

M. H. PICQUET

Capitaine du génie, Répétiteur à l'École polytechnique.

DES INVARIANTS COMMUNS A DEUX FONCTIONS QUADRATIQUES, HOMOGÈNES,
A DEUX, TROIS OU QUATRE VARIABLES.

— Séance du 26 août 1874. —

1. — Si l'on considère une fonction homogène du second degré à deux variables

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

on sait que cette fonction admet un invariant unique (*) qui est son discriminant $AC - B^2$.

Si l'on considère en outre une seconde fonction de même espèce,

$$A_1 x^2 + 2B_1 xy + C_1 y^2,$$

les deux fonctions, envisagées simultanément, possèdent un invariant commun, c'est-à-dire une fonction de leurs coefficients qui ne change pas à un facteur près, par une substitution linéaire. Il est connu (**) que cet invariant s'obtient au moyen de l'expression

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \lambda(A_1 x^2 + 2B_1 xy + C_1 y^2),$$

en cherchant son discriminant et formant les coefficients des différentes puissances de λ . Ce discriminant n'est autre que

$$(A + \lambda A_1)(C + \lambda C_1) - (B + \lambda B_1)^2,$$

ou

$$AC - B^2 + \lambda[AC_1 + CA_1 - 2BB_1] + \lambda^2[A_1 C_1 - B_1^2].$$

Le premier et le troisième coefficients sont respectivement les invariants des deux fonctions considérées. Quant au second, il renferme les coefficients des deux fonctions : c'est un invariant commun. On peut l'interpréter géométriquement, et il est facile de voir que si l'on fait $y = 1$ dans les deux fonctions, et si on les égale à zéro, de façon à obtenir deux équations en x , les racines de ces équations portées sur une même droite, à partir d'une même origine, donneront lieu à quatre points en rapport harmonique, toutes les fois que l'invariant commun sera nul. La démonstration mérite à peine d'être rapportée : si les deux

(*) On enseigne quelquefois que les expressions $\frac{AC - B^2}{\sin^2 \theta}$, $\frac{A + C - 2B \cos \theta}{\sin^2 \theta}$, ne changeant pas par suite d'une transformation de coordonnées, sont des invariants de la fonction

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Cette locution paraît incorrecte, puisque ces expressions renferment non-seulement les coefficients de la fonction, mais aussi l'angle θ .

(**) Salmon, *Leçons d'algèbre supérieure*, traduction française, p. 92.

couples de racines sont x', x'' et x'_1, x''_1 , elles donneront lieu à un rapport harmonique si la relation

$$\frac{x'_1 - x'}{x''_1 - x'} = \frac{x'' - x'_1}{x''_1 - x''},$$

est satisfaite. Cette relation peut s'écrire :

$$2[x'x'' + x'_1x''_1] = (x' + x'')(x'_1 + x''_1),$$

ou en remplaçant les sommes et produits de racines par leurs valeurs tirées des équations

$$2\left(\frac{C}{A} + \frac{C_1}{A_1}\right) = \frac{4BB_1}{AA_1},$$

ou

$$AC_1 + CA_1 - 2BB_1 = 0.$$

On peut encore dire que lorsque cet invariant est nul, les deux équations homogènes, obtenues en égalant à zéro les deux fonctions, représentent quatre droites formant un faisceau harmonique.

2. — Si des fonctions à deux variables on passe aux fonctions à trois variables, telles que

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$

ces fonctions possèdent également un invariant unique qui est leur discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

Deux pareilles fonctions, considérées simultanément, ont de plus deux invariants communs, que l'on obtient par le même procédé que celui de deux fonctions à deux variables (*). Si la deuxième fonction est

$$T = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f''yz + 2g'zx + 2h'xy,$$

et si l'on forme la fonction $S + \lambda T$, le discriminant de cette nouvelle fonction sera

$$\begin{vmatrix} a + \lambda a' & h + \lambda h' & g + \lambda g' \\ h + \lambda h' & b + \lambda b' & f + \lambda f'' \\ g + \lambda g' & f + \lambda f'' & c + \lambda c' \end{vmatrix}$$

et les coefficients des différentes puissances de λ dans ce discriminant seront des invariants. Si on le développe, on obtient une fonction bien connue, du troisième degré en λ

$$\Delta + \Theta\lambda + \Theta'\lambda^2 + \Delta'\lambda^3,$$

dans laquelle Δ et Δ' sont respectivement les discriminants des fonctions

(*) Salmon (*Ibid.*), p. 204.

S et T, Θ et Θ' deux invariants communs dont le second se déduit du premier par la permutation des lettres accentuées en lettres non accentuées. On obtient facilement la valeur de Θ , qui est

$$\Theta = \begin{vmatrix} a' & h & g \\ h' & b & f \\ g' & f & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h' & g \\ h & b' & f \\ g & f' & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & h & g' \\ h & b & f' \\ g & f & c' \end{vmatrix}$$

ou en ordonnant par rapport aux coefficients de T

$$(bc - f^2) a' + (ca - g^2) b' + (ab - h^2) c' + 2(gh - af) f' + 2(hf - bg) g' + 2(fg - ch) h'.$$

3. — Nous nous proposons d'interpréter géométriquement l'invariant Θ : tout ce qui sera démontré pour cet invariant par rapport aux fonctions S et T le sera évidemment pour l'invariant Θ' , par rapport aux fonctions T et S.

Égalons à zéro les deux fonctions S et T de façon à obtenir les équations trilineaires de deux coniques, que nous appellerons S et T. M. Salmon a fait voir (*) que lorsqu'on peut inscrire dans la conique T un triangle conjugué à la conique S, c'est-à-dire un triangle tel qu'un sommet quelconque soit le pôle par rapport à la conique S du côté opposé, l'invariant Θ s'annule. Il est facile de démontrer la réciproque : la propriété d'invariance de la fonction Θ permet en effet de choisir arbitrairement le triangle de référence, si l'on prend un de ses sommets $(x=0, y=0)$ sur la courbe T, et pour côté opposé $(z=0)$ la polaire de ce point par rapport à S, les équations de ces courbes deviendront

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy = 0,$$

$$T = a'x^2 + b'y^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy = 0.$$

Si l'on fait $z=0$ dans ces deux équations, on obtient successivement les équations des deux systèmes de droites joignant le point $(x=0, y=0)$ aux points d'intersection de chacune des courbes avec le côté du triangle de référence $z=0$, c'est-à-dire

$$S_1 = ax^2 + 2hxy + by^2$$

$$T_1 = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2.$$

D'ailleurs, à cause de $g=f=c=0$, Θ est devenu

$$bca' + cab' - 2chh'$$

ou

$$c(ba' + ab' - 2hh').$$

Or, c n'est pas nul si l'on ne suppose pas que la conique S soit un sys-

(*) Salmon, *Sections coniques*, traduction française, p. 479.

tème de deux droites, si donc Θ est nul, c'est que l'on a

$$ba' + ab' - 2hh' = 0$$

c'est-à-dire que les deux systèmes de droites S_1 et T_1 forment un faisceau harmonique (1), ou que la droite $z=0$ coupe les deux courbes suivant quatre points s_1, s_2, t_1, t_2 , en rapport harmonique. D'ailleurs cette droite est par rapport à la conique S la polaire du point t_0 ($x=0, y=0$), donc le triangle $t_0t_1t_2$, inscrit dans T est conjugué par rapport à S .

Si nous avons pris pour sommet du triangle de référence un autre point quelconque de la courbe T , l'invariant Θ , qui est nul pour un système de coordonnées, aurait encore été nul dans ce nouveau système, et l'on aurait eu un autre triangle conjugué de S inscrit dans T . On arrive donc ainsi à la démonstration analytique de ce théorème de M. Chasles (*):

Quand on peut inscrire dans une conique T un triangle conjugué à une conique S , on peut en inscrire une infinité d'autres,
ou encore :

Les deux coniques sont telles que la polaire par rapport à S d'un point quelconque de T les coupe suivant quatre points en rapport harmonique,

et l'on voit en même temps que la dépendance géométrique qui existe alors entre les deux coniques S et T s'exprime analytiquement par la condition $\Theta=0$.

4. — D'après ce mode de dépendance géométrique, on peut jusqu'à un certain point dire que les deux courbes se *partagent harmoniquement* (**) et l'on aura alors l'extension aux fonctions à trois variables de la propriété de l'invariant commun aux fonctions à deux variables. Cette expression se justifie, si l'on observe que, dans le cas de deux coniques comme dans celui de deux segments d'une même droite empiétant l'un sur l'autre, il y a réciprocité. Non pas que l'on puisse inscrire dans la conique S des triangles conjugués à la conique T , ce qui s'exprimerait évidemment par la condition $\Theta'=0$, mais c'est un autre genre de réciprocité qui résulte des considérations suivantes :

Quand on peut inscrire dans une conique T un, et par suite, une infinité de triangles conjugués à une conique S , on peut circonscrire à la seconde un et, par suite, une infinité de triangles conjugués à la première ou encore :

(*) *Traité des sections coniques*, p. 141.

(**) Remarquons en effet qu'un triangle conjugué à une conique ayant toujours un point à l'intérieur de la courbe et deux à l'extérieur, les deux courbes auront toujours au moins deux points communs réels, et par suite empièteront l'une sur l'autre.

du pôle par rapport à T d'une tangente quelconque de S , les tangentes menées aux deux courbes forment un faisceau harmonique.

