

ANNALI
DI
MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa

Salvatore Pincherle in Bologna

Giuseppe Jung in Milano

Corrado Segre in Torino

SERIE III. * TOMO XXX.

MILANO

TIPO-LITOGRAFIA - OFFICINA CARTE VALORI
TURATI LOMBARDI E C.

—
1921.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXX.^o (SERIE III.^a)

	PAG.
Centri di librazione e moti dell'asteroide nelle loro vicinanze nel problema ristretto dei tre corpi ed in un analogo, sotto l'ipotesi che l'attrazione o la repulsione delle due grandi masse sia una funzione della distanza. — <i>Filippo Sibirani</i>	1
Sugli involucri di tangenti alle curve integrali di un'equazione differenziale del primo ordine. — <i>Enrico Zondadari</i>	63
Questioni di forma e di realtà relative a fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni. — <i>Eugenio G. Togliatti</i>	75
Sulle trasformazioni dei sistemi di linee, coniugate ed ortogonali, nello spazio S_n . <i>Pasquale Calapso</i>	119
Osservazioni sui sistemi isoterma coniugati che sono permanenti nelle deformazioni di una superficie. — <i>Alessandro Terracini</i>	145
Sulla esistenza di polarità ordinarie che mutano l'una nell'altra due quadriche non degeneri. — <i>Alessandro Terracini</i>	155
Criteri per l'esistenza della soluzione in problemi di Calcolo delle variazioni. — <i>Leonida Tonelli</i>	159
Sopra una classe di trasformazioni asintotiche, applicabili in particolare alle superficie la cui curvatura è proporzionale alla quarta potenza della distanza del piano tangente da un punto fisso. — <i>H. Jouas</i>	223
Le trasformazioni birazionali periodiche sulle superficie iperellittiche con due fasci di curve ellittiche. — <i>Nicolò Spampinato</i>	257
Sopra una relazione fra certe forme differenziali quadratiche e le algebre commutative. — <i>Francesco Cecioni</i>	275

Centri di librazione e moti dell'asteroide nelle loro vicinanze nel problema ristretto dei tre corpi ed in un analogo, sotto l'ipotesi che l'attrazione o la repulsione delle due grandi masse sia una funzione della distanza.

(Di FILIPPO SIBIRANI, a Pavia.)

INTRODUZIONE.

Nel problema ristretto dei tre corpi si dicono centri di librazione i punti di equilibrio relativo dell'asteroide rispetto al moto di rotazione delle due grandi masse intorno al loro centro di gravità; e, com'è ben noto, sono stati studiati i moti dell'asteroide nelle vicinanze dei centri di librazione (*). La ricerca dei centri di librazione e lo studio dei moti nelle loro vicinanze in un problema analogo, in cui delle due grandi masse la maggiore è attraente e la minore è repellente, è stato fatto dal DANIELE (**) e da me (***).

Qui io mi propongo di fare analoghe ricerche supponendo che le due grandi masse si attraggano o respingano con una forza che sia una funzione

(*) Per la bibliografia si vegga: R. MARCOLONGO, *Il problema ristretto dei tre corpi*. Milano, Hoepli, 1918.

(**) E. DANIELE, *Sui centri di librazione in un problema più generale di quello ristretto dei tre corpi*. Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLVII (1912).

(***) F. SIBIRANI, *Intorno ad un problema analogo a quello ristretto dei tre corpi*. Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, Vol. LII (1916-17) e: *Ulteriori ricerche sopra un problema analogo a quello ristretto dei tre corpi*; ibidem, Vol. LIV.

$\varphi(r)$ della loro distanza r ; su questa funzione farò le ipotesi seguenti: essa è o crescente o decrescente; nel primo caso, varia da 0 a $+\infty$ e nel secondo da $+\infty$ a 0 al variare di r da 0 a $+\infty$. Saranno anche fatte speciali ipotesi su codesta funzione ed in particolare sarà esaminato il caso che essa si riduca a r^α , con α numero reale qualunque.

Nel § 1 determino sotto quali condizioni due masse che si attraggano o respingano con forze del tipo indicato possono ruotare uniformemente intorno ad un punto fisso; e mentre è fatto vedere che, qualunque sia la $\varphi(r)$, esistono condizioni iniziali atte a far assumere alle due masse il moto di rotazione se le masse si attraggono entrambe o se la maggiore attrae e la minore respinge, è mostrato anche che non è possibile detto moto di rotazione se le masse si respingono entrambe o se la repellente è la maggiore.

Nel § 2 scrivo le equazioni del moto di una massa così piccola da potersi trascurare la sua azione sulle due grandi masse, moto relativo al moto rotatorio delle due grandi masse stesse.

Nel § 3 determino i centri di librazione nel caso che le grandi masse P_1, P_2 entrambe si attraggano. Al pari che nel problema ristretto, i centri di librazione esistono solamente nel piano di rotazione di P_1, P_2 e comprendono i due vertici dei triangoli equilateri costruiti su P_1, P_2 ; se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha \neq 1$, altri centri di librazione sono solo sulla retta P_1, P_2 ; ma per diverse forme di $\varphi(r)$ possono esistere anche al di fuori, possono essere in numero finito o infinito ed anche riempire tutto il piano, ciò che avviene se $\varphi(r) = r$.

Nel § 4 è fatta l'analoga ricerca nel caso che la massa maggiore attragga e l'altra respinga. In questo caso possono esistere centri di librazione anche nel piano per P_1, P_2 normale al piano della loro rotazione.

Nel § 5 è studiato il moto della piccola massa nel caso semplice di $\varphi(r) = r$.

Il moto dell'asteroide nelle vicinanze dei centri di librazione posti nel piano di rotazione di P_1, P_2 è definito da un sistema di equazioni del tipo:

$$\xi'' - A \eta' = B \xi + C \eta, \quad \eta'' + A \xi' = C \xi + D \eta, \quad \zeta'' = \pm E^2 \zeta;$$

epperò nel § 6 studio quali fra i moti definiti da questo sistema, periodici o no, mantengono il punto mobile nelle vicinanze dell'origine delle coordinate, distinguendo nove casi a seconda della natura delle radici dell'equazione caratteristica del sistema; ed ogni volta, quando non si tratti dell'integrale generale, determino quali condizioni debbono verificare la posizione e la velocità del punto all'istante $t=0$ perchè si abbiano questi moti particolari.

Nel § 7 è fatto lo studio dei moti nelle vicinanze delle grandi masse quando, essendo $\varphi(r)$ crescente, le loro posizioni sono centri di librazione; nel § 8 sono studiati i moti dell'asteroide nelle vicinanze dei centri di librazione posti sull'asse del segmento $P_1 P_2$; nei §§ 9 e 10 sono studiati i moti nelle vicinanze dei centri di librazione posti nella retta $P_1 P_2$. Nel § 11 sono considerati i moti nelle vicinanze dei centri di librazione posti nel piano per $P_1 P_2$ normale al piano in cui ruotano $P_1 P_2$. In questi ultimi cinque paragrafi si tratta di studiare la natura delle radici dell'equazione caratteristica del sistema studiato al § 6; ciò esige talora dei calcoli che se concettualmente semplici sono tuttavia laboriosi e sottili e nella maggior parte dei casi sono stati, per brevità, ommessi.

§ 1. CONDIZIONI SOTTO CUI DUE MASSE CHE SI ATTRAGGONO O RESPINGONO POSSONO RUOTARE UNIFORMEMENTE INTORNO AD UN PUNTO FISSO.

a) Due punti P_1, P_2 di masse m_1, m_2 si attirano con una forza diretta secondo la loro congiungente e la cui intensità è una funzione $m_1 m_2 \varphi(r)$ della distanza $r = \text{mod}(P_1 - P_2)$. La $\varphi(r)$ sarà sempre supposta una funzione continua, dotata di quelle derivate che importa di considerare, positiva crescente o decrescente al variare di r da 0 a $+\infty$; se crescente varia da 0 a $+\infty$, se decrescente da $+\infty$ a 0.

Le equazioni del moto di P_1, P_2 sono:

$$\left. \begin{aligned} P_1'' &= m_2 \varphi(r) \frac{P_2 - P_1}{r} \\ P_2'' &= m_1 \varphi(r) \frac{P_1 - P_2}{r} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Si trae subito:

$$m_1 P_1'' + m_2 P_2'' = 0,$$

onde, se inizialmente il baricentro O delle due masse è in quiete, esso vi rimarrà sempre.

Posto:

$$r_1 = \text{mod}(P_1 - O), \quad r_2 = \text{mod}(P_2 - O), \quad (2)$$

poichè:

$$m_1(P_1 - O) + m_2(P_2 - O) = 0,$$

sarà:

$$P_2 - P_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} (O - P_1) = \frac{m_1 + m_2}{m_1} (P_2 - O)$$

$$r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2,$$

e le equazioni (1) si trasformano in:

$$P_1'' = m_2 \varphi \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1 \right) \frac{O - P_1}{r_1}$$

$$P_2'' = m_1 \varphi \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} r_2 \right) \frac{O - P_2}{r_2},$$

le quali mostrano che il moto avviene come se i due punti fossero attratti dal punto fisso O con opportuna forza.

Sia $P_1^{(0)}$ la posizione di P_1 al tempo $t=0$ ed $r_{1,0} = \text{mod}(P_1^{(0)} - O)$; la prima delle (3) è soddisfatta da

$$P_1 = O + r_{1,0} e^{i\omega t} \mathbf{i}$$

con \mathbf{i} vettore unitario nella direzione e verso di $P_1^{(0)} - O$ ed ω costante se:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_2}{r_{1,0}} \varphi \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} r_{1,0} \right)} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{r_0} \varphi(r_0)}$$

$$r_0 = \text{mod}(P_1^{(0)} - P_2^{(0)}),$$

e se la velocità di P_1 al tempo $t=0$ è normale a $P_1 - O$ ed è di grandezza:

$$\sqrt{m_2 r_{1,0} \varphi \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} r_{1,0} \right)} = m_2 \sqrt{\frac{r_0}{m_1 + m_2} \varphi(r_0)}.$$

Sotto queste ipotesi P_1 ruota uniformemente intorno ad O ed altrettanto fa evidentemente P_2 .

b) Supponiamo che P_1 attiri P_2 e P_2 respinga P_1 ; le equazioni del moto dei due punti sono:

$$\left. \begin{aligned} P_1'' &= m_2 \varphi(r) \frac{P_1 - P_2}{r} \\ P_2'' &= m_1 \varphi(r) \frac{P_1 - P_2}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

da cui si trae:

$$m_1 P_1'' - m_2 P_2'' = 0.$$

Se al tempo $t = 0$ il punto O definito da:

$$m_1 (P_1 - O) - m_2 (P_2 - O) = 0$$

è in riposo, vi rimarrà sempre. Il punto O è esterno al segmento $P_1 P_2$ e dalla banda del punto di massa maggiore.

Se $m_1 > m_2$, le equazioni (4) divengono:

$$\left. \begin{aligned} P_1'' &= m_2 \varphi\left(\frac{m_1 - m_2}{m_2} r_1\right) \frac{O - P_1}{r_1} \\ P_2'' &= m_1 \varphi\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1} r_2\right) \frac{O - P_2}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

le quali fanno vedere che il moto avviene come se P_1, P_2 fossero attratti dal punto fisso O con opportuna forza. Se $m_1 < m_2$ le equazioni (4) divengono:

$$\left. \begin{aligned} P_1'' &= m_2 \varphi\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2} r_1\right) \frac{P_1 - O}{r_1} \\ P_2'' &= m_1 \varphi\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1} r_2\right) \frac{P_2 - O}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (4'')$$

le quali fanno vedere che P_1, P_2 si muovono come se fossero respinti da O con opportuna forza.

In quest'ultimo caso il moto non può mai essere un cerchio; nel primo caso, cioè quando la massa attraente è maggiore della repellente, il moto può essere circolare uniforme: infatti la prima delle (4') è soddisfatta da:

$$P_1 = O + r_{1,0} e^{i\omega t} \mathbf{i}$$

(mantenute le notazioni del caso *a*) se :

$$\omega = \sqrt{\frac{m_2}{r_{1,0}} \varphi \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2} r_{1,0} \right)} = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{r_0} \varphi (r_0)}$$

e se la velocità di P_1 al tempo $t = 0$ è normale a $P_1^{(0)} - O$ e di grandezza :

$$\sqrt{m_2 r_{1,0} \varphi \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2} r_{1,0} \right)} = m_2 \sqrt{\frac{r_0}{m_1 - m_2} \varphi (r_0)}.$$

c) Se le due masse si respingono entrambe, considerazioni analoghe alle precedenti fatte nell'ipotesi che il loro baricentro sia al tempo $t = 0$ in quiete, fanno vedere che P_1 e P_2 si muovono come se fossero respinti dal baricentro, epperò la loro traiettoria non può mai essere circolare.

§ 2. EQUAZIONI DEL MOTO DI UNA PICCOLISSIMA MASSA SOTTO L'AZIONE DELLE DUE MASSE PRECEDENTI RUOTANTI UNIFORMEMENTE INTORNO AD UN PUNTO FISSO.

Prendiamo per unità di massa la maggiore, che supporremo quella di P_1 , e diciamo μ la massa di P_2 ; prendiamo per unità di lunghezza la distanza $P_1 P_2$ nell'ipotesi che P_1, P_2 ruotino uniformemente intorno al punto fisso O determinato nel paragrafo precedente, con velocità angolare che è

$$\sqrt{(1 + \mu) \varphi (1)}$$

nel caso che entrambe le masse si attraggano e $\sqrt{(1 - \mu) \varphi (1)}$ nel caso che P_1 attragga e P_2 respinga.

Sia P un punto di massa tanto piccola da potersi trascurare la sua azione su P_1 e P_2 : si vuole determinare il moto relativo di P rispetto a $P_1 P_2$. Riferiamo il moto ad una terna di assi ortogonali, aventi origine in O , l'asse x coincidente con la retta $P_1 P_2$ e col senso positivo da P_1 a P_2 ; il semiasse positivo y sia quello che si ottiene ruotando di un angolo retto il semiasse positivo x nel senso della rotazione della retta $P_1 P_2$; l'asse z abbia per senso positivo quello secondo cui la rotazione della $P_1 P_2$ apparisce avvenire da sinistra a destra.

Nell'ipotesi che P_1, P_2 si attraggono, il potenziale delle forze agenti sull'unità di massa di P è:

$$u = - \int \varphi(\rho_1) d\rho_1 - \mu \int \varphi(\rho_2) d\rho_2,$$

ove:

$$\rho_1 = \text{mod}(P_1 - P) = \sqrt{\left(x + \frac{\mu}{1 + \mu}\right)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho_2 = \text{mod}(P_2 - P) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{1 + \mu}\right)^2 + y^2 + z^2}.$$

Le equazioni del moto relativo di P sono:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2\sqrt{(1 + \mu)\varphi(1)}y' - \varphi(1)(1 + \mu)x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ y'' + 2\sqrt{(1 + \mu)\varphi(1)}x' - \varphi(1)(1 + \mu)y &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ z'' &= \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\}; \quad (5)$$

e poichè:

$$\varphi(1)(1 + \mu)(x^2 + y^2) = \varphi(1)\left(\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 - (1 + \mu)z^2 - \frac{\mu}{1 + \mu}\right),$$

se poniamo:

$$w_1 = -\varphi(1)\frac{1 + \mu}{2}z^2 + \varphi(1)\frac{\rho_1^2}{2} - \int \varphi(\rho_1) d\rho_1 + \mu\left[\varphi(1)\frac{\rho_2^2}{2} - \int \varphi(\rho_2) d\rho_2\right], \quad (6)$$

le equazioni (5) diventano:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2\sqrt{(1 + \mu)\varphi(1)}y' &= \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ y'' + 2\sqrt{(1 + \mu)\varphi(1)}x' &= \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ z'' &= \frac{\partial w_1}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Nell'ipotesi che P_1 attragga e P_2 respinga P , il potenziale delle forze

agenti sull'unità di massa di P è:

$$u = - \int \varphi(\rho_1) d\rho_1 + \mu \int \varphi(\rho_2) d\rho_2,$$

ove

$$\rho_1 = \text{mod}(P_1 - P) = \sqrt{\left(x - \frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho_2 = \text{mod}(P_2 - P) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{1-\mu}\right)^2 + y^2 + z^2}.$$

Le equazioni del moto relativo di P sono:

$$x'' - 2\sqrt{(1-\mu)\varphi(1)} y' - \varphi(1)(1-\mu)x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$y'' + 2\sqrt{(1-\mu)\varphi(1)} x' - \varphi(1)(1-\mu)y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$z'' = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Essendo:

$$\varphi(1)(1-\mu)(x^2 + y^2) = \left(\rho_1^2 - \mu\rho_2^2 - (1-\mu)z^2 - \frac{\mu}{1-\mu}\right)\varphi(1),$$

ponendo:

$$w_2 = -\varphi(1)\frac{1-\mu}{2}z^2 + \varphi(1)\frac{\rho_1^2}{2} - \left[\varphi(\rho_1)d\rho_1 - \mu\left[\varphi(1)\frac{\rho_2^2}{2} - \int\varphi(\rho_2)d\rho_2\right]\right], \quad (8)$$

le equazioni del moto di P diventano:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2\sqrt{(1-\mu)\varphi(1)} y' &= \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ y'' + 2\sqrt{(1-\mu)\varphi(1)} x' &= \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ z'' &= \frac{\partial w_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Dei sistemi (7) e (9) esiste l'integrale primo:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2w + C$$

con C costante e w è dato dalla (6) pel sistema (7) e dalla (8) pel sistema (9).

§ 3. CENTRI DI LIBRAZIONE NEL CASO CHE P_1 e P_2 ATTRAGGONO P .

Se P_1, P_2 attraggono P , i punti di equilibrio relativo di P — centri di librazione — sono definiti da:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Se $\varphi(r) = r$, queste equazioni si riducono a $z = 0$, ciò che fa vedere che tutti i punti del piano in cui ruotano P_1 e P_2 sono centri di librazione; in tutti i casi la terza delle (10) equivale a:

$$-z \left(\frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} + \mu \frac{\varphi(\rho_2)}{\rho_2} \right) = 0,$$

cioè a:

$$z = 0.$$

I centri di librazione sono a cercarsi solo nel piano in cui ruotano P_1, P_2 . Supponiamo $z = 0$; le prime due equazioni possono scriversi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Se

$$\Delta = \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = -0,$$

le uniche soluzioni delle (11) sono date da:

$$\frac{\partial w_1}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \rho_2} = 0,$$

cioè da:

$$\varphi(1)\rho_1 - \varphi(\rho_1) = 0, \quad \varphi(1)\rho_2 - \varphi(\rho_2) = 0. \quad (12)$$

Queste equazioni sono soddisfatte, qualunque sia la φ , da $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$, cioè: *qualunque sia la legge di attrazione sono centri di librazione i due punti vertici dei triangoli equilateri costruiti sul segmento $P_1 P_2$.*

L'equazione

$$\varphi(1)r - \varphi(r) = 0, \quad (13)$$

se $\varphi(r)$ è decrescente, ammette la sola radice positiva $r = 1$: e la stessa sola radice ha se $\varphi(r)$ è crescente con $\varphi'(r)$ crescente o decrescente. Ne segue che una sola radice ha la (13) se $\varphi(r) = r^\alpha$, ove α è un numero positivo diverso da 1.

Se $\varphi(r)$ è crescente, può la (13) ammettere altre radici all'infuori di $r = 1$.

Ogni radice della (13) maggiore di $\frac{1}{2}$ dà luogo ad una coppia di centri di librazione posti sull'asse del segmento $P_1 P_2$ e simmetrici rispetto alla retta $P_1 P_2$. Possono ancora esservi altri centri di librazione; infatti se α e β sono due radici positive distinte della (13) soddisfacenti alle condizioni:

$$\alpha + \beta > 1, \quad |\alpha - \beta| < 1,$$

si hanno in corrispondenza quattro centri di librazione, due dei quali dati da $\rho_1 = \alpha$, $\rho_2 = \beta$ simmetrici rispetto alla retta $P_1 P_2$ e gli altri due dati da $\rho_1 = \beta$, $\rho_2 = \alpha$ pure simmetrici rispetto alla stessa retta e simmetrici ai due precedenti rispetto all'asse di $P_1 P_2$. È chiaro che se fosse $\alpha + \beta = 1$ oppure $\alpha - \beta = 1$, i centri di librazione si ridurrebbero a due sulla retta $P_1 P_2$.

Ad es. sia $\varphi(r) = r + \frac{1}{8} \sin 2\pi r$; la φ si annulla per $r = 0$, è crescente (essendo la derivata $1 + \frac{\pi}{4} \cos 2\pi r$ sempre positiva); l'equazione (13) si riduce qui a $\sin 2\pi r = 0$, soddisfatta da $r = \frac{k}{2}$, con k intero qualunque. Oltre ai centri di librazione posti sull'asse di $P_1 P_2$ ($\rho_1 = \rho_2 = \frac{k}{2}$, k intero

positivo) si hanno i centri di librazione $\left(\rho_1 = \frac{k}{2}, \rho_2 = \frac{k+1}{2}\right)$ e $\left(\rho_1 = \frac{k+1}{2}, \rho_2 = \frac{k}{2}\right)$ e i centri posti sulla $P_1 P_2$ $\left(\rho_1 = \frac{k}{2}, \rho_2 = \frac{k}{2} + 1\right)$ e $\left(\rho_1 = \frac{k}{2} + 1, \rho_2 = \frac{k}{2}\right)$.

Se $\Delta = 0$, delle (11) l'una è conseguenza dell'altra; la condizione $\Delta = 0$ equivale a $y = 0$, cioè gli ulteriori punti del piano xy che possono essere centri di librazione sono a cercarsi sulla retta $P_1 P_2$. Intanto si può stabilire: se $\varphi(r)$ è decrescente o $\varphi(r)$ è crescente, con derivata crescente o decrescente, in particolare, se $\varphi(r) = r^\alpha$ con α numero reale qualunque diverso da 1, gli unici centri di librazione al di fuori della retta $P_1 P_2$ sono i vertici dei due triangoli equilateri costruiti sul segmento $P_1 P_2$.

Veniamo ora alla ricerca dei centri di librazione posti sulla retta $P_1 P_2$.

a) Supponiamo P dalla banda di P_2 ; allora:

$$\rho_1 = \rho_2 + 1, \quad \rho_1 = x + \frac{\mu}{1 + \mu}, \quad \rho_2 = x - \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 1$$

e quindi la prima delle (11) diviene:

$$\varphi(1)(\rho_2 + 1) - \varphi(\rho_2 + 1) + \mu \varphi(1) \rho_2 - \mu \varphi(\rho_2) = 0. \quad (14)$$

Quando $\varphi(r)$ è decrescente è chiaro che la (14) ha una sola soluzione, cioè vi è un solo centro di librazione dalla banda di P_2 . Quando sia $\varphi(r)$ crescente, $\rho_2 = 0$ è soluzione della (14), cioè P_2 è centro di librazione: ulteriori centri vi possono essere o no.

Siano $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ crescenti. Consideriamo la retta

$$y = \varphi(1) \left\{ 1 + (1 + \mu)x \right\}$$

e la curva

$$y = \varphi(1 + x) + \mu \varphi(x)$$

per x positivo. Retta e curva partono dallo stesso punto $A(0, \varphi(1))$; la curva, sempre crescente, volge in alto la concavità; se quindi in A il coefficiente angolare della tangente, $\varphi'(1) + \mu \varphi'(0)$, è minore di $(1 + \mu) \varphi'(1)$, coefficiente angolare della retta, curva e retta si intersecano in un solo ulteriore punto.

Il trovare l'ascissa del punto d'incontro equivale, com'è manifesto, a

risolvere la (14), onde si conclude che se:

$$\frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)} < 1$$

e μ è maggiore della frazione, esiste un centro di librazione dalla banda di P_2 ; se

$$\frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)} > \mu$$

non v'ha centro di librazione dalla banda di P_2 . Nel primo caso il centro di librazione ha da P_2 distanza inferiore ad 1. Invero, per $r > 1$ è:

$$\varphi(1)r - \varphi(r) < 0,$$

epperò il primo membro della (14) è per $\rho_2 > 1$ negativo; in un intorno destro di $\rho_2 = 0$ è positivo; infatti:

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho_2 = 0} \frac{\varphi(1)(\rho_2 + 1) - \varphi(\rho_2 + 1) + \mu \varphi(1)\rho_2 - \mu \varphi(\rho_2)}{\rho_2} = \\ & = \lim_{\rho_2 = 0} \left[(1 + \mu)\varphi(1) - \varphi'(\rho_2 + 1) - \mu \varphi'(\rho_2) \right] = \varphi(1) - \varphi'(1) + \mu \left\{ \varphi(1) - \varphi'(0) \right\} > 0. \end{aligned}$$

In particolare, se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 2$, poichè:

$$\frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)} = \alpha - 1 > 1$$

non v'ha alcun centro di librazione dalla banda di P_2 . E nessuno ve n'ha se $\alpha = 2$, come si vede direttamente. Se $\varphi(r) = r^\alpha$, con $1 < \alpha < 2$, v'ha un centro di librazione dalla banda di P_2 a distanza da P_2 minore di 1 se $\mu > \alpha - 1$; non v'ha alcun centro se $\mu \leq \alpha - 1$.

Sia $\varphi(r)$ crescente, $\varphi'(r)$ decrescente. La curva considerata dianzi volge la concavità in basso; se:

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(1)}{\varphi'(0) - \varphi(1)} < 1,$$

e μ è maggiore della frazione, la curva incontra la retta in un ulteriore punto, cioè v'ha un centro di librazione dalla banda di P_2 ; se μ è minore della frazione non v'ha centro di librazione dalla banda di P_2 .

Nel primo caso il centro di librazione ha distanza da P_2 minore di 1. Infatti, essendo per $r > 1$, $r \varphi(1) - \varphi(r) > 0$, il primo membro della (14) per $\rho_2 > 1$ è positivo, mentre è negativo (e si prova come prima) in un intorno destro di $\rho_2 = 0$.

Una particolare funzione $\varphi(r)$ che soddisfa alle ultime ipotesi fatte è $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$; onde in questo caso v'ha un solo centro di librazione dalla banda di P_2 a distanza da P_2 minore di 1.

La (13) oltre la radice 1 abbia le radici semplici $r_2, r_3, r_4, \dots, r_k$ e sia:

$$r_2 > 2, \quad r_3 - r_2 > 1, \quad r_4 - r_3 > 1, \dots, \quad r_k - r_{k-1} > 1;$$

indicando con F il primo membro della (14), nella successione

$$F(r_2 - 1), \quad F(r_2 + 1), \quad F(r_3 - 1), \quad F(r_3 + 1), \dots, \quad F(r_k - 1), \quad F(r_k + 1)$$

le coppie $F(r_i - 1) F(r_i + 1)$ hanno segni opposti, $F(r_i + 1) F(r_{i+1} - 1)$ hanno ugual segno, epperò la (14) ha almeno $k - 1$ radici, una in ciascuno degli intervalli $(r_i - 1, r_i + 1)$: in questo caso, cioè, oltre P_2 esistono almeno $k - 1$ altri centri di librazione. Se $r_2 = 2, r_3 = 3, \dots, r_k = k$, è

$$F(1) = F(2) = \dots = F(k - 1) = 0$$

e quindi in questo caso vi sono $k - 1$ centri di librazione l'uno distante dall'altro di 1.

b) Supponiamo P esterno al segmento $P_1 P_2$ dalla banda di P_1 ; allora è:

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \rho_1 = -\frac{\mu}{1 + \mu} - x, \quad \rho_2 = \frac{1}{1 + \mu} - x, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = -1$$

onde la prima delle (11) diviene:

$$\varphi(1) \rho_1 - \varphi(\rho_1) + \mu \left. \right\} \varphi(1) (\rho_1 + 1) - \varphi(\rho_2 + 1) \left. \right\} = 0. \quad (15)$$

Se $\varphi(r)$ è decrescente v'ha, ovviamente, una sola soluzione, cioè v'ha un solo centro di librazione dalla banda di P_1 ; esso dista da P_1 meno di 1; infatti il primo membro della (15), negativo nell'intorno destro di $\rho_1 = 0$, è positivo per $\rho_1 = 1$. Ciò avviene in particolare se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha < 0$.

Quando sia $\varphi(r)$ crescente, la (15) è soddisfatta da $\rho_1 = 0$, cioè P_1 è centro di librazione; ulteriori centri di librazione vi possono essere o no.

Siano $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ crescenti. Consideriamo la retta:

$$y = \varphi(1) [(1 + \mu)x + \mu]$$

e la curva:

$$y = \varphi(x) + \mu \varphi(1 + x),$$

per x positivo. Retta e curva partono dallo stesso punto $A(0, \mu \varphi(1))$; la curva, sempre crescente, volge la concavità in alto; se quindi in A il coefficiente angolare della tangente, $\varphi'(0) + \mu \varphi'(1)$, è minore del coefficiente angolare della retta, $(1 + \mu) \varphi(1)$, curva e retta si incontrano in un solo ulteriore punto, altrimenti non si tagliano. Dunque se:

$$\mu < \frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)}$$

v' ha un centro di librazione dalla banda di P_1 ; se:

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)} < 1$$

e μ è maggiore della frazione, non vi ha centro di librazione.

Nel primo caso il centro di librazione ha da P_1 distanza minore di 1: infatti per $\rho_1 = 1$ il primo membro della (15) è negativo, mentre in un intorno destro di $\rho_1 = 0$ è del segno di $\varphi(1) - \varphi'(0) + \mu \left\{ \varphi(1) - \varphi'(1) \right\}$, cioè positivo.

In particolare, sia $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 2$; qui è:

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)} = \frac{1}{\alpha - 1} < 1,$$

onde se $\mu < \frac{1}{\alpha - 1}$, *v*' ha un centro di librazione dalla banda di P_1 a distanza da questo minore di 1; se $\mu > \frac{1}{\alpha - 1}$, non *v*' è centro di librazione.

Se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $1 < \alpha \leq 2$ è:

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)} \geq 1$$

e quindi qualunque sia μ *v*' ha un centro di librazione dalla banda di P_1 .

Sia $\varphi(r)$ crescente, $\varphi'(r)$ decrescente. Col procedimento tenuto sopra si

vede che se :

$$\mu < \frac{\varphi'(0) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(1)}$$

v'ha un centro di librazione dalla banda di P_1 e da questo a distanza minore di 1, altrimenti no. Se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, poichè $\varphi'(0) = +\infty$ qualunque sia μ v'ha un centro di librazione dalla banda di P_1 .

Se la (13) oltre la radice 1 ha le radici semplici r_2, r_3, \dots, r_k ed è $r_2 > 2, r_3 - r_2 > 1, r_4 - r_3 > 1, \dots, r_k - r_{k-1} > 1$, la (15) ha $k-1$ radici una in ciascuno degli intervalli $(r_i - 1, r_i + 1)$; se $r_2 = 2, r_3 = 3, \dots, r_k = k, r_2, r_3, \dots, r_{k-1}$ sono radici della (15).

c) Supponiamo infine P compreso fra P_1 e P_2 . Allora è :

$$\rho_1 + \rho_2 = 1, \quad \rho_1 = x + \frac{\mu}{1 + \mu}, \quad \rho_2 = \frac{1}{1 + \mu} - x, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = -1;$$

quindi la prima delle (21) diviene :

$$\varphi(1)\rho_1 - \varphi(\rho_1) - \mu \left\{ \varphi(1)(1 - \rho_1) - \varphi(1 - \rho_1) \right\} = 0. \quad (16)$$

Sia $\varphi(r)$ decrescente; allora $\varphi(\rho_1) - \varphi(1 - \rho_1)$ è decrescente e passa da $+\infty$ a $-\infty$ quando ρ_1 va da 0 a 1, mentre $\varphi(1)\rho_1 - \mu(1 - \rho_1)$ è crescente nello stesso intervallo, onde la (16) ha una ed una sola radice compresa fra 0 ed 1; cioè *esiste un solo centro di librazione fra P_1 e P_2* .

Se $\varphi(r)$ è crescente e se l'equazione (13) ha le radici (disposte in ordine crescente) $r_1 = 0, r_2, r_3, \dots, r_{k-1}, r_k = 1$ e per qualche coppia r_i, r_j è $r_i = 1 - r_j$, allora r_i, r_j sono radici della (16). Se le radici r_1, r_2, \dots, r_k sono semplici, segnati nell'intervallo $0 - 1$ i punti $r_h, 1 - r_h$, se sono contigui $r_i, 1 - r_j$ con i, j della stessa parità, il primo membro della (16) ha segni opposti in questi due punti, quindi una radice della (16) cade fra questi punti, ed analogamente una fra $1 - r_i$ e r_j .

Siano $\varphi(r), \varphi'(r), \varphi''(r)$ crescenti: è $\varphi'(1) > \varphi(1), \varphi'(0) < \varphi(1)$. Consideriamo la retta

$$y = \varphi(1) \left\{ (1 + \mu)x - \mu \right\},$$

e la curva

$$y = \varphi(x) - \mu \varphi(1 - x),$$

nell'intervallo $0 - 1$. La risoluzione della (16) equivale ovviamente alla determinazione dell'ascissa dell'intersezione della curva con la retta.

La retta e la curva passano entrambe per i punti $A(0, -\mu \varphi(1))$, $B(1, \varphi(1))$.

Posto:

$$\varphi(x) - \mu \varphi(1 - x) = \mathfrak{S}(x),$$

è facile vedere che \mathfrak{S}' è sempre positiva, \mathfrak{S}'' si annulla in un sol punto ξ , \mathfrak{S}''' è sempre positiva, onde \mathfrak{S}'' crescente e di più negativa prima di ξ , positiva poi; la curva $y = \mathfrak{S}(x)$ volge la concavità in basso prima di ξ , poi in alto. Il coefficiente angolare della tangente in A alla curva $y = \mathfrak{S}(x)$ è $\varphi'(0) + \mu \varphi'(1)$ il quale è maggiore del coefficiente angolare della retta, $(1 + \mu) \varphi(1)$, se:

$$\mu > \frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)};$$

il coefficiente angolare della tangente in B è $\varphi'(1) + \mu \varphi'(0)$ che è maggiore di $(1 + \mu) \varphi(1)$ se è:

$$\mu < \frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)}.$$

Se:

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)} < 1$$

e μ è maggiore di questa frazione, curva e retta si incontrano, cioè v' è un centro di librazione fra P_1 e P_2 ; mentre non v' è centro di librazione se μ è minore della detta frazione, o se questa frazione è maggiore di 1.

Se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 2$, φ , φ' , φ'' sono crescenti,

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)} = \frac{1}{\alpha - 1} < 1$$

e quindi esiste un centro di librazione fra P_1 e P_2 se $\mu > \frac{1}{\alpha - 1}$. Se $\varphi(r) = r^2$, la (16) diviene $(\rho_1 - \rho_1^2)(1 - \mu) = 0$ che non ha radici fra 0 ed 1.

Siano in $0 - 1$ $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ crescenti, $\varphi''(r)$ decrescente. È ancora $\varphi'(0) < \varphi(1)$, $\varphi'(1) > \varphi(1)$; si prova allora che la $y = \mathfrak{S}(x)$ è concava in alto prima di ξ , radice di $\mathfrak{S}'' = 0$, e concava verso il basso dopo ξ ; il coefficiente angolare della curva in A è $\varphi'(0) + \mu \varphi'(1)$ che è inferiore a quello della

retta se:

$$\mu < \frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)}$$

e il coefficiente angolare della tangente in B è inferiore a quello della retta se:

$$\mu > \frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)}$$

Se:

$$\frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)} < 1,$$

e μ è maggiore di questa frazione, retta e curva si incontrano, cioè v'ha un centro di librazione fra P_1 e P_2 ; non v'ha centro di librazione se μ è minore di detta frazione.

Se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $1 < \alpha < 2$, φ , φ' sono crescenti, φ'' decrescente,

$$\frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)} = \alpha - 1 < 1,$$

quindi se $\mu > \alpha - 1$ c'è un solo centro di librazione fra P_1 e P_2 , se $\mu < \alpha - 1$ non ve n'è alcuno.

Siano $\varphi(r)$, $\varphi''(r)$ crescenti, $\varphi'(r)$ decrescente. È:

$$\varphi'(0) > \varphi(1), \quad \varphi'(1) < \varphi(1).$$

Procedendo come dianzi si prova che c'è una sola radice della (16) compresa fra 0 ed 1, cioè un solo centro di librazione, se:

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(1)}{\varphi'(0) - \varphi(1)} < 1$$

e μ è maggiore di questa frazione. Se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, φ e φ'' sono crescenti, φ' decrescente,

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(1)}{\varphi'(0) - \varphi(1)} = 0,$$

onde qualunque sia μ esiste un solo centro di librazione fra P_1 e P_2 .

§ 4. CENTRI DI LIBRAZIONE NEL CASO CHE P_1 ATTRAGGA E P_2 RESPINGA P .

Se P_1 attrae e P_2 respinge P , i centri di librazione sono definiti da :

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0. \quad (17)$$

Se $\varphi(r) = r$, le (17) si riducono a $z = 0$, cioè tutti i punti del piano in cui ruotano $P_1 P_2$ sono punti di equilibrio relativo per P .

La terza equazione delle (17) è :

$$z \left\{ \mu \frac{\varphi(\rho_2)}{\rho_2} - \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} \right\} = 0,$$

soddisfatta da $z = 0$, oppure da :

$$\mu \frac{\varphi(\rho_2)}{\rho_2} - \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} = 0. \quad (18)$$

Supposto $z = 0$, le prime due delle (17) che possono scriversi :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

se :

$$\Delta = \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} - \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0,$$

sono soddisfatte solo da :

$$\frac{\partial w_2}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \rho_2} = 0,$$

cioè da :

$$\varphi(1) \rho_1 - \varphi(\rho_1) = 0, \quad \varphi(1) \rho_2 - \varphi(\rho_2) = 0,$$

equazioni identiche alle (12) del § 3; epperò si possono ripetere le considerazioni fatte in quel paragrafo.

Se $\Delta = 0$, delle (19) l'una è conseguenza dell'altra, epperò consideriamo la prima sola; e, poichè la condizione $\Delta = 0$ equivale a $y = 0$, i centri di librazione sono a cercarsi sulla retta $P_1 P_2$.

a) Sia P esterno a $P_1 P_2$ e dalla banda di P_2 . Allora è:

$$\rho_1 = 1 + \rho_2, \quad \rho_1 = x - \frac{\mu}{1 - \mu}, \quad \rho_2 = x - \frac{1}{1 - \mu}, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 1$$

e la prima delle (19) diviene:

$$\varphi(1)(1 + \rho_2) - \varphi(1 + \rho_2) - \mu \varphi(1) \rho_2 + \mu \varphi(\rho_2) = 0. \quad (20)$$

Se $\varphi(r)$ è decrescente non v'ha centro di librazione dalla banda di P_2 : invero il primo membro della (20) che può scriversi:

$$\left\{ \varphi(1) - \varphi(1 + \rho_2) \right\} + \varphi(1)(1 - \mu) \rho_2 + \mu \varphi(\rho_2),$$

per essere $\varphi(r)$ decrescente, si compone della somma di tre addendi positivi. In particolare ciò avviene se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha < 0$.

Siano $\varphi(r)$ e $\varphi'(r)$ crescenti. La derivata del primo membro della (20) è:

$$(1 - \mu) \left[\varphi(1) - \varphi'(1 + \rho_2) \frac{1 - \mu \frac{\varphi'(\rho_2)}{\varphi'(1 + \rho_2)}}{1 - \mu} \right];$$

ora

$$\varphi'(1 + \rho_2) \frac{1 - \mu \frac{\varphi'(\rho_2)}{\varphi'(1 + \rho_2)}}{1 - \mu} > \varphi'(1 + \rho_2) > \varphi'(1)$$

e

$$\varphi(1) < \varphi'(1) \quad (*);$$

dunque la derivata è sempre negativa; il primo membro della (20) che si annulla per $\rho_2 = 0$ è sempre negativo per $\rho_2 > 0$. In particolare ciò avviene se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 1$. Non v'ha dunque centro di librazione dalla banda di P_2 . E non v'è neppure se $\varphi(r)$ è crescente e $\varphi'(r)$ decrescente; infatti:

$$\varphi'(1 + \rho_2) \frac{1 - \mu \frac{\varphi'(\rho_2)}{\varphi'(1 + \rho_2)}}{1 - \mu} < \varphi'(1 + \rho_2) < \varphi'(1)$$

$$\varphi'(1) < \varphi(1),$$

(*) Quando $\varphi(r)$ e $\varphi'(r)$ sono crescenti, si vede facilmente che è $\varphi(r) < r \varphi'(r)$ e se $\varphi'(r)$ è decrescente $\varphi(r) > r \varphi'(r)$, tenendo presente l'ipotesi $\varphi(0) = 0$.

onde la derivata del primo membro della (20) è sempre positiva, epperò per $\rho_2 > 0$ positivo il primo membro stesso. In particolare ciò avviene se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$.

Se $\varphi(r)$ è crescente e l'equazione $\varphi(1)r - \varphi(r) = 0$ ha oltre $r = 1$ le radici semplici r_2, r_3, \dots, r_k , con $r_2 > 2, r_3 - r_2 > 1, r_4 - r_3 > 1, \dots, r_k - r_{k-1} > 1$, e si indica con $F(\rho_2)$ il primo membro della (20), si ha che

$$F(1), F(r_2), F(r_3), \dots, F(r_k)$$

hanno segni alternati; quindi la (20) ammette almeno una radice in ognuno degli intervalli $1 - r_2, r_2 - r_3, \dots, r_{k-1} - r_k$.

b) Sia P esterno al segmento $P_1 P_2$, dalla banda di P_1 : allora è

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \rho_1 = \frac{\mu}{1 - \mu} - \alpha, \quad \rho_2 = \frac{1}{1 - \mu} - \alpha, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho_2}{\partial \alpha} = -1.$$

e la prima delle (19) è:

$$\varphi(1) \left\{ (1 - \mu) \rho_1 - \mu \right\} = \varphi(\rho_1) - \mu \varphi(1 + \rho_1). \quad (21)$$

Sia $\varphi(r)$ decrescente; il primo membro varia da $-\mu \varphi(1)$ a $+\infty$, il secondo da $+\infty$ a 0; v'è dunque almeno una radice della (21), la quale è unica se $\varphi'(r)$ è crescente, perchè allora $\varphi(r) - \mu \varphi(1 + r)$ è decrescente. La radice è maggiore di 1: si osservi a quest'uopo che passando attraverso alla radice della (21), il primo membro diventa maggiore del secondo; ora per $\rho_1 = 1$ il primo membro $\varphi(1)(1 - 2\mu)$ è minore del secondo membro

$$\varphi(1) - \mu \varphi(2),$$

giacchè $\varphi(1) > \varphi(2)$. Dunque v'ha un solo centro di librazione dalla banda di P_1 a distanza da questo maggiore di 1. Siamo in questo caso se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha < 0$.

Se $\varphi(r)$ è crescente, $\rho_1 = 0$ soddisfa la (21), cioè P_1 è centro di librazione; ma vi possono essere altri centri di librazione. Se $\varphi(1)r - \varphi(r) = 0$ oltre $r = 1$ ha le radici semplici r_2, r_3, \dots, r_k con

$$r_2 > 2, r_3 - r_2 > 1, r_4 - r_3 > 1, \dots, r_k - r_{k-1} > 1,$$

la (21) ha almeno una radice in ciascuno degli intervalli

$$1 - r_2, r_2 - r_3, \dots, r_{k-1} - r_k.$$

Siano $\varphi(r)$, $\varphi''(r)$ crescenti e $\varphi'(r)$ decrescente. Si consideri la retta :

$$y = \varphi(1) \left[(1 - \mu)x - \mu \right]$$

e la curva :

$$y = \varphi(x) - \mu \varphi(1 + x)$$

per $x > 0$. Per le ipotesi fatte:

$$\varphi'(x) - \mu \varphi'(1 + x) > 0, \quad \varphi''(x) - \mu \varphi''(1 + x) < 0,$$

cioè la curva, crescente, volge la concavità verso il basso. Retta e curva partono dallo stesso punto $A(0, -\mu \varphi(1))$; inizialmente la curva sta al di sopra della retta, perchè il coefficiente angolare della tangente in A alla curva, $\varphi'(0) - \mu \varphi'(1)$, è maggiore di $\varphi(1)(1 - \mu)$ coefficiente angolare della retta, come si riconosce avendo presenti $\varphi'(0) > \varphi(1)$, $\varphi(1) > \varphi'(1)$. Aggiungendo l'ipotesi che $\varphi'(x) - \mu \varphi'(1 + x)$, che è decrescente, abbia per limite inferiore un numero minore di $\varphi(1)(1 - \mu)$, retta e curva si incontrano. Invero sia H un punto della curva di ascissa ξ per cui :

$$\varphi'(\xi) - \mu \varphi'(1 + \xi) = \gamma < \varphi(1)(1 - \mu);$$

la curva sta tutta al di sotto della tangente in H , ma questa incontra la retta $y = \varphi(1) [(1 - \mu)x - \mu]$, dunque la curva passa al disotto di quest'ultima retta. *V'ha dunque un centro ed uno solo dalla banda di P_1* ; esso dista da P_1 più di 1: invero in $x = 1$ l'ordinata alla retta è $\varphi(1) - 2\mu \varphi(1)$, quella alla curva è $\varphi(1) - \mu \varphi(2)$; ma, poichè la curva $y = \varphi(x)$ rivolge la concavità verso il basso, è $2\varphi(1) > \varphi(2)$, quindi l'ordinata alla retta è minore dell'ordinata alla curva.

Se in particolare $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, $\varphi(r)$ e $\varphi''(r)$ sono crescenti, $\varphi'(r)$ è decrescente e tendente a zero al tendere di r a $+\infty$, onde v'ha uno ed un solo centro di librazione dalla banda di P_1 , a distanza da questo maggiore di 1.

Siano $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ crescenti, φ'' decrescente. Allora è :

$$\varphi''(x) - \mu \varphi''(1 + x) > 0;$$

la curva dianzi considerata volge la concavità verso l'alto; curva e retta partono dallo stesso punto $A(0, -\mu \varphi(1))$ ed inizialmente la curva sta al di sotto della retta. La $\varphi'(x) - \mu \varphi'(1 + x)$ è crescente; se il suo limite supe-

riore è maggiore di $(1 - \mu)\varphi(1)$, si prova che retta e curva si incontrano ed una sola volta. *V'ha dunque uno ed un sol centro di librazione dalla banda di P_1* : esso dista da P_1 più di 1, perchè per $x = 1$ l'ordinata alla curva $\varphi(1) - \mu\varphi(2)$ è minore di quella della retta $\varphi(1) - 2\mu\varphi(1)$, giacchè, volgendo la curva $y = \varphi(x)$ la concavità in alto è $2\varphi(1) < \varphi(2)$.

Se, in particolare, è $\varphi(r) = r^\alpha$ con $1 < \alpha < 2$, è $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ crescenti e $\varphi''(r)$ tendente a $+\infty$ al tendere di r a $+\infty$, φ'' decrescente; onde *v'ha uno ed un solo centro di librazione dalla banda di P_1* , a distanza da questo maggiore di 1.

Infine se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 2$, v'ha un solo centro di librazione dalla banda di P_1 . Infatti la curva solita in questo caso è inizialmente al di sotto della retta e volge la concavità in basso; in $x = \mu^{\frac{1}{\alpha-2}} : \left(1 - \mu^{\frac{1}{\alpha-2}}\right)$ ha un flesso, dopo di che volge sempre la concavità verso l'alto.

Per $x > \mu^{\frac{1}{\alpha-1}} : \left(1 - \mu^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ la curva è crescente; per $x = 1$ l'ordinata alla curva $1 - 2\mu$ è minore dell'ordinata alla retta $1 - 2\mu$; per x sufficientemente grande l'ordinata alla curva è maggiore di quella della retta perchè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x^\alpha - \mu(x+1)^\alpha - (1-\mu)x + \mu \right\} = +\infty;$$

dunque la curva incontra la retta in un punto di ascissa maggiore di 1; in altre parole, v'ha un centro ed uno solo dalla banda di P_1 a distanza da P_1 maggiore di 1.

c) Supponiamo ora P in mezzo a P_1 e P_2 ; allora è:

$$\rho_2 = 1 - \rho_1, \quad \rho_1 = x - \frac{\mu}{1-\mu}, \quad \rho_2 = \frac{1}{1-\mu} - x, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = -1;$$

e la prima delle (19) diviene:

$$\varphi(1)\rho_1 - \varphi(\rho_1) + \mu \left[\varphi(1)(1 - \rho_1) - \varphi(1 - \rho_1) \right] = 0. \quad (22)$$

Sia $\varphi(r)$ decrescente: allora in $0 - 1$ è:

$$\mu\varphi(1 - \rho_1) \geq \mu\varphi(1), \quad \varphi(\rho_1) \geq \varphi(1)$$

(l'eguaglianza avendo luogo solo in 0 ed 1 rispettivamente), onde:

$$\varphi(\rho_1) + \mu\varphi(1 - \rho_1) > \varphi(1)(1 + \mu),$$

e poichè :

$$\varphi(1)(1 + \mu) > \varphi(1) \left[\rho_1(1 - \mu) + \mu \right],$$

il primo membro della (22) è sempre negativo in $0 - 1$. Non v'ha dunque centro di librazione fra P_1 e P_2 : siamo in questo caso se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha < 0$.

Supponiamo $\varphi(r)$ e $\varphi'(r)$ crescenti. Consideriamo nell'intervallo $0 - 1$ la retta

$$y = \varphi(1) \left\{ \mu + (1 - \mu)x \right\}$$

e la curva

$$y = \varphi(x) + \mu \varphi(1 - x).$$

Poichè $\varphi''(x) + \mu \varphi''(1 - x)$ è positivo, la curva volge verso l'alto la concavità; ma retta e curva passano per gli stessi punti $A(0, \mu \varphi(1))$, $B(1, \varphi(1))$ onde curva e retta non hanno in $0 - 1$ che codesti punti in comune. Non v'ha dunque centro di librazione fra P_1 e P_2 . Ciò avviene, in particolare, se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 1$.

Supponiamo $\varphi(r)$ crescente, $\varphi'(r)$ decrescente; in questo caso

$$\varphi''(x) + \mu \varphi''(1 - x)$$

è negativa; la curva volge verso il basso la concavità; curva e retta non hanno in $0 - 1$ che i punti A e B in comune; dunque non v'ha neanche in questo caso centro di librazione fra P_1 e P_2 . Ciò avviene, in particolare, se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$. Tenendo conto dei risultati precedenti si può asserire che: se $\varphi(r) = r^\alpha$ con α numero reale qualunque diverso da 1 non v'ha centro di librazione fra P_1 e P_2 .

Se l'equazione $\varphi(1)r - \varphi(r) = 0$ ha le radici (disposte in ordine crescente)

$$r_1 = 0, \quad r_2, \quad r_3, \dots, \quad r_{k-1}, \quad r_k = 1$$

e per una coppia di radici r_i, r_j è $r_i = 1 - r_j$, allora r_i, r_j soddisfano alla (22); cioè c'è una coppia di centri di librazione fra P_1 e P_2 . Se le radici r_1, r_2, \dots, r_k sono semplici, e, segnati in $0 - 1$ i punti $r_h, 1 - r_h$, se, avendo ij parità diversa, r_i e $1 - r_j$ sono consecutivi (con che saranno consecutivi anche $1 - r_i$ e r_j), il primo membro della (22) ha segni opposti in r_i ed $1 - r_j$, quindi in $r_i - 1 - r_j$ v'ha almeno una radice, e così pure un'altra almeno in $1 - r_i - r_j$. Si hanno in corrispondenza almeno due centri di librazione fra P_1 e P_2 .

d) Supponiamo ora verificata la (18): tenendo conto di questa, la seconda delle (17) dà $y=0$, onde gli eventuali centri di librazione sono a cercarsi nel piano $z x$. Essi sono dati dalle soluzioni comuni del sistema

$$\mu \frac{\varphi(\rho_2)}{\rho_2} - \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} = 0 \quad (18)$$

$$\varphi(1)(1-\mu)x = \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} \quad (23)$$

l'ultima delle quali è la prima delle (17).

Dalle espressioni di ρ_1 e ρ_2 date nel § 2 si trae:

$$x = \frac{1}{2} \left(\rho_1^2 - \rho_2^2 + \frac{1+\mu}{1-\mu} \right)$$

e la (23) diviene:

$$\varphi(1)(1-\mu)(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \varphi(1)(1+\mu) = \frac{2\varphi(\rho_1)}{\rho_1}. \quad (23')$$

Supponiamo che $\frac{\varphi(r)}{r}$ sia crescente da 0 a $+\infty$ al variare di r da 0 a $+\infty$ e denotiamo il rapporto con $\psi(r)$: indichiamo poi con \mathfrak{S} la funzione inversa di ψ che sarà pure crescente da 0 a $+\infty$. Dalla (18) si ricava:

$$\rho_1 = \mathfrak{S} \left(\mu \psi(\rho_2) \right);$$

ρ_1 è funzione crescente di ρ_2 ed è $\rho_1 < \rho_2$, perchè

$$\mathfrak{S} \left(\mu \psi(\rho_2) \right) < \mathfrak{S} \left(\psi(\rho_2) \right) = \rho_2.$$

Ne segue che

$$\varphi(1)(1-\mu)(\rho_2^2 - \rho_1^2) + 2 \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1}$$

varia da 0 a $+\infty$ al variare di ρ_2 da 0 a $+\infty$, onde v'ha almeno un valore di ρ_2 che soddisfa all'equazione (23'); cioè v'ha nel piano $z x$ almeno una coppia di centri di librazione simmetrici rispetto alla retta $P_1 P_2$.

Se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 1$, è $\psi = r^{\alpha-1}$, crescente da 0 a $+\infty$; in questo caso $\rho_2^2 - \rho_1^2 = \rho_2^2 \left(1 - \mu^{\frac{2}{\alpha-1}} \right)$ è crescente, onde la radice della (23') in ρ_2 è unica;

cioè v'è una sola coppia di centri di librazione nel piano zx simmetrici rispetto alla retta $P_1 P_2$.

Il procedimento usato sopra fa vedere anche che se $\psi(r)$ è crescente ma varia da un valore maggiore di $\varphi(1)(1+\mu)$ a $+\infty$ non esiste centro di librazione: ciò avverrebbe, ad es., se $\varphi(r) = cr + r^\alpha$ con $\alpha > 1$ e $c > \frac{1+\mu}{1-\mu}$.

Supponiamo che $\psi(r) = \frac{\varphi(r)}{r}$ sia decrescente da $+\infty$ a 0: la \mathcal{S} è decrescente pure da $+\infty$ a 0: si ricava che ρ_1 è pure funzione crescente di ρ_2 , ma è $\rho_1 > \rho_2$. Il primo membro della (23') è positivo, il secondo membro va da $+\infty$ a 0, dunque almeno un valore di ρ_2 c'è per cui la (23') è soddisfatta; cioè v'ha una coppia almeno di centri di librazione nel piano zx simmetrici rispetto alla retta $P_1 P_2$.

Se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha < 1$, è $\psi(r) = r^{\alpha-1}$ decrescente da $+\infty$ a 0; e, poichè $\rho_1^2 - \rho_2^2 = \rho_2^2 \left(\mu^{\frac{2}{\alpha-1}} - 1 \right)$ è crescente, la radice della (23') è unica.

Si vede poi facilmente che quando $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha = 1$ la radice ρ_2 della (23') in cui sarà fatto $\rho_1 = \rho_2 \mu^{\frac{1}{\alpha-1}}$, è compresa fra 1 e $\mu^{\frac{1}{\alpha-1}}$, onde per la (23) x è compresa fra $\frac{\mu}{1-\mu}$ e $\frac{1}{1-\mu}$: da ciò risulta che la congiungente i due centri di librazione taglia il segmento $P_1 P_2$.

§ 5. MOTO DI P NEL CASO CHE SIA $\varphi(r) = r$

Se $\varphi(r) = r$, le equazioni (7) e (9) divengono:

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2\sqrt{1 \pm \mu} y' &= 0 \\ y'' + 2\sqrt{1 \pm \mu} x' &= 0 \\ z'' &= (1 \pm \mu) z \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

dove del doppio segno davanti a μ vale il superiore nel caso che P_1 e P_2 siano attraenti, l'inferiore se P_2 è repellente.

Denotando con x_0, y_0, z_0 le coordinate di P al tempo $t=0$ e con x'_0, y'_0, z'_0 le componenti sugli assi della velocità di P allo stesso istante,

l'integrale delle (24) è

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{y'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \cos 2\sqrt{1\pm\mu}t + \frac{x'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \operatorname{sen} 2\sqrt{1\pm\mu}t + x_0 - \frac{y'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \\ y &= \frac{y'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \operatorname{sen} 2\sqrt{1\pm\mu}t - \frac{x'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \cos 2\sqrt{1\pm\mu}t + y_0 + \frac{x'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \\ z &= z_0 \cos \sqrt{1\pm\mu}t + \frac{z'_0}{\sqrt{1\pm\mu}} \operatorname{sen} \sqrt{1\pm\mu}t. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Il moto è periodico di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{1\pm\mu}}$; la traiettoria è una curva algebrica che giace sul cilindro che ha le generatrici parallele a z e per direttrice il circolo:

$$\left(x - x_0 + \frac{y'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}}\right)^2 + \left(y - y_0 - \frac{x'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}}\right)^2 = \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{4(1\pm\mu)}; \quad (26)$$

una seconda superficie che insieme al cilindro precedente determina la traiettoria è la superficie di 4.º grado:

$$\left\{ z^2 + z_0^2 + \left(z_0^2 + \frac{z_0'^2}{1\pm\mu}\right) \frac{y'_0(x-x_0) - x'_0(y-y_0)}{x_0'^2 + y_0'^2} \sqrt{1\pm\mu} \right\}^2 - 4z^2 z_0^2 \left\{ 1 + \frac{y'_0(x-x_0) - x'_0(y-y_0)}{x_0'^2 + y_0'^2} \sqrt{1\pm\mu} \right\} = 0.$$

Se $z_0 = z'_0 = 0$, il moto è piano e la traiettoria è il circolo (26); se invece $x'_0 = y'_0 = 0$, il moto è armonico sulla retta $x = x_0$, $y = y_0$.

Se $x_0 = \frac{1}{1\pm\mu}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, x'_0 qualunque, $y'_0 = \sqrt{1\pm\mu}$, $z'_0 = 0$, le equazioni del moto (25) si riducono a:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cos 2\sqrt{1\pm\mu}t + \frac{x'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \operatorname{sen} 2\sqrt{1\pm\mu}t + \frac{1\mp\mu}{2(1\pm\mu)} \\ y &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\sqrt{1\pm\mu}t - \frac{x'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \cos 2\sqrt{1\pm\mu}t + \frac{x'_0}{2\sqrt{1\pm\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

le quali fanno vedere che ai tempi:

$$t = \frac{1}{\sqrt{1\pm\mu}} \left(k\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1\pm\mu}}{x'_0} \right) \quad (28)$$

(k intero qualunque) P è nel punto $\left(\frac{\mp\mu}{1\pm\mu}, 0\right)$ che è la posizione di P_1 .

Fisicamente le condizioni iniziali poste non sono realizzabili; se P è posto in un istante in una posizione vicinissima a P_2 sul cerchio (27) con una velocità uguale a quella che le (27) derivate forniscono pel punto nell'istante in cui esso è nell'indicata posizione, dopo un tempo che differisce di pochissimo dal minimo valore positivo dato dalla (28) avviene la collisione con P_1 .

Se P_1, P_2, P si suppongono sfere perfettamente elastiche, P dopo aver urtato P_1 ripercorre a ritroso la stessa traiettoria e dopo un intervallo di tempo vicinissimo a quello detto sopra urta P_2 , per poi riprendere il moto di prima e così di seguito indefinitamente.

§ 6. MOTI FRA QUELLI DEFINITI DAL SISTEMA

$$\xi'' - A \eta' = B \xi + C \eta, \quad \eta'' + A \xi' = C \xi + D \eta, \quad \zeta'' = \pm E^2 \zeta$$

CHE MANTENGONO IL PUNTO MOBILE NELLE VICINANZE DELL'ORIGINE.

a) Le equazioni del moto di un punto P siano:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - A \eta' &= B \xi + C \eta \\ \eta'' + A \xi' &= C \xi + D \eta \\ \zeta'' &= -E^2 \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ove A, B, C, D, E sono delle costanti. Vogliamo determinare fra i moti definiti da questo sistema quelli che mantengono P nelle vicinanze dell'origine delle coordinate.

L'ultima equazione delle (29) si integra separatamente; se ζ_0, ζ'_0 sono i valori di ζ e ζ' al tempo $t=0$, l'integrale è:

$$\zeta = \zeta_0 \cos Et + \frac{\zeta'_0}{E} \sin Et \quad (E > 0). \quad (30)$$

Le prime due equazioni delle (29) si integrano pure a parte: eliminando η e le sue derivate si perviene all'equazione:

$$\frac{d^4 \xi}{d t^4} + (A^2 - B - D) \frac{d^2 \xi}{d t^2} + (DB - C^2) \xi = 0,$$

Specie diverse di moti si hanno per la diversa natura delle radici dell'equazione caratteristica:

$$\lambda^4 + (A^2 - B - D)\lambda^2 + DB - C^2 = 0 \quad (31)$$

ed ora li passeremo in rassegna.

CASO I. — *Le radici della (31) sono tutte e quattro reali e distinte* $\pm \gamma_1, \pm \gamma_2$.

L'integrale generale del sistema delle due prime equazioni (29) è:

$$\xi = c_1 e^{-\gamma_1 t} + c_2 e^{-\gamma_2 t} + c_3 e^{\gamma_1 t} + c_4 e^{\gamma_2 t}$$

$$\eta = \frac{\gamma_1^2 - B}{C - A\gamma_1} c_1 e^{-\gamma_1 t} + \frac{\gamma_2^2 - B}{C - A\gamma_2} c_2 e^{-\gamma_2 t} + \frac{\gamma_1^2 - B}{C + A\gamma_1} c_3 e^{\gamma_1 t} + \frac{\gamma_2^2 - B}{C + A\gamma_2} c_4 e^{\gamma_2 t}.$$

Perchè nell'intervallo di tempo $0 - +\infty$ il punto P rimanga nelle vicinanze di $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$, occorre sia $c_3 = c_4 = 0$; v'ha dunque a considerare il moto nel piano $\xi\eta$:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 e^{-\gamma_1 t} + c_2 e^{-\gamma_2 t} \\ \eta &= \frac{\gamma_1^2 - B}{C - A\gamma_1} c_1 e^{-\gamma_1 t} + \frac{\gamma_2^2 - B}{C - A\gamma_2} c_2 e^{-\gamma_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Se si dicono $\xi_0, \eta_0, \xi'_0, \eta'_0$ i valori di ξ, η, ξ', η' al tempo $t=0$, delle quattro quantità $\xi_0, \eta_0, \xi'_0, \eta'_0$ due sole si possono prendere ad arbitrio; considerando ξ_0, η_0 come costanti arbitrarie, si ha:

$$c_1 = \frac{(\gamma_2^2 - B)(C - A\gamma_1)\xi_0 - (C - A\gamma_1)(C - A\gamma_2)\eta_0}{(\gamma_2^2 - B)(C - A\gamma_1) - (\gamma_1^2 - B)(C - A\gamma_2)}$$

$$c_2 = \frac{(C - A\gamma_1)(C - A\gamma_2)\xi_0 - (\gamma_1^2 - B)(C - A\gamma_2)\eta_0}{(\gamma_2^2 - B)(C - A\gamma_1) - (\gamma_1^2 - B)(C - A\gamma_2)}$$

ed allora si deve presupporre:

$$\xi'_0 = \frac{(C - A\gamma_1)(C - A\gamma_2)\eta_0 + \left\{ C\gamma_1\gamma_2 - AB(\gamma_1 + \gamma_2) - BC \right\} \xi_0}{AB + \gamma_1\gamma_2 A - C(\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

$$\eta'_0 = \frac{\left\{ -C(\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2) + A\gamma_1\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2) + BC \right\} \eta_0 + (\gamma_1^2 - B)(\gamma_2^2 - B)\xi_0}{AB + \gamma_1\gamma_2 A - C(\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

La traiettoria è algebrica se $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ è razionale; al tendere di t a $+\infty$, P tende all'origine.

Un altro moto nel piano $\xi \eta$ da considerare è:

$$\xi = c_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad \eta = \frac{\gamma_1^2 - B}{C - A \gamma_1} c_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad (33)$$

che avviene sulla retta:

$$(C - A \gamma_1) \eta = (\gamma_1^2 - B) \xi.$$

Se prendiamo ξ_0 come costante arbitraria, è $c_1 = \xi_0$ ed allora si deve supporre:

$$\eta_0 = \frac{\gamma_1^2 - B}{C - A \gamma_1} \xi_0, \quad \xi'_0 = -\gamma_1 \xi_0, \quad \eta'_0 = \gamma_1 \frac{B - \gamma_1^2}{C - A \gamma_1} \xi_0.$$

Analoghe considerazioni per il moto:

$$\xi = c_2 e^{-\gamma_2 t}, \quad \eta = \frac{\gamma_2^2 - B}{C - A \gamma_2} c_2 e^{-\gamma_2 t}. \quad (34)$$

Moti nello spazio che mantengono P nelle vicinanze dell'origine sono quelli definiti dall'associazione del moto armonico (30) con i moti (32) o (33) o (34). Al tendere di t a $+\infty$, i moti tendono a divenire l'armonico (30) sull'asse ζ .

