
*Varié* (mouvement), 231.  
**Vauthier**, 273, 283, 400.  
*Veine gazeuse*, 532 ; — liquide, 34 ; — (contraction de la), 57, 531 ; — (impulsion d'une), 560 ; — (inversion de la), 69.  
*Vent* (pression du), 589.  
**Venturi**, 84 ; — (compteur), 87 ;  
**Vernon Harcourt**, 508.  
*Versants* perméables et imperméables, 398.  
*Vidange* d'un réservoir par un orifice inférieur, 127 ; — *id.* par un déversoir, 122 ; — *id.* par un canal de grande longueur, 227 ; — des sas d'écluse, 471.  
**Vienne**, 207.  
**Vilar** (moulin), 610.  
*Viscosité*, 2, 308.  
**Vistule**, 291.  
*Vitesse* au fond d'un courant, 202 ; — du flot de fond 463 ; — d'un flotteur sur un courant, 300 ; — la plus économique dans une conduite élévatoire, 470 ; — d'équilibre, 304 ; — maximum dans un courant, 199 ; — *id.* dans une conduite, 182 ; — (limitation de la) dans les conduites, 154 ; — (variation de la) en chaque point d'un courant, 208.

- Vitesse de propagation* du débit maximum, 390 ; — d'une crue, 387 ; — du flot, 494 ; — des ondes de translation, 414.
- Vitesses dues aux marées fluviales*, 500 ; — des molécules à l'intérieur d'un réservoir, 68 ; — (variation des) 208 ; — (*id.*, dans les conduites, 176 ; — (répartition des) dans un courant, 192 ; — (*id.*) sur une horizontale, 207 ; — (*id.*) sur une verticale, 195.
- Vive* (portion) d'un courant, 74 ; — (pression), 584.
- Wateringues*, 260.
- Weisbach**, 143, 531.
- Wilson** (George), 532.
- Woltmann**, 361.
- Wyse**, 299, 312.
- Zeuner**, 528.
- Zône morte* entre deux régimes, 110.
-



# TABLE DES MATIÈRES

---

AVANT-PROPOS.....	I
-------------------	---

## CHAPITRE I

### HYDROSTATIQUE

#### § 1. — Généralités.

1. Fluides.....	1
2. Viscosité.....	2
3. Liquides, Gaz.....	2
4. Hydrostatique, hydrodynamique, hydraulique.....	2

#### § 2. — Équilibre des fluides.

5. Pression hydrostatique.....	2
6. Équation d'équilibre d'un fluide.....	4
7. Surfaces de niveau.....	5
8. Application aux fluides pesants.....	6
9. Liquide pesant tournant autour d'un axe vertical.....	7
10. Liquide pesant tournant autour d'un axe horizontal.....	9

#### § 3. — Équilibre des corps immergés.

11. Pression d'un liquide pesant sur une surface plane.....	10
12. Pression d'un fluide sur une surface quelconque. Principe d'Archimède.....	12
13. Stabilité de l'équilibre des corps immergés.....	14
14. Stabilité de l'équilibre des corps flottants. Métacentre.....	15
15. Application aux prismes carrés.....	18

## CHAPITRE II

### GÉNÉRALITÉS SUR LE MOUVEMENT DES LIQUIDES

#### § 1. — Mouvement des liquides en général.

16. Équations générales de l'hydrodynamique.....	21
17. Équation de continuité.....	24
18. Autre forme des équations générales.....	26
19. Équation fondamentale de l'hydraulique.....	27

§ 2. — *Mouvement permanent.*

20. Mouvement permanent.....	28
21. Théorème de Bernoulli. Plan de charge, niveau piézométrique....	29
22. Extension de ce théorème.....	33
23. Généralités sur le mouvement permanent des courants liquides....	34
24. Quantité de mouvement et force vive d'un courant liquide en fonction de la vitesse moyenne.....	35
25. Equation générale du mouvement permanent.....	38
26. Cas d'une section transversale circulaire ou demi-circulaire.....	44
27. Cas d'une section rectangulaire très large.....	44