Pour démontrer analytiquement ce théorème connu, dont nous avons donné ailleurs une démonstration géométrique (*), il suffira de faire voir que lorsque Θ est nul, la dernière condition géométrique est satisfaite. Pour cela supposons que la droite $z=0$ soit tangente à S , et que le point $(x=0, y=0)$ soit le pôle de cette droite par rapport à T ; on aura alors, pour S , $h^2-ab=0$ et pour T , $g'=0, f'=0$; et l'invariant Θ se réduira à

$$(bc-f^2)a' + (ca-g^2)b' + 2(fg-ch)h'$$

S'il est nul, les tangentes issues du point $(x=0, y=0)$ aux deux courbes formeront un faisceau harmonique; car l'équation du système des deux tangentes, qui est pour la courbe S

$$(ca-g^2)x^2 + 2(ch-fg)xy + (bc-f^2)y^2 = 0,$$

se réduit pour la courbe T à

$$a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$$

et la condition pour que ces quatre droites forment un faisceau harmonique, est précisément (1)

$$(bc-f^2)a' + (ca-g^2)b' - 2(ch-fg)h' = \Theta = 0 \quad (1)$$

Ainsi, il existe entre les deux courbes une certaine réciprocity, qui permet de dire qu'elles se partagent harmoniquement. La propriété relative aux fonctions de deux variables se trouve généralisée, et l'on peut observer que cette propriété, qui est indépendante du choix des axes, devait évidemment s'exprimer par une relation entre les invariants $\Delta, \Theta, \Delta', \Theta'$; on ne pouvait la prévoir aussi simple: elle répond à la simplicité du fait géométrique, qui n'est autre qu'une division harmonique. Cependant, après avoir adopté cette traduction dans le langage ordinaire d'une propriété géométrique, il faudra encore ajouter dans quel sens a lieu cette division harmonique. Elle peut en effet avoir lieu de deux façons, soit que Θ soit nul, soit que Θ' soit nul. C'est pourquoi nous continuerons à dire avec M. Smith (***) que, dans le premier

(*) *Systèmes linéaires de coniques*, p. 59. — D'après M. Cremona (*Curve piane*, p. 89), il faudrait attribuer ce théorème à M. Hesse (*Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*), Leipzig, 1861.

(**) Cette démonstration du théorème de réciprocity peut être remplacée par la suivante. Il résulte évidemment de la symétrie que si c'était Θ' qui fût nul, ce serait la conique S qui serait circonscrite à une infinité de triangles conjugués de T . Mais le calcul qui le démontrerait, interprété en coordonnées tangentielles, démontrerait en même temps que lorsque le Θ' tangenciel est nul, la conique S est inscrite dans des triangles conjugués de T . Or, pour avoir le Θ' tangenciel, il faut prendre les équations tangentielles $\Sigma=0, \tau=0$ de S et de T , et former le coefficient de μ^2 dans $\Sigma + \mu\tau$, lequel est précisément égal à $\Delta'\Theta$, comme il est facile de le vérifier. Si donc l'invariant Θ est nul, le Θ' tangenciel l'est aussi, et l'on peut circonscrire à S des triangles conjugués de T .

(***) *Proceedings of the London mathematical Society*, n° 41, p. 85.

cas, la conique T est *harmoniquement circonscrite* à la conique S, et la seconde *harmoniquement inscrite* à la première : ces expressions se comprennent d'elles-mêmes. Dans le second cas, c'est l'inverse qui a lieu.

5. — Le caractère le plus remarquable de la relation $\Theta=0$, c'est qu'elle est du premier degré par rapport aux coefficients de la conique T. Quant à ceux de la conique S, elle les renferme au second degré ; mais il résulte de la réciprocité même que nous venons de démontrer que si elle est du premier degré par rapport aux coefficients de T, elle doit l'être aussi par rapport aux coefficients tangentiels de S, puisque S jouit, par rapport à T, de la propriété corrélatrice de celle dont T jouit par rapport à S. Analytiquement, cela est évident, car les multiplicateurs des coefficients de T dans l'invariant Θ sont précisément les coefficients tangentiels de S. On sait en effet que l'équation tangentielle de conique S s'obtient en égalant à zéro le contrevariant

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a & h & g & \alpha \\ h & b & f & \beta \\ g & f & c & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}$$

Telle est la condition pour que la droite $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ soit tangente à la courbe proposée. Cette condition développée peut s'écrire

$$(bc - f^2) x^2 + (ca - g^2) \beta^2 + (ab - h^2) \gamma^2 + 2(gh - af) \beta\gamma + 2(hf - bg) \gamma\alpha + 2(fg - ch) \alpha\beta = 0,$$

ou en posant, suivant une notation souvent employée

$$bc - f^2 = A \quad ca - g^2 = B \quad ab - h^2 = C \quad gh - af = F \quad hf - bg = G \quad fh - ch = H$$

$$Ax^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2F\beta\gamma + 2G\gamma\alpha + 2H\alpha\beta = 0,$$

et l'on voit qu'alors la relation $\Theta = 0$, devient

$$Aa' + Bb' + Cc' + 2Ff' + 2Gg' + 2Hh' = 0 \quad (i)$$

Elle est aussi bien du premier degré par rapport aux coefficients tangentiels de S que par rapport aux coefficients ponctuels de T. L'importance de cette remarque ne doit pas échapper : une équation tangentielle de la forme précédente représente en effet une seule et unique courbe ; si donc, pour déterminer la conique T, on donne une relation

(*) On en conclut

$\Theta' = A'a + B'b + C'c + 2F'f + 2G'g + 2H'h = (b'c' - f'^2) a + (c'a' - g'^2) b + \dots$
Le Θ' tangentielle est donc égal à

$(B'c' - F'^2) A + (C'a' - G'^2) B + \dots$

Or, $B'c' - F'^2 = (c'a' - g'^2)(a'b' - h'^2) - (g'h' - a'f')^2 = a'\Delta'$, de même $C'a' - G'^2 = b'\Delta'$, etc.

Cette valeur devient donc $\Delta'(Aa' + Bb' + Cc' + 2Ff' + 2Gg' + 2Hh')$, ou $\Delta'\Theta$, comme on l'a avancé dans la note précédente.

linéaire, et qu'on peut toujours supposer homogène, entre les coefficients inconnus de son équation, on pourra toujours interpréter cette condition géométriquement en disant que la courbe est assujettie à être harmoniquement circonscrite à une certaine conique S dont on pourra écrire de suite l'équation tangentielle. Corrélativement, toute relation linéaire, homogène, entre les coefficients tangentiels d'une conique, exprime qu'elle est harmoniquement inscrite à une certaine conique dont on peut écrire immédiatement l'équation ponctuelle. On peut donc énoncer les théorèmes suivants :

La relation linéaire la plus générale entre les coefficients ponctuels d'une conique exprime qu'elle est harmoniquement circonscrite à une autre conique.

La relation linéaire la plus générale entre les coefficients tangentiels d'une conique, exprime qu'elle est harmoniquement inscrite à une autre conique.

6. — De là dérive la notion des systèmes linéaires de coniques. Si l'on suppose en effet qu'une conique soit assujettie à n ($n < 5$) relations linéaires, ponctuelles, cela signifiera qu'elle est harmoniquement circonscrite à n coniques données S_1, S_2, \dots et puisque $5 - n$, coefficients de son équation restent indéterminés, il est clair que si $T_1, T_2, \dots, T_{5-n+1}$ sont les premiers membres des équations de $5 - n + 1$ ou $6 - n$ courbes satisfaisant aux conditions données,

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_{6-n} T_{6-n} = 0,$$

sera l'équation générale des courbes du système. Elle représente en effet une courbe qui satisfait aux conditions linéaires données si T_1, T_2, \dots, T_{6-n} y satisfont, et elle renferme $5 - n$ paramètres arbitraires. C'est le système linéaire, ponctuel, d'ordre $5 - n$.

Corrélativement, si S_1, S_2, \dots, S_n sont les n coniques auxquelles toutes celles du système sont harmoniquement circonscrites, et que $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ soient les premiers membres de leurs équations tangentielles, il est clair que chacune d'elles est harmoniquement inscrite à toutes celles du système en vertu du théorème de réciprocité, et conséquemment puisque les relations sont linéaires en A, B, C, \dots toutes celles dont l'équation générale tangentielle est

$$p_1 \Sigma_1 + p_2 \Sigma_2 + \dots + p_n \Sigma_n = 0$$

C'est l'équation générale d'un système linéaire tangentiel d'ordre $n - 1$, d'après la définition même du système linéaire ponctuel. De là résultent les théorèmes généraux qui suivent.

A un système linéaire ponctuel, d'ordre p , c'est-à-dire à l'ensemble de toutes les coniques harmoniquement circonscrites à $5 - p$ coniques don-

nées, correspond un système linéaire tangentiel d'ordre $4 - p$, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les coniques harmoniquement inscrites à $p + 1$ coniques données.

Toutes les coniques du système ponctuel sont harmoniquement circonscrites à toutes celles du système tangentiel qui, de leur côté, sont toutes harmoniquement inscrites à chacune des premières.

Nous ne nous étendrons pas sur les conséquences ni sur les cas particuliers de ces théorèmes, qui ont été suffisamment développés ailleurs (*), notre but étant d'étudier au même point de vue les surfaces du second degré et leurs systèmes linéaires.

7. — Considérons maintenant une fonction homogène du second degré à quatre variables

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 \\ + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2pxv + 2qyv + 2rvv.$$

Comme les fonctions à deux ou à trois variables, elle admet un invariant unique, qui est son discriminant.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & n & m & p \\ n & b & l & q \\ m & l & c & r \\ p & q & r & d \end{vmatrix}$$

Si l'on considère simultanément cette fonction S et une deuxième fonction analogue

$$T = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'v^2 \\ + 2l'yz + 2m'zx + 2n'zy + 2p'xv + 2q'yv + 2r'zv,$$

elles possèdent, outre leurs discriminants respectifs, des invariants communs que l'on obtient (**), au moyen de la fonction $S + \lambda T$, en formant son discriminant

$$\begin{vmatrix} a + \lambda a' & n + \lambda n' & m + \lambda m' & p + \lambda p' \\ n + \lambda n' & b + \lambda b' & l + \lambda l' & q + \lambda q' \\ m + \lambda m' & l + \lambda l' & c + \lambda c' & r + \lambda r' \\ p + \lambda p' & q + \lambda q' & r + \lambda r' & d + \lambda d' \end{vmatrix}$$

le développant et cherchant les coefficients des différentes puissances de λ . Cette fonction, développée, devient

(*) *Systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques*, 1872. On y trouve la démonstration géométrique de ces deux théorèmes, lesquels doivent être attribués à M. Smith, professeur à l'université d'Oxford. (*Proceeding of the London mathematical Society*), n° 14, p. 83. Nous avons dû les rappeler ici en quelques mots, en les rattachant à des faits analytiques, afin de jeter plus de clarté sur les propriétés analogues des surfaces du second degré, qui seront traitées de la même façon dans ce mémoire et les suivants.