CASO II. — *Le radici della (31) siano due reali $\pm \gamma$ e due immaginarie pure $\pm i \alpha$. L'integrale generale delle due prime delle (29) è:*

$$\begin{aligned} \zeta &= c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t + c_3 e^{-\gamma t} + c_4 e^{\gamma t} \\ \eta &= \frac{-(\alpha^2 + B)}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left\{ (A \alpha \sin \alpha t + C \cos \alpha t) c_1 + (C \sin \alpha t - A \alpha \cos \alpha t) c_2 \right\} + \\ &\quad + \frac{\gamma^2 - B}{C - A \gamma} c_3 e^{-\gamma t} + \frac{\gamma^2 - B}{C + A \gamma} c_4 e^{\gamma t}. \end{aligned}$$

Un moto nel piano $\xi \eta$ che mantiene P nelle vicinanze dell'origine è:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t \\ \eta &= \frac{-(\alpha^2 + B)}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left[(C c_1 - A \alpha c_2) \cos \alpha t + (A \alpha c_1 + C c_2) \sin \alpha t \right]. \end{aligned}$$

Se si prendono ξ_0, η_0 come costanti arbitrarie, è:

$$c_1 = \zeta_0, \quad c_2 = \frac{(\alpha^2 A^2 + C^2) \eta_0 + C(\alpha^2 + B) \xi_0}{A \alpha (\alpha^2 + B)}$$

ed allora si deve supporre che sia:

$$\begin{aligned} \zeta'_0 &= \frac{(\alpha^2 A^2 + C^2) \eta_0 + C(\alpha^2 + B) \xi_0}{A(\alpha^2 + B)} \\ \eta'_0 &= -\frac{\alpha}{A} \left\{ (\alpha^2 + B) \xi_0 + C \eta_0 \right\}; \end{aligned}$$

e le equazioni del moto divengono:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos \alpha t + \frac{(\alpha^2 A^2 + C^2) \eta_0 + C(\alpha^2 + B) \xi_0}{A \alpha (\alpha^2 + B)} \sin \alpha t \\ \eta &= \eta_0 \cos \alpha t - \frac{(\alpha^2 + B) \xi_0 + C \eta_0}{A} \sin \alpha t. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Il moto è periodico; la traiettoria è un'ellisse, la quale, se $C=0$, ha gli assi sugli assi ξ, η .

Un secondo moto nel piano $\xi \eta$ da considerarsi è:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t + c_3 e^{-\gamma t} \\ \eta &= \frac{-(\alpha^2 + B)}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left[(C c_1 - A \alpha c_2) \cos \alpha t + (A \alpha c_1 + C c_2) \sin \alpha t \right] + \\ &\quad + \frac{\gamma^2 B}{C - A \gamma} c_3 e^{-\gamma t}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Se si prendono come costanti arbitrarie ξ_0, η_0, ζ'_0 , è:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(\xi'_0 + \gamma \xi_0) A (\alpha^2 + B) (C - A \gamma) - (\alpha^2 A^2 + C^2)}{(C^2 - B A^2) (\alpha^2 + \gamma^2)} \left\{ (C - A \gamma) \eta_0 - (\gamma^2 - B) \xi_0 \right\} \\ c_2 &= \frac{(\xi'_0 + \gamma \xi_0) \left\{ C(\alpha^2 + B) (C - A \gamma) + (\gamma^2 - B) (\alpha^2 A^2 + C^2) \right\}}{\alpha (C^2 - B A^2) (\alpha^2 + \gamma^2)} + \\ &\quad + \frac{\gamma (\alpha^2 A^2 + C^2) \left\{ (C - A \gamma) \eta_0 - (\gamma^2 - B) \xi_0 \right\}}{\alpha (C^2 - B A^2) (\alpha^2 + \gamma^2)} \\ c_3 &= \frac{(C - A \gamma) \left[(\alpha^2 + B) (C \xi_0 - A \xi'_0) + (A^2 \alpha^2 + C^2) \eta_0 \right]}{(C^2 - B A^2) (\alpha^2 + \gamma^2)}, \end{aligned}$$

ed η'_0 si deve presupporre:

$$\eta'_0 = \frac{\alpha^2 + B}{(B A^2 - C^2)(\alpha^2 + \gamma^2)} \left[\left\{ C(\alpha^2 + \gamma^2) - A\gamma(\alpha^2 + B) \right\} \xi'_0 + \right. \\ \left. + \left\{ C\gamma(\alpha^2 + B) - AB(\alpha^2 + \gamma^2) \right\} \xi_0 + (C\gamma - A\alpha^2)(C - A\gamma)\eta_0 \right] + \\ + \frac{\gamma(\gamma^2 - B)}{B A^2 - C^2} \left[(\alpha^2 + B)(C\xi_0 - A\xi'_0) + (\alpha^2 A^2 + C^2)\eta_0 \right].$$

Al tendere di t a $+\infty$ la traiettoria fa infinite spire intorno all'origine e tende all'ellisse:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t \\ \eta &= \frac{-(\alpha^2 + B)}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left[(C c_1 - A \alpha c_2) \cos \alpha t + (A \alpha c_1 + C c_2) \sin \alpha t \right]. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

La traiettoria dall'istante $t=0$ in poi è tutta compresa nell'area che la ellisse (37) copre subendo la traslazione per cui il suo centro passa dall'origine al punto $\left(c_3, \frac{\gamma^2 - B}{C - A\gamma} c_3 \right)$. Le posizioni di P ad intervalli di tempo $\frac{2\pi}{\alpha}$ sono tutte allineate su rette che hanno la comune direzione di coefficiente angolare $\frac{\gamma^2 - B}{C - A\gamma}$. Mandate due rette di coefficiente angolare $\frac{\gamma^2 - B}{C - A\gamma}$ per due punti qualunque dell'ellisse (37), gli infiniti archi di traiettoria compresi nella striscia formata dalle due parallele e aventi gli estremi su queste sono percorsi in tempi uguali.

Vi ha poi il moto rettilineo:

$$\xi = c_3 e^{-\gamma t}, \quad \eta = \frac{\gamma^2 - B}{C - A\gamma} c_3 e^{-\gamma t} \quad (38)$$

ove, assumendo ξ_0 come costante arbitraria, è:

$$c_3 = \xi_0, \quad \xi'_0 = -\gamma \xi_0, \quad \eta'_0 = -\gamma \frac{\gamma^2 - B}{C - A\gamma} \xi_0.$$

Nello spazio si ha il moto definito dalle (30) e (35); se $\alpha : E$ è razionale la curva è algebrica ed il moto è periodico; se detto rapporto è uguale a ± 1 la traiettoria è piana; infatti il wronskiano di ξ', η', ζ' vale:

$$A \alpha^4 \left\{ \xi_0^2 + \left(\frac{(\alpha^2 A^2 + C^2)\eta_0 + C(\alpha^2 + B)\xi_0}{A \alpha (\alpha^2 + B)} \right)^2 \right\} E (\alpha^2 - E^2) \left(\frac{\zeta'_0}{E} \cos Et - \zeta_0 \sin Et \right),$$

che è nullo identicamente se e solo se $E \pm \alpha = 0$. Se $\alpha : E$ è irrazionale, la traiettoria ha i suoi punti condensati nella porzione di superficie cilindrica che ha per direttrice la ellisse (35), le generatrici parallele a ζ e compresa fra i piani $\zeta = \pm \sqrt{\zeta_0^2 + \left(\frac{\zeta'_0}{E}\right)^2}$ (*). V'ha a considerare il moto definito dalle (30 e (36) che al tendere di t a $+\infty$ tende al moto (30) (37). Infine v'ha il moto piano (30) (38) che al tendere di t a $+\infty$ tende all'armonico (30) sull'asse ζ .

CASO III. — *Le radici dell'equazione (31) siano tutte e quattro immaginarie pure ma distinte $\pm i\alpha$, $\pm i\beta$* . L'integrale generale delle prime due equazioni (29) è:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t + c_3 \cos \beta t + c_4 \sin \beta t \\ \eta &= -\frac{\alpha^2 + B}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left[(C c_1 - A \alpha c_2) \cos \alpha t + (A \alpha c_1 + C c_2) \sin \alpha t \right] - \\ &\quad - \frac{\beta^2 + B}{\beta^2 A^2 + C^2} \left[(C c_3 - A \beta c_4) \cos \beta t + (A \beta c_3 + C c_4) \sin \beta t \right]. \end{aligned}$$

Le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 sono date da:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{C \eta_0 + A \xi'_0 + (\beta^2 + B) \xi_0}{\beta^2 - \alpha^2} \\ c_2 &= H^{-1} \left[-\eta_0 A \left\{ C^2 (B + \alpha^2 + \beta^2) A^2 \alpha^2 \beta^2 \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \xi_0 A C (\alpha^2 + B) (\beta^2 + B) + \eta'_0 C (C^2 - A^2 B) + \right. \\ &\quad \left. + \xi'_0 (\beta^2 + B) (\alpha^2 A^2 + C^2) \right] \\ c_3 &= \xi_0 - c_1 \\ c_4 &= \frac{\xi'_0 - \alpha c_2}{\beta} \end{aligned} \quad (40)$$

(*) Si veggano le mie Note: *Intorno ad alcune soluzioni del problema ristretto dei tre corpi* e l'Addizione alla precedente Nota nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (1916). Nelle quali Note si trovano pure le dimostrazioni di altre asserzioni qui non dimostrate.

ove è:

$$H = \alpha (C^2 - A^2 B) (\beta^2 - \alpha^2).$$

Se $\frac{\alpha}{\beta}$ è razionale, il moto è periodico e la traiettoria è algebrica. Se $\frac{\alpha}{\beta}$ è irrazionale, la traiettoria ha i suoi punti condensati nell'area S determinata come appresso. All'ellisse:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t \\ \eta &= -\frac{\alpha^2 + B}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left[(C c_1 - A \alpha c_2) \cos \alpha t + (A \alpha c_1 + C c_2) \sin \alpha t \right] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

si dia la traslazione per la quale il suo centro percorre l'ellisse:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= c_3 \cos \beta t + c_4 \sin \beta t \\ \eta &= -\frac{\beta^2 + B}{\beta^2 A^2 + C^2} \left[(C c_3 - A \beta c_4) \cos \beta t + (A \beta c_3 - C c_4) \sin \beta t \right]. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

In questo moto la prima ellisse copre l'area S .

Due moti particolari sono gli ellittici (41) e (42) già considerati; perchè si abbia il moto (41), occorre che fra $\zeta_0, \eta_0, \zeta'_0, \eta'_0$ passino le ultime due relazioni (40) in cui è fatto $c_3 = c_4 = 0$; le costanti sono date dalle prime due equazioni delle stesse (40). Analogamente si dica del moto (42).

Nello spazio si ha a considerare il moto definito dalle (30) e (39); se $\frac{\alpha}{E}, \frac{\beta}{E}$ sono razionali, la traiettoria è algebrica ed il moto è periodico.

Se i due rapporti sono irrazionali, ma $\frac{\alpha}{\beta}$ è razionale, la traiettoria ha i suoi punti condensati nella porzione di cilindro avente per direttrice la curva algebrica (39), le generatrici parallele all'asse ζ e compresa fra i due piani $\zeta = \pm \sqrt{\zeta_0^2 + \left(\frac{\zeta'_0}{E}\right)^2}$. Se $\frac{\alpha}{E}$ è razionale e $\frac{\beta}{E}$ è irrazionale, la traiettoria ha i suoi punti condensati sulla superficie che genera l'ellisse (42) quando ad essa si dà un moto di traslazione per cui il suo centro percorre la curva algebrica definita dalle (30) e (41). Infine se i tre rapporti $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{E}, \frac{\beta}{E}$ sono

irrazionali, la traiettoria ha i suoi punti condensati nella porzione di spazio limitata dai piani $\zeta = \pm \sqrt{\zeta_0^2 + \left(\frac{\zeta'_0}{E}\right)^2}$, e dal cilindro che ha le generatrici parallele a ζ e per direttrice il contorno dell'area S dianzi definita.

CASO IV. *Le radici dell'equazione (21) siano due reali doppie $\pm \gamma$.*

L'integrale generale delle prime due equazioni (29) è:

$$\begin{aligned} \xi &= (c_1 + c_2 t) e^{\gamma t} + (c_3 + c_4 t) e^{-\gamma t} \\ \eta &= \left[\frac{(\gamma^2 - B) c_1 + 2\gamma c_2}{A\gamma + C} + \frac{(\gamma^2 - B) \{ (A\gamma + C)t - A \{ c_2 \}}}{(A\gamma + C)^2} \right] e^{\gamma t} + \\ &+ \left[\frac{(\gamma^2 - B) c_3 - 2\gamma c_4}{C - A\gamma} + \frac{(\gamma^2 - B) \{ (C - A\gamma)t - A \{ c_4 \}}}{(C - A\gamma)^2} \right] e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

V'è da considerarsi nel piano $\xi \eta$ il moto:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (c_3 + c_4 t) e^{-\gamma t} \\ \eta &= \left[\frac{(\gamma^2 - B) c_3 - 2\gamma c_4}{C - A\gamma} + \frac{(\gamma^2 - B) \{ (C - A\gamma)t - A \{ c_4 \}}}{(C - A\gamma)^2} \right] e^{-\gamma t}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Se si prendono come costanti arbitrarie ξ_0, η_0 , è:

$$c_3 = \xi_0, \quad c_4 = \frac{C - A\gamma}{A(\gamma^2 + B) - 2\gamma C} \{ (C - A\gamma) \eta_0 - (\gamma^2 - B) \xi_0 \}.$$

Allora bisogna presupporre:

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= \frac{(C - A\gamma)^2 \eta_0 + [C(B + \gamma^2) - 2AB\gamma] \xi_0}{A(\gamma^2 + B) - 2\gamma C} \\ \eta'_0 &= \frac{(\gamma^2 - B)^2 \xi_0 + [C(B + \gamma^2) - 2AB\gamma] \eta_0}{A(\gamma^2 + B) - 2\gamma C}. \end{aligned}$$

Il segmento che congiunge l'origine con (ξ_0, η_0) non è incontrato dalla traiettoria fra 0 e $+\infty$; il massimo scostamento della traiettoria da questa

retta è:

$$\frac{\left\{ (C - A \gamma) \eta_0 - (\gamma^2 - B) \xi_0 \right\}^2}{A (\gamma^2 + B) - 2 \gamma C \left\{ C \gamma \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} \right\}},$$

che si ha all'istante $t = \frac{1}{\gamma}$.

Si hanno ancora a considerare due moti rettilinei nel piano $\xi \eta$. Uno di essi è il già considerato:

$$\xi = c_3 e^{-\gamma t}, \quad \eta = \frac{\gamma^2 - B}{C - A \gamma} c_3 e^{-\gamma t}, \quad (44)$$

e l'altro:

$$\xi = c_4 t e^{-\gamma t}, \quad \eta = \frac{\gamma^2 - B}{C - A \gamma} c_4 t e^{-\gamma t}. \quad (45)$$

Per quest'ultimo moto, detti $\xi_1, \eta_1, \xi'_1, \eta'_1$ i valori di ξ, η, ξ', η' al tempo $t_1 > 0$, se si considera ξ_1 come costante arbitraria è:

$$c_4 = \frac{\xi_1}{t_1} e^{-\gamma t_1},$$

ed allora deve presupporci:

$$\eta_1 = \frac{\gamma^2 - B}{C - A \gamma} \xi_1, \quad \xi'_1 = \frac{1 - \gamma t_1}{t_1} \xi_1, \quad \eta'_1 = \frac{\gamma^2 - B}{C - A \gamma} \cdot \frac{1 - \gamma t_1}{t_1} \xi_1.$$

Se $t_1 < \frac{1}{\gamma}$, il movimento allontana il punto P dall'origine fino all'istante $\frac{1}{\gamma}$, poi lo riaccosta all'origine a cui tende al tendere di t a $+\infty$.

Nello spazio si ha il moto (30) (43) ed i due moti piani (30) (44) e (30) (45). Al tendere di t a $+\infty$, codesti moti tendono a divenire l'armonico (30) sull'asse ζ .

CASO V. *Due radici della (31) siano nulle, due reali $\pm \gamma$.* L'integrale generale delle solite due equazioni è:

$$\xi = c_1 + c_2 t + c_3 e^{\gamma t} + c_4 e^{-\gamma t}$$

$$\eta = \frac{B(A c_2 - C c_1)}{C^2} - \frac{B}{C} c_2 t + \frac{\gamma^2 - B}{A \gamma + C} c_3 e^{\gamma t} + \frac{\gamma^2 - B}{C - A \gamma} c_4 e^{-\gamma t}.$$

Fra questi moti quello che mantiene P nelle vicinanze dell'origine è il

moto rettilineo:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 + c_4 e^{-\gamma t} \\ \eta &= -\frac{B}{C} c_1 + \frac{\gamma^2 - B}{C - A\gamma} c_4 e^{-\gamma t}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Prese ξ_0, η_0 come costanti arbitrarie è:

$$\begin{aligned} c_1 &= C \frac{(\gamma^2 - B) \xi_0 + (C - A\gamma) \eta_0}{\gamma (A B + C \gamma)} \\ c_4 &= (A\gamma - C) \frac{C \eta_0 + B \xi_0}{\gamma (A B + C \gamma)}, \end{aligned}$$

ed allora bisogna presupporre:

$$\xi'_0 = \frac{(C - A\gamma) (C \eta_0 + B \xi_0)}{B A + C \gamma}, \quad \eta'_0 = \frac{(\gamma^2 - B) (C \eta_0 + B \xi_0)}{B A + C \gamma}.$$

Al tendere di t a $+\infty$, il punto P tende al punto $\left(c_1, -\frac{B c_1}{C}\right)$.

È a notarsi che se la (31) deve avere due radici nulle, occorre che sia $B D = C^2$. In ciò che precede è implicitamente supposto $C \neq 0$. Se è $C = 0$, deve essere anche zero B o D . Se è nullo D e non B , l'integrale generale del detto sistema è:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_3 e^{\gamma t} + c_4 e^{-\gamma t} \\ \eta &= c_2 - \frac{B}{A} c_1 t + \frac{\gamma^2 - B}{\gamma A} (c_3 e^{\gamma t} - c_4 e^{-\gamma t}), \end{aligned}$$

epperò il moto che mantiene P nelle vicinanze dell'origine è:

$$\xi = c_4 e^{-\gamma t}, \quad \eta = c_2 + \frac{B - \gamma^2}{\gamma A} c_4 e^{-\gamma t}. \quad (47)$$

Prese ξ_0, η_0 come costanti arbitrarie, è:

$$c_4 = \xi_0, \quad c_2 = \frac{\gamma A \eta_0 - (B - \gamma^2) \xi_0}{\gamma A}$$

ed allora si deve supporre:

$$\xi'_0 = -\gamma \xi_0, \quad \eta'_0 = \frac{\gamma^2 - B}{A} \xi_0.$$

Il punto a cui tende P al tendere di t a $+\infty$ è sull'asse η . Considerazioni analoghe valgono se $D = 0$, $B = 0$. Non può essere contemporaneamente $B = C = D = 0$, altrimenti le radici non nulle della (30) sono immaginarie pure.

Al di fuori del piano $\xi \eta$ si ha il moto piano definito dalle (30) e (46) che al tendere di t a $+\infty$ tende all'armonico (30) sulla parallela a ζ per il punto $\left(c_1, -\frac{B c_1}{C}, 0\right)$; ed anche il moto piano (30) (47).

CASO VI. — *Dell'equazione (31) due radici siano nulle, due immaginarie pure $\pm i \alpha$. L'integrale generale delle due prime equazioni (29) è:*

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_2 t + c_3 \cos \alpha t + c_4 \sin \alpha t \\ \eta &= \frac{B(A c_3 - C c_1)}{C^2} - \frac{B}{C} c_2 t - \frac{\alpha^2 + B}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left[(C c_3 - A \alpha c_1) \cos \alpha t + \right. \\ &\quad \left. + (A \alpha c_3 + C c_4) \sin \alpha t \right]. \end{aligned}$$

Nel piano $\xi \eta$ oltre al moto già considerato al caso II:

$$\begin{aligned} \xi &= c_3 \cos \alpha t + c_4 \sin \alpha t \\ \eta &= -\frac{\alpha^2 + B}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left[(C c_3 - A \alpha c_4) \cos \alpha t + (A \alpha c_3 + C c_4) \sin \alpha t \right], \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \xi \\ \eta \end{aligned}} \right\} \quad (48)$$

v'è anche da considerare il moto:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_3 \cos \alpha t + c_4 \sin \alpha t \\ \eta &= -\frac{B c_1}{C} - \frac{\alpha^2 + B}{\alpha^2 A^2 + C^2} \left[(C c_3 - A \alpha c_4) \cos \alpha t + (A \alpha c_3 + C c_4) \sin \alpha t \right] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \xi \\ \eta \end{aligned}} \right\} \quad (49)$$

che avviene su una ellisse con il centro in $\left(c_1, -\frac{B c_1}{C}\right)$.

Se si prendono ξ_0, η_0, ξ'_0 come costanti arbitrarie, è:

$$\begin{aligned} c_1 &= C \frac{(\alpha^2 A^2 + C^2) \eta_0 + (C \xi_0 - A \xi'_0) (\alpha^2 + B)}{\alpha^2 (C^2 - A^2 B)} \\ c_3 &= \frac{(\alpha^2 A^2 + C^2) (C \eta_0 - B \xi_0) + C A (\alpha^2 + B) \xi'_0}{\alpha^2 (C^2 - A^2 B)} \\ c_4 &= \frac{\xi'_0}{\alpha}, \end{aligned}$$

ed allora si deve supporre

$$\eta'_0 = \frac{A(C\eta_0 + B\xi_0) + C\xi'_0}{\alpha(C^2 - A^2B)} (\alpha^2 A^2 + C^2).$$

Poichè dev'essere in questo caso $C^2 = BD$ e si è supposto implicitamente in ciò che precede $C \neq 0$, consideriamo il caso $C = D = 0$, $B = 0$. Allora l'integrale generale è:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 + c_3 \cos \alpha t + c_4 \sin \alpha t \\ \eta_0 &= -\frac{B}{A} c_1 t + c_2 - \frac{A}{\alpha} (c_3 \sin \alpha t - c_4 \cos \alpha t). \end{aligned} \right\} \quad (49')$$

Perchè il punto P si mantenga nelle vicinanze dell'origine, bisogna che sia $c_1 = 0$. La traiettoria è un'ellisse cogli assi paralleli agli assi $\xi \eta$ ed il centro in $(0, c_2)$. Prese ξ_0, η_0, ξ'_0 come costanti arbitrarie è:

$$c_2 = \eta_0 - \frac{A\xi'_0}{\alpha^2}, \quad c_3 = \xi_0, \quad c_4 = \frac{\xi'_0}{\alpha},$$

ed allora bisogna presupporre:

$$\eta'_0 = -A\xi_0;$$

le equazioni del moto divengono:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0 \cos \alpha t + \frac{\xi'_0}{\alpha} \sin \alpha t \\ \eta &= \eta_0 - \frac{A\xi'_0}{\alpha} - \frac{A}{\alpha} \left(\xi_0 \sin \alpha t - \frac{\xi'_0}{\alpha} \cos \alpha t \right). \end{aligned} \right\} \quad (49'')$$

Nello spazio si ha il moto definito dalle (30) (49); se $\frac{\alpha}{E}$ è razionale, il moto è periodico e la traiettoria algebrica, se no, la traiettoria ha i suoi punti condensati nella porzione di cilindro che ha per direttrice l'ellisse (49) e le generatrici parallele all'asse ζ , compresa fra i due piani

$$\zeta = \pm \sqrt{\zeta_0^2 + \left(\frac{\xi'_0}{E}\right)^2}.$$

E può aversi il moto analogo al precedente definito da (30) e (49'').

CASO VII. Le radici della (31) siano quattro complesse distinte $\pm \alpha \pm i\beta$.
L'integrale generale delle prime due equazioni (29) è :

$$\begin{aligned} \xi &= e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + e^{-\alpha t} (c_3 \cos \beta t + c_4 \sin \beta t) \\ \eta &= \frac{e^{\alpha t}}{A\beta^2 + (A\alpha + C)^2} \left[- \left(A(\alpha^2 + \beta^2 + B) + 2\alpha C \right) \beta c_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(A\alpha(\alpha^2 + \beta - B) + C(\alpha^2 - \beta^2 - B) \right) c_2 \left\{ \sin \beta t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(A\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - B) + C(\alpha^2 - \beta^2 - B) \right) c_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(A(\alpha^2 + \beta^2 + B) + 2AC \right) \beta c_2 \left\{ \cos \beta t \right\} + \right. \\ &+ \frac{e^{-\alpha t}}{A\beta^2 + (C - A\alpha)^2} \left[\left(2\alpha C - A(\alpha^2 + \beta^2 + B) \right) \beta c_3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(C(\alpha^2 - \beta^2 - B) - A\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - B) \right) \beta c_4 \left\{ \sin \beta t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(C(\alpha^2 - \beta^2 - B) - A\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - B) \right) c_3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(A(\alpha^2 + \beta^2 + B) - 2\alpha C \right) \beta c_4 \left\{ \cos \beta t \right\} \right]. \end{aligned}$$

Il moto nel piano $\xi\eta$ che mantiene P nelle vicinanze dell'origine è :

$$\begin{aligned} \xi &= e^{-\alpha t} (c_3 \cos \beta t + c_4 \sin \beta t) \\ \eta &= \frac{e^{-\alpha t}}{A\beta^2 + (C - A\alpha)^2} \left[\left(2\alpha C - A(\alpha^2 + \beta^2 + B) \right) \beta c_3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(C(\alpha^2 - \beta^2 - B) - A\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - B) \right) c_4 \left\{ \sin \beta t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(C(\alpha^2 - \beta^2 - B) - A\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - B) \right) c_3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(A(\alpha^2 + \beta^2 + B) - 2\alpha C \right) \beta c_4 \left\{ \cos \beta t \right\} \right]. \end{aligned} \tag{50}$$

Prese ξ_0, η_0 come costanti arbitrarie, è :

$$c_3 = \xi_0, \quad c_4 = \frac{\eta_0 \left\{ A\beta^2 + (C - A\alpha)^2 \right\} - \xi_0 \left\{ C(\alpha^2 - \beta^2 - B) - A\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - B) \right\}}{\beta \left\{ A(\alpha^2 + \beta^2 + B) - 2\alpha C \right\}},$$

ed allora bisogna presupporre :

$$\xi'_0 = \frac{\eta_0 \left\{ A \beta^2 + (C - A \alpha)^2 \left\{ -\xi_0 \right\} 2 A B \alpha - C (\alpha^2 + \beta^2 + B) \right\}}{A (\alpha^2 + \beta^2 + B) - 2 \alpha C}$$

$$\eta'_0 = \frac{\eta_0 \left\{ C(3\alpha^2 - \beta^2 - B) - 2A\alpha(\alpha^2 + \beta^2) \left\{ -\xi_0 \right\} (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2B(\alpha^2 - \beta^2) + B^2 \right\}}{A (\alpha^2 + \beta^2 + B) - 2 \alpha C}.$$

Ad intervalli di tempo uguali a $\frac{2\pi}{\beta}$ i punti sono su una stessa retta per l'origine; discende da ciò che se si mandano per l'origine due raggi, gli infiniti archi della traiettoria nello stesso angolo e aventi gli estremi sui due raggi sono percorsi in tempi uguali.

Nello spazio si ha il moto definito dalle (30) (50); al tendere di t a $+\infty$ il moto tende al moto armonico (30) sull'asse ζ . Se $\frac{\beta}{E}$ è razionale, le funzioni $\sin \beta t$, $\cos \beta t$, $\sin Et$, $\cos Et$ hanno un periodo T ; a tutti i tempi $t = \bar{t} + k T$ (\bar{t} qualunque, k intero qualunque) il punto P si trova sopra una retta incidente e normale all'asse ζ .

CASO VIII. — *Le radici siano due immaginarie doppie $\pm i \alpha$* . L'integrale generale delle prime due equazioni (29) è:

$$\xi = (c_1 + c_2 t) \cos \alpha t + (c_3 + c_4 t) \sin \alpha t$$

$$\eta = \frac{1}{C^2 + A^2 \alpha^2} \left[\left\{ (2 \alpha c_4 - (\alpha^2 + B) c_1) C + (2 \alpha c_2 + (\alpha^2 + B) c_3) A \alpha - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{A c_2 (\alpha^2 + B) (A^2 \alpha - C^2) + 2 A^2 C \alpha c_4 (\alpha^2 + B)}{A^2 \alpha^2 + C^2} - C c_4 (\alpha^2 + B) t \right\} \cos \alpha t +$$

$$+ \left\{ (2 \alpha c_4 - (\alpha^2 + B) c_1) A \alpha - (2 \alpha c_2 + (\alpha^2 + B) c_3) C + \right.$$

$$\left. + \frac{2 C A^2 \alpha c_2 (\alpha^2 + B) - A (A \alpha - C^2) c_4 (\alpha^2 + B)}{A^2 \alpha^2 + C^2} - C c_2 (\alpha^2 + B) t \right\} \sin \alpha t \Big].$$

Sono a considerarsi nel piano i moti:

$$\xi = c_1 \cos \alpha t + c_3 \sin \alpha t$$

$$\eta = - \frac{(\alpha^2 + B)}{C^2 + A^2 \alpha^2} \left\{ (C c_1 - A \alpha c_3) \cos \alpha t + (C c_3 + A \alpha c_1) \sin \alpha t \right\}$$

in cui se si prendono ξ_0, η_0 come costanti arbitrarie è:

$$c_1 = \xi_0, \quad c_3 = \frac{(\alpha^2 A^2 + C^2) \eta_0 + C(\alpha^2 + B) \xi_0}{A \alpha (\alpha^2 + B)},$$

ed allora si deve presupporre sia:

$$\xi'_0 = \frac{(\alpha^2 A^2 + C^2) \eta_0 + C(\alpha^2 + B) \xi_0}{A (\alpha^2 + B)}$$

$$\eta'_0 = -\frac{\alpha}{A} \left\{ (\alpha^2 + B) \xi_0 + C \eta_0 \right\},$$

e le equazioni del moto divengono le (35) già considerate al caso II.

CASO IX. — *Siano nulle tutte e quattro le radici λ ; ciò che esige*

$$A^2 = B + D, \quad C^2 = B D.$$

In questo caso le prime due equazioni (29) hanno per integrale generale:

$$\xi = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3$$

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{C^4} & \left[-B C^3 c_1 + A B C^2 c_2 + 2(C^3 - B A^2 C) c_3 + 6(A^3 B - A C^2) c_4 \right] + \\ & + \frac{t}{C^3} \left[-B C^2 c_2 + 2 A B C c_3 + 6(C^2 - A^2 B) c_4 \right] + \\ & + \frac{t^2}{C^2} \left[-B C c_3 + 3 A B c_4 \right] - \frac{B c_4}{C} t^3. \end{aligned}$$

Nessun moto nel piano $\xi \eta$ mantiene P nelle vicinanze dell'origine: se il punto P è posto in un punto qualunque della retta per l'origine

$$B \xi + C \eta = 0$$

senza velocità iniziale vi permane. Che se $C = B = 0$ ad ogni punto dell'asse ξ e se $C = D = 0$ ad ogni punto dell'asse η compete la proprietà dei punti della retta di dianzi.

Nel caso spaziale si ha un moto armonico sulla retta

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = -\frac{B}{C} \xi_0,$$

ξ_0 qualunque.

b) Il moto del punto P sia definito dal sistema

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - A \eta' &= B \xi + C \eta \\ \eta'' + A \xi' &= C \xi + D \eta \\ \zeta'' &= E^2 \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Si avranno le equazioni del moto di P associando gli integrali già trovati per il sistema delle prime due equazioni con l'integrale dell'ultima, cioè:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\zeta_0 + \frac{\zeta'_0}{E} \right) e^{Et} + \frac{1}{2} \left(\zeta_0 - \frac{\zeta'_0}{E} \right) e^{-Et}.$$

Volendo i moti che mantengono P nelle vicinanze dell'origine, preso ζ_0 arbitrariamente, bisogna supporre $\zeta'_0 = -E\zeta_0$, dopo di che l'integrale precedente diviene:

$$\zeta = \zeta_0 e^{-Et}. \quad (51)$$

Associando questo integrale agli integrali del sistema delle prime due equazioni considerati nei nove casi che precedono avremo altri moti che mantengono P nelle vicinanze dell'origine.

CASO I'. *Le radici della (31) sono quattro reali distinte $\pm \gamma_1, \pm \gamma_2$.* Si hanno i moti definiti dalle (51) (32) o (51) (33) o (51) (34). Nel primo caso la traiettoria è algebrica se $\gamma_1 : E, \gamma_2 : E$ sono razionali; nel secondo e terzo caso i moti sono piani e le traiettorie sono algebriche se sono razionali rispettivamente i rapporti $\gamma_1 : E$ o $\gamma_2 : E$. In tutti i casi al tendere di t a $+\infty$, P tende all'origine.

CASO II'. *Le radici della (31) sono due reali $\pm \gamma$ e due immaginarie pure $\pm i\alpha$.* Si ha il moto definito dalle (51) e (35); al tendere di t a $+\infty$, la traiettoria tende all'ellisse (35). Il moto definito dalle (51) e (36) tende al tendere di t a $+\infty$ al moto ellittico (37). Infine v'ha il moto nel piano $(C - A\gamma)\eta = (\gamma^2 - B)\xi$ definito dalle (51) (38).

CASO III'. *Le radici della (31) sono quattro immaginarie pure e distinte $\pm i\alpha, \pm i\beta$.* Si hanno i moti definiti dalle (51) e (39) o dalle (51) e (41), o infine dalle (51) e (42); al tendere di t a $+\infty$ i moti tendono a divenire i moti piani considerati al caso III.

CASO IV'. *Le radici della (31) sono due reali doppie $\pm \gamma$.* Si ha il moto definito dalle (51) e (43) che avviene fra t_1 e $+\infty$ da una sola banda del

piano $\xi \eta_0 = \eta \xi_0$ ed i due moti piani ottenuti associando la (51) con le (44) o (45).

CASO V'. *Della (31) due radici sono nulle, due reali $\pm \gamma$.* Si ha il moto definito dalle (51) e (46) o, se $C=0$, dalle (51) e (47).

CASO VI'. *Dell'equazione (31) due radici sono nulle, due sono immaginarie pure $\pm i \alpha$.* Si hanno i moti definiti dalle (51) e (48), dalle (51) e (49) o, se $C=0$, dalle (51) e (49').

CASO VII'. *Le radici della (31) sono quattro complesse distinte $\pm \alpha \pm i \beta$.* Si ha il moto definito dalle (51) e (50); al tendere di t a $+\infty$, P tende all'origine.

CASO VIII'. *Della (31) le radici sono due immaginarie pure:* si ha a considerare il moto (35) (51) che al tendere di t a $+\infty$ tende all'ellittico (35).

CASO IX'. *Della (31) le radici sono tutte nulle:* si ha il moto rettilineo (51) sulla retta $\xi = \xi_0$, $\eta = \frac{B}{C} \xi_0$ con ξ_0 qualunque; se $B=C=0$ su una qualsivoglia retta del piano $\eta=0$ parallela a ζ ; se $B=D=0$ su una qualunque retta del piano $\xi=0$ parallela a ζ .

§ 7. MOTI DELLA PICCOLA MASSA IN VICINANZA DELLE GRANDI MASSE
SE $\varphi(r)$ È CRESCENTE.

Trasportiamo gli assi $x y z$ parallelamente a loro stessi in modo che l'origine vada in P_1 o in P_2 a seconda che cerchiamo moti di P che lo mantengono nelle vicinanze di P_1 o di P_2 . Denotiamo le nuove coordinate con ξ, η, ζ .

Sviluppiamo le tre derivate parziali di w_1 o di w_2 (a seconda che P_2 è attraente o repellente) secondo le potenze di ξ, η, ζ , trascurando i termini di grado superiore al primo. Quando $\varphi(r)$ sia crescente abbiamo visto nei paragrafi 3 e 4 che P_1 e P_2 sono centri di librazione: da ciò risulta che le equazioni del moto di P divengono del tipo (29) o (29'): esse daranno luogo a soluzioni dei sistemi (7) e (9) legittime nella posta approssimazione quando ci si limiti alla considerazione di quelle che mantengono P nelle vicinanze dell'origine.

α) Se $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ è il punto P_1 , in codesto punto si ha, sup-

ponendo P_2 attraente:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \varphi(1) - \varphi'(0) - \mu \left\{ \varphi'(1) - \varphi(1) \right\}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = \varphi(1) - \varphi'(0),$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} = - \left\{ \varphi'(0) + \mu \varphi(1) \right\}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta \partial \xi} = 0.$$

Le equazioni del moto di P sono le (29) ove si faccia:

$$A = 2\sqrt{(1+\mu)\varphi(1)}, \quad B = \varphi(1) - \varphi'(0) - \mu \left\{ \varphi'(1) - \varphi(1) \right\}, \quad C = 0,$$

$$D = \varphi(1) - \varphi'(0), \quad E^2 = \varphi'(0) + \mu \varphi(1).$$

Posto per brevità:

$$H = 2 \left(\varphi(1) + \varphi'(0) \right) + \mu \left(3 \varphi(1) + \varphi'(1) \right), \quad K = \mu^2 \left(3 \varphi(1) + \varphi'(1) \right)^2 + \\ + 8 \mu \varphi(1) \left(\varphi'(1) + \varphi(1) + 2 \varphi'(0) \right) + 16 \varphi(1) \varphi'(0),$$

le radici della (31) sono:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(-H \pm \sqrt{K} \right)}.$$

Se supponiamo $\varphi'(r)$ crescente, in particolare $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 1$, o $\varphi'(r)$ decrescente (*), se è $1 > \mu > \frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)}$, due radici $\pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(-H + \sqrt{K} \right)}$ sono reali e due $\pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(-H - \sqrt{K} \right)}$ immaginarie pure, epperò i moti che mantengono P nelle vicinanze di P_1 sono quelli del caso II del § 6.

Se $\mu < \frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)}$, le quattro radici sono immaginarie pure ed i moti sono quelli del caso III; se $\mu = \frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)} < 1$, due radici sono nulle e le altre due $\pm i\sqrt{H}$ immaginarie pure ed i moti che mantengono P nelle vicinanze di P_1 sono quelli del caso VI.

(*) Non rientra in questo caso $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, perchè $\varphi'(0)$ è infinita.

Se non si fa l'ipotesi della crescita o decrescenza della $\varphi'(r)$, nulla si può dire circa il segno delle differenze $\varphi(1) - \varphi'(0)$, $\varphi'(1) - \varphi(1)$ ed allora se è $\mu \left\{ \varphi(1) - \varphi'(0) \right\} \left\{ \varphi'(1) - \varphi(1) \right\} > \left\{ \varphi(1) - \varphi'(0) \right\}^2$ i moti sono quelli del caso II, se il segno della disuguaglianza è l'opposto, i moti sono quelli del caso III e se $\mu \left\{ \varphi(1) - \varphi'(0) \right\} \left\{ \varphi'(1) - \varphi(1) \right\} = \left\{ \varphi(1) - \varphi'(0) \right\}^2$, i moti sono quelli del caso VI.

Se P_2 respinge, le derivate di w_2 in $P_1(0, 0, 0)$ sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} &= \varphi(1) - \varphi'(0) + \mu \left(\varphi'(1) - \varphi(1) \right), & \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} &= \varphi(1) - \varphi'(0), \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} &= \mu \varphi(1) - \varphi'(0) & \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta \partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

A seconda che $\mu \varphi(1) - \varphi'(0)$ è negativo o positivo le equazioni del moto di P sono le (29) o le (29') quando si faccia:

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{(1-\mu)\varphi(1)}, & B &= \varphi(1) - \varphi'(0) + \mu \left(\varphi'(1) - \varphi(1) \right), \\ C &= 0, & D &= \varphi(1) - \varphi'(0), & E^2 &= \mu \varphi(1) - \varphi'(0). \end{aligned}$$

Se $\varphi'(r)$ è crescente, posto:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 4 \frac{\varphi(1) \left\{ \varphi(1) + \varphi'(1) + 2\varphi'(0) \right\}}{\left(3\varphi(1) + \varphi'(1) \right)^2} + \\ &- 4 \frac{\sqrt{\varphi(1)^2 \left\{ \varphi(1) + \varphi'(1) + 2\varphi'(0) \right\}^2 - \varphi(1)\varphi'(0)} \left\{ 3\varphi(1) + \varphi'(1) \right\}}{\left(3\varphi(1) + \varphi'(1) \right)^2} \\ \omega_2 &= 4 \frac{\varphi(1) \left\{ \varphi(1) + \varphi'(1) + 2\varphi'(0) \right\}}{\left(3\varphi(1) + \varphi'(1) \right)^2} + \\ &+ 4 \frac{\sqrt{\varphi(1)^2 \left\{ \varphi(1) + \varphi'(1) + 2\varphi'(0) \right\}^2 - \varphi(1)\varphi'(0)} \left\{ 3\varphi(1) + \varphi'(1) \right\}}{\left(3\varphi(1) + \varphi'(1) \right)^2} \end{aligned}$$

si prova che ω_1 ed ω_2 sono positivi e minori di 1. Allora se $\mu < \omega_1$ le radici della (31) sono quattro immaginarie pure e distinte, epperò i moti sono quelli dei casi III o III'; se $\mu = \omega_1$, le radici sono immaginarie doppie ed i moti sono quelli dei casi VIII o VIII'; se $\omega_1 < \mu < \omega_2$ le radici sono complesse ed i moti sono quelli dei casi VII o VII'; se $\mu = \omega_2$ le radici sono due reali doppie ed i moti sono quelli dei casi IV o IV'; infine se $\mu > \omega_2$ le radici sono quattro reali distinte ed i moti sono quelli dei casi I o I'.

b) Consideriamo ora i moti in vicinanza di P_2 . In codesto punto, trasportata l'origine degli assi, come dianzi fu detto, le derivate seconde di w_1 , se P_2 è attraente, sono:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \varphi(1) - \varphi'(1) + \mu \left(\varphi(1) - \varphi'(0) \right), \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = \mu \left(\varphi(1) - \varphi'(0) \right)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} = - \left(\varphi(1) + \mu \varphi'(0) \right), \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta \partial \xi} = 0.$$

Le equazioni del moto di P sono le (29) quando in esse si faccia:

$$A = 2\sqrt{(1+\mu)\varphi(1)}, \quad B = \varphi(1) - \varphi'(1) + \mu \left(\varphi(1) - \varphi'(0) \right), \quad C = 0,$$

$$D = \mu \left(\varphi(1) - \varphi'(0) \right), \quad E^2 = \varphi(1) + \mu \varphi'(0).$$

Le radici della (31) sono:

$$\pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[-H \pm \sqrt{K} \right]},$$

posto:

$$H = 3\varphi(1) + \varphi'(1) + 2\mu \left(\varphi(1) + \varphi'(0) \right)$$

$$K = 16\mu^2 \varphi(1) \varphi'(0) + 8\mu \varphi(1) \left(\varphi(1) + \varphi'(1) + 2\varphi'(0) \right) + \left(3\varphi(1) + \varphi'(1) \right)^2.$$

Se $\varphi'(r)$ è crescente o decrescente ed è $\mu < \frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)}$ le radici della (31)

sono due reali $\pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(-H + \sqrt{K} \right)}$ e due immaginarie pure $\pm i \sqrt{\frac{1}{2} \left(H + \sqrt{K} \right)}$ ed i moti sono quelli del caso II; ciò avviene, in particolare, se $\varphi(r) = r^\alpha$

con $\alpha > 1$; se $1 > \mu > \frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)}$, le quattro radici sono immaginarie pure ed i moti sono quelli del caso III; se $\mu = \frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(0)} < 1$, due radici sono nulle e due immaginarie pure $\pm i\sqrt{H}$ ed i moti sono quelli del caso VI.

Se non facciamo l'ipotesi sulla crescenza o decrescenza della $\varphi'(r)$, i moti sono quelli del caso II se $\mu \left(\varphi(1) - \varphi'(0) \right)^2 < \left(\varphi'(1) - \varphi(1) \right) \left(\varphi(1) - \varphi'(0) \right)$; sono quelli del caso III se la disuguaglianza ha il senso opposto, e sono quelli del caso VI se $\mu \left(\varphi(1) - \varphi'(0) \right)^2 = \left(\varphi'(1) - \varphi(1) \right) \left(\varphi(1) - \varphi'(0) \right)$.

Se P_2 respinge, le derivate seconde di w_2 calcolate in P_2 sono:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} = \varphi(1) - \varphi'(1) + \mu \left(\varphi'(0) - \varphi(1) \right), \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} = \mu \left(\varphi'(0) - \varphi(1) \right),$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} = \mu \varphi'(0) - \varphi(1), \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta \partial \xi} = 0.$$

Le equazioni del moto di P sono le (29) o (29') a seconda che $\mu \varphi'(0) - \varphi(1)$ è negativo o positivo, quando in esse si faccia:

$$A = 2\sqrt{(1 - \mu)\varphi(1)}, \quad B = \varphi(1) - \varphi'(1) + \mu \left(\varphi'(0) - \varphi(1) \right), \quad C = 0,$$

$$D = \mu \left(\varphi'(0) - \varphi(1) \right), \quad E^2 = \mu \varphi'(0) - \varphi(1)$$

Se $\varphi'(r)$ è crescente, $\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2}$ è negativa; di più le quattro radici della (31) sono immaginarie pure, epperò i moti che mantengono P nelle vicinanze di P_2 sono quelli del caso III.

§ 8. MOTI DELLA PICCOLA MASSA NELLE VICINANZE DEI CENTRI DI LIBRAZIONE POSTI SULL'ASSE DEL SEGMENTO $P_1 P_2$.

Abbiamo visto che alle radici maggiori di $\frac{1}{2}$ dell'equazione:

$$r \varphi(1) - \varphi(r) = 0, \tag{13}$$

corrispondono centri di librazione sull'asse del segmento $P_1 P_2$ e che in ogni

caso fra questi centri v'ha sempre la coppia di punti che sono vertici dei due triangoli equilateri costruiti sopra il segmento $P_1 P_2$.

Chiamiamo σ una radice della (13), L_σ il punto dell'asse indicato di ordinata positiva, L'_σ quello di ordinata contraria, L_σ e L'_σ essendo i due centri di librazione che corrispondono a σ .

Supponiamo P_2 attraente. Trasportiamo, come al solito, gli assi parallelamente a loro stessi in modo che l'origine vada in L_σ e calcoliamo nella nuova origine le derivate seconde di w_1 ; si ha così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} &= \frac{1+\mu}{4} \frac{\varphi(1) - \varphi'(\sigma)}{\sigma^2}, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} &= (1+\mu) \left(\sigma^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\varphi(1) - \varphi'(\sigma)}{\sigma^2}, \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} &= -(1+\mu) \varphi(1), & \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{1-\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\varphi(1) - \varphi'(\sigma)}{\sigma^2}, \\ & & \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \zeta} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta \partial \zeta} = 0. \end{aligned}$$

Le radici dell'equazione (31) sono:

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[- (1+\mu) \left(3\varphi(1) + \varphi'(\sigma) \right) \pm \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \pm \sqrt{(1+\mu)^2 \left(3\varphi(1) + \varphi'(\sigma) \right)^2 - \frac{\left(\varphi(1) - \varphi'(\sigma) \right)^2}{\sigma^4} (4\sigma^2 - 1)\mu} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Se:

$$\varphi'(\sigma) < \frac{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} + 3\sigma^2(1+\mu)}{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} - \sigma^2(1+\mu)},$$

le radici sono quattro reali distinte; i moti sono quelli del caso I; se:

$$\varphi'(\sigma) = \frac{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} + 3\sigma^2(1+\mu)}{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} - \sigma^2(1+\mu)},$$

le radici sono due reali doppie; i moti sono quelli del caso IV; se

$$\frac{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} + 3\sigma^2(1+\mu)}{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} - \sigma^2(1+\mu)} < \varphi'(\sigma) < \frac{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} - 3\sigma^2(1+\mu)}{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} + \sigma^2(1+\mu)},$$

le radici sono quattro complesse; i moti sono quelli del caso VII; se

$$\varphi'(\sigma) = \frac{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} - 3\sigma^2(1 + \mu)}{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} + \sigma^2(1 + \mu)}$$

le radici sono due immaginarie pure doppie; i moti sono quelli del caso VIII; se

$$\varphi'(\sigma) > \frac{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} - 3\sigma^2(1 + \mu)}{\sqrt{(4\sigma^2 - 1)\mu} + \sigma^2(1 + \mu)}$$

le radici sono quattro immaginarie pure distinte; i moti sono quelli del caso III. Se fosse $\sigma = \frac{1}{2}$ (il centro di librazione è il punto di mezzo di P_1, P_2) e $\varphi'(\frac{1}{2}) = -3\varphi(1)$, le quattro radici sarebbero nulle e quindi saremmo nel caso IX.

In particolare sia $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha \neq 1$; è allora $\sigma = 1$, $\varphi'(\sigma) = \alpha$, $\varphi(1) = 1$. Se:

$$\alpha < \frac{\sqrt{3\mu} + 3(1 + \mu)}{\sqrt{3\mu} - (1 + \mu)}$$

le quattro radici sono reali distinte; se:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3\mu} + 3(1 + \mu)}{\sqrt{3\mu} - (1 + \mu)}$$

le radici sono due reali doppie; se:

$$\frac{\sqrt{3\mu} + 3(1 + \mu)}{\sqrt{3\mu} - (1 + \mu)} < \alpha < \frac{\sqrt{3\mu} - 3(1 + \mu)}{\sqrt{3\mu} + 1 + \mu}$$

le radici sono complesse; se:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3\mu} - 3(1 + \mu)}{\sqrt{3\mu} + 1 + \mu}$$

le radici sono due immaginarie pure doppie; se:

$$\alpha > \frac{\sqrt{3\mu} - 3(1 + \mu)}{\sqrt{3\mu} + 1 + \mu}$$

le radici sono immaginarie pure distinte.

Questi risultati possono anche enunciarsi così: se $\alpha < -15 - 8\sqrt{3}$ le radici sono quattro reali distinte qualunque sia μ . Se $-15 - 8\sqrt{3} \leq \alpha < -3$, le radici sono quattro reali distinte se:

$$0 < \mu < \frac{\alpha^2 - 18\alpha - 15 + (\alpha - 1)\sqrt{-3(\alpha^2 + 30\alpha + 33)}}{2(\alpha + 3)^2},$$

sono complesse se:

$$1 \geq \mu > \frac{\alpha^2 - 18\alpha - 15 + (\alpha - 1)\sqrt{-3(\alpha^2 + 30\alpha + 33)}}{2(\alpha + 3)^2},$$

e sono reali doppie se:

$$\mu = \frac{\alpha^2 - 18\alpha - 15 + (\alpha - 1)\sqrt{-3(\alpha^2 + 30\alpha + 33)}}{2(\alpha + 3)^2}.$$

Se $\alpha = -3$, le radici sono i quattro numeri $\sqrt[3]{3}\mu(\pm 1 \pm i)$. Se

$$-3 < \alpha \leq -15 + 8\sqrt{3},$$

le radici sono immaginarie pure se:

$$0 < \mu < \frac{\alpha^2 - 18\alpha - 15 + (\alpha - 1)\sqrt{-3(\alpha^2 + 30\alpha + 33)}}{2(\alpha + 3)^2}$$

e complesse se:

$$1 > \mu > \frac{\alpha^2 - 18\alpha - 15 + (\alpha - 1)\sqrt{-3(\alpha^2 + 30\alpha + 33)}}{2(\alpha + 3)^2}.$$

In L'_σ le derivate parziali di w_1 prendono gli stessi valori che in L_σ salvo che la $\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \eta}$ che cambia di segno, ma poichè in (31) C , che assume il valore di questa derivata mista, entra solamente al quadrato, sulla natura dei moti vale tutto quanto è stato detto relativamente ai moti in vicinanza di L_σ .

Supponiamo ora P_2 repellente; le derivate seconde di w_2 in P_2 sono:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} = \frac{1-\mu}{4} \cdot \frac{\varphi(1) - \varphi'(\sigma)}{\sigma^2}, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} = (1-\mu) \left(\sigma^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\varphi(1) - \varphi'(\sigma)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} = -(1-\mu) \varphi(1), \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{4}} \frac{\varphi(1) - \varphi'(\sigma)}{\sigma^2},$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi \partial \zeta} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta \partial \zeta} = 0.$$

Le equazioni del moto di P sono le (29) e le radici della (31) sono:

$$\lambda = \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[(\mu-1) \left(3\varphi(1) + \varphi'(\sigma) \right) \pm \sqrt{(1+\mu)^2 \left(3\varphi(1) + \varphi'(\sigma) \right)^2 + \frac{\varphi(1) - \varphi'(\sigma)}{\sigma^2} (4\sigma^2 - 1) \mu} \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

delle quali due sono reali, due immaginarie pure; i moti sono quelli del caso II. Analogamente avviene nelle vicinanze di L'_σ .

§ 9. MOTI DELLA PICCOLA MASSA NELLE VICINANZE DEI CENTRI DI LIBRAZIONE
POSTI SULLA RETTA $P_1 P_2$: CASO CHE $P_1 P_2$ ATTRAGGONO P .

Quando $\varphi(r)$ è decrescente, si è visto al § 3 che v'ha un solo centro di librazione dalla banda di P_2 ; per $\varphi(r)$ crescente vi possono essere oltre P_2 centri di librazione o no. I centri di librazione hanno da P_2 la distanza ρ_2 (> 0 , perchè escludiamo si tratti di P_2 , caso già considerato) definita dall'equazione:

$$\varphi(1)(1+\rho_2) - \varphi(1+\rho_2) + \nu \varphi(1)\rho_2 - \mu \varphi(\rho_2) = 0. \quad (14)$$

Se diciamo L un centro di librazione, ρ_2 avendo il significato detto dianzi,

in L le derivate seconde di w_1 hanno i valori:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} &= \varphi(1)(1+\mu) - \varphi'(\rho_2 + 1) - \mu \varphi'(\rho_2) = B, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 = C, \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} &= \varphi(1)(1+\mu) - \frac{\varphi(1+\rho_2)}{1+\rho_2} - \mu \frac{\varphi(\rho_2)}{\rho_2} = D, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \zeta} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta \partial \zeta} = 0, \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} &= -\left(\frac{\varphi(1+\rho_2)}{1+\rho_2} + \frac{\varphi(\rho_2)}{\rho_2}\right) = -E\end{aligned}$$

(le lettere B, C, D, E si riferiscono alle equazioni (29)).

Sia $\varphi(r)$ decrescente: allora B è positivo, D è negativo; infatti:

$$D = \frac{1}{1+\rho_2} \left\{ \varphi(1)(1+\rho_2) - \varphi(1+\rho_2) \right\} + \frac{\mu}{\rho_2} \left(\varphi(1)\rho_2 - \varphi(\rho_2) \right)$$

e per la (14):

$$D = \left(\frac{1}{1+\rho_2} - \frac{1}{\rho_2} \right) \left(\varphi(1)(1+\rho_2) - \varphi(1+\rho_2) \right), \quad (52)$$

in cui il primo fattore è negativo, il secondo è positivo. Il termine noto della (31) è negativo: si deduce che le radici della (31) sono due reali, due immaginarie pure, epperò i moti che mantengono P nelle vicinanze di L sono quelli del caso II. Ciò avviene in particolare se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha < 0$.

Vi ha pure un solo centro di librazione se $\varphi(r)$ è crescente e $\varphi'(r)$ crescente o decrescente e se, essendo $\frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi(0)} < 1$, è μ maggiore di codesta frazione; il centro di librazione dista da P_2 meno di 1; in particolare ciò avviene se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 2$.

La (52) mostra che è $D > 0$ se φ' è crescente, $D < 0$ se φ' è decrescente.

Osserviamo che B è il valore della derivata del primo membro della (14) rapporto a ρ_2 calcolata nel centro di librazione; dalle considerazioni del § 3, α) risulta che è $B < 0$ se $\varphi'(r)$ è crescente, $B > 0$ se φ' è decrescente. In ogni caso $BD < 0$: ne discende che della (31) due radici sono reali, due immaginarie pure ed i moti che mantengono P nelle vicinanze del centro L di librazione sono quelli del caso II.

Se le radici della $\varphi(1)r - \varphi(r) = 0$ sono gli interi $0, 1, 2, \dots, k$, oltre P_2 sono centri di librazione k altri punti alla distanza l'uno dall'altro di 1; in tal caso $D = 0$ e la (31) ha due radici nulle.

Se le radici $0, 1, 2, \dots, k$ sono per le (14) radici semplici, B ha segni alternati nelle varie radici: ove è negativo, le altre due radici della (31) sono immaginarie pure; ove è positivo, le altre due radici sono immaginarie pure o reali secondo che B è minore o maggiore di $4\varphi(1)(1+\mu)$.

I moti che mantengono P nelle vicinanze dei centri di librazione sono quelli del caso V o del caso VI.

b) Consideriamo i centri di librazione dalla banda di P_1 : essi hanno da P_1 le distanze $\rho_1 (> 0)$ che sono radici dell'equazione:

$$\varphi(1)\rho_1 - \varphi(\rho_1) + \mu\varphi(1)(\rho_1 + 1) - \mu\varphi(\rho_1 + 1) = 0. \quad (15)$$

In un centro di librazione le derivate seconde di w_1 sono:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \varphi(1)(1+\mu) - \varphi'(\rho_1) - \mu\varphi'(1+\rho_1) = B,$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0 = C, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \zeta} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta \partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = \varphi(1)(1+\mu) - \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} - \mu \frac{\varphi(1+\rho_1)}{1+\rho_1} = D,$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} = - \left(\frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} + \mu \frac{\varphi(1+\rho_1)}{1+\rho_1} \right) = E^2,$$

ρ_1 essendo quella delle radici della (15) che corrisponde al centro considerato.

Le equazioni del moto di P sono le (29).

Se $\varphi(r)$ è decrescente v'ha un solo centro di librazione che dista da P_1 meno di 1; in questo caso B è positivo, D è negativo, come ora si prova. È:

$$D = \frac{1}{\rho_1} \left(\varphi(1)\rho_1 - \varphi(\rho_1) \right) + \frac{\mu}{1+\rho_1} \left(\varphi(1)(1+\rho_1)' - \varphi(1+\rho_1) \right)$$

e per la (15):

$$D = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{1+\rho_1} \right) \left(\varphi(1)\rho_1 - \varphi(\rho_1) \right), \quad (53)$$

di cui il primo fattore è positivo ed il secondo negativo per essere $\rho_1 < 1$.

Essendo $BD < 0$ la (31) ammette due radici reali e due immaginarie pure: i moti sono quelli del caso II. In particolare ciò avviene se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha < 0$.

V'ha pure un solo centro di librazione dalla banda di P_1 e da questo a distanza minore di 1, se $\varphi(r)$ e $\varphi'(r)$ sono crescenti e se, essendo:

$$\frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)} < 1$$

μ è maggiore di codesta frazione; in particolare ciò avviene se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 2$ e $\mu < \frac{1}{\alpha - 1}$, e con $1 < \alpha \leq 2$ qualunque sia μ .

La (53) mostra che D è positivo; in quanto a B , valore della derivata rapporto a ρ_1 del primo membro della (15) calcolata nel centro di librazione, le considerazioni del § 3, b) fanno vedere che è negativo, onde $BD < 0$ e la (31) ha due radici reali e due immaginarie pure; i moti che mantengono P nelle vicinanze del centro di librazione sono quelli del caso II.

Se $\varphi(r)$ è crescente, $\varphi'(r)$ decrescente, $\mu < \frac{\varphi'(0) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(1)}$, v'ha un solo centro di librazione dalla banda di P_1 e da questo a distanza minore di 1; ciò avviene in particolare se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$. Si prova, come dianzi, che $BD < 0$ ed i moti che mantengono P nelle vicinanze del centro di librazione sono ancora quelli del caso II.

c) Riferiamoci ai centri di librazione posti in mezzo a $P_1 P_2$. I centri di librazione hanno da P_1 la distanza ρ_1 (> 0) radice dell'equazione:

$$\varphi(1)\rho_1 - \varphi(\rho_1) - \mu \left[\varphi(1)(1 - \rho_1) - \varphi(1 - \rho_1) \right] = 0. \quad (16)$$

Le derivate seconde di w_1 calcolate in un centro di librazione sono:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = \varphi(1)(1 + \mu) - \varphi'(\rho_1) - \mu \varphi'(1 - \rho_1) = B^* \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0 = C,$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} = \varphi(1)(1 + \mu) - \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} - \mu \frac{\varphi(1 - \rho_1)}{1 - \rho_1} = D, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \zeta} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta \partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} = - \left\{ \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} + \mu \frac{\varphi(1 - \rho_1)}{1 - \rho_1} \right\} = -E^2,$$

ρ_1 essendo la radice dell'equazione (16). Le equazioni del moto di P nelle vicinanze di questi centri sono le (29).

(*) Con $\varphi'(1 - \rho_1)$ intendiamo, a scanso di equivoci, $\varphi'(r)$ calcolato in $r = 1 - \rho_1$.

Se $\varphi(r)$ è decrescente, vi ha un solo centro di librazione fra P_1 e P_2 ; in questo caso è $B > 0$, $D < 0$, come ora si proverà. Invero:

$$D = \frac{1}{\rho_1} \left(\varphi(1) \rho_1 - \varphi(\rho_1) \right) + \frac{\mu}{1 - \rho_1} \left(\varphi(1) (1 - \rho_1) - \varphi(1 - \rho_1) \right)$$

e per la (16):

$$D = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{1 - \rho_1} \right) \left(\varphi(1) \rho_1 - \varphi(\rho_1) \right),$$

di cui il primo fattore è positivo ed il secondo è negativo per essere $\rho_1 < 1$.

Essendo dunque $BD < 0$, dell'equazione (31) due radici sono reali e due immaginarie pure; i moti di P sono quelli del caso II.

Se in $0 - 1$ sono $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$, $\varphi''(r)$ crescenti sappiamo esservi un solo centro di librazione fra P_1 e P_2 se $\frac{\varphi(1) - \varphi'(0)}{\varphi'(1) - \varphi(1)} < 1$ e μ è maggiore di codesta frazione. Dalle considerazioni del § 3, c) si deduce che B e D sono positivi; il discriminante dell'equazione (31) in λ^2 è:

$$\left[\frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} - \varphi'(\rho_1) + \mu \left\{ \frac{\varphi(1 - \rho_1)}{1 - \rho_1} - \varphi'(1 - \rho_1) \right\} \right]^2 +$$

$$+ 8 \varphi(1) (1 + \mu) \left[\varphi'(\rho_1) + \mu \varphi'(1 - \rho_1) + \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} + \mu \frac{\varphi(1 - \rho_1)}{1 - \rho_1} \right]$$

positivo, e la somma delle due radici in λ^2 è positiva valendo:

$$2 \varphi(1) (1 + \mu) + \varphi'(\rho_1) + \mu \varphi'(1 - \rho_1) + \frac{\varphi'(\rho_1)}{\rho_1} + \mu \frac{\varphi(1 - \rho_1)}{1 - \rho_1};$$

si conclude che le quattro radici λ della (31) sono reali distinte; i moti che mantengono P nelle vicinanze del centro di librazione sono quelli del caso I. Ciò avviene in particolare, se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha > 2$.

Se in $0 - 1$ $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ sono crescenti e φ'' è decrescente, v ha un centro di librazione fra P_1 e P_2 se $\frac{\varphi'(1) - \varphi(1)}{\varphi(1) - \varphi'(1)} < 1$ e μ è maggiore di questa frazione: si deduce che è $B < 0$, $D > 0$, epperò delle radici della (31) due sono reali e due immaginarie pure ed i moti che mantengono P nelle vicinanze del centro di librazione sono quelli del caso II.

Ciò avviene in particolare se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $1 < \alpha < 2$.

Se in $0 < r < 1$ $\varphi(r)$, $\varphi''(r)$ sono crescenti, $\varphi'(r)$ decrescente e μ soddisfa alla limitazione precedente, v' ha ancora un solo centro di librazione fra P_1 e P_2 . Si prova che è $D < 0$, $B > 0$, onde i moti di P sono ancora quelli del caso II. Ciò avviene in particolare se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$.

§ 10. MOTI DELLA PICCOLA MASSA NELLE VICINANZE DEI CENTRI DI LIBRAZIONE POSTI SULLA $P_1 P_2$: CASO CHE P_1 ATTRAGGA E P_2 RESPINGA.

a) Riferiamoci ai centri di librazione dalla banda di P_1 . Questi hanno da P_1 la distanza ρ_1 radice dell'equazione:

$$\varphi(1)\rho_1 - \varphi(\rho_1) - \mu\varphi(1)(1 + \rho_1) + \mu\varphi(1 + \rho_1) = 0. \quad (21')$$

Le derivate seconde di w_2 in un centro di librazione sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} &= \varphi(1)(1 - \mu) - \varphi'(\rho_1) + \mu\varphi'(1 + \rho_1) = B, & \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 = C, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} &= \varphi(1)(1 - \mu) - \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} + \mu \frac{\varphi(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1} = D, & \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi \partial \zeta} &= \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta \partial \zeta} = 0, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} &= -\frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} + \mu \frac{\varphi(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1}. \end{aligned}$$

Le equazioni del moto di P sono le (29) o (29') a seconda che:

$$\frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} \geq \mu \frac{\varphi(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1}.$$

Siano $\varphi(r)$, $\varphi''(r)$ crescenti, $\varphi'(r)$ decrescente e di più il limite inferiore di $\varphi'(\rho_1) - \mu\varphi'(1 + \rho_1)$ sia minore di $\varphi(1)(1 - \mu)$; allora v' ha un solo centro di librazione dalla banda di P_1 a distanza da questo maggiore di 1.

Dalle ipotesi poste discende che $\frac{\varphi(r)}{r}$ è decrescente, onde $\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2}$ è negativo: le equazioni del moto di P sono le (29). Le considerazioni del § 4, b) fanno vedere che B , derivata rapporto a ρ_1 del primo membro della (21') calcolata nel centro di librazione, è positiva; è poi

$$D = \frac{1}{1 + \rho_1} \left(\varphi(1) - \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} \right) > 0,$$

perchè $\rho_1 > 1$. Le radici in λ^2 della (31) sono reali perchè il discriminante vale:

$$\left[\mu \left\{ \varphi'(1 + \rho_1) - \frac{\varphi(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1} \right\} + \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} - \varphi'(\rho_1) \right]^2 + 8 \varphi(1) (1 - \mu) \left[\varphi'(\rho_1) - \mu \varphi'(1 + \rho_1) + \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} - \mu \frac{\varphi(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1} \right]$$

e, per essere $\varphi'(r)$ e $\frac{\varphi(r)}{r}$ positivi decrescenti, il secondo addendo è positivo.

La somma di codeste due radici è:

$$- \left[2 \varphi(1) (1 - \mu) + \varphi'(\rho_1) - \mu \varphi'(1 + \rho_1) + \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} - \mu \frac{\varphi(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1} \right],$$

negativa e poichè il prodotto BD è positivo, le due radici in λ^2 sono negative, cioè le quattro radici in λ della (31) sono immaginarie pure ed i moti che mantengono P nelle vicinanze del centro di librazione sono quelli del caso III. Ciò avviene in particolare se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$.