§ 3. — *Mouvement uniforme.*

28. Mouvement ou régime uniforme.....	45
29. Frottement intérieur des liquides.....	46
30. Expérience de M. Couette.....	49
31. Autres observations.....	51
32. Formules pour la section rectangulaire très large et pour la section circulaire ou demi-circulaire.....	52

## CHAPITRE III

## CIRCONSTANCES ACCIDENTELLES DU MOUVEMENT

§ 1. — *Orifices.*

33. Écoulement par un orifice en mince paroi. Théorème de Torricelli.....	57
34. Débit d'un orifice. Coefficient de débit.....	58
35. Coefficients de débit pour des orifices carrés et circulaires.....	59
36. Coefficients de débit pour les orifices rectangulaires.....	61
37. Cas d'une contraction incomplète ou de parois épaisses.....	62
38. Orifice noyé.....	64

§ 2. — *Etude détaillée de l'écoulement.*

39. Variation de la pression dans le voisinage de l'orifice.....	65
40. Vitesse des molécules fluides à l'intérieur du réservoir.....	68
41. Particularités diverses.....	69

§ 3. — *Causes de perte de charge.*

42. Agitation tourbillonnaire.....	72
43. Elargissement brusque ou rapide de la section d'un courant liquide.....	73
44. Passage dans une section rétrécie.....	76
45. Perte de charge due aux coudes.....	80

§ 4. — *Ajutages.*

46. Écoulement par des orifices munis d'ajutages.....	82
47. Ajutage cylindrique rentrant, ou de Borda.....	82
48. Ajutage cylindrique extérieur.....	83
49. Ajutages coniques.....	85
50. Compteur Venturi.....	87



§ 5. — *Déversoirs.*

51. Écoulement par déversoir.....	90
52. Déversoir à crête épaisse.....	91
53. Déversoir en mince paroi ou à crête mince.....	92
54. Déversoirs inclinés.....	95
55. Influence de la hauteur du déversoir.....	96
56. Coefficient de débit.....	100
57. Corrections à faire subir à ces coefficients.....	101
58. Profil d'un cours d'eau en amont d'un déversoir.....	103

§ 6. — *Étude des nappes déversantes.*

59. Formes diverses des nappes déversantes.....	105
60. Nappes déprimées.....	105
61. Nappes adhérentes.....	106
62. Nappes noyées en dessous.....	108
63. Nappes adhérentes modifiées par une retenue d'aval.....	109
64. Déversoirs à seuil épais.....	111
65. Déversoirs à talus.....	113
66. Déversoirs noyés.....	117
67. Passage d'un écoulement par orifice à un écoulement par déversoir.....	118

§ 7. — *Application des formules.*

68. Temps nécessaire à la vidange d'un réservoir par un orifice inférieur.....	120
69. Temps nécessaire à la vidange par un déversoir.....	122
70. Calcul de la longueur à donner à un déversoir.....	124

§ 8. — *Ressaut.*

71. Ressaut superficiel. Condition pour qu'il se produise.....	126
72. Distinction des cours d'eau en deux catégories.....	128
73. Perte de charge due au ressaut.....	128
74. Exemples de ressauts.....	130

§ 9. — *Tourbillons.*

75. Étude sommaire des tourbillons liquides.....	133
76. Tourbillons de première espèce.....	133
77. Tourbillons de seconde espèce.....	135

## CHAPITRE IV

## TUYAUX DE CONDUITE

§ 1. — *Formules et tables.*

78. Formule générale de l'écoulement dans les tuyaux de diamètre constant.....	137
79. Formules pratiques.....	139
80. Formules anciennes.....	140
81. Défaut commun à ces formules.....	141
82. Formules modernes.....	141
83. Formules analogues à celles des canaux découverts.....	145

84. Difficulté du problème.....	145
85. Nouvelle formule proposée.....	149
86. Tables numériques.....	150
87. Usage des tables.....	152
88. Limitation de la vitesse dans les conduites.....	154