(**) Salmon, *Leçons d'algèbre supérieure*, traduction française, p. 222.

$$\Delta + \Theta\lambda + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda^3 + \Delta'\lambda^4,$$

Δ et Δ' étant respectivement les discriminants des fonctions S et T; Θ , Φ et Θ' , des invariants communs dont le troisième se déduit du premier par la permutation des lettres accentuées en lettres non accentuées. Θ' jouera par conséquent par rapport aux fonctions T et S le même rôle que Θ par rapport aux fonctions S et T. Cherchons la valeur de Θ : on a évidemment, en développant, la valeur suivante pour le coefficient de λ .

$$\Theta = \begin{vmatrix} a' & n & m & p \\ n' & b & l & q \\ m' & l & c & r \\ p' & q & r & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & n' & m & p \\ n & b' & l & q \\ m & l' & c & r \\ p & q' & r & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & n & m' & p \\ n & b & l' & q \\ m & l & c' & r \\ p & q & r' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & n & m & p' \\ n & b & l & q' \\ m & l & c & r' \\ p & q & r & d' \end{vmatrix}$$

ou, en ordonnant par rapport aux coefficients de T

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} b & l & q \\ l & c & r \\ q & r & d \end{vmatrix} a' + \begin{vmatrix} a & m & p \\ m & c & r \\ p & r & d \end{vmatrix} b' + \begin{vmatrix} a & n & p \\ n & b & q \\ p & q & d \end{vmatrix} c' \\ & + \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} d - 2 \begin{vmatrix} a & m & p \\ n & l & q \\ p & r & d \end{vmatrix} l' + 2 \begin{vmatrix} n & m & p \\ b & l & q \\ q & r & d \end{vmatrix} m' \\ & - 2 \begin{vmatrix} n & m & p \\ l & c & r \\ q & r & d \end{vmatrix} n' - 2 \begin{vmatrix} n & m & p \\ b & l & q \\ l & c & r \end{vmatrix} p' \\ & + 2 \begin{vmatrix} a & m & p \\ n & l & q \\ m & c & r \end{vmatrix} q' - 2 \begin{vmatrix} a & n & p \\ n & b & q \\ m & l & r \end{vmatrix} r' \end{aligned}$$

M. Salmon a fait voir (*) que, si les deux surfaces du second degré que l'on obtient en égalant à zéro les deux fonctions S et T sont telles que la seconde soit circonscrite à un tétraèdre conjugué de la première, c'est-à-dire à un tétraèdre tel qu'un sommet quelconque soit par rapport à S le pôle de la face opposée, l'invariant Θ s'annule. Pour faire voir la réciproque, choisissons un des sommets ($x = 0, y = 0, z = 0$), du tétraèdre de référence sur la surface T et pour face opposée ($v = 0$), le plan polaire de ce point par rapport à S : les équations de ces surfaces deviendront alors

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy = 0,$$

$$T = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2n'xy + 2p'xv + 2q'yv + 2r'zv = 0.$$

(*) *Geometry of three dimensions*, 1874, p. 136.

Si l'on fait $v = 0$ dans ces équations, on obtient les équations des deux cônes ayant pour sommet le point $(x = 0, y = 0, z = 0)$ et pour bases respectives les courbes d'intersection de chacune des surfaces avec la face du tétraèdre de référence $v = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} S_1 &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy. \\ T_1 &= a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2n'xy. \end{aligned}$$

D'ailleurs, à cause de $p = q = r = d' = 0$, Θ est devenu, en supprimant le facteur d qui n'est pas nul si l'on ne suppose pas que la surface S se réduise à un cône

$$\begin{aligned} (bc - l^2) a' + (ca - m^2) b' + (ab - n^2) c' \\ + 2(mn - al) l' + 2(nl - bm) m' + 2(lm - cn) n', \end{aligned}$$

c'est-à-dire précisément l'invariant commun aux deux fonctions à deux variables S_1 et T_1 (2). Si donc Θ est nul, c'est que les deux cônes S_1 et T_1 , ou bien leurs sections par le plan $v = 0$, se partagent harmoniquement, la seconde étant harmoniquement circonscrite à la première : si alors l'on considère un des triangles en nombre infini inscrits dans la seconde et conjugués à la première, il formera évidemment avec le sommet $(x = 0, y = 0, z = 0)$ du tétraèdre de référence un tétraèdre inscrit dans la surface T et conjugué à la surface S , puisqu'en outre le plan $v = 0$ est le plan polaire du sommet opposé par rapport à S .

Si nous avons pris pour sommet du tétraèdre de référence un autre point quelconque de la surface T , l'invariant Θ , d'après sa définition même, eût encore été nul dans ce nouveau système de coordonnées, et l'on aurait eu une autre infinité de tétraèdres ayant ce point pour sommet, inscrits dans T et conjugués à S ; d'où l'on conclut que

Quand on peut inscrire dans une surface du second degré T un tétraèdre conjugué à une autre surface du second degré S , on peut en inscrire une infinité d'autres ()*

ou encore :

les deux surfaces sont telles que le plan polaire par rapport à S d'un point quelconque de T les coupe suivant deux coniques qui se partagent harmoniquement, la section de la surface T étant harmoniquement circonscrite à l'autre,

et la condition analytique de ce mode de dépendance géométrique est

$$\Theta = 0.$$

8. — Nous allons montrer qu'il existe alors, comme dans le cas de deux coniques, une certaine réciprocité entre les deux surfaces qui

(*) Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*. Leipzig, 1869, p. 196.

permet de dire qu'elles se partagent harmoniquement. Elle résultera du théorème suivant :

Quand on peut inscrire dans une surface T un, et par suite, une infinité de tétraèdres conjugués à une surface S, on peut circonscrire à la seconde un, et par suite, une infinité de tétraèdres conjugués à la première (),*

ou encore

du pôle par rapport à T d'un plan tangent quelconque de S, les cônes circonscrits aux deux surfaces se partagent harmoniquement, celui de la surface S étant harmoniquement inscrit à celui de la surface T.

Il suffira de faire voir la dernière proposition, d'où résulte la première, car si les deux cônes circonscrits se partagent harmoniquement dans le sens indiqué, il y aura une infinité de trièdres ayant pour sommet leur sommet commun, circonscrits à S et conjugués par rapport à T : l'un d'eux, auquel on adjoindra le plan tangent de S, formera un tétraèdre circonscrit à S et conjugué à T. Supposons donc que le plan $v = 0$ soit tangent à S et que le point $(x = 0, y = 0, z = 0)$, soit le pôle de ce plan par rapport à T; on aura alors pour S la condition

$$\begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que sa courbe d'intersection avec le plan $v = 0$ se réduit à deux droites, et pour T; $p' = q' = r' = 0$. L'invariant Θ se réduira donc à

$$\begin{vmatrix} b & l & q \\ l & c & r \\ q & r & d \end{vmatrix} a' + \begin{vmatrix} a & m & p \\ m & c & r \\ p & r & d \end{vmatrix} b' + \begin{vmatrix} a & n & p \\ n & b & q \\ p & q & d \end{vmatrix} c' - 2 \begin{vmatrix} a & m & p \\ n & l & q \\ p & r & d \end{vmatrix} l' \\ + 2 \begin{vmatrix} n & m & p \\ b & l & q \\ q & r & d \end{vmatrix} m' - 2 \begin{vmatrix} n & m & p \\ l & c & r \\ q & r & d \end{vmatrix} n'$$

S'il est nul, le cône circonscrit du point $(x = 0, y = 0, z = 0)$ à la surface S est harmoniquement inscrit à celui qui est circonscrit à la surface T, ou, ce qui revient au même (4), le second est harmoniquement circonscrit au premier. En effet, l'équation du premier est, comme on sait,

$$(ad - p^2) x^2 + (bd - q^2) y^2 + (cd - r^2) z^2 \\ + 2(ld - qr) yz + 2(md - rp) zx + 2(nd - pq) xy = 0,$$

(*) Hesse, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*. Leipzig, 1869, p. 209.

et celle du second se réduit à

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2n'xy = 0.$$

L'invariant commun à ces deux cônes, linéaire en a', b', c', \dots , est de la forme

$$Aa' + Bb' + Cc' + 2Ll' + 2Mm' + 2Nn' = 0,$$

et il est facile de voir que les coefficients A, B, C, \dots , sont précisément ceux de Θ , au même facteur près, qui est d . On a, par exemple (2),

$$A = (bd - q^2)(cd - r^2) - (ld - qr)^2 = d \begin{vmatrix} b & l & q \\ l & c & r \\ q & r & d \end{vmatrix}$$

Si donc Θ est nul, les deux cônes se partagent harmoniquement dans le sens voulu et la proposition est démontrée.

Ainsi, la condition $\Theta = 0$ exprime que les deux surfaces se partagent harmoniquement : mais il faudra, comme dans le cas de deux coniques, ajouter que T est *harmoniquement circonscrite* à S , ou, ce qui revient au même, S harmoniquement inscrite à T . La propriété inverse serait exprimée par la relation $\Theta' = 0$.