Siano $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$ crescenti, φ'' decrescente; di più il limite superiore di $\varphi'(\rho_1) - \mu \varphi'(1 + \rho_1)$ sia maggiore di $\varphi(1) (1 - \mu)$; v'è allora un solo centro di librazione dalla banda di P_1 a distanza da questo maggiore di 1.

Si prova che è $B < 0$, onde $\mu \varphi'(1 + \rho_1) - \varphi'(\rho_1) < 0$, e poichè $D < 0$ ne segue $\mu \frac{\varphi(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1} - \frac{\varphi(\rho_1)}{\rho_1} < 0$.

Le equazioni del moto di P sono le (29). Si prova come dianzi che le radici in λ^2 della (31) sono negative, onde le quattro radici in λ della (31) sono immaginarie pure ed i moti di P sono ancora quelli del caso III. Ciò avviene in particolare se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $1 < \alpha < 2$.

Ed altrettanto si prova che avviene se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha \geq 2$.

Sia $\varphi(r) = \frac{1}{r^\alpha}$, α numero positivo qualunque; anche in questo caso v'ha un solo centro di librazione dalla banda di P_1 a distanza da questo maggiore di 1. La $\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2}$ è $\frac{\mu}{(1 + \rho_1)^{\alpha+1}} - \frac{1}{\rho_1^{\alpha+1}} < 0$ e quindi le equazioni del moto di P sono le (29). È poi:

$$B > 0, \quad D = \frac{1}{\rho_1 + 1} \left(1 - \frac{1}{\rho_1^{\alpha+1}} \right) > 0.$$

Il discriminante dell'equazione (31) in λ^2 , prescindendo dal fattore positivo $\frac{1}{\rho_1^{\alpha+1}} - \frac{\mu}{(1+\rho_1)^{\alpha+1}}$, è:

$$(1+\alpha)^2 \left(\frac{1}{\rho_1^{\alpha+1}} - \frac{\mu}{(1+\rho_1)^{\alpha+1}} \right) - 8(1-\mu)(\alpha-1),$$

e la somma delle due radici vale:

$$-2(1-\mu) + (\alpha-1) \left(\frac{1}{\rho_1^{\alpha+1}} - \frac{\mu}{(1+\rho_1)^{\alpha+1}} \right).$$

Se $0 < \alpha \leq 1$ le radici in λ^2 sono reali ed entrambe negative, onde le quattro radici in λ della (31) sono immaginarie pure ed i moti di P sono quelli del caso III. Se $1 < \alpha < 3$ le radici in λ^2 se sono reali sono negative, se $\alpha > 3$ se sono reali sono positive.

Poichè dalla (21') si trae:

$$\mu = \frac{(1+\rho_1)^\alpha (\rho_1^{\alpha+1} - 1)}{\rho_1^\alpha \left\{ (1+\rho_1)^{\alpha+1} - 1 \right\}}, \quad (54)$$

la realtà delle radici in λ^2 dipende dall'essere:

$$\frac{(1+\alpha)^2}{\rho_1} + (\alpha-3)^2 \left[1 - \frac{\rho_1^{\alpha+1} - 1}{(1+\rho_1)^{\alpha+1} - 1} \right] > 8(\alpha-1)\rho_1^\alpha. \quad (55)$$

Il primo membro è funzione decrescente di ρ_1 , giacchè la sua derivata è

$$-\left[\frac{(1+\alpha)^2}{\rho_1^2} + (\alpha-3)^2 \frac{\rho_1^\alpha (1+\rho_1)^\alpha + (1+\rho_1)^\alpha - \rho_1^\alpha}{(1+\rho_1)^\alpha - 1} \right]$$

essenzialmente negativa, e al variare di ρ_1 , da 1 a $+\infty$ passa da

$$(1+\alpha)^2 + (\alpha-3)^2$$

a zero; il secondo membro è crescente e passa da $8(\alpha-1)$ a $+\infty$. Se $\alpha \neq 3$, esiste dunque un numero $\bar{\rho}$ (*) maggiore di 1 tale che se $\rho_1 < \bar{\rho}$ è verificata la (55) e se $\rho_1 > \bar{\rho}$ è verificata la disuguaglianza opposta; per $\alpha = 3$, $\bar{\rho} = 1$.

(*) Per $\alpha = 2$ è $\bar{\rho} = 1,0787 \dots$ Cfr. la mia Nota: *Intorno ad un problema, ecc.*, già citata.

Osservando che dalla (54) discende che μ cresce al crescere di ρ , si conclude, posto:

$$\bar{\mu} = \frac{(1 + \bar{\rho})^\alpha (\bar{\rho}^{\alpha+1} - 1)}{\bar{\rho}^\alpha \left\{ (1 + \bar{\rho})^{\alpha+1} - 1 \right\}} (*),$$

che: se $1 < \alpha < 3$ le quattro radici λ della (31) sono immaginarie pure e distinte se $\mu < \bar{\mu}$, due doppie se $\mu = \bar{\mu}$, complesse se $\mu > \bar{\mu}$. Per $\alpha = 3$ le radici sono complesse qualunque sia μ . Per $\alpha > 3$ le radici sono reali distinte se $\mu < \bar{\mu}$, due doppie se $\mu = \bar{\mu}$, complesse se $\mu > \bar{\mu}$.

§ 11. MOTI DELLA PICCOLA MASSA IN VICINANZA DEI CENTRI DI LIBRAZIONE POSTI NEL PIANO PER $P_1 P_2$ NORMALE AL PIANO IN CUI RUOTANO $P_1 P_2$.

Al § 4, *d*) è fatto vedere che quando P_2 è repellente, se $\psi(r) = \frac{\varphi(r)}{r}$ è crescente da $0 + \infty$ o decrescente da $+\infty$ a 0 v'ha almeno una coppia di centri di librazione posti nel piano per $P_1 P_2$ normale a quello in cui ruotano $P_1 P_2$, e simmetrici rispetto a $P_1 P_2$: di più è fatto vedere che v'ha una coppia unica di tali centri se $\varphi(r) = r^\alpha$ con $\alpha < 1$.

Le coordinate di un centro di librazione sono date da:

$$x = \frac{\mu \psi(\rho_2)}{\varphi(1)(1-\mu)}, \quad y = 0, \quad z^2 = \rho_2^2 - \left(\frac{\varphi(1) - \mu \psi(\rho_2)}{\varphi(1)(1-\mu)} \right)^2,$$

ove ρ_2 è radice (> 0) dell'equazione:

$$\varphi(1)(1-\mu) \left[\mathfrak{S}^2 \left(\mu \psi(\rho_2) \right) - \rho_2^2 \right] + \varphi(1)(1+\mu) - 2\mu \psi(\rho_2) = 0, (**)$$

in cui \mathfrak{S} è la funzione inversa di ψ .

(*) Per $\alpha = 3$ è $\bar{\mu} = 0,11873849 \dots$

(**) Notiamo che per $\varphi(r) = r^3$, la radice di (23'') è $\rho_2 = \sqrt{\frac{1+\mu}{1+\mu^2}}$, per $\varphi(r) = r^2$ è

$\rho_2 = \frac{-\mu + \sqrt{2\mu^2 + 2\mu + 1}}{(1-\mu)^2(1+\mu)}$ e per $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ è $\rho_2 = \frac{\mu}{1-\mu} \sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2 + 2\mu + 9}}{1+\mu}} - 1$.

Le derivate seconde di w_2 in un centro di librazione prendono i valori:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \varphi(1)(1-\mu) - \frac{\mu}{\varphi(1)^2(1-\mu)^2} \left[\frac{\psi'(\rho_2)}{\rho_2} \left\{ \mu \psi(\rho_2) - \varphi(1) \right\}^2 - \frac{\mu \left\{ \psi(\rho_2) - \varphi(1) \right\}^2}{\mathfrak{S}(\mu \psi(\rho_2)) \mathfrak{S}'(\mu \psi(\rho_2))} \right],$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = \varphi(1)(1-\mu), \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial z} = \frac{\mu}{\varphi(1)^2(1-\mu)^2} \sqrt{\varphi(1)^2(1-\mu)^2 \rho_2^2 - \left\{ \mu \psi(\rho_2) - \varphi(1) \right\}^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\psi'(\rho_2)}{\rho_2} \left\{ \mu \psi(\rho_2) - \varphi(1) \right\} - \frac{\psi(\rho_2) - \varphi(1)}{\mathfrak{S}(\mu \psi(\rho_2)) \mathfrak{S}'(\mu \psi(\rho_2))} \right],$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = \frac{\varphi(1)^2(1-\mu)^2 \rho_2^2 - \left\{ \mu \psi(\rho_2) - \varphi(1) \right\}^2}{\varphi(1)^2(1-\mu)^2} \left[\mu \frac{\psi'(\rho_2)}{\rho_2} - \frac{1}{\mathfrak{S}(\mu \psi(\rho_2)) \mathfrak{S}'(\mu \psi(\rho_2))} \right],$$

Se poniamo:

$$A^2 = 4(1-\mu)\varphi(1), \quad B = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \quad C = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial z}, \quad D = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \quad E = \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2},$$

le equazioni del moto di P nelle vicinanze del centro di librazione, ottenute facendo il solito trasporto degli assi, sviluppando w_2 per le potenze di ξ, η, ζ e trascurando quelle di grado superiore al primo, sono:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - A \eta' &= B \xi + C \zeta \\ \eta'' + A \xi' &= D \eta \\ \zeta'' &= C \xi + E \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Eliminando η, ζ e loro derivate, si perviene ad un'equazione del 6° or-

dine in ξ la cui equazione caratteristica è.

$$\lambda^6 + (A^2 - B - D - E)\lambda^4 + \left. \begin{aligned} &BD - C^2 + E(B + D - A^2) \left\{ \lambda^2 + \right. \\ &\left. + D(C^2 - EB) \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Poichè non appare possibile studiare, in generale, la natura delle radici di quest'equazione, limitiamoci a casi particolari.

Se supponiamo $\varphi(r) = r^\alpha$, il termine noto della (57) vale :

$$(\alpha - 1) z^2 \rho_2^{\alpha-3} \left[\mu^{\frac{2\alpha-4}{\alpha-1}} \rho_2^{\alpha-3} (\alpha - 1) + (1 - \mu) \left(\mu^{\frac{\alpha-3}{\alpha-1}} - \mu \right) \right]$$

(ove z^2 ha il valore dato di sopra) che è positivo. Ciò porta che una almeno delle radici in λ^2 della (57) è negativa; designandola con $-\sigma^2$, esiste allora del sistema (56) la soluzione particolare :

$$\xi = c_1 \cos \sigma t + c_2 \sin \sigma t$$

$$\eta = \frac{\sigma A}{D + \sigma^2} (c_2 \cos \sigma t - c_1 \sin \sigma t)$$

$$\zeta = \frac{-C}{E + \sigma^2} (c_1 \cos \sigma t + c_2 \sin \sigma t).$$

Se si prendono ξ_0, ξ'_0 come costanti arbitrarie, è $c_1 = \xi_0, c_2 = \frac{\xi'_0}{\sigma}$ ed allora bisogna presupporre :

$$\eta_0 = \frac{A \xi_0}{D + \sigma^2}, \quad \eta'_0 = -\frac{\sigma^2 A \xi_0}{D + \sigma^2}, \quad \zeta_0 = \frac{-C \xi_0}{E + \sigma^2}, \quad \zeta'_0 = \frac{-C \xi'_0}{E + \sigma^2}.$$

La traiettoria è un'ellisse posta nel piano

$$(E + \sigma^2) \xi + C \zeta = 0$$

ed il moto è periodico.

Nella Nota più volte citata dell'Accademia di Torino ho fatto vedere che nel caso $\alpha = -2$, almeno per certi valori di μ , le altre due radici in λ^2 della

(57) sono complesse, epperò sono possibili moti delle forme:

$$\xi = e^{-\beta t} \left[H_1 \cos \gamma t + K_1 \sin \gamma t \right]$$

$$\eta = e^{-\beta t} \left[H_2 \cos \gamma t + K_2 \sin \gamma t \right]$$

$$\zeta = e^{-\beta t} \left[H_3 \cos \gamma t + K_3 \sin \gamma t \right]$$

dove fra le 6 costanti passano 4 relazioni, e

$$\xi = A_1 \cos \sigma t + A_2 \sin \sigma t + e^{-\beta t} \left[A_3 \cos \gamma t + A_4 \sin \gamma t \right]$$

$$\eta = B_1 \cos \sigma t + B_2 \sin \sigma t + e^{-\beta t} \left[B_3 \cos \gamma t + B_4 \sin \gamma t \right]$$

$$\zeta = C_1 \cos \sigma t + C_2 \sin \sigma t + e^{-\beta t} \left[C_3 \cos \gamma t + C_4 \sin \gamma t \right]$$

ove fra le 12 costanti passano 8 relazioni. Ciò avviene certamente per altri valori di α .

Castelfranco dell'Emilia, estate del 1920.

Sugli involuipi di tangenti alle curve integrali di un'equazione differenziale del primo ordine.

(Di ENRICO ZONDADARI, a Roma.)

Gli involuipi delle tangenti alle curve integrali di un'equazione differenziale del primo ordine nei punti di date linee sono stati studiati in due brevi Note dal prof. E. PASCAL (*) e dal prof. A. DEL RE (**) nel caso particolare dell'equazione

$$y' = Q_0(x) \cdot y^n + Q_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + Q_{n-1}(x) \cdot y + Q_n(x)$$

e nell'ipotesi che le linee assegnate siano le rette parallele all'asse delle y .

Considerazioni assai più generali, applicate ad altri casi particolari, sono inoltre contenute in una Nota del prof. F. SIBIRANI (***)

Nel presente scritto mi sono proposto di studiare in generale l'involuppo delle tangenti alle curve integrali di un'equazione differenziale $f(x, y, y') = 0$ del primo ordine nei punti d'una linea algebrica $\varphi(x, y) = 0$, lungo la quale y' sia funzione algebrica di x ed y , determinando per esso l'ordine, la classe, il genere e il numero delle tangenti doppie e di flesso, dei punti doppi e delle cuspidi. Questi caratteri dell'involuppo si ottengono facilmente applicando alle equazioni differenziali, per mezzo d'una nota interpretazione geometrica, i risultati d'una ricerca preliminare sul contorno apparente delle superficie rigate di una speciale congruenza lineare.

(*) Osservazione su di una proprietà degli integrali di una classe di equazioni differenziali. Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5^a, vol. XVIII, 2^o sem. 1909.

(**) Su certe proprietà geometriche collegate con le equazioni del tipo di quella di Riccati. Rend. della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, serie 3^a, vol. XIX, fasc. II, p. 207, 1913.

(***) Alcune proprietà degli integrali di certe classi di equazioni differenziali. Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5^a, vol. XIX, 1^o sem. 1910.

1. Si abbia una retta d sostegno di una punteggiata e asse d'un fascio di piani riferiti proiettivamente per mezzo di una data proiettività Ω ; per ogni punto M di d consideriamo il piano μ che gli corrisponde nella Ω ed in esso le rette del fascio avente il centro in M ; allora i raggi di questi infiniti fasci appartengono ad una congruenza lineare avente come unica direttrice la retta d .

Le rette della congruenza che si appoggiano ad una retta r sghemba con d sono generatrici d'una quadrica rigata: esse sono infatti le congiungenti i punti della retta d coi punti della punteggiata proiettiva a d segata su r dai piani del fascio corrispondenti nella Ω ai punti di d .

Ne segue che le rette della congruenza che si appoggiano ad una linea l d'ordine $n \geq 2$ (gobba (*) o anche piana ma il piano della quale non passi per d), non avente punti a comune con d , sono generatrici d'una superficie rigata γ di grado $2n$; infatti il numero dei punti in cui una retta r incontra la superficie è uguale a quello dei punti comuni ad l ed alla quadrica avente per generatrici le rette della congruenza che si appoggiano a d ed r .

Per brevità di linguaggio diremo *superficie rigata associata alla linea l* la superficie avente per generatrici le rette della congruenza che si appoggiano ad l .

La retta d è multipla d'ordine n per la rigata γ associata ad l ; infatti il piano μ corrispondente nella proiettività Ω ad un punto M di d taglia l in n punti e quindi per M passano le n generatrici di γ che si ottengono congiungendo M coi punti stessi; le n falde di γ generate da queste n rette al variare di M hanno tutte lo stesso piano tangente μ in M , cioè la retta d è *tacnodale* per le $\frac{n(n-1)}{2}$ coppie di falde della superficie passanti per essa; deve quindi considerarsi come la riunione di $\frac{n(n-1)}{2}$ rette tacnodali ordinarie.

All'infuori di d la rigata γ non può avere altre linee doppie o multiple che un certo numero di generatrici, essendo due rette qualunque della congruenza o incidenti in un punto di d o sghembe.

Vogliamo trovare il numero di queste generatrici multiple. In primo luogo si dovranno considerare evidentemente tante generatrici multiple quanti

(*) Anche per $n=2$ se l si spezza in due rette sghembe si avrà una linea gobba (con un punto doppio apparente). Tranne per ciò che riguarda il genere, l potrà supporre anche ridicibile purchè priva di parti multiple.

saranno i punti multipli (effettivi) di l e con lo stesso ordine di molteplicità. In secondo luogo saranno generatrici multiple di γ anche le rette della congruenza che riescono corde della linea l .

Per trovare il numero di queste, consideriamo dapprima il caso in cui la linea l è gobba; preso un punto M sulla retta d , il piano μ corrispondente ad M nella proiettività Ω taglia l in n punti; in esso giacciono quindi $\frac{n(n-1)}{2}$ corde della l che segano d in altrettanti punti $M_1, M_2, \dots, M_{\frac{n(n-1)}{2}}$ che facciamo corrispondere ad M ; inversamente, se l presenta h punti doppi apparenti, preso N sopra d , per N si potranno condurre h corde ad l le quali individuano, insieme alla d , h piani $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ e quindi dovremo far corrispondere ad N gli h punti N_1, N_2, \dots, N_h della retta d omologhi dei detti piani nella proiettività Ω . Si ottiene sulla d una corrispondenza $\left[\frac{n(n-1)}{2}, h \right]$; per ognuna delle $\frac{n(n-1)}{2} + h$ coincidenze che essa presenta si ha una corda di l , generatrice della rigata γ associata ad l , cioè una generatrice multipla (in generale doppia) di γ . Supponendo, per semplicità, che l non abbia altre singolarità che δ punti doppi effettivi a tangenti distinte e k cuspidi, avremo quindi in conclusione che la rigata possiede, oltre alla retta d equivalente ad $\frac{n(n-1)}{2}$ rette tacnodali, anche $\frac{n(n-1)}{2} + h + \delta$ generatrici doppie e k generatrici cuspidali.

Se invece la linea l è piana, detto M_0 il punto comune al piano π di essa e alla retta d , si riconosce immediatamente che l'intersezione u del piano π col piano μ_0 corrispondente a M_0 nella proiettività Ω è generatrice multipla d'ordine n della superficie γ ; infatti per questo piano μ_0 vengono appunto a coincidere nella retta u le n generatrici di γ giacenti in un piano generico μ per d ; se, come prima, l non ha altre singolarità che δ punti doppi a tangenti distinti e k cuspidi, γ possiederà dunque oltre a δ generatrici doppie e k generatrici cuspidali le due rette d ed u multiple d'ordine n , la prima delle quali tacnodale per le n falde di γ passanti per essa.

2. Se ora da un punto V generico dello spazio proiettiamo le generatrici della rigata γ associata ad l su un piano, si ottiene un involuppo j di rette (contorno apparente di γ da V su quel piano); la classe m_j di questo involuppo è uguale alla classe del cono circoscritto da V a γ cioè alla classe

ossia al grado della rigata; dunque

$$m_j = 2n. \quad (1)$$

L'ordine n_j dell'involuppo è uguale all'ordine del cono circoscritto da V a γ cioè alla classe m delle sezioni prodotte in γ dai piani passanti per V ; tali sezioni, d'ordine $2n$, presentano per i risultati precedenti nel caso di l gobba un punto $n - plo$ a tangenti coincidenti equivalente a $\frac{n(n-1)}{2}$ tacnodi, $\frac{n(n-1)}{2} + h + \delta$ punti doppi ordinari e k cuspidi e nel caso di l piana lo stesso punto $n - plo$ a tangenti coincidenti ora considerato, un punto $n - plo$ in generale a tangenti distinte, δ punti doppi e k cuspidi. Poichè ogni tacnodo ordinario equivale a due punti doppi infinitamente vicini, le singolarità delle dette sezioni saranno equivalenti se l è gobba a $\frac{3}{2}n(n-1) + h + \delta$ punti doppi ordinari e k cuspidi; se invece l è piana, valutando il punto $n - plo$ a tangenti distinte come $\frac{n(n-1)}{2}$ punti doppi ordinari, le singolarità saranno equivalenti a $\frac{3}{2}n(n-1) + \delta$ punti doppi e k cuspidi.

Convenendo di porre quando l è piana $h = 0$ non occorre quindi distinguere i due casi e si ha, dalla prima formula di PLÜCKER, per la classe m delle sezioni, cioè per l'ordine n_j dell'involuppo

$$\begin{aligned} n_j &= 2n(2n-1) - 2\left(\frac{3}{2}n(n-1) + h + \delta\right) - 3k = \\ &= n(n+1) - 2(h + \delta) - 3k. \end{aligned} \quad (2)$$

Si osservi che le formule (1), (2), dimostrate per $n \geq 2$, sono valide anche per $n = 1$, $h = \delta = k = 0$; infatti se l è una retta, la rigata γ associata ad l è una quadrica e quindi l'involuppo j una conica per la quale appunto $m_j = n_j = 2$.

3. In modo diverso considerando il piano proiettante da V una generatrice doppia, oppure $n - pla$ ordinaria, oppure cuspidale di γ il primo riesce a tangente a γ in due punti in generale distinti, il secondo in n punti in generale distinti, il terzo in due punti coincidenti dando così luogo ri-

spettivamente il primo ad una tangente doppia, il secondo ad una tangente $n - pla$, il terzo ad una tangente di flesso di j .

Inoltre il piano proiettante da V la direttrice d riesce tangente, nel punto M che gli corrisponde nella proiettività Ω , a n falde della superficie γ dando luogo ad una retta $n - pla$ a punti di contatto coincidenti tangente tacnodale per le $\frac{n(n-1)}{2}$ coppie di rami (lineari) di j che passano per la proiezione M' di M (*). Ne segue che indicando con τ_j, i_j i numeri delle tangenti doppie (o equivalenti a tangenti doppie) e di flesso di j si ha precisamente

$$\left. \begin{aligned} \tau_j &= \frac{3}{2} n(n-1) + h + \delta \\ i_j &= k \end{aligned} \right\}; \quad (3)$$

dalle (1) e (3) per mezzo della $n_j = m_j(m_j - 1) - 2\tau_j - 3i_j$ si ottiene di nuovo la (2).

Si verifica immediatamente con le formule trovate che il genere p della linea l (supposta ora irriducibile) definito dalla

$$p = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) - (h + \delta) - k$$

è uguale al genere dell'involuppo

$$p_j = \frac{1}{2} (m_j - 1)(m_j - 2) - \tau_j - i_j,$$

il che si poteva affermare *a priori* essendo la corrispondenza fra i punti di l e le rette dell'involuppo (stabilita per mezzo dei piani proiettanti da V le generatrici di γ) algebrica biunivoca cioè birazionale.

Dai valori trovati per m_j, n_j, τ_j, i_j è facile dedurre, colle formule di PLÜCKER, il numero k_j delle cuspidi e δ_j dei punti doppi dell'involuppo. Fra questi è computato (come equivalente ad $n(n-1)$ punti doppi) anche il punto singolare M' già considerato, pel quale passano n rami di j formando a due a due tacnodo ivi.

(*) Alla d oltre ai punti d'incrocio con le generatrici doppie della superficie appartengono gli $n(n-1) - 2(h + \delta) - 3k$ punti cuspidali, in cui si saldano due diverse falde di γ , corrispondenti nella proiettività Ω ai piani tangenti che possono condursi da d ad l . Escludiamo, per semplicità, che M cada in un punto d'incrocio o cuspidale.

Riassumendo abbiamo

$$\begin{aligned}
 m_j &= 2n \\
 \tau_j &= \frac{3}{2}n(n-1) + h + \delta \\
 i_j &= k \\
 n_j &= n(n+1) - 2(h+\delta) - 3k \\
 \delta_j &= \frac{1}{2}n(n-1)(n^2+3n-6) - \frac{1}{2}[2n(n+1)-9][2(h+\delta)+3k] + \\
 &\quad + \frac{1}{2}[2(h+\delta)+3k]^2 + h + \delta \\
 k_j &= 3n(n-1) - 6(h+\delta) - 8k \\
 p_j &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (h+\delta) - k
 \end{aligned} \tag{4}$$

con $h=0$ se l è piana (*).

I numeri trovati subiscono riduzione quando il vertice V del cono circoscritto a γ appartiene alla superficie e nel caso, escluso in principio, in cui la linea l ha punti a comune con d . Esamineremo quei casi particolari che possono interessarci nell'applicazione dei risultati ottenuti alle equazioni differenziali.

4. Vogliamo ora ricercare i caratteri plückeriani dell'involuppo delle tangenti alle linee integrali d'un'equazione differenziale

$$f(x, y, y') = 0 \tag{5}$$

del primo ordine nei punti d'una data linea l_1 del piano xy lungo la quale y' sia funzione algebrica di x ed y .

(*) La quinta delle (4), data per completare il gruppo delle formule che esprimono i caratteri dell'involuppo j in funzione di quelli della linea l , è ottenuta dalla

$$\delta_j = \frac{n_j(n_j-1) - 3k_j - m_j}{2};$$

conviene quindi calcolare il numero δ_j con questa in funzione dei valori numerici di n_j , m_j , k_j calcolati per primi.

Scriviamo perciò in luogo della (5) il sistema

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ dy - z dx &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad (6)$$

è noto che, interpretando la $f=0$ come equazione cartesiana di una superficie σ in assi ortogonali, le linee integrali della (5) sono le proiezioni ortogonali s_1 sopra il piano xy delle linee s di σ per le quali è soddisfatta l'equazione differenziale $dy - z dx = 0$ (*); la tangente t ad s in un suo punto $P(x_0, y_0, z_0)$ è l'intersezione del piano tangente τ in P a σ col piano ν d'equazione $Y - y_0 = z_0(X - x_0)$; la tangente t_1 in P_1 , proiezione ortogonale di P su xy , alla linea integrale s_1 in P_1 è la traccia t' , del piano γ sul piano xy ; *converrà considerare questa tangente t_1 in P_1 a s_1 come proiezione ortogonale $o_1 \equiv t_1 \equiv t'$, su xy della parallela o a t' , per P .*

Se osserviamo allora che per ogni punto $P(x_0, y_0, z_0)$ la retta o ha le equazioni

$$\left. \begin{aligned} Y - y_0 &= z_0(X - x_0) \\ Z &= z_0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

si riconosce immediatamente che essa appartiene alla congruenza lineare formata dalle rette dei fasci impropri giacenti nei piani del fascio che ha per asse la retta all'infinito d_∞ del piano xy e aventi i centri nei punti di d_∞ omologhi ai piani di quel fascio in una particolare proiettività Ω ; precisamente la proiettività Ω è quella che fa corrispondere ai piani

$$Z = 0, \quad Z = 1$$

e al piano all'infinito rispettivamente i punti di coordinate omogenee $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$.

Diciamo come prima *conoide associato ad una linea l il conoide avente per generatrici le rette di questa congruenza che si appoggiano ad l .*

(*) LIE e SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungstransformationen*, pag. 188. — POINCARÉ, *Mémoires sur les courbes définies par les équations différentielles*. Journ. math., Serie 4^a, vol. I, 1885, pag. 196. — GOURSAT, *Cours d'Analyse*, 2^a ed., vol. II, pag. 542. — Di questa interpretazione geometrica ho fatto uso sistematico nel mio libro: *Integrazione grafica e studio delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine coi metodi della Geometria descrittiva*. Albrighi, Segati, 1917.

Si ha allora immediatamente che l'involuppo j delle tangenti alle linee integrali della (5) nei punti di una linea l , è il contorno apparente dal punto all'infinito V_∞ dell'asse z sul piano xy del conoide γ associato alla linea l della superficie σ che ha per proiezione ortogonale sopra xy la linea l . Poichè in generale V_∞ non apparterrà a γ , applicando i risultati innanzi trovati (sempre nell'ipotesi che la linea l non abbia punti sulla retta all'infinito d_∞ del piano xy), concludiamo che se l è algebrica d'ordine n con δ punti doppi a tangenti distinte e k cuspidi e, nel caso che sia gobba, con h punti doppi apparenti, la classe m_j , l'ordine n_j , il numero delle tangenti doppie τ_j , delle tangenti di flesso i_j , dei punti doppi δ_j , delle cuspidi k_j , ed il genere p_j , sono dati in generale dalle formole (4) del n.º 3.

Se la superficie σ è algebrica d'ordine N , detto n_1 l'ordine della linea l , data, per la linea l si avrà in generale l'ordine $n = N n_1$, e quindi i caratteri plückeriani dell'involuppo si otterranno sostituendo $N n_1$ ad n nelle formole (4) stesse (*).

Dalle considerazioni svolte nel n.º 3 risulta che il punto all'infinito dell'asse delle y è multiplo d'ordine n per l'involuppo con n rami lineari che si toccano ivi; la retta all'infinito è la tangente comune equivalente ad $\frac{n(n-1)}{2}$ tangenti tacnodali.

5. Esaminiamo ora un caso particolare notevole.

Supponiamo la linea l appartenente ad un piano π parallelo al piano yz . La proiettività Ω fa corrispondere al punto M_∞ d'intersezione di π con d_∞ (cioè al punto all'infinito dell'asse y) il piano all'infinito; la retta all'infinito del piano π (coincidente con la retta all'infinito del piano yz) è allora generatrice u_∞ multipla d'ordine n del conoide γ associato ad l . Il punto all'infinito dell'asse delle z , V_∞ , vertice del cilindro circoscritto a γ che dob-

(*) La dimostrazione analitica che la classe è $2N n_1$ è immediata in questo caso; $f(x, y, z)$ è un polinomio d'ordine N ; la tangente nel punto (x, y) ha l'equazione $Y - y = z(X - x)$; eliminando z si ha $f\left(x, y, \frac{Y - y}{X - x}\right) = 0$ che, resa intera moltiplicando per $(X - x)^n$, dà una equazione $\psi(x, y, X, Y) = 0$, in generale del grado $2N$ in x, y . Se il punto (x, y) appartiene alla curva $\varphi(x, y) = 0$ d'ordine n_1 , da un punto generico (X_0, Y_0) si potranno condurre tante tangenti all'involuppo quanti sono i punti comuni alle curve $\psi = 0$, $\varphi = 0$, cioè in generale $2N n_1$. Questa dimostrazione è l'estensione di quella data dal Prof. DEL RE in caso particolare nella Nota citata.

biamo considerare, appartiene alla generatrice n -pla u_∞ ; dei $2n$ punti che una retta generica r passante per V_∞ ha in comune con γ , n cadono sempre in V_∞ ; ne segue che dei $2n$ piani tangenti che si possono condurre per r al detto cilindro circoscritto n vengono a coincidere nel piano $u_\infty r$. Dal cilindro, considerato come involuppo di piani, si stacca quindi il fascio improprio d'asse u_∞ contato n volte, ossia dall'involuppo j il fascio improprio delle rette parallele all'asse y contato n volte. Rimane per la classe dell'involuppo $m_j = n$.

Se, dunque la superficie σ relativa alla (5) è tale che il piano $x = x_0$ la seghi in una curva $f(x_0, y, z) = 0$ d'ordine n , l'involuppo delle tangenti alle linee integrali dell'equazione $f(x, y, y') = 0$ nei punti della retta $x = x_0$ è di classe n (*).

L'ordine dell'involuppo non potrà superare quindi $n(n-1)$ (**); è facile vedere che in generale è $n_j = n(n-1) - 2\delta - 3k$, cioè l'ordine dell'involuppo j eguaglia la classe della linea l ; infatti sappiamo che una sezione generica del conoide γ con un piano per V_∞ è di classe

$$n(n+1) - 2\delta - 3k$$

e presenta in V_∞ un punto n -plo in generale a tangenti distinte; il numero delle tangenti che si possono condurre da V_∞ altrove alla sezione, uguale all'ordine del cilindro circoscritto al conoide γ , cioè ad n_j , è dato da

$$n_j = n(n+1) - 2\delta - 3k - 2n = n(n-1) - 2\delta - 3k.$$

Dalla $n_j = m_j(m_j - 1) - 2\tau_j - 3i_j$, essendo $m_j = n$, segue

$$2\tau_j + 3i_j = 2\delta + 3k;$$

quindi, poichè le i_j tangenti d'inflexione sono le proiezioni da V_∞ sul piano xy delle k generatrici cuspidali e perciò $i_j = k$ segue anche $\tau_j = \delta$. Indicando con τ e i rispettivamente il numero delle tangenti doppie e di flesso della linea l si ha quindi necessariamente anche $\delta_j = \tau$, $k_j = i$.

Ma è facile addirittura riconoscere per via analitica che l'involuppo delle

(*) DEL RE, loc. cit.; il risultato è dato per il caso particolare riportato in principio.

(**) Cfr. SIBIRANI, loc. cit. L'A. dimostra per via analitica che l'ordine dell'involuppo non può superare in questo caso $n(2n-1)$.

tangenti alle linee integrali dell'equazione $f(x, y, y') = 0$ lungo la retta $x = x_0$ è correlativo alla curva d'equazione $f(x_0, y, z) = 0$.

Infatti, considerando invece delle coordinate x, y, z e X, Y, Z le coordinate omogenee y_1, y_2, y_3, y_4 e rispettivamente Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , l'equazione d'una retta generica dell'involuppo, per $x = \frac{y_1}{y_4} = x_0$, si scrive

$$y_3 Y_1 - y_4 Y_2 + (y_2 - x_0 y_3) Y_4 = 0;$$

dette quindi u, v, w le coordinate plückeriane omogenee della retta nel piano xy si ha $u = y_3, v = -y_4, w = y_2 - x_0 y_3$ formule che rappresentano appunto una particolare correlazione fra il piano della linea l e il piano xy .

6. Applichiamo i risultati ottenuti a casi particolari.

a) L'equazione differenziale è lineare,

$$y' = P y + Q,$$

con P e Q funzioni uniformi di x ; la linea l nel piano $x = x_0$ è una retta e quindi l'involuppo j un fascio di rette (*).

b) L'equazione differenziale è un'equazione di RICCATI

$$y' = A y^2 + B y + C,$$

con A, B, C funzioni uniformi di x ; la curva l nel piano $x = x_0$ è una parabola coll'asse parallelo all'asse delle z ; l'involuppo j è una conica (iperbole d'equazione

$$(B^2 - 4 A C) (X - x_0)^2 + 4 A (X - x_0) Y + 2 B (X - x_0) + 1 = 0$$

avente un asintoto nella retta $x = x_0$).

c) L'equazione differenziale è

$$y' = Q_0(x) \cdot y^n + Q_1(x) y^{n-1} + \dots + Q_n(x) \quad (n > 2)$$

con Q_0, Q_1, \dots, Q_n funzioni uniformi di x ; la curva l nel piano $x = x_0$ ha

(*) Cfr. ad es. CZUBER E., *Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung*. Zschr. f. Math. u. Phys., t. 44, 1899.

nel punto all'infinito dell'asse delle z un punto $(n-1)$ -plo a tangenti coincidenti nella retta all'infinito e non ha altre singolarità; l'abbassamento prodotto nella classe della curva da questo punto singolare è

$$(n-1)(n-2) + n - 2;$$

si ha quindi

$$n_j = n(n-1) - (n-1)(n-2) - n + 2 = n;$$

l'involuppo è una curva d'ordine n (*).

d) L'equazione differenziale è complessivamente di secondo grado in x, y, y' ; la curva l nel piano $x = x_0$ è una conica; l'involuppo j è una conica.

Se invece la curva l è la conica sezione della quadrica σ d'equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

con un piano generico, l'involuppo j delle tangenti alle linee integrali nei punti della conica l , proiezione ortogonale di l sopra xy (prendendo per $y' = z$ la determinazione corrispondente ai punti del piano della conica) è una curva di 4^a classe e 6^o ordine di cui le singolarità sono date dalle formule (4) del n.º 3.

e) La superficie σ relativa all'equazione differenziale è una superficie rigata. L'involuppo j relativo alla proiezione ortogonale su xy d'una generatrice generica (con $z = y'$ tale che il punto (x, y, z) appartenga alla generatrice) è una conica (parabola coll'asse parallelo a y).

7. Sia l'equazione di CLAIRAUT

$$y - xy' = \varphi(y'); \tag{8}$$

si riconosce subito che la superficie σ , d'equazione

$$y - zx = \varphi(z),$$

relativa ad essa è il conoide associato ad una qualunque sezione piana di σ ; in particolare alla

$$y - x_0 z = \varphi(z);$$

(*) PASCAL, loc. cit.

ricordando che l'integrale singolare dell'equazione è l'involuppo delle rette integrali

$$y - Cx = \varphi(C)$$

e applicando il risultato del n.º 5 si ha che *la linea rappresentata dall'integrale singolare dell'equazione di CLAIRAUT (8) è correlativa alla curva d'equazione*

$$y - x_0 z = \varphi(z),$$

con x_0 arbitraria.

23 giugno 1920.

Questioni di forma e di realtà relative a fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni.

(Di EUGENIO G. TOGLIATTI, a Torino.)

Una delle questioni fondamentali sui fasci di quadriche è notoriamente quella dell'« equivalenza » di due tali fasci dal punto di vista della Geometria Proiettiva, questione che consiste nella ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un'omografia che muti i due fasci l'uno nell'altro. Essa equivale al problema algebrico della riduzione simultanea a somma di quadrati (o ad altra forma semplice), per mezzo di trasformazioni lineari, di una coppia di forme quadratiche; problema risolto, come è ben noto, dal WEIERSTRASS (anche per coppie di forme bilineari) nel caso di fasci di forme non tutte singolari, e dal KRONECKER per fasci di forme (bilineari o quadratiche) tutte singolari (¹). L'interpretazione geometrica del teorema d'equivalenza di WEIERSTRASS, e la sua applicazione alla classificazione dei fasci di quadriche in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni (da cui discende, in particolare, la classificazione delle superficie di 4.^o ordine dello spazio ordinario con conica doppia, e quella dei complessi quadratici di rette dello spazio ordinario) si trovano in Memorie notissime del prof. SEGRE (²).

(¹) WEIERSTRASS, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*; Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, 18 Mai 1868, pp. 310-338; Math. Werke, II B. 4, pp. 19-44.

KRONECKER, *Algebraische Reduktion der Schaaren bilinearer Formen*; Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1890, pp. 1225-1237.

Un'esposizione sistematica ed elementare di queste teorie si può vedere in: MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementarteiler*; Leipzig, 1899, § 8; e W. F. MEYER - J. DRACH, *Theorie des formes et des invariants*; Encyklop. des Sc. Math., I-11, p. 412 e seg. (v. anche nell'Encyklop. tedesca l'art.: *Invariantentheorie* dello stesso W. Fr. MEYER, I B 2, pp. 320-403, n.° 3).

(²) SEGRE, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*; Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino, (2) 36 (1885), pp. 3-86 — *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*; id., pp. 87-157. — *Étude des différentes surfaces du*

Nelle trattazioni di WEIERSTRASS, KRONECKER, SEGRE non si fa, di solito ⁽³⁾, distinzione tra quantità reali e quantità complesse. Nel presente lavoro si considerano invece, in uno spazio *reale* ad un numero qualsiasi n di dimensioni, in un S_n , dei fasci *reali* di quadriche, ossia dei fasci definiti mediante coppie di quadriche le cui equazioni, in un sistema di coordinate proiettive omogenee con punti di riferimento reali, hanno coefficienti reali; allora, anche limitandoci, come faremo per semplicità, a fasci contenenti $n+1$ coni (di 1.^a specie) reali e distinti, sorgono nuovi problemi di equivalenza. Per il teor. di WEIERSTRASS, due tali fasci sono proiettivamente identici, nel campo complesso, ogni volta che si può stabilire tra gli elementi dei fasci stessi, pensati come enti ∞^1 , qualche proiettività che muti i coni dell'uno in quelli dell'altro; se si vuole però che l'omografia dello spazio che trasforma allora l'un fascio nell'altro sia reale, cioè che i due fasci siano equivalenti rispetto alle omografie reali, si dovranno aggiungere alle precedenti altre condizioni. Si può studiare inoltre l'equivalenza dei due fasci dal punto di vista topologico; più esattamente, tratteremo il problema dell'equivalenza dal punto di vista dell'« Analysis situs proiettiva », ponendo cioè come gruppo fondamentale ⁽⁴⁾ di trasformazioni quello che risulta dall'ampliamento del gruppo delle omografie reali ottenuto aggregandovi le deformazioni reali continue dello spazio che mutano in sè l'infinito ⁽⁵⁾. In quest'indirizzo è essenziale la considerazione delle *falde (reali)* ad $n-2$ dimensioni costituite dai punti reali della quartica base d'un fascio di quadriche.

Ciò conduce a fare per le falde reali chiuse di dimensione $k > 2$ una distinzione analoga a quella che lo STAUDT fa per i rami reali di curve (piane o sghembe) e per le falde reali di superficie dello spazio ordinario ⁽⁶⁾: esse si possono distinguere in *falde d'ordine pari* e *falde d'ordine dispari*; e le

4.^o ordre à conique double ou cuspidale etc.; Math. Ann., 24 (1884), pp. 313-444. A questi lavori rinviamo il lettore per la bibliografia sull'argomento.

⁽³⁾ V. nota ⁽¹⁸⁾.

⁽⁴⁾ KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Programm, Erlangen, 1872 (Gesammelte Math. Abhandl., 1.^{er} B.^d, pp. 460-497); trad. ital. FANO in questi Annali, (2) 17 (1889-1890), pp. 307-343.

⁽⁵⁾ KLEIN, *Ueber Flächen dritter Ordnung*; Math. Ann., 6 (1873), pp. 551-581, § 16. Vedi anche COMESSATTI, *Sulla connessione delle superficie razionali reali*; questi Annali, (3) 23 (1914), pp. 215-284, nota ⁽¹⁷⁾ al n.° 6, nella quale si trovano pure altre indicazioni bibliografiche.

⁽⁶⁾ G. C. C. v. STAUDT, *Die Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847 (traduz. ital. PIERI, Torino, 1889), § 12. KLEIN, loc. cit. nella nota ⁽⁵⁾, § 15. BERZOLARI, *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven*; Encyklop. der Math. Wiss., III C 4, n.° 19 a p. 383.

prime si possono a lor volta suddividere in varî tipi a seconda della dimensione massima delle falde dispari tracciate su di esse⁽⁷⁾. Non ci risulta che una tale estensione sia già stata fatta: ad essa è dedicato il § 1.

Stabiliti questi nuovi concetti, si può determinare il numero delle falde della quartica base d'un fascio di quadriche, e discuterne anzitutto la parità o disparità (§ 2): si trova che, in uno spazio di dimensione > 3 , la quartica, se ha falde reali, ne può avere solo una o due, e sempre d'ordine pari.

Resta da esaminare il tipo di queste falde (nel senso spiegato sopra), in relazione con altri due caratteri topologici evidenti del fascio stesso: il numero dei suoi coni reali ed il tipo delle quadriche reali in esso contenute; ciò è fatto nei §§ 3, 4, 5, 6, 7, 8; in pari tempo trattiamo anche la questione degli spazi reali esistenti sulla quartica base.

Nei §§ 9 e 10, riprendendo alcune proprietà, già stabilite nel § 3 ed utilizzate dopo, trattiamo i due problemi di equivalenza sopra enunciati.

Infine, nel § 11 le cose esposte vengono applicate ai primi valori di n , lasciando da parte il caso di $n = 3$, per il quale si ritroverebbero i ben noti risultati relativi alla forma di una C^4 sghemba di 1.^a specie⁽⁸⁾; per $n = 4$ ed $n = 5$ si ottengono i risultati dello ZEUTHEN⁽⁹⁾ e del REYE⁽¹⁰⁾ relativi a questioni di forma e di realtà rispett. per superficie di 4.^o ordine (dello spazio ordinario) con conica doppia e per complessi quadratici di rette.

Oss. — In tutto il lavoro, quando si parlerà d'un qualsiasi ente algebrico (punto, linea, V_k , corrispondenza), senza specificarne la natura, s'intenderà che esso sia reale; quando dovesse essere complesso lo si dirà sempre esplicitamente. L'ente complesso-coniugato d'un ente complesso A s'indicherà con \bar{A} .

(7) La distinzione analoga per le falde pari di superficie dello spazio ordinario è dovuta al KLEIN, loc. cit. nella nota (5), § 15.

(8) CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*; Crelle, 86 (1868), pp. 1-133; Opere Matematiche, III, pp. 1-122; n.¹ da 161 a 170. Per altre indicazioni bibliografiche si veda: STAUDE, *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven*; Encyklop. der Math. Wiss., III C 2, pp. 161-256, n.^o 126. (V. anche CHISINI, *Sulla forma delle quartiche gobbe di prima specie e delle curve ellittiche normali*; Rend. Ist. Lomb., (2) 53 (1919-1920), pp. 591-599, § 4).

(9) H. G. ZEUTHEN, *Su le superficie di 4.^o ordine con conica doppia*; questi Annali, (2) 14 (1886), pp. 31-70 (trad. dal danese di GINO LORIA). (V. anche SEGRE, Mem. dei Math. Ann. cit. nella nota (2), n.^o 143).

(10) TH. REYE, *Ueber die Hauptarten des allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexengewebe*; Crelle, 98 (1885), pp. 284-300. C. ARNOLDT, *Einige Untersuchungen über quadratische Strahlencomplexe*; Diss., Strassburg, 1887, p. 38. Nè il REYE, nè l'ARNOLDT, non considerano nulla che interpreti in qualche modo nello spazio ordinario il numero e la specie delle falde della varietà di S_5 immagine d'un complesso quadratico di rette di S_3 .

§ 1. — SULLE FALDE CHIUSE A k DIMENSIONI D'ORDINE PARI
E D'ORDINE DISPARI.

1. — Sia L una linea chiusa in un S_n . Un iperpiano π , non contenente alcuna porzione di L , tagli L in m punti; un altro iperpiano π' , nelle stesse condizioni di π , e non passante per nessuno dei punti ove π taglia L , abbia m' punti d'intersezione con L . Poichè L è chiusa, ed in ciascuno dei suoi punti d'intersezione con π o con π' essa passa dall'una all'altra delle due regioni (diedri completi) in cui l'ambiente S_n vien diviso da π e π' , il numero $m + m'$ sarà pari; e perciò m ed m' saranno entrambi pari od entrambi dispari.

Un iperpiano non contenente alcuna porzione di L taglia dunque L in punti il cui numero o è sempre pari o è sempre dispari; nel primo caso diremo che L è *d'ordine pari*, nel secondo che L è *d'ordine dispari*.

Se L sta in un S_m , con $m < n$, la sua parità o disparità può essere decisa cercandone le intersezioni con gli S_{m-1} di S_m .

Una linea composta di linee chiuse si dirà d'ordine pari o d'ordine dispari secondochè fra le sue componenti quelle che sono d'ordine dispari sono in numero pari o dispari.

2. — Si abbia ora in S_n una V_k chiusa ($1 < k < n$), e siano rispettivamente in numero di m, m' i punti in cui V_k è intersecata da due S_{n-k} : π, π' , nessuno dei quali contenga infiniti punti di V_k , e non passanti entrambi per uno stesso punto di V_k . Supponiamo che π, π' stiano in un S_{n-k+1} ; allora questo taglia V_k lungo una linea intersecata da π, π' rispettivamente in quegli m ed m' punti, onde m, m' saranno entrambi pari o entrambi dispari. Se poi π, π' sono generici, si vede facilmente che si può passare da π a π' con una catena di S_{n-k} dei quali due successivi stiano sempre in un S_{n-k+1} ; perciò la V_k considerata è tagliata da ogni S_{n-k} , che non ne contenga infiniti punti, in un numero di punti o sempre pari o sempre dispari; nel primo caso la V_k si dirà *d'ordine pari*, o semplicemente *pari*, nel secondo *d'ordine dispari*, o semplicemente *dispari*.

Se la V_k sta in un S_m , con $m < n$, se ne deciderà la parità o disparità cercandone le intersezioni con gli S_{m-k} di S_m .

Una V_k composta di parti chiuse (di dimensione k) si dirà d'ordine pari o d'ordine dispari secondochè contiene un numero pari o dispari di componenti d'ordine dispari.

3. — Le definizioni precedenti si estendono al caso di $k=0$, quando V_k si componga d'un numero finito di punti: essa si dirà allora d'ordine pari o dispari secondochè quel numero è pari o dispari.

Uno spazio a k dimensioni è d'ordine dispari.

La V_{h+k-n} sezione d'una V_k con un S_h ($h+k \geq n$) è d'ordine pari o dispari come la V_k . Viceversa, V_k è pari o dispari come le sue sezioni con spazi. È però da notare che se l' S_h sega V_k in una varietà di dimensione $> h+k-n$, nulla si può più dire, in generale, sulla parità o disparità dell'intersezione. Ad es., una rigata cubica normale di S_4 è d'ordine dispari (v. più oltre il n.º 9), però esistono dei piani che la segano secondo coniche, che son linee d'ordine pari.

In particolare, se c'è in S_n un S_{n-1} contraddistinto come iperpiano all'infinito, si ha che una V_k dispari ($k > 0$) si estende sempre all'infinito, mentre una V_k pari può anche avere i suoi punti tutti a distanza finita.

Proiettando una V_k ($k < n-1$) da un punto esterno O si ha una V_{k+1} (cono di vertice O), le cui intersezioni con un S_{n-k-1} generico sono tante quante quelle di V_k con l' S_{n-k} che proietta da O quell' S_{n-k-1} ; perciò V_{k+1} è pari o dispari come V_k . Se invece O è un punto generico di V_k , la proiezione V_{k+1} è pari o dispari secondochè V_k è dispari o pari.

Più in generale, la V_{h+k+1} proiezione di V_k da un S_h ($h+k+1 < n$) avente in comune con V_k un numero (finito) di punti, è pari o dispari secondochè la parità o disparità di V_k coincide oppur no con quella del gruppo dei punti comuni a V_k ed S_h .

Due V_k omologhe in un'omografia sono entrambe pari o entrambe dispari.

4. — Consideriamo ora il gruppo dei punti d'intersezione d'una V_{n-1} e d'una linea L , non avente alcuna porzione sopra V_{n-1} . Presi in S_n un piano π ed un S_{n-2} , O , generici, trasformiamo L con le ∞^1 omografie aventi O e π come luoghi di punti uniti: si otterranno ∞^1 linee L' tutte pari o tutte dispari come L , costituenti una successione continua, ed una delle quali sta in π . Inoltre, passando da una posizione di L' ad un'altra, le intersezioni di L' con V_{n-1} possono variare solo d'un numero pari (la scomparsa di qualche intersezione potendo avvenire solo attraverso una posizione di L' nella quale L' tocca V_{n-1}); d'altra parte π sega V_{n-1} in una linea pari o dispari come la V_{n-1} stessa; perciò, per un noto teor. di STAUDT⁽¹⁾, si conclude che: Una

(1) STAUDT, loc. cit., n.º 157. Il ragionamento di questo n.º 4 è analogo a quello della nota al n.º 158 dello STAUDT.

V_{n-1} chiusa ed una linea chiusa, non aventi infiniti punti comuni, si tagliano in un numero dispari di punti se sono entrambe d'ordine dispari, in un numero pari (zero incluso) di punti se una almeno delle due è d'ordine pari.

5. — Se si hanno invece una V_{n-1} ed una V_k , con $k > 1$, entrambe chiuse, e tali che V_k non abbia sopra V_{n-1} , delle porzioni (a k dimensioni), segandole con un S_{n-k+1} generico si ottengono entro questo una V_{n-k} ed una linea (o chiuse, o composte di parti chiuse), alle quali si può applicare il teor. precedente. E poichè le intersezioni (in numero finito) della V_{n-k} con quella linea sono tutte e sole le intersezioni dell' S_{n-k+1} con la V_{k-1} comune alle V_{n-1} e V_k iniziali, si ha: *Una V_{n-1} ed una V_k chiuse, aventi in comune una varietà di dimensione $k-1$, si segano in una V_{k-1} dispari se sono entrambe d'ordine dispari, non si segano o si segano in una V_{k-1} pari se una almeno di esse è d'ordine pari.*

6. — Con un ragionamento simile a quello del n.º 4, e applicando il teor. stesso del n.º 4, si trova che: *Una V_k ed una V_{n-k} chiuse, non aventi in comune infiniti punti, si segano in un numero dispari di punti quando sono entrambe d'ordine dispari, in un numero pari (zero incluso) di punti quando una almeno di esse è d'ordine pari.*

7. — Date infine una V_k ed una $V_{k'}$ (con $k + k' > n$, $k < n-1$, $k' < n-1$), se si segano entrambe con un $S_{2n-k-k'}$ generico, si ottengono entro questo una $V_{n-k'}$ ed una V_{n-k} alle quali è applicabile il teor. precedente, e le cui intersezioni danno tutte e sole le intersezioni dell' $S_{2n-k-k'}$ con la varietà intersezione di V_k e $V_{k'}$. Perciò si può enunciare il seguente teor. generale che include i precedenti: *Una V_k ed una $V_{k'}$ chiuse ($k + k' \geq n$), aventi in comune una varietà di dimensione $k + k' - n$, si segano in una $V_{k+k'-n}$ d'ordine dispari se sono entrambe d'ordine dispari, non si segano o si segano in una $V_{k+k'-n}$ d'ordine pari se una almeno delle due è d'ordine pari.*

8. — Ne segue che: *Una V_k d'ordine dispari contiene varietà di ogni dimensione $k' < k$ sia d'ordine pari che d'ordine dispari: esempî di tali varietà minori si ottengono segnando V_k con altre varietà, pari o dispari.*

Per la stessa ragione: *Se una V_k d'ordine pari contiene una $V_{k'}$ d'ordine dispari ($k' < k$), essa contiene delle varietà di ogni dimensione $k'' < k'$ sia d'ordine pari che d'ordine dispari.*

Se una V_k d'ordine pari non contiene nessuna $V_{k'}$ dispari ($k' < k-1$), essa non può contenere neppure delle varietà d'ordine dispari di dimensione maggiore di k' .

Perciò le V_k pari si possono distribuire in varî tipi a seconda della dimensione *massima* delle varietà dispari tracciate su di esse; e precisamente, una V_k d'ordine pari si dirà *di specie k'* quando contiene delle $V_{k'}$ dispari, ma non contiene nessuna varietà dispari di dimensione $> k'$ ⁽¹²⁾. Il numero k' può variare da 0 a $k - 1$.

Due falde pari di specie k' e k'' rispett. hanno certo dei punti comuni quando $k' + k'' \geq n$, anzi essi costituiscono allora una varietà pari di specie $k' + k'' - n$ almeno.

9. — Le cose precedenti si applicano, in particolare, alle varietà algebriche reali: se una tale varietà, di dimensione k , ha dei punti reali, essi si distribuiscono in una o più falde chiuse, di dimensione k o minore, ciascuna delle quali potrà essere d'ordine pari o dispari. Se il grado della varietà è r , un S_{n-k} generico la sega in r punti (tra reali e complessi); perciò le falde dispari a k dimensioni della V_k algebrica saranno in numero pari o dispari secondochè r è pari o dispari. Ad es., una V_k^2 reale, non degenera, dotata di punti reali, si compone d'una sola falda pari a k dimensioni; invece una varietà cubica, di qualunque dimensione k (ad es. una rigata cubica di S_4) contiene sempre una falda dispari di dimensione k .

Se la V_k algebrica non ha punti multipli, non potranno esistere falde isolate di dimensione $< k$, nè punti comuni a due diverse falde a k dimensioni della V_k ; perciò, se $2k \geq n$, la V_k non potrà avere più di una falda dispari a k dimensioni. Così, una V_{n-1}^2 , priva di punti multipli, si compone d'una sola falda dispari insieme, eventualmente, con una falda pari (entrambe ad $n - 1$ dimensioni).

Considerando delle varietà algebriche, è facile provare l'esistenza di falde V_k d'ordine pari e di specie k' , qualunque siano i valori fissati per k e k' . Prendiamo infatti in un $S_{k-k'+1}$ la quadrica di equazione:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{k-k'+1}^2 = 0,$$

ove le $x_0, x_1, \dots, x_{k-k'+1}$ sono coordinate proiettive omogenee in un sistema di riferimento reale. Essa è esterna all' $S_{k-k'}$ di equazione $x_0 = 0$, perciò, pur contenendo punti reali, non può contenere rami di curva d'ordine dispari.

(12) Poichè una V_k reale pari di specie k' non conterrà, in generale, degli $S_{k'}$ reali, preferiamo questa denominazione all'altra: V_k di tipo $S_{k'}$, che sarebbe analoga a quella che usa lo ZEUTHEN per le falde superficiali dello spazio ordinario (loc. cit. nella nota (9), n.º 18 e relativa prima nota).

I suoi punti reali formano perciò una falda pari a $k - k'$ dimensioni e di specie 0. Proiettandola da un $S_{k'-1}$, sghembo con l' $S_{k-k'+1}$, si ha un cono quadrico che contiene degli S_k reali, ma privo di falde dispari di dimensione $> k'$: i punti reali del cono formano dunque una V_k pari di specie k' .

Si riconosce poi subito che i punti reali della quadrica di S_n :

$$a_0 x_0^2 + \dots + a_k x_k^2 - a_{k+1} x_{k+1}^2 - \dots - a_n x_n^2 = 0,$$

ove le a_0, a_1, \dots, a_n sono numeri positivi, e $2k < n$, formano una V_{n-1} pari (contenente degli S_k reali, e) di specie k ; rispetto ad essa sono esterni l' S_k e l' S_{n-k-1} di equazioni rispettivamente:

$$x_0 = x_1 = \dots = x_k = 0, \quad x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0.$$

Per una falda (d'ordine pari) priva di punti reali si assumerà la dimensione $k' = -1$.

Le falde pari a k dimensioni d'una V_k^r algebrica di S_n possono essere di specie varia; se però la V_k^r non ha punti multipli, non possono esistere due falde pari a k dimensioni di specie k', k'' quando sia $k' + k'' \geq n$.

§ 2. — LE FALDE REALI DELLA V_{n-2}^4 BASE D'UN FASCIO GENERICO DI QUADRICHE IN S_n .

10. — Applichiamo le cose sopra esposte alla V_{n-2}^4 intersezione di due quadriche di S_n , limitandoci al caso in cui il fascio di quadriche che quelle due definiscono contenga $n + 1$ coni distinti, sicchè esista una piramide (avente per vertici i vertici di quei cono) autopolare rispetto a tutte le quadriche del fascio. Indicheremo sempre con V la quartica base del fascio, che sarà irriducibile, e supporremo $n > 2$ ⁽¹³⁾.

Se esistono punti reali di V , essi si distribuiscono in non più di due falde.

(13) Per $n = 2$, il fascio contiene tre coniche degeneri, e la varietà base si compone di quattro punti per i quali si possono avere i casi seguenti: a) 4 punti base reali, 3 coniche degeneri reali, e composte di rette reali; b) 2 punti base reali e 2 complessi-coniugati, una sola conica degenera reale, e composta di rette reali; c) 4 punti base complessi a due a due coniugati, 3 coniche degeneri reali, di cui una composta di rette reali e le altre due di rette complesse-coniugate.

Infatti, se V non contiene falde dispari, non può avere tre falde pari V_1, V_2, V_3 , altrimenti un S_3 passante per tre punti presi in modo generico uno per ciascuna di esse incontrerebbe V secondo una C^4 sghemba di 1.^a specie, irriducibile, e con tre rami reali, il che è assurdo ⁽¹⁴⁾.

Supposto poi che V contenga una falda dispari, V_1 , ne conterrà certo una seconda, V_2 (n.° 9); e poichè queste non debbono avere punti comuni, dovrà essere: $2(n-2) < n$, cioè: $n < 4$, e quindi: $n = 3$. Solo in un S_3 la quartica base d'un fascio di quadriche può contenere due rami dispari; ma allora non ci può essere un terzo ramo, V_3 , perchè il piano determinato da due punti di V_1 ed uno di V_3 , generici, segherebbe ancora V_1 in un punto, segherebbe V_2 in un punto almeno, e quindi, contenendo almeno 5 punti di V , ne conterrebbe una componente piana, contro l'ipotesi. Sicchè:

I punti reali eventuali della V_{n-2}^ base d'un fascio generico di quadriche in S_n ($n > 2$) possono costituire o due falde pari, o una sola falda pari, e per $n = 3$ possono anche distribuirsi in due rami di curva entrambi dispari.*

11. — Si possono dare esempî di questi varî tipi di quartiche considerando in S_n l'intersezione di due ellissoidi ⁽¹⁵⁾. Così, se uno dei due ellissoidi è tutto interno all'altro la quartica loro intersezione è priva di punti reali; se si prendono due ellissoidi esterni l'uno all'altro ed aventi in comune ad es. un vertice ed il relativo iperpiano tangente, e si suppone che uno di essi si ingrandisca di poco senza mutare di centro, la quartica intersezione dei due ellissoidi ha una sola falda reale; se infine si sega un ellissoide con un cono di specie 1 (cono proiettante da un punto una quadrica di specie 0 d'un S_{n-1}), ed avente il vertice interno ad esso, si ottiene come intersezione una quartica con due falde reali (n.° 18).

Quanto all'ultimo caso, nell'ipotesi di $n = 3$, è noto che esso è possibile ⁽⁶⁾; lo ritroveremo al n.° 23.

⁽¹⁴⁾ HARNACK, *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*; Math. Ann., 10 (1876), pp. 189-198. HILBERT, *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven*; Math. Ann., 38 (1891), pp. 115-138, in fondo a p. 119. V. anche nota ⁽⁸⁾.

⁽¹⁵⁾ Fissato un S_{n-1} di S_n come iperpiano all'infinito, si dirà *ellissoide* una quadrica, non degenera, di S_n priva di punti reali all'infinito. Un ellissoide divide S_n in due regioni: una (che contiene l' S_{n-1} all'infinito) di punti esterni e l'altra di punti interni; l' S_{n-1} polare d'un punto è esterno o segante secondochè quel punto è interno od esterno. Similmente, ogni quadrica reale non degenera di specie 0 determina in S_n una regione di punti esterni ed una di punti interni; ogni retta contenente un punto interno sega la quadrica in due punti reali; e scrivendo l'equazione della quadrica sotto forma di somma di quadrati (n.° 9) si vede anche che qualsiasi piramide autopolare rispetto ad essa ha un vertice interno e gli altri esterni.

§ 3. — SUL TIPO DELLE QUADRICHE REALI DI UN FASCIO.

12. — Un fascio generico di quadriche in S_n contenga $2h + 2$ coni immaginari, i cui vertici, a due a due coniugati, siano i punti $\omega_0, \bar{\omega}_0; \omega_1, \bar{\omega}_1; \dots; \omega_h, \bar{\omega}_h$. Le rette $\omega_i, \bar{\omega}_i$ ($i = 0, 1, \dots, h$) son reali, e su ciascuna di esse le quadriche del fascio segano un'involuzione ellittica di coppie di punti; perciò, detta φ una quadrica reale generica del fascio, potremo prendere come punti fondamentali A_i, A_{i+h+1} le intersezioni di φ con la retta $\omega_i, \bar{\omega}_i$; presi poi come punti fondamentali A_{2h+2}, \dots, A_n i vertici dei coni reali del fascio, l'equazione di φ assumerà la forma:

$$\begin{aligned} 2(\alpha_0 x_0 x_{h+1} + \dots + \alpha_h x_h x_{2h+1}) + \alpha_{2h+2} x_{2h+2}^2 + \dots + \\ + \alpha_{h+k+1} x_{h+k+1}^2 - \alpha_{h+k+2} x_{h+k+2}^2 - \dots - \alpha_n x_n^2 = 0, \end{aligned}$$

ove $\alpha_{2h+2}, \dots, \alpha_n$ si possono supporre positivi, ed inoltre:

$$h \leq k, \quad 2(k - h) \leq n - 2h - 1 \quad (\text{cioè } 2k \leq n - 1).$$

Si può quindi, disponendo del punto unità, e senza introdurre degli immaginari⁽¹⁶⁾, ridurla alla forma:

$$\begin{aligned} 2(\alpha_0 x_0 x_{h+1} + \dots + \alpha_h x_h x_{2h+1}) + x_{2h+2}^2 + \dots + x_{h+k+1}^2 - \\ - x_{h+k+2}^2 - \dots - x_n^2 = 0. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 2(\alpha_0 x_0 x_{h+1} + \dots + \alpha_h x_h x_{2h+1}) + x_{2h+2}^2 + \dots + x_{h+k+1}^2 - \right.} (1)$$

Sia ora ψ un'altra quadrica reale non degenera del fascio; e consideriamo le coppie di punti che φ, ψ segano su $\omega, \bar{\omega}_i$:

$$x_i x_{i+h+1} = 0; \quad a_{ii} x_i^2 + 2 a_{i,i+h+1} x_i x_{i+h+1} + a_{i+h+1,i+h+1} x_{i+h+1}^2 = 0;$$

la coppia $\omega, \bar{\omega}_i$, che le separa entrambe armonicamente, avrà l'equazione:

$$x_i^2 + \rho_i x_{i+h+1}^2 = 0; \quad \text{ove: } \rho_i = - \frac{a_{i+h+1,i+h+1}}{a_{ii}}.$$

E poichè i numeri ρ_i devono essere tutti positivi, si può, cambiando di nuovo il punto unità, ridurre le ρ_i ed i primi coefficienti della (1) ad essere

(16) Cioè, eseguendo ad es. la trasformazione (reale) di coordinate:

$$x'_0 = x_0; \dots; x'_{2h+1} = x_{2h+1}; x'_{2h+2} = \sqrt{\alpha_{2h+2}} x_{2h+2}; \dots; x'_n = \sqrt{\alpha_n} x_n.$$

tutti uguali ad 1⁽¹⁷⁾. Allora sarà: $\alpha_{i+h+1, i+h+1} = -\alpha_{ii}$; e le equazioni di φ , ψ si potranno scrivere:

$$\varphi \equiv \mathcal{Q}(x_0 x_{h+1} + \dots + x_h x_{2h+1}) + x_{2h+2}^2 + \dots + x_{h+k+1}^2 - x_{h+k+2}^2 - \dots - x_n^2 = 0; \quad (1')$$

$$\sum_{i=0}^h (\alpha_{ii} x_i^2 + \mathcal{Q} \alpha_{i, i+h+1} x_i x_{i+h+1} - \alpha_{ii} x_{i+h+1}^2) + \sum_{i=2h+2}^n \alpha_i x_i^2 = 0. \quad (2)$$

Supponiamo ora che ψ sia dello stesso tipo di φ , anzi che uno almeno dei due *segmenti* (o *tratti*) reali del fascio limitati da φ e ψ non contenga dei coni; allora è possibile, facendo variare con continuità i coefficienti della (2), ridurre la (2) stessa a coincidere con la (1') senza che nessuna delle α_i ($i = 2h+2, \dots, n$) si annulli durante la variazione; si può quindi supporre che i segni delle α_i sian disposti come quelli dei coefficienti analoghi della (1'), onde l'equazione di ψ , scritta più esplicitamente, diviene:

$$\psi \equiv \sum_{i=0}^h \left(\alpha_{ii} x_i^2 + \mathcal{Q} \alpha_{i, i+h+1} x_i x_{i+h+1} - \alpha_{ii} x_{i+h+1}^2 \right) + \lambda_{2h+2} x_{2h+2}^2 + \dots + \lambda_{h+k+1} x_{h+k+1}^2 - \mu_{h+k+2} x_{h+k+2}^2 - \dots - \mu_n x_n^2 = 0 \quad (2')$$

con le $\lambda_{2h+2}, \dots, \lambda_{h+k+1}$; $\mu_{h+k+2}, \dots, \mu_n$ tutte positive e diverse fra loro.