§ 2. — *Problèmes divers.*

89. Conduite partant d'un réservoir.....	155
90. Régime graduellement varié.....	158
91. Conduite à diamètre variable.....	160
92. Conduite à débit variable. Service en route.....	162
93. Conduite formée de plusieurs parties de diamètres différents. Règle de Dupuit.....	164
94. Conduites branchées.....	164
95. Calcul d'une conduite élévatoire.....	169
96. Calcul d'une conduite en dérivation.....	171
97. Transmission du travail à distance.....	173
98. Consolidation des coudes dans les conduites.....	175

§ 3. — *Etude détaillée de l'écoulement*

99. Loi de la variation des vitesses à l'intérieur d'un tuyau de conduite.....	176
--	-----

CHAPITRE V

**CANAUX DÉCOUVERTS.**

§ 1. — *Mouvement uniforme.*

100. Division du sujet.....	183
101. Mouvement uniforme.....	184
102. Formule générale du mouvement uniforme.....	185
103. Formules anciennes.....	186
104. Formules modernes.....	187

§ 2. — *Étude détaillée de l'écoulement.*

105. Répartition des vitesses dans un courant.....	192
106. Répartition des vitesses sur une verticale.....	195
107. Formules de M. Bazin.....	197
108. Rapport de la vitesse maximum à la vitesse moyenne.....	199
109. Vitesse au fond.....	202
110. Cas d'un canal de dimensions restreintes.....	203
111. Formules empiriques.....	205
112. Application à quelques cours d'eau naturels.....	205
113. Répartition des vitesses sur une horizontale.....	207
114. Variation de la vitesse en chaque point.....	208

§ 3. — *Applications.*

115. Forme de section qui donne le débit maximum.....	210
116. Influence des herbes aquatiques.....	214
117. Détermination de la pente d'un canal de dérivation.....	215
118. Emploi des formules et usage des tables.....	219
119. Vidange d'un réservoir par un canal de grande longueur.....	227

§ 4. — *Mouvement varié.*

120. Mouvement varié, Equation générale approximative.....	231
121. Equation générale du mouvement varié en tenant compte de la cour- bure des filets liquides.....	233
122. Equation simplifiée pour un canal rectangulaire très large.....	239
123. Division des cours d'eau en deux catégories.....	240

§ 5. — *Remous.*

124. Remous d'exhaussement ou d'abaissement.....	242
125. Cours d'eau à faible pente. Remous d'exhaussement.....	244
126. Cas où la pente est très faible.....	247
127. Canal rectangulaire de faible largeur.....	250
128. Construction de la courbe du remous.....	253
129. Cours d'eau à faible pente, Remous d'abaissement.....	255
130. Cours d'eau à faible pente. Ressaut.....	257
131. Canal rectangulaire à plafond horizontal.....	258
132. Canal à section trapèze et à fond horizontal.....	261
133. Cours d'eau à forte pente.....	263
134. Résumé de la discussion.....	265
135. Forme générale du profil longitudinal du ressaut.....	266

§ 6. — *Étranglement ou élargissement du lit.*

136. Effet d'un long étranglement.....	270
137. Étranglement de longueur restreinte.....	272
138. Effet d'un élargissement du lit.....	272
139. Effet d'un étranglement graduel, mais peu long.....	275
140. Effet d'un étranglement brusque, Passage de l'eau sous un pont...	278
141. Affouillements qui en sont la conséquence.....	281

## CHAPITRE VI

## COURS D'EAU NATURELS

§ 1. — *Mobilité du lit.*

142. Généralités.....	283
143. Effets de la mobilité du lit.....	286
144. Stabilité d'un cours d'eau.....	289
145. Effets d'un endiguement.....	292
146. Comparaison avec l'effet d'un resserrement dans un canal à fond fixe.....	295

§ 2. — *Entraînement et suspension.*

147. Entraînement des matériaux du lit.....	295
148. Matières tenues en suspension.....	300
149. Vitesse d'un flotteur sur un courant.....	300
150. Effets de la différence de vitesse des filets liquides.....	302
151. Puissance de suspension d'un courant liquide.....	307
152. Débit solide d'un cours d'eau.....	309
153. Etude du régime des rivières à fond de sable, par M. Lechalas.....	313