9. — Ce théorème de réciprocity peut encore se démontrer par le calcul même qui a servi à prouver le théorème direct. Mais rappelons d'abord que l'équation tangentielle d'une surface du second degré S s'obtient en égalant à zéro le contrevariant Σ qui est l'évectant de Δ

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a & n & m & p & \alpha \\ n & b & l & q & \beta \\ m & l & c & r & \gamma \\ p & q & r & d & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix}$$

ce qui exprime que le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v = 0$ est tangent à la surface. L'équation $\Sigma = 0$ est homogène, du second degré en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et peut s'écrire

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 + 2L\beta\gamma + 2M\gamma\alpha + 2N\alpha\beta + 2P\alpha\delta + 2Q\beta\delta + 2R\gamma\delta = 0,$$

et A, B, C, \dots , sont précisément, comme il est facile de le voir en développant Σ , les coefficients de a', b', c', \dots , dans l'invariant Θ , pris avec leurs signes. On a, par exemple

$$L = - \begin{vmatrix} a & m & p \\ n & l & q \\ p & r & d \end{vmatrix}$$

Supposons maintenant que l'on ait formé de même l'équation tangentielle de la surface T,

$$\tau = A x^2 + B' \beta^2 + \dots = 0,$$

et cherchons le coefficient Θ'_1 de μ^3 , dans la fonction $\Sigma + \mu T$; il se déduira évidemment du coefficient Θ' de λ^3 , dans $S + \lambda T$, en y changeant les petites lettres en grandes lettres. Or, on a (7)

$$\Theta' = \begin{vmatrix} b' & l' & q' \\ l' & c' & r' \\ q' & r' & d' \end{vmatrix} a + \begin{vmatrix} a' & m' & p' \\ m' & e' & r' \\ p' & r' & d' \end{vmatrix} b + \dots$$

On aura donc

$$\Theta'_1 = \begin{vmatrix} B' & L' & Q' \\ L' & C' & R' \\ Q' & R' & D' \end{vmatrix} A + \begin{vmatrix} A' & M' & P' \\ M' & C' & R' \\ P' & R' & D' \end{vmatrix} B + \dots$$

Mais les coefficients respectifs de A, B, ..., dans Θ' , sont des déterminants dont les éléments sont les mineurs des éléments correspondants du discriminant Δ' ; ce sont des mineurs du premier ordre du déterminant réciproque de Δ' , ils sont donc égaux respectivement (*) à l'élément complémentaire de Δ' , multiplié par Δ'^2 , généralement par Δ'^{n-2} , n étant le nombre des colonnes de Δ' . On a donc :

$$\Theta'_1 = \Delta'^2 [Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + 2Ll' + 2Mm' + 2Nn' + 2Pp' + 2Qq' + 2Rr']$$

ou précisément

$$\Theta'_1 = \Delta'^2 \Theta.$$

Ainsi, lorsque Θ sera nul, Θ'_1 sera nul. Cela posé, il résulte de la démonstration directe que si T est harmoniquement circonscrite à S lorsque Θ est nul, par symétrie S sera harmoniquement circonscrite à T lorsque Θ' sera nul. Mais le calcul d'où cela résulterait, interprété en coordonnées tangentielles, démontrerait que lorsque Θ'_1 est nul, la surface S est harmoniquement inscrite à la surface T. Or, Θ'_1 est nul en même temps que Θ : donc lorsque Θ est nul, S est harmoniquement inscrite à T.

10. — Le tétraèdre n'est pas le seul système de points ou plans que l'on puisse considérer comme conjugué à une surface du second degré. M. P. Serret a fait voir que toutes les fois que l'on peut mettre l'équation de la surface sous la forme

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 + \lambda_5 P_5^2 = 0$$

P_1, P_2, \dots étant les premiers membres des équations de cinq plans, le

(*) Salmon, *Leçons d'algèbre supérieure*, traduction française, p. 32.

pentaèdre dont ces plans sont les faces, est tel que la droite d'intersection de deux quelconques d'entre eux est dans le plan polaire du point commun aux trois autres; ou encore la polaire de cette droite passe par le point de rencontre des trois autres : le pentaèdre est alors dit *conjugué* à la surface. La définition corrélatrice du pentagone conjugué s'en déduit aisément; un côté quelconque passe par le pôle du plan opposé, ou bien sa polaire est dans le plan opposé (*). Nous allons chercher à construire un pareil système de points ou plans, et nous verrons que la condition $\Theta=0$ exprime encore soit que l'on peut inscrire dans T des pentagones conjugués à S , soit circonscrire à S des pentaèdres conjugués à T ; nous supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un pentaèdre.

Pour cela, donnons-nous trois faces $P_1 P_2 P_3$ du pentaèdre, absolument quelconques; le sommet $P_3 P_4 P_5$ doit être sur la polaire de l'arête $P_1 P_2$, il sera donc à l'intersection de cette polaire et du plan P_3 ; de même, les sommets $P_2 P_4 P_5$, $P_1 P_4 P_5$ seront respectivement à l'intersection des polaires des arêtes $P_1 P_3$ et $P_2 P_3$ avec les plans P_2 et P_1 ; d'autre part, ces trois sommets sont tous sur l'arête $P_4 P_5$. Donc, si dans le trièdre $P_1 P_2 P_3$ nous traçons la droite sur laquelle se trouvent, d'après un théorème connu, les points d'intersection respectifs de la polaire de chaque arête avec la face opposée, cette droite sera l'arête opposée au sommet $P_1 P_2 P_3$. Si par cette droite $P_4 P_5$ on mène un plan quelconque P_4 , ce plan combiné avec deux quelconques des trois premiers P_1 et P_2 déterminera comme précédemment l'arête $P_3 P_5$ du pentaèdre, laquelle sera dans le plan P_3 et rencontrera l'arête $P_1 P_3$ de façon à déterminer avec elle le plan P_5 . Si ces deux assertions sont justifiées, le pentaèdre sera construit. Représentons à cet effet le tétraèdre formé

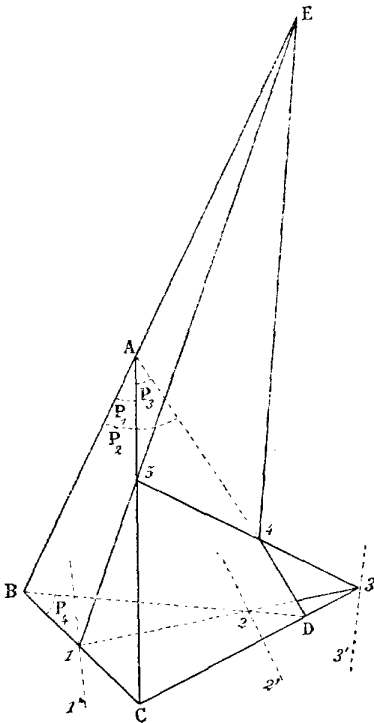


Fig. 71.

à cet effet le tétraèdre formé

(*) *Géométrie de direction*, p. 33.

par les plans P_1, P_2, P_3, P_4 : soit A le point commun aux trois premiers, et soit 1,2,3, l'arête $P_1 P_5$ passant par les sommets 1,2,3, déterminés plus haut. Le plan P_4 passant par cette arête, ses droites d'intersection avec les trois premiers plans passeront respectivement par ces trois points. Cherchons maintenant l'arête opposée au sommet B($P_1 P_2 P_4$): pour cela, traçons les polaires 11', 22', 33' des arêtes qui se coupent en A; afin de déterminer cette arête, nous prendrons d'abord la polaire 33' de l'arête BA du trièdre B, et nous chercherons son intersection avec le plan opposé P_4 du même trièdre, qui est évidemment le point 3; l'on voit donc déjà que l'arête cherchée rencontre la première au point 3. Ensuite, nous chercherons l'intersection de la polaire de l'arête BC ($P_1 P_4$) avec le plan opposé P_2 du trièdre B: or, cette arête rencontre au point 1 la polaire 11' de l'arête AD, donc sa polaire et l'arête AD seront dans un même plan, plan polaire du point 1, et se rencontreront en un certain point 4, qui sera par conséquent l'intersection de cette polaire et du plan P_2 ; de même, l'intersection de la polaire de l'arête BD ($P_2 P_4$) avec le plan P_1 sera un certain point 5 de l'arête AC, les points 3,4,5 seront en ligne droite pour les mêmes raisons que les points 1,2,3, et l'on voit qu'ils sont tous les trois dans le plan P_3 : le plan P_5 sera donc le plan des arêtes 1,2,3 et 3,4,5.

11. — Dans le cours de cette construction, nous avons disposé de dix indéterminées, savoir neuf pour les trois faces P_1, P_2, P_3 choisies arbitrairement, et une pour la face P_4 passant par la droite déterminée 1,2,3. Un système de cinq plans dépend d'ailleurs, en général, de quinze paramètres arbitraires; il en résulte que s'il doit être conjugué à une surface du second degré, il est assujéti à cinq conditions. Il semblerait résulter de là qu'on peut en outre l'assujétiir à être circonscrit à une deuxième surface, puisqu'il reste plus d'indéterminées qu'il n'en faut pour remplir ces conditions. Il n'en est rien, et nous allons montrer que si la première est la surface T, et la seconde la surface S, il faut pour cela que la condition $\Theta = 0$ soit satisfaite, ce qui prouvera en outre que si, dans la construction du pentaèdre conjugué à T on a choisi les plans P_1, P_2, P_3, P_4 tangents à S, ce qui est toujours possible d'après cette construction, la face P_5 qui en résulte sera nécessairement tangente à S, si Θ est nul. Il suffira pour cela de faire voir que lorsque le pentaèdre conjugué à T et circonscrit à S existe, Θ est nul, car alors si Θ n'est pas nul, le pentaèdre ne pourra pas exister.

Prenons donc quatre faces du pentaèdre pour tétraèdre de référence et soit

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v = 0,$$

l'équation de la cinquième. Puisque S est tangente aux cinq faces, on aura pour les quatre premières

$$A = \begin{vmatrix} b & l & q \\ l & c & r \\ q & r & d \end{vmatrix} = 0 \quad B = \begin{vmatrix} a & m & p \\ m & c & r \\ p & r & d \end{vmatrix} = 0 \quad C = \begin{vmatrix} a & n & p \\ n & b & q \\ p & q & d \end{vmatrix} = 0 \quad D = \begin{vmatrix} a & n & m \\ n & b & l \\ m & l & c \end{vmatrix} = 0$$

et pour la quatrième, la condition générale (9)

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & \alpha \\ n & b & l & q & \beta \\ m & l & c & r & \gamma \\ p & q & r & d & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 + 2L\beta\gamma + 2M\gamma\alpha \\ + 2N\alpha\beta + 2P\alpha\delta + 2Q\beta\delta + 2R\gamma\delta = 0$$

dont les quatre premiers termes disparaissent en vertu des quatre premières conditions.