Nel seguito supporremo anche d'aver numerato i vertici dei coni reali in modo che sia:

$$\lambda_{2h+2} < \lambda_{2h+3} < \dots < \lambda_{h+k+1}; \quad \mu_{h+k+2} < \mu_{h+k+3} < \dots < \mu_n. \quad (3)$$

L'equazione d'una quadrica generica del fascio è dunque:

$$\lambda \varphi - \psi = 0, \quad (4)$$

(ove φ , ψ hanno rispett. le forme (1'), (2')); od anche, come somma di qua-

(17) Con la trasformazione (reale) di coordinate:

$$x'_0 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\rho_0}} x_0; \dots; x'_h = \frac{\alpha_h}{\sqrt{\rho_h}} x_h; \quad x'_{h+1} = \sqrt{\rho_0} x_{h+1}; \dots; \quad x'_{2h+1} = \sqrt{\rho_h} x_{2h+1};$$

$$x'_{2h+2} = x_{2h+2}; \dots; \quad x'_n = x_n;$$

la quale non distrugge l'effetto della trasformazione già prima eseguita.

drati:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^h \frac{1}{a_{ii}} \left\{ \alpha_{ii}^2 + (\lambda - \alpha_{i,i+h+1})^2 \right\} x_{i+h+1}^2 - \left[a_{ii} x_i - (\lambda - \alpha_{i,i+h+1}) x_{i+h+1} \right]^2 \left\{ + \right. \\ \left. + \sum_{i=2h+2}^{h+k+1} (\lambda - \lambda_i) x_i^2 - \sum_{i=h+k+2}^n (\lambda - \mu_i) x_i^2 = 0 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

13. — Il discriminante della (4'), a meno del segno, vale:

$$\left[\alpha_{00}^2 + (\lambda - \alpha_{0,h+1})^2 \right] \cdots \left[a_{hh} + (\lambda - \alpha_{h,2h+1})^2 \right] (\lambda - \lambda_{2h+2}) \cdots \\ \cdots (\lambda - \lambda_{h+k+1}) (\lambda - \mu_{h+k+2}) \cdots (\lambda - \mu_n);$$

sicchè gli $n+1$ coni del fascio corrispondono ai seguenti valori di λ :

$$\alpha_{0,h+1} \pm i \alpha_{00}; \dots; \alpha_{h,2h+1} \pm i \alpha_{hh}; \lambda_{2h+2}, \dots, \lambda_{h+k+1}; \mu_{h+k+2}, \dots, \mu_n. \quad (5)$$

Quelli di essi che sono reali dividono il fascio in altrettanti *segmenti* (o *tratti*) reali consecutivi, ciascuno dei quali si compone di quadriche reali tutte della stessa *specie* (n.º 8), perchè la specie della (4') può mutare (n.º 9), al variare di λ nel campo reale, solo quando si annulla in essa il coefficiente di uno dei termini in x_{2h+2}^2, \dots, x_n^2 , cioè quando λ è uguale a uno dei numeri $\lambda_{2h+2}, \dots, \mu_n$. Anzi, se una quadrica reale si muove con continuità entro il fascio attraversando ad es. il cono di vertice A_s ($2h+2 \leq s \leq n$), il termine in x_s^2 della (4') cambia di segno; perciò il cono considerato separa, entro il fascio, quadriche di una certa specie l da quadriche di specie $l+1$, ed il cono stesso sarà di specie $l+1$. Fa eccezione il solo caso in cui l'ambiente abbia dimensione pari $n = 2m+2$, ed inoltre l'equazione di quel cono, che si deduce dalla (4') sopprimendovi il termine in x_s^2 , contenga $m+1$ termini positivi e altrettanti negativi; allora il cono è di specie $m+1$ e separa quadriche di specie (massima) m da altre della stessa specie m (perchè, qualunque sia il segno del coefficiente di x_s^2 , la (4') conterrà sempre, in questo caso, $m+1$ termini d'un segno ed $m+2$ del segno contrario).

In un fascio generico di quadriche in S_n , un cono reale di specie l separa, entro il fascio, quadriche di specie l da quadriche di specie $l-1$; eccettuato il caso d'un cono di specie (massima) $m+1$ in un S_{2m+2} , il quale separa due tratti di quadriche tutte di specie m .

Così, un cono reale privo di falda reale (cioè di specie 0) separa quadriche di specie 0 da quadriche reali prive di punti reali (di specie -1);

e viceversa, se c'è nel fascio un tratto di quadriche reali prive di punti reali, questo è limitato da due coni aventi di reale solo il vertice.

14. — Supponiamo ora di far crescere λ a partire da un valore minore di tutti i numeri $\lambda_{2h+2}, \dots, \mu_n$ fino ad un valore maggiore di tutti questi numeri. Poichè in ogni termine della prima somma della (4') vi sono due addendi di segno contrario, si vede che, inizialmente, la (4') contiene $k+1$ termini negativi ed $n-k$ positivi; quando λ cresce, si perde un termine negativo (e se ne acquista uno positivo) ogni volta che λ attraversa una delle λ_i ($i=2h+2, \dots, h+k+1$), ed il contrario accade quando λ attraversa una delle μ_j ($j=h+k+2, \dots, n$); alla fine tutti gli ultimi $n-2h-1$ termini della (4') hanno cambiato segno, sicchè si hanno in essa $k+1$ termini positivi ed $n-k$ negativi. La differenza tra il numero dei termini positivi e quello dei negativi è dunque partita dal valore positivo: $(n-k) - (k+1)$, e, variando di due unità per volta, è giunta al valore opposto: $(k+1) - (n-k)$; essa ha quindi assunto certo il valore 0 od il valore 1 secondochè $(n-k) - (k+1)$ è pari o dispari, cioè secondochè n è dispari o pari. Non è escluso che la differenza suddetta possa assumere più volte il valore 0 od il valore 1: quando ciò accade la (4') rappresenta quadriche di specie massima.

Ogni fascio di quadriche contiene sempre uno o più tratti costituiti da quadriche di specie massima.

Ne segue ad es. che, in un S_{2m+2} , un fascio di quadriche contiene sempre almeno un cono reale di specie $m+1$, e quindi almeno due tratti (contigui) di quadriche di specie m ; in un S_{2m+1} , invece, o non vi sono nel fascio coni reali, ed allora tutte le quadriche reali del fascio sono di specie m , e viceversa, oppure vi sono almeno due coni reali di specie m limitanti un tratto di quadriche pure di specie m .

15. — Tutto ciò conduce a considerare due nuovi caratteri topologici d'un fascio di quadriche: il numero dei coni immaginarî in esso contenuti, e la specie minima delle sue quadriche reali non degeneri.

Chiameremo fascio (n, k) un fascio generico di quadriche in S_n quando le quadriche (reali) di specie minima in esso contenute sono di specie k .

Come già s'è detto, la prima somma che compare nella (4') contiene sempre $h+1$ termini positivi ed altrettanti negativi, qualunque sia λ , purchè reale; perciò la quadrica (4'), se è reale, contiene sempre almeno degli S_h reali, ed è perciò almeno di specie h . *Le quadriche reali non degeneri d'un fascio con $2h+2$ coni immaginarî sono almeno di specie h .* Ne segue: *Un fascio*

(n, k) può contenere al più $2k + 2$ coni immaginari⁽¹⁸⁾; cioè contiene almeno $n - 2k - 1$ coni reali.

Inoltre: *Se un fascio (n, k) contiene dei coni immaginari, lo spazio che congiunge i vertici di $2h + 2$ di essi, a due a due coniugati, ha come polare rispetto a tutte le quadriche del fascio un S_{n-2h-2} su cui il fascio dato sega un fascio $(n - 2h - 2, k - h - 1)$. E viceversa.*

Notiamo ancora che le quadriche di specie (minima) k d'un fascio (n, k) possono distribuirsi anche in più tratti; supposto sempre che il fascio contenga $2h + 2$ coni immaginari, e quindi che i tratti reali siano in numero di: $n + 1 - (2h + 2)$, la cosa può essere così precisata. Escluso il caso di $n = 2k + 2$, nel quale il numero x dei tratti composti di quadriche di specie k vale proprio: $n + 1 - (2h + 2) = 2k - 2h + 1$, in ogni altro caso, tra due consecutivi di quegli x tratti è compreso almeno un altro tratto. Inoltre, se l'ambiente ha dimensione pari $2m + 2$, il fascio contiene almeno due tratti contigui γ, δ di quadriche di specie m (n.º 14); e tra il tratto somma $\gamma + \delta$ ed il primo degli x tratti di specie k che s'incontra procedendo in un senso qualsiasi son compresi almeno $m - k - 1$ tratti (uno almeno per ciascuna delle specie possibili comprese tra k ed m); ne segue:

$$x + (x - 1) + 2 + 2(m - k - 1) \leq 2m + 3 - (2h + 2);$$

cioè: $x \leq k - h + 1$.

Similmente, se l'ambiente ha dimensione dispari $2m + 1$, il fascio contiene almeno un tratto di quadriche di specie m (n.º 14), perciò:

$$x + (x - 1) + 1 + 2(m - k - 1) \leq 2m + 2 - (2h + 2);$$

da cui segue di nuovo la condizione di prima per x .

In un fascio (n, k) con $h + 1$ coppie di coni immaginari coniugati, i tratti composti di quadriche di specie k sono al più $k - h + 1$.

Perciò, se quei tratti sono proprio $k + 2$, i coni del fascio sono tutti reali⁽¹⁸⁾.

(18) Ciò si collega a due teor. noti: WEIERSTRASS, loc. cit. nella nota (1), n.º 7; KLEIN, *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form*; Math. Ann., 23 (1884), pp. 539-596, n.º 16 e relativa nota a p. 562 (Gesammelte Math. Abhandl., 1.º B. d, pp. 1-48). V. anche SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*, Encyklop. der Math. Wiss., III C 7, nota (296) a pag. 866.

Più avanti esamineremo a fondo la distribuzione dei vari tratti del fascio in dipendenza della specie delle quadriche che li compongono; ora passiamo a mettere in relazione i nuovi caratteri del fascio qui introdotti col numero e con la specie delle falde della quartica base.

§ 4. — FASCI LA CUI QUARTICA BASE È PRIVA DI PUNTI REALI.

16. — Se la quartica base V d'un fascio di quadriche è priva di punti reali, gli $n + 1$ coni del fascio sono tutti reali, perchè se vi fossero due coni complessi-coniugati, di vertici $\omega, \bar{\omega}$, un piano reale qualsiasi contenente la retta $\omega\bar{\omega}$ segherebbe il fascio dato in un fascio di coniche contenente due coppie immaginarie di rette ed avente quindi due punti base reali ⁽¹⁵⁾.

Tra i coni del fascio ve ne sono però due, e due soltanto, privi di falda reale. La cosa è vera nel piano ⁽¹⁵⁾; perciò, ammessa vera in un S_{n-1} , dimostriamola in un S_n . Detti A_0, A_1, \dots, A_n i vertici (reali) dei coni del fascio in S_n , l'iperpiano $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ sega il fascio dato in un altro la cui quartica base è pure priva di punti reali; perciò tra i coni del fascio dato ve ne saranno anzitutto $n - 2$ a falda reale, perchè segati (per ipotesi) da quell' S_{n-1} secondo coni anche a falda reale; mentre altri due, e siano ad es. quelli di vertici A_{n-2}, A_{n-1} , saranno segati da quell' S_{n-1} secondo coni privi di falda reale. Consideriamo ora il piano $A_{n-2} A_{n-1} A_n$; su esso il fascio dato sega un fascio di coniche contenente una sola coppia di rette reali ⁽¹⁵⁾; perciò uno almeno dei coni di vertici A_{n-2}, A_{n-1} , ad es. il secondo, è segato dal detto piano secondo rette complesse-coniugate. D'altra parte, l' S_{n-1} di prima e la retta $A_{n-1} A_n$ sono fra loro polari rispetto al cono stesso di vertice A_{n-1} ; perciò tale cono dev'essere privo di falda reale, se no ogni piano passante per la retta $A_{n-1} A_n$, e quindi anche il piano $A_{n-2} A_{n-1} A_n$, dovrebbe segarlo secondo due rette reali ⁽¹⁵⁾. Che esista nel fascio anche un altro cono privo di falda reale, ed uno solo, segue dai n.° 13 e 15; due tali coni limitano un tratto di quadriche reali prive di falda reale; e di questi tratti ve n'è uno solo.

Viceversa, se un fascio di quadriche contiene qualche quadrica reale priva di punti reali, e quindi (almeno) due coni reali privi di falda reale, la quartica base è certo priva di punti reali, e quindi i coni del fascio sono tutti reali ⁽¹⁵⁾, e di essi soltanto due son privi di falda reale.

Tenendo conto poi del teor. del n.º 13, si può anche dire che, in uno spazio dispari S_{2m+1} , il fascio contiene due coni per ciascuna specie possibile, e contiene un sol tratto di quadriche di specie (massima) m e due tratti per ciascuna specie compresa tra m e -1 ; invece in uno spazio pari S_{2m+2} , il fascio contiene un sol cono di specie (massima) $m+1$ e due per ciascun'altra specie possibile, e contiene due tratti di quadriche per ciascuna specie possibile da 0 ad m .

Se la quartica base d'un fascio di quadriche in S_n è priva di punti reali, i coni del fascio son tutti reali, ma due di essi son privi di falda reale. E viceversa.

È cioè la stessa cosa parlare di fasci $(n, -1)$ oppure di fasci la cui quartica base è priva di punti reali.

§ 5. — FASCI LA CUI QUARTICA BASE HA DUE FALDE (PARI).

17. — Supponiamo ora che i punti reali della quartica V si distribuiscano in due falde (pari) V_1 e V_2 . Presi in modo generico un punto A di V_1 ed un punto B di V_2 , la retta AB sta su *una* quadrica φ del fascio, non degenerare; ed è facile vedere che ogni altra retta r della stessa quadrica φ si comporta come la AB , cioè congiunge un punto di V_1 con un punto di V_2 . Infatti, se r è incidente ad AB , il piano $r.AB$ sega ancora in un punto sia V_1 che V_2 , e questi punti devono stare su r ; se invece r è sghemba con AB , essa si comporta come una retta incidente ad essa e ad AB , e perciò, di nuovo, incontra V_1 e V_2 .

Ne segue che φ non può contenere dei piani reali, perchè uno qualunque di questi dovrebbe incontrare V_1 e V_2 secondo (linee costituenti complessivamente una conica, perciò secondo) due rette; ma allora si avrebbero dei punti comuni a V_1 e V_2 .

Si conclude che il fascio contiene un tratto di quadriche di specie 1; inoltre, facendo variare φ con continuità entro quel tratto, le rette di φ seguitano sempre ad incontrare sia V_1 che V_2 ; perciò anche i due coni che limitano il tratto stesso conteranno solo rette nelle condizioni della AB e nessun piano reale; ciascuno di essi separa dunque il tratto anzidetto da un tratto di quadriche di specie 0: il fascio dato contiene *due* (e, per il n.º 15, non più di due) tratti di quadriche di specie 0 (ma nessuna quadrica priva

di punti reali), è un fascio $(n, 0)$. Ne viene che le due falde di V sono entrambe di specie 0.

18. — Viceversa, consideriamo un fascio di quadriche contenente *due* tratti α, β di quadriche di specie 0. Siano ψ una quadrica del tratto α e θ una del tratto β ; tra i vertici A_0, A_1, \dots, A_n dei coni del fascio, che sappiamo essere tutti reali (n.º 15), ve n'è *uno*, ad es. A_0 , interno a ψ ⁽¹⁵⁾, ed *un altro* (certo distinto da A_0 , perchè ψ, θ appartengono a tratti diversi) interno a θ , ad es. A_1 . Lo spazio $\pi \equiv A_2 A_3 \dots A_n$ sarà perciò esterno sia a ψ che a θ ; e le quadriche del fascio dato segheranno su esso un fascio la cui quartica base è priva di punti reali (n.º 16), dimodochè tra i coni di vertici A_2, A_3, \dots, A_n ve ne saranno *due* rispetto ai quali π è esterno. D'altra parte sappiamo (n.º 13, 15) che tra α, β è compreso un tratto ε di quadriche di specie 1. Il tratto del fascio iniziale compreso tra ψ e θ e non contenente ε non può essere segato da π secondo quadriche tutte prive di punti reali, perchè in detto tratto vi sono anche ad es. dei coni di tipo massimo, rispetto ai quali π , che è un S_{n-2} , non può essere esterno ⁽¹⁹⁾; sarà perciò il tratto $\psi \theta$ contenente ε quello che è segato da π secondo quadriche tutte prive di punti reali, e *tutte non degeneri*. Questo fatto avverrà dunque anche per i due coni di specie 1 che limitano il tratto ε ; ne segue subito che detti coni hanno il vertice fuori di π , e perciò son proprio quelli di vertici A_0 ed A_1 . (Ed i due coni a falda immaginaria esistenti in π provengono come sezioni di π con quegli altri due coni, pure di specie 1, che limitano il tratto somma $\alpha + \varepsilon + \beta$).

Il fascio dato contiene dunque una quadrica ψ di specie 0 ed un cono di specie 1 col vertice A_0 interno a ψ , e di cui ogni generatrice reale contiene quindi due punti reali della quartica base ⁽¹⁵⁾; inoltre, se si tira per A_0 un S_{n-1} esterno al cono, esso divide ψ in due parti, in modo che di quei due punti uno sta sempre in una di tali parti e l'altro sta sempre nell'altra: la quartica base si compone di due falde staccate. È ovvio che esse sono entrambe di specie 0.

Se i punti reali della quartica base d'un fascio di quadriche si distribuiscono su due falde (pari), esse sono di specie 0, ed il fascio contiene due tratti di quadriche di specie 0 (separati da un tratto di quadriche di specie 1). E viceversa. I coni del fascio sono in questo caso tutti reali.

⁽¹⁹⁾ Eccettuato il caso di $n=3$; ma allora ψ e θ dividono il fascio in due tratti ciascuno dei quali contiene delle quadriche rigate; nel ragionamento che segue basta riferirsi allora a quello di essi le cui quadriche non tagliano π in punti reali.

Oss. — Affine al precedente è il caso d'un fascio $(n, 0)$ con un sol tratto di quadriche di specie 0 (e nessuna quadrica priva di punti reali); allora possono esistere nel fascio due coni immaginari (n.º 15); la quartica base è di specie 0 e si compone d'una sola falda (pari).

§ 6. — LA QUARTICA BASE D'UN FASCIO $(2k + 2, k)$, PER $k > 0$.

19. — Da ciò che s'è detto finora appare che, quando le quadriche reali di specie minima d'un fascio sono prive di punti reali (sono cioè di specie -1), oppure sono di specie 0, anche la quartica base del fascio è priva di punti reali o è rispett. di specie 0. Sussisterà lo stesso fatto in generale? Cioè, la quartica base d'un fascio (n, k) è di specie k ? È quanto andiamo ora ad esaminare, cominciando col caso d'un fascio $(2k + 2, k)$.

Premettiamo perciò la seguente osservazione. Data in un S_{2m+1} una quadrica reale φ di specie k ($0 \leq k < m$), ci chiediamo se due suoi S_m generatori complessi-coniugati appartengano alla stessa schiera od a schiere diverse. Preso su φ un S_k reale, consideriamone l' S_{2m-k} polare rispetto a φ ; esso contiene l' S_k , e quindi sega φ in un cono che proietta dall' S_k una quadrica reale priva di punti reali di un $S_{2m-2k-1}$. Su quest'ultima due S_{m-k-1} complessi-coniugati sono sghembi (perchè un loro punto comune darebbe un punto reale della quadrica); sulla quadrica data φ esistono dunque degli S_m complessi-coniugati aventi in comune solo un S_k (reale). Due tali S_m saranno della stessa schiera o di schiere diverse secondochè $m - k$ è pari o dispari; perciò le due schiere di S_m su φ saranno ciascuna coniugata di sè stessa oppure l'una coniugata dell'altra secondochè $m - k$ è pari o dispari; e quindi: *Due S_m complessi-coniugati sopra una quadrica di specie k d'un S_{2m+1} sono sempre della stessa schiera o sempre di schiere diverse secondochè $m - k$ è pari o dispari.*

20. — Ciò posto, ritorniamo al fascio $(2k + 2, k)$, ricordando che sulla quartica base V d'un tal fascio esistono 2^{2k+2} spazi S_k (tra reali e complessi); e che le 2^{2k+2} omografie involutorie (l'identità inclusa) che hanno come punti uniti i vertici dei $2k + 3$ coni del fascio, omografie costituenti un gruppo G , mutano uno qualunque di quegli S_k rispett. in tutti i 2^{2k+2} spazi S_k , dimodochè due *diversi* di essi si corrispondono in una sola omografia non iden-

tica di G (²⁰). Poichè nelle ipotesi attuali le quadriche del fascio sono tutte di specie k , e quindi i coni reali tutti di specie $k+1$, possiamo chiederci se tra gli S_k della quartica base ve ne sia qualcuno reale.

Siano $\alpha, \bar{\alpha}$ due S_k di V complessi-coniugati; l'omografia Ω di G che muta α in $\bar{\alpha}$ è reale, se no la sua coniugata $\bar{\Omega}$, che sarebbe distinta da Ω , dovrebbe mutare $\bar{\alpha}$ in α ; cioè α ed $\bar{\alpha}$ si corrisponderebbero in due diverse omografie di G . Gli assi r, s di Ω siano rispett. un S_l ed un S_{2k-l+1} , fra loro opposti, della piramide autopolare rispetto a tutte le quadriche del fascio ($0 \leq l \leq k$); r, s sono entrambi reali (non potendo essere: $l = 2k - l + 1$); ed inoltre $\alpha, \bar{\alpha}$ hanno in comune un S_{k-l-1} reale situato in s , e stanno in un S_{k+l+1} reale passante per r . Se l è dispari, non possono esistere su r vertici reali di coni del fascio; perchè, se fosse A un tal vertice, i due S_{k+1} complessi-coniugati proiettanti α ed $\bar{\alpha}$ da A avrebbero in comune un S_{k-l+1} reale; e perciò il cono di vertice A proietterebbe una quadrica reale di specie k d'un S_{2k+1} sulla quale si avrebbero due S_k complessi-coniugati, e perciò della stessa schiera (n.° 19), segantisi in un S_{k-l} (reale), il che è assurdo nell'ipotesi di l dispari. Se invece l è pari, non possono esistere su s vertici reali di coni del fascio; perchè se fosse A un tal vertice, essendo esso situato fuori dello spazio $\alpha \bar{\alpha}$ (²¹), quel cono proietterebbe da A una quadrica reale di specie k d'un S_{2k+1} sulla quale si avrebbero due S_k complessi-coniugati, e perciò della stessa schiera, segantisi in un S_{k-l-1} (reale), il che è assurdo nell'ipotesi di l pari.

Di qui segue intanto che l'esistenza di $\alpha, \bar{\alpha}$ esige la presenza nel fascio di qualche cono immaginario; se i coni del fascio sono tutti reali, tali sono pure tutti gli S_k di V .

In ogni altro caso, i vertici dei coni del fascio che stanno su quello dei due assi r, s di Ω che ha dimensione dispari sono tutti complessi, a due a due coniugati. Siano $A_0, \bar{A}_0; A_1, \bar{A}_1; \dots; A_\epsilon, \bar{A}_\epsilon$ questi vertici $\left(\epsilon = \frac{l-1}{2} \text{ se } l \right.$

(²⁰) ROSATI, *Sugli spazi lineari di dimensione massima contenuti in una quartica base di un fascio di quadriche in uno spazio a dimensione pari*; Rend. Ist. Lomb., (2) 32 (1899), pp. 1267-1273.

(²¹) Infatti, gli S_k di V incontrano ogni S_σ della piramide $A_0 A_1 \dots A_n$ in uno spazio la cui dimensione è proprio quella minima che comportano i valori di k e σ (²⁰); ora, se lo spazio $\alpha \bar{\alpha}$ contenesse uno dei vertici dei coni del fascio situati su S , ad es. A , lo $S_{l+1} \equiv r A$ incontrerebbe α in un punto, e quindi ne seguirebbe: $k + (l+1) = 2k + 2$, cioè: $l = k + 1$, il che è assurdo, perchè si è supposto $l \leq k$.

è dispari; $\varepsilon = k - \frac{l}{2}$ se l è pari); e consideriamo ad es. entro il gruppo G le due omografie $\Psi, \bar{\Psi}$, complesse-coniugate, aventi come assi l'una lo spazio: $t \equiv A_0 A_1 \dots A_k$ ed il suo opposto nella piramide autopolare, e l'altra lo spazio: $\bar{t} \equiv \bar{A}_0 \bar{A}_1 \dots \bar{A}_k$ ed il suo opposto.

Ciascuna di esse subordina sullo spazio (reale) $t \bar{t}$ l'omografia involutoria di assi t, \bar{t} ; perciò detto spazio sarà uno degli assi dell'omografia prodotto $\Psi \bar{\Psi}$, che coinciderà pertanto con Ω .

Ciò posto, supponiamo che Ψ muti α in α' ; allora $\bar{\Psi}$ muterà α in $\bar{\alpha}'$, e perciò il prodotto $\Omega \bar{\Psi}$ muterà α in $\bar{\alpha}'$. D'altra parte, $\Omega \bar{\Psi}$ vale $\Psi \bar{\Psi} \bar{\Psi}$, cioè Ψ , la quale muta α in α' . Ne segue che α' coincide col suo coniugato $\bar{\alpha}'$, ossia α' è reale. Esistono dunque certo su V degli S_k reali, sicchè V sarà di specie k come tutte le quadriche del fascio.

21. — Si può precisare il numero degli S_k reali di V osservando che, se α è uno di essi, l'omologo di α in un'omografia reale di G è pure reale, mentre l'omologo β di α in un'omografia complessa Φ di G non può essere reale, se no l'omografia $\bar{\Phi}$ complessa-coniugata di Φ , che è distinta da Φ , dovrebbe mutare il coniugato di α , cioè α stesso, nel coniugato di β , cioè ancora in β . Gli S_k reali di V son dunque tanti quante le omografie reali di G .

Per contarle, supponiamo che il fascio contenga $2h + 2$ coni immaginari ($-1 \leq h \leq k$), e diciamo $N_{k,h}$ il numero cercato. Se A, \bar{A} sono i vertici di due coni del fascio complessi-coniugati, un'omografia reale di G , non potendo avere assi complessi-coniugati (perchè lo spazio ambiente ha dimensione pari), dovrà avere uno dei suoi assi passante per la retta $A \bar{A}$, e dovrà subordinare un'omografia reale sull' S_{2k} polare di $A \bar{A}$ rispetto a tutte le quadriche del fascio. Viceversa, da ogni omografia reale del gruppo analogo a G e relativo all' S_{2k} se ne ottengono due in S_{2k+2} , secondochè la retta $A \bar{A}$ vien congiunta con l'uno o con l'altro degli assi di quell'omografia; perciò si avrà:

$$N_{k,h} = 2 N_{k-1,h-1}.$$

Di qui segue:

$$N_{k,h} = 2^{h+1} N_{k-h-1,-1}.$$

Ma il numero $N_{k-h-1,-1}$ è relativo ad un fascio di un $S_{2(k-h-1)+2}$ con coni tutti reali; ivi il gruppo analogo a G si compone di omografie tutte reali,

in numero di $2^{2(k-h-1)+2} \text{ (}^{22}\text{)}$; perciò:

$$N_{k,h} = 2^{h+1} \cdot 2^{2(l-h-1)+2} = 2^{2k-h+1} \quad (6)$$

Il numero degli S_k reali di V parte dunque dal valor massimo 2^{2k+2} quando i coni del fascio son tutti reali, va diviso per 2 ogni volta che compaiono nel fascio due coni complessi-coniugati, e giunge al valor minimo 2^{k+1} quando vi è nel fascio un sol cono reale.

La quartica base d'un fascio $(2k+2, k)$ con $2h+2$ coni immaginari contiene 2^{2k-h+1} spazî S_k reali $\text{(}^{23}\text{)}$.

(²²) Se $h=k$, questo numero risulta $=1$, d'accordo col fatto che: $N_{0,0}=2$.

(²³) Considerazioni analoghe alle precedenti consentono di precisare la natura degli S_k complessi-coniugati di V . Infatti, due S_k di V complessi-coniugati, $\beta, \bar{\beta}$, corrispondono ad uno qualunque, α , degli S_k reali di V in due omografie di G complesse-coniugate, Φ e $\bar{\Phi}$; perciò si corrispondono tra loro nell'omografia prodotto $\Phi\bar{\Phi}$. Fissato α , i suoi omologhi nelle singole coppie di omografie complesse-coniugate di G esauriscono dunque tutte le coppie di S_k complessi-coniugati di V . Detti sempre $\omega_0, \omega_j; \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2; \dots; \omega_h, \bar{\omega}_h$ i vertici dei coni immaginari del fascio, supponiamo che uno degli assi di Φ contenga i punti $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_j$, ma non i loro coniugati, e contenga invece tutte le rette $\omega_i \bar{\omega}_i$ per $i > j$; allora uno degli assi di $\bar{\Phi}$ conterrà i punti $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_j$; ed il prodotto $\Phi\bar{\Phi}$ avrà come assi lo spazio $S_{2j+1} \equiv \omega_0 \bar{\omega}_0 \omega_1 \bar{\omega}_1 \dots \omega_j \bar{\omega}_j$ ed il suo opposto S_{2k-2j} nella piramide autopolare; quindi due S_k di V omologhi in $\Phi\bar{\Phi}$ avranno in comune un S_{k-2j-2} oppure un S_{2j-k-1} secondochè dei due numeri $2j+1, 2k-2j$ è maggiore il secondo od il primo. E le omografie come $\Phi\bar{\Phi}$ sono in numero di: $2^j \binom{h+1}{j+1} N_{k-j-1, h-j-1}$. Perciò, se $2h+1 < 2k-2j$, si trovano su V :

$$\begin{aligned} & (h+1) N_{k-1, h-1} \text{ coppie di } S_k \text{ complessi-coniugati che si segano in un } S_{k-2}; \\ & 2 \binom{h+1}{2} N_{k-2, h-2} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S_{k-4}; \\ & \dots \\ & 2^h \binom{h+1}{h+1} N_{k-h-1, -1} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S_{k-2h-2} \end{aligned}$$

(e perciò sghembi tra loro quando $k=2h+1$). Si verifica tosto che:

$$2 \left[(h+1) N_{k-1, h-1} + 2 \binom{h+1}{2} N_{k-2, h-2} + \dots + 2^h \binom{h+1}{h+1} N_{k-h-1, -1} \right] = 2^{2k+2} - 2^{2k-h+1},$$

ciòè proprio al numero degli S_k immaginari di V .

§ 7. — LA QUARTICA BASE D'UN FASCIO $(2k + 1, k)$ PER $k > 0$.

22. — Dai teor. precedenti si deducono subito alcune proprietà dei fasci $(2k + 1, k)$. Un fascio $(2k + 2, k)$ contenente un sol cono reale, di vertice A , è segato dall'iperpiano polare di A rispetto a tutte le quadriche del fascio stesso in un fascio a cono tutti immaginari, e perciò proprio del tipo $(2k + 1, k)$ che vogliamo ora esaminare (n.º 14). Viceversa, un fascio di questo tipo si può sempre ottenere nel modo anzidetto da un fascio $(2k + 2, k)$ con un sol cono reale. Siano V la quartica base del fascio di S_{2k+1} e W quella del fascio di S_{2k+2} . È noto (2º) che gli S_k di W si distribuiscono a coppie

Se invece $2h + 1 > 2k - 2h$, e k è dispari, si trovano su V :

$$(h + 1) N_{k-1, h-1} \text{ coppie di } S_k \text{ complessi-coniugati che si tagliano in un } S_{k-2};$$

.....

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \binom{k-1}{h+1} \begin{pmatrix} h+1 \\ \frac{1}{2}(k+1) \end{pmatrix} N_{\frac{1}{2}(k-1), h-\frac{1}{2}(k+1)} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S_{-1} \text{ (cioè sghembi);}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \binom{k+1}{h+1} \begin{pmatrix} h+1 \\ \frac{1}{2}(k+3) \end{pmatrix} N_{\frac{1}{2}(k-3), h-\frac{1}{2}(k+3)} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S_0;$$

.....

$$2h \binom{h+1}{h+1} N_{k-h-1, -1} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S_{2h-k-1}.$$

Infine, se $2h + 1 > 2k - 2h$, e k è pari, si trovano su V :

$$(h + 1) N_{k-1, h-1} \text{ coppie di } S_k \text{ complessi-coniugati che si segano in un } S_{k-2};$$

.....

$$\begin{matrix} k \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \binom{k-1}{h+1} \begin{pmatrix} h+1 \\ k \end{pmatrix} N_{\frac{k}{2}, h-\frac{k}{2}} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S_0;$$

$$\begin{matrix} k \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \binom{k}{h+1} \begin{pmatrix} h+1 \\ \frac{k}{2} + 1 \end{pmatrix} N_{\frac{k}{2}-1, h-\frac{k}{2}-1} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S_{-1} \text{ (cioè sghembi);}$$

.....

$$2h \binom{h+1}{h+1} N_{k-h-1, -1} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad S_{2h-k-1}.$$

entro degli S_{k+1} generatori del cono di vertice A , in modo che i due S_k d'una stessa coppia son proiettati da A sull' S_{2k+1} che contiene V in S_k generatori della quadrica φ sezione del cono con quell' S_{2k+1} ; e tutti questi S_k proiezioni sono tangenti a V lungo degli S_{k-1} . Gli S_k reali di W , in numero di 2^{k+1} , danno luogo così a 2^k spazî S_k reali di φ tangenti a V lungo degli S_{k-1} . D'altra parte è pure noto ⁽²⁰⁾ che φ contiene in tutto 2^{2k+1} spazî S_k cosifatti, che corrispondono ad uno qualunque di essi nelle singole omografie del gruppo G analogo a quello del n.º precedente. D'altra parte ancora, si riconosce facilmente che, essendo tutti immaginarî i vertici dei coni del fascio di S_{2k+1} , il numero delle omografie reali di G sarà 2^{k+1} . Ne segue che su φ si hanno 2^{k+1} spazî reali S_k tangenti a V lungo degli S_{k-1} ; e quindi, oltre ai 2^k già trovati sopra, ve ne sono altri 2^k , pure reali, ciascuno dei quali però è proiezione (da A) di due S_k complessi-coniugati di W situati in uno stesso S_{k+1} proiettante. Perciò, la quadrica φ vien divisa da V in due regioni; ed i punti reali di W , per proiezione da A , vengono rappresentati doppiamente sui punti di una di queste due regioni (V è la varietà di diramazione); e dei 2^{k+1} spazî S_k reali di φ tangenti a V lungo degli S_{k-1} metà stanno nell'una e metà nell'altra delle due regioni.

Per precisare ulteriormente la cosa, diciamo $\omega_0, \bar{\omega}_0; \omega_1, \bar{\omega}_1; \dots; \omega_k, \bar{\omega}_k$ i vertici dei coni quadrici passanti per V ; allora nel gruppo G si hanno anzitutto le seguenti 2^k omografie reali: l'identità; $k+1$ omografie di cui uno degli assi coincide con una delle rette $\omega_i, \bar{\omega}_i$ ($i=0, 1, \dots, k$); $\binom{k+1}{2}$ omografie di cui un asse coincide con uno degli S_3 che uniscono a due a due le rette $\omega_i, \bar{\omega}_i$; ecc.; ed infine, se k è dispari, $\frac{1}{2} \binom{k+1}{2}$ omografie aventi come assi due S_k ciascuno dei quali contiene metà delle rette $\omega_i, \bar{\omega}_i$, e se k è pari, $\binom{k+1}{2}$ omografie di cui un asse è uno degli S_{k-1} che contengono $\frac{1}{2}k$ delle rette $\omega_i, \bar{\omega}_i$. Tutte queste sono omografie di 1.^a specie, perchè mutano un S_k generico di φ in un altro che o coincide con esso o ha in comune con esso rispett. un S_{k-2} , un S_{k-4} , ecc., e che quindi appartiene sempre alla stessa schiera del primo. In secondo luogo, si hanno in G altre 2^k omografie reali i cui assi sono delle coppie di S_k complessi-coniugati ottenute congiungendo $k+1$ dei punti $\omega_i, \bar{\omega}_i$ scelti uno per ciascuna coppia, e poi i

rimanenti $k + 1$; due S_k reali di φ omologhi in una di esse son sempre sghembi, perciò queste altre omografie sono di 1.^a specie o di 2.^a specie secondochè k è dispari o pari. Ne segue, che, per k dispari, i 2^{k+1} spazî S_k reali di φ tangenti a V lungo degli S_{k-1} stanno tutti nella stessa schiera; invece, per k pari, essi stanno metà in una schiera e metà nell'altra. Anzi, poichè, per k pari, due S_k di φ della stessa schiera hanno sempre in comune almeno un punto, quelli dei suddetti S_k che stanno in una stessa schiera sono anche situati in una stessa delle due regioni in cui φ è divisa da V .

È poi chiaro che, essendo le quadriche del fascio tutte della stessa specie, le proprietà qui enunciate per φ valgono per tutte le quadriche del fascio; del resto ciò risulterà anche dalle cose che seguono (²⁴).

23. — Cerchiamo ora su φ degli S_k reali esterni a V ; perciò supponiamo anzitutto $k = 1$.

Si abbia dunque in S_3 un fascio con quattro coni immaginari, di vertici $\omega_0, \bar{\omega}_0; \omega_1, \bar{\omega}_1$. Una quadrica generica φ del fascio sega le rette $\omega_0 \bar{\omega}_0, \omega_1 \bar{\omega}_1$ in due coppie di punti reali $M, N; P, Q$; e le rette MP, MQ, NP, NQ stanno su φ . Il piano MPQ sega la C^4 base del fascio in due punti reali (¹⁸) situati entrambi ad es. su MP ; il piano NPQ sega la C^4 in due punti reali che *devono* stare su NQ (perchè la stessa considerazione vale anche per il piano MNP). Ne segue che, su φ , le due generatrici MQ, NP , della stessa schiera, sono entrambe esterne alla C^4 ; d'altra parte le due intersezioni di C^4 con MP ad es. sono coniugate armoniche rispetto ad M, P , e quindi stanno una nell'una e una nell'altra delle due regioni in cui φ è divisa da MQ ed NP . Ciò basta per concludere: che la C^4 si compone di due rami, situati uno per ciascuna di quelle due regioni; che i due rami sono entrambi dispari (perchè il piano MPQ ad es. sega ciascuno di essi in un punto solo); che le generatrici del sistema di MP ed NQ contengono tutte un punto d'un ramo ed un punto dell'altro, sicchè nessuna di esse è tangente alla C^4 ; che la schiera di MQ ed NP contiene le quattro generatrici reali di φ tangenti alla C^4 , in modo poi che sia nell'una che nell'altra delle due regioni in cui φ è divisa dalla C^4 esistono generatrici reali di φ esterne alla C^4 (⁶).

24. — Passando al caso generale, ammettiamo che su ogni quadrica d'un fascio ($2k - 1, k - 1$) esistano due S_{k-1} esterni alla quartica base, uno in una e uno nell'altra delle due regioni esistenti sulla quadrica (e perciò sghembi tra loro), e deduciamone che lo stesso fatto avviene per un fascio ($2k + 1, k$).

Una quadrica reale φ del fascio sega $\omega_0 \bar{\omega}_0$ in due punti reali M, N , e

sega lo spazio $\sigma \equiv \omega_1 \bar{\omega}_1 \dots \omega_k \bar{\omega}_k$ in una quadrica (reale) φ' d'un fascio $(2k-1, k-1)$, sulla quale vi sono dunque, per ipotesi, due S_{k-1} reali, α' e β' , esterni alla quartica base V' , uno da una parte e uno dall'altra di essa. Poichè ogni piano passante per $\omega_0 \bar{\omega}_0$ contiene due punti reali di V , proiettando V da $\omega_0 \bar{\omega}_0$ su σ , i punti reali di V si rappresentano doppiamente su σ con V' come varietà di diramazione; e le sezioni di V con gli iperpiani σM , σN tangenti a φ rispettivamente in M ed N , le quali stanno quindi sui coni quadrici sezioni di φ coi detti iperpiani, si proiettano sulla quadrica φ' , e precisamente una sull'una e una sull'altra delle due regioni in cui φ' è divisa dalla quartica di diramazione V' ⁽²⁴⁾. Ne segue che uno determinato degli spazî α' , β' è proiettato da M secondo un S_k esterno a V , e l'altro è proiettato da N secondo un altro S_k pure esterno a V ; due tali S_k , che chiameremo α , β , sono fra loro sghembi; inoltre essi stanno su φ da parti opposte di V , perchè lo stesso accade delle loro sezioni α' e β' con σ rispetto alla quartica V' sezione di V .

Infine, se k è dispari, gli spazî α , β devono stare in quella schiera di φ che contiene già gli S_k reali di φ tangenti a V lungo degli S_{k-1} , se no essi dovrebbero incontrare tutti quegli S_k , e quindi avrebbero entrambi dei punti da una parte e dei punti dall'altra di V , il che è assurdo dal momento che α , β sono esterni a V . Se invece k è pari, α e β stanno in schiere diverse; e perciò uno qualunque di essi incontra tutti quegli S_k reali di φ tangenti a V lungo degli S_{k-1} che stanno con esso in una stessa schiera, ed è situato con questi da una parte determinata di V , la quale conterrà pure tutti gli S_k reali di quella stessa schiera che sono esterni a V .

Raccogliendo quanto abbiamo detto nei n.° 22, 23, 24, risulta dunque: *Ogni quadrica reale d'un fascio $(2k+1, k)$ contiene 2^{k+1} spazî S_k reali tangenti alla quartica base del fascio lungo degli S_{k-1} : essi stanno metà nell'una e metà nell'altra delle due regioni in cui la quartica base divide la quadrica considerata. Se k è dispari, essi stanno tutti in una medesima schiera, la quale (soltanto) contiene, sia dall'una che dall'altra banda della quartica base, degli S_k esterni alla quartica stessa. Se k è pari, stanno in una medesima*

⁽²⁴⁾ Quando φ descrive tutto il fascio $(2k+1, k)$, allora φ' descrive tutto il fascio $(2k-1, k-1)$ essendo sempre intersezione dell'unico cono reale (di vertice M) che si ha nel fascio $(2k, k-1)$ situato nell'iperpiano σM ; di qui segue che la quadrica φ di cui si parla al n.° 22 non occupa nel fascio là considerato una posizione privilegiata; sicchè le proprietà allora enunciate per quella φ sussistono per tutte le quadriche del fascio.

schiera quelli soli di essi che son situati da una stessa banda della quartica base; e detta schiera contiene, da quella medesima banda, degli S_k reali esterni alla quartica base ⁽²⁵⁾.

25. — Siamo ora in grado di esaminare la specie della quartica V , anche per $k > 1$. Già sappiamo (n.° 10, 18) che i punti reali di V formano allora una sola falda pari. Notiamo poi che, segnando il fascio con un iperpiano contenente i punti $\omega_1, \bar{\omega}_1; \dots; \omega_k, \bar{\omega}_k$, si ottiene un fascio ($2k, k-1$) la cui quartica base contiene degli S_{k-1} reali (n.° 21); perciò V è almeno di specie $k-1$.

È chiaro poi che su V non possono esistere degli S_k (né reali né complessi), se no qualsiasi cono del fascio, contenendo degli S_{k+1} , avrebbe almeno una retta doppia. Nè può esistere su V una W_k dispari immersa in un iperpiano, perchè in questo le quadriche del fascio sezione non possono raggiungere la specie k senza essere tutte coni (n.° 9), il che vorrebbe dire che esiste un iperpiano tangente a tutte le quadriche del fascio dato, cosa assurda per la genericità del fascio stesso.

Sia dunque W_k una falda dispari situata su V ed immersa nell' S_{2k+1} ambiente; e riprendiamo la quadrica ϕ del n.° preced. insieme con la proiezione di V da $\omega_0, \bar{\omega}_0$ su σ . In questa proiezione, W_k , che non ha punti su $\omega_0, \bar{\omega}_0$, vien proiettata semplicemente, se no le sue intersezioni con un S_{k+1} proiettante generico, che sono in numero (finito e) dispari, dovrebbero stare a coppie in piani proiettanti. La proiezione W'_k di W_k da $\omega_0, \bar{\omega}_0$ su σ è dunque d'ordine dispari. Consideriamo d'altra parte le sezioni w_1 e w_2 di W_k con gli iperpiani $\sigma M, \sigma N$; esse si proiettano sulla quadrica ϕ' in due varietà w'_1 e w'_2 che stanno una da una parte e una dall'altra della quartica V' ; anzi, aggiungendo ad esse quella eventuale parte a $k-1$ dimensioni che W_k potrebbe avere in comune con V' , si ottiene la *completa* intersezione di ϕ' con la proiezione W'_k di W_k . Ne segue che, preso un S_{k-1} generico di ϕ' , le sue intersezioni con W'_k , cioè con w'_1 e w'_2 e la parte anzidetta, devono essere in numero dispari; e se quell' S_{k-1} è esterno a V' , esso dovrà incontrare w'_1 e w'_2 in punti complessivamente in numero dispari, sicchè w'_1 ad es. avrà in comune con esso un numero dispari di punti. Ma, se k è pari, e quindi $k-1$ dispari, ciò è assurdo, perchè in quella regione di ϕ' che non contiene

⁽²⁵⁾ Solo per brevità, abbiamo tralasciato di studiare, per qualsiasi fascio (n, k) , il comportamento della quartica base rispetto agli spazi reali esistenti sulle singole quadriche del fascio stesso.

w'_1 , esistono degli S_{k-1} (esterni a V') non aventi alcun punto comune con w'_1 , e della stessa schiera del precedente. L'esistenza di W_k su V è dunque possibile solo per k dispari.

Supposto allora: $k = 2k_1 + 1$ ($k_1 \geq 1$), prendiamo su φ due S_k sghembi, α ed α' , uno da una parte e l'altro dall'altra di V ; supponiamo anzi che α ed α' siano ottenuti con la costruzione indicata al n.º 24, partendo ad es. dall' $S_3 \equiv \omega_0 \bar{\omega}_0 \omega_1 \bar{\omega}_1$; allora α , α' conterranno risp. due generatrici sghembe r , r' della quadrica φ_0 sezione di φ con quell' S_3 , le quali saranno riferite proiettivamente tra loro. La quadrica φ determina tra α , α' una reciprocità ω , ed è luogo delle rette che uniscono punti di α , α' reciproci in ω ⁽²⁶⁾; in questa reciprocità ai punti di r corrispondono gli iperpiani d'un fascio R' prospettivo ad r' . Prendiamo ora in α' un sistema nullo non degenerare che muti r' in R' (la cosa è possibile essendo k dispari); il prodotto della reciprocità ω per questo sistema nullo è un'omografia non degenerare tra α , α' , contenente r , r' come rette omologhe, e tale che due punti omologhi in essa, essendo sempre reciproci in ω , determinano una retta giacente su φ . Ne segue che la V_{k+1} luogo delle ∞^k rette che uniscono punti omologhi degli spazî omografici α , α' giace su φ e contiene φ_0 ; essa è divisa da α , α' in due regioni (perchè ogni sua retta generatrice è divisa dai suoi due punti d'incontro con α , α' in due segmenti che non si scambiano mai fra di loro comunque quella generatrice vari su V_{k+1}), le quali, per sezione con lo spazio $\omega_0 \bar{\omega}_0 \omega_1 \bar{\omega}_1$, danno le due regioni in cui φ_0 è divisa da r , r' ; d'altra parte V_{k+1} sega la quartica base del fascio, che è una V_{2k-1} , in una V_k , che non incontra α , α' , ma che ha dei punti reali sia nell'una che nell'altra delle due regioni considerate su φ_0 , e che perciò si compone di due falde staccate, situate una per ciascuna delle due regioni di V_{k+1} . Saranno anzi due falde dispari, perchè una generatrice g di φ_0 incidente ad r , r' contiene un punto solo di ciascuna di esse, sicchè lo stesso accade ad es. per l' $S_{k+1} \equiv \alpha g$, il quale sega V_{k+1} , oltre che in α , solo in g .

La quartica base d'un fascio ($2k+1$, k) contiene sempre degli S_{k-1} reali (ma non contiene nessun S_k); essa è di specie $k-1$ oppure di specie k , cioè non contiene oppure contiene delle falde dispari a k dimensioni, secondochè k è pari o dispari.

⁽²⁶⁾ Infatti, presi α , α' rispett. come spazî fondam.¹¹ $A_0 A_1 \dots A_k, A_{k+1} \dots A_{2k+1}$, l'equazione di φ diviene: $\sum p_{il} x_i x_l = 0$ ($i = 0, 1, \dots, k; l = k+1, k+2, \dots, 2k+1$); che è un'equazione bilineare nelle due serie di variabili: $x_0, x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{2k+1}$, che sono coordinate rispett. su α ed α' .

§ 8. — LA QUARTICA BASE D'UN FASCIO (n, k) , PER $n \geq 2k + 3$.

26. — Consideriamo infine un fascio (n, k) , nell'ipotesi di $n \geq 2k + 3$, e supponendo inoltre in primo luogo che i coni del fascio siano tutti reali.

Assumiamo l'equazione del fascio sotto la forma (4') del n.º 12, ponendo la condizione che le quadriche φ, ψ con cui il fascio viene definito siano entrambe di specie (minima) k :

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0; \\ \psi &\equiv \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2 - \mu_{k+1} x_{k+1}^2 - \dots - \mu_n x_n^2 = 0; \end{aligned}$$

sicchè l'equazione del fascio sarà:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \varphi - \psi &\equiv (\lambda - \lambda_0) x_0^2 + \dots + (\lambda - \lambda_k) x_k^2 - (\lambda - \mu_{k+1}) x_{k+1}^2 - \dots \\ &\dots - (\lambda - \mu_n) x_n^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Quando λ è minore di $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k; \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_n$, la (7) rappresenta una quadrica di specie (minima) k , perciò, ricordando quanto s'è detto al n.º 14, la minore delle λ_i e μ_j sarà μ_{k+1} e la maggiore sarà μ_n , dimodochè, disponendo questi coefficienti cumulativamente in ordine crescente, si otterrà una successione della forma:

$$\overbrace{\mu_{k+1} \dots \mu_{i_1}} \quad \overbrace{\lambda_0 \dots \lambda_{i_1}} \quad \overbrace{\mu_{i_1+1} \dots \mu_{i_2}} \quad \overbrace{\lambda_{i_1+1} \dots \lambda_{i_2}} \quad \dots \quad \overbrace{\mu_{i_s+1} \dots \mu_n}; \quad (8)$$

che si comporrà d'un certo numero *dispari* $2s + 1$ di gruppi costituiti alternativamente di coefficienti μ_j e λ_i .

Consideriamo ora nella piramide autopolare rispetto a tutte le quadriche del fascio lo spazio σ , di dimensione $2s$, che congiunge i vertici

$$A_{k+1} A_0 A_{i_1+1} A_{i_1+1} A_{i_2+1} \dots A_{i_s+1}$$

(i cui indici sono scelti uno per ciascun gruppo della successione (8), ad es. i primi di ciascun gruppo). Esso sega il fascio dato in un fascio $(2s, s - 1)$: infatti, se λ è minore di tutte le λ_i e μ_j , l'equazione della quadrica corrispondente di questo fascio contiene s termini negativi ed $s + 1$ positivi; e poichè i valori di λ che danno i coni del fascio sono (disposti in ordine crescente) alternativamente una μ_j ed una λ_i , cominciando da μ_{k+1} , vi sarà sempre in

quell'equazione (per λ diversa dalle λ_i e μ_j considerate) la differenza di 1 tra il numero dei termini con un segno e quello dei termini col segno opposto, cioè la quadrica sarà sempre di specie $s - 1$.

Esaminiamo ora il fascio che si ha nello spazio σ' , di dimensione $n - 2s - 1$, opposto a σ nella piramide autopolare. Perciò notiamo che, per λ minore di tutte le λ_i e μ_j , nell'equazione d'una quadrica di questo fascio si hanno: $(k + 1) - s$ termini negativi e: $(n - k) - (s + 1)$ termini positivi; ed essendo: $(k + 1) - s < (n - k) - (s + 1)$ (perchè era: $n > 2k + 2$), la quadrica considerata è di specie $k - s$. Inoltre, la successione analoga alla (8), ma relativa al nuovo fascio, contiene in ciascun gruppo un elemento di meno del corrispondente gruppo della (8); e quindi, come, quando λ cresceva percorrendo la (8), la specie della quadrica del fascio dato partiva da k e non scendeva mai per ipotesi al di sotto di k , quando λ cresce percorrendo la nuova successione la specie della quadrica del fascio in questione parte da $k - s$ e non scende mai sotto $k - s$: il nuovo fascio è del tipo $(n - 2s - 1, k - s)$. Cioè: *Nella piramide autopolare rispetto a tutte le quadriche d'un fascio (n, k) a coni reali ($n \geq 2k + 3$) si possono sempre trovare due spazi opposti σ, σ' sui quali il fascio dato sega due fasci f, g di tipi rispett. $(2s, s - 1)$ e $(n - 2s - 1, k - s)$.*

Ora, se: $k - s = -1$, cioè se i gruppi di posto pari nella (8) si compongono ciascuno di un elemento solo, la quartica base del fascio g è priva di punti reali, mentre su quella di f esistono degli S_k reali (n.º 21), che stanno quindi anche su V . Se poi: $n = 2k + 3$, risulta: $n - 2s - 1 = 2(k - s) + 2$; e perciò le quartiche sezioni di V con σ e σ' contengono rispett. degli S_{s-1} e degli S_{k-s} reali; congiungendo comunque uno dei primi con uno dei secondi si trova un S_k reale situato su tutte le quadriche del fascio, e quindi, di nuovo, su V .

Se il fascio g non è del tipo $(2i + 2, i)$, nè del tipo $(i, -1)$, operiamo su di esso come sul fascio iniziale; posto: $n_1 = n - 2s - 1, k_1 = k - s$, troveremo nella piramide autopolare rispetto a tutte le quadriche di g due spazi opposti σ_1, σ'_1 che segano g secondo due fasci f_1, g_1 di tipi rispett. $(2s_1, s_1 - 1)$ e $(n_1 - 2s_1 - 1, k_1 - s_1)$, ove $2s_1 + 1$ è il numero dei gruppi della successione analoga alla (8) ma relativa al fascio g . Ed allora, se: $k_1 - s_1 = -1$, la quartica base di g_1 è priva di punti reali e quella di f_1 contiene degli S_{k_1} (cioè degli S_{k-s}) reali; se invece: $n_1 = 2k_1 + 3$, risulta: $n_1 - 2s_1 - 1 = 2(k_1 - s_1) + 2$, sicchè le quartiche basi di f_1 e g_1 contengono rispett. degli S_{s_1-1} e degli $S_{k_1-s_1}$ reali, onde la quartica base di g contiene di

nuovo degli S_{k_1} reali (ottenuti congiungendo uno degli S_{s_1-1} con uno degli $S_{k_1-s_1}$).

Se poi g_1 non è del tipo $(2i+2, i)$, nè del tipo $(i, -1)$, si operi su esso come sul fascio iniziale e su g , ponendo: $n_2 = n_1 - 2s_1 - 1$, $k_2 = k_1 - s_1$, e chiamando $2s_2 + 1$ il numero dei gruppi della successione analoga alla (8) relativa al fascio g_1 . E così via.

Poichè la differenza $n - (2k + 3)$ diminuisce ogni volta di 1⁽²⁷⁾, e poichè d'altra parte i numeri s, s_1, s_2, \dots finiscono col diminuire (non appena esaurito il gruppo meno numeroso della (8)), si arriverà certo, dopo un numero finito di operazioni, ad un fascio g_i , di tipo $(n_i - 2s_i - 1, k_i - s_i)$, per il quale si avrà: $n_i = 2k_i + 3$, oppure: $k_i - s_i = -1$; ed allora la quartica base del fascio precedente g_{i-1} conterrà degli S_{k_i} reali, mentre le quartiche basi di $g_{i-2}, g_{i-3}, \dots, g_1, g$ conterranno rispett. degli $S_{k_{i-1}}, S_{k_{i-2}}, \dots, S_{k_2}, S_{k_1}$ reali, e quindi, infine, la quartica base del fascio iniziale conterrà degli S_k reali: essa è dunque di specie k .

27. — Supponiamo da ultimo che il fascio (n, k) contenga $2h + 2$ coni immaginari ($0 \leq h \leq k$) di vertici $\omega_0, \bar{\omega}_0; \dots; \omega_h, \bar{\omega}_h$; sicchè sullo spazio τ' polare di $\tau \equiv \omega_0, \bar{\omega}_0 \dots \omega_h, \bar{\omega}_h$ rispetto a tutte le quadriche del fascio dato questo sega un fascio $(n - 2h - 2, k - h - 1)$ a coni reali (n.° 15). Se $h = k$, un S_{2k+2} generico passante per τ sega il fascio dato in un fascio con un sol cono reale, e quindi del tipo $(2k + 2, k)$, la cui quartica base contiene già degli S_k reali (n.° 21). Se invece $h \leq k - 1$, la quartica base del fascio che si ha in τ' contiene, per quanto s'è detto, degli S_{k-h-1} reali; sicchè esiste certo in τ' un S_{n-2h-3} che sega il fascio stesso in un fascio $(n - 2h - 3, k - h - 1)$; congiungendo questo spazio con τ si ha un S_{n-1} segante il fascio dato (n.° 15) in un fascio $(n - 1, k)$. Ragionando su questo come su quello dato, si troverà infine di certo un S_{2k+2} segante il fascio dato in un fascio $(2k + 2, k)$, la cui quartica base conduce di nuovo a trovare degli S_k reali situati su V . Tenendo conto anche dell'arbitrarietà che rimane nella scelta d'un tale S_{2k+2} , concludiamo che:

La quartica base d'un fascio (n, k) , per $n \geq 2k + 3$, è di specie k , e contiene infiniti S_k reali.

(27) Si ha infatti:

$$\begin{aligned} n_1 - (2k_1 + 3) - n - 2s_1 - 1 - 2(k - s) - 3 - [n - (2k + 3)] - 1; \\ n_2 - (2k_2 + 3) - n_1 - 2s_1 - 1 - 2(k_1 - s_1) - 3 = [n_1 - (2k_1 + 3)] - 1; \text{ ecc.} \end{aligned}$$

§ 9. — EQUIVALENZA DI DUE FASCI DI QUADRICHE
NEL CAMPO DELLE OMOGRAFIE REALI.

28. — Quando è che due fasci reali di quadriche F, F' , a coni distinti, si possono trasformare l'uno nell'altro mediante un'omografia reale? Se esiste un'omografia Ω che muti F in F' , i due fasci, pensati come enti razionali ∞^1 , risultano riferiti tra loro in una proiezione ω che muta i coni di F in quelli di F' ; e viceversa, se i coni di F e quelli di F' , supposti tutti distinti, formano entro i fasci stessi due gruppi fra loro proiettivi, i due fasci sono proiettivamente identici; sicchè, detto λ il parametro che determina le quadriche di F come combinazioni lineari di due di esse, i mutui rapporti dei valori di λ che danno i coni del fascio sono invarianti proiettivi del fascio, nel campo complesso ⁽¹⁾.

Se l'omografia Ω è reale, tale è pure la proiezione ω che essa subordina tra F ed F' (il che implica che il numero dei coni immaginari sia lo stesso per entrambi i fasci); per di più, i due fasci saranno di uno stesso tipo (n, k) , anzi ω farà corrispondere ad ogni tratto (reale) di F , costituito di quadriche d'una certa specie i , un tratto di F' composto pure di quadriche di specie i ⁽²⁸⁾.

Viceversa, i fasci reali F, F' siano tali che: *a*) esista tra essi, come forme ∞^1 , una proiezione *reale* ω che muti gli $n+1$ coni di F nei coni di F' , sicchè essi contengano lo stesso numero $2h+2$ di coni immaginari; *b*) esistano in essi due tratti t, t' , omologhi in ω , composti entrambi di quadriche di specie k . In queste ipotesi, esiste un'omografia reale che muta F in F' .

Infatti, assumiamo l'equazione di F sotto la forma (4') del n. 12, supponendo che le quadriche φ, ψ siano scelte nel tratto t . Dette poi φ', ψ' le quadriche di F' omologhe rispett. di φ, ψ nella proiezione ω , se numeriamo con indici uguali i vertici di due coni reali omologhi in ω e le coppie di vertici di coni complessi-coniugati pure omologhe in ω , le equazioni di φ', ψ' si po-

⁽²⁸⁾ D'ora in poi, parlando di *tratti* d'un fascio ci riferiremo sempre ai tratti del fascio compresi tra cono e cono, consecutivamente.

tranno ridurre alla forma:

$$\begin{aligned}\varphi' &\equiv \mathcal{Q}(x'_0 x'_{h+1} + \dots + x'_h x'_{2h+1}) + \\ &\quad + x'^2_{2h+2} + \dots + x'^2_{h+k+1} - x'^2_{h+k+2} - \dots - x'^2_n = 0; \\ \psi' &\equiv \sum_{i=0}^h (a'_{ii} x'^2_i + \mathcal{Q} a'_{i,i+h+1} x'_i x'_{i+h+1} - a'_{ii} x'^2_{i+h+1}) + \\ &\quad + \lambda'_{2h+2} x'^2_{2h+2} + \dots + \lambda'_{h+k+1} x'^2_{h+k+1} - \mu'_{h+k+2} x'^2_{h+k+2} - \dots \\ &\quad \dots - \mu'_n x'^2_n = 0;\end{aligned}$$

e l'equazione d'una quadrica generica di F' , sarà:

$$\lambda' \varphi' - \psi' = 0.$$

Allora la proiettività *reale* ω , che muta i valori $0, \infty$ di λ rispett. nei valori $0, \infty$ di λ' , avrà un'equazione della forma: $\lambda' = \alpha \lambda$, con α *reale*. Ne segue che i valori di λ' che danno i coni di F' , e cioè:

$$a'_{0,h+1} \pm i a'_{00}; \dots; a'_{h,2h+1} \pm i a'_{hh}; \quad \lambda'_{2h+2}, \dots, \lambda'_{h+k+1}; \quad \mu'_{h+k+2}, \dots, \mu'_n,$$

saranno ordinatamente uguali ai valori (5) del n.º 13 moltiplicati per α ⁽²⁹⁾; dev'essere cioè:

$$a'_{ii} = \alpha a_{ii}, \quad a'_{i,i+h+1} = \alpha a_{i,i+h+1} \quad (i = 0, 1, \dots, h);$$

$$\lambda'_i = \alpha \lambda_i \quad (i = 2h + 2, \dots, h + k + 1); \quad \mu'_j = \alpha \mu_j \quad (j = h + k + 2, \dots, n).$$

Ed allora è chiaro che la proiettività *reale*:

$$\rho x'_i = x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{9}$$

muta, non solo φ in φ' , ma anche ψ in ψ' , e quindi F in F' .

Affinchè due fasci reali di quadriche, a coni distinti, si possano trasformare l'uno nell'altro mediante un'omografia reale, è necessario e sufficiente che esista tra essi, come forme ∞^1 , una proiettività reale che muti i coni del primo in quelli del secondo, ed in modo che DUE tratti omologhi dei due fasci siano composti di quadriche della stessa specie.

⁽²⁹⁾ Si può supporre che ω muti $a_{i,i+h+1} + i a_{ii}$ proprio in $a'_{i,i+h+1} + i a'_{ii}$ (per $i = 0, \dots, h$), perchè se lo mutasse invece in $a'_{i,i+h+1} - i a'_{ii}$ basterebbe, per ridursi al primo caso, sostituire $-a'_{ii}$ ad a'_{ii} e contemporaneamente scambiare tra loro gli indici dei punti fondam.¹¹ A'_i, A'_{i+h+1} .

§ 10. — EQUIVALENZA DI DUE FASCI DI QUADRICHE
DAL PUNTO DI VISTA TOPOLOGICO.

29. — Volendo studiare l'equivalenza topologica di due fasci reali di quadriche, non interessano più i mutui rapporti delle quantità (5), bensì il numero di quelle di esse che son reali e l'ordine in cui queste si seguono.