§ 3. — *Influence de la forme des rives.*

154. Etude de l'influence de la forme des rives, par M. Fargue.....	317
155. Lois générales applicables aux rivières à fond mobile.....	320
156. Forme à donner au lit pour obtenir un profit en long déterminé...	320
157. Ecoulement dans un lit curviligne.....	323
158. Règles de M. Fargue, pour la succession des courbes.....	325
159. Essai théorique sur l'écoulement dans les courbes.....	329
160. Effet de levées transversales dans une vallées submersible.....	331
161. Considérations générales sur les travaux d'endiguement ou de régularisation des rivières.....	334

§ 4. — *Ecoulement souterrain.*

162. Ecoulement à travers des terrains perméables.....	338
163. Débit d'un puits ordinaire.....	341
164. Débit d'un puits artésien.....	343

§ 5. — *Jaugeages.*

165. Détermination du débit d'un cours d'eau par la hauteur des eaux.	347
166. Détermination du débit au moyen de profils en travers.....	349
167. Jaugeage par déversoir.....	350
168. Jaugeage des grands cours d'eau.....	351
169. Flotteurs.....	352
170. Bâtons lestés.....	353
171. Doubles flotteurs.....	355
172. Hydromètres. Tube de Pitot.....	356
173. Tube de Darcy.....	358
174. Tachomètre de Brünings.....	359
175. Moulinet de Woltmann.....	361
176. Perfectionnement apporté par M. Harlacher.....	361
177. Calcul du débit au moyen des vitesses mesurées.....	362
178. Méthode de calcul de M. Harlacher.....	364
179. Précautions générales à prendre dans les opérations de jaugeage...	365

## CHAPITRE VII

## MOUVEMENT NON PERMANENT

§ 1. — *Généralités.*

180. Formule générale pour la valeur moyenne, sur une section, de toute dérivée complète par rapport au temps.....	367
181. Equation différentielle générale du mouvement d'un courant liquide, en tenant compte du frottement intérieur.....	370
182. Cas particulier d'un courant rectangulaire très large.....	372
183. Equation générale du mouvement non permanent et du frottement extérieur.....	376
184. Application à un canal horizontal de largeur indéfinie.....	380

§ 2. — *Crues des cours d'eau.*

185. Difficulté du problème.....	382
186. Hypothèse simplificative.....	383
187. Courbe des débits.....	383

188. Maximums successifs de la vitesse, du débit et de la hauteur.....	385
189. Vitesse de propagation de la crue.....	387
190. Vitesse de propagation du débit maximum.....	390
191. Cas où la hauteur de la crue reste stationnaire.....	391
192. Cas où les formules cessent d'être applicables.....	392
193. Formules approximatives.....	393

§ 3. — *Prévision des crues.*

194. Variation du débit des sources.....	397
195. Crues des grands cours d'eau. Lois de Belgrand.....	398
196. Incertitude des formules empiriques trop générales.....	400
197. Bases ordinaires des formules de prévision des crues.....	401
198. Méthode algébrique.....	402
199. Méthode graphique de M. Allard.....	403
200. Méthode graphique de M. Mazoyer.....	404
201. Cas de cours d'eau torrentiels.....	405
202. Application de ces méthodes.....	406

§ 4. — *Atténuation des effets des crues.*

203. Atténuation des effets des crues. Réservoirs.....	407
204. Digues submersibles et insubmersibles.....	409
205. Effet de l'endigement insubmersible.....	411
206. Avantages des digues submersibles.....	411

CHAPITRE VIII

MOUVEMENTS ONDULATOIRES

§ 1. — *Ondes de translation.*

207. Ondes de translation.....	413
208. Vitesse de leur propagation.....	414
209. Formule plus approchée de cette vitesse, tenant compte de la forme de l'onde.....	418
210. Énergie totale d'une onde de translation.....	423
211. Application à quelques exemples.....	431

§ 2. — *Onde solitaire.*

212. Définition et équation de l'onde solitaire.....	433
213. Énergie et stabilité de l'onde solitaire.....	435
214. Intumescence très allongée.....	437
215. Propagation des ondes dans un liquide en mouvement.....	439