Quant à T, son équation devra (10) être de la forme

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \lambda_4 v^2 + \lambda_5 P^2 = 0$$

et en identifiant seulement dans cette équation et l'équation (7) de T les termes qui renferment les rectangles des variables, on a

$$\frac{l}{\beta\gamma} = \frac{m}{\gamma\alpha} = \frac{n}{\alpha\beta} = \frac{p}{x\delta} = \frac{q}{\beta\delta} = \frac{r}{\gamma\delta}$$

Si alors dans la condition

$$L\beta\gamma + M\gamma\alpha + N\alpha\beta + Px\delta + Q\beta\delta + R\gamma\delta = 0$$

on remplace les dénominateurs des rapports précédents par les numérateurs qui leur sont proportionnels, il vient

$$Ll + Mm + Nn + Pp + Qq + Rr = 0$$

ce qui n'est autre chose que

$$\Theta = 0$$

à cause de

$$A = B = C = D = 0$$

La condition $\Theta = 0$ est donc nécessaire pour qu'on puisse circonscrire à S un pentaèdre conjugué de T. Elle est suffisante, car si Θ est nul, on pourra circonscrire à S des tétraèdres conjugués de T, et un plan quelconque tangent à S, adjoint à l'un d'eux, formera un pentaèdre circonscrit à S et conjugué à T. On voit en même temps

que si un de ces pentaèdres existe, il y en aura une infinité. Ainsi :

Si l'on peut circonscrire à une surface du second degré S un pentaèdre conjugué d'une autre surface T, on peut en circonscrire une infinité, et la condition nécessaire et suffisante pour que cela soit possible est que l'invariant commun Θ soit nul, ou que la surface T soit harmoniquement inscrite à la surface S.

12. — La construction du pentagone conjugué à une surface du second degré se déduirait facilement, par voie de dualité, de celle du pentaèdre.

Le calcul précédent, dans lequel on changerait les lettres accentuées en lettres non accentuées, et réciproquement, démontrerait que $\Theta = 0$ est la condition pour qu'on puisse circonscrire à T des pentaèdres conjugués de S. Ce dernier calcul, interprété en coordonnées tangentielles, prouverait que si le Θ' tangentiel (9) est nul, on peut inscrire dans la surface T des pentagones conjugués de S. Mais le Θ' tangentiel est égal à $\Delta^2 \Theta$: si donc Θ est nul, il est aussi nul, et par suite lorsqu'on peut circonscrire à S des pentaèdres conjugués de T, on peut inscrire dans T des pentagones conjugués de S.

13. — On peut enfin considérer comme conjugué à une surface du second degré un système de six points, hexagone, ou système de six plans, hexaèdre (*). Dans le premier cas, le plan de trois quelconques des points renferme le pôle du plan des trois autres; dans le second, le point commun à trois quelconques des plans est situé dans le plan polaire du point commun aux trois autres. On peut aisément en trouver une construction géométrique : nous indiquerons celle de l'hexaèdre conjugué, qui est analogue à celle du pentaèdre. On choisira arbitrairement quatre plans quelconques; le lieu de l'intersection des deux autres sera alors un hyperboloïde à une nappe, défini par les quatre droites d'intersection de chaque face de ce tétraèdre avec le plan polaire du sommet opposé; une génératrice quelconque de cet hyperboloïde; de système contraire à ces quatre droites, sera l'intersection des deux autres. Par cette droite on fera passer un cinquième plan qui déterminera le sixième; cet hexaèdre est assujéti à quatre conditions. Néanmoins, on ne peut pas en général faire en sorte qu'il soit circonscrit à une deuxième surface du second degré, et l'on verrait aisément par un calcul analogue à celui du pentaèdre, que si la première est la surface T et la seconde la surface S, il faut encore pour cela que l'invariant Θ soit nul, et qu'enfin dans les mêmes circonstances, on peut inscrire dans T des hexagones conjugués à S.

(*) P. Serret, *ibid.*, p. 16.

14. — Nous résumerons tout ce qui précède dans les énoncés suivants :

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface T soit harmoniquement circonscrite à la surface S, et par suite S harmoniquement inscrite à T, est que l'invariant commun Θ soit nul.

Lorsqu'une surface est harmoniquement circonscrite à une autre, on peut inscrire dans cette surface une infinité de tétragones, pentagones ou hexagones conjugués à la seconde.

Lorsqu'une surface est harmoniquement inscrite à une autre, on peut lui circonscrire une infinité de tétraèdres, pentaèdres ou hexaèdres conjugués à la seconde.

15. — Nous avons rappelé (9) que la relation $\Theta = 0$ peut s'écrire

$$Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + 2Ll' + 2Mm' \\ + 2Nn' + 2Pp' + 2Qq' + 2Rr' = 0.$$

Elle est conséquemment du premier degré par rapport aux coefficients de T, aussi bien que par rapport aux coefficients tangentiels (9) de S. Une équation tangentielle représentant une seule et unique surface, il en résulte que, réciproquement, toute relation du premier degré entre les coefficients d'une surface T exprimera qu'elle est harmoniquement circonscrite à une deuxième surface S, dont on pourra immédiatement écrire l'équation tangentielle. Corrélativement, toute relation linéaire entre les coefficients tangentiels d'une surface exprime qu'elle est harmoniquement inscrite à une autre surface, dont on peut écrire de suite l'équation ponctuelle. Ainsi :

La relation linéaire la plus générale entre les coefficients ponctuels d'une surface du second degré exprime qu'elle est harmoniquement circonscrite à une autre surface du second degré.

La relation linéaire la plus générale entre les coefficients tangentiels d'une surface du second degré exprime qu'elle est harmoniquement inscrite à une autre surface du second degré.

On en déduit la notion des systèmes linéaires de surfaces du second degré. Si en effet une pareille surface est assujettie à n ($n < 9$) relations, il en résultera qu'elle est harmoniquement circonscrite à n autres surfaces S_1, S_2, \dots et puisque $9 - n$ coefficients de son équation restent indéterminés, il est clair que si $T_1, T_2, \dots, T_{10-n}$ sont les premiers membres des équations de $10 - n$ surfaces satisfaisant aux conditions données,

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_{10-n} T_{10-n} = 0$$

sera l'équation générale des surfaces du système. Elle représente en effet une surface qui satisfait aux conditions linéaires données si

$T_1, T_2, \dots, T_{10-n}$ y satisfont, et elle renferme $9 - n$ paramètres arbitraires. C'est le système linéaire, ponctuel, d'ordre $9 - n$.

Corrélativement, si S_1, S_2, \dots, S_n sont les n surfaces auxquelles toutes celles du système sont harmoniquement circonscrites, et que $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ soient les premiers membres de leurs équations tangentielles, chacune d'elles, en vertu du théorème de réciprocité, est harmoniquement inscrite à toutes celles du système, et par suite toutes celles dont l'équation générale tangentielle est

$$\mu_1 \Sigma_1 + \mu_2 \Sigma_2 + \dots + \mu_n \Sigma_n = 0.$$

C'est l'équation générale du système linéaire, tangentiel, d'ordre $n - 1$, d'après la définition même du système linéaire ponctuel. De là résultent les théorèmes suivants :

A un système linéaire ponctuel, d'ordre p , c'est-à-dire à l'ensemble des surfaces harmoniquement circonscrites à $9 - p$, surfaces données, correspond un système linéaire tangentiel d'ordre $8 - p$, c'est-à-dire l'ensemble des surfaces harmoniquement inscrites à $p + 1$, surfaces données.

Toutes les surfaces du système ponctuel sont harmoniquement circonscrites à toutes celles du système tangentiel qui, de leur côté, sont toutes harmoniquement inscrites à chacune des premières ().*

Nous aurons ultérieurement à étudier tous les cas possibles depuis $p = 1$ jusqu'à $p = 8$; les quatre derniers se déduiront des quatre autres par voie de dualité.

Actuellement, nous nous bornerons à examiner les cas particuliers les plus intéressants de la condition $\Theta = 0$.

16. — Si la surface T se réduit à deux plans

$$P_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 v = 0$$

$$P_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 v = 0$$

son équation deviendra

$$T = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 v) (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 v) = 0$$

et l'invariant Θ sera de la forme

$$\begin{aligned} & A\alpha_1\alpha_2 + B\beta_1\beta_2 + C\gamma_1\gamma_2 + D\delta_1\delta_2 + L(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2) + M(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2) \\ & + N(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) + P(\alpha_1\delta_2 + \delta_1\alpha_2) + Q(\beta_1\delta_2 + \delta_1\beta_2) + R(\gamma_1\delta_2 + \delta_1\gamma_2) \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire sous forme de déterminant

(*) Ces deux théorèmes fondamentaux sont la base de la théorie des systèmes linéaires de surfaces du second degré. A qui les attribuer? M. Smith doit en avoir sa part comme ayant énoncé le premier les théorèmes plans analogues, qui les contiennent évidemment. Nous réclamerions volontiers la nôtre comme ayant énoncé les mêmes théorèmes, sans avoir connaissance des travaux de M. Smith, dans un ouvrage paru en 1872, mais qui s'est trouvé dès 1869 entre les mains de M. Mannheim. Enfin, M. Darboux a donné le premier les énoncés relatifs aux surfaces (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 1, 1870) en y joignant une série d'importants théorèmes sur lesquels nous reviendrons.

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & x_1 \\ n & b & l & q & \beta_1 \\ m & l & c & r & \gamma_1 \\ p & q & r & d & \delta_1 \\ x_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

eu égard aux valeurs de A, B, C, \dots (9)

Il en résulte que si l'invariant Θ est nul, la condition que l'on écrit n'est autre que celle qui doit être remplie pour que les deux plans P_1, P_2 soient conjugués par rapport à S . Ainsi :

Un système de deux plans conjugués par rapport à une surface du second degré peut être considéré comme une surface harmoniquement circonscrite à celle-ci.