Supponiamo infatti che, nel ragionamento del n.º 28, i coefficienti λ' , e μ'_j di ψ' , senza essere proporzionali alle λ , e μ_j , si seguano nello stesso ordine di quelle. La trasformazione (9), che muta φ in φ' , muterà ψ in una certa quadrica ψ_0 , diversa da ψ , che determina con φ' un fascio F_0 . Consideriamo poi la quadrica:

$$\psi_1 \equiv \psi_0 + \sigma (\psi' - \psi_0),$$

ed il fascio F_1 che essa determina con φ' . Per $\sigma = 0$ e per $\sigma = 1$, F_1 coincide rispettt. con F_0 e con F' ; e se si fa crescere σ con continuità da 0 ad 1 esso varia pure con continuità. D'altra parte, detti $\alpha_{ii}^{(0)}$, $\alpha_{i,i+h+1}^{(0)}$, $\lambda_i^{(0)}$, $\mu_j^{(0)}$ i coefficienti dell'equazione di ψ_1 analoghi ad α_{ii} , $\alpha_{i,i+h+1}$, λ_i , μ_j , si ha:

$$\lambda_i^{(0)} = \lambda_i + \sigma (\lambda'_i - \lambda_i);$$

e quindi:

$$\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)} = (1 - \sigma) (\lambda_i - \lambda_j) + \sigma (\lambda'_i - \lambda'_j);$$

da cui risulta che, poichè σ ed $1 - \sigma$ si mantengono positivi, e le differenze $\lambda_i - \lambda_j$, $\lambda'_i - \lambda'_j$ hanno per ipotesi lo stesso segno (perchè le λ_i , μ_j si seguono nello stesso ordine delle λ'_i , μ'_j), anche $\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}$ avrà sempre il segno di $\lambda_i - \lambda_j$; sicchè durante tutta la variazione di σ da 0 a 1, i coefficienti $\lambda_i^{(0)}$, $\lambda_j^{(0)}$ si seguono sempre nello stesso ordine, e due qualunque di essi non potranno mai divenire uguali tra loro. Quanto ai termini complessi della successione (5) relativa al fascio F_1 , variando σ da 0 ad 1, essi variano con continuità, senza mai divenire reali ⁽³⁰⁾, e vanno a coincidere con altrettanti termini complessi relativi al fascio F' .

⁽³⁰⁾ Infatti, si possono distribuire gli indici dei due punti A'_i , A'_{i+h+1} in modo che α_{ii} ed α'_{ii} abbiano lo stesso segno; allora ψ_1 sega la retta $A'_i A'_{i+h+1}$ in due punti che non possono mai coincidere con A'_i ed A'_{i+h+1} (perchè $\alpha_{ii}^{(0)}$, cioè: $(1 - \sigma)\alpha_{ii} + \sigma\alpha'_{ii}$, per σ compreso tra 0 ed 1, conserva allora un segno costante), e che perciò separano sempre A'_i ed A'_{i+h+1} .

Da tutto ciò si deduce che, al variare di σ da 0 ad 1, il fascio F_1 ha sempre $2h + 2$ coni immaginari e $n - 2h - 1$ coni reali e distinti; perciò la sua quartica base varia su φ' senza mai acquistare dei punti doppi: la quartica base di F_0 e quella di F' sono perciò topologicamente identiche ⁽³¹⁾.

30. — Importa dunque di trovare, in forma possibilmente semplice, un'immagine geometrica della successione delle λ_i, μ_j , prescindendo dai loro valori numerici particolari, e badando solo invece al modo in cui si succedono in ordine ad es. crescente.

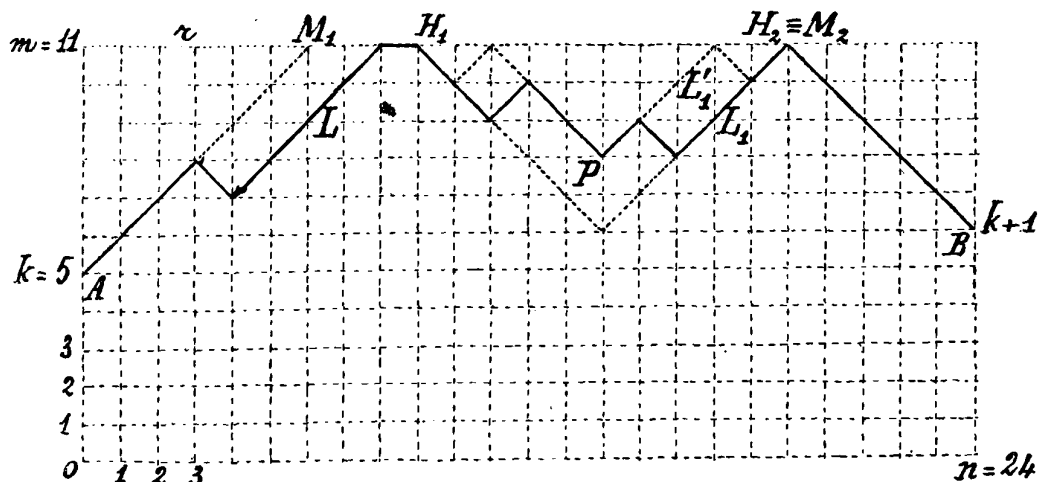
In primo luogo, il fascio contenga $n + 1$ coni reali. Definito il fascio, come al n.° 26, con due quadriche φ, ψ di specie minima k contenute in uno stesso tratto, gli $n + 1$ coni dividono il fascio in $n + 1$ tratti consecutivi, che numereremo da 0 ad n , procedendo in un senso arbitrario, e partendo dal tratto che contiene φ, ψ (e che si ha per λ minore, o maggiore, di tutte le λ_i, μ_j). Segnati quindi in un piano due assi cartesiani ortogonali, per ogni ascissa intera x compresa tra 0 ed n consideriamo un'ordinata (pure intera) y uguale alla dimensione massima d'uno spazio reale esistente sulle quadriche del tratto di posto x ; y può variare da k fino ad un massimo che chiameremo m , sicchè la dimensione dello spazio ambiente sarà $2m + 2$ o $2m + 1$ secondochè essa è pari o dispari. Poichè passando da un tratto x al consecutivo $x + 1$ la y varia di ± 1 (o può restar costante se $y = m$ ed

⁽³¹⁾ È ovvio però che, mentre per forme della quartica base di F topologicamente diverse, i coefficienti λ_i e μ_j di ψ , disposti in ordine crescente, danno successioni diversamente costituite, possono aversi, viceversa, per tale successione forme diverse che corrispondono ad uno stesso tipo di quartica.

Così, se due fasci conducono a due forme della successione dedotte l'una dall'altra con una sostituzione circolare eseguita sui numeri $2h + 2, \dots, n$ (il che può avvenire quando quei fasci contengano più tratti di quadriche di specie k , entro uno qualunque dei quali possono essere scelte le quadriche che li definiscono), esse possono ridursi identiche cambiando opportunamente, per uno dei fasci, le quadriche φ, ψ e la numerazione dei punti A_{2h+2}, \dots, A_n .

Ancora, può darsi che, dette rispett. $\varphi, \psi; \varphi', \psi'$ le quadriche che definiscono due fasci F, F' , la disposizione e la specie dei vari tratti siano identiche per i due fasci purchè si inverta il senso in cui il secondo fascio viene percorso. In tal caso, sostituiamo alla quadrica ψ' del fascio F' : $\lambda' \varphi' - \psi' = 0$, la quale si aveva per $\lambda' = 0$, la quadrica ψ'' che si ha per un valore α di λ' maggiore di tutte le λ_i, μ_j . I coefficienti λ'', μ''_j dell'equazione di ψ'' sono: $\lambda''_i = \alpha - \lambda'_i; \mu''_j = \alpha - \mu'_j$; essi sono tutti positivi; e se si inverta la numerazione dei punti $A'_{2h+2}, \dots, A'_{h+k+1}$, e così quella dei punti A'_{h+k+2}, \dots, A'_n , essi si seguono proprio nello stesso ordine delle λ_i, μ_j . Anche in questo caso le due quartiche sono topologicamente identiche.

$n = 2m + 2$ (n.º 13), congiungendo a due a due consecutivamente i punti ottenuti si ha una spezzata poligonale L , i cui vertici hanno coordinate intere, ed i cui lati sono paralleli alternativamente alle rette $y = x$, $y = -x$, con l'avvertenza che, per n pari, si possono avere dei lati sulla retta $y = m$,



che chiameremo r . Diremo che L è la *spezzata immagine*, o *schema*, del fascio di quadriche.

Essa parte dal punto $A(0, k)$, termina al punto $B(n, k + 1)$, è tutta compresa nel rettangolo di lati: $x = 0$, $x = n$, $y = k$, $y = m$, ed ha almeno un vertice su r . Essa presenta dei massimi e dei minimi; anzi, nota la posizione di due minimi consecutivi son noti i due lati della spezzata compresi fra essi. Per conoscere L basta dunque assegnarne, oltre gli estremi A e B , i vertici di ordinata minima.

Sia (x, y) uno di questi; allora ogni quadrica θ del tratto di posto x è di specie y , sicchè esistono nella piramide autopolare rispetto a tutte le quadriche del fascio un S_y ed un S_{n-y-1} , fra loro opposti, ed entrambi esterni (a θ e quindi) a tutte le quadriche del tratto considerato (n.º 9). Un tale S_y si dirà lo *spazio caratteristico* di quel tratto (o del corrispondente minimo di L), e si indicherà con $S_y^{(x)}$; l'insieme di tutti gli $S_y^{(x)}$ così definiti (incluso l' $S_k^{(0)}$ caratteristico del tratto 0) si chiamerà la *configurazione caratteristica* del fascio, e si indicherà con C .

31. — Determiniamo anzitutto il numero massimo degli spazi di C . Alla spezzata L si può sempre sostituirla un'altra con lo stesso numero di vertici, ed avente tutti i suoi massimi su r . Perciò consideriamo una parte L_1

di L limitata da due vertici H_1, H_2 situati su r , e che non abbia altri vertici su r oltre H_1, H_2 ⁽³²⁾; detto P il minimo assoluto di L_1 (o uno qualunque di essi se sono in più d'uno), spostiamo ogni massimo di L_1 (esclusi H_1, H_2) su uno dei lati che lo comprendono fino a portarlo su r , e precisamente spostiamolo su quello di destra o su quello di sinistra dei due lati secondochè il massimo considerato sta a sinistra o a destra di P ; la spezzata L'_1 definita da H_1, H_2 e dalle nuove posizioni dei massimi ha tanti vertici come L_1 , ed ha tutti i suoi massimi su r . Facendo lo stesso per tutte le parti di L analoghe ad L_1 , si ottiene lo scopo voluto; sia L' la nuova spezzata. È chiaro che, se si prende A come punto P per quella parte di L che contiene A stesso, i massimi di L' son tutti compresi tra i punti M_1 ed M_2 ove r è incontrata dai lati di L uscenti da A, B rispett.; e poichè la differenza tra le ascisse di due minimi consecutivi di L' è $\cong 2$, se si dicono m_1 ed m_2 le ascisse di M_1 ed M_2 rispett., il massimo numero di minimi di L' , tenendo conto anche di A , è dato da: $1 + E \frac{m_2 - m_1}{2}$.

D'altra parte, le equazioni di AM_1, BM_2 sono rispett.:

$$y - k = x; \quad y - (k + 1) = -x + n;$$

perciò:

$$m_1 = m - k; \quad m_2 = n + 1 - (m - k).$$

Ne segue:

$$m_2 - m_1 = n + 1 - 2(m - k) = \begin{cases} 2k + 2 & \text{per } n \text{ dispari;} \\ 2k + 3 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Risulta dunque:

$$1 + E \frac{m_2 - m_1}{2} = k + 2.$$

È poi evidente che, per n pari, L può ridursi ad AM_1M_2B , avendo allora come unico minimo il punto A . Invece, per n dispari, non esistendo su r lati di L , il numero minimo dei minimi di L corrisponde al caso in cui i vertici di L stanno alternativamente su $y = k$ e su r (salvo al più l'ul-

⁽³²⁾ Qui, e nel seguito, le parti estreme di L uscenti rispett. da A e B , e terminate alla loro prima intersezione con r , si considereranno come costituenti un'unica porzione di L .

timo massimo che avrà, in generale, ordinata $< m$); ma in tal caso le ascisse di due minimi consecutivi (esclusi al più i due ultimi) differiscono di $2(m - k)$; perciò L ha ora almeno: $1 + E \frac{2m + 1}{2(m - k)} = 1 + E \frac{n}{n - 2k - 1}$ minimi.

La configurazione caratteristica d'un fascio (n, k) a coni reali contiene al più $k + 2$ spazî; ne contiene almeno $1 + E \frac{n}{n - 2k - 1}$ se n è dispari, almeno uno (che è allora un S_k) se n è pari.

(Questa proprietà completa l'ultimo teor. del n.º 15 per il caso di $h = -1$).

Rileviamo anche che le ascisse di due massimi consecutivi della linea L'_1 del ragionamento precedente differiscono sempre d'un numero pari, perciò lo stesso accade per le ascisse h_1, h_2 degli estremi H_1, H_2 di L'_1 (cioè di L_1); ed i minimi di L_1 sono al più: $\frac{1}{2}(h_2 - h_1)$.

32. Tutto ciò guida alla costruzione di L per dati valori di n e di k . Si segnino in primo luogo sul segmento $M_1 M_2$ i vertici di L che si vuole stiano su r . Per n dispari, essi vanno scelti, ad arbitrio, tra i punti di r di ascisse: $m - k, m - k + 2, m - k + 4, \dots, m + k + 2$; al massimo essi sono $k + 2$; e se si fissa che siano proprio $k + 2$ allora L riesce senz'altro individuata, se no resteranno ancora da costruire delle parti di L comprese tra due consecutivi di quei vertici. Se n è pari, il numero e la lunghezza dei lati che L può avere su r , come pure il numero degli eventuali vertici isolati che L ha su r , sono soggetti alla sola condizione che tra due consecutivi di essi (lati, o vertici isolati, a cui si aggiungano i punti M_1, M_2 , se non sono estremi di lati nè vertici isolati) sia compreso un numero pari d'intervalli unitari. E poichè ora $M_1 M_2$ vale $2k + 3$, tra i lati di L situati su r ve n'è un numero dispari che hanno lunghezza dispari; ed anche ora, se tutti gli intervalli rimasti scoperti su r valgono 2, la spezzata L è senz'altro nota, se no ne restano da costruire delle parti con gli estremi su r .

Per la costruzione di queste parti intermedie si hanno pure delle restrizioni. Osserviamo perciò che i lati di L_1 uscenti da H_1 ed H_2 , avendo rispett. per equazioni: $y - m = -(x - h_1)$; $y - m = x - h_2$, s'incontrano nel punto di coordinate: $\frac{1}{2}(h_1 + h_2), m - \frac{1}{2}(h_2 - h_1)$, (che sono numeri interi perchè $h_2 - h_1$ è pari). Detti quindi $(\alpha_1 \beta_1), (\alpha_2 \beta_2), \dots, (\alpha_\sigma \beta_\sigma)$ i minimi di L_1 $\left(1 \leq \sigma \leq \frac{h_2 - h_1}{2}\right)$, per le coordinate del primo e dell'ultimo di essi si

hanno anzitutto le condizioni:

$$\beta_1 = m - (\alpha_1 - h_1); \quad \beta_\sigma = m - (h_2 - \alpha_\sigma); \quad (10)$$

e dovrà essere inoltre:

$$h_1 + 2 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2}(h_1 + h_2); \quad \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \leq \alpha_\sigma \leq h_2 - 2, \quad (11)$$

qualora sia: $k \leq m - \frac{1}{2}(h_2 - h_1)$, con l'avvertenza che α_1 ed α_σ sono allora uguali *insieme* ad $\frac{1}{2}(h_1 + h_2)$; e sarà invece:

$$h_1 + 2 \leq \alpha_1 \leq h_1 + (m - k); \quad h_2 - (m - k) \leq \alpha_\sigma \leq h_2 - 2, \quad (12)$$

qualora sia invece: $k > m - \frac{1}{2}(h_2 - h_1)$. Per un altro minimo (α_s, β_s) deve essere:

$$\left. \begin{aligned} m - 2 \geq \beta_s \geq \text{del minore dei due numeri: } k; \quad m + 2 - \frac{1}{2}(h_2 - h_1) \\ h_1 + (m - \beta_s) + 2 \leq \alpha_s \leq h_2 - (m - \beta_s) - 2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Infine, il massimo compreso tra due minimi consecutivi (α_s, β_s) , $(\alpha_{s+1}, \beta_{s+1})$, essendo comune alle rette: $y - \beta_s = x - \alpha_s$; $y - \beta_{s+1} = -(x - \alpha_{s+1})$, ha le coordinate:

$$x_0 = \frac{1}{2}(\alpha_s + \alpha_{s+1} - \beta_s + \beta_{s+1}); \quad y_0 = \frac{1}{2}(-\alpha_s + \alpha_{s+1} + \beta_s + \beta_{s+1}).$$

Questo esige che $(\alpha_{s+1} - \alpha_s) + (\beta_{s+1} - \beta_s)$ sia pari; ed anche (dovendo essere: $\alpha_s + 1 \leq x_0 \leq \alpha_{s+1} - 1$) che sia:

$$2\alpha_s + 2 \leq \alpha_s + \alpha_{s+1} - \beta_s + \beta_{s+1} \leq 2\alpha_{s+1} - 2;$$

cioè:

$$2 - (\alpha_{s+1} - \alpha_s) \leq \beta_{s+1} - \beta_s \leq (\alpha_{s+1} - \alpha_s) - 2. \quad (14)$$

Ne segue: $(\alpha_{s+1} - \alpha_s) - 2 \geq 2 - (\alpha_{s+1} - \alpha_s)$; e quindi:

$$\alpha_{s+1} - \alpha_s \geq 2; \quad (15)$$

sicchè la (14) si può anche scrivere:

$$|\beta_{s+1} - \beta_s| \leq (\alpha_{s+1} - \alpha_s) - 2. \quad (16)$$

Mediante queste condizioni si riesce, dopo aver fissato il primo minimo di L_1 , a scegliere successivamente tutti gli altri.

Le parti della spezzata L che contengono rispett. A e B si costruiranno tenendo conto delle (15), (16) e di altre condizioni analoghe alle (10), (11), (12), (13), sulle quali non ci tratteniamo.

33. — Per vedere se la spezzata L definisce l'ordine delle λ_i , μ_j nella successione (8) del n.º 26, distinguiamo i due casi di n pari e di n dispari.

$n = 2m + 2$. — Se una quadrica θ scelta nel tratto 0 descrive il fascio passando successivamente nei tratti 1, 2, ..., $2m + 2$, e tornando alla posizione iniziale, il valore corrispondente di λ nella (7) parte da un valore minore di tutte le λ_i , μ_j , e ritorna al valore iniziale dopo aver preso tutti i valori reali positivi e negativi. Inizialmente, nella (7) vi sono $k + 1$ termini negativi e $(2m + 2) - k$ positivi; in corrispondenza al lato di L uscente da A (primo lato) la specie di θ cresce d'un certo numero di unità, che è noto se si conosce quel lato, e perciò la (8) comincia con altrettante quantità μ_j . Se, dopo ciò, L non ha ancora raggiunto r , la specie di θ diminuisce d'un certo numero noto di unità, e quindi nella (8) seguono altrettanti coefficienti λ_i . E così via. Quando L raggiunge r per la prima volta, nell'equazione di θ si hanno $m + 1$ termini negativi ed $m + 2$ positivi; perciò, se il nuovo lato di L non sta su r , la specie di θ decresce subito, e nella (8) seguono a questo punto dei coefficienti λ_i , il cui numero è determinato dalla lunghezza di quel lato, e così via, fino al nuovo vertice di L che sta su r ; se invece il nuovo lato di L sta su r , la specie di θ resta fissa in corrispondenza a tutto questo lato, sicchè il numero dei termini negativi della (7), al crescere di λ , vale alternativamente $m + 1$ ed $m + 2$, il che vuol dire che nella (8) s'incontrano alternativamente una μ_j ed una λ_i ; giunti alla fine del lato considerato, se i termini negativi della (7) sono ancora $m + 1$, cioè se la lunghezza del lato stesso è pari, si torna nelle condizioni del primo caso; se invece la lunghezza di quel lato è dispari, i termini negativi della (7) saranno $m + 2$, e per far decrescere la specie di θ si dovranno far seguire nella (8) delle μ_j .

Tutto ciò prova che, per n pari, la conoscenza dello schema L equivale a quella della successione (8); cioè: *Per n pari, la quartica base d'un fascio*

a coni reali è topologicamente definita dallo schema del fascio (oppure dalla sua configurazione caratteristica).

34. — È facile approfondire la posizione mutua degli spazi della configurazione C . Il primo di essi è l' S_k : $A_0 A_1 \dots A_k$. Consideriamo poi gli $S_{\beta_s}^{(\alpha_s)}$, $S_{\beta_{s+1}}^{(\alpha_{s+1})}$ caratteristici dei minimi consecutivi $(\alpha_s \beta_s)$, $(\alpha_{s+1} \beta_{s+1})$ di L , e supponiamo che essi siano gli spazi: $A_{\gamma_s} A_{\gamma_s+1} \dots A_{\gamma_s+\beta_s}$, $A_{\gamma_{s+1}} A_{\gamma_{s+1}+1} \dots A_{\gamma_{s+1}+\beta_{s+1}}$ (per dare un significato agli indici $> n$, supporremo che A_x ed A_y coincidano se $x \equiv y \pmod{n+1}$). Se tra quei due minimi non c'è alcun lato di L situato su r , allora, passando da $(\alpha_s \beta_s)$ ad $(\alpha_{s+1} \beta_{s+1})$ si attraversano nella (8) prima un gruppo di μ_j e poi uno di λ_i , oppure viceversa, secondochè nell'equazione d'una quadrica del tratto α_s sono in minoranza i segni negativi o quelli positivi; in ambo i casi il secondo dei due gruppi contiene:

$$\alpha_{s+1} - \frac{1}{2}(\alpha_s + \alpha_{s+1} - \beta_s + \beta_{s+1}) = \frac{1}{2}[(\alpha_{s+1} - \alpha_s) - (\beta_{s+1} - \beta_s)]$$

elementi, a ciascun dei quali corrisponde un punto fondam.¹⁶ che sta su $S_{\beta_s}^{(\alpha_s)}$ (o segue immediatamente quelli che stanno su $S_{\beta_s}^{(\alpha_s)}$) e che non sta su $S_{\beta_{s+1}}^{(\alpha_{s+1})}$; perciò si avrà:

$$\gamma_{s+1} - \gamma_s = \frac{1}{2}[(\alpha_{s+1} - \alpha_s) - (\beta_{s+1} - \beta_s)]; \quad (17)$$

il che definisce $S_{\beta_{s+1}}^{(\alpha_{s+1})}$ quando si conosca $S_{\beta_s}^{(\alpha_s)}$.

Può darsi invece che tra $(\alpha_s \beta_s)$ e $(\alpha_{s+1} \beta_{s+1})$ sia compreso un lato l di L situato su r ; gli estremi di questo lato hanno per ascisse: $\alpha_s + (m - \beta_s)$, $\alpha_{s+1} - (m - \beta_{s+1})$; perciò la sua lunghezza sarà: $(\alpha_{s+1} - \alpha_s) + (\beta_{s+1} + \beta_s) - 2m$. Se l ha lunghezza pari, cioè se $(\alpha_{s+1} - \alpha_s) - (\beta_{s+1} - \beta_s)$ è pari, vale ancora il risultato precedente, perchè percorrendo l si attraversano nella (8) tanti coefficienti λ_i e μ_j (alternativamente) quanti se ne attraverserebbero complessivamente se, invece di percorrere l , si potesse percorrere la spezzata formata dai prolungamenti (oltre r) dei due lati contigui ad l . Se invece l ha lunghezza dispari, cioè $(\alpha_{s+1} - \alpha_s) - (\beta_{s+1} - \beta_s)$ è dispari, allora nel punto $(\alpha_{s+1} \beta_{s+1})$ sono in minoranza nella (7) i termini positivi od i negativi secondochè in $(\alpha_s \beta_s)$ erano in minoranza i negativi od i positivi; dimodochè, se si percorre nel senso fissato la successione $A_0 A_1 \dots A_n$ partendo da A_{γ_s} , per giungere ad $A_{\gamma_{s+1}}$ bisogna attraversare tutti i punti che stanno su $S_{\beta_s}^{(\alpha_s)}$, e che sono $\beta_s + 1$, ed inoltre tanti altri punti quanti sono i coefficienti μ_j (oppure λ_i) che si attraversano passando da $(\alpha_s \beta_s)$ ad $(\alpha_{s+1} \beta_{s+1})$. Si riconosce subito che ve

ne sono: $m - \beta_s$ per il lato che precede l ; $m - \beta_{s+1}$ per quello che segue l ; $\frac{1}{2} \left[(\alpha_{s+1} - \alpha_s) + (\beta_{s+1} + \beta_s) - 2m + 1 \right]$ per il lato l . Si avrà quindi:

$$\gamma_{s+1} - \gamma_s = 1 + m + \frac{1}{2} \left[(\alpha_{s+1} - \alpha_s) - (\beta_{s+1} - \beta_s) + 1 \right]. \quad (18)$$

35. — $n = 2m + 1$. — In quest'altro caso lo schema L non definisce più in modo completo la successione (8). Infatti è chiaro che, partendo da A , la (8) riesce determinata, come nel caso precedente, finchè L non raggiunge r ; ma quando ciò accade si hanno nella (7) tanti termini positivi quanti negativi, e perciò, proseguendo, la specie della (7) diminuisce sia che nella (8) s'incontri a questo punto una λ_i , sia che s'incontri una μ_j . Tale doppia possibilità si ripresenta a tutti i vertici di L che stanno su r , eccettuato l'ultimo.

Per togliere quest'ambiguità può servire la configurazione C . Se L ha $t (\geq 2)$ vertici su r , questi spezzano L in t parti, a cui corrispondono anche t parti C_1, C_2, \dots, C_t di C , due consecutive delle quali possono essere collegate fra loro in due modi diversi. Detti $S_{\beta_s}^{(\alpha_s)}$ ed $S_{\beta_{s+1}}^{(\alpha_{s+1})}$ rispett. l'ultimo spazio di C_i ed il primo di C_{i+1} , diremo che tra C_i e C_{i+1} si ha un *collegamento diretto* quando ai due lati di L uscenti da $(\alpha_s, \beta_s), (\alpha_{s+1}, \beta_{s+1})$, ed incontrantisi su r , corrispondono nella (8), in un ordine qualsiasi, un gruppo di λ_i ed uno di μ_j ; allora sussiste come prima la (17). Diremo invece che tra C_i e C_{i+1} si ha un *collegamento inverso* quando ai due lati anzidetti di L corrispondono nella (8) o due gruppi di λ_i , o due gruppi di μ_j ; in tal caso, per andare nella successione $A_0 A_1 \dots A_n$ da A_{γ_s} ad $A_{\gamma_{s+1}}$, si devono attraversare $\beta_s + 1$ punti che stanno su $S_{\beta_s}^{(\alpha_s)}$, ed inoltre altri $\alpha_{s+1} - \alpha_s$ punti; perciò sarà:

$$\gamma_{s+1} - \gamma_s = \alpha_{s+1} - \alpha_s + \beta_s + 1. \quad (19)$$

Concludendo: *Per n dispari, la quartica base d'un fascio a coni reali è topologicamente definita dalla configurazione caratteristica del fascio.*

36. --- Infine, per un fascio (n, k) con $2h + 2$ coni immaginari, segue dal n.º 29 che i caratteri topologici della quartica base dipendono da quelli della quartica base del fascio sezione del dato con lo spazio individuato dai vertici dei suoi coni reali. Cioè: *La quartica base d'un fascio contenente dei coni immaginari è topologicamente definita dalla configurazione caratteristica del fascio sezione del dato con lo spazio che congiunge i vertici dei suoi coni reali.*

§ 11. — ESEMPI.

37. — Applichiamo le cose dette ai casi: $n = 4$, $n = 5$. Per avere i vari tipi possibili di fasci di quadriche si dovranno fissare successivamente: il numero $2h + 2$ dei coni immaginari, il numero k che dà la specie minima per le quadriche del fascio, lo schema L ed eventualmente la configurazione C (tenendo conto della nota ⁽³¹⁾).

$n = 4$. — *a*) 4 coni immaginari ed 1 reale; $k = 1$; quartica con una falda pari di specie 1, contenente 4 rette reali, 6 coppie di rette complesse-coniugate delle quali 2 di 1.^a specie e 4 di 2.^a specie ⁽²³⁾;

b) 2 coni immaginari e 3 reali; $k = 1$; quartica con una falda pari di specie 1, contenente 8 rette reali, e 4 coppie di rette complesse-coniugate di 2.^a specie (lo schema L è un segmento su r);

c) 2 coni immaginari e 3 reali; $k = 0$; quartica con una falda pari di specie 0 (la configurazione C è ridotta ad un punto: $S_0^{(0)}$);

d) 5 coni reali; $k = 1$; quartica con una falda pari di specie 1, contenente 16 rette reali (lo schema L è un segmento su r);

e) 5 coni reali; $k = 0$; configurazione caratteristica: $S_0^{(0)}$, $S_0^{(2)}$; quartica con due falde pari di specie 0;

f) 5 coni reali; $k = 0$; configurazione caratteristica: $S_0^{(0)}$; quartica con una falda pari di specie 0;

g) 5 coni reali; $k = -1$; quartica priva di punti reali.

38. — $n = 5$. — *a*) 6 coni immaginari; $k = 2$; quartica con una falda pari di specie 1;

b) 4 coni immaginari e 2 reali; $k = 1$; quartica con una falda pari di specie 1;

c) 2 coni immaginari e 4 reali; $k = 1$; quartica con una falda pari di specie 1 (configurazione caratteristica; $S_0^{(0)}$, $S_0^{(2)}$) ⁽³³⁾;

d) 2 coni immaginari e 4 reali; $k = 0$; quartica con una falda pari di specie 0;

⁽³³⁾ La scelta del collegamento tra $S_0^{(0)}$ ed $S_0^{(2)}$ si può fare in due modi diversi, ma conduce solo a configurazioni l'una dedotta dall'altra invertendone il senso (oppure con permutazione circolare).

e) f) 6 coni reali; $k = 1$; quartica con una falda pari di specie 1. La configurazione caratteristica si compone sempre di tre rette: $S_1^{(0)}$, $S_1^{(0)}$, $S_1^{(0)}$; ma i tre collegamenti possono essere: o due diretti ed uno inverso, ed allora le tre rette sono: $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$; o tutti inversi, ed allora le tre rette sono a due a due sghembe: $A_0 A_1$, $A_1 A_3$, $A_2 A_3$. La differenza tra i due casi si riflette sulla piramide autopolare, la quale nel primo caso contiene due facce (opposte ad A_1 e ad A_3) che segano la quartica base in quartiche di specie 1, mentre nel secondo caso tutte le sue facce segano la quartica base in quartiche di specie 0;

g) 6 coni reali; $k = 0$; configurazione caratteristica: $S_0^{(0)}$, $S_1^{(0)}$; quartica con una falda di specie 0;

h) 6 coni reali; $k = 0$; configurazione caratteristica $S_0^{(0)}$, $S_0^{(0)}$; quartica con due falde pari di specie 0;

i) 6 coni reali; $k = -1$; quartica priva di punti reali ⁽³⁴⁾.

Torino, 21 novembre 1920.

⁽³⁴⁾ I risultati del n.º 38 possono applicarsi alla classificazione, dal punto di vista topologico, dei complessi quadratici di rette dello spazio ordinario, ritrovando così i risultati del REYE e dell'ARNOLDT ⁽¹⁰⁾. Per far ciò, occorre fissare entro il fascio una quadrica Q , di specie 2, come immagine delle rette d'un S_3 . Ora, nei casi a), b), d), h), i), il fascio contiene un sol tratto di quadriche di specie 2; entro questo, senza ambiguità, va scelta Q . Invece, nel caso c), il fascio contiene due tratti di quadriche di specie 2, in condizioni diverse, perchè l' S_3 che congiunge i vertici dei 4 coni reali sega le quadriche di quei due tratti in quadriche rigate, in modo però che le quadriche di uno di essi danno luogo a quadriche sezioni le cui generatrici incontrano tutte la quartica base in due punti reali e distinti, mentre quelle dell'altro danno quadriche sezioni contenenti anche generatrici esterne alla quartica base; dal caso c) si ottengono perciò due diversi tipi di complessi quadratici secondochè Q vien scelta nell'uno o nell'altro dei due tratti. Così nel caso g); anche qui si hanno nel fascio due tratti di quadriche di specie 2 in condizioni diverse, perchè il piano di $S_0^{(0)}$ e di $S_1^{(0)}$ è esterno rispetto a quelle dell'un tratto e secante rispetto a quelle dell'altro. Invece, nei casi e), f) non si trovano suddivisioni ulteriori. Tenuto conto di ciò, i nostri casi corrispondono a quelli del REYE nel modo seguente: a) complesso iperbolico (I. Art); b) complesso parabolico (II. Art); c) complesso parabolico (III_a. e III_b. Art); d) complesso ellittico (IV. Art); e) f) complesso parabolico (V_a. e V_b. Art); g) complesso ellittico (VI_a. e VI_b. Art); h) complesso ellittico (VII. Art); i) complesso immaginario (VIII. Art).

Sulle trasformazioni dei sistemi di linee, coniugate ed ortogonali, nello spazio S_n .

(Di PASQUALE CALAPSO, a Messina.)

PREFAZIONE.

La teoria delle trasformazioni per involuppo di sfere è stata recentemente generalizzata sotto vari aspetti, fra cui sono principalmente da notare le ricerche del BIANCHI relative alle trasformazioni di RIBAUCCOUR dei sistemi n^{mi} ortogonali (*).

Mi propongo nel presente lavoro di stabilire le proprietà delle trasformazioni dei *sistemi coniugati ed ortogonali* (réseaux O) dello spazio S_n , rilevando fra l'altro il modo secondo cui le proprietà dello spazio ordinario S_3 vengono generalizzate e talora modificate.

A fondamento della ricerca pongo un *sistema di $n + 2$ sfere a due a due ortogonali* e il determinante formato con le coordinate di queste sfere

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{1n+1} & x_{1n+2} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_{2n+1} & x_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & x_{nn+1} & x_{nn+2} \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n & \xi_{n+1} & \xi_{n+2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

facendo l'ipotesi che le sfere considerate formino un *sistema di Guichard*; e seguendo le notazioni dell'autore indico con $A_1, A_2, \dots, A_n, R, S$ i centri delle sfere aventi per coordinate le successive righe del determinante.

(*) [Annali di Matematica, Tomo XXVII della serie III; pag. 183 e seguenti.]

Si sa che la retta \overline{RS} descrive una congruenza ciclica di cui R ed S sono i fuochi; inoltre fra i sistemi coniugati (réseaux) armonici alla congruenza (\overline{RS}) esistono:

1.° ∞^{n-2} reti O [formanti il sistema (B) di GUICHARD];

2.° ∞^{n-1} reti $2O$ [formanti il sistema (A)] (*);

3.° *In generale* reti $3O$.

Mediante i sistemi (A) e (B) è costruibile (in infiniti modi) un sistema semplicemente infinito di reti armoniche ad (\overline{RS}) , in guisa che una qualunque di esse è in generale $2O$; ma esistono in particolare nel sistema due reti O .

Per esempio esistono sulla retta $\overline{A_1 A_2}$ due punti P e P' , ciascuno dei quali descrive una rete O armonica ad (\overline{RS}) .

Basandomi su queste proprietà fondamentali sono pervenuto alle trasformazioni di RIBAUCOUR colle seguenti considerazioni:

Il punto P appartiene alla sfera A_k [$k = 3, 4, \dots, n$] ed anche alle sfere R ed S , e poichè due qualunque sfere del sistema sono ortogonali la retta $\overline{A_k P}$ è perpendicolare comune a \overline{PR} e \overline{PS} ; inoltre due rette $\overline{A_k P}$ ed $\overline{A_l P}$ sono perpendicolari tra loro.

Di più entrambi i punti P ed A_k descrivono rispettivamente due reti armoniche alla stessa congruenza (\overline{RS}) , e quindi la loro congiungente *descrive una congruenza riferita alle sviluppabili*. La retta $\overline{A_k P}$ è perciò normale alla rete (P) .

Le medesime conclusioni valgono per la rete (P') , inoltre i segmenti $\overline{A_k P}$ ed $A_k P'$ sono uguali; dunque: *le $n - 2$ normali alla rete (P) incontrano rispettivamente le $n - 2$ normali alla rete (P') in punti equidistanti da P e da P' . Lo stesso per le tangenti alle reti (P) e (P') .*

Il passaggio dalla rete (P) alla rete (P') è perciò una *trasformazione di Ribaucour* (trasformazione R); inversamente due reti O , deducibili l'una dall'altra per trasformazione R , sono sempre armoniche ad una stessa congruenza ciclica; e quest'ultima è sempre il luogo della congiungente i centri R, S di due sfere di un sistema ortogonale di GUICHARD.

La trasformazione che fa passare dalla rete (P) alla rete (P') trasforma altresì gli elementi fondamentali di (P) in quelli di (P') ; risulta allora la *trasformazione di Bianchi* come trasformazione dei determinanti Δ di ordine n .

(*) Per rete $2O$ di uno spazio S_n intendosi la proiezione in questo spazio di una rete O (ortogonale) di uno spazio S_{n+1} .

Applicando la trasformazione di BIANCHI al determinante (1) di ordine $n + 2$, si trova un nuovo determinante Δ' , ed il passaggio da Δ a Δ' è suscettibile di due differenti interpretazioni:

1.^o *Gli elementi della prima riga di Δ si considerino come coordinate di Weierstrass di un punto che descrive una rete O di uno spazio S_{n+1} di curvatura costante, e similmente per Δ' ; si ottiene allora una trasformazione per le reti O dello spazio non euclideo.*

2.^o *Gli elementi di Δ' si considerino come le coordinate di $n + 2$ sfere a due a due ortogonali (dello spazio euclideo S_n); possiamo allora ripetere su Δ' le considerazioni fatte superiormente su Δ e dedurre in conseguenza due reti O [che indichiamo con (P_1) e (P'_1)] dello spazio S_n , analoghe alle reti (P) e (P') .*

Il passaggio dalla rete (P) alla rete (P_1) [o dalla rete (P) alla rete (P'_1)] è qui detto una *trasformazione R non euclidea* [o brevemente una trasformazione \bar{R}], per tenere presente che è una trasformazione delle reti O dello spazio euclideo S_n che si effettua attraverso lo spazio non euclideo S_{n+1} .

Io ho dimostrato che la trasformazione \bar{R} non differisce sostanzialmente da una trasformazione R ordinaria, nel senso che *due reti O dedotte l'una dall'altra con una trasformazione \bar{R} sono anche deducibili l'una dall'altra per trasformazione di Ribaucour*; ed inversamente.

Nondimeno le espressioni analitiche della R e della \bar{R} sono *diverse*, il che apporta qualche modificazione ai teoremi concernenti la composizione delle trasformazioni di RIBAUCCOUR. Così appunto il *teorema di permutabilità di Bianchi* prende la forma seguente:

Se da una rete (P) si ottiene una nuova rete (P') mediante una trasformazione R ed una rete (P_1) mediante una trasformazione \bar{R} , esiste una quarta rete (P'_1) [deducibile in termini finiti] legata alla (P') da una trasformazione \bar{R} e legata alla (P_1) da una trasformazione R .

La dimostrazione è immediata; infatti partiamo dalle reti (P) e (P') e costruendo il sistema delle $n + 2$ sfere a due a due ortogonali formiamo il relativo determinante Δ . Operiamo ora una trasformazione \bar{R} della rete (P) in una nuova rete (P_1) ; il determinante Δ si trasforma in un nuovo determinante Δ' , dal quale si deducono due reti legate tra loro da una trasformazione R . Una di queste è la (P_1) , l'altra è la (P'_1) cercata.

Nella presente Memoria è anche introdotta la trasformazione \bar{R} delle reti O degli spazi di curvatura costante, ed è studiata la composizione di due trasformazioni R ed \bar{R} ed il relativo *teorema di permutabilità*.

Infine è stabilita una teoria delle congruenze k , come una generalizzazione della teoria analoga introdotta dal DEMOULIN nello spazio S_3 (*).

Prendendo le quattro reti (P) , (P') , (P_1) , (P'_1) del teorema di permutabilità, esiste in infiniti modi un punto Q' equidistante da P , P' , P_1 .

Fra questi assumiamo il punto Q' appartenente al piano individuato dalla tangente ad una curva della rete (P) e dalla normale $\overline{A_k P}$; similmente assumiamo il punto Q'' individuato dalla tangente all'altra curva di (P) e dalla normale $\overline{A_k P}$.

Chiamiamo *congruenza k* la congruenza generata dalla retta $\overline{Q'Q''}$; per $n = 3$ ne esiste una sola, per $n > 3$ ne esiste una per ogni coppia di piani principali della rete, e la diciamo *coniugata* alla coppia π_k , π'_k dei detti piani principali.

Si ha il teorema: *per ciascuna congruenza k le sviluppabili corrispondono alle curve della rete (P) , ed i fuochi sono le intersezioni della retta k coi piani π_k , π'_k a cui la congruenza è coniugata.*

Se nel piano dei quattro punti P , P' , P_1 , P'_1 prendiamo la retta $\overline{PP'}$, essa congiunge i punti corrispondenti di due reti armoniche alla congruenza (RS) , e quindi descrive una congruenza riferita alle sviluppabili; similmente la retta $\overline{PP_1}$ congiunge i punti corrispondenti di due retti armoniche ad una medesima congruenza [analoga ad (RS)] e quindi descrive pure una congruenza riferita alle sviluppabili. Dunque il piano π , a cui appartengono P , P' , P_1 , P'_1 contiene due rette, ciascuna delle quali descrive una congruenza (riferita alle sviluppabili) coniugata alla rete (P) ; *il piano π involupa perciò una rete (π) armonica ad entrambe le congruenze.*

Infine è fatta una classificazione delle congruenze k , basata sulle considerazioni seguenti.

Due congruenze k generate dalla stessa quaterna (P) , (P') , (P_1) , (P'_1) non sono in generale parallele; ma se lo sono in particolare, tutte le congruenze k generate dalla detta quaterna sono parallele alla congruenza (RS) .

In tal caso il sistema delle quattro reti (P) , (P') , (P_1) , (P'_1) è detto un *sistema k di prima specie*; in caso diverso è detto *di seconda specie*.

Risulta subito che *una congruenza k , relativa ad un sistema k di prima specie, è ciclica.*

L'ipotesi di un sistema k di prima specie porta che il piano π contiene

(*) DEMOULIN, *Sur les systèmes et les congruences k* [Comptes Rendus, anno 1910, vol. 150, pag. 156 e seguenti; pag. 310 e seguenti].

una normale alla rete (P); abbiamo dunque in π una congruenza normale coniugata a (P) e perciò la rete involupata dal piano π è armonica ad una congruenza normale e quindi è ciclica. Dunque in un sistema k di prima specie il piano π involuppa una rete ciclica.

In generale è da osservare che la congruenza $(\overline{PP'})$, od anche $(\overline{PP_1})$, essendo coniugata ad una rete O , è $\mathcal{Q}O$, e la rete involupata da π essendo armonica ad una congruenza $\mathcal{Q}O$ è $\mathcal{Q}C$ (cioè proiezione di una rete ciclica dello spazio ad $n + 1$ dimensioni).

Si dimostra che il sistema k di prima specie dà il solo caso in cui si ha una riduzione di grado per la rete (π), dunque:

In un sistema k di seconda specie il piano π involuppa una rete $\mathcal{Q}C$.

§ 1. LE TRASFORMAZIONI DI RIBAUCCOUR NELLO SPAZIO EUCLIDEO S_n .

1. Consideriamo in uno spazio S_n un sistema di $n + 2$ sfere a due a due ortogonali, e con le coordinate delle sfere formiamo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{1n+1} & x_{1n+2} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & x_{2n+1} & x_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & x_{nn+1} & x_{nn+2} \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n & \xi_{n+1} & \xi_{n+2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n & \eta_{n+1} & \eta_{n+2} \end{vmatrix}; \quad (1)$$

supponiamo inoltre che le sfere considerate formino un sistema di Guichard, per il che sono note le equazioni (necessarie e sufficienti)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi_r}{\partial u} &= - \sum_{s=1}^n a_s x_{sr} - p \eta_r, & \frac{\partial \xi_r}{\partial v} &= q \eta_r, \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial u} &= p \xi_r, & \frac{\partial \eta_r}{\partial v} &= - \sum_{s=1}^n b_s x_{sr} - q \xi_r, \\ \frac{\partial x_{kr}}{\partial u} &= a_k \xi_r, & \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} &= b_k \eta_r. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n, n + 1, n + 2)$$

colle condizioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_s}{\partial v} &= p b_s, & \frac{\partial b_s}{\partial u} &= q a_s, \\ \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} + \sum_{s=1}^n a_s b_s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2. Indichiamo con A_k il centro della sfera che ha per coordinate $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}, x_{kn+1}, x_{kn+2}$ e similmente indichiamo con R ed S i centri delle sfere che hanno rispettivamente per coordinate gli elementi delle due ultime linee di Δ .

Sappiamo da un teorema di GUICHARD che *la retta \overline{RS} descrive una congruenza ciclica riferita alle sviluppabili, di cui R ed S sono i fuochi; ciascun punto A_k descrive un sistema coniugato (réseau) armonico alla congruenza (\overline{RS}) ; sopra ciascuna retta $\overline{A_i A_i}$ esiste un punto P che descrive una rete ortogonale (réseau O) (*) armonica ad (\overline{RS}) .*

3. Completiamo l'enunciato precedente con un'importante osservazione.

Riferiamoci per fissare le idee alla retta $\overline{A_1 A_2}$, e consideriamo in essa i punti P e P' aventi rispettivamente le coordinate pentasferiche

$$\left. \begin{aligned} x_r &= x_{1r} + i x_{2r}, \\ x'_r &= x_{1r} - i x_{2r}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$[r = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2].$$

È chiaro che il punto P appartiene alla sfera A_k [$k = 3, 4, \dots, n$] ed anche alle sfere R ed S ; e poichè due qualunque sfere del sistema sono ortogonali, la retta $\overline{A_k P}$ è perpendicolare comune a \overline{PR} e \overline{PS} ; inoltre due rette $\overline{A_k P}$ ed $\overline{A_l P}$ sono perpendicolari tra loro.

Di più entrambi i punti P ed A_k descrivono rispettivamente due reti armoniche alla stessa congruenza (\overline{RS}) , e quindi la loro congiungente descrive una congruenza riferita alle sviluppabili. *La retta $A_k P$ è perciò normale alla rete (P) .*

Le medesime conclusioni valgono per la rete (P') ; inoltre i segmenti $\overline{A_k P}$ ed $\overline{A_k P'}$ sono uguali; dunque: *le $n - 2$ normali alla rete (P) incontrano*

(*) Per *réseau O* intendosi un sistema coniugato, per cui l'elemento lineare ha la forma

$$A du^2 + B dv^2$$

con A e B diversi da zero.

rispettivamente le $n - 2$ normali alla rete (P') in punti equidistanti da P e da P' . Lo stesso per le tangenti alle reti (P) e (P').

Il passaggio dalla rete (P) alla rete (P') è perciò una trasformazione di RIBAUCCOUR (trasformazione R).

§ 2. ESPRESSIONE ANALITICA DI BIANCHI PER LA TRASFORMAZIONE DI RIBAUCCOUR.

4. Interpretiamo il determinante (1) da un punto di vista diverso.

Assumiamo gli elementi delle varie righe come coseni direttori di $n + 2$ rette (in uno spazio S_{n+2}), uscenti da un punto M . Indichiamo con

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$$

le coordinate di M che supponiamo funzioni date delle variabili u e v ; otteniamo così un sistema mobile di $n + 2$ rette a due a due ortogonali.

Ad ogni punto M facciamo corrispondere un punto M' , assegnando le coordinate di M'

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, x'_{n+1}, x'_{n+2}$$

come nuove funzioni di u e v . Si potrà sempre porre

$$x'_i = x_i - \frac{1}{m\sigma} \left(\lambda \xi_i + \mu \eta_i + \sum_{s=1}^n w_s x_{si} \right) \quad (5)$$

essendo le quantità $\lambda, \mu, w_1, w_2, \dots, w_n, \sigma$, definite a meno di un fattore dalle (5) stesse, ed m una costante arbitraria diversa da zero. Introduciamo ancora per comodità di calcolo la funzione H mediante la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \sum_{s=1}^n w_s^2 = 2mH. \quad (6)$$

Conduciamo per il punto M la retta, avente per coseni direttori

$$x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn}, x_{r,n+1}, x_{r,n+2};$$

esiste un segmento MN , in guisa che

$$MN = M'N.$$

Si riconosce subito che i coseni direttori della retta $M'N$ sono

$$x'_{ri} = \frac{\lambda w_r}{m H} \zeta_i + \frac{\mu w_r}{m H} \eta_i + \frac{w_r}{m H} \sum_{s=1}^n w_s x_{si} - x_{ri}. \quad (7)$$

Analogamente operando per le rette di direzione ζ_i ed η_i si trova

$$\left. \begin{aligned} \zeta'_i &= \frac{\lambda^2}{m H} \zeta_i + \frac{\lambda \mu}{m H} \eta_i + \frac{\lambda}{m H} \sum_{s=1}^n w_s x_{si} - \zeta_i, \\ \eta'_i &= \frac{\lambda \mu}{m H} \zeta_i + \frac{\mu^2}{m H} \eta_i + \frac{\mu}{m H} \sum_{s=1}^n w_s x_{si} - \eta_i; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ne risulta così un nuovo determinante ortogonale

$$\Delta' = \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1n} & x'_{1n+1} & x'_{1n+2} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} & x'_{2n+1} & x'_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} & x'_{nn+1} & x'_{nn+2} \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \dots & \zeta'_n & \zeta'_{n+1} & \zeta'_{n+2} \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \dots & \eta'_n & \eta'_{n+1} & \eta'_{n+2} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Si tratta di determinare sotto quali condizioni Δ' è ancora del tipo speciale (1), cioè sotto quali condizioni si abbiano relazioni della forma

$$\frac{\partial x'_{ri}}{\partial u} = a'_r \zeta'_i, \quad \frac{\partial x'_{ri}}{\partial v} = b'_r \eta'_i. \quad (10)$$

Tralasciando di riportare i calcoli relativi, scriviamo semplicemente il sistema di equazioni differenziali a cui si è condotti; cioè

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= - \sum_{s=1}^n a_s w_s - p \mu + m \varphi \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= q \mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= p \lambda \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= - \sum_{s=1}^n b_s w_s - q \lambda + m \Omega \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial w_s}{\partial u} &= a_s \lambda \\
 \frac{\partial w_s}{\partial v} &= b_s \mu \\
 \frac{\partial H}{\partial u} &= \lambda \varphi \\
 \frac{\partial H}{\partial v} &= \mu \Omega \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= p \Omega \\
 \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= q \varphi.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

5. Si ha frattanto il seguente teorema:

Partendo da un determinante ortogonale del tipo speciale (1), si determini una soluzione

$$\lambda, \mu, w_s, H, \varphi, \Omega$$

del sistema (11), con la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \sum_{s=1}^n w_s^2 = 2 m H; \quad (12)$$

le formole (7), (8) danno in conseguenza gli elementi di un nuovo determinante ortogonale dello stesso tipo.

Con facile calcolo si hanno le rotazioni del nuovo determinante sotto la forma

$$\left. \begin{aligned}
 a'_r &= a_r - \frac{\varphi w_r}{H}, & b'_r &= b_r - \frac{\Omega w_r}{H}, \\
 p' &= p - \frac{\varphi \mu}{H}, & q' &= q - \frac{\Omega \lambda}{H}.
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

6. Ed ora supponiamo che il punto M descriva una rete O , di cui Δ sia il determinante fondamentale; si avrà

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = h \xi_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = l \eta_i, \quad (14)$$

essendo h ed l legate alle rotazioni di Δ mediante le equazioni

$$\frac{\partial h}{\partial v} = l p, \quad \frac{\partial l}{\partial u} = h q. \quad (15)$$

Aggiungiamo alle (11) e (12) le equazioni

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = h \lambda, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = l \mu \quad (16)$$

e prendiamo nelle (5) la funzione σ data dalla formola

$$\sigma = \frac{H}{\psi}; \quad (17)$$

si avrà

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{\lambda}{\psi} (\varphi - h \sigma), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\mu}{\psi} (\Omega - l \sigma), \quad (18)$$

e le (5) danno una nuova rete O , che è la trasformata di RIBAUCCOUR della prima. Per questa nuova rete si ha:

$$h' = \frac{\varphi}{\sigma} - h, \quad l' = \frac{\Omega}{\sigma} = l. \quad (19)$$

7. Importa osservare la forma del determinante ortogonale d'ordine $n + 4$, da cui la trasformazione qui posta è deducibile col metodo del paragrafo precedente. Indicando il nuovo determinante con

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \alpha_{1n+1} & \alpha_{1n+2} & \alpha_{1n+3} & \alpha_{1n+4} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \alpha_{2n+1} & \alpha_{2n+2} & \alpha_{2n+3} & \alpha_{2n+4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & \alpha_{nn+1} & \alpha_{nn+2} & \alpha_{nn+3} & \alpha_{nn+4} \\ \alpha_{n+11} & \alpha_{n+12} & \dots & \alpha_{n+1n} & \alpha_{n+1n+1} & \alpha_{n+1n+2} & \alpha_{n+1n+3} & \alpha_{n+1n+4} \\ \alpha_{n+21} & \alpha_{n+22} & \dots & \alpha_{n+2n} & \alpha_{n+2n+1} & \alpha_{n+2n+2} & \alpha_{n+2n+3} & \alpha_{n+2n+4} \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & \beta_{n+1} & \beta_{n+2} & \beta_{n+3} & \beta_{n+4} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n & \gamma_{n+1} & \gamma_{n+2} & \gamma_{n+3} & \gamma_{n+4} \end{vmatrix},$$

le espressioni degli elementi sono:

$$\alpha_{ri} = \frac{w_r}{\psi} x_i - x_{ri}, \quad \alpha_{r,n+3} + i \alpha_{r,n+4} = -\frac{w_r}{\psi},$$

$$\left(\begin{matrix} r = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2 \end{matrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha_{n+1i} + i\alpha_{n+2i}) &= x_i, \\ \psi\left[(\alpha_{n+1n+3} + i\alpha_{n+2n+3}) + i(\alpha_{n+1n+4} + i\alpha_{n+2n+4})\right] &= -1, \\ -\frac{1}{2m\sigma}(\alpha_{n+1i} - i\alpha_{n+2i}) &= x'_i, \\ -\frac{1}{2m\sigma}\left[(\alpha_{n+1n+3} - i\alpha_{n+2n+3}) + i(\alpha_{n+1n+4} - i\alpha_{n+2n+4})\right] &= -1, \\ \beta_i &= \frac{\lambda}{\psi}x_i - \xi_i, & \beta_{n+3} + i\beta_{n+4} &= -\frac{\lambda}{\psi}, \\ \gamma_i &= \frac{\mu}{\psi}x_i - \eta_i, & \gamma_{n+3} + i\gamma_{n+4} &= -\frac{\mu}{\psi}; \end{aligned}$$

ed i punti M ed M' rimangono individuati rispettivamente dalle coordinate pentasferiche.

$$\begin{aligned} \alpha_{n+11} + i\alpha_{n+21}, \dots, \alpha_{n+1n+3} + i\alpha_{n+2n+3}, \alpha_{n+1n+4} + i\alpha_{n+2n+4}; \\ \alpha_{n+11} - i\alpha_{n+21}, \dots, \alpha_{n+1n+3} - i\alpha_{n+2n+3}, \alpha_{n+1n+4} - i\alpha_{n+2n+4}. \end{aligned}$$

§ 3. LA TRASFORMAZIONE R NON EUCLIDEA.

8. L'espressione analitica di BIANCHI per le trasformazioni di RIBAUCCOUR si presta per fare subito una estensione agli spazi di curvatura costante.

Assumiamo il determinante (1) per definire una rete O di uno spazio S_{n+1} di curvatura costante, prendendo come *coordinate di Weierstrass* del punto che descrive la rete gli elementi della prima riga di Δ .

Prendendo una soluzione

$$\lambda, \mu, w_s, H, \varphi, \Omega$$

del sistema (11) con la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \sum w_s^2 = 2mH,$$

sappiamo che le (7) ed (8) danno gli elementi di un nuovo determinante ortogonale.

Si deduce allora una nuova rete O dello stesso spazio, assumendo come coordinate di WEIERSTRASS gli elementi della prima riga del determinante trasformato.

Noi vogliamo studiare questa trasformazione dal punto di vista dell'effetto che essa produce sulle reti O dello spazio euclideo S_n ; cioè consideriamo le reti (P) e (P') che si deducono da Δ prendendo le coordinate pentasferiche

$$x_r = x_{1r} + i x_{2r} \quad \text{e} \quad x'_r = x_{1r} - i x_{2r};$$

indi consideriamo le reti analoghe (P_1) e (P'_1) che si deducono similmente da Δ' ponendo

$$x_r^{(1)} = x'_{1r} + i x'_{2r} \quad \text{e} \quad x_r^{(1')} = x'_{1r} - i x'_{2r}.$$

Il passaggio dalla rete (P) alla rete (P_1) [o dalla rete (P') alla (P'_1)] si dirà una *trasformazione R non euclidea*, o brevemente una *trasformazione \bar{R}* .

In sostanza la \bar{R} è una trasformazione delle reti O dello spazio euclideo S_n , che si effettua attraverso lo spazio non euclideo S_{n+1} .

9. Dimostriamo anzitutto che *due reti O , dedotte l'una dall'altra con una trasformazione di Ribaucour, sono anche deducibili l'una dall'altra per trasformazione R non euclidea*.

Supponiamo dato un determinante Δ , per il quale manteniamo le notazioni del n.º 1, e formiamo un nuovo determinante analogo a Δ ; cioè:

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \dots & x_{1n} & \bar{x}_{1n+1} & \bar{x}_{1n+2} \\ \bar{x}_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \bar{x}'_{2n+1} & \bar{x}_{2n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_{n1} & \bar{x}_{n2} & \dots & \bar{x}_{nn} & \bar{x}_{nn+1} & \bar{x}_{nn+2} \\ \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 & \dots & \bar{\xi}_n & \bar{\xi}_{n+1} & \bar{\xi}_{n+2} \\ \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 & \dots & \bar{\eta}_n & \bar{\eta}_{n+1} & \bar{\eta}_{n+2} \end{vmatrix}, \quad (20)$$

con la condizione che le prime due righe di quest'ultimo siano legate alle prime due righe di Δ da relazioni della forma

$$\bar{x}_{1r} + i \bar{x}_{2r} = \frac{x_{1r} + i x_{2r}}{\Theta}. \quad (21)$$

La rete (\bar{P}) definita dalle coordinate pentasferiche

$$\bar{x}_{1r} - i \bar{x}_{2r}$$

è nel modo più generale una trasformata di RIBAUCOUR di (P) .

Avendosi

$$\frac{\partial x_{1r}}{\partial u} + i \frac{\partial \bar{x}_{2r}}{\partial u} = \frac{\alpha_1 + i \alpha_2}{\Theta} \left[\zeta_r - \frac{x_{1r} + i x_{2r}}{\alpha_1 + i \alpha_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \right],$$

si deducono le espressioni

$$\bar{\zeta}_r = \zeta_r - \frac{x_{1r} + i x_{2r}}{\alpha_1 + i \alpha_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u}; \quad (22)$$

similmente

$$\bar{\eta}_r = \eta_r - \frac{x_{1r} + i x_{2r}}{b_1 + i b_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v}. \quad (23)$$

Esprimendo che le quantità $\bar{\zeta}_r$, $\bar{\eta}_r$ sono le due ultime linee di un determinante ortogonale del tipo speciale considerato, si trova per Θ l'equazione

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \frac{b_1 + i b_2}{\alpha_1 + i \alpha_2} \cdot p \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{\alpha_1 + i \alpha_2}{b_1 + i b_2} \cdot q \frac{\partial \Theta}{\partial v}. \quad (24)$$

Inversamente se questa equazione è soddisfatta, dalle (22) e (23) si ricava

$$\frac{\partial \bar{\zeta}_r}{\partial v} = \left[q - \frac{b_1 + i b_2}{\alpha_1 + i \alpha_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \right] \bar{\eta}_r$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}_r}{\partial u} = \left[p - \frac{\alpha_1 + i \alpha_2}{b_1 + i b_2} \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \right] \bar{\zeta}_r$$

e le (22) e (23) danno effettivamente le ultime due linee del determinante richiesto, che rimane da esse determinato a meno di una sostituzione ortogonale a coefficienti costanti sugli elementi delle colonne.

Per completare $\bar{\Delta}$, determiniamo per quadrature le funzioni

$$w_3, w_4, \dots, w_n$$

ponendo

$$\frac{\partial w_k}{\partial u} = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + i \alpha_2} \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad \frac{\partial w_k}{\partial v} = \frac{b_k}{b_1 + i b_2} \frac{\partial \Theta}{\partial v}; \quad (25)$$

potremo allora assumere

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{kr} &= x_{kr} - \frac{x_{1r} + i x_{2r}}{\Theta} w_k (*), \\ (k &= 3, 4, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ed il determinante $\bar{\Delta}$ è conosciuto.

Dimostriamo ora che il passaggio da (P) a (\bar{P}) si ottiene anche per trasformazione R non euclidea.

Infatti introduciamo le funzioni

$$\lambda = \frac{1}{a_1 + i a_2} \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad \mu = \frac{1}{b_1 + i b_2} \frac{\partial \Theta}{\partial v}; \quad (27)$$

sarà per la (24)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = q \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = p \lambda. \quad (28)$$

Determiniamo ancora per quadrature la funzione w_1 , ponendo

$$\frac{\partial w_1}{\partial u} = a_1 \lambda, \quad \frac{\partial w_1}{\partial v} = b_1 \mu; \quad (29)$$

indi prendiamo

$$w_1 + i w_2 = \Theta. \quad (30)$$

Le funzioni

$$\lambda, \mu, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$$

danno un sistema di funzioni trasformatrici per una trasformazione non euclidea di (P) . Ed allora indicando con le notazioni (9) il determinante Δ' trasformato di Δ , si avrà

$$x'_{1r} + i x'_{2r} = \frac{\Theta}{m H} \left[\lambda \xi_r + \mu \eta_r + \sum_{s=1}^n w_s x_{sr} \right] - (x_{1r} + i x_{2r});$$

e ponendo

$$y_r = \frac{2 m H}{\Theta} (x'_{1r} + i x'_{2r}), \quad (31)$$

(*) Si noti che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}_{kr}}{\partial u} &= \left[a_k - \frac{a_1 + i a_2}{\Theta} w_k \right] \xi_r \\ \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} &= \left[b_k - \frac{b_1 + i b_2}{\Theta} w_k \right] \eta_r. \end{aligned}$$

si ricava

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^{n+2} \bar{\zeta}_r y_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{n+2} \bar{n}_r y_r = 0, \quad \sum_{r=1}^{n+2} x_{kr} y_r = 0, \\ (k = 3, 4, \dots, n); \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ed ancora

$$\sum_{r=1}^{n+2} (\bar{x}_{1r} + i \bar{x}_{2r}) y_r = 2 \quad (*) \quad (33)$$

dalle quali si deduce facilmente

$$y_r = x_{1r} - i x_{2r}$$

e la proposizione è stabilita.

10. Inversamente se due reti O sono dedotte l'una dall'altra con una trasformazione R non euclidea, sono deducibili l'una dall'altra per trasformazione di Ribaucour.

Infatti riprendiamo il risultato del n.º 5 che dà la trasformazione del determinante Δ in Δ' , e consideriamo il passaggio della rete (P) alla rete (P_1) [o dalla rete (P') alla (P'_1)].

Scriviamo le coordinate pentasferiche di P e di P_1 , sotto la forma

$$x_r = x_{1r} + \alpha x_{2r}; \quad x_r^{(1)} = x'_{1r} + \alpha x'_{2r} \\ (\alpha = \pm i)$$

ed assumiamo le funzioni

$$\left. \begin{aligned} 2 \bar{x}_{1r} &= \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} + 2 m H \frac{x'_{1r} + \alpha x'_{2r}}{w_1 + \alpha w_2}, \\ 2 i \bar{x}_{2r} &= \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} - 2 m H \frac{x'_{1r} + \alpha x'_{2r}}{w_1 + \alpha w_2}, \\ \bar{x}_{kr} &= x_{kr} - \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} w_k, \\ \bar{\zeta}_r &= \zeta_r - \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} \lambda, \\ \bar{n}_r &= n_r - \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2} \mu; \end{aligned} \right\} \quad (k = 3, 4, \dots, n) \quad (34)$$

(*) Si noti altresì che per la (31) si ha:

$$\frac{\partial y_r}{\partial u} = 2 m \left(\varphi - \frac{a_1 + i a_2}{\Theta} H \right) \bar{\xi}_r, \\ \frac{\partial y_r}{\partial v} = 2 m \left(\Omega - \frac{b_1 + i b_2}{\Theta} H \right) \bar{\eta}_r.$$

ne risulta un nuovo determinante $\bar{\Delta}$ di forma ortogonale. Inoltre si ha

$$x_{1r} + i \bar{x}_{2r} = \frac{x_{1r} + \alpha x_{2r}}{w_1 + \alpha w_2}; \quad \bar{x}_{1r} - i \bar{x}_{2r} = 2mH \frac{x'_{1r} + \alpha x'_{2r}}{w_1 + \alpha w_2};$$

$$\frac{\partial \bar{x}_{1r}}{\partial u} + i \frac{\partial \bar{x}_{2r}}{\partial u} = \frac{a_1 + \alpha a_2}{w_1 + \alpha w_2} \zeta_r,$$

$$\frac{\partial \bar{x}_{1r}}{\partial u} - i \frac{\partial \bar{x}_{2r}}{\partial u} = 2m \left[\varphi - \frac{a_1 + \alpha a_2}{w_1 + \alpha w_2} \cdot H \right] \zeta_r,$$

$$\frac{\partial \bar{x}_{kr}}{\partial u} = \left[a_k - \frac{a_1 + \alpha a_2}{w_1 + \alpha w_2} w_k \right] \bar{\eta}_r.$$

e le analoghe per le derivate rispetto a v , donde si conclude che si passa da (P) a (P_1) [ed anche da (P') a (P'_1)] con una trasformazione di RIBAUCCOUR.

§ 4. IL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ.

11. I risultati precedenti permettono di dimostrare rapidamente il *teorema di permutabilità* sotto la forma seguente:

Se di una rete (P) si ottiene una nuova rete (P') mediante una trasformazione R ed una nuova rete (P_1) mediante una trasformazione \bar{R} , esiste una quarta rete (P'_1) [deducibile in termini finiti] legata alla (P') da una trasformazione \bar{R} e legata alla P_1 da una trasformazione R .

Infatti partiamo dalle reti (P) e (P') , che supponiamo nello spazio S_n , e costruendo come al n.º 7 il sistema delle $n + 2$ sfere a due a due ortogonali, deduciamo il relativo determinante (1). Operiamo una trasformazione \bar{R} della rete (P) in una nuova rete (P_1) ; il determinante Δ si trasforma in un nuovo determinante Δ' , dal quale si deducono due reti legate tra loro da una trasformazione R . Una di queste è la (P_1) , l'altra è la (P'_1) cercata (*).