§ 3. — *Houle.*

216. Ondes d'oscillation.....	445
217. Houle.....	446
218. Forme des surfaces de niveau.....	448
219. Relation entre la longueur et la vitesse d'une onde.....	450
220. Condition de continuité.....	450
221. État ondulatoire d'une masse liquide.....	452
222. Pression en un point quelconque.....	453
223. Niveau d'équilibre, différent du niveau moyen.....	454

224. Déferlement.....	457
225. Energie totale d'une onde d'oscillation.....	458
226. Formules applicables aux masses liquides de profondeur limitée... ..	457
227. Des vagues de la mer.....	460
228. Du flot de fond.....	462
229. Vitesse du flot de fond.....	463

§ 4. — *Clapotis.*

230. Effet de la superposition de deux houles se propageant en sens contraire.....	464
231. Seiches des grands lacs.....	466

§ 5. — *Colonnes liquides oscillantes.*

232. Oscillations de l'eau dans les tubes.....	468
233. Colonnes liquides oscillantes pour le remplissage et la vidange des sas des écluses.....	471
234. Appareils de M. de Caligny.....	473

§ 6. — *Marées.*

235. Marées de la mer.....	476
236. Relation entre la hauteur de la marée et la profondeur de la mer... ..	479
237. Courants de marée.....	480
238. Variation du niveau de l'eau dans un bassin communiquant avec la mer.....	487
239. Propagation de la marée dans un canal communiquant avec un réservoir indéfini.....	490
240. Courants d'écoulement dus à la dénivellation produite par la marée.....	492
241. Marées fluviales.....	494
242. Mouvement de l'eau dans un estuaire.....	497
243. Mascaret.....	498
244. Détermination des vitesses dues aux marées fluviales.....	500
245. Exemple. Courbes des débits à St-Nazaire.....	503
246. Courbes des débits totaux de flot et de jusant.....	501
247. Mélange de l'eau de mer et de l'eau douce.....	503
248. Amélioration des estuaires.....	506

CHAPITRE IX

FLUIDES ÉLASTIQUES

§ 1. — *Equations et formules générales.*

249. Gaz parfaits.....	509
250. Lois de Mariotte et de Gay-Lussac.....	509
251. Effets de la chaleur sur un fluide élastique.....	510
252. Transformation adiabatique.....	512
253. Transformation isothermique ou isodynamique.....	514
254. Valeurs numériques des coefficients.....	515
255. Application de la formule générale.....	517

§ 2. — *Réservoirs d'air.*

256. Réservoirs d'air en communication avec les conduites d'eau.....	523
257. Réservoirs d'air placés sur une conduite d'eau alimentée par une pompe foulante.....	525

§ 3. — *Mouvement des gaz.*

258. Ecoulement par un orifice.....	527
259. Coefficients de débit pour l'air et la vapeur d'eau.....	531
260. Aspiration accompagnant la contraction de la veine gazeuse.....	536
261. Ecoulement varié des gaz. Remplissage d'un réservoir.....	537
262. Ecoulement d'un gaz par une longue conduite.....	540
263. Formule de l'écoulement.....	542
264. Valeurs des coefficients.....	544
265. Simplification de la formule.....	545
266. Conduites d'air comprimé.....	547
267. Cas d'une conduite très longue.....	552
268. Perte d'énergie due au transport de l'air comprimé.....	554
269. Mouvement de l'air dans les galeries souterraines.....	555
270. Usage des tables numériques.....	556

## CHAPITRE X

## RÉSISTANCE DES FLUIDES

§ 1. — *Étude théorique.*

271. Action mutuelle des liquides et des solides en mouvement relatif..	559
272. Impulsion d'une veine liquide contre un plan.....	560
273. Impulsion d'un courant indéfini.....	562
274. Expression générale de l'impulsion.....	562
275. Théorie de Poncelet.....	565
276. Résultats de cette théorie.....	566
277. Utilité d'une seconde approximation.....	568
278. Théorie de St-Venant.....	569
279. Cas d'un solide sans poupe.....	569
280. Influence du frottement.....	571
281. Formule applicable à une plaque mince.....	572
282. Cas d'un corps prismatique court.....	574
283. Cas d'un prisme allongé.....	575
284. Prisme muni d'une poupe.....	578
285. Influence de la poupe.....	579
286. Pyramides ou cônes tronqués. Pièces de bois en grume.....	581