Comme cas particulier, les deux plans peuvent se confondre, la condition devient

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & x_1 \\ n & b & l & q & \beta_1 \\ m & l & c & r & \gamma_1 \\ p & q & r & d & \delta_1 \\ x_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire que le plan unique est tangent à S .

Un plan tangent d'une surface du second degré peut être considéré comme un cas particulier d'une surface qui lui est harmoniquement circonscrite.

Telle est la raison pour laquelle donner un plan tangent d'une surface, c'est assujettir ses coefficients tangentiels à une relation linéaire.

17. — Si la surface S se réduit à deux points, l'équation tangentielle du premier (x_1, y_1, z_1, v_1) sera

$$x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma + v_1\delta = 0,$$

puisqu'elle exprime que le plan dont l'équation est

$$x\alpha + \beta y + \gamma z + \delta v = 0$$

le renferme. De même, l'équation tangentielle du second (x_2, y_2, z_2, v_2) sera

$$x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma + v_2\delta = 0,$$

l'équation tangentielle de la surface S sera

$$\Sigma = (x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma + v_1\delta) (x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma + v_2\delta) = 0$$

et l'invariant Θ deviendra (9)

$x_1 x_2 a' + y_1 y_2 b' + z_1 z_2 c' + v_1 v_2 d' + (y_1 z_2 + z_1 y_2) l' + (z_1 x_2 + x_1 z_2) m' + (x_1 y_2 + y_1 x_2) n' + (x_1 v_2 + v_1 x_2) p' + (y_1 v_2 + v_1 y_2) q' + (z_1 v_2 + v_1 z_2) r'$
c'est-à-dire

$$x_1 (a' x_2 + n' y_2 + m' z_2 + p' v_2) + y_1 (n' x_2 + b' y_2 + l' z_2 + q' v_2) + z_1 (m' x_2 + l' y_2 + c' z_2 + r' v_2) + v_1 (p' x_2 + q' y_2 + r' z_2 + d' v_2)$$

ou

$$x_1 \frac{dT}{dx_2} + y_1 \frac{dT}{dy_2} + z_1 \frac{dT}{dz_2} + v_1 \frac{dT}{dv_2}$$

S'il est nul, c'est précisément la condition qui doit être remplie pour que les deux points soient conjugués par rapport à T. Ainsi

Un système de deux points conjugués par rapport à une surface du second degré peut être considéré comme une surface harmoniquement inscrite à celle-ci.

Si les deux points se confondent, la condition devient

$$x_1 \frac{dT}{dx_1} + y_1 \frac{dT}{dy_1} + z_1 \frac{dT}{dz_1} + v_1 \frac{dT}{dv_1} = 0,$$

ou, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$T_1 = f(x_1, y_1, z_1, v_1) = 0$$

c'est-à-dire que le point est sur la surface.

Un point d'une surface du second degré peut être considéré comme une surface qui lui est harmoniquement inscrite.

C'est la première condition linéaire que l'on étudie lorsqu'il s'agit de déterminer une surface, et l'on voit comment elle se déduit de la condition qui donne, entre les coefficients de la surface, la relation linéaire la plus générale.

18. — Si la surface T se réduit à un cône, dont nous supposons pour plus de simplicité que le sommet est le point ($x=0, y=0, z=0$), son équation devient

$$T = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2n'xy = 0$$

et l'invariant Θ se réduit à

$$Aa' + Bb' + Cc' + 2Ll' + 2Mm' + 2Nn'$$

S'il est nul, cela exprime précisément que le cône T et le cône de même sommet circonscrit à S se partagent harmoniquement, le premier étant harmoniquement circonscrit au second. En effet, l'équation du second est

$$(ad - p^2)x^2 + (bd - q^2)y^2 + (cd - r^2)z^2 + 2(ld - qr)yz + 2(md - rp)zx + 2(nd - pq)xy = 0,$$

L'invariant commun à cette fonction à trois variables et à la fonction T, linéaire par rapport à T, n'est autre (2) que

$$[(bd-q^2)(cd-r^2)-(ld-qr)^2]a' + [(cd-r^2)(ad-p^2)-(md-rp)^2]b' + \dots$$

ou précisément

$$d[Aa' + Bb' + Cc' + 2Ll' + 2Mm' + 2Nn']$$

car

$$(bd-q^2)(cd-r^2)-(ld-qr)^2 = d(bcd + 2lqr - br^2 - cq^2 - dl^2) = d\Lambda$$

de même pour B, C, L, M, N.

Si donc Θ est nul, l'invariant commun aux deux cônes l'est aussi. Donc,

Si un cône du second degré est harmoniquement circonscrit à une surface du second degré, cela revient à dire qu'il est harmoniquement circonscrit au cône du même sommet, circonscrit à la surface.

19. — Si la surface S se réduit à une conique, située, par exemple, dans le plan $v = 0$, son équation tangentielle se réduit à

$$\Sigma = Ax^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2L\beta\gamma + 2M\gamma z + 2N\alpha\beta = 0,$$

laquelle exprime que l'intersection avec le plan $v = 0$ du plan

$$xx + \beta y + \gamma z + \delta v = 0$$

enveloppe une conique. L'invariant Θ se réduit dès lors à

$$Aa' + Bb' + Cc' + 2Ll' + 2Mm' + 2Nn'$$

et s'il est nul, cela signifie précisément que la conique est harmoniquement inscrite à la courbe

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2n'xy = 0,$$

suivant laquelle la surface T coupe le plan de la conique S. Donc

Si une surface du second degré harmoniquement inscrite à une autre se réduit à une conique, cela veut dire que cette conique est harmoniquement inscrite à la courbe d'intersection de son plan avec l'autre surface.

20. — Nous supposerons maintenant qu'une des surfaces est une sphère. Pour cela, nous emploierons les coordonnées cartésiennes auxquelles s'appliquent évidemment les théorèmes démontrés, lesquels ne font aucune hypothèse sur la situation du plan $v = 0$ et n'empêchent pas de le supposer à l'infini. Il suffira donc de faire dans les formules $v = 1$. Si la surface S est une sphère, on aura, dans ce système de coordonnées,

$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - \rho^2 = 0$$

pour l'équation de cette surface, α , β , γ étant les coordonnées du centre et ρ le rayon. Il est facile de calculer (9) les coefficients tangentiels de S, qui deviennent alors

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 - \rho^2 & B &= \beta^2 - \rho^2 & C &= \gamma^2 - \rho^2 & D &= 1 & L &= \beta\gamma & M &= \gamma\alpha & N &= \alpha\beta \\ P &= \alpha & Q &= \beta & R &= \gamma. \end{aligned}$$

La condition $\Theta = 0$ s'écrira

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - \rho^2) a' + (\beta^2 - \rho^2) b' + (\gamma^2 - \rho^2) c' \\ + d' + 2l'\beta\gamma + 2m'\gamma\alpha + 2n'\alpha\beta + 2p'\alpha + 2q'\beta + 2r'\gamma = 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{a'\alpha^2 + b'\beta^2 + c'\gamma^2 + d' + 2l'\beta\gamma + 2m'\gamma\alpha + 2n'\alpha\beta + 2p'\alpha + 2q'\beta + 2r'\gamma}{a' + b' + c'} \\ &= \frac{T(\alpha, \beta, \gamma)}{a' + b' + c'}. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on se donne un point (α, β, γ) et que, de ce point, comme centre, on décrive une sphère réelle ou imaginaire, dont le carré du rayon soit égal au résultat de la substitution des coordonnées du point dans le premier membre de l'équation de la surface, divisé par la somme des coefficients des carrés des variables, cette sphère sera harmoniquement inscrite à la surface, laquelle sera conséquemment circonscrite à des tétraèdres, pentagones ou hexagones conjugués à la sphère. Ce rayon s'annule pour les points de la surface T et, par suite, il est réel pour les points qui sont d'un côté de la surface, imaginaire pour les autres. Nous lui donnerons le nom de *puissance orthoptique du point par rapport à la surface*, sauf à justifier plus tard cette dénomination.

21. — Ceci nous amène à rechercher s'il existe une ou plusieurs sphères conjuguées à un tétraèdre, ou à un pentagone ou hexagone gauche. *A priori*, il résulte de la formule même

$$\sum_i \lambda_i P_i^2 = 0$$

sous laquelle M. P. Serret met l'équation tangentielle d'une surface du second degré conjuguée au polygone de n sommets, que si le polygone a quatre sommets, l'équation ne renfermera plus que trois paramètres arbitraires, lesquels ne satisferont pas, en général, aux cinq conditions qui exprimeront que la surface est une sphère. Le tétraèdre donné devra donc, en général, satisfaire à deux conditions. Géométriquement, il est clair que chaque sommet étant, par rapport à la sphère, le pôle de la face opposée, chaque hauteur du tétraèdre devra passer par le centre de la sphère; de plus, le produit des segments comptés sur chaque

hauteur à partir du centre de la sphère jusqu'au sommet d'une part et jusqu'à la face opposée de l'autre devra être constant sur chaque hauteur et égal au carré du rayon de la sphère. Or, en général, les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont sur un même hyperboloïde et ne se rencontrent pas. Il faudra donc, pour qu'un tétraèdre admette une sphère conjuguée, que les quatre hauteurs se coupent en un même point. Ce point sera le centre de la sphère, et son rayon sera le produit indiqué tout à l'heure, et qui se trouve constant, comme on peut le démontrer.

De même, un pentagone gauche devra satisfaire à une condition analytique pour admettre une sphère conjuguée. Géométriquement, les plans menés par chaque arête perpendiculairement au plan opposé se couperont en un même point qui sera le centre de la sphère. Le carré du rayon sera égal au produit constant des segments comptés à partir de ce point sur les perpendiculaires menées sur chaque plan de trois sommets, jusqu'à ce plan, d'une part, et jusqu'à l'arête opposée, de l'autre. Il en résulte le théorème suivant :

Lorsque, dans un pentagone gauche, quatre des dix plans menés par chaque arête perpendiculairement au plan opposé passent par un même point, les six autres s'y coupent également, puisqu'une condition suffit pour que le pentagone ait une sphère conjuguée.

Quant à l'hexagone gauche, le problème sera possible en général, et nous verrons plus loin (26) qu'il admet deux solutions.

Ainsi se trouve définie la puissance orthoptique d'un point par rapport à une surface du second degré. C'est le rayon de la sphère conjuguée aux hexagones, pentagones ou tétragones gauches inscrits dans la surface et pour lesquels ce point est le centre d'une sphère conjuguée. Nous verrons qu'elle est susceptible d'autres définitions géométriques.

22. — Théorème. — *La puissance orthoptique d'un point par rapport à une sphère s'obtient en divisant par $\sqrt{3}$ la longueur de la tangente issue de ce point.*

Ceci est évident analytiquement, car si $T=0$ est le premier membre de l'équation de la sphère dans lequel les carrés des variables ont l'unité pour coefficient, T représente précisément le carré de la tangente issue du point considéré; or on a (20)

$$R^2 = \frac{T(\alpha_1\beta_1\gamma_1)}{a'+b'+c'}$$

d'où $R = \sqrt{\frac{T}{3}}$. La démonstration géométrique suivante nous en a été communiquée par M. E. Lemoine.

Lemme I. — Quand, dans un tétraèdre $ABCD$, les hauteurs se coupent au même point ω , les arêtes opposées sont perpendiculaires.

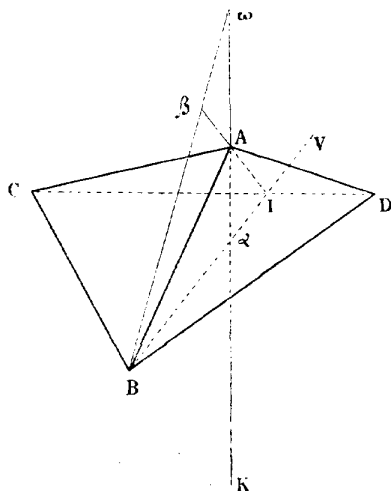


Fig. 72.

Soient en effet Ax , $B\beta$ deux hauteurs se coupant en ω ; le plan $AB\omega$ est perpendiculaire à la face ACD puisqu'il contient $B\beta$, et à la face BCD puisqu'il contient Ax : il est donc perpendiculaire à leur intersection CD ; par suite, CD est perpendiculaire à AB , qui est située dans ce plan.

Lemme II. — Dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, le pied z d'une hauteur est le point de concours des hauteurs du triangle BCD formé par la face sur laquelle tombe cette hauteur.

Soit I le point où le plan $AB\omega$ coupe CD , BzI sera la trace de ce plan sur BCD ; or BI est perpendiculaire sur CD comme étant située dans le plan $AB\omega$; il résulte de là qu'une quelconque des hauteurs du triangle BCD contient le point z . De plus, $B\beta\omega$ est perpendiculaire sur la face ACD comme hauteur, elle est située dans le plan $AB\omega$, qui est aussi perpendiculaire à ce plan ; elle est donc perpendiculaire à l'intersection $IA\beta$; ce qui fait voir qu'en outre le point ω est le point de concours des hauteurs du triangle ABI .

Cela posé, soit V le point où Bz coupe le cercle circonscrit à BCD ; on a, d'après un théorème de géométrie plane, $zV = 2.zI$; mais si K est le second point d'intersection de Ax avec la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, on a

$$zK \cdot zA = zB \cdot zV$$

par suite

$$zK \cdot zA = zB \cdot 2zI$$

d'où

$$zK = 2 \frac{zB \cdot zI}{zA}$$

De plus, les triangles rectangles semblables ωzB , AzI donnent

$$\frac{\omega z}{zB} = \frac{zI}{zA}$$

d'où

$$2. \omega z = 2 \frac{zB \cdot zI}{zA} = zK, \text{ ou } \omega K = 3\omega z.$$

Or, d'une part, $\omega A \cdot \omega K$ représente le carré de la tangente menée du point ω à la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. D'autre part, $\omega A \cdot \omega z$ représente le carré du rayon de la sphère conjuguée au tétraèdre (21). Le rapport de ces deux carrés est donc égal au rapport $\frac{\omega K}{\omega z}$, ou à 3 ; ce qui donne la relation cherchée

$$\frac{T}{R^2} = 3$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{T}{3}}.$$

Si le point ω se trouvait à l'intérieur du tétraèdre, les deux segments ωA , ωK seraient comptés en sens inverse et le rayon de la sphère conjuguée serait imaginaire. La propriété $\omega K = 3\omega z$, analogue à celle du triangle inscrit dans un cercle, n'en subsiste pas moins.

23. Théorème. — *La puissance orthoptique d'un point par rapport à un hyperboloïde est égale à la puissance du même point (*) par rapport aux sections planes de la surface par des plans menés par ce point perpendiculairement aux génératrices du cône asymptote.*

Car si ABC est un des triangles inscrits dans la section plane considérée et ayant le point donné pour point de concours de hauteurs, si D est le point à l'infini sur la génératrice G du cône asymptote perpendiculaire à ce plan, le tétraèdre $ABCD$ est inscrit dans la surface, et ses hauteurs concourent au point donné.

En particulier, dans ce plan, la puissance du point par rapport à la conique d'intersection peut se mesurer, sur la perpendiculaire abaissée du point sur une asymptote H de la courbe, par le produit des segments comptés à partir du point jusqu'aux points d'intersection de la perpendiculaire avec la courbe (**). Or cette droite est aussi perpendiculaire sur la génératrice G du cône asymptote, puisqu'elle est située dans le plan sécant ; d'ailleurs l'asymptote H , située aussi dans ce plan sécant, est parallèle à une autre génératrice du cône asymptote

(*) *Systèmes linéaires de coniques*, p. 64. — La puissance orthoptique d'un point par rapport à une conique est le rayon du cercle conjugué commun à tous les triangles inscrits dans la courbe et dont les hauteurs concourent en ce point.

(**) *Ibid.*, p. 66.

perpendiculaire à la première : on peut donc dire que l'on peut mesurer la puissance du point sur toute droite perpendiculaire à un des plans qui coupent le cône asymptote suivant des génératrices rectangulaires.

Donc

La puissance orthoptique d'un point par rapport à un hyperboloïde est égale à la racine carrée du produit des segments comptés à partir du point sur une perpendiculaire à un plan quelconque coupant le cône asymptote suivant deux droites rectangulaires, jusqu'aux points d'intersection de la droite avec la surface.

24. — Cette droite, perpendiculaire à un plan qui coupe le cône asymptote suivant deux droites rectangulaires, engendre un certain cône qui demeure le même et ne fait que se transporter parallèlement à lui-même, lorsque le point donné varie dans l'espace. Il est facile de trouver l'équation du cône parallèle mené par le centre, supposé à l'origine ; si l'équation de la surface est

$$T = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d = 0$$

l'équation de ce cône est

$$(b' + c')x^2 + (c' + a')y^2 + (a' + b)z^2 = 0$$

Il jouit de la propriété remarquable que si on le transporte parallèlement à lui-même de façon que son sommet soit un point quelconque arbitrairement choisi, il coupe la surface suivant une courbe sphérique. En effet, la puissance orthoptique de son sommet par rapport à la surface peut se mesurer sur l'une quelconque de ses génératrices ; le produit des segments interceptés sur chacune d'elle par la surface, segments comptés à partir du sommet, est donc constant, ce qui est suffisant pour que sa courbe d'intersection avec la surface soit sphérique : il en résulte, en outre, que le point considéré, sommet de ce cône, a même plan polaire par rapport à la sphère et à la surface. Il suffit, pour s'en assurer par le calcul, d'ajouter l'équation de la surface avec l'équation

$$(b' + c')(x - \alpha)^2 + (c' + a')(y - \beta)^2 + (a' + b')(z - \gamma)^2 = 0$$

qui représente le cône dans sa nouvelle position, ayant pour sommet le point (α, β, γ) . On obtient ainsi l'équation de la sphère

$$(a' + b' + c')(x^2 + y^2 + z^2) - 2\alpha(b' + c')x - 2\beta(c' + a')y - 2\gamma(a' + b)z + (b' + c')\alpha^2 + (c' + a')\beta^2 + (a' + b)\gamma^2 + d = 0$$

sur laquelle on peut vérifier la propriété énoncée relative au plan polaire et remarquer en outre, comme on l'a annoncé, que la tangente menée à cette sphère par le point (α, β, γ) est précisément la puissance du point par rapport à la surface.

25. — Cette sphère est susceptible d'une autre définition. Appelons

cône équilatère, comme on le fait quelquefois, le cône du second degré, sur lequel on peut mettre les arêtes d'une infinité de trièdres trirectangles, et pour lequel on a

$$a + b + c = 0.$$

Cette sphère n'est autre que le lieu des perpendiculaires abaissées du point (x, ξ, γ) sur les plans qui coupent la surface suivant des courbes vues du point sous des cônes équilatères. On pourrait le démontrer géométriquement au moyen du théorème correspondant de géométrie plane. Pour faire voir que c'est la même sphère, nous allons chercher son équation. Prenons le point (x, ξ, γ) pour origine et soit

$$\begin{aligned} T = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d' + 2l'yz + 2m'zx \\ + 2n'xy + 2p'x + 2q'y + 2r'z = 0, \end{aligned}$$

l'équation de la surface. L'équation du cône ayant pour sommet l'origine et pour base la courbe d'intersection de la surface avec le plan

$$(1) \quad \lambda x + \mu y + \nu z = 1$$

est

$$\begin{aligned} a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2n'xy \\ + 2(\lambda x + \mu y + \nu z)(p'x + q'y + r'z) + d'(\lambda x + \mu y + \nu z)^2 = 0, \end{aligned}$$

s'il doit être équilatère, on aura entre λ, μ, ν la relation

$$(2) \quad a' + b' + c' + 2(\lambda p' + \mu q' + \nu r') + d'(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0.$$

La perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan a pour équations

$$(3) \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$$

Reste à éliminer λ, μ, ν entre (1), (2), (3). Les rapports (3) et l'équation (1) donnent

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\lambda x + \mu y + \nu z} = x^2 + y^2 + z^2$$

d'où l'on tire λ, μ, ν . Substituant dans (2) et divisant par le facteur $(x^2 + y^2 + z^2)$, il reste

$$(a' + b' + c') + 2(p'x + q'y + r'z) + d' = 0.$$

Si l'on suppose la surface rapportée à son centre comme précédemment, p', q', r' sont nuls et l'on obtient la même sphère que la première, dans laquelle le point (x, ξ, γ) serait supposé à l'origine.

L'équation tangentielle (2) en λ, μ, ν prouve que le plan (1) enveloppe une surface de révolution du second degré ayant le point donné pour foyer.

On peut donc donner cette nouvelle définition de la puissance d'un point :

C'est la longueur de la tangente menée du point à la sphère, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point sur les plans qui coupent la surface suivant des coniques vues du point sous un cône équilatère.

Si le point est sur la surface, le plan polaire commun devient le plan tangent en ce point. La sphère et la surface sont tangentes en ce point ; il en résulte que le plan (1) passe par le point fixe de la normale diamétralement opposé dans la sphère, d'où ce théorème connu :

Si un trièdre trirectangle tourne autour d'un point fixe d'une surface du second degré, le plan des trois points où les arêtes percent la surface passe par un point fixe de la normale au point considéré.

26. — Il est impossible de passer sous silence la particularisation de ces propriétés pour le cas où, $a' + b' + c'$ étant nul, la surface devient un hyperboloïde équilatère. L'on voit en effet que la puissance d'un point quelconque devient infinie (20) à moins que le numérateur de son expression étant également nul, c'est-à-dire le point étant sur la surface, elle ne soit indéterminée. C'est ce que confirme chacune des définitions de la puissance ; si l'on considère que le plan perpendiculaire à une génératrice du cône asymptote coupe la surface suivant une hyperbole équilatère, puisque ce cône est lui-même équilatère ; ou encore qu'une droite perpendiculaire à un plan qui coupe le cône asymptote suivant deux droites rectangulaires est elle-même parallèle à une génératrice de ce cône. La partie de la courbe sphérique qui reste à distance finie devient un cercle, et la sphère se réduit à un plan à distance finie. Les énoncés précédents deviennent :

Les plans qui coupent un hyperboloïde équilatère suivant des courbes vues d'un point donné sous un cône équilatère enveloppent un parabolôïde de révolution ayant le point pour foyer. Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point donné sur ces plans est un plan.

Si un trièdre trirectangle tourne autour d'un point fixe d'un hyperboloïde équilatère, le plan des trois points où les arêtes percent la surface demeure parallèle à la normale au point considéré.

La condition $a' + b' + c' = 0$ étant linéaire par rapport aux coefficients de T , indique que cette surface est harmoniquement circonscrite à celle dont l'équation tangentielle serait

$$x^2 + \varepsilon^2 + \gamma^2 = 0,$$

c'est-à-dire au cercle de l'infini (*). Si donc l'on suppose qu'une sphère et un hyperboloïde équilatère se partagent harmoniquement le plan de l'infini coupant harmoniquement ces deux surfaces, il faudra que son pôle, par rapport à celle des deux qui est harmoniquement inscrite,

(*) SALMON, *Geometry of three dimensions*, 1874, p. 165.

c'est-à-dire le centre de cette dernière surface, soit sur l'autre. Ainsi :

Lorsqu'une sphère et un hyperboloïde équilatère se partagent harmoniquement, celle des deux surfaces qui est harmoniquement circonscrite passe par le centre de l'autre.

On ne pourra donc pas prendre un point quelconque de l'espace pour centre d'une sphère harmoniquement inscrite à l'hyperboloïde, puisque ce centre ne saurait être ailleurs que sur l'hyperboloïde, et c'est pour cela que la puissance d'un point est infinie s'il n'est pas sur la surface, indéterminée dans le cas contraire. Il en résulte les théorèmes suivants :

Lorsqu'un hyperboloïde équilatère est circonscrit à un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent, il passe par le point de rencontre des hauteurs;

Lorsqu'un hyperboloïde équilatère est circonscrit à un pentagone dont les plans-hauteurs concourent en un même point, il passe par ce point;

Lorsqu'un hyperboloïde équilatère passe par six points, il passe par les centres des sphères conjuguées à l'hexagone des six points.

Dans ce dernier cas, la surface est assujettie à sept conditions linéaires provenant des six points et de la relation

$$a' + b' + c' = 0.$$

Or nous verrons que toutes les surfaces du second degré qui se trouvent dans ce cas ont huit points communs. Faisant abstraction des six premiers, on voit qu'il en reste deux. Un hexagone gauche admet donc deux sphères conjuguées (21).

27. — Pour ne dire qu'un mot du parabolôïde, nous ferons seulement remarquer que la puissance d'un point par rapport à cette surface est égale à la puissance du point par rapport à une section plane perpendiculaire à l'axe.

28. — Si la surface harmoniquement circonscrite T est une sphère, son équation devient

$$T = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - \rho^2 = 0,$$

ce qui donne .

$$a' = b' = c' = 1; \quad l' = m' = n' = 0; \quad p' = -\alpha; \quad q' = -\beta; \quad r' = -\gamma;$$

$$\text{et} \quad d' = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2$$

La condition $\Theta = 0$ devient alors :

$$A + B + C + D(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2) - P\alpha - Q\beta - R\gamma = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\rho^2 = \frac{1}{D} \left[D(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - P\alpha - Q\beta - R\gamma + A + B + C \right]$$

Le second membre n'est autre que le résultat de la substitution de α ,

β , γ , à la place des coordonnées x , y , z , dans le premier membre de l'équation de la sphère concentrique à la surface S , et dont le rayon est la somme des carrés des demi-axes de cette surface. Si, en effet, on suppose la surface rapportée à son centre, P , Q , R sont nuls en même temps que p , q , r et $-\frac{A+B+C}{D}$, qui représente le rayon de la sphère, est précisément la somme des carrés des demi-axes. Cette sphère, nous l'avons nommée ailleurs (*) sphère orthoptique de la surface, parce qu'elle est le lieu des points de l'espace d'où l'on voit la surface sous un cône équilatère de seconde espèce (**). Si donc une sphère est harmoniquement circonscrite à une surface du second degré, son rayon est égal à la longueur de la tangente menée de son centre à la sphère orthoptique. Cette longueur, déterminée pour chaque point de l'espace, sera la *puissance orthoptique de seconde espèce* du point par rapport à la surface. C'est le rayon de la sphère conjuguée commune à tous les tétraèdres ou pentaèdres à sphère conjuguée, et à tous les hexaèdres, pour lesquels ce point est le centre d'une sphère conjuguée, et circonscrite à la surface. Il en résulte que toute sphère harmoniquement circonscrite coupe à angle droit la sphère orthoptique.

Nous avons vu (21) quand et sous quelles conditions un tétraèdre peut avoir une sphère conjuguée. Un pentaèdre devra remplir une condition pour en avoir une, et alors les dix plans menés par chaque sommet perpendiculairement à l'arête opposée passeront par un même point, ce qui conduit à ce théorème :

Si quatre des dix plans-hauteurs d'un pentaèdre concourent en un même point, les six autres concourent également en ce point (:**).

Enfin, si l'on remarque que lorsque deux points sont conjugués par rapport à une sphère, comme cela arrive pour les sommets opposés d'un hexaèdre, la sphère est coupée orthogonalement par celle qui a pour diamètre le segment qui les joint, on démontre facilement que les dix sphères ayant pour diamètres les dix diagonales d'un hexaèdre ont même centre radical, et que l'hexaèdre admet une sphère conjuguée qui est leur sphère orthogonale commune (:***).

29. — Un cas particulier intéressant est celui où la surface est un parabolôïde, pour lequel on sait que la sphère orthoptique se réduit à

(*) *Systèmes linéaires de coniques*, p. 81.

(**) On attribue souvent indistinctement la dénomination de cônes équilatères à ceux sur lesquels on peut mettre des trièdres triirectangles, ou à ceux auxquels l'on peut circonscire ces mêmes trièdres : dans ces derniers, c'est la somme des carrés des axes qui est nulle. Nous avons proposé (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1866, p. 433) de les distinguer par leur espèce.

(***) P. SERRRET, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1865, p. 207.

(****) *Ibid.*, p. 205.

un plan. D étant nul, la puissance orthoptique de seconde espèce devient infinie pour tout point pour lequel le numérateur de ρ n'est pas nul, c'est-à-dire pris en dehors du plan orthoptique : pour les points de ce plan, elle est indéterminée. C'est dire que l'on ne peut circonscrire à un parabolôïde de tétraèdres ou pentaèdres à sphère conjuguée, ni d'hexaèdres dont le centre de la sphère conjuguée ne soit pas dans le plan orthoptique. C'était évident, puisque le plan orthoptique doit couper à angle droit toute sphère harmoniquement circonscrite (28). Il en résulte les théorèmes suivants :

Lorsqu'un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent est circonscrit à un parabolôïde, le plan orthoptique passe par le point de concours des hauteurs ;

Lorsqu'un pentaèdre dont les plans-hauteurs concourent en un même point est circonscrit à un parabolôïde, le plan orthoptique passe par ce point ;

Lorsqu'un hexaèdre est circonscrit à un parabolôïde, le plan orthoptique passe par le centre de la sphère conjuguée.

ou encore :

Les plans orthoptiques de tous les parabolôïdes tangents à six plans concourent en un même point ().*

L'examen approfondi de la condition $\Theta = 0$ et de ses cas particuliers nous permettra de poursuivre avec fruit l'étude des systèmes linéaires de surfaces du second degré.