(*) Si è visto precedentemente che due reti O , legate da una trasformazione \bar{R} , sono anche legate da una R ordinaria ed inversamente. Perciò il teorema dimostrato coincide col *teorema di permutabilità di BIANCHI*. Ho già indicato in una precedente Memoria le successive estensioni fatte dall'illustre geometra intorno a questa importante proposizione. [Vedasi la prima nota alla Memoria *Sulla teoria generale delle trasformazioni di RIBAUCCOUR e sue applicazioni alla generalizzazione delle trasformazioni di DARBOUX*. Annali di Matematica, Tomo XXIX della Serie III, pag. 17 e seguenti].

§ 5. RAPPRESENTAZIONE CONFORME DELLE RETI (P) E (P')
SULLO SPAZIO NON EUCLIDEO.

12. Riprendiamo le reti (P) e (P') definite dalle coordinate pentasferiche (4), e poniamo

$$\left. \begin{aligned} y_r &= \frac{i x_r}{x_{n+2}}, \\ y'_r &= \frac{-i x'_r}{x'_{n+2}}; \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, \dots, n, n+1) \quad (35)$$

in questo modo le reti (P) e (P') vengono rappresentate conformemente sullo spazio non euclideo in due nuove reti (π) e (π'). Se poniamo

$$\left. \begin{aligned} \xi'_r &= \frac{\xi_{n+2}}{x_{n+2}} x_r - \xi_r, \\ \eta'_r &= \frac{\eta_{n+2}}{x_{n+2}} x_r - \eta_r, \\ y_{kr} &= \frac{x_{kn+2}}{x_{n+2}} x_r - x_{kr}, \quad (k = 3, 4, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ne risulta un determinante ortogonale

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n+1} \\ y_{31} & y_{32} & \dots & y_{3n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn+1} \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \dots & \xi'_{n+1} \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \dots & \eta'_{n+1} \end{vmatrix}$$

e si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{kr}}{\partial u} &= \left[a_k - \frac{a_1 + i a_2}{x_{n+2}} x_{kn+2} \right] \xi'_r \\ \frac{\partial y_r}{\partial u} &= - \frac{i (a_1 + i a_2)}{x_{n+2}} \xi'_r \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y_{kr}}{\partial v} = \left[b_k - \frac{b_1 + i b_2}{x_{n+2}} x_{kn+2} \right] n'_r$$

$$\frac{\partial y_r}{\partial v} = - \frac{i (b_1 + i b_2)}{x_{n+2}} n'_r.$$

Ponendo ancora

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= \frac{\zeta_{n+2}}{x_{n+2}}, & \mu' &= \frac{\eta_{n+2}}{x_{n+2}}, & w'_k &= \frac{x_{kn+2}}{x_{n+2}} & (k = 3, 4, \dots, n) \\ w'_1 &= \frac{i}{x_{n+2}}, & 2mH' &= i w'_1 x'_{n+2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

si ha il sistema di funzioni trasformatrici per il passaggio dalla rete (π) alla (π') (*).

§ 6. RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI DUE RETI (π) E (π') SULLO SPAZIO EUCLIDEO.

13. Riprendiamo il determinante (1) per definire una rete O di uno spazio S_{n+1} di curvatura costante e mediante una soluzione

$$\lambda, \mu, w_s, H, \varphi, \Omega$$

del sistema (11) con la relazione

$$\lambda^2 + \mu^2 + \sum_{s=1}^n w_s^2 = 2mH$$

deduciamo una nuova rete O dello stesso spazio; indichiamo con (π) e (π') la rete primitiva e la sua trasformata.

Se poniamo

$$\left. \begin{aligned} x_r &= - \frac{x_{1r}}{x_{1n+2} - 1} \\ x'_r &= - \frac{x'_{1r}}{x'_{1n+2} + 1} \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, \dots, n+1) \quad (38)$$

(*) Precisamente si ha:

$$y'_r = \frac{\lambda' w'_1}{m H'} \xi_r + \frac{\mu' w'_1}{m H'} \eta'_r + \frac{w'_1}{m H'} \sum_{k=3}^n w'_k y_{kr} + \frac{w'_1}{m H'} w'_1 y_r - y_r.$$

le reti (π) e (π') vengono rappresentate conformemente sullo spazio euclideo in due nuove reti (P) e (P') .

Per avere gli elementi della rete (P) deriviamo la prima delle (38); otteniamo

$$\frac{\partial x_r}{\partial u} = \frac{a_1}{x_{1n+2} - 1} \left[\frac{\xi_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} x_{1r} - \xi_r \right]$$

quindi

$$\xi'_r = \frac{\xi_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} x_{1r} - \xi_r. \quad (39)$$

Similmente

$$\eta'_r = \frac{\eta_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} x_{1r} - \eta_r. \quad (40)$$

Introducendo ancora le funzioni

$$y_{kr} = \frac{x_{kn+2}}{x_{1n+2} - 1} x_{1r} - x_{kr}, \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (41)$$

le (39), (40), (41) danno tutti gli elementi della rete (P) e si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'_r}{\partial v} &= \left[q - \frac{\xi_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} b_1 \right] \eta'_r, \\ \frac{\partial \eta'_r}{\partial u} &= \left[p - \frac{\eta_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} a_1 \right] \xi'_r, \\ \frac{\partial y_{kr}}{\partial u} &= \left[a_k - \frac{x_{kn+2}}{x_{1n+2} - 1} a_1 \right] \xi'_r, \\ \frac{\partial y_{kr}}{\partial v} &= \left[b_k - \frac{x_{kn+2}}{x_{1n+2} - 1} b_1 \right] \eta'_r. \end{aligned}$$

Se ora poniamo

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda - \frac{\xi_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} w_1, & \mu' &= \mu - \frac{\eta_{n+2}}{x_{1n+2} - 1} w_1, \\ \psi' &= \frac{w_1}{x_{1n+2} - 1}, & \sigma' &= -\frac{H}{w_1} (x'_{1n+2} + 1), \\ w'_k &= w_k - \frac{x_{kn+2}}{x_{1n+2} - 1} w_1, & & (k = 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

avremo il sistema di funzioni trasformatrici per passare dalla rete (P)

alla (P'), e precisamente si ha:

$$x'_r = x_r - \frac{1}{m\sigma'} \left(\lambda' \xi'_r + \mu' \eta'_r + \sum_{k=2}^n w'_k y_{kr} \right).$$

§ 7. LE TRASFORMAZIONI R ED \overline{R} E IL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ
NEGLI SPAZI DI CURVATURA COSTANTE.

14. Abbiamo visto che, partendo da un determinante della forma (1), le (35) danno due reti O di uno spazio S_n di curvatura costante legate tra loro da una trasformazione di RIBAUCOUR (trasformazione R).

Dimostriamo facilmente che ogni trasformazione di Ribaucour dello spazio S_n di curvatura costante si ottiene nella maniera suddetta.

Infatti siano (π) e (π') le due reti O , legate dalla trasformazione R e rappresentiamole conformemente sullo spazio euclideo in (P) e (P') . Formando il sistema di GUICHARD delle $n+2$ sfere a due a due ortogonali, relativo alle reti (P) e (P') , si ottiene il determinante (1) e le coordinate pentasferiche di (P) e (P') saranno

$$x_r = x_{1r} + i x_{2r}; \quad x'_r = x_{1r} - i x_{2r}.$$

Se ora operiamo il passaggio inverso per trasformare (P) e (P') in (π) e (π') , le coordinate di WEIERSTRASS di (π) e (π') prendono appunto la forma (35).

15. Anche nello spazio di curvatura costante possiamo introdurre la trasformazione \overline{R} , procedendo nel seguente modo. Trasformiamo il determinante Δ in Δ' col metodo del § 2; le reti (π) e (π') si cambiano rispettivamente in due altre (π_1) e (π'_1) .

Il passaggio dalla rete (π) alla (π_1) [o da (π') a (π'_1)] continueremo ancora a chiamare *trasformazione \overline{R}* .

Due reti O , dedotte l'una dall'altra con una trasformazione R , sono anche deducibili l'una dall'altra per trasformazione \overline{R} , ed inversamente ().*

(*) Per l'esattezza di questo teorema, in relazione alle definizioni superiori, si prendano per (π) e (π') le coordinate di WEIERSTRASS

$$i \frac{x_r + i x_{2r}}{x_{1n+2} + i x_{2n+2}}; \quad -i \frac{x_{1r} - i x_{2r}}{x_{1n+2} - i x_{2n+2}},$$

16. Infine osservando che la trasformazione \bar{R} cambia due reti O , legate da una R , in due altre tali reti, risulta senz'altro il teorema di permutabilità.

§ 8. LE CONGRUENZE k NELLO SPAZIO S_n EUCLIDEO.

17. Assumiamo le quattro reti (P) , (P') , (P_1) , (P'_1) del teorema di permutabilità; esiste in infiniti modi un punto Q' equidistante da P , P' , P_1 . Un tale punto Q' è individuato dalla condizione di appartenere ad uno dei piani principali della rete.

Consideriamo il piano individuato dalla tangente alla linea $u = \text{cost.}$ e dalla normale $\overline{A_k P}$, che indichiamo con π_k ; la sfera che ha per coordinate

$$\frac{w_k \eta_r - \mu x_{kr}}{\sqrt{w_k^2 + \mu^2}} \quad (r = 1, 2, \dots, n, \quad n+1, \quad n+2) \quad (42)$$

$$k = 3, 4, \dots, n)$$

ha il centro sul piano π_k , inoltre le relazioni

$$\sum_{r=1}^{n+2} (w_k \eta_r - \mu x_{kr}) (x_{1r} \pm i x_{2r}) = 0$$

mostrano che la sfera passa pei punti P e P' . Inoltre per le (7) ed (8) le espressioni (42) si possono anche scrivere

$$\frac{w_k \eta'_r - \mu x'_{kr}}{\sqrt{w_k^2 + \mu^2}}$$

donde segue subito

$$\sum_{r=1}^{n+2} (w_k \eta'_r - \mu x'_{kr}) (x'_{1r} \pm i x'_{2r}) = 0$$

e per (π'_1) e (π''_1) le coordinate di WEIERSTRASS

$$-i \frac{x'_{1r} + i x'_{2r}}{x'_{1n+2} + i x'_{2n+2}}; \quad i \frac{x'_{1r} - i x'_{2r}}{x'_{1n+2} - i x'_{2n+2}}$$

essendo x_{kr} ed x'_{kr} gli elementi dei determinanti (1) e (9).

(*) Semprechè $(w_k \eta_{n+1} - \mu x_{kn+1}) + i(w_k \eta_{n+2} - \mu x_{kn+2})$ sia diverso da zero, il che qui diamo per ipotesi; analogamente supponiamo pure $(w_k \xi_{n+1} - \lambda x_{kn+1}) + i(w_k \xi_{n+2} - \lambda x_{kn+2})$ diverso da zero.

e la sfera passa anche per P_1 e P'_1 . Il centro della sfera considerata è dunque il punto Q' richiesto.

Similmente la sfera che ha per coordinate

$$\frac{w_k \xi_r - \lambda x_{kr}}{\sqrt{w_k^2 + \lambda^2}}$$

ha il centro nel piano individuato dalla tangente alla linea $v = \text{cost.}$ e dalla stessa normale $\overline{A_k P}$, e questo centro (che chiamiamo Q'') è pure equidistante dai punti P, P', P_1, P'_1 .

Chiamiamo *congruenza k* la congruenza generata dalla retta $\overline{Q' Q''}$; per $n = 3$ ne esiste una sola, per $n > 3$ ne esiste una per ogni coppia di piani principali della rete e la diremo *coniugata* alla coppia π_k, π'_k dei detti piani principali.

18. Dimostriamo subito che *per ciascuna congruenza k le sviluppabili corrispondono alle curve (u, v) della rete, ed i fuochi sono le intersezioni della retta k coi piani principali π_k e π'_k a cui la congruenza è coniugata.*

Infatti se poniamo per un momento

$$y_r = w_k \eta_r - \mu x_{kr}, \quad z_r = w_k \xi_r - \lambda x_{kr}$$

e teniamo presenti le (2) e le (11) troviamo

$$\frac{\partial y_r}{\partial u} = \frac{a_k}{w_k} (\lambda y_r - \mu z_r) + p z_r,$$

donde

$$\begin{aligned} & \frac{(y_{n+1} + i y_{n+2}) \frac{\partial y_r}{\partial u} - y_r \left(\frac{\partial y_{n+1}}{\partial u} + i \frac{\partial y_{n+2}}{\partial u} \right)}{(y_{n+1} + i y_{n+2}) (z_{n+1} + i z_{n+2})} = \\ & = \left(\frac{a_k}{w_k} \mu - p \right) \left[\frac{y_r}{y_{n+1} + i y_{n+2}} - \frac{z_r}{z_{n+1} + i z_{n+2}} \right]. \end{aligned}$$

Questa relazione prova che, variando solamente u , il punto Q' descrive una curva tangente alla retta k ; similmente per Q'' e la proposizione è stabilita.

19. Riprendiamo le espressioni delle coordinate pentasferiche dei quattro punti P, P', P_1, P'_1 ; cioè

$$\begin{aligned} x_r &= x_{1r} + i x_{2r}; & x'_r &= x_{1r} - i x_{2r} \\ x_r^{(1)} &= x'_{1r} + i x'_{2r}; & x_r^{(2)} &= x'_{1r} - i x'_{2r}. \end{aligned}$$

Tenendo presenti le espressioni (7), otteniamo

$$\begin{aligned} x_r^{(1)} &= \frac{w_1 + i w_2}{m H} \left(\lambda \xi_r + \mu \eta_r + \sum_{s=1}^n w_s x_{sr} \right) - x_r \\ x_r^{(2)} &= \frac{w_1 - i w_2}{m H} \left(\lambda \xi_r + \mu \eta_r + \sum_{s=1}^n w_s x_{sr} \right) - x'_r \end{aligned}$$

donde

$$(w_1 - i w_2) x_r^{(1)} - (w_1 + i w_2) x_r^{(2)} = - (w_1 - i w_2) x_r + (w_1 + i w_2) x'_r.$$

Consideriamo il piano $PP_1P'_1$, che indichiamo con π ; le coordinate cartesiane di un suo punto hanno le espressioni

$$\begin{aligned} - \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} + h \left(\frac{x_r^{(1)}}{x_{n+1}^{(1)} + i x_{n+2}^{(1)}} - \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} \right) - \\ - l \left(\frac{x_r^{(2)}}{x_{n+1}^{(2)} + i x_{n+2}^{(2)}} - \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} \right); \end{aligned} \quad (43)$$

se prendiamo

$$h = \rho (w_1 - i w_2) (x_{n+1}^{(1)} + i x_{n+2}^{(1)})$$

$$l = \rho (w_1 + i w_2) (x_{n+1}^{(2)} + i x_{n+2}^{(2)})$$

si avrà

$$\begin{aligned} h \frac{x_r^{(1)}}{x_{n+1}^{(1)} + i x_{n+2}^{(1)}} - l \frac{x_r^{(2)}}{x_{n+1}^{(2)} + i x_{n+2}^{(2)}} = - \rho \left[(w_1 - i w_2) x_r - (w_1 + i w_2) x'_r \right], \\ - h + l = \rho \left[(w_1 - i w_2) (x_{n+1} + i x_{n+2}) - (w_1 + i w_2) (x'_{n+1} + i x'_{n+2}) \right] \end{aligned}$$

e quindi l'espressione (43) diventa

$$- \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} \left[1 + \rho (w_1 + i w_2) (x'_{n+1} + i x'_{n+2}) \right] + \rho (w_1 + i w_2) x'_r.$$

Per

$$\rho (w_1 + i w_2) = - \frac{1}{x'_{n+1} + i x'_{n+2}},$$

si cade nel punto P' .

20. Nel piano π prendiamo la retta $\overline{PP'}$; essa congiunge i punti corrispondenti di due reti armoniche alla congruenza (\overline{RS}) e quindi descrive una congruenza riferita alle sviluppabili; similmente la retta $\overline{PP_1}$ congiunge i punti corrispondenti di due reti armoniche ad una medesima congruenza [analoga ad (\overline{RS})] e quindi descrive pure una congruenza riferita alle sviluppabili. Dunque il piano π contiene due rette, ciascuna delle quali descrive una congruenza (riferita alle sviluppabili) coniugata alla rete (P) ; il piano π involupa perciò una rete (π) armonica ad entrambe le congruenze.

21. Veniamo ora alla classificazione delle congruenze k .

A tale scopo cerchiamo se due congruenze k , generate dalla stessa quaterna $(P), (P'), (P_1), (P'_1)$, possono essere parallele.

Se poniamo

$$\begin{aligned} t &= w_k (\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}) - (x_{kn+1} + i x_{kn+2}) \\ t' &= w_k (\zeta_{n+1} + i \zeta_{n+2}) - \lambda (x_{kn+1} + i x_{kn+2}) \end{aligned}$$

i parametri direttori della congruenza k hanno le espressioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_k \eta_r - \mu x_{kr}}{t} - \frac{w_k \zeta_r - \lambda x_{kr}}{t'} \\ (r = 1, 2, \dots, n; \quad k = 3, 4, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Introduciamo le quantità

$$\begin{aligned} \zeta_r^{(1)} &= \frac{\zeta_{n+1} + i \zeta_{n+2}}{x_{n+1} + i x_{n+2}} x_r - \zeta_r \\ \eta_r^{(1)} &= \frac{\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}}{x_{n+1} + i x_{n+2}} x_r - \eta_r \\ x_{kr}^{(1)} &= \frac{x_{kn+1} + i x_{kn+2}}{x_{n+1} + i x_{n+2}} x_r - x_{kr} \end{aligned}$$

avremo

$$\begin{aligned} \frac{w_k \eta_r^{(1)} - \mu x_{kr}^{(1)}}{t} &= \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} - \frac{w_k \eta_r - \mu x_{kr}}{t} \\ \frac{w_k \zeta_r^{(1)} - \lambda x_{kr}^{(1)}}{t'} &= \frac{x_r}{x_{n+1} + i x_{n+2}} - \frac{w_k \zeta_r - \lambda x_{kr}}{t'} \end{aligned}$$

e quindi come parametri direttori di k possiamo prendere

$$\frac{w_k \eta_r^{(1)} - \mu x_{kr}^{(1)}}{t} - \frac{w_k \zeta_r^{(1)} - \lambda x_{kr}^{(1)}}{t'}$$

Ciò premesso esprimiamo che due congruenze k sono parallele; si dovrà avere

$$\frac{w_k \eta_r^{(1)} - \mu x_{kr}^{(1)}}{t} - \frac{w_k \xi_r^{(1)} - \lambda x_{kr}^{(1)}}{t'} = H \left[\frac{w_h \eta_r^{(1)} - \mu x_{hr}^{(1)}}{\tau} - \frac{w_h \xi_r^{(1)} - \lambda x_{hr}^{(1)}}{\tau'} \right]$$

($h = k$)

in cui H è un fattore di proporzionalità e τ, τ' sono le quantità analoghe a t e t' .

La precedente si può anche scrivere

$$\left(\frac{w_k}{t} - H \frac{w_h}{\tau} \right) \eta_r^{(1)} - \left(\frac{w_k}{t'} - H \frac{w_h}{\tau'} \right) \xi_r^{(1)} - \left(\frac{\mu}{t} - \frac{\lambda}{t'} \right) x_{kr}^{(1)} + H \left(\frac{\mu}{\tau} - \frac{\lambda}{\tau'} \right) x_{hr}^{(1)} = 0;$$

da cui se moltiplichiamo per $x_{kr}^{(1)}$, avendo riguardo alle relazioni

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n x_{kr}^{(1)} \eta_r^{(1)} &= 0, & \sum_{r=1}^n x_{kr}^{(1)} \xi_r^{(1)} &= 0 \\ \sum_{r=1}^n (x_{kr}^{(1)})^2 &= 1, & \sum_{r=1}^n x_{kr}^{(1)} x_{hr}^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

(che è facile verificare), otteniamo

$$\frac{\mu}{t} - \frac{\lambda}{t'} = 0$$

cioè

$$\frac{\lambda}{\xi_{n+1} + i \xi_{n+2}} = \frac{\mu}{\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}}. \quad (45)$$

Inversamente se questa condizione è soddisfatta, le espressioni (44) a meno di un fattore prendono la forma

$$\frac{\eta_r}{\eta_{n+1} + i \eta_{n+2}} - \frac{\xi_r}{\xi_{n+1} + i \xi_{n+2}}$$

e le congruenze k considerate sono tutte parallele alla congruenza (\overline{RS}) .

In questo caso il sistema delle quattro reti $(P), (P'), (P_1), (P'_1)$ sarà detto un *sistema k di prima specie*; in caso diverso sarà detto di *seconda specie*.

Il risultato precedente dà subito: *una congruenza k relativa ad un sistema k di prima specie è ciclica*.

22. Un'altra importante proprietà dei sistemi k di prima specie otteniamo dalle seguenti considerazioni.

Un facile calcolo, che per brevità non riportiamo, mostra che in tale ipotesi il piano π contiene una *normale* alla rete (P) ; abbiamo dunque in π una *congruenza normale* coniugata a (P) e perciò la rete inviluppata dal piano π è armonica ad una congruenza normale e quindi è ciclica. Dunque *in un sistema k di prima specie il piano π inviluppa una rete ciclica.*

23. In generale è da osservare che la congruenza $(\overline{PP'})$, od anche $(\overline{PP_1})$, essendo coniugata ad una rete O è $2O$ (*), e la rete inviluppata da π essendo armonica ad una congruenza $2O$ è $2C$ (**).

Si verifica col calcolo che l'ipotesi del n.º 22 è *il solo caso* in cui si ha una riduzione di grado per la rete (π) , dunque:

In un sistema k di seconda specie il piano π inviluppa una rete $2C$.

(*) Cioè è la proiezione di una congruenza O dello spazio ad $n + 1$ dimensioni.

(**) Cioè è la proiezione di una rete ciclica dello spazio ad $n + 1$ dimensioni.

Osservazioni sui sistemi isoterma coniugati che sono permanenti nelle deformazioni di una superficie.

(Di ALESSANDRO TERRACINI, a Torino.)

I.

Il DARBOUX ha dimostrato che su qualsiasi deformata di una quadrica il sistema coniugato permanente è isoterma coniugato. In una precedente mia Nota (*) io ho osservato che la proprietà espressa dal teorema di DARBOUX è caratteristica per le quadriche. A questa conclusione io giungevo allora attraverso un artificio, che mi permetteva di ridurre la questione ad un'altra di trattazione più semplice. Al medesimo risultato conduce la seguente dimostrazione *diretta*, la quale ha inoltre il vantaggio di dimostrare nel medesimo tempo il teorema di DARBOUX e il suo inverso.

Sia S_0 una superficie (non sviluppabile) (**) riferita alle asintotiche u, v , avente per seconda forma fondamentale $2m du dv$. E sia

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \quad (1)$$

la seconda forma fondamentale di una superficie S applicabile su S_0 . Scriviamo, per la S , l'equazione di GAUSS sotto la forma

$$D D'' - D'^2 = -m^2 \quad (2)$$

(*) *Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformazioni di una superficie*. Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVIII (2° Semestre 1919).

(**) Una tale limitazione si sottintenderà anche in tutto il seguito del lavoro.

e quelle di CODAZZI

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} D + \left(\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \right) D' + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} D'' = 0, \\ \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} D + \left(\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} \right) D' - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} D'' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove i simboli di CHRISTOFFEL sono, naturalmente, relativi alla prima forma fondamentale di S_0 .

Supponiamo ora che il sistema coniugato permanente nella deformazione considerata, il quale è

$$D du^2 - D'' dv^2 = 0, \quad (4)$$

sia isoterma coniugato sulla S . Per tradurre analiticamente questa proprietà, o quella, equivalente, che il doppio sistema ottenuto annullando (1) è isoterma coniugato rispetto a (4), assumiamo provvisoriamente come nuovi parametri quelli delle linee integrali di (4), siano λ, μ . Se in tal modo (1) si trasforma in $\bar{D} d\lambda^2 + D'' d\mu^2$ la condizione richiesta è

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} \left(\log \frac{\bar{D}''}{\bar{D}} \right) = 0. \quad (5)$$

Ora, se

$$\left. \begin{aligned} \rho (\sqrt{\bar{D}} du + \sqrt{\bar{D}''} dv) &= d\lambda, \\ \sigma (\sqrt{\bar{D}} du - \sqrt{\bar{D}''} dv) &= d\mu, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

si ha $\frac{\bar{D}''}{\bar{D}} = \frac{\rho^2}{\sigma^2} \frac{\sqrt{\bar{D}\bar{D}''} - D'}{\sqrt{\bar{D}\bar{D}''} + D'}$, mentre, per una qualsiasi funzione φ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} = \frac{1}{8\rho\sigma} \left\{ \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial u} \left(\log \frac{D''}{D} \right) \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} + \frac{2}{D} \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{D''} \frac{\partial}{\partial v} \left(\log \frac{D}{D''} \right) \frac{\partial \log \varphi}{\partial v} - \frac{2}{D''} \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial v^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Si trasformi allora la (5) mediante la (7), e si eliminino dalla equazione così trasformata le ρ, σ e le loro derivate, tenendo conto delle relazioni cui

queste funzioni soddisfanno in virtù delle (6). A riduzioni fatte, la (5) diventa

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{D} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 D'}{\partial u^2} \right) - \frac{2}{D''} \left(\frac{\partial^2 D''}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 D'}{\partial v^2} \right) - \frac{2}{D^2} \frac{\partial D}{\partial u} \left(\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} \right) + \\ & + \frac{2}{D''^2} \frac{\partial D''}{\partial v} \left(\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D'}{D} \frac{\partial \log(D D'' - D'^2)}{\partial u} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D'}{D''} \frac{\partial \log(D D'' - D'^2)}{\partial v} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Ora si ricavino, per derivazione, $\frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 D'}{\partial u^2}$ e $\frac{\partial^2 D''}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 D'}{\partial v^2}$ dalle (3), e si sostituiscano i risultati nella (8); in essa, anche, si sostituiscano a $\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u}$, $\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v}$, $D D'' - D'^2$ rispettivamente le espressioni fornite dalle medesime (3) e dalla (2). Nella equazione del prim'ordine in cui così si trasforma la (8), il coefficiente di $\frac{\partial D'}{\partial u}$ risulta

$$\frac{2}{D} \left[\frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial u} - \left(\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \middle| - \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right) \right],$$

che è nullo, in quanto i coefficienti della seconda forma di S_0 sono altresì soluzioni delle (3). Per lo stesso motivo, risulta nullo il coefficiente di $\frac{\partial D'}{\partial v}$, e anche quello di D' . L'equazione precedente si riduce pertanto a

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \middle| \frac{D''}{D} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{D}{D''} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \middle| + \frac{\partial}{\partial v} \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \middle| = 0,$$

o, più semplicemente, tenuto conto che, per essere la S_0 riferita alle asintotiche, i due ultimi termini si distruggono, a

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \middle| \frac{D''}{D} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{D}{D''} \right) = 0. \quad (9)$$

Si supponga ora che il sistema coniugato permanente sia isotermo coniugato su *ogni* deformata della S_0 : allora la (9) dovrà essere conseguenza delle (2), (3). Orbene, si elimini D' dalle (3) mediante la (2): risulta un sistema del prim'ordine in D, D'' , risolubile p. es. rispetto a $\frac{\partial D}{\partial v}$, $\frac{\partial D''}{\partial v}$, il quale, per una data v_0 , ammette un sistema di soluzioni per cui si possono asse-

gnare ad arbitrio $D(u, v_0)$, $D''(u, v_0)$. Perciò, sostituendo quei valori di $\frac{\partial D}{\partial v}$, $\frac{\partial D''}{\partial v}$ nella (9), si ottiene una relazione fra D , D'' , $\frac{\partial D}{\partial u}$, $\frac{\partial D''}{\partial u}$ che dovrà essere soddisfatta identicamente. Scrivendo in particolare che risulta nullo il coefficiente di $\frac{\partial D}{\partial u}$ si ha

$$\frac{D''}{D^2} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{D'} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

E, dovendo questa essere una identità rispetto a D , D' [D' si intende sempre ricavato dalla (2)], segue

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0,$$

cioè la S_0 è necessariamente una quadrica. Viceversa, in tal caso, la semplice ispezione della (9) mostra che essa è soddisfatta identicamente.

II.

Una questione analoga a quella ora trattata è la seguente: esiste una superficie S_0 tale che, per ogni sua deformazione, il sistema coniugato permanente sia isoterma coniugato su S_0 ? Essa però va risolta negativamente (*). Attualmente dovrebbe infatti essere, per ogni soluzione delle (2), (3)

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\log \frac{D}{D''} \right) = 0. \quad (10)$$

In questa equazione si possono sostituire alle derivate seconde $\frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 D''}{\partial u \partial v}$ i loro valori ricavati dalle equazioni di CODAZZI risolte, come sopra si è detto, rispetto a $\frac{\partial D}{\partial v}$, $\frac{\partial D''}{\partial v}$, e derivate rispetto ad u ; la (10) si deve allora ridurre a una relazione identica fra D , D'' e le loro derivate prime e seconde rispetto ad u ; e poichè, in essa, il coefficiente di $\frac{\partial^2 D}{\partial u^2}$ è $\frac{D''}{DD'}$, si può subito escludere che si presenti quella particolarità.

(*) Il Prof. BIANCHI mi avverte che questa osservazione era occorsa anche a lui.

III.

Vogliamo ancora aggiungere alcune osservazioni sulle coppie di superficie S_0 e S , applicabili in modo che il sistema coniugato permanente nella deformazione sia, su entrambe le superficie, isoterma coniugato. Tra gli esempi, noti, di coppie di superficie in tale relazione, citiamo le quadriche e le loro deformate di PETERSON (*); le coppie di superficie d'area minima applicabili, le coppie generiche di superficie di rotazione applicabili. In tutti questi casi, come è ben noto, avviene che ciascuna delle due superficie è suscettibile di una serie continua ∞^1 di deformazioni, nelle quali resta fisso su di essa il sistema coniugato permanente. È facile stabilire che un risultato analogo vale in generale, cioè che *se due superficie (non rigate) sono applicabili in modo che il sistema coniugato permanente sia, su entrambe, isoterma coniugato, ciascuna delle due superficie è suscettibile di una serie continua ∞^1 di deformazioni con conservazione di quel sistema coniugato.*

Siano infatti S_0, S due superficie applicabili, il sistema coniugato permanente (u, v) essendo su entrambe isoterma coniugato. E siano, in coordinate (u, v) , rispettivamente

$$D(d u^2 + d v^2) \text{ e } L d u^2 + L'' d v^2,$$

con

$$L = D \sqrt{\frac{V(v)}{U(u)}}, \quad L'' = D \sqrt{\frac{U(u)}{V(v)}}, \tag{11}$$

le loro seconde forme fondamentali. Le formole di CODAZZI, per la S_0 e per la S , sono rispettivamente

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log D}{\partial v} &= \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial \log D}{\partial u} &= \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= \begin{vmatrix} 12 \\ 1 \end{vmatrix} L - \begin{vmatrix} 11 \\ 2 \end{vmatrix} L'', \\ \frac{\partial L''}{\partial u} &= \begin{vmatrix} 12 \\ 2 \end{vmatrix} L'' - \begin{vmatrix} 22 \\ 1 \end{vmatrix} L, \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

ossia, introducendo i simboli di CHRISTOFFEL relativi all'elemento lineare

(*) Cfr. p. es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III (Pisa 1909), § 81.

sferico di S_0 , tenuto conto delle (11), e posto $U' = \frac{dU}{du}$, ecc.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log D}{\partial v} &= - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \\ \frac{\partial \log D}{\partial u} &= - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \right\} (12') \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \log D}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{V'}{V} &= - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{U}{V}, \\ \frac{\partial \log D}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{U'}{U} &= - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{V}{U}. \end{aligned} \right\} (13')$$

Sottraendo le (12') dalle (13') risulta

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \log (V - U) \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \log (V - U) \end{aligned} \right\} (14)$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}, \quad (15)$$

cosicchè il sistema (u, v) è anche coniugato permanente per una deformazione infinitesima di S_0 e quindi (*) è tale per una serie continua; c. d. d.

Viceversa, se una superficie S_0 ammette una serie ∞^1 di deformazioni con conservazione di uno stesso sistema coniugato, che sia isoterma coniugato su S_0 , questo sistema sarà isoterma coniugato anche su ciascuna delle deformate. Invero, soddisfatta tale ipotesi, e mantenute per la S_0 le notazioni ora adoperate, esistono (**) due funzioni $U(u)$, $V(v)$, definite a meno di una stessa costante additiva, tali che valgano le (14), dalle quali, combinate colle (12), e definite L e L'' mediante le (11), si risale alle (13).

Le superficie di cui ci occupiamo devono ricercarsi, per quanto precede, tra le associate nelle deformazioni infinitesime a quelle superficie Σ , la cui curvatura totale K si esprime, per i parametri u, v delle asintotiche, con una relazione della forma $K = \frac{-1}{(\varphi(u) + \psi(v))^2}$. Anzi, quando si tenga presente la condizione di integrabilità delle (12), si ha che le superficie che sono suscettibili di una deformazione del tipo considerato si ottengono come (convenienti) superficie associate in deformazioni infinitesime a quelle particolari

(*) V. p. es. BIANCHI, op. cit., vol. II (Pisa 1903), § 239.

(**) Cfr., anche per il seguito, BIANCHI, op. cit., vol. II, § 252.

superficie Σ , di cui ora si è detto, che, quando si scelgano convenientemente i parametri u, v delle asintotiche, ammettono ulteriormente la proprietà di verificare la

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' \quad (16)$$

Per ogni superficie Σ che soddisfi la (16), le (12) definiscono, a meno di un'omotetia, una superficie S_0 . Qualora non si voglia pregiudicare la scelta dei parametri asintotici u, v la (16) andrà ovviamente sostituita dalla

$$A(u) \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' + \frac{1}{2} \frac{dA}{du} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' = B(v) \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' + \frac{1}{2} \frac{dB}{dv} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}', \quad (17)$$

A e B essendo funzioni qualsiasi dei loro argomenti.

Come esempi di superficie Σ che si trovino nelle condizioni ora esposte, si possono indicare, oltre quelle di cui sarà detto più avanti, le superficie pseudosferiche di rotazione, per le quali, come è ben noto, si possono scegliere i parametri u, v delle asintotiche in modo che l'angolo ω di queste linee sia funzione di $u + v$, cosicchè la (16) risulta allora verificata; le elicoidi pseudosferiche, ecc.

In particolare una superficie Σ può essere tale che su *tutte* le sue associate nelle deformazioni infinitesime il sistema coniugato corrispondente alle asintotiche di Σ sia isoterma coniugato, e che perciò tutte quelle associate siano superficie S_0 suscettibili di deformazioni del tipo considerato. Ciò avviene quando dal sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial v} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' D - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'' \\ \frac{\partial D''}{\partial u} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'' - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' D \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(dove i simboli di CHRISTOFFEL sono sempre relativi all'elemento lineare sferico della Σ riferita alle asintotiche), cui debbono soddisfare i coefficienti della seconda forma fondamentale di una superficie S_0 associata a Σ in una deformazione infinitesima, segua

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\log \frac{D}{D'} \right) = 0,$$

cioè, tenuto conto delle (18),

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\begin{array}{c} 11 \\ 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} D'' \\ D \end{array} \right\} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\begin{array}{c} 22 \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} D' \\ D' \end{array} \right\} \right). \quad (19)$$

Si trova subito come condizione necessaria e sufficiente $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' = 0$, cioè che Σ sia una quadrica. E poichè, tra le quadriche, sono superficie Σ solo la sfera e il paraboloido equilatero, si conclude che solo per queste superficie avviene che *tutte* le associate nelle deformazioni infinitesime sono deformabili con conservazione di un sistema *isoterma coniugato*. Le superficie S_0 corrispondenti sono allora rispettivamente le superficie d'area minima, e le superficie di traslazione con curve generatrici in piani perpendicolari.

Osserviamo infine che anche tutti i conoidi retti sono superficie Σ soddisfacenti all'ulteriore condizione espressa nell'ultimo enunciato in corsivo: basta, per convincersene, partire dalla nota rappresentazione parametrica (*)

$$x = -u \gamma(v), \quad y = uv, \quad z = \int (v \gamma'(v) - \gamma(v)) dv,$$

e osservare che, mentre $K = \frac{-1}{(u^2 + v^2 + \gamma^2(v))^2}$, si ha

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' = -u \frac{\gamma''(v)}{v \gamma'(v) - \gamma(v)},$$

cosicchè si può certo soddisfare alla (17), rimanendo ancora arbitraria la funzione $A(u)$. Anzi, per ciò, tra le superficie associate in deformazioni infinitesime a un dato conoide retto, le superficie S_0 su cui è isoterma coniugato il sistema corrispondente alle asintotiche del conoide dipendono da una funzione arbitraria. Per trovare tali superficie S_0 si osservi che attualmente la (19) si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\begin{array}{c} 22 \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} D' \\ D' \end{array} \right\} \right) = 0,$$

cosicchè, rispetto all'elemento lineare di S_0 , $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$, $\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = m(u)$; cioè

(*) Cfr., p. es., BIANCHI, op. cit., vol. I (Pisa 1902), § 76.

le coordinate cartesiane di un punto di S_0 sono soluzioni di un'equazione

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = m(u) \frac{\partial \Theta}{\partial v}.$$

Quindi, intanto, con un cambiamento della variabile u (escluso il caso, già considerato, che il conoide sia un paraboloide) si potranno fare per quelle coordinate le posizioni

$$x = u f_1(v) + g_1(u) \quad y = u f_2(v) + g_2(u) \quad z = u f_3(v) + g_3(u).$$

Di più, immediate considerazioni geometriche mostrano che sulla S_0 le linee (dove varia) v sono in piani paralleli, e le linee u in piani perpendicolari ai precedenti; cosicchè in definitiva si potrà porre, scegliendo convenientemente il sistema cartesiano di riferimento

$$x = u r(v), \quad y = u s(v), \quad z = t(u). \quad (20)$$

E poichè il ragionamento è invertibile, le superficie S_0 richieste sono date dalle (20) con r, s, t funzioni arbitrarie dei loro argomenti. Si ottengono così quelle superficie (generate da un profilo piano che ruota intorno a un asse r deformandosi mediante un'affinità ortogonale variabile di asse r , o anche ottenute partendo da una serie ∞^1 di curve situate in uno stesso piano, e omotetiche rispetto a un centro fisso, dando a ogni curva una traslazione normale al piano, di ampiezza variante secondo una legge arbitraria) la cui deformabilità in ∞^1 superficie della stessa specie con conservazione del sistema coniugato (u, v) era già stata dimostrata dal PETERSON. L'osservazione che il sistema (u, v) è isotermo coniugato è stata fatta, per la prima volta, in una recente Memoria del Prof. BIANCHI (*).

Torino, gennaio 1921.

(*) *Le congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento e le superficie di Peterson*. Memorie della Società Italiana delle Scienze, serie III, t. XIX (1916). Sulle superficie di Peterson cfr. anche DARBOUX: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, 2^e éd. (Paris, 1914), p. 181 e LAGALLY: *Ueber gewisse Verbiegungen der achsenaffinen Flächen, insbesondere der Flächen 2. Ordnung*, Sitzungsber. der Bayer. Akad. der Wissenschaften, 1919.

Sulla esistenza di polarità ordinarie che mutano l'una nell'altra due quadriche non degeneri.

(Nota di ALESSANDRO TERRACINI a Torino.)

È ben noto che due quadriche non degeneri, F e G , di uno spazio a n dimensioni, S_n , si possono riguardare come corrispondenti in una polarità ordinaria (anzi, in più polarità ordinarie), se i primi membri, f e g , delle loro equazioni si possono esprimere simultaneamente come combinazioni lineari dei quadrati di $n + 1$ forme lineari (*). Scopo della presente Nota è dimostrare che il risultato continua a sussistere, anche quando si tolga questa ipotesi restrittiva. La minore facilità della trattazione, rispetto al caso già noto, dipende da ciò, che, in esso, la quadrica fondamentale H della polarità di cui si tratta di stabilire l'esistenza può essere ricercata fra quelle, tali che i primi membri h delle loro equazioni siano combinazioni lineari degli stessi $n + 1$ quadrati mediante cui si esprimono f e g . Negli altri casi invece, se si riducono simultaneamente f e g alla forma canonica di WEIERSTRASS, che supplisce quella testè indicata, avviene che (in generale) la forma h non si può scrivere come combinazione lineare delle forme quadratiche mediante cui, in tal modo, si esprimono linearmente f e g ; e occorre invece,

(*) Cfr. SIACCI, *Intorno ad una trasformazione simultanea di due forme quadratiche ed alla conica rispetto a cui due coniche date sono polari reciproche*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. VII (1872), p. 758. V. anche una critica al risultato enunciato con troppa generalità dal Siacci in SEGRE, *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche*, Giornale di Matematiche, t. XXII (1884), p. 29. Cfr. anche DEL PEZZO, *Sulle quadriche ad $n - 1$ dimensioni polari reciproche di sè stesse rispetto ad un'altra*, Rend. della R. Acc. di Napoli, t. XXIV (1885), p. 186.

a tale scopo, aggregare ad esse delle nuove forme, come ora si vedrà in modo più preciso.

Se $(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ ($i = 1, 2, \dots, \rho$) sono i divisori elementari del discriminante $D(\lambda)$ della forma quadratica $f - \lambda g$, le equazioni di F e G , rispetto a un opportuno sistema di coordinate proiettive omogenee $\chi_{11}, \dots, \chi_{1e_1}, \chi_{21}, \dots, \chi_{2e_2}, \dots, \chi_{\rho 1}, \dots, \chi_{\rho e_\rho}$, si possono supporre ridotte rispettivamente alle (*)

$$\sum_{i=1}^{\rho} \left[\lambda_i (\chi_i \chi_i)_{e_i} + (\chi_i \chi_i)_{e_i-1} \right] = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{\rho} (\chi_i \chi_i)_{e_i} = 0, \quad (2)$$

dove si pone $(\chi_i \chi_i)_0 = 0$, e

$$(\chi_i \chi_i)_\gamma = \sum_{\mu, \nu} \chi_{i\mu} \chi_{i\nu}, \quad (\gamma = 1, 2, \dots, e_i), \quad (3)$$

l'ultima sommatoria essendo estesa a $\mu = 1, 2, \dots, \gamma$, e $\nu = \gamma + 1 - \mu$. Per semplicità di scrittura, indicheremo anche con $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_{m+1}$ le coordinate già designate con χ_{11} , ecc. (con $m = e_1$), e scriveremo, con notazione incompleta, le (1), (2) rispettivamente

$$\sum \left[\lambda_1 (x_1 x_m + x_2 x_{m-1} + \dots + x_m x_1) + (x_1 x_{m-1} + \dots + x_{m-1} x_1) \right] = 0, \quad (1')$$

$$\sum (x_1 x_m + x_2 x_{m-1} + \dots + x_m x_1) = 0, \quad (2')$$

(dove, nel caso di $m = 1$, al posto della seconda parentesi tonda della (1') va posto zero). Ricercheremo una quadrica H (di equazione $h = 0$), tale che la polarità per cui essa è fondamentale muti la F nella G , fra quelle per cui h è combinazione lineare delle $(\chi_i \chi_i)_{e_i}, (\chi_i \chi_i)_{e_i-1}, \dots, (\chi_i \chi_i)_1$. Consideriamo, a tal fine, una quadrica

$$\sum \left[t_{1m} (x_1 x_m + \dots + x_m x_1) + t_{1, m-1} (x_1 x_{m-1} + \dots + x_{m-1} x_1) + \dots + t_{11} x_1^2 \right] = 0,$$

(*) WEIERSTRASS, *Mathematische Werke*, Band II (Berlin, 1895), p. 19.

dove le t sono, per ora, coefficienti indeterminati. Essa definisce la polarità

$$\left. \begin{aligned}
 \theta u_1 &= t_{11} x_1 + \dots + t_{1,m-1} x_{m-1} + t_{1m} x_m \\
 \theta u_2 &= t_{12} x_1 + \dots + t_{1m} x_{m-1} \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \theta u_m &= t_{1m} x_1 \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

dove θ è un fattore di proporzionalità e le u sono coordinate proiettive omogenee di iperpiano. Facciamo la sostituzione (4) nella equazione involuppo di G (la quale si deduce dalla (2') scrivendo, in luogo di ciascuna x , la u col medesimo indice), ottenendo come equazione trasformata

$$\Sigma \left[(t_{11} x_1 + \dots + t_{1m} x_m) t_{1m} x_1 + (t_{12} x_1 + \dots + t_{1m} x_{m-1}) (t_{1,m-1} x_1 + t_{1m} x_2) + \dots + t_{1m} x_1 (t_{11} x_1 + \dots + t_{1m} x_m) \right] = 0. \tag{5}$$

Vogliamo ora dimostrare che si possono determinare le t in modo che la (5) coincida colla (1). Per ciò occorre e basta che sia, se $m = 1$, $t_{11}^2 = \lambda_1$, e, se $m > 1$,

$$t_{1m}^2 = \lambda_1, \quad 2 t_{1m} t_{1,m-1} = 1, \tag{6}$$

$$\sum_{r,s} t_{1r} t_{1s} = 0 \quad (r = \alpha - 1, \alpha, \dots, m; \quad r + s = \alpha + m - 1; \quad \text{con } \alpha = 2, 3, \dots, m - 1), \tag{7}$$

colle analoghe condizioni relative agli altri gruppi di termini della (5) che provengono dagli ulteriori divisori elementari di $D(\lambda)$. Si tratta di provare che tutte queste relazioni costituiscono un sistema compatibile nelle incognite t . Ora le (6) porgono t_{1m} (in due modi diversi) e $t_{1,m-1}$ (entrambi diversi da zero); poi la (7) scritta per $\alpha = m - 1$ (cioè $2 t_{1,m-2} t_{1m} + t_{1,m-1}^2 = 0$) contiene, fra le altre t , la sola $t_{1,m-2}$, e porge un valore per questa incognita (e uno solo, quando si sia fissata una determinazione per t_{1m}); poi ancora

la (7), scritta per $\alpha = m - 2$, porge analogamente $t_{1, m-3}$; e così, per ricorrenza, si trovano successivamente i valori di tutte le t , c. d. d.

Si osservi di più che, in base alla precedente dimostrazione, risulta l'esistenza di 2^{p-1} polarità ordinarie che risolvono il problema, p essendo il numero dei divisori elementari di $D(\lambda)$ (*).

Torino, aprile 1921.

(*) Non escludiamo con questo che vi siano altre soluzioni del problema, le quali, del resto, si possono già presentare anche nel caso che f e g siano combinazioni lineari di $n + 1$ quadrati (si pensi p. es. alle infinite polarità che mutano l'una nell'altra due coniche bitangenti).

Criteri per l'esistenza della soluzione in problemi di Calcolo delle variazioni.

(Di LEONIDA TONELLI, a Parma.)

INTRODUZIONE.

Nella presente Memoria mi propongo di dare dei criteri per l'esistenza del minimo per l'integrale curvilineo

$$\int_C F(x, y, x', y') ds.$$

Un criterio generale, già conosciuto (*), è quello dato dalle due disuguaglianze $F > 0$, $F_1 \geq 0$ — supposte verificate in tutto il campo (x, y) che si considera e per ogni coppia (x', y') tale che sia $x'^2 + y'^2 = 1$ — dove F_1 è il ben noto invariante di WEIERSTRASS

$$F_1 \equiv \frac{F'_{x'x'}}{y'^2} \equiv -\frac{F'_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{F'_{y'y'}}{x'^2}.$$

Esistono però problemi importanti in cui la funzione F , mentre soddisfa completamente alla seconda delle disuguaglianze soprascritte, non verifica altrettanto bene la prima, perchè, pur non cambiando mai segno, può in alcuni punti, isolati o no, diventare nulla. Citerò, a titolo di esempio, il problema della superficie di area minima generata dalla rotazione, attorno ad un asse, di una curva piana congiungente due punti dati, problema che si traduce analiticamente nella ricerca del minimo dell'integrale

$$\int_C y \sqrt{x'^2 + y'^2} ds,$$

(*) L. TONELLI, *Sul caso regolare nel Calcolo delle variazioni* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXV (1° sem. 1913)].

la curva C essendo considerata nel campo (x, y) definito dalla disuguaglianza $y \geq 0$. E citerò anche l'altro problema della ricerca della curva piana, congiungente due punti fissi, ed avente il minimo momento d'inerzia rispetto ad un asse dato, perpendicolare al suo piano, problema che si traduce in quello della ricerca del minimo dell'integrale

$$\int_C (x^2 + y^2) \sqrt{x'^2 + y'^2} ds.$$

In una Nota « Sulla esistenza della soluzione in problemi di Calcolo delle Variazioni » (*), diedi già un teorema d'esistenza per una notevole classe di problemi di questo tipo, e precisamente per quelli in cui la funzione F ha la forma semplice

$$F(x, y, x', y') \equiv f(y) \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

con $f(y)$ sempre maggiore o uguale a zero e non decrescente. Nelle pagine che seguono, riprendendo la questione nella forma più generale che mi sarà possibile, esporrò nuovamente il criterio d'esistenza per il caso della F sempre maggiore di zero, e ne aggiungerò diversi altri che riguardano i casi più importanti relativi all'annullamento della F , e che comprendono anche quello di cui si è fatto cenno or ora.

§ I.

PRELIMINARI.

1. *Il campo A e le curve C .* Sia A un campo — insieme di punti — del piano (x, y) tale che i suoi elementi appartenenti ad un qualsiasi cerchio dello stesso piano costituiscano sempre un insieme *chiuso*.

Nel seguito considereremo sempre e soltanto curve continue e rettificabili, appartenenti al campo A , e le diremo *curve C* . Ciascuna di esse sarà, pertanto, definita da un sistema di equazioni

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1), \quad (1)$$

(*) *Rend. Accad. dei Lincei*, 1913 (1° semestre), pp. 860-866.

con $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ funzioni (reali e ad un valore) continue e a variazione limitata (JORDAN) su tutto l'intervallo (t_0, t_1) , e i suoi punti apparterranno tutti al campo A .

Ogni curva C ha un *verso* ed uno solo, quello stesso definito dal sistema precedente; in guisa che la curva

$$x = \varphi(-t), \quad y = \psi(-t), \quad (-t_1 \leq t \leq -t_0)$$

è *distinta* dalla (1). La curva (1) sarà invece considerata come *coincidente* con quella definita dal sistema

$$x = \varphi(t(\tau)), \quad y = \psi(t(\tau)), \quad (\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1),$$

se la funzione $t(\tau)$ è continua e non decrescente nell'intervallo (τ_0, τ_1) , e soddisfacente alle uguaglianze $t(\tau_0) = t_0$, $t(\tau_1) = t_1$.

2. *Le curve limiti.* Rammentiamo che, se Γ_0 è una curva continua del piano (x, y) e ρ è un numero positivo, un'altra qualsiasi curva continua Γ dello stesso piano si dice che appartiene ordinatamente all'intorno (ρ) della prima, quando è possibile di porre fra i punti delle due curve una corrispondenza biunivoca, ordinata e continua, tale che la distanza fra due punti corrispondenti qualunque risulti sempre minore di ρ . Si dice poi che Γ_0 è una *curva limite* di una classe o insieme $\left\{ \Gamma \right\}$ di curve continue Γ se, comunque si scelga ρ , esiste sempre in $\left\{ \Gamma \right\}$ almeno una curva appartenente ordinatamente all'intorno (ρ) di Γ_0 e distinta da questa curva. Sulle curve limiti si ha il seguente teorema, dovuto a HILBERT:

« Se $\left\{ \Gamma \right\}$ è un insieme di infinite curve continue e rettificabili, tutte di lunghezza inferiore ad un numero fisso e tutte contenute in un campo limitato, tale insieme ammette almeno una curva limite ».

Essendo W_n un insieme qualsiasi di curve continue Γ , si dice che la curva continua Γ_0 è una *curva limite* della successione $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ se, comunque si scelga ρ , esistono sempre infiniti valori di n e per ciascuno di essi almeno una curva Γ_n la quale appartenga ordinatamente all'intorno (ρ) della Γ_0 . Dal teorema di HILBERT segue allora la proposizione, di cui faremo uso più volte nel seguito: « Se W_n è un insieme di curve continue e rettificabili, tutte di lunghezza inferiore ad un numero fisso e tutte contenute

in un campo limitato — numero e campo indipendenti da n — la successione $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ ammette almeno una curva limite ».

Ed è possibile di fissare un procedimento che permetta di far corrispondere, alla successione $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ ora considerata, una particolare sua curva limite.

Si dice, infine, che la successione $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$, di insiemi di curve Γ , converge uniformemente alla curva Γ_0 , se, comunque si scelga ρ , esiste poi sempre un indice \bar{n} tale che, per ogni $n > \bar{n}$, tutte le curve Γ_n di W_n appartengono ordiunatamente all'intorno (ρ) della Γ_0 . E si ha la proposizione: « Se $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ è una successione di insiemi W_n di curve Γ , avente una curva limite Γ_0 , è sempre possibile costruire con un determinato procedimento un'altra successione $W_1, W_2, \dots, W_m, \dots$, con W_m insiemi di curve Γ appartenenti tutte ad uno stesso W_n di indice $n \cong m$, la quale converga uniformemente alla curva Γ_0 ».

3. *Le classi complete di curve.* Diremo che un insieme di curve C (n.º 1) è una *classe completa* quando ogni sua curva limite, che sia rettificabile, appartiene essa pure all'insieme.

Costituiscono, ad esempio, una classe completa tutte le curve C che hanno lunghezza non superiore ad un numero fisso; ed anche tutte le curve C che congiungono due punti dati o tutte quelle che hanno gli estremi su due date curve.

4. *La funzione $F(x, y, x', y')$.* Sia $F(x, y, x', y')$ una funzione:

a) definita e continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini rispetto alle x' e y' , per tutti i punti (x, y) del campo A e per tutte le coppie (x', y') di numeri non ambedue nulli;

b) positivamente omogenea, di grado 1, rispetto alle x' e y' , vale a dire soddisfacente alla uguaglianza

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y'),$$

valida per ogni $k > 0$.

Diremo che la coppia (x', y') è *normalizzata* se è $x'^2 + y'^2 = 1$; e chiameremo *zeri* della F quei punti (x, \bar{y}) di A in cui è $F(x, \bar{y}, x', y') = 0$, per una o più o anche tutte le coppie (x', y') normalizzate.

5. *L'integrale I_c .* Considerata una curva C (n.º 1) e preso come parametro la lunghezza s dell'arco che dal primo estremo della curva va ad un punto generico P , le equazioni della curva diverranno

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

dove L rappresenta la lunghezza totale della C . È ben noto che, quasi dappertutto su $(0, L)$, le derivate $x'(s)$, $y'(s)$ esistono finite e costituiscono una coppia normalizzata; esiste dunque l'integrale (di LEBESGUE) della funzione $F(x(s), y(s), x'(s), y'(s))$ sull'intervallo $(0, L)$, integrale che indicheremo con I_C o con

$$\int_C F ds.$$

Fissata che sia la forma della funzione F , I_C dipende unicamente dalla curva C ed ha un valore (finito) determinato per ogni curva della specie indicata: esso è, perciò, una *funzione della curva* C .

Se la curva C è chiusa, le lunghezze degli archi si possono contare a partire da un'origine arbitrariamente scelta sulla curva stessa, senza alterare il valore di I_C .

Diremo che l'integrale I_C è:

regolare-positivo (*negativo*) se l'invariante di WEIERSTRASS F_1 (v. Introduzione) è sempre maggiore (minore) di zero per tutti i punti (x, y) del campo A e per tutte le coppie (x', y') normalizzate;

quasi-regolare-positivo (*negativo*), se per gli stessi x, y, x', y' , è sempre $F_1 \geq 0$ ($F_1 \leq 0$);

definito-positivo, se per gli stessi x, y, x', y' , è sempre $F > 0$;

semidefinito-positivo, se, per gli stessi x, y, x', y' , è sempre $F \geq 0$;

semidefinito-positivo normale, se è *semidefinito-positivo* e in nessun punto del campo A è $F(x, y, x', y') = 0$ per tutte le coppie (x', y') normalizzate;

semidefinito-positivo singolare, se è *semidefinito-positivo* ed esiste almeno uno zero della F in cui è $F(x, y, x', y') = 0$ per tutte le coppie (x', y') normalizzate.

Si constata facilmente (*) che se I_C è *semidefinito-positivo* e *regolare* o *quasi regolare*, è anche sicuramente *regolare-positivo* o *quasi-regolare-positivo*.

6. *La semicontinuità*. Diremo che l'integrale I_C è una *funzione semicontinua inferiormente* sulla curva C_0 (n.º 1), se, preso un numero $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, è sempre possibile di determinarne un altro ρ tale che la disuguaglianza

$$I_C > I_{C_0} - \varepsilon \tag{1}$$

(*) Cfr. L. TONELLI, *Sui massimi e minimi assoluti del Calcolo delle variazioni* [Rend. del Circ. Matematico di Palermo, t. XXXII (2º sem. 1911)].

risulti verificata per tutte le curve C appartenenti ordinatamente all'intorno (ρ) della C_0 . Sulla semicontinuità si ha il seguente teorema (*):

«Un integrale I_C quasi-regolare-semidefinito-positivo è una funzione semi-continua inferiormente su qualsiasi curva C ».

7. *Le curve minimanti.* Data una classe K di curve C , una di queste curve, C_0 , si dirà *minimante* I_C in K , o semplicemente *minimante* I_C , se la disuguaglianza

$$I_{C_0} \leq I_C$$

risulta verificata per qualsiasi curva C della classe. Il valore di I_{C_0} è il *minimo* di I_C in K .

§ II.

GLI INTEGRALI QUASI-REGOLARI DEFINITI.

8. **TEOREMA.** *Se I_C è un integrale quasi-regolare definito-positivo, in ogni classe completa di curve C , le quali siano tutte contenute in un campo A , limitato, esiste almeno una curva minimante I_C .*

Sia K una delle classi considerate nell'enunciato. Dall'ipotesi che l'integrale I_C sia definito-positivo, segue che esiste un minimo $m > 0$, per la funzione $F(x, y, x', y')$, quando si considerino tutti i punti (x, y) del campo A e soltanto le coppie (x', y') normalizzate:

$$F(x, y, x', y') \geq m > 0.$$

Pertanto, se C è una qualsiasi curva di K e L indica la sua lunghezza, è

$$I_C = \int_C F ds \geq m \cdot L, \quad (1)$$

perchè è quasi dappertutto, sulla C ,

$$x'^2(s) + y'^2(s) = 1.$$

Ciò premesso, indichiamo con i il limite inferiore di I_C nella classe K ,

(* Cfr. L. TONELLI, *La semicontinuità nel Calcolo delle variazioni* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XLIV (1920), nn. 15 e 24].

limite inferiore che, per la (1), risulta non negativo; esso poi è anche finito, perchè, su qualunque curva di K , I_c non supera la lunghezza della curva moltiplicata per il massimo della F nei punti della curva stessa e per le coppie (x', y') normalizzate. Si tratta di dimostrare l'esistenza di almeno una curva di K che dia ad I_c il valore i .

Indichiamo, per ogni intero positivo n , con W_n l'insieme di tutte le curve di K che soddisfano alla disuguaglianza

$$I_c \leq i + \frac{1}{n}.$$

All'insieme W_n appartiene almeno una curva, perchè, in caso contrario, il limite inferiore di I_c su K sarebbe maggiore di $i + \frac{1}{n}$ e quindi distinto da i . Indicando con C_n una qualsiasi curva di W_n , abbiamo

$$I_{C_n} \leq i + \frac{1}{n}, \quad (2)$$

e per la (1)

$$L_n \leq \frac{1}{m} \left(i + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{m} (i + 2).$$

La successione

$$W_1, W_2, \dots, W_n, \dots \quad (3)$$

risulta così composta di insiemi di curve C , tutte contenute in un campo limitato (il campo A) e tutte di lunghezza inferiore ad un numero fisso, ed ammette perciò (n.º 2) almeno una curva limite. Sia Γ_0 una di queste curve limiti: ad ogni suo intorno arbitrariamente piccolo appartengono ordinatamente infinite curve C_n tutte di lunghezza minore di $\frac{1}{m} (i + 2)$, onde anch'essa risulta rettificabile e di lunghezza $\leq \frac{1}{m} (i + 2)$. La Γ_0 è dunque una curva C , e possiamo indicarla con C_0 . Inoltre, questa curva è curva limite della classe K , perchè a questa classe appartengono tutte le curve C_n ; e siccome la K è una classe completa, la C_0 appartiene essa pure alla classe.

Rammentiamo ora che il nostro integrale I_c è quasi-regolare definito-positivo, il che porta (n.º 6) che sia una funzione semicontinua inferiormente su ogni curva C . Se dunque prendiamo ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, possiamo determinarne un altro $\rho > 0$ in modo che ogni C la quale appartenga

ordinatamente all'intorno (ρ) della C_0 soddisfi alla disuguaglianza

$$I_{C_0} < I_C + \varepsilon.$$

Ma, per essere la C_0 una curva limite della successione (3), esistono infiniti valori di n e per ciascuno di essi almeno una C_n la quale appartenga ordinatamente all'intorno (ρ) della C_0 . Dalla disuguaglianza precedente e dalla (2) si deduce così

$$I_{C_0} \leq i + \varepsilon.$$

Essendo ε arbitrario, si ha anche

$$I_{C_0} \leq i,$$

e siccome C_0 è una curva di K ,

$$I_{C_0} = i.$$

La C_0 è dunque una curva minimante I_C nella classe K .

9. COROLLARIO. Dalla proposizione dimostrata al n.º precedente scende: *Se I_C è un integrale quasi-regolare definito-positivo e il campo A è limitato, esiste almeno una curva minimante I_C :*

- fra tutte le curve C che congiungono due punti dati;
- oppure, fra tutte quelle i cui estremi appartengono a due date curve continue (o più generalmente a due dati insiemi chiusi di punti);
- oppure, fra tutte le curve C chiuse che contengono o circondano i punti di un dato insieme chiuso di punti.

ESEMPIO. Dato un campo A limitato e considerati in esso due insiemi chiusi di punti, α e β , fra tutte le curve continue e rettificabili di A che congiungono un punto di α con un punto di β (ammesso che di tali curve ne esista almeno una), ve n'è almeno una minimante l'integrale

$$\int_C (x^2 + y^2 + 1) \sqrt{x'^2 + y'^2} ds.$$

Qui infatti è, per ogni coppia (x', y') normalizzata,

$$F \equiv (x^2 + y^2 + 1) \sqrt{x'^2 + y'^2} \geq 1$$

$$F_1 \equiv \frac{x^2 + y^2 + 1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 1,$$

e l'integrale è regolare definito-positivo.

§ III.

GLI INTEGRALI QUASI-REGOLARI SEMIDEFINITI NORMALI.

a) GLI ZERI DELLA F NON RIEMPIONO ALCUNA AREA.

10. *Osservazione generale.* Dal ragionamento fatto al n.º 8 risulta che, se I_c è un integrale quasi-regolare semidefinito positivo e il campo A è limitato, e K è una classe completa di curve C , il limite inferiore i di I_c , in K , è finito e maggiore o uguale a zero. Se, di più, esiste una funzione $H(z)$, finita e continua per ogni $z \geq 0$, ed è, per ogni curva C di K ,

$$L \leq H(I_c), \quad (1)$$

L essendo la lunghezza della C , allora esiste sicuramente in K almeno una curva minimante I_c .

In particolare si ha che, se I_c è un integrale quasi-regolare semidefinito positivo e il campo A è limitato, e se K è una classe completa di curve C , tutte di lunghezza inferiore ad un numero fisso, in K esiste almeno una curva minimante I_c (*).

11. *Gli zeri della F sono in numero finito.*

TEOREMA. *Se I_c è un integrale quasi-regolare semidefinito-positivo normale e se il campo A è limitato e gli zeri della F sono in numero finito, in ogni classe completa di curve C esiste almeno una curva minimante I_c .*

In virtù dell'Osservazione del n.º precedente, basterà mostrare l'esistenza di una funzione $H(z)$ soddisfacente alla (1) dello stesso n.º 10.

Sia K una qualsiasi delle classi complete indicate nell'enunciato e indichiamo con P_1, P_2, \dots, P_n gli zeri della F . Siccome I_c è normale, in P_s ($s = 1, 2, \dots, n$) la F non può annullarsi per tutte le coppie (x', y') normalizzate; ed altrettanto accade per l'invariante F_1 . Essendo poi sempre $F_1 \geq 0$, è perciò possibile (**) di determinare tre costanti p_s, q_s, r_s , delle quali l'ultima maggiore di zero, in modo che la funzione

$$F^{(s)}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + p_s x' + q_s y'$$

(*) Ciò è vero anche se I_c è soltanto un integrale quasi-regolare positivo.

(**) Cfr. L. TONELLI, *La semicontinuità nel Calcolo delle variazioni* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. XLIV (1920), n.º 11).

risulti maggiore di zero in tutti i punti di A appartenenti al circolo (P_s, r_s) (di centro P_s e raggio r_s) e per tutte le coppie (x', y') normalizzate. Sia r un numero maggiore di zero, minore di tutti gli r_s ($s = 1, 2, \dots, n$) determinati e minore anche della metà della minima distanza fra due qualunque P_s .

Indichiamo con A' la parte del campo A costituita di tutti i punti di questo campo che *non* sono *interni* ad almeno uno dei circoli

$$\left(P_s, \frac{1}{2} r \right) \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Il nuovo campo A' risulta anch'esso un insieme *chiuso* di punti e in esso la F è sempre maggiore di zero, per tutte le coppie (x', y') normalizzate. Sia m' il minimo (> 0) di F in A' , per tutte le coppie (x', y') indicate.

Consideriamo i due circoli concentrici (P_s, r) , $\left(P_s, \frac{1}{2} r \right)$ ed una qualsiasi curva C di K , e portiamo la nostra attenzione sui punti di questa curva *interni* a (P_s, r) .

Tali punti formeranno uno o più archi continui, aventi ciascuno almeno un

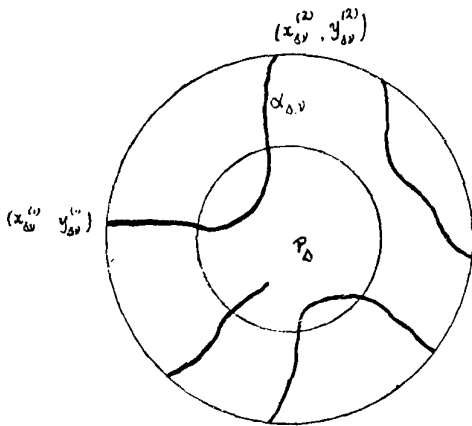


fig. 1

estremo sulla circonferenza di (P_s, r)

— salvo il caso in cui sia interna a questo circolo tutta la curva C — archi che potranno essere in numero finito ed anche in un'infinità numerabile.

Indichiamo con $\alpha_{s,v}$ quelli fra questi archi che hanno almeno un punto *interno* al circolo $\left(P_s, \frac{1}{2} r \right)$.

Gli archi $\alpha_{s,v}$ sono in numero finito: ed infatti, se tutta la curva C è interna al circolo (P_s, r) , di tali archi ve n'è uno solo, che coincide con la C , e in caso contrario, avendo ciascuno di essi almeno una parte che congiunge un punto della

circonferenza di (P_s, r) con un punto di quella di $\left(P_s, \frac{1}{2} r \right)$ e tutta costituita di punti non *interni* a quest'ultimo circolo, parte che ha pertanto lunghezza non inferiore a $\frac{1}{2} r$, il numero N_s di questi archi è inferiore a $\frac{2L}{r}$

($L =$ lunghezza di C). Possiamo anche aggiungere che, essendo, sulle parti ora indicate degli archi $\alpha_{s,\nu}$, e per ogni coppia (x', y') normalizzata, $F \cong m'$, è

$$I_c \cong N_s \cdot m' \frac{1}{2} r,$$

onde (per comprendere anche il caso in cui tutta la C sia interna a (P_s, r))

$$N_s \leq 1 + \frac{2}{m' r} I_c. \quad (1)$$

Indichiamo con $l_{s,\nu}$ le lunghezze degli archi $\alpha_{s,\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, N_s$) e con $(x_{s,\nu}^{(1)}, y_{s,\nu}^{(1)})$, $(x_{s,\nu}^{(2)}, y_{s,\nu}^{(2)})$ i loro estremi. È, da una parte,

$$\int_{\alpha_{s,\nu}} F^{(s)} ds \geq m_s l_{s,\nu},$$

dove m_s indica il minimo (maggiore di zero, per il modo con cui è stata determinata la $F^{(s)}$) della funzione $F^{(s)}$ in tutti i punti del campo A appartenenti al circolo (P_s, r) e per tutte le coppie (x', y') normalizzate; e dall'altra,

$$\int_{\alpha_{s,\nu}} F^{(s)} ds = \int_{\alpha_{s,\nu}} F ds + p_s (x_{s,\nu}^{(2)} - x_{s,\nu}^{(1)}) + q_s (y_{s,\nu}^{(2)} - y_{s,\nu}^{(1)});$$

e perciò, detto Q il massimo modulo dei numeri p_s, q_s , per $s = 1, 2, \dots, n$;

$$l_{s,\nu} \leq \frac{1}{m_s} \left\{ \int_{\alpha_{s,\nu}} F ds + 4 Q r \right\}$$

ed anche, indicando con m il minore degli m_s ,

$$l_{s,\nu} \leq \frac{1}{m} \left\{ \int_{\alpha_{s,\nu}} F ds + 4 Q r \right\}$$

e

$$\sum_{s=1}^n \sum_{\nu=1}^{N_s} l_{s,\nu} \leq \frac{1}{m} \left\{ \sum_{s=1}^n \sum_{\nu=1}^{N_s} \int_{\alpha_{s,\nu}} F ds + 4 Q r \sum_{s=1}^n N_s \right\}.$$

Tenendo conto della (1) e dell'ipotesi $F \geq 0$, risulta

$$\sum_{s=1}^n \sum_{\nu=1}^{N_s} l_{s,\nu} \leq \frac{1}{m} \left\{ \left(1 + \frac{8 Q n}{m'} \right) I_c + 4 Q r n \right\}.$$

Sia ora β uno qualunque degli archi che restano sulla C dopo tolti gli $\alpha_{s,v}$. Questi nuovi archi β appartengono tutti al campo A' ed è perciò

$$\int_{\beta} F ds \geq m' \cdot l,$$

dove l indica la lunghezza di β . Dalle due ultime disuguaglianze segue immediatamente

$$L = \Sigma l + \Sigma \Sigma l_{s,v} \leq \frac{1}{m'} I_c + \frac{1}{m} \left(1 + \frac{8 Q n}{m'} \right) I_c + 4 Q r n.$$

Posto allora

$$H(z) \equiv \frac{1}{m'} z + \frac{1}{m} \left(1 + \frac{8 Q n}{m'} \right) z + 4 Q r n$$

si ha, per ogni curva C di K ,

$$L \leq H(I_c),$$

vale a dire è verificata la (1) del n.º precedente.

Esempio. Sia la F definita, in un qualsiasi campo limitato A , dalla

$$F(x, y, x', y') \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{1 + x'^2 + y'^2}.$$

È

$$F_1 \equiv \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e perciò, per ogni coppia (x', y') normalizzata, è, in A , $F \geq 0$, $F_1 > 0$; inoltre, per le stesse coppie (x', y') e per ogni punto di A distinto da $(0, 0)$, è $F > 0$ e nell'origine del piano (x, y) è $F > 0$, se $x' \neq 0$ oppure $x' = 0$, $y' = -1$, e $F = 0$ per $x' = 0$, $y' = 1$. Le condizioni del teorema sono dunque verificate e l'integrale

$$\int_C \left\{ \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{1 + x'^2 + y'^2} \right\} ds$$

ammette almeno una curva minimante in ogni classe completa di curve C del campo A .

12. *Gli zeri della F sono in numero infinito: 1.° caso.*

Il teorema dimostrato al n.° precedente vale anche se gli zeri della F sono in numero infinito, purchè essi si trovino su un numero finito di curve continue, dotate ovunque di tangente variabile in modo continuo, e su ciascuna di tali curve formino degli insicmi ovunque non densi.

Supporremo, per semplicità di ragionamento, che gli zeri della F si trovino tutti su una sola curva e che questa sia un segmento rettilineo, che indicheremo con α . Da questo caso si passa a quello generale senza alcuna difficoltà.

Osserviamo subito che, per la continuità della F , gli zeri di questa funzione formano un insieme E chiuso, e determiniamo, per ogni punto P di E , tre costanti p, q, r ($r > 0$) in modo che la funzione

$$F(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + p x' + q y'$$

risulti maggiore di zero in tutti i punti del campo A appartenenti al circolo (P, r) e per tutte le coppie (x', y') normalizzate (*). Detto δ il diametro di questo cerchio che si trova sulla retta cui appartiene α e δ' il segmento della medesima retta ad esso concentrico e di metà ampiezza, per un noto teorema di BOREL (**) possiamo scegliere un numero finito di questi δ' in modo da ricoprire con essi tutto l'insieme E così che ogni punto di questo insieme risulti interno ad almeno uno dei δ' scelti. Siano questi δ' :

$$\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_n$$

e indicati con P_s, p_s, q_s, r_s , gli elementi P, p, q, r corrispondenti a δ'_s , poniamo

$$F^{(s)}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') + p_s x' + q_s y'.$$

Detto $\bar{\delta}$ il minore dei δ'_s , possiamo ricoprire l'insieme E chiuso e ovunque non denso, con un numero finito di intervalli $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, a due a due senza punti comuni, ciascuno di ampiezza minore di $\frac{1}{2} \bar{\delta}$ e aventi per

(*) Cfr. n.° 11.

(**) Il teorema cui alludiamo, per quanto sia conosciuto sotto il nome di teorema o lemma di BOREL, fu per la prima volta stabilito da S. PINCHERLE, nel 1881, in: *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche* (Mem. dell'Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie IV, tomo III (1881), p. 154).

estremi punti non appartenenti ad E . A ciascun ω_s associamo un intervallo $\bar{\omega}_s$ concentrico, avente gli estremi *interni* ad esso e contenente nel suo *interno* tutti i punti di E che appartengono a ω_s ; costruiamo poi i cerchi C_s, \bar{C}_s sui due segmenti ω_s e $\bar{\omega}_s$, presi come diametri. Sia δ'_{s_1} il δ'_s di indice minore che contiene almeno un punto di ω_s (*). Il cerchio C_s (e così anche \bar{C}_s) è allora interno al cerchio (P_{s_1}, r_{s_1}) e in ogni suo punto è perciò $F^{(s_1)} > 0$, per tutte le coppie (x', y') normalizzate.

Se ora ragioniamo sui cerchi C_s, \bar{C}_s , come al n.º precedente abbiamo fatto su $(P_s, r_s), (P_s, \frac{1}{2} r)$, otteniamo senz'altro la dimostrazione di quanto abbiamo asserito.

Esempio. Sia la F definita nel seguente modo:

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{1 + x'^2 + y'^2} \left(1 + x' \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right), \quad \text{per } x \neq 0$$

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{1 + x'^2 + y'^2}, \quad \text{per } x = 0.$$

È

$$F_1 \equiv \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e l'integrale della F è regolare semidefinito-positivo normale. Per ogni coppia (x', y') normalizzata e per $y' \neq 0$ è $F > 0$, e questa disuguaglianza vale anche nei punti $(x, 0)$ se è $x \neq 0$ e $x = \frac{2}{(4k+1)\pi}$, con k intero. Nei punti $(0, 0)$ e $(\frac{2}{(4k+1)\pi}, 0)$ è $F > 0$ se $x' \neq 0$ oppure $x' = 0$ e $y' = -1$, e $F = 0$ per $x' = 0, y' = 1$. I punti $(0, 0), (\frac{2}{(4k+1)\pi}, 0)$, che si trovano tutti sull'asse delle x , costituiscono un insieme ovunque non denso, e le condizioni dell'enunciato sono tutte verificate.

13. 2.º caso. *Gli zeri della F costituiscono delle curve continue.*

Consideriamo ora il caso in cui gli zeri della F costituiscano una curva continua e supponiamo dapprima, per semplificare, che tale curva sia un segmento rettilineo α , parallelo all'asse delle x , e che in nessun altro punto

(*) Supponiamo che ogni ω_s contenga almeno un punto di E .

del campo la F possa annullarsi per coppie (x', y') normalizzate. Conserveremo tutte le altre ipotesi del teorema del n.º 11.

Osserviamo, innanzi tutto, che la superficie conica (riferita ad una terna (x', y', z) di assi cartesiani ortogonali)

$$z = F(\bar{x}, \bar{y}, x', y'),$$

relativa ad un punto qualsiasi (\bar{x}, \bar{y}) del campo A , per la condizione $F \geq 0$ non scende mai al disotto del piano $z = 0$, e che, per l'altra $F_1 \geq 0$, essa rivolge costantemente la sua concavità verso l'alto. Essa, infine, non può ridursi al piano $z = 0$, per l'ipotesi fatta che I_c sia un integrale normale. Da ciò segue che, se le coppie normalizzate (x', y') , (\bar{x}', \bar{y}') soddisfano alle uguaglianze

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}') = 0, \quad F(x, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}') = 0,$$

sul minore dei due archi in cui (\bar{x}', \bar{y}') , (\bar{x}, \bar{y}') dividono la circonferenza

$$x'^2 + y'^2 = 1, \tag{1}$$

deve essere sempre $F(\bar{x}, \bar{y}, x', y') = 0$, e gli archi indicati non possono essere uguali, perchè altrimenti la superficie conica considerata si ridurrebbe al piano $z = 0$. Segue anche che l'insieme dei punti della circonferenza (1) che verificano la $F(\bar{x}, \bar{y}, x', y') = 0$, se di tali punti ne esistono almeno due, coincide con un arco della circonferenza stessa, di lunghezza minore di π . Possiamo dunque affermare che, ad ogni punto P del segmento α , corrisponde un arco γ della circonferenza (1), luogo dei punti (x', y') di tale circonferenza che in P annullano la F ; e quest'arco γ , che si ridurrà ad un punto nel caso in cui la F in P si annulli per una sola coppia (x', y') normalizzata avrà costantemente lunghezza inferiore a π . È poi ben evidente che, al variare di P su α con continuità, l'arco γ varierà, pure con continuità, sulla circonferenza (1), e la lunghezza di γ ammetterà un massimo, minore di π .

Detto P_0 l'estremo sinistro del segmento α , siano P_1, P_2, \dots, P_n dei punti di α ad ascisse crescenti, dei quali l'ultimo coincidente con l'estremo destro del segmento, scelti in modo che gli intervalli $P_r P_{r+1}$ abbiano tutti la stessa ampiezza e che, per ogni intervallo $P_r P_{r+s}$, gli archi γ corrispondenti a tutti i suoi punti appartengano tutti ad uno stesso arco Γ_r della circonferenza (1), di lunghezza minore di π . Indicheremo con lo stesso simbolo Γ_r anche la lunghezza dell'arco, e indicheremo poi con δ l'ampiezza comune degli intervalli $P_r P_{r+1}$.

Detto Γ un numero maggiore di tutte le lunghezze Γ_r e minore di π , sia Γ' l'arco della circonferenza (1), di lunghezza Γ , che ha lo stesso punto medio di Γ_r . I punti di Γ_r risultano così tutti interni a Γ' . Considerato allora un numero $h > 0$ e minore di $\delta \cos \frac{\Gamma}{2}$, costruiamo nel piano (x, y) un rettangolo R , a lati paralleli agli assi x e y e tali che quelli paralleli all'asse y siano di lunghezza $\frac{h}{2}$ ed abbiano come punto di mezzo i punti P'_0 e P''_0 che si trovano sulla retta a cui appartiene il segmento a e le cui ascisse sono rispettivamente uguali all'ascissa di P_0 diminuita di δ e a quella di P_n aumentata di δ . Costruiamo poi un altro rettangolo R' , a lati paralleli agli assi x, y , in modo che i suoi lati paralleli all'asse y abbiano lunghezza uguale a h e come punti medi i punti P'_0 e P''_0 , della retta a cui appar-

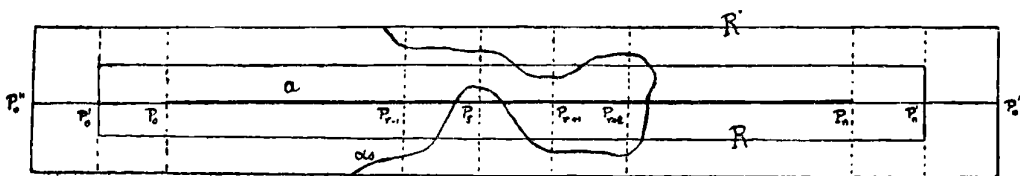


fig. 2 (*)

tiene a , aventi per ascisse rispettivamente l'ascissa di P'_0 diminuita di δ e quella di P''_0 aumentata di δ . Conduciamo, infine, per i punti $P'_0, P_0, P_r, P_n, P''_0$, delle parallele all'asse y : esse divideranno il rettangolo R' in tanti rettangoli, di base δ e altezza h , che indicheremo con $q''_0, q'_0, q_0, \dots, q_r, \dots, q_n, q'_0$.

Sia ora K una classe completa di curve C e indichiamo con A' la parte del campo A costituita da tutti i punti di questo campo che *non* sono interni al rettangolo R . In A' è sempre $F' > 0$ per ogni coppia (x', y') normalizzata e si potrà perciò trovare un $m' > 0$ in modo che la disuguaglianza $F' \geq m'$ risulti soddisfatta in qualsiasi punto di A' e per ogni coppia (x', y') normalizzata.

Presa a considerare una curva qualunque C di K , portiamo la nostra attenzione sui punti di questa curva che sono interni al rettangolo R' , punti che formano uno o più archi continui (in numero finito o in un'infinità nu-

(*) La scala della altezza è, in questa figura, maggiore di quella della base.

merabile). Se la C è tutta contenuta nell'interno di R' , di questi archi ve n'è uno solo (la C stessa); in caso contrario, ognuno di questi archi ha almeno un estremo sul contorno di R' . Occupiamoci soltanto di quelli fra tali archi che hanno almeno un punto interno al rettangolo R e mostriamo, innanzi tutto, che sono in numero finito. Uno qualunque di essi, avendo almeno un punto sul contorno di R' e punti interni ad R , contiene almeno un arco parziale avente un estremo sul contorno di R' e l'altro su quello di R e privo completamente di punti interni a R' . Questo arco parziale, che appartiene ad A' ed ha lunghezza non inferiore a $\frac{1}{4}h$, porta in I_c un contributo non inferiore a $m' \frac{h}{4}$. È dunque finito il numero N degli archi considerati, ed è

$$N < 1 + \frac{4}{m'h} I_c, \quad (2)$$

dove nel secondo membro abbiamo aggiunto il numero 1 per comprendere anche il caso della curva C tutta interna al rettangolo R' (*).

Indichiamo con α_s ($s = 1, 2, \dots, N$) uno qualsiasi degli archi di cui si è ora parlato, intendendo che α_1 coincida con tutta la curva C nel caso che essa risulti tutta interna al rettangolo R' .

Cerchiamo un limite superiore per la lunghezza l_s di α_s . A tal uopo cominciamo col cercare un limite superiore per la lunghezza $l_{s,r}$ ($r = 0, 1, \dots, n$) della parte $\alpha_{s,r}$ di α_s costituita dai punti che appartengono al rettangolo q_r . Consideriamo, insieme con q_r , i due rettangoli ad esso contigui, q_{r-1} e q_{r+1} (intendendo di considerare, in luogo di q_{r-1} , q'_0 se è $r = 0$ e, se è $r = n$, in luogo di q_{n+1} , q'_n). I punti di α_s che appartengono ad almeno uno dei tre rettangoli q_{r-1} , q_r , q_{r+1} , senza far parte dei due lati passanti per P_{r-1} e P_{r+2} , se esistono, costituiscono uno o più archi continui (in numero finito o in un'infinità numerabile) aventi tutti, ad eccezione al più di due soli, ambedue gli estremi sulla parte, non appartenente anche al contorno di R' , del contorno del rettangolo formato dalla riunione dei tre rettangoli indicati. Teniamo conto soltanto di quelli fra questi archi che contengono punti di q_r . Il loro numero $N_{s,r}$ è certamente finito, perchè, ad eccezione al più di quei due già sopra eccettuati, tutti gli altri hanno lunghezza sempre non inferiore a 2δ (essendo δ la lunghezza della base dei rettangoli q); ed essi conten-

(*) Potrebbe risultare $\frac{4}{m'h} I_c < 1$.

gono tutti i punti di $\alpha_{s,r}$. Indichiamo tali archi con $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{N_{s,r}}$, intendendo che siano numerati nello stesso ordine nel quale si presentano su C . Tutti questi β_m , ad eccezione al più del primo e dell'ultimo, hanno ambedue gli estremi sulle parallele per P_{r-1} e P_{r+2} all'asse delle y , esclusi i punti di tali parallele che trovansi sul contorno di R' .

Consideriamo un β_m qualunque e indichiamo con λ_m la sua lunghezza. Abbiamo

$$l_{s,r} \leq \sum_{m=1}^{N_{s,r}} \lambda_m. \quad (3)$$

Determiniamo un limite superiore di λ_m in funzione di I_{β_m} . Rammentiamo che se P è un punto qualsiasi del segmento $P_{r-1} P_{r+2}$, le coppie (x', y') normalizzate che in P annullano la F appartengono all'arco γ che corrisponde al punto stesso, e quindi all'arco Γ_{r-1} , e sono punti interni dell'arco Γ'_{r-1} . Perciò la funzione F , per ogni punto del rettangolo formato dalla riunione di q_{r-1} , q_r e q_{r+1} , e per ogni coppia (x', y') normalizzata che non sia interna all'arco Γ'_{r-1} , è sempre maggiore di zero ed ammette un minimo $m_r > 0$. Circa la posizione di Γ'_{r-1} sulla circonferenza (1), supponiamo, in primo luogo, che il suo punto medio sia dato da $x' = 1, y' = 0$. Indicati, allora, con (x_0, y_0) , (x_1, y_1) il primo e il secondo estremo dell'arco β_m , abbiamo

$$x_1 - x_0 = \int_{\beta_m} x'(s) ds,$$

ed anche, indicando con β'_m la parte di β_m in cui $(x'(s), y'(s))$ appartiene a Γ'_{r-1} e con β''_m la rimanente,

$$x_1 - x_0 = \int_{\beta'_m} x' ds + \int_{\beta''_m} x' ds.$$

Detta λ'_m la parte di λ_m che spetta a β'_m e λ''_m quella relativa a β''_m , abbiamo, rammentando che la lunghezza Γ di Γ'_{r-1} è minore di π ,

$$x_1 - x_0 \geq \lambda'_m \cos \frac{\Gamma}{2} - \lambda''_m, \quad (4)$$

donde

$$\lambda'_m \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ \lambda''_m + \rho_{0,1} \right\}, \quad (5)$$

dove si è indicata con $\rho_{0,1}$ la distanza fra i punti (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , estremi di β_m .

Se il punto medio di Γ'_{r-1} non fosse dato da $x' = 1$, $y' = 0$, ci si ricondurrebbe al caso già esaminato con una conveniente rotazione degli assi coordinati e si avrebbe ancora la disuguaglianza (5), la quale risulta così dimostrata in generale.

Dalla (5) segue

$$\lambda_m = \lambda'_m + \lambda''_m \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ 2 \lambda''_m + \rho_{0,1} \right\}. \quad (6)$$

Ma è, su β''_m , $F \cong m_r$, onde

$$m_r \lambda''_m \leq I_{\beta''_m} \leq I_{\beta_m}$$

e

$$\lambda_m \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ \frac{2}{m_r} I_{\beta_m} + \rho_{0,1} \right\}. \quad (7)$$

Siccome la base del rettangolo formato da q_{r-1} , q_r e q_{r+1} è di lunghezza 3δ e l'altezza è $h < \delta$, è pure

$$\lambda_m \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ \frac{2}{m_r} I_{\beta_m} + 4\delta \right\}.$$

Scende dunque dalla (3)

$$l_{r,r} \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ \frac{2}{m_r} I_{\alpha_r} + 4\delta N_{r,r} \right\}. \quad (8)$$

Determiniamo un limite superiore per $N_{r,r}$. Abbiamo già osservato che tutti i β_m , ad eccezione al più del primo e dell'ultimo, hanno ambedue gli estremi sulle parallele per P_{r-1} e P_{r+2} all'asse y . Consideriamo un β_m che abbia ambedue gli estremi sulla stessa parallela all'asse y per P_{r-1} o per P_{r+2} . È, per esso, $x_0 = x_1$ e la (7) dà

$$\lambda_m \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ \frac{2}{m_r} I_{\beta_m} + h \right\},$$

e per essere $h < \delta \cos \frac{\Gamma}{2}$,

$$\lambda_m < \frac{2}{m_r \cos \frac{\Gamma}{2}} I_{\beta_m} + \delta.$$

Ma poichè β_m ha almeno un punto appartenente a q_r , è $\lambda_m \geq 2\delta$: dunque

$$I_{\beta_m} > \frac{1}{2} m_r \delta \cos \frac{\Gamma}{2},$$

e il numero $N'_{s,r}$ dei β_m ora considerati, dovendo essere minore o uguale a I_{α_s} diviso per il più piccolo dei valori I_{β_m} , è minore di

$$\frac{2}{\delta m_r \cos \frac{\Gamma}{2}} I_{\alpha_s}.$$

Consideriamo gli archi β_m che hanno un estremo su una delle due parallele all'asse y per P_{r-1} o P_{r+2} e l'altro sull'altra di queste parallele. Se di tali archi ve n'è più di uno, siano β_m^- e β_m^+ due di essi scelti in modo che fra l'uno e l'altro non ne esista alcuno della stessa specie.

Per fissare le idee, supponiamo che il primo estremo di β_m^- sia sulla parallela all'asse y condotta per P_{r-1} ed il secondo su quella per P_{r+2} . Siccome l'arco α_s , a cui appartengono β_m^- e β_m^+ , non ha punti esterni al rettangolo R' , gli estremi di β_m^- dovranno trovarsi, il primo, sulla parallela ad y per P_{r+2} e il secondo su quella per P_{r-1} . Eseguiamo un cambiamento di coordinate facendo ruotare gli assi di un angolo tale che il punto medio di Γ'_{r-1} risulti dato da $x' = 1, y' = 0$. Siano, in questo nuovo sistema di coordinate, (\bar{x}_0, \bar{y}_0) e (x_1, \bar{y}_1) il primo e il secondo estremo di β_m^- , e (\bar{x}_0, \bar{y}_0) e (\bar{x}_1, \bar{y}_1) il primo e il secondo estremo di β_m^+ .

Per quanto abbiamo osservato sulla posizione degli estremi degli archi β_m^- e β_m^+ , la distanza fra (\bar{x}_0, \bar{y}_0) e (\bar{x}_1, \bar{y}_1) risulta minore di h e altrettanto quella fra (\bar{x}_1, \bar{y}_1) e (\bar{x}_0, \bar{y}_0) . Applicata la (4) a β_m^- e β_m^+ , otteniamo

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_0 \geq \lambda'_m \cos \frac{\Gamma}{2} - \lambda''_m,$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_0 \geq \lambda'_m \cos \frac{\Gamma}{2} - \lambda''_m,$$

e sommando

$$\begin{aligned} \lambda'_m + \lambda'_m \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ \lambda''_m + \lambda''_m + |\bar{x}_1 - \bar{x}_0| + |\bar{x}_1 - \bar{x}_0| \right\} &\leq \\ &\leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ \lambda''_m + \lambda''_m + 2h \right\} \end{aligned}$$

ossia, per essere $h < \delta \cos \frac{\Gamma}{2}$,

$$\lambda'_m + \lambda'_m \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} (\lambda''_m + \lambda''_m) + 2\delta.$$

Di qui deduciamo

$$\lambda'_m + \lambda'_m \leq \frac{2}{\cos \frac{\Gamma}{2}} (\lambda''_m + \lambda''_m) + 2\delta,$$

e poichè su β''_m e β''_m è $F \cong m_r$,

$$\lambda'_m + \lambda'_m \leq \frac{2}{m_r \cos \frac{\Gamma}{2}} (I_{\beta''_m} + I_{\beta''_m}) + 2\delta.$$

D'altra parte, poichè la distanza fra i punti (\bar{x}_0, \bar{y}_0) e (\bar{x}_1, \bar{y}_1) è almeno 3δ , e altrettanto quella fra (\bar{x}_0, \bar{y}_0) e (\bar{x}_1, \bar{y}_1) , abbiamo

$$\lambda'_m + \lambda'_m \geq 6\delta,$$

onde

$$I_{\beta''_m} + I_{\beta''_m} \geq 2\delta m_r \cos \frac{\Gamma}{2}.$$

Il numero $N''_{r,s}$ degli archi β_m considerati ora è dunque non superiore a

$$\frac{1}{\delta m_r \cos \frac{\Gamma}{2}} I_{a_s} + 1.$$

Per quanto abbiamo già rammentato circa gli estremi degli archi β_m , negli $N''_{r,r} + N''_{r,s}$ archi già considerati sono compresi tutti i β_m , ad eccezione al più del primo e dell'ultimo di essi.

È quindi

$$N_{s,r} \leq N'_{s,r} + N''_{s,r} + 2,$$

$$N_{s,r} < \frac{3}{\delta m_r \cos \frac{\Gamma}{2}} I_{\alpha_s} + 3.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (8) scende

$$l_{s,r} \leq \frac{1}{\cos \frac{\Gamma}{2}} \left\{ \frac{14}{m_r \cos \frac{\Gamma}{2}} I_{\alpha_s} + 12 \delta \right\}.$$

Questa disuguaglianza, dimostrata per $r = 0, 1, \dots, n$, resta stabilita senz'altro anche per il rettangolo q'_0 , che si trova nelle stesse condizioni dei q_r ($r = 0, 1, \dots, n$). Per i due rettangoli q''_0 e q'_n , essendo in essi sempre $F \geq m'$, per ogni coppia normalizzata (x', y') , si ha che le lunghezze $l''_{s,0}$, $l'_{s,n}$ delle parti di α_s in esse contenute, sono ambedue $\leq \frac{1}{m} I_{\alpha_s}$. Se dunque indichiamo con m il minore dei numeri m' , m'_0 , m_0 , m_1, \dots, m_n , abbiamo che la lunghezza l_s di α_s soddisfa alla disuguaglianza

$$l_s < \frac{1}{\cos^2 \frac{\Gamma}{2}} \left[\frac{2 + 14(n+2)}{m} I_{\alpha_s} + 12(n+2)\delta \right].$$

Di qui e dalla (2) deduciamo che la lunghezza complessiva di tutti gli archi α_s è minore di

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\Gamma}{2}} \left[\frac{(30 + 14n)h + 48(n+2)\delta}{h \cdot m} I_C + 12(n+2)\delta \right].$$

Tolti gli archi α_s , restano sulla C degli archi in ogni punto dei quali è sempre, per tutte le coppie (x', y') normalizzate, $F \geq m' > m$, e la loro lunghezza complessiva non supera

$$\frac{1}{m} I_C.$$

Abbiamo dunque, per la lunghezza L della C ,

$$L < \frac{1}{\cos^2 \frac{\Gamma}{2}} \left[\frac{(31 + 14n)h + 48(n+2)\delta}{h \cdot m} I_C + 12(n+2)\delta \right].$$

Se poniamo

$$H(z) \equiv \frac{1}{\cos^2 \frac{\Gamma}{2}} \left[\frac{(31 + 14n)h + 48(n+2)\delta}{h \cdot m} z + 12(n+2)\delta \right],$$

abbiamo così, per ogni curva C di K ,

$$L < H(I_C)$$

ed è verificata la (1) del n.º 10, e l'esistenza di almeno una curva minimante in K è provata.

In quanto precede, al segmento a può sostituirsi una qualsiasi curva continua, aperta, priva di punti multipli, dotata ovunque di tangente variabile in modo continuo; può anche sostituirsi un gruppo di un numero finito di tali curve aventi, due a due, al più un sol punto comune e in modo che con archi di esse non possa mai formarsi una curva continua chiusa. Tenendo conto di quanto si è dimostrato al n.º 12 può dunque enunciarsi il

TEOREMA. *Se I_C è un integrale quasi-regolare semidefinito positivo normale e se il campo A è limitato e tutti gli zeri della F costituiscono:*

1.º) *un numero finito di curve continue aperte, prive di punti multipli, dotate ovunque di tangente variabile in modo continuo, aventi, due a due, al più un punto comune e tali da non formare mai, con alcuni o tutti i loro archi, una curva chiusa;*

2.º) *degli insiemi ovunque non densi (linearmente), disposti su un numero finito di curve continue dotate ovunque di tangente variabile in modo continuo, aventi con le altre curve sopra indicate al più un numero finito di punti comuni;*

allora, in ogni classe completa di curve C , esiste almeno una curva minimante I_C .

ESEMPIO. Sia la F definita, in tutto il piano (x, y) , nel seguente modo:

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{1 + x^2 y^2}.$$

È

$$F_1 \equiv \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e perciò, per ogni coppia (x', y') normalizzata, è sempre $F_1 > 0$, $F \geq 0$. Per le stesse coppie e per ogni punto (x, y) tale che $xy \neq 0$, è inoltre $F > 0$;

per $x=0$ oppure $y=0$ è, infine, $F=0$ quando sia $x'=0$, $y'=1$ e $F>0$ per ogni altra coppia (x', y') normalizzata. In virtù del teorema dimostrato l'integrale I_c relativo alla F qui considerata ammette dunque almeno una curva minimante in ogni classe completa di curve C contenute in un campo A limitato.

Si vede facilmente che il teorema dato più sopra *vale anche se tutti gli zeri della F costituiscono una curva continua chiusa, priva di punti multipli, dotata ovunque di tangente variabile in modo continuo, purchè le curve della classe considerata abbiano, se aperte, gli estremi ambedue interni o ambedue esterni al campo limitato dal luogo degli zeri della F , e se chiuse, infiniti punti ciascuna non appartenenti a tale luogo; e purchè ancora, sopprimendo da una qualunque curva della classe una qualsiasi sua parte costituente di per sè una curva chiusa, rimanga sempre una curva della medesima classe.*

ESEMPIO. Si presenta il caso qui contemplato se è

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{1 + (x^2 + y^2 - 1)^2}.$$

È infatti, per questa F ,

$$F_1 \equiv \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e per ogni coppia (x', y') normalizzata si ha sempre $F_1 > 0$, $F \geq 0$, con $F > 0$ per le stesse coppie e per ogni punto (x, y) non appartenente al cerchio $x^2 + y^2 = 1$. Per i punti di tal cerchio è poi $F = 0$, se $x' = 0$, $y' = 1$ e soltanto per questa coppia normalizzata.

§ IV.

GLI INTEGRALI QUASI-REGOLARI SEMIDEFINITI NORMALI.

b) GLI ZERI DELLA F RIEMPIONO DELLE AREE.

14. TEOREMA. *Se I_c è un integrale quasi-regolare semidefinito positivo; se il campo A è limitato e le coppie (x', y') normalizzate che annullano la F in qualche punto di A appartengono tutte ad un arco γ della circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$, di lunghezza minore di π ;*

in ogni classe completa di curve C esiste almeno una curva *minimante* I_c .

Sia K una qualsiasi classe completa di curve C , e considerata una qualunque curva C della classe, indichiamone con x_0 e x_1 le ascisse degli estremi — primo e secondo, rispettivamente — se tale curva è aperta; in caso contrario, siano x_0 e x_1 ambedue uguali all'ascissa di un punto qualunque della curva. Possiamo supporre, senza nuocere alla generalità di quanto vogliamo stabilire, che l'arco γ dell'enunciato abbia come punto medio $x' = 1$, $y' = 0$. Se, infatti, così non fosse, basterebbe, per ricondurci a questo caso, operare una trasformazione di coordinate (semplice rotazione degli assi x e y attorno all'origine). Indichiamo con γ' un arco della circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$, di lunghezza minore di π , avente come punto medio anch'esso $x' = 1$, $y' = 0$, e contenente nel suo interno tutti i punti di γ (gli estremi di γ sono dunque distinti da quelli di γ'); abbiamo

$$x_1 - x_0 = \int_C x'(s) ds,$$

e indicando con C' la parte di C in cui $(x'(s), y'(s))$ appartiene all'arco γ' e con C'' la rimanente,

$$x_1 - x_0 = \int_{C'} x' ds + \int_{C''} x' ds.$$

Sia L la lunghezza delle C , e siano L' , L'' le parti di L che spettano a C' , C'' , rispettivamente. Possiamo scrivere

$$x_1 - x_0 \geq L' \cos \frac{\gamma'}{2} - L'', \tag{1}$$

dove γ' rappresenta la misura dell'arco indicato con la stessa lettera, e quindi

$$L' \leq \frac{1}{\cos \frac{\gamma'}{2}} (L'' + (x_1 - x_0)).$$

Detta Δ la massima distanza fra due punti qualunque del campo A , abbiamo anche

$$L' \leq \frac{1}{\cos \frac{\gamma'}{2}} (L'' + \Delta)$$

donde

$$L = L' + L'' \leq \frac{1}{\cos \frac{\gamma'}{2}} (2L'' + \Delta).$$

Osserviamo qui che il minimo m della funzione F , per ogni punto di A ed ogni coppia (x', y') non *interna* all'arco γ' , è, per le ipotesi fatte, maggiore di zero. È dunque

$$m L'' \leq I_c$$

e

$$L \leq \frac{1}{\cos \frac{\gamma'}{2}} \left(\frac{2}{m} I_c + \Delta \right). \quad (2)$$

Da questa disuguaglianza e da ciò che si è detto al n.º 10 scende quanto abbiamo affermato.

Come corollario si ha:

Se il campo A è limitato ed è

$$F \equiv f(x, y) G(x', y'),$$

con $f > 0$, $G \geq 0$, $G_1 \geq 0$, senza che sia $G_1 \equiv 0$, in ogni classe completa di curve C esiste almeno una curva minimante I_c .

Le coppie (x', y') normalizzate, che annullano G , appartengono tutte ad un arco della circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$, minore di π , per quanto si è osservato al principio del n.º 13, e altrettanto deve dirsi di quelle che annullano la F .

ESEMPIO. Sia

$$F \equiv (1 + x^2 + y^2) (\sqrt{x'^2 + y'^2} - y').$$

Posto $f(x, y) \equiv 1 + x^2 + y^2$, $G(x', y') \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2} - y'$, è, in tutto il piano (x, y) , $f > 0$, $G \geq 0$,

$$G_1 \equiv \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

e, in ogni classe completa di curve C appartenenti tutte ad un campo limitato A del piano (x, y) , esiste sempre una curva minimante l'integrale

$$\int_C (1 + x^2 + y^2) (\sqrt{x'^2 + y'^2} - y') ds.$$

15. Il campo A_0 . Chiameremo campo A_0 un campo A (n.º 1) tale che:
 — considerata una sua qualunque curva C (n.º 1) e preso ad arbitrio un numero positivo ρ , sempre esista una poligonale tutta composta di punti di A , appartenenti ordinatamente all'intorno (ρ) della C ed avente una lunghezza diversa da quella della C per meno di ρ ;

— oppure che, considerata una sua qualunque porzione limitata A' , la funzione F possa definirsi in un nuovo campo A'' , contenente come punti interni tutti i punti di A' , in modo che in tutto A'' la funzione stessa conservi gli stessi caratteri ammessi per A .

Nel secondo caso, è evidente che un campo A può essere un campo A_0 per una data funzione F e non per un'altra forma di tale funzione.

16. TEOREMA. Se I_c è un integrale quasi-regolare semidefinito-positivo; se il campo A_0 è limitato ed è sempre possibile di condurre un numero finito di rette parallele, in modo che, per ciascuna coppia di tali parallele, consecutive, esista un arco della circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$, di lunghezza minore di π , al quale appartengano tutte le coppie (x', y') normalizzate che annullano la F in almeno un punto di A_0 , giacente nella striscia limitata dalle due parallele considerate;

in ogni classe completa di curve C di A_0 esiste almeno una curva minimante I_c .

a) Per fissare le idee, supponiamo che il campo A_0 verifichi la prima delle due condizioni indicate al n.º 15, e cominciamo con l'osservare che, se γ è un qualsiasi arco del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$, di lunghezza minore di π , lunghezza che indicheremo con la stessa lettera γ , considerata una qualunque curva continua e rettificabile del piano (x, y) — appartenente o no al campo A_0 — di lunghezza L , si ha

$$L \leq \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}} (2L'' + \rho), \quad (1)$$

dove L'' indica la parte di L che corrisponde ai punti della curva presa in esame nei quali i coseni direttori della tangente alla curva stessa, $x'(s)$ e $y'(s)$, costituiscono un punto (x', y') non appartenente all'arco γ , e ρ è la distanza fra gli estremi della curva. La dimostrazione della disuguaglianza scritta è identica a quella data per la (6) del n.º 13.

b) Ciò premesso, possiamo, senza nuocere alla generalità del risultato che vogliamo stabilire, ammettere che le parallele di cui si è detto nell'e-

nunciato, siano perpendicolari all'asse delle x ; a questo caso ci si può sempre ricondurre con un semplice cambiamento di coordinate.

Sia, allora, (a, b) un intervallo dell'asse x che contenga come punti interni le proiezioni ortogonali, su tale asse, di tutti i punti di A_0 , e si suddivida quest'intervallo in parti, tutte fra loro uguali e sufficientemente piccole in modo che, presa comunque una terna di parti consecutive, le coppie (x', y') normalizzate che annullano la F in almeno un punto del campo A_0 , proiettantisi ortogonalmente su un elemento della terna stessa, appartengano tutte ad uno stesso arco γ del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$, di lunghezza minore di π . Siano $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, i punti della suddivisione operata (nell'ordine stesso in cui si presentano su (a, b)), e si rappresenti con γ_r l'arco, ora indicato, corrispondente alla terna $(x_{r-1}, x_r), (x_r, x_{r+1}), (x_{r+1}, x_{r+2})$. Per ogni arco γ_r se ne costruisca un altro, γ'_r , avente lo stesso punto medio, appartenente allo stesso cerchio, e di lunghezza minore di π , ma maggiore di quella di γ_r , e si indichi poi con ω un numero positivo minore di $\frac{\pi}{2}$ e minore anche della metà della più piccola delle differenze fra π e le lunghezze dei γ'_r .

Diremo che un intervallo (x_r, x_{r+1}) è di *prima specie* se l'arco γ'_r corrispondente non contiene punti dell'arco della stessa circonferenza, di lunghezza 2ω , avente come punto medio $x' = 0, y' = 1$; lo diremo, invece, di *seconda specie* se γ'_r non contiene punti dell'arco di lunghezza 2ω , pure della medesima circonferenza, avente come punto medio $x' = 0, y' = 1$. Ogni intervallo (x_r, x_{r+1}) , che non sia di *prima specie*, sarà allora di *seconda specie*, e viceversa; e potranno esistere intervalli (x_r, x_{r+1}) contemporaneamente di prima e di seconda specie.

Diremo che un intervallo (x_r, x_{r+1}) è di specie *unica* se è di una delle due specie dette, ma non dell'altra.

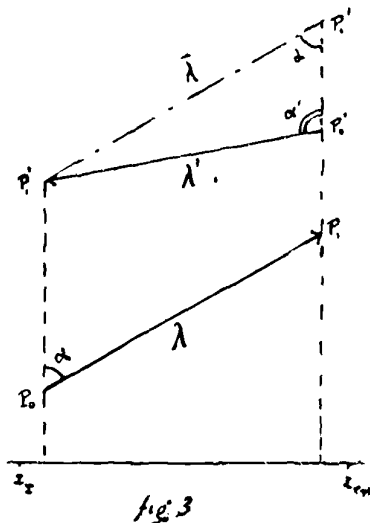
Due intervalli dei quali uno *non* di prima specie e l'altro *non* di seconda specie, li diremo di specie *essenzialmente diversa*.

Per la costruzione stessa degli archi γ'_r , è possibile determinare un numero $m > 0$ tale che, se (\bar{x}, \bar{y}) è un punto qualsiasi di A_0 e (x_{r-1}, x_{r+2}) (*) è l'intervallo, della suddivisione più sopra operata, che contiene \bar{x} , per ogni coppia (x', y') normalizzata non interna all'arco γ'_r sia

$$F(x, \bar{y}, x', y') > m. \quad (2)$$

(*) Per $r=0$ si sostituirà, a questo intervallo, (x_r, x_{r+2}) , e, per $r=n-1$, (x_{r-1}, x_{r+1}) .

c) Consideriamo un qualsiasi intervallo (x_r, x_{r+1}) , di prima specie o contiguo ad uno di prima specie, e siano λ e λ' due segmenti orientati, appartenenti interamente al campo A_ω , proiettantisi ortogonalmente su uno stesso segmento (che può ridursi eventualmente ad un punto) di (x_r, x_{r+1}) , aventi come primi estremi, rispettivamente, P_0 e P_0' , come secondi estremi P_1 e P_1' , e tali che P_1' abbia ascissa uguale a quella di P_0 e ordinata maggiore, e P_0' ascissa uguale a quella di P_1 e ordinata minore di quella di P_1 , aumentata della differenza tra le ordinate di P_1' e P_0 . Indichiamo con δ la differenza tra le lunghezze dei due segmenti $P_0 P_1'$, $P_1 P_0'$, il secondo dei quali sarà considerato come avente lunghezza positiva o negativa a seconda che P_0' avrà ordinata maggiore o minore di P_1 . Se per P_1' conduciamo un segmento $\bar{\lambda}$ uguale e parallelo a $P_0 P_1$, e indichiamo con \bar{P}_1 il suo secondo estremo, la differenza δ risulta uguale alla lunghezza del segmento $P_0' \bar{P}_1$. Sia α il minore degli angoli che il segmento orientato λ forma con la direzione positiva dell'asse y ; α' il minore degli angoli che con la stessa direzione forma λ' .



Sia $\alpha \leq \omega$. Se è, inoltre, $\alpha' \leq \omega$, dal triangolo $P_0' P_1' \bar{P}_1$, risulta $\delta < \lambda + \lambda'$, dove indichiamo con λ e λ' anche le lunghezze dei due segmenti orientati, e perciò, per la (2),

$$\delta < \frac{1}{m} (I_\lambda + I_{\lambda'}),$$

ed anche a fortiori,

$$\delta < \frac{1}{m \operatorname{sen} \omega} (I_\lambda + I_{\lambda'}). \tag{3}$$

Se, pur essendo sempre $\alpha \leq \omega$, è invece $\omega < \alpha' \leq \frac{\pi}{2}$, dallo stesso triangolo risulta

$$\delta = \frac{\lambda \operatorname{sen} (\alpha + \alpha')}{\operatorname{sen} \alpha'} < \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \omega},$$

onde

$$\delta < \frac{1}{m \operatorname{sen} \omega} I_\lambda$$

e quindi ancora la (3). La quale vale pure se è $\alpha \leq \omega$, $\alpha' > \frac{\pi}{2}$, per essere, in tal caso, $\delta < \bar{\lambda} = \lambda < \frac{1}{m} I_{\lambda}$.

Sia ora $\omega < \alpha \leq \pi - \omega$. Siccome i punti del cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$ che determinano le direzioni di λ e λ' non possono appartenere ambedue a γ' , che ha lunghezza minore di π e che, per l'ipotesi fatta, non contiene il punto $x' = 0$, $y' = 1$, su uno almeno dei segmenti orientati λ e λ' è sempre verificata la (2). Se ciò avviene su λ' , è $\delta \leq \frac{\lambda'}{\text{sen } \alpha} \leq \frac{\lambda'}{\text{sen } \omega}$; se invece ciò avviene su λ , dovrà essere $\alpha' > \omega$ ed anche $\alpha' < \pi - \omega$ (perchè $\alpha + \alpha' < \pi$, con $\alpha > \omega$) onde $\delta \leq \frac{\lambda}{\text{sen } \alpha'} < \frac{\lambda}{\text{sen } \omega}$; dunque vale ancora, in ambedue i casi, la (3).

Se è, infine, $\alpha > \pi - \omega$, risulta (essendo $\omega < \frac{\pi}{2}$) $\delta < \lambda'$ e su λ' vale necessariamente la (2).

La disuguaglianza (3) è così dimostrata in generale.

Consideriamo ora un (x_r, x_{r+1}) di seconda specie o contiguo ad uno di 2^a specie e siano ancora λ e λ' due segmenti orientati, appartenenti al campo A_0 , proiettantisi ortogonalmente su uno stesso segmento di (x_r, x_{r+1}) , aventi come primi estremi rispettivamente P_0, P'_0 e come secondi estremi P_1 e P'_1 , e tali che P'_1 abbia la stessa ascissa di P_0 ma ordinata minore, e P'_0 la stessa ascissa di P_1 ed ordinata maggiore di quella di P_1 diminuita della differenza fra le ordinate di P_0 e P'_1 .

La differenza δ fra le lunghezze dei segmenti $P'_1 P_0$ e $P'_0 P_1$ (il secondo dei quali sarà considerato come avente lunghezza positiva o negativa a seconda che P_1 avrà ordinata maggiore o minore di P'_0) soddisfa ancora alla disuguaglianza (3), come risulta da un ragionamento identico a quello già fatto.

d) Sia, dopo ciò, Π una poligonale tutta costituita di punti di A_0 , proiettantisi ortogonalmente sull'asse x in punti appartenenti a intervalli (x_r, x_{r+1}) tutti di prima specie o contigui a intervalli di prima specie, avente gli estremi, primo e secondo, P_0 e P_1 , ambedue di ascissa uguale alla minima delle ascisse dei punti di Π , e di ordinate, y_0 e y_1 , soddisfacenti alla disuguaglianza $y_0 < y_1$. Si conducano, per i vertici della poligonale, le parallele all'asse y e si accoppino i lati o le parti dei lati di Π che si trovano comprese fra parallele consecutive; si applichi tutte le volte che è possibile la

disuguaglianza (3) e si sommino le disuguaglianze così ottenute; si avrà

$$y_1 - y_0 < \frac{1}{m \operatorname{sen} \omega} I_{\Pi}^*.$$

L'ipotesi ammessa che l'ascissa comune degli estremi P_0 e P_1 sia la minima delle ascisse dei punti di Π , può sostituirsi con l'altra che essa sia invece la massima. Si conclude perciò che la disuguaglianza precedente vale qualunque sia l'ascissa comune degli estremi della poligonale.

Dalle poligonali possiamo passare ad una qualunque curva C del campo A_0 : ed infatti, per le ipotesi fatte sul campo A_0 , preso un numero positivo ρ , ad arbitrio, esiste almeno una poligonale Π , tutta composta di punti di A_0 , appartenente ordinatamente all'intorno (ρ) della C ed avente lunghezza diversa da quella della C per meno di ρ ; al tendere di ρ a zero, la lunghezza della Π tende perciò a quella della C e, come è ben noto (*), anche I_{Π} tende a I_C . Possiamo dunque affermare che, se gli estremi della curva C hanno ordinata, il primo, uguale a y_0 , e il secondo, uguale a y_1 , ed è $y_0 < y_1$ ($y_0 > y_1$), e se i punti della curva si proiettano ortogonalmente sull'asse x su intervalli (x_r, x_{r+1}) tutti di prima (seconda) specie o contigui a intervalli di tale specie, è

$$y_1 - y_0 < \frac{2}{m \operatorname{sen} \omega} I_C \quad \left(y_0 - y_1 < \frac{2}{m \operatorname{sen} \omega} I_C \right). \quad (4)$$

e) Occorre stabilire un'altra disuguaglianza.

Siano (x_{r-1}, x_r) (x_r, x_{r+1}) due intervalli contigui di diversa specie (non necessariamente di specie essenzialmente diversa). Per ogni punto di A_0 , di ascissa appartenente a (x_{r-1}, x_{r+1}) e per ogni coppia (x', y') appartenente ad uno qualunque dei due archi, di lunghezza 2ω , della circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$, aventi come punti medi $x' = 0, y' = 1$ e $x' = 0, y' = -1$, è sempre, per la (2), $F > m$. Ed infatti, il primo degli archi ora indicati è esterno completamente ad uno (almeno) degli archi γ'_{r-1}, γ'_r , ed altrettanto il secondo.

Possiamo aggiungere che la $F > m$ vale anche per ognuno dei punti di A_0 ora ora indicati e per ogni coppia (x', y') di quello degli archi che restano su $x'^2 + y'^2 = 1$, quando si tolgano gli archi detti di lunghezza 2ω , il quale contiene la parte comune a γ'_{r-1}, γ'_r . Se dunque C_1 e C_2 sono due curve C di A_0 i cui punti abbiano ascisse tutte appartenenti a (x_{r-1}, x_{r+1}) ed i cui

(*) L. TONELLI, *Successioni di curve e derivazione per serie*. (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° semestre 1916).

estremi, primo e secondo, siano, per C_1 , di ascisse x_{r-1} e x_{r+1} , rispettivamente, e per C_2 di ascisse x_{r+1} e x_{r+3} , allora, per la disuguaglianza (1) del n° 14, è

$$x_{r+1} - x_{r-1} \geq L'_1 \operatorname{sen} \omega - L''_1$$

$$x_{r-1} - x_{r+1} \geq L'_2 \operatorname{sen} \omega - L''_2$$

donde

$$L'_1 + L'_2 \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} (L''_1 + L''_2),$$

$$L_1 + L_2 \leq \frac{2}{m \operatorname{sen} \omega} (I_{C_1} + I_{C_2}). \quad (5)$$

f) Per procedere poi speditamente alla dimostrazione del teorema enunciato, occorre ancora di fissare una particolare decomposizione in parti dell'intervallo (a, b) .

Supposto, per fissare le idee, che (x_0, x_1) sia un intervallo di prima specie, sia (x_{r_1}, x_{r_1+1}) , (x_{r_1+1}, x_{r_1+2}) , (x_{r_1+2}, x_{r_1+3}) la prima terna (se esiste) di intervalli consecutivi (x_r, x_{r+1}) ciascuno di specie *unica* e tutti di seconda specie. Allora (x_{r_1-1}, x_{r_1}) è di prima specie (di specie *unica* o no). Indichiamo con δ_1 l'intervallo (x_{r_1-1}, x_{r_1+1}) . Sia poi (x_{r_2}, x_{r_2+1}) , (x_{r_2+1}, x_{r_2+2}) , (x_{r_2+2}, x_{r_2+3}) la prima terna (se esiste) di intervalli consecutivi, che seguono (x_{r_1+2}, x_{r_1+3}) , ciascuno di specie *unica* e tutti di prima specie; (x_{r_2-1}, x_{r_2}) risulta allora di seconda specie (di specie *unica* o no) e indicheremo con δ_2 l'intervallo (x_{r_2-1}, x_{r_2+1}) . Osserviamo che i due intervalli δ_1 e δ_2 non hanno punti comuni e che l'intervallo che li comprende, (x_{r_1-1}, x_{r_2+1}) , è composto tutto di intervalli (x_r, x_{r+1}) di seconda specie o contigui a intervalli di tale specie.

Così proseguendo sino ad esaurire tutti gli (x_r, x_{r+1}) , otterremo un numero finito (minore o uguale a $\frac{n}{3}$) di intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$. Qualora, infine, risultasse $r_{n-1} + 3 \leq n - 2$, e gli intervalli (x_{n-2}, x_{n-1}) , (x_{n-1}, x_n) fossero ciascuno di specie *unica* e di specie diversa da quella di $(x_{r_{n-1}-1}, x_{r_{n-1}+1})$, indicheremo con δ_n l'intervallo (x_{n-3}, x_{n-1}) .

Gli intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ risultano disposti su (a, b) nell'ordine scritto e composti ognuno di due intervalli (x_r, x_{r+1}) , dei quali il secondo di specie *unica* e il primo o di specie *unica* diversa da quella del secondo oppure tanto di 1ª quanto di 2ª specie; e ogni intervallo, avente come primo estremo il primo estremo di un δ e come secondo estremo il secondo estremo del δ immediatamente seguente, è tutto composto di intervalli (x_r, x_{r+1}) di una

data specie o contigui a intervalli di tale specie. E la stessa proprietà vale per l'intervallo che ha come primo estremo a e secondo estremo il secondo estremo di δ_1 , e per quello il cui primo estremo coincide col primo estremo dell'ultimo δ ed il cui secondo estremo è b .

g) Consideriamo ora una classe completa K di curve C , del campo A_0 , ed una sua qualunque curva C . Indichiamo con C_{δ_s} uno qualsiasi degli archi della C i cui punti si proiettano ortogonalmente sul segmento δ_s , con la condizione che gli estremi dell'arco, e soltanto essi, si proiettino uno su un estremo di δ_s e l'altro sull'altro estremo. Accoppiamo, se esistono, due di questi archi, scelti in modo che il primo estremo dell'uno e il secondo estremo dell'altro si proiettino su uno stesso estremo di δ_s . A questi due archi possiamo applicare la disuguaglianza (5); se dunque associamo a due a due, nel modo indicato, tutti gli archi C_{δ_s} , uno al più escluso se essi sono in numero dispari, e facciamo ciò per tutti gli indici s , la lunghezza complessiva degli archi di tutte queste coppie risulta, per la (5), non maggiore di $\frac{2}{m \operatorname{sen} \omega}$ moltiplicato per la parte di I_C che spetta a tali archi. Applicando poi la (2) del n.° 14 (in cui porremo, in luogo di $\cos \frac{\gamma}{2}$, $\operatorname{sen} \omega$) agli archi C_{δ_s} che non figurano nelle coppie formate, otterremo che la lunghezza complessiva di tutti gli archi C_{δ_s} è minore o uguale a

$$\frac{2}{m \operatorname{sen} \omega} I_C + \frac{n \Delta}{\operatorname{sen} \omega}, \quad (6)$$

dove Δ rappresenta la massima delle distanze fra due punti qualsiasi di A_0 . Possiamo trovare facilmente una limitazione al numero N degli archi C_{δ_s} . Ed infatti, la lunghezza di ciascuno di tali archi è sicuramente non minore del doppio di quella di (x_r, x_{r+1}) , vale a dire di $\frac{2(b-a)}{n}$, e dalla (5) segue

$$\frac{2(b-a)(N-n)}{n} \leq \frac{2}{m \operatorname{sen} \omega} I_C,$$

$$N \leq n + \frac{n}{m(b-a) \operatorname{sen} \omega} I_C. \quad (7)$$

h) Togliendo dalla C i punti interni agli archi C_{δ_s} restano degli archi, che indicheremo nell'ordine stesso in cui si presentano sulla C , con $C_1, C_2, \dots, C_{N'}$ dove è $N' \leq N + 1$.

Le ascisse degli estremi di un C_s ($s = 1, 2, \dots, N'$) sono una l'estremo destro di un $\delta_s \equiv (x_{r_s-1}, x_{r_s+1})$ e l'altra l'estremo sinistro di $\delta_{s'+1}$; e le ascisse di tutti gli altri punti di C_s sono tutte maggiori di x_{r_s-1} e tutte minori di x_{r_s+1} . Può esservi in ciò un'evidente eccezione per il primo estremo di C_1 , se esso coincide col primo estremo M_0 della C e per il secondo estremo di $C_{N'}$, quando questo secondo estremo coincida con quello M_1 della C ; e se per esempio, l'ascissa di M_0 è minore di x_{r_1-1} , il secondo estremo di C_1 sarà di ascissa x_{r_1-1} e le ascisse dei punti di C_1 saranno tutte comprese fra x_0 e x_{r_1+1} , estremi esclusi.

Osserviamo subito che i punti di C_s di ascissa compresa in (x_{r_s-1}, x_{r_s+1}) , estremi esclusi, costituiscono un numero finito od un'infinità numerabile di archi aventi tutti gli estremi di ascissa x_{r_s+1} , con eccezione al più per quelli dei punti M_0 e M_1 , se tali punti appartengono a C_s ed hanno ascisse contenute nell'intervallo indicato. A tutti questi archi, ad eccezione al più di quelli che hanno un estremo in M_0 o in M_1 , si può applicare la (1) del n° 14 (sostituendovi $\cos \frac{\gamma}{2}$ con $\sin \omega$) e scrivere

$$l' \leq \frac{1}{\sin \omega} l'',$$

$$l \leq \frac{2}{\sin \omega} l'',$$

mentre per quelli eccettuati si ha, per la (1),

$$l \leq \frac{1}{\sin \omega} (2l'' + \Delta).$$

E poichè (x_{r_s-1}, x_{r_s+1}) è uno degli intervalli δ , $(x_{r_s'-1}, x_{r_s'})$ e $(x_{r_s'}, x_{r_s'+1})$ sono di specie diversa e, per quanto si è già osservato in e), si deduce che la lunghezza complessiva di tutti gli archi indicati è minore o uguale a

$$\frac{2}{m \sin \omega} I_{C_s} + \frac{2 \Delta}{\sin \omega};$$

e la lunghezza complessiva degli stessi archi e degli analoghi relativi all'intervallo $(x_{r_s'+1-1}, x_{r_s'+1+1})$ è minore o eguale di

$$\frac{4}{m \sin \omega} I_{C_s} + \frac{2 \Delta}{\sin \omega}.$$

Per ottenere una limitazione superiore per la lunghezza L_s di C_s restano a considerarsi i punti di tale arco che hanno ascisse appartenenti all'intervallo $(x_{r_s'+1}, x_{r_s'+1-1})$.

Rammentato che le ascisse dei punti di C_s non escono mai dall'intervallo $(x_{r_s'-1}, x_{r_s'+1+1})$, il quale risulta composto di intervalli (x_r, x_{r+1}) tutti di una data specie o contigui a intervalli di tale specie, prendiamo a considerare un (x_r, x_{r+1}) contenuto in $(x_{r_s'+1}, x_{r_s'+1-1})$.

I punti di C_s le cui ascisse appartengono a (x_r, x_{r+1}) appartengono tutti a quegli archi di C_s i cui punti interni hanno ascisse interne all'intervallo (x_{r-1}, x_{r+2}) , i cui estremi, fatta al più eccezione per M_0 e M_1 , hanno ascisse uguali a x_{r-1} o a x_{r+2} , e che contengono ciascuno almeno un punto di ascissa appartenente a (x_r, x_{r+1}) . Questi archi, avendo ognuno lunghezza non inferiore a quella di (x_r, x_{r+1}) , sono in numero finito. Congiungiamo il secondo estremo di ciascuno di essi con il primo del primo arco successivo (considerando tali archi nell'ordine in cui si presentano su C_s) mediante segmenti rettilinei (tutti paralleli all'asse y); avremo così una curva che indicheremo con $\mathfrak{C}_{s,r}$ (non necessariamente tutta contenuta in A_0), mentre, invece, indicheremo con $C_{s,r}$ la sua parte (non continua) composta degli archi di C_s . Sia \bar{p} la lunghezza di uno qualunque dei segmenti rettilinei aggiunti, agli archi di $C_{s,r}$, sulla parallela per x_{r-1} all'asse y , per formare $\mathfrak{C}_{s,r}$; e sia p quella di uno qualunque dei segmenti, della medesima parallela, che congiungono il secondo estremo di un segmento aggiunto col primo estremo del segmento immediatamente successivo. Intenderemo che \bar{p} e p siano positivi o negativi a seconda che i segmenti di cui danno la lunghezza sono diretti verso l'alto o verso il basso. Avremo allora che la somma $\Sigma \bar{p} + \Sigma p$ esprimerà la differenza fra le ordinate \bar{y} e \bar{y} di due punti determinati di $\mathfrak{C}_{s,r}$, ambedue di ascissa x_{r-1} : $\Sigma \bar{p} + \Sigma p = \bar{y} - \bar{y}$. Rappresentiamo con $\Sigma^+ \bar{p}$, $\Sigma^+ p$ le somme dei \bar{p} e p positivi, con $\Sigma^- \bar{p}$, $\Sigma^- p$ quelle dei \bar{p} e p negativi. Supposto che gli intervalli (x_r, x_{r+1}) contenuti in $(x_{r_s'-1}, x_{r_s'+1+1})$ siano tutti di prima specie o contigui a intervalli di prima specie, abbiamo, per la (4),

$$\Sigma^+ \bar{p} + \Sigma^+ p < \frac{2}{m \operatorname{sen} \omega} I_{C_s},$$

ed anche

$$\begin{aligned} \Sigma^- |\bar{p}| &\leq \Sigma^+ \bar{p} + \Sigma^+ p + |\bar{y} - \bar{y}|, \\ &\leq \Sigma^+ \bar{p} + \Sigma^+ p + \Delta, \\ &< \frac{2}{m \operatorname{sen} \omega} I_{C_s} + \Delta, \end{aligned}$$

onde

$$\Sigma |\bar{p}| < \frac{4}{m \operatorname{sen} \omega} I_{c_s} + \Delta;$$

la quale disuguaglianza si prova in modo analogo se gli intervalli (x_r, x_{r+1}) contenuti in (x_{r_s-1}, x_{r_s+1}) sono tutti di seconda specie o contigui a intervalli di seconda specie.

Indicando con \bar{q} la lunghezza di uno qualunque dei segmenti della parallela all'asse y condotta per x_{r+2} , analoghi a quelli di lunghezza \bar{p} già considerati, abbiamo anche

$$\Sigma |\bar{q}| < \frac{4}{m \operatorname{sen} \omega} I_{c_s} + \Delta,$$

e perciò

$$\Sigma |\bar{p}| + \Sigma |\bar{q}| < \frac{8}{m \operatorname{sen} \omega} I_{c_s} + 2 \Delta.$$

Se dunque applichiamo alla curva $\mathfrak{C}_{s,r}$ la disuguaglianza (1), abbiamo

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{s,r} &\leq \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} (2 \mathfrak{L}_{s,r} + \Delta) \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} (2 L''_{s,r} + 2 \Sigma |\bar{p}| + 2 \Sigma |\bar{q}| + \Delta) \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \left(2 L''_{s,r} + \frac{16}{m \operatorname{sen} \omega} I_{c_s} + 5 \Delta \right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} L_{s,r} &\leq \frac{1}{\operatorname{sen} \omega} \left(2 \frac{I_{c_s}}{m} + \frac{16}{m \operatorname{sen} \omega} I_{c_s} + 5 \Delta \right) \\ &< \frac{18}{m \operatorname{sen}^2 \omega} (I_{c_s} + m \Delta). \end{aligned}$$

Da ciò segue che la parte di L_s che spetta ai punti di C_s aventi ascissa appartenente all'intervallo (x_{r_s+1}, x_{r_s+1-1}) è minore di

$$\frac{18 n}{m \operatorname{sen}^2 \omega} (I_{c_s} + m \Delta),$$

e che, tenendo conto di quanto già abbiamo stabilito, è

$$L_s < \frac{22 n}{m \operatorname{sen}^2 \omega} (I_{c_s} + (m+1) \Delta).$$

Il numero degli archi C_s essendo $N' \leq N + 1$, dalla (7) deduciamo

$$\Sigma L_s < \frac{22n}{m \operatorname{sen}^2 \omega} I_c + \frac{22n(n+1)(m+1)\Delta}{m \operatorname{sen}^2 \omega} \left(1 + \frac{1}{m(b-a) \operatorname{sen} \omega} I_c \right).$$

Infine, tenendo presente la lunghezza complessiva di tutti gli archi C_{2s} , che non supera il numero dato da (6), si può scrivere

$$L < \frac{24n}{m \operatorname{sen}^2 \omega} I_c + \frac{22n(n+1)(m+1)\Delta}{m \operatorname{sen}^2 \omega} \left(2 + \frac{1}{m(b-a) \operatorname{sen} \omega} I_c \right).$$

Questa disuguaglianza prova, in virtù del n.º 10, il nostro teorema.

ESEMPIO. Sia la F definita, in tutto il piano (x, y) , da

$$F \equiv \frac{1}{1+x^2+y^2} \left| \sqrt{x'^2+y'^2} - x' \cos x - y' \operatorname{sen} x \right|.$$

È sempre, per ogni coppia (x', y') normalizzata,

$$F_1 \equiv \frac{1}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0;$$

inoltre, per ognuna delle coppie dette, ponendo

$$\cos \alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

è, qualunque sia (x, y) ,

$$F = \frac{1}{1+x^2+y^2} \left[1 - \cos(\alpha - x) \right] \geq 0,$$

e la F si annulla solo per $\alpha = x$, ossia per $x' = \cos x$, $y' = \operatorname{sen} x$. Se dunque conduciamo le parallele all'asse y aventi per ascisse $x = \frac{\pi}{2} k$, dove k assume tutti i valori interi, positivi e negativi, ad ogni striscia del piano (x, y) , determinata da due parallele consecutive, corrisponde un arco della circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$, di lunghezza $\frac{\pi}{2}$, sul quale stanno tutte le coppie (x', y') che annullano la F in punti della striscia stessa. Le condizioni del nostro teorema sono pertanto verificate per ogni campo A_0 (n.º 15).

17. *Caso particolare.* Dalla proposizione del n.º precedente scende il seguente corollario:

Se I_C è un integrale quasi-regolare semidefinito-positivo normale e la funzione F da cui dipende I_C è costante rispetto ad una delle due variabili x, y , in ogni classe completa di curve C di A_0 esiste almeno una curva minimante l'integrale considerato.

Questo caso si presenta, ad esempio, se è

$$F \equiv \frac{1}{1+x^2} \left\{ \sqrt{x'^2 + y'^2} - x' \cos x - y' \sin x \right\}$$

Alla condizione che la funzione F sia costante rispetto ad una delle due variabili x e y , si può sostituire l'altra che la F , come funzione delle due variabili indicate, dipenda soltanto da una loro combinazione lineare $ax + by$, con a e b costanti. Ciò, per esempio, si verifica se si ha

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2} + x' \cos(x+y) + y' \sin(x+y).$$

§ V.

GLI INTEGRALI QUASI-REGOLARI SEMIDEFINITI.

a) GLI ZERI DELLA F SONO IN NUMERO FINITO.

18. TEOREMA. Se, in tutto il campo A , è

$$F(x, y, x', y') \equiv \varphi(x, y) \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

con $\varphi(x, y) = 0$ in un numero finito di punti: P_1, P_2, \dots, P_n , e $\varphi(x, y) > 0$ in tutti gli altri;

se, per ogni punto P_s ($s = 1, 2, \dots, n$) è possibile di determinare tre numeri positivi, minori di 1, r_s, h_s, k_s , in modo che, detto $\bar{\varphi}$ il valore assunto dalla $\varphi(x, y)$ in un punto qualunque Q di A , appartenente al circolo (P_s, r_s) , in nessun punto di A appartenente al segmento $P_s Q$ la φ abbia valore maggiore di $\bar{\varphi}$, e che la minima distanza \bar{r} , da P_s , dei punti di A in cui è $\varphi(x, y) = \bar{\varphi}$ e la massima distanza \bar{K} , pure da P_s , dei punti di A , appartenenti al circolo detto e in cui è $\varphi(x, y) = h_s \bar{\varphi}$, soddisfino sempre alla disuguaglianza $\bar{K} \leq k_s \bar{r}$;

se, infine, il campo A è limitato e K è una classe completa di curve C e tali che, se r è sufficientemente piccolo, sostituendo, in una sua curva C qualsiasi, ad un arco tutto contenuto nel circolo (P, r) , la corda corrispondente, si ottenga ancora una curva della classe;

l'integrale I_C ammette in K almeno una curva minimante.

Per la dimostrazione ci limiteremo al caso di un solo punto P_s , che indicheremo semplicemente con P ; l'estensione al caso generale è immediata.

Siano r, h, k i tre numeri, corrispondenti a P , indicati nella seconda condizione dell'enunciato. Possiamo ritenere r già rimpicciolito in modo da soddisfare a quanto richiede la terza condizione.

Essendo sempre, in A , $\varphi \geq 0$, se C è una qualsiasi curva di K , è $I_C \geq 0$. Il limite inferiore i di I_C in K è pertanto non negativo. Detto n un intero positivo, indichiamo con W_n l'insieme di tutte le curve di K che soddisfano alla

$$I_C \leq i + \frac{1}{n}, \quad (1)$$

curve che esistono certamente, perchè, in caso contrario, il limite inferiore i risulterebbe maggiore di $i + \frac{1}{n}$.

Considerato un circolo (P, ρ) e dette L e L_ρ rispettivamente la lunghezza totale della curva C e quella parte di L che spetta ai punti di C non interni al circolo (P, ρ) , è

$$I_C \geq m_\rho L_\rho,$$

dove m_ρ indica il minimo valore che la funzione φ assume nei punti di A non interni al circolo considerato, minimo che è maggiore di zero. Se la C appartiene a W_n , è anche, per la (1),

$$L_\rho \leq \frac{1}{m_\rho} \left(i + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{m_\rho} (i + 2). \quad (2)$$

Possono presentarsi tre casi.

1° caso: è possibile determinare un valore di $\rho, \bar{\rho}$, in modo che, per qualunque n , esista sempre in W_n almeno una curva tutta costituita di punti non interni al circolo $(P, \bar{\rho})$. Indichiamo, allora, con W'_n l'insieme di tutte le curve di W_n che godono della proprietà detta. Per le (1) e (2), una qualunque curva C'_n di W'_n soddisfa alle disuguaglianze

$$I_{C'_n} \leq i + \frac{1}{n}, \quad L'_{C'_n} < \frac{1}{m_{\bar{\rho}}} (i + 2),$$

dalle quali si deduce l'esistenza di almeno una curva minimante I_C col ragionamento usato al n° 8.

2° caso: per quanto piccolo si prenda ρ e comunque si scelga n , esiste sempre almeno una curva di W_n tutta contenuta nel circolo (P, ρ) . Vi è allora una curva minimante I_C , la quale si riduce al punto P .

3° caso: comunque si prenda ρ , purchè sufficientemente piccolo, si può sempre determinare, in corrispondenza di esso, un \bar{n} in modo che, per ogni $n > \bar{n}$, su ogni curva C_n dell'insieme W_n esistano sempre punti interni e punti esterni al circolo (P, ρ) .

a) Sia, in tal caso, supposto $\rho < r$ e $n > \bar{n}$. Detto M_n il primo punto della C_n (curva qualsiasi di W_n) non interno al circolo (P, ρ) (*), si indichi con $C_n^{(i)}$ il massimo arco della C_n , che contiene M_n , al quale non appartenga nessun punto interno al circolo $(P, \frac{1}{2}\rho)$. La lunghezza $L_n^{(i)}$ di $C_n^{(i)}$ soddisfa, per la (2), alla disuguaglianza

$$L_n^{(i)} < \frac{1}{m_1 \frac{1}{2} \rho} (i + 2),$$

ed anche, se \bar{n}_1 è il più piccolo numero maggiore di \bar{n} e tale che, per $n > \bar{n}_1$, ogni C_n abbia almeno un punto interno al circolo $(P, \frac{1}{2}\rho)$, ed è $n > \bar{n}_1$, alla

$$L_n^{(i)} \geq \frac{1}{2} \rho.$$

Indichiamo con $W_n^{(i)}$ l'insieme degli archi $C_n^{(i)}$ relativi a tutte le C_n . La successione

$$W_{n_1+1}^{(1)}, W_{n_1+2}^{(1)}, \dots, W_{n_1+3}^{(1)}, \dots$$

è composta di insiemi le cui curve sono tutte contenute nel campo limitato A e tutte di lunghezza inferiore ad un numero fisso. Per quanto si è rammentato al n.° 2, vengono dunque a corrispondere ad essa una curva limite $C^{(1)}$ ed un'altra successione

$$W_{1,1}^{(1)}, W_{2,1}^{(1)}, \dots, W_{n,1}^{(1)}, \dots,$$

(*) Per ciascuna di quelle curve C che fossero chiuse si intenderà fissato un punto da considerarsi come primo punto della curva.

convergente uniformemente verso la $C^{(1)}$, dove $W_{n,1}^{(1)}$ è un insieme estratto da un $W_{n,1+r}^{(1)}$ di indice $r \geq n$. Ed è evidentemente,

$$L^{(1)} \leq \frac{1}{m_1^{\frac{1}{2}^e}} (i + 2).$$

Detto $W_{n,1+r}^{(1)}$ l'insieme da cui è estratto $W_{n,1}^{(1)}$, indichiamo con $W_{n,1}$ l'insieme di tutte le curve $C_{n,1+r}^{(1)}$ di $W_{n,1+r}^{(1)}$ (i cui archi $C_{n,1+r}^{(1)}$ appartengono a $W_{n,1}^{(1)}$). Avremo così la successione

$$W_{1,1}, W_{2,1}, \dots, W_{n,1}, \dots$$

e qualunque curva $C_{n,1}$ di $W_{n,1}$ soddisferà alla disuguaglianza (1).

Sostituendo al cerchio $\left(P, \frac{1}{2} \rho\right)$ l'altro $\left(P, \frac{1}{2^2} \rho\right)$ e alla successione degli insiemi W_n quella degli insiemi $W_{n,1}$, potremo, in modo analogo, costruire una successione

$$W_{1,2}, W_{2,2}, \dots, W_{n,2}, \dots,$$

dove $W_{n,2}$ è un insieme di curve estratto da un $W_{m,1}$, di indice $m \geq n$ e tale che, detto $W_{n,2}^{(2)}$ l'insieme formato con gli archi $C_{n,2}^{(2)}$ (analoghi a quelli $C_n^{(1)}$) delle sue curve, la successione

$$W_{1,2}^{(2)}, W_{2,2}^{(2)}, \dots, W_{n,2}^{(2)}, \dots$$

converga uniformemente verso una curva $C^{(2)}$ di lunghezza

$$L^{(2)} \leq \frac{1}{m_1^{\frac{1}{4}^e}} (i + 2),$$

avente $C^{(1)}$ come arco parziale. Avremo, inoltre, soddisfatta la (1) per ogni curva $C_{n,2}$ di $W_{n,2}$.

Proseguiamo indefinitamente questo procedimento, sostituendo via via, al cerchio $\left(P, \frac{1}{2^2} \rho\right)$, gli altri $\left(P, \frac{1}{2^3} \rho\right)$, $\left(P, \frac{1}{2^4} \rho\right)$ Costruita la successione

$$W_{1,1}, W_{2,2}, \dots, W_{n,n}, \dots \tag{3}$$

risulta: 1°) che tutte le curve $C_{n,n}$ di $W_{n,n}$ appartengono ad uno stesso insieme W_m di indice $m \geq n$ e soddisfano alla disuguaglianza

$$I_{C_{n,n}} \leq i + \frac{1}{n}; \tag{4}$$

2°) che, detto $C_{nn}^{(s)}$ il massimo arco di C_{nn} che contiene il primo punto della curva *non* interno al circolo (P, ρ) ed al quale non appartiene alcun punto interno al circolo $(P, \frac{1}{2^s} \rho)$, e indicato con $W_{nn}^{(s)}$ l'insieme di tutti questi archi, la successione

$$W_{1,1}^{(s)}, W_{2,2}^{(s)}, \dots, W_{n,n}^{(s)}, \dots$$

converge uniformemente ad una curva $C^{(s)}$ (di lunghezza finita e appartenente ad A); 3°) che $C^{(s)}$ è tutta contenuta in $C^{(s+1)}$, ha almeno un punto non interno al circolo (P, ρ) , ed almeno un estremo appartenente alla circonferenza di $(P, \frac{1}{2^s} \rho)$, e non ha alcun punto interno a questo secondo circolo.

b) Dimostriamo che la successione $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(s)}, \dots$ converge uniformemente ad una curva $C^{(\infty)}$, continua e rettificabile, di A . Sia M il primo punto di $C^{(1)}$ *non* esterno al circolo (P, ρ) . Se esiste un $r_0 > 0$ tale che, qualunque sia s , nessun punto di $C^{(s)}$ che preceda M risulti interno al circolo (P, r_0) , allora l'arco di $C^{(s)}$, che ha come secondo estremo M , ha lunghezza inferiore ad un numero fisso, indipendente da s . Ed infatti, detto $M^{(s)}$ il primo punto di $C^{(s)}$, per la convergenza uniforme di $W_{nn}^{(s)}$ a $C^{(s)}$, si può determinare, su ogni $C_{nn}^{(s)}$, un punto M_{nn} tale che, detto $M_{nn}^{(s)}$ il primo estremo di $C_{nn}^{(s)}$, gli archi $C_{nn}^{(s)}(M_{nn}^{(s)}, M_{nn})$ convergano uniformemente, per $n \rightarrow \infty$, verso $C^{(s)}(M^{(s)}, M)$. Per ogni n maggiore di un certo indice, tutti i punti dell'arco indicato di $C_{nn}^{(s)}$ risultano esterni al circolo $(P, \frac{1}{2} r_0)$ e su essi sarà sempre $\varphi(x, y) > m_0$, con $m_0 > 0$, onde

$$I_{C_{nn}^{(s)}(M_{nn}^{(s)}, M_{nn})} > m_0 L_{nn}^{(s)}[M_{nn}^{(s)}, M_{nn}],$$

$L_{nn}^{(s)}[M_{nn}^{(s)}, M_{nn}]$ essendo la lunghezza di $C_{nn}^{(s)}(M_{nn}^{(s)}, M_{nn})$, e per la (4),

$$L_{nn}^{(s)}[M_{nn}^{(s)}, M_{nn}] < \frac{1}{m_0} (i + 2),$$

ciò che prova che la lunghezza di $C^{(s)}(M^{(s)}, M)$ è $\leq \frac{1}{m_0} (1 + 2)$.

Supponiamo ora che non esista il numero r_0 . In tale ipotesi, comunque piccolo si prenda $\varepsilon < 0$, si trova sempre un \bar{s} tale che, per ogni $s > \bar{s}$, sull'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, M)$ vi sono sempre punti interni al circolo (P, ε) . E si può anche scegliere un $\bar{s}' > \bar{s}$ tale che, per qualsiasi $s > \bar{s}'$, nessun punto dell'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, M^{(s)})$ sia esterno al circolo (P, ρ) ; ed infatti, in caso contrario, preso

comunque un numero intero positivo p , prendendo s maggiore di \bar{s} e sufficientemente grande, si avrebbero su $C^{(s)}(M^{(s)}, M^{(s)})$ almeno p archi senza punti comuni, aventi tutti ambedue gli estremi interni al circolo (P, ε) e tutti almeno un punto esterno a quello (P, ρ) . E poichè, per la convergenza uniforme di $W_{nn}^{(s)}$ alla $C^{(s)}$, anche ogni C_{nn} , per n sufficientemente grande, avrebbe allora almeno p archi della stessa natura e quindi almeno p archi di lunghezza non inferiore a $2(\rho - \varepsilon)$ e darebbe così all'integrale I un valore non inferiore a $2p(\rho - \varepsilon)m_\varepsilon$ (m_ε essendo il minimo della I' in tutti i punti di A non interni al circolo (P, ε) e per ogni coppia (x', y') normalizzata), questo valore — essendo p arbitrario — potrebbe essere comunque grande, contrariamente alla (4). Indichiamo con N il punto $M^{(s)}$, con φ_1 il valore della φ sul punto N , e con $N^{(s,1)}$ il primo punto di $C^{(s)}$, precedente M , tale che sull'arco $C^{(s)}(N^{(s,1)}, N)$ sia sempre $\varphi \geq h\varphi_1$. Poichè, per s sufficientemente grande, esistono su $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ punti in cui la φ assume valori piccoli quanto vuolsi, esisterà un indice s_1 (sia esso il più piccolo possibile) tale che $N^{(s,1)}$ risulti interno all'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, M)$: in $N^{(s,1)}$ sarà allora $\varphi = h\varphi_1$.

Detta l_1 la lunghezza di $C^{(s)}(N^{(s,1)}, N)$, avremo

$$I_{C^{(s)}(N^{(s,1)}, N)} < h\varphi_1 l_1. \tag{5}$$

Per una delle ipotesi fatte nell'enunciato del teorema, in tutti i punti del segmento PM , la cui lunghezza sarà indicata con λ_1 , è $\varphi \leq \varphi_1$, ed è perciò

$$I_{PN} < \varphi_1 \lambda_1. \tag{6}$$

Affermiamo che non può essere

$$I_{C^{(s)}(N^{(s,1)}, N)} > I_{PN}. \tag{7}$$

Supponiamo, infatti, che la differenza tra il primo e il secondo membro di questa disuguaglianza sia $d > 0$. Detto, per s sufficientemente grande, Q un punto di $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ interno al circolo (P, ε) e non appartenente all'arco $C^{(s)}(N^{(s,1)}, N)$, si possono determinare, in virtù della convergenza uniforme di $W_{nn}^{(s)}$ a $C^{(s)}$, su ogni $C_{nn}^{(s)}$ tre punti, Q_{nn} , N'_{nn} , N_{nn} , tali che, per n sufficientemente grande, N'_{nn} appartenga all'arco $C_{nn}^{(s)}(Q_{nn}, N_{nn})$ e che, per $n \rightarrow \infty$, gli archi $C_{nn}^{(s)}(Q_{nn}, N_{nn})$ convergano uniformemente a $C^{(s)}(Q, N)$ e il punto N'_{nn} converga a $N^{(s,1)}$. Dalla semicontinuità inferiore dell'integrale I_c

(n.º 6), si ha, per ogni n maggiore di un certo \bar{n} ,

$$\begin{aligned} I_{C_{nn}^{(s)}(N'_{nn}, N_{nn})} &> I_{C^{(s)}(N^{(s)}, N)} - \frac{1}{3} d \\ &> I_{PN} + \frac{2}{3} d \end{aligned}$$

ed anche

$$I_{Q_{nn}N_{nn}} < I_{QN} + \frac{1}{3} d$$

e perciò

$$\begin{aligned} I_{Q_{nn}N_{nn}} &< (I_{QN} - I_{PN}) + I_{C_{nn}^{(s)}(N'_{nn}, N_{nn})} - \frac{1}{3} d \\ &< (I_{QN} - I_{PN}) + I_{C_{nn}^{(s)}(Q_{nn}, N_{nn})} - \frac{1}{3} d. \end{aligned}$$

E siccome ε è arbitrario, la differenza già scritta entro parentesi si può rendere minore di $\frac{1}{6} d$, per ogni s sufficientemente grande, onde

$$I_{Q_{nn}N_{nn}} < I_{C_{nn}^{(s)}(Q_{nn}, N_{nn})} - \frac{1}{6} d.$$

Se dunque, nella curva C_{nn} sostituiamo all'arco $C_{nn}(Q_{nn}, N_{nn}) \equiv C_{nn}^{(s)}(Q_{nn}, N_{nn})$ la corda $Q_{nn}N_{nn}$, e indichiamo con C'_{nn} la nuova curva così ottenuta — curva che, per la terza ipotesi del nostro teorema, appartiene anch'essa alla classe K — abbiamo

$$I_{C'_{nn}} < I_{C_{nn}} - \frac{1}{6} d.$$

Ma dalla (4) scende

$$I_{C'_{nn}} < i + \frac{1}{n} - \frac{1}{6} d,$$

la quale, dovendo essere verificata per ogni $n > \bar{n}$, contraddice alla definizione stessa del numero i .

È così dimostrata l'impossibilità della (7). Dalle (5) e (7) possiamo perciò dedurre

$$\begin{aligned} h \varphi_1 l_1 &< \varphi_1 \lambda_1, \\ l_1 &< \frac{\lambda_1}{h}. \end{aligned} \tag{8}$$

Indichiamo con $N^{(s_2)}$ il primo punto di $C^{(s)}$, precedente $N^{(s_1)}$, tale che sull'arco $C^{(s)}$ ($N^{(s_2)}$, $N^{(s_1)}$) sia sempre $\varphi \geq h (h \varphi_1) = h^2 \varphi_1$, e con s_2 il più piccolo indice, maggiore di s_1 , tale che $N^{(s_2)}$ risulti interno all'arco $C^{(s_2)}$ ($M^{(s_2)}$, M): in $N^{(s_2)}$ sarà allora $\varphi = h^2 \varphi_1$, e detta l_2 la lunghezza di $C^{(s_2)}$ ($N^{(s_2)}$, $N^{(s_1)}$) e λ_2 quella del segmento $PN^{(s_1)}$, si avrà, per lo stesso ragionamento fatto or ora,

$$l_2 < \frac{\lambda_2}{h}.$$

Così proseguendo indefinitamente, avremo, per ogni intero positivo n ,

$$l_n < \frac{\lambda_n}{h},$$

dove i simboli usati hanno significati analoghi a quelli precedenti, ed il punto $N^{(s_n)}$ (poichè in esso la $\varphi(x, y)$ assume il valore $h^n \varphi_1$ ed è $h < 1$) tenderà al punto P . Dalle disuguaglianze stabilite la lunghezza dell'arco $C^{(s_n)}$ ($N^{(s_n)}$, $N^{(s_{n-1}, n-1)}$) risulta data da

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n < \frac{1}{h} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

Ma per la seconda delle ipotesi del teorema è $\lambda_2 \leq k \lambda_1$ e in generale $\lambda_n \leq k \lambda_{n-1} \leq k^{n-1} \lambda_1$; perciò

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n < \frac{\lambda_1}{h} (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}) < \frac{\lambda_1}{h} \cdot \frac{1}{1-k}.$$

per essere $k < 1$. Ora $N^{(s_n)}$ tende, per $n \rightarrow \infty$, a P e $C^{(s)}$ non ha punti interni al circolo $\left(P, \frac{1}{2s} \rho\right)$; dunque, preso comunque s , si può determinare n in modo che $M^{(s)}$ risulti interno all'arco $C^{(s_n)}$ ($N^{(s_n)}$, M), e ciò prova che la lunghezza di $C^{(s)}$ ($M^{(s)}$, N) resta sempre inferiore a $\frac{\lambda_1}{h(1-k)}$ e che resta sempre inferiore ad un numero fisso anche la lunghezza di $C^{(s)}$ ($M^{(s)}$, M).

In modo analogo si prova che, detto $M^{(s)}$ il secondo estremo di $C^{(s)}$, anche l'arco $C^{(s)}$ (M , $M^{(s)}$) ha lunghezza sempre inferiore ad un numero fisso, onde si conclude che altrettanto accade della lunghezza di tutto $C^{(s)}$ e che la successione $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ..., $C^{(s)}$, ... converge uniformemente ad una curva $C^{(\infty)}$, continua e rettificabile del campo A .

c) Rappresenteremo, nel seguito, $C^{(\infty)}$ con $\alpha^{(1)}$, e diremo Q_1 e Q_2 i suoi estremi. Da quanto precede segue che ogni punto interno di $\alpha^{(1)}$ è distinto da P e che, su tale arco, vi è almeno un punto non interno al circolo (P, ρ) ed un estremo coincidente con P ; segue anche che se il primo estremo Q_1 (od il secondo Q_2) non coincide con P , i primi (o secondi) estremi degli archi $C^{(s)}$ coincidono tutti, da un certo s in poi, con Q , e che i primi (secondi) estremi degli archi $C_{nn}^{(s)}$ coincidono anch'essi, da un certo s in poi, coi primi (secondi) estremi della curva C_{nn} .

Su ogni C_{nn} indichiamo con $M_{nn}^{(s)}$ il punto $M_{nn}^{(s)}$ di indice s più alto, se la C_{nn} non figura in tutti gli insiemi W_{nn} , e in caso contrario, il limite di $M_{nn}^{(s)}$ per $s \rightarrow \infty$. Per considerazioni già fatte in b), preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, possiamo affermare che esiste un s' tale che, per ogni $s > s'$ e per ogni n maggiore di un certo n' , tutti gli archi C_{nn} ($M_{nn}^{(s)}$, $M_{nn}^{(s)}$) — dove $M_{nn}^{(s)}$ indica il primo estremo di C_{nn} — sono interni al circolo (Q_1, ε) e tutti quelli C_{nn} ($\bar{M}_{nn}^{(s)}$, $M_{nn}^{(\infty)}$) sono interni al circolo (Q_2, ε) .

Detto $U_{nn}^{(1)}$ l'insieme degli archi C_{nn} ($M_{nn}^{(s)}$, $M_{nn}^{(\infty)}$) relativi a tutte le curve C_{nn} di W_{nn} mostriamo che la successione

$$U_{1,1}^{(1)}, U_{2,2}^{(1)}, \dots, U_{nn}^{(1)}, \dots$$

converge uniformemente verso l'arco $\alpha^{(1)}$. Per la convergenza uniforme di $C^{(s)}$ a $\alpha^{(1)}$, possiamo determinare un $s'' > s'$ tale che la $C^{(s'')}$ appartenga ordinatamente all'intorno (ε) di $\alpha^{(1)}$; per la convergenza uniforme di $W_{nn}^{(s'')}$ (per $\rightarrow \infty$) alla $C^{(s'')}$, possiamo determinare un $n'' > n'$ tale che, qualunque sia $n > n''$, tutti gli archi $C_{nn}^{(s'')}$ di $W_{nn}^{(s'')}$ appartengano ordinatamente all'intorno (ε) della $C^{(s'')}$; e poichè l'arco C_{nn} ($M_{nn}^{(s'')}$, $M_{nn}^{(s'')}$) appartiene tutto al cerchio (Q_1, ε) e quello C_{nn} ($M_{nn}^{(s'')}$, $M_{nn}^{(\infty)}$) a quello (Q_2, ε) , ne risulta che, per ogni $n > n''$, tutti gli archi di $U_{nn}^{(1)}$ appartengono ordinatamente all'intorno (2ε) di $\alpha^{(1)}$. Ciò dimostra la convergenza uniforme annunciata.

d) Sopprimiamo su ogni curva C_{nn} di W_{nn} tutti i punti precedenti $M_{nn}^{(\infty)}$ e ragioniamo sugli archi restanti come già abbiamo fatto sulle curve di W_n ; e così proseguiamo finchè è possibile. Verremo a costruire successivamente gli archi $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, ... continui e rettificabili, ciascuno dei quali ha tutti i suoi punti interni distinti da P e ambedue gli estremi in P — fatta eccezione al più per il secondo estremo dell'ultimo — e contiene almeno un punto non interno al circolo (P, ρ) . Per considerazioni già fatte in b), ne risulta che questi archi α non possono essere che in numero limitato e il procedimento indicato ha perciò un termine.

Detta C_0 la curva costituita dagli archi $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots$, presi nell'ordine determinato dall'indice che li distingue, questa curva risulta continua e rettificabile e appartenente al campo A . Il procedimento seguito per la costruzione degli archi α conduce poi ad una successione

$$\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_n, \dots$$

di insiemi di curve della classe K — dove \bar{W}_n è un insieme estratto da un W_n di indice n uguale o maggiore — la quale successione converge uniformemente verso la C_0 . Questa curva C_0 , risultando curva limite per la classe K , appartiene alla classe stessa, la quale, per ipotesi, è completa. Infine, soddisfacendo ogni curva di W_n alla disuguaglianza (1), a tale disuguaglianza soddisfa anche ogni curva di \bar{W}_n e la semicontinuità inferiore dell'integrale I_C porta che sia $I_{C_0} \leq i$ e quindi necessariamente $I_{C_0} = i$. La C_0 è dunque una curva minimante I_C nella classe K .

ESEMPIO. Sia il campo A dato da un quadrato a lati paralleli agli assi x e y , avente un vertice nell'origine $(0, 0)$ e contenuto fra le direzioni positive degli assi, e si abbia .

$$F(x, y, x', y') \equiv (x + y) \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Nel campo A è $x + y > 0$ in tutti i punti eccettuata l'origine $(0, 0)$, nella quale è, invece, $x + y = 0$.

Su ogni raggio uscente dall'origine O , la funzione $x + y$ va continuamente crescendo e, preso r comunque, $h = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, risulta verificata la seconda condizione del nostro teorema, perchè la minima distanza da O dei punti di A , nei quali è $x + y = \bar{\varphi}$, è $\frac{\bar{\varphi}}{\sqrt{2}}$, mentre quella massima è φ , ed è

$$\text{perciò } \bar{r} = \frac{\bar{\varphi}}{\sqrt{2}}, \quad \bar{R} = \frac{\bar{\varphi}}{2}.$$

In ogni classe completa K , soddisfacente alla terza condizione del teorema più sopra dimostrato, esiste dunque almeno una curva minimante l'integrale

$$\int_C (x + y) \sqrt{x'^2 + y'^2} ds.$$

Esiste, in particolare, almeno una curva minimante tale integrale fra tutte le curve continue e rettificabili che congiungono due punti dati o due curve date ed appartengono al campo A sopra definito.

19. 1.^a condizione particolare. La seconda condizione del teorema del numero precedente è soddisfatta se, per ognuno dei punti P_s ($s = 1, 2, \dots, n$), esiste un intorno in cui la $\varphi(x, y)$ è definita (anche fuori del campo A) sempre ≥ 0 , con $\varphi = 0$ in P_s , e finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, e se inoltre in ciascuno dei punti P_s l'hessiano della φ è maggiore di zero.

Abbia, il punto P_s , le coordinate x_s, y_s . Posto

$$x - x_s = \rho \cos \alpha, \quad y - y_s = \rho \sin \alpha,$$

abbiamo

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_s + \rho \cos \alpha, y_s + \rho \sin \alpha),$$

da cui, derivando, nell'intorno di (x_s, y_s) ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \varphi_x \cos \alpha + \varphi_y \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = \varphi_{xx} \cos^2 \alpha + 2 \varphi_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + \varphi_{yy} \sin^2 \alpha.$$

Siccome è $\varphi(x_s, y_s) = 0$, e, in ogni altro punto di A , di un intorno convenientemente piccolo di P_s , per es. di un circolo (P_s, r_s) , $\varphi(x, y) \geq 0$, la φ ha in P_s un minimo relativo ed è pertanto

$$\varphi_x(x_s, y_s) = 0, \quad \varphi_y(x_s, y_s) = 0,$$

da cui

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=0} = 0 \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=0} = \varphi_{xx}(x_s, y_s) \cos^2 \alpha + 2 \varphi_{xy}(x_s, y_s) \cos \alpha \sin \alpha + \varphi_{yy}(x_s, y_s) \sin^2 \alpha. \tag{2}$$

Per l'ipotesi ammessa sull'hessiano della φ , è, in (x_s, y_s) ,

$$\varphi_{xx} \cdot \varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 > 0,$$

ciò che assicura che il secondo membro della (2) è sempre diverso da zero, qualunque sia α , e precisamente del segno di $\varphi_{xx}(x_s, y_s)$. Ma tal segno non può essere negativo, perchè in (x_s, y_s) la φ ha un minimo. Il secondo membro della (2) ha dunque un minimo valore $\mu > 0$, e per la continuità ammessa delle derivate parziali dei primi due ordini della φ , è, se r_s è conveniente-

mente piccolo, e se (x, y) appartiene al circolo (P_s, r_s) ,

$$\frac{1}{2} \mu < \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} < 2 \mu_1.$$

Da questa doppia disuguaglianza, tenendo conto della (1) e della

$$\varphi(x_s, y_s) = 0,$$

deduciamo, per ogni α e ogni $\rho \leq r_s$,

$$\frac{1}{2} \mu \rho < \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} < 2 \mu_1 \rho, \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \mu \rho^2 < \varphi < \mu_1 \rho^2. \quad (4)$$

Essendo, per i valori di α e ρ indicati, $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$ sempre positiva, tranne per $\rho = 0$, la funzione di ρ , $\varphi(x_s + \rho \cos \alpha, y_s + \rho \sin \alpha)$, è crescente, e se Q è un punto qualunque del circolo (P_s, r_s) , il valore che in esso assume la φ è maggiore di tutti quelli che la funzione assume in tutti gli altri punti del segmento PQ . Di più, se $\bar{\varphi}$ è il valore della φ in Q , la minima distanza r dei punti del circolo (P_s, r_s) in cui è $\varphi(x, y) = \bar{\varphi}$ soddisfa, per la seconda delle disuguaglianze (4), alla

$$\bar{r} > \sqrt{\frac{\bar{\varphi}}{\mu_1}};$$

la massima distanza \bar{R}' , da P_s , dei punti del circolo detto in cui è

$$\varphi(x, y) = \frac{\mu}{16 \mu_1} \bar{\varphi},$$

soddisfa invece, per la prima delle disuguaglianze (4), alla

$$\bar{R}' \leq \sqrt{\frac{\bar{\varphi}}{4 \mu_1}},$$

ed è così

$$\bar{R}' \leq \frac{1}{2} \bar{r}.$$

Dunque la seconda condizione del teorema del n.º 18 è soddisfatta per r_s ,

sufficientemente piccolo e

$$h_s = \frac{\mu}{16\mu_1}, \quad k_s = \frac{1}{2}.$$

ESEMPIO. Le condizioni qui considerate sono verificate se è

$$F(x, y, x', y') \equiv (x^2 + y^2) \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

La $\varphi(x, y) \equiv x^2 + y^2$ è sempre maggiore di zero, in tutto il piano (x, y) , ad eccezione dell'origine $x = 0, y = 0$, in cui è $\varphi = 0$. Nell'origine, l'hessiano della φ ha per valore 4.

20. 2.^a Condizione particolare. La seconda condizione del teorema del n.° 18 è soddisfatta se, per ognuno dei punti P_s ($s = 1, 2, \dots, n$), esiste un intorno in tutto il quale (anche fuori del campo A) sia

$$\varphi(x, y) \equiv \psi(f(x, y)),$$

con $\psi(0) = 0$ e $\psi(z) > 0$ per $z > 0$, $f(x_s, y_s) = 0$ ($P_s \equiv (x_s, y_s)$) e $f(x, y) > 0$ in tutti i punti, degl'intorni detti, distinti dai P_s , e con ψ e f funzioni finite e continue insieme con le loro derivate dei primi due ordini; e se, inoltre, in ciascuno dei punti P_s , l'hessiano della funzione $f(x, y)$ è maggiore di zero ed è $\psi'(0) > 0$ oppure $\psi''(0) > 0$.

Posto ancora $x - x_s = \rho \cos \alpha, y - y_s = \rho \sin \alpha$, abbiamo, nell'intorno di P ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \psi' \cdot \left\{ f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} = \psi'' \cdot \left\{ f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha \right\}^2 + \psi' \cdot \left\{ f_{xx} \cos^2 \alpha + 2f_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + f_{yy} \sin^2 \alpha \right\},$$

e poichè (x_s, y_s) è un minimo relativo per la funzione $f(x, y)$,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=0} = \psi'(0) \cdot \left\{ f_{xx}(x_s, y_s) \cos^2 \alpha + 2f_{xy}(x_s, y_s) \cos \alpha \sin \alpha + f_{yy}(x_s, y_s) \sin^2 \alpha \right\}.$$

Se dunque è $\psi'(0) > 0$, è pure

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=0} > 0$$

.)

e il ragionamento fatto al n.º precedente prova il nostro asserto. Supponiamo, invece, che non sia $\psi'(0) > 0$. Per le ipotesi fatte, sarà allora $\psi'(0) = 0$ e $\psi''(0) > 0$. Dall'essere l'hessiano della $f(x, y)$ maggiore di zero in (x_s, y_s) , deduciamo l'esistenza di tre numeri positivi μ, μ_1 e r_s tali che sia, in ogni punto del circolo (P_s, r_s) ,

$$\frac{1}{2} \mu < f_{xx} \cos^2 \alpha + 2 f_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + f_{yy} \sin^2 \alpha < 2 \mu_1$$

e quindi (come al n.º precedente)

$$\frac{1}{2} \mu \rho < \frac{\partial f}{\partial \rho} < 2 \mu_1 \rho,$$

$$\frac{1}{4} \mu \rho^2 < f < \mu_1 \rho^2.$$

Segue di qui che, per r_s sufficientemente piccolo, nel circolo (P_s, r_s) è

$$\frac{1}{2} \psi''(0) < \psi''(f) < 2 \psi''(0),$$

$$\frac{1}{2} \mu \rho < f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha = \frac{\partial f}{\partial \rho} < 2 \mu_1 \rho,$$

$$\frac{1}{2} \psi''(0) f < \psi'(f) < 2 \psi''(0) f,$$

$$\frac{1}{8} \mu \rho^2 \psi''(0) < \psi'(f) < 2 \mu_1 \rho^2 \psi''(0),$$

donde

$$\frac{3}{16} \mu^2 \rho^2 \psi'(0) < \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} < 12 \mu_1 \rho^2 \psi''(0).$$

Di qui si trae, ragionando come al n.º precedente, che la seconda condizione del teorema del n.º 18 è ancora soddisfatta.

ESEMPIO. Sia

$$F(x, y, x', y') \equiv (a^2 x^2 + b^2 y^2) \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

con $a^2 b^2 \neq 0$. Qui è $\psi(z) \equiv z^2$, $f(x, y) \equiv a^2 x^2 + b^2 y^2$. La $f(x, y)$ è sempre positiva, tranne nell'origine $(0, 0)$, e sono verificate tutte le condizioni del nostro enunciato.

21. 3.^a condizione particolare. Il teorema del n.° 18 vale anche se, invece della sua seconda condizione, si ammette che per ogni punto P_s ($s = 1, 2, \dots, n$) esista un intorno in tutto il quale (anche fuori del campo A), posto

$$\rho = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$$

($P_s \equiv (x_s, y_s)$), si abbia

$$\varphi(x, y) \equiv \psi(\rho). \quad (1)$$

Riprendendo la dimostrazione del n.° 18, basterà mostrare come dalla (1) scenda la convergenza uniforme della successione $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(3)}, \dots$, ad una curva $C^{(\infty)}$, continua e rettificabile, per il che basterà provare che l'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, M)$ ha lunghezza inferiore ad un numero fisso, indipendente da s .

Supponiamo che il circolo (P, ρ) , considerato al n.° 18, a), sia interno all'intorno di P in cui vale la (1). Se esiste il numero r_0 considerato in b) al n.° detto, non v'è che da ripetere le considerazioni colà fatte. Nel caso opposto, scelto il punto N come si è fatto al luogo indicato, dimostriamo che, per $s > s'$, l'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ coincide con una parte del segmento rettilineo PN . Supponiamo, infatti, che ciò non sia e indichiamo con N' un punto dell'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ tale che $C^{(s)}(N', N)$ non coincida con un segmento parziale di PN .

Conduciamo la circonferenza, di centro P , passante per N' e chiamiamo N'' il punto in cui essa taglia il segmento PN . La lunghezza $l(N')$ dell'arco $C^{(s)}(N', N)$ dovrà essere maggiore di quella $\bar{l}(N'')$ del segmento $N''N$. Dividiamo questo segmento in m parti uguali e moltiplichiamo la lunghezza di ciascuna di esse per un valore della φ comunque scelto sulla parte stessa. Sommando i prodotti ottenuti avremo

$$\frac{1}{m} \bar{l}(N'') \cdot (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_m). \quad (2)$$

Considerata una qualsiasi delle parti in cui si è diviso $N''N$, ad esempio la p ^{esima}, descriviamo le circonferenze di centro P passanti per i suoi estremi e indichiamo con l_p la parte della lunghezza $l(N')$ che spetta ai punti di $C^{(s)}(N', N)$ che si trovano nella corona circolare così ottenuta, esclusi quelli che si trovano sulla circonferenza maggiore, se è $p < m$. Formiamo la somma

$$l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 + \dots + l_m \varphi_m, \quad (3)$$

la quale, dovendo essere necessariamente $l_p \cong \frac{1}{m} \bar{l}(N'')$, è maggiore della (2).

La differenza fra tali somme è

$$\sum_1^m \varphi_p \left(l_p - \frac{1}{m} \bar{l}(N'') \right) \cong \bar{\varphi} \cdot \Sigma \left(l_p - \frac{1}{m} \bar{l}(N'') \right),$$

dove $\bar{\varphi}$ rappresenta il minimo valore di φ sul segmento $N''N$; questa differenza risulta quindi non minore di

$$\bar{\varphi} \left\{ l(N') - \bar{l}(N'') \right\}.$$

Se facciamo tendere m all'infinito, la somma (2) tende a $I_{N'N}$ e la (3), in virtù della (1), a $I_{C^{(s)}(N'N)}$ o ad un numero minore di questo integrale. È dunque

$$I_{C^{(s)}(N'N)} - I_{N'N} \cong \bar{\varphi} \left\{ l(N') - \bar{l}(N'') \right\}, \quad (4)$$

e qui è $\varphi > 0$, $\bar{l}(N') - l(N'') > 0$, e perciò

$$I_{C^{(s)}(N'N)} - I_{N'N} > 0.$$

Lo stesso ragionamento prova che

$$I_{C^{(s)}(M^{(s)}, N')} - I_{M_1^{(s)}, N''} \cong 0, \quad (5)$$

dove $M_1^{(s)}$ è il punto in cui la circonferenza di centro P , passante per $M^{(s)}$, taglia il segmento PN . Dalle (4) e (5) scende

$$I_{C^{(s)}(M^{(s)}, N)} > I_{M_1^{(s)}N} + \bar{\varphi} \left\{ l(N') - \bar{l}(N'') \right\},$$

e per s sufficientemente grande e maggiore di quello fin qui considerato.

$$I_{C^{(s)}(M^{(s)}, N)} > I_{PN}.$$

Questa disuguaglianza è assurda, ciò che si prova come al n.º 18 si è dimostrata assurda la (7).

È dunque provato che l'arcò $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ è una parte del segmento rettilineo PN e quindi che $C^{(s)}(M^{(s)}, M)$ resta inferiore, in lunghezza, ad un numero fisso indipendente da s .

La proposizione è così dimostrata.

ESEMPIO. Sia

$$F(x, y, x', y') \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Qui è $\varphi(x, y) \equiv \rho$ e la condizione del nostro enunciato è verificata. Altrettanto può dirsi se è

$$F(x, y, x', y') \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

con $F(0, 0, x', y') \equiv 0$.

§ VI.

GLI INTEGRALI QUASI-REGOLARI SEMIDEFINITI.

b) GLI ZERI DELLA F COSTITUISCONO DELLE CURVE CONTINUE.

22. TEOREMA. Se, in tutto il campo A , è

$$F(x, y, x', y') \equiv \varphi(x, y) \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

con $\varphi(x, y) = 0$ in tutti i punti di un numero finito di curve continue $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$, senza punti comuni, prive di punti multipli e dotate ovunque di tangente variabile in modo continuo, e $\varphi(x, y) > 0$ in tutti gli altri punti del campo A ;

se, per ogni curva \mathfrak{C}_s , è possibile determinare tre numeri positivi e minori di 1, r_s, h_s, k_s , in modo che, detto $\bar{\varphi}$ il valore assunto dalla $\varphi(x, y)$ in un punto qualunque Q di A , distante dalla \mathfrak{C}_s non più di r_s , ed essendo P un punto della curva tale che il segmento QP sia uguale alla minima distanza di Q dalla curva stessa, in nessun punto di A appartenente al segmento QP la φ abbia valore maggiore di $\bar{\varphi}$, e che la minima distanza \bar{r} , dalla \mathfrak{C}_s , dei punti di A in cui è $\varphi(x, y) = \bar{\varphi}$ e il massimo valore \bar{R}' delle minime distanze, dalla \mathfrak{C}_s , dei punti di A in cui è $\varphi(x, y) = h_s \bar{\varphi}$ e che appartengono ad almeno un circolo di raggio r_s avente il centro sulla \mathfrak{C}_s , soddisfino alla disuguaglianza $\bar{R}' \leq k_s \bar{r}$;

se, infine, il campo A è limitato e K è una classe completa di curve C e tale che, se r è sufficientemente piccolo, sostituendo, in una sua curva C qualsiasi, ad un arco tutto contenuto in un circolo di raggio r avente il centro su una \mathcal{C}_s , la corda corrispondente oppure la spezzata costituita da due segmenti congiungenti gli estremi dell'arco con un punto qualunque della stessa \mathcal{C}_s e tutta contenuta nel cerchio detto, si ottenga ancora una curva della classe; l'integrale I_c ammette in K almeno una curva minimante.

La dimostrazione di questo teorema si conduce in modo perfettamente analogo a quello seguito al n.º 18.

ESEMPIO. Sia

$$F(x, y, x', y') \equiv \frac{y^2}{1+x^2+y^2} \sqrt{x'^2+y'^2}.$$

È qui

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{y^2}{1+x^2+y^2}$$

e questa $\varphi(x, y)$ si annulla in tutti i punti dell'asse delle x e soltanto in essi; in ogni altro punto del piano (x, y) è $\varphi > 0$. Considerato un punto qualunque Q , fuori dell'asse delle x , la sua minima distanza dall'asse detto è data dal segmento QP , dove P è il piede della perpendicolare abbassata da Q sull'asse stesso; e avendosi

$$\varphi(x, y) \equiv 1 - \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2},$$

si ha che il massimo valore assunto dalla φ sul segmento QP è quello che la φ prende in Q . Il numero \bar{r} relativo ad un valore $\bar{\varphi}$ della $\varphi(x, y)$ è dato dalla minima ordinata della curva

$$\frac{y^2}{1+x^2+y^2} = \bar{\varphi};$$

se dunque prendiamo comunque un campo limitato A , avendosi

$$y^2 = \frac{(1+x^2)\bar{\varphi}}{1-\bar{\varphi}},$$

otteniamo

$$\bar{r} \geq \sqrt{\frac{\bar{\varphi}}{1-\bar{\varphi}}}.$$

Il numero \bar{R} è dato, invece, dalla massima ordinata, nel campo A , della

curva analoga a quella ora considerata e relativa al valore $h \bar{\varphi}$, ed è perciò, se indichiamo con a il massimo modulo delle ascisse dei punti di A ,

$$\bar{R}' \leq \sqrt{\frac{(1+a^2)h\bar{\varphi}}{1-h\bar{\varphi}}}.$$

Pertanto, se scegliamo r ad arbitrio e poniamo

$$h = \frac{1}{8(1+a^2)}, \quad k = \frac{1}{2},$$

abbiamo $\bar{R}' < k\bar{r}$.

Abbiamo perciò, per esempio, che fra tutte le curve continue e rettificabili contenute in un dato quadrato e che congiungono due punti dati, ve n'è una almeno minimante l'integrale

$$\int_c \frac{y^2 \sqrt{x'^2 + y'^2}}{1 + x^2 + y^2} ds.$$

23. 1.^a *Condizione particolare.* Il teorema del n.° precedente vale anche se, invece della sua seconda condizione, si ammette che le curve \mathfrak{C}_s siano tutte delle circonferenze e che per ognuna di esse esista un intorno in tutto il quale (anche fuori del campo A), detto (x_s, y_s) il centro della \mathfrak{C}_s e posto

$$\rho = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2},$$

si abbia

$$\varphi(x, y) \equiv \psi(\rho).$$

Ciò si prova col ragionamento fatto al n.° 21.

ESEMPIO. Sia

$$F(x, y, x', y') \equiv (x^2 + y^2 - 1)^2 \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Qui vi è una sola curva \mathfrak{C}_s , data dal cerchio $x^2 + y^2 = 1$, ed è sempre

$$\varphi(x, y) \equiv (\rho^2 - 1)^2.$$

24. 2.^a *condizione particolare.* a) Il teorema del n.° 22 vale anche se, invece della sua seconda condizione, si ammette che le curve \mathfrak{C}_s siano tutte delle rette (o segmenti rettilinei) e che per ognuna di esse esista un intorno in tutto il quale (anche fuori del campo A) i punti in cui la $\varphi(x, y)$ assume

uno stesso valore $\bar{\varphi}$ costituiscano delle rette (o segmenti rettilinei) parallele alla \mathcal{C} , di cui si considera l'intorno.

La dimostrazione si ottiene con ragionamento analogo a quello fatto al n.° 21.

ESEMPIO. Sia

$$F(x, y, x', y') \equiv (x + y)^2 \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

È $\varphi(x, y) = 0$ in tutti i punti della retta $x + y = 0$ e soltanto in essi; e il luogo dei punti in cui è $\varphi(x, y) = \bar{\varphi}$ è dato dalle due rette $x + y = \pm \sqrt{\bar{\varphi}}$, parallele alla $x + y = 0$.

b) In particolare si ha: se la funzione φ dipende da una sola delle due variabili x e y , il teorema del n.° 22 vale indipendentemente dalla sua seconda condizione.

ESEMPLI. 1.° Sia

$$F(x, y, x', y') \equiv y \sqrt{x'^2 + y'^2} :$$

in ogni classe completa K soddisfacente alla terza delle condizioni del teorema del n.° 22 e le cui curve appartengono tutte ad un campo A limitato in cui sia sempre $y \geq 0$, esiste almeno una curva minimante l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} y \sqrt{x'^2 + y'^2} ds.$$

Più particolarmente, esiste almeno una curva minimante tale integrale fra tutte le curve continue e rettificabili congiungenti due dati punti e tutte appartenenti ad un quadrato del piano (x, y) in cui sia sempre $y \geq 0$.

2.° Sia

$$F(x, y, x', y') \equiv x^2 (x^2 - 1)^2 \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Anche qui la $\varphi(x, y) \equiv x^2 (x^2 - 1)^2$ è indipendente dalla y e poichè è sempre $\varphi \geq 0$, essendo $\varphi = 0$ soltanto sulle rette $x = 0$, $x = \pm 1$, esiste almeno una curva minimante l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 (x^2 - 1)^2 \sqrt{x'^2 + y'^2} ds$$

in ogni classe K soddisfacente alla terza condizione del teorema del n.° 22 e costituita di curve tutte appartenenti ad un campo A limitato.

25. 3.ª condizione particolare. Il teorema del n.° 22 vale anche se alla sua seconda condizione si sostituisce la seguente:

che le curve \mathcal{C}_s siano tutte delle rette (o segmenti rettilinei) tutte fra loro parallele; che esista, per ognuna di esse, un numero positivo r_s tale che, essendo Q un punto qualunque di A , distante dalla \mathcal{C}_s non più di r_s , e P il piede della perpendicolare abbassata da esso sulla \mathcal{C}_s , il valore della funzione φ in Q non sia minore di quello assunto dalla stessa funzione in ogni altro punto del segmento QP ; che esista una retta Δ , perpendicolare a tutte le \mathcal{C} e tale che, se Q è un punto qualunque di A distante non più di r_s dalla \mathcal{C}_s e P' è il piede della perpendicolare abbassata da esso sulla retta Δ , il valore della φ in Q non sia minore di quello assunto dalla stessa funzione in ogni altro punto del segmento QP' .

Basterà provare, come al n.º 21, la convergenza uniforme della successiva e $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(n)}$ (considerata al n.º 18) ad una curva $C^{(\infty)}$, continua e rettificabile, ed anche soltanto che l'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, M)$ ha lunghezza sempre superiore ad un numero fisso, indipendente da s .

Supponendo anche qui che esista una sola curva \mathcal{C} , se esiste un numero r_0 tale che, qualunque sia s , nessun punto di $C^{(s)}$ che preceda M risulti distante da \mathcal{C} meno di r_0 , otteniamo quanto ci occorre con considerazioni analoghe a quelle svolte in *b*) al n.º 18. Se il numero r_0 non esiste, preso \bar{s}' sufficientemente grande ed un punto N su $C^{(\bar{s}')} (M^{(\bar{s}')} , M)$ in modo che, per ogni $s < \bar{s}'$, su $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ non esista nessun punto distante da \mathcal{C} per più di ρ (minore del numero r , corrispondente secondo l'enunciato alla \mathcal{C}), vediamo quale comportamento può avere l'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ rispetto alle parallele alla \mathcal{C} e a quelle alla Δ .

Indichiamo con O il punto di intersezione della retta Δ con la retta a cui appartiene \mathcal{C} , e osserviamo che, se l'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, N) - s > \bar{s}' -$ ha un punto Q sulla retta Δ , l'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, Q)$ deve essere un segmento parziale del segmento OQ . Ed infatti, in caso contrario, detto Q' un punto di $C^{(s)}(M^{(s)}, Q)$ distinto da Q e tale che $C^{(s)}(Q', Q)$ non coincida con un segmento della retta Δ , chiamando Q'_1 il piede della perpendicolare abbassata da Q' sulla Δ , è

$$I_{Q'_1 Q} < I_{C^{(s)}}(Q', Q),$$

come risulta immediatamente suddividendo in parti il segmento $Q'_1 Q$ e l'arco $C^{(s)}(Q', Q)$, mediante un sistema di parallele alla \mathcal{C} e considerando gli integrali come i limiti delle somme ottenute moltiplicando le lunghezze delle parti risultanti per i valori assunti dalla φ nei punti di divisione. Ne viene

allora, per ogni s sufficientemente grande,

$$I_{OQ} < I_{C^{(s)}(M^{(s)}, Q)},$$

disuguaglianza assurda per le stesse ragioni per le quali è risultata assurda la (7) del n.° 18.

Analogamente, se Q è un punto qualsiasi di $C^{(s)}(M^{(s)}, N) - s > \bar{s}' -$ e l'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, Q)$ non ha punti interni alla striscia delimitata dalla retta Δ e dalla parallela ad essa per Q , deve essere $C^{(s)}(M^{(s)}, Q) \equiv M_1^{(s)}Q$, dove $M_1^{(s)}$ indica il piede della perpendicolare abbassata da $M^{(s)}$ sulla parallela per Q alla Δ . Se poi Q' e Q fossero due punti di $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ (con Q' precedente Q) giacenti su una parallela alla Δ e l'arco $C^{(s)}(Q', Q)$ risultasse privo di punti interni alla striscia delimitata dalla Δ e dalla parallela indicata, si avrebbe ugualmente $C^{(s)}(Q', Q) \equiv Q'Q$. Infine, se Q' e Q fossero due punti di $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$ (con Q' precedente Q) giacenti su una parallela alla \mathfrak{G} e l'arco $C^{(s)}(Q', Q)$ non avesse punti interni alla striscia delimitata da tale parallela e dalla \mathfrak{G} , sarebbe ancora $C^{(s)}(Q', Q) \equiv Q'Q$.

Da tutto ciò risulta che, su ogni parallela alla retta Δ , l'arco $C^{(s)}(M^{(s)}, N) - s > \bar{s}' -$ ha al più un sol punto o un segmento rettilineo ed esso solo, e che altrettanto accade per ogni parallela alla \mathfrak{G} ; e questo dimostra che gli archi $C^{(s)}(M^{(s)}, N)$, per ogni s sufficientemente grande, hanno tutti lunghezza inferiore ad un numero fisso (e precisamente non superiore alla somma delle lunghezze dei segmenti NN_1, N_1O , dove N_1 è il piede della perpendicolare abbassata da N sulla \mathfrak{G}). Sono dunque inferiori ad un numero fisso anche le lunghezze degli archi $C^{(s)}(M^{(s)}, M)$ e la nostra proposizione è provata.

ESEMPIO. Sia

$$F(x, y, x', y') \equiv y^2(y^2 - 1)^2(x^2 + y^2)\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Le curve \mathfrak{G}_s sono date dalle tre rette $y = 0, y = \pm 1$; la retta Δ è data dall'asse delle y e per r , può prendersi il numero $\frac{1}{5}$.

§ VII.

ESTENSIONE A CAMPI ILLIMITATI.

26. TEOREMA. *Se esistono due numeri positivi R e μ tali che, in ogni punto del campo A esterno al circolo di centro l'origine O delle coordinate e di raggio R e per ogni coppia (x', y') normalizzata, si abbia*

$$F(x, y, x', y') > \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (1)$$

se sono verificate le condizioni poste in una qualunque delle proposizioni dei §§ II-VI;

in ogni classe completa K di curve C , ognuna delle quali debba passare per almeno un punto di un dato insieme limitato e chiuso G , oppure, se è chiusa, debba contenere o circondare almeno un punto di G , esiste almeno una curva minimante I_C .

Ed invero, scelta comunque una curva \bar{C} nella classe K e indicato con N un numero maggiore di $I_{\bar{C}}$, si consideri un circolo (O, R_1) , di raggio $R_1 > R$ e contenente l'insieme G . Si consideri poi il circolo (O, R_2) , dove R_2 è un numero qualsiasi soddisfacente alla disuguaglianza

$$R_2 > R_1 e^{\frac{N}{\mu}}.$$

Se una curva C di K ha almeno un punto esterno al circolo (O, R_2) , contiene un arco $C(R, Q)$, esterno al circolo (O, R_1) , avente un estremo sulla circonferenza di (O, R_1) e di lunghezza non inferiore a $R_1 e^{\frac{N}{\mu}} - R_1$. Ed essendo, per le ipotesi ammesse, sempre $F \geq 0$, si ha

$$I_C \geq I_{C(P, Q)} > \mu \int_{C(P, Q)} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds \geq \mu \int_{C(P, Q)} \frac{ds}{R_1 + s},$$

dove s indica la lunghezza dell'arco di $C(P, Q)$ che da quello degli estremi P e Q che si trova sulla circonferenza (O, R_1) va al punto corrente sull'arco stesso, e intendendosi che, in luogo di $C(P, Q)$, si dovrà considerare, nell'ul-

timo integrale scritto, $C(Q, P)$ se l'estremo or ora indicato non è P . Si ha pure perciò

$$I_c > \mu \left\{ \log \left(R_1 e^{\frac{N}{\mu}} \right) - \log R_1 \right\} = N > I_{\bar{C}}.$$

Da ciò risulta che la curva \bar{C} appartiene interamente al circolo (O, R_2) e che il limite inferiore di I_c nella classe K coincide con il limite inferiore di I_c nella sottoclasse K' di tutte le curve di K che appartengono interamente al circolo (O, R_2) . La sottoclasse K' risulta evidentemente completa, e le proposizioni indicate nella seconda condizione del nostro enunciato mostrano l'esistenza di almeno una curva minimante I_c in K' e quindi in K .

ESEMPLI. 1.º Fra tutte le curve continue e rettificabili che congiungono due dati punti e appartengono al campo A , ve n'è almeno una di lunghezza minima.

2.º Fra tutte le curve continue e rettificabili del piano (x, y) che congiungono due punti dati, ve n'è almeno una minimante l'integrale

$$\int_C (x^2 + y^2 - 1) \sqrt{x'^2 + y'^2} \, ds.$$

Qui, infatti, si ha $F(x, y, x', y') > 3$ per ogni coppia (x', y') normalizzata e in tutti i punti del piano (x, y) esterni al cerchio di raggio 2 e avente il centro nell'origine delle coordinate; è dunque verificata la (1) e sono inoltre verificate le condizioni del teorema del n.º 22 quando in esso, alla seconda condizione, si sostituisca quella del n.º 23.

27. OSSERVAZIONE. È evidente che, sfruttando i risultati ed i ragionamenti dei §§ II-VI, potrà stabilirsi, in certi casi, l'esistenza di curve minimanti I_c in campi illimitati, pur non essendo soddisfatte le condizioni ammesse nel teorema del numero precedente; come pure tale esistenza potrà talvolta essere dimostrata sfruttando le particolarità dell'integrale in questione, in modo da trasformare il dato problema di minimo in altro che rientri fra quelli da noi studiati.

Così, ad esempio, si ha che, fra tutte le curve continue e rettificabili che congiungono due dati punti P_1 e P_2 e giacciono nel piano (x, y) , ve n'è almeno una minimante l'integrale

$$I_c = \int_C (1 + x^2 + y^2) (\sqrt{x'^2 + y'^2} - y') \, ds.$$

Ed infatti, da quanto si è detto al n.º 14, risulta che la lunghezza L di una qualsiasi curva C , della classe che attualmente consideriamo, soddisfa alla disuguaglianza

$$L \leq \sqrt{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} I_C + P_1 P_2 \right)$$

che si deduce dalla (2) del n.º indicato, facendovi $\gamma' = \frac{\pi}{2}$ e $m = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ e sostituendovi Δ con $P_1 P_2$, ciò che non toglie alla (2) la sua piena validità. Se dunque indichiamo con \bar{C} una qualunque curva della nostra classe, potremo limitarci a considerare soltanto le curve che soddisfano alla disuguaglianza

$$L \leq \sqrt{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} I_{\bar{C}} + P_1 P_2 \right),$$

le quali curve, dovendo in più avere gli estremi in P_1 e P_2 , resteranno tutte in uno stesso cerchio, quello di centro P_1 e raggio uguale al secondo membro della disuguaglianza scritta. L'esistenza di almeno una curva minimante I_C scende allora dalla proposizione del n.º 14.

Come altro esempio, mostriamo che fra tutte le curve continue e rettificabili del piano (x, y) , che congiungono due dati punti P_1 e P_2 , ve n'è almeno una minimante l'integrale

$$I_C = \int_C y^2 (y^2 - 1)^2 (x^2 + y^2) \sqrt{x'^2 + y'^2} ds. \quad (1)$$

Sia α un numero positivo tale che nell'intervallo $(-\alpha, \alpha)$ risultino contenute le ascisse di P_1 e P_2 . Considerata una qualsiasi curva C della classe fissata, e indicata con C' la curva continua e rettificabile, congiungente i punti P_1 e P_2 , che si ottiene dalla C sostituendo ai suoi archi che hanno ambedue gli estremi sulla retta $x = -\alpha$ o su quella $x = \alpha$ e che restano rispettivamente alla sinistra della prima o alla destra della seconda, con le corde corrispondenti, si ha

$$I_{C'} \leq I_C.$$

Il limite inferiore di I_C nella classe di curve data coincide dunque con quello dello stesso integrale nella sottoclasse delle curve continue e rettificabili.

cabili, congiungenti i punti P_1 e P_2 e tutte contenute nella striscia delimitata dalle rette $x = -a$, $x = a$. E siccome per questa sottoclasse sono verificate le condizioni del teorema del n.º precedente, l'esistenza della curva minimante I_C è senz'altro dimostrata.

Altrettanto può dirsi se, all'integrale (1), si sostituisce

$$I_C = \int_C y \sqrt{x'^2 + x''^2} ds,$$

sostituendo in pari tempo il piano (x, y) con il semipiano definito da $y \geq 0$.

Sopra una classe di trasformazioni asintotiche, applicabili in particolare alle superficie la cui curvatura è proporzionale alla quarta potenza della distanza del piano tangente da un punto fisso.

(Di H. JONAS, a Berlino.)

PREFAZIONE.

È noto a qual grado di perfezione la teoria generale delle congruenze W , fondata sul teorema di MOUTARD, fu condotta dal BIANCHI collo stabilire il suo teorema di permutabilità. Ma, riportandoci ad un'osservazione fatta dal prof. PICONE (1), dobbiamo constatare che « tutte le volte che se ne tenta un'applicazione diretta la si trova poco arrendevole alle molteplici esigenze della ricerca ». Questa mancanza d'efficacia in riguardo ai problemi speciali risiede, per quanto mi pare, essenzialmente nelle quadrature che, partendo da una data soluzione dell'equazione di MOUTARD, si presentano nel calcolo della seconda falda focale. In una recente Memoria (2) ho fatto vedere, come queste quadrature possono essere risparmiate, quando si faccia dipendere la *trasformazione asintotica*, cioè la costruzione di una congruenza W tangente

(1) M. PICONE, *Sulle congruenze rettilinee W* . Palermo, Rend. 37 (1914), 212. — Senza entrar qui nell'analisi del metodo raccomandatovi, mi contento di accennare all'importante uso che ho fatto di certo sistema d'equazioni dovuto al PICONE (veggasi § 1 (3) del presente lavoro), ritenendo di più le notazioni p, q che vi figurano.

(2) H. JONAS, *Ueber die Konstruktion der W -Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R -Flächen*. Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigung, 29 (1920), 40.

ad un'assegnata superficie, dal sistema differenziale

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} + q b = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} + p a = 0,$$

ove si è posto

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{Bmatrix} = -p, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} = -q,$$

riferita la superficie alle linee asintotiche (α, β) . È da notarsi che da una coppia di soluzioni a, b la funzione R è deducibile con facile calcolo, mentre il passaggio inverso, cioè al tempo stesso ogni teoria partente da una data soluzione R dell'equazione di MOUTARD richiederebbe almeno le dette quadrature che nei tentativi di sopprimerle s'offrono soltanto sotto un aspetto meno semplice. Colle modificazioni segnalate la teoria classica che, quanto al teorema di permutabilità, serba la sua superiorità su ogni altro procedimento viene ad adattarsi ai problemi speciali, prestandosi particolarmente a quelli concernenti le classi di superficie che si caratterizzano da una condizione imposta alle quantità p e q . D'altronde, conviene osservare qui che nelle mie ricerche su questo argomento la base analitica venne data dal fatto, che al sistema differenziale in discorso si trova intimamente legato l'aggiunto:

$$\frac{\partial h}{\partial \beta} + p k = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial \alpha} + q h = 0.$$

Nella mia Memoria citata ho svolto come prima applicazione la teoria delle trasformazioni delle superficie R , iniziata da TZITZÉICA che la fondò sullo studio dei sistemi isotermi nello spazio S_5 , mentre i miei sviluppi si appoggiano sulla condizione caratteristica indicata da DEMOULIN:

$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{\partial q}{\partial \alpha}.$$

Queste superficie godono delle proprietà d'ammettere un sistema coniugato $\alpha \pm \beta = \text{cost.}$, le cui tangenti formano due congruenze W , ed abbracciano, come riconobbe il BIANCHI, il caso particolare delle deformate delle quadriche.

Proseguendo questi studi, mi sono imbattuto in un'altra classe di superficie, caratterizzata invece dalla relazione

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial \beta}.$$

Ne ho fatto una comunicazione ⁽¹⁾ alla SOCIETÀ MATEMATICA DI BERLINO che si sta ora stampando.

Nel presente lavoro mi propongo l'esame di un terzo caso, costituito dalle superficie $p = q$, per quel ch'io so non studiate finora. Anche qui si dimostra l'esistenza di una trasformazione asintotica che fa passare da una data superficie $p = q$ ad un'altra della medesima classe. La denoteremo col simbolo Π_x , ponendo così in evidenza una costante caratteristica. Per la Π_x vale ancora il teorema di permutabilità sotto la sua solita forma: *Se di una superficie S della classe $p = q$ si considerano due trasformate S_1, S_2 , ottenute per mezzo di due trasformazioni Π_{x_1}, Π_{x_2} , allora (salvo un caso singolare) esiste una quarta superficie S' della medesima classe, perfettamente determinata e costruibile in termini finiti, che si trova rispettivamente legata a S_1, S_2 da trasformazioni Π_{x_2}, Π_{x_1} colle costanti invertite.*

La teoria delle trasformazioni Π_x dà luogo ad un'applicazione notevole. Fra le superficie $p = q$ vi sono quelle considerate da TZITZÉICA ⁽²⁾, per le quali la curvatura è proporzionale alla quarta potenza della distanza del piano tangente da un punto fisso. Esse dipendono in sostanza dall'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = e^\theta - e^{-2\theta}.$$

Si tratta adunque di maneggiare la Π_x in guisa da far nascere da una nota superficie di TZITZÉICA un'altra della medesima classe. Ritoveremo per tal via la trasformazione scoperta da TZITZÉICA, tanto più interessante che essa costituisce in pari tempo la trasformazione dell'equazione differenziale che viene così a collocarsi accanto a quella ben nota, i cui integrali danno le deformate della sfera reale od immaginaria. Sembrami però poco probabile che si pervenga a stabilire un legame analitico fra questi due problemi. Quanto alla questione, se nel comporre le trasformazioni di TZITZÉICA la quarta superficie S' , ottenuta per mezzo del teorema di permutabilità per le Π_