§ 2. — *Étude expérimentale.*

287. Recherches de Du Buat.....	584
288. Pression vive et non-pression.....	584
289. Variation avec la vitesse.....	587
290. Différence entre l'impulsion d'un liquide en mouvement sur un solide en repos et la résistance opposée au mouvement d'un solide par un liquide en repos.....	587
291. Résistance ou impulsion des fluides élastiques. Pression du vent...	589
292. Résistance au mouvement des corps flottants.....	591
293. Expériences de M. de Mas.....	591
294. Influence de la vitesse.....	592
295. Influence des formes, tant à l'avant qu'à l'arrière.....	595
296. Influence de la surface mouillée.....	597
297. Influence de la longueur.....	598
298. Influence du rapport des sections transversales du corps flottant et du cours d'eau.....	599
299. Influence de la forme de la section transversale du cours d'eau.....	601
300. Résumé.....	602

## ANNEXES

## Documents et renseignements concernant les irrigations

<i>a. Lois et arrêtés généraux.</i> .....	605
I. Loi en forme d'instruction des 12-20 août 1790.....	605
II. Loi du 6 octobre 1791.....	605
III. Arrêté du Gouvernement du 19 ventôse an VI.....	606
<i>b. Documents législatifs spéciaux aux irrigations.</i> .....	607
IV. Code civil (extrait).....	607
V. Loi du 29 avril 1845.....	607
IV. Loi du 11 juillet 1847.....	608
<b>Exemples d'ouvrages concernant les irrigations.</b> .....	609

<b>Abaque pour le calcul des distributions d'eau</b> (texte).....	621
Id. (figure).....	635

## TABLES NUMÉRIQUES.

<b>Table</b> .....	638
I. Hauteurs $h$ correspondant aux vitesses $v$ .....	639
I. bis. Vitesses $v$ dues à des hauteurs données $h$ .....	640
II. Débits d'un déversoir sous une charge $H$ , pour diverses valeurs du coefficient de débit $m$ .....	642
III. Débits des conduites en fonction de la vitesse moyenne.....	643
III bis. Vitesse moyenne dans les conduites en fonction du débit.....	644
IV. Valeurs du coefficient $\gamma$ pour le calcul des tuyaux de conduite.....	645
V. Valeurs du rapport $\frac{J}{\gamma}$ et de son inverse $\frac{\gamma}{J}$ pour le calcul des tuyaux de conduite.....	646
VI. Perte de charge $J$ par mètre de longueur dans les conduites.....	652
VII. Valeurs du rapport $\frac{J}{Q^2}$ de la perte de charge $J$ au carré du débit $Q$ d'un tuyau de conduite.....	653
VIII. Valeurs du coefficient $b$ correspondant aux valeurs du coefficient $C = \frac{1}{\sqrt{b}}$ .....	654
IX. Valeurs du coefficient $C$ de la formule $U = C\sqrt{RI}$ , d'après M. Bazin.....	655
X. Valeurs du coefficient $C$ de la formule $U = C\sqrt{RI}$ , d'après M. Rob. Manning.....	656
XI. Valeurs du coefficient $C$ de la formule $U = C\sqrt{RI}$ , d'après Gauguillet et Kutter.....	656
XII. Surfaces $\omega$ et rayons moyens $R$ des sections transversales en forme de trapèze.....	658
XIII. Valeurs de la fonction $\psi(x)$ de Bresse, pour les canaux découverts.....	659



XIV. Pertes de charge dues à l'écoulement des gaz dans les conduites en fonte, d'après M. Arson.....	660
XV. Logarithmes naturels ou népériens.....	664
XVI. Valeurs des fonctions hyperboliques.....	665
XVII. Valeurs des puissances $\frac{k-1}{k} = 0,29\dots$ des nombres consécutifs.	666
XVIII. Valeurs des puissances $\frac{k-1}{k}$ de divers nombres N, pour des valeurs indiquées de k.....	667
XIX. Inverses $\frac{1}{N}$ .....	668
Index alphabétique.....	669
Table des matières.....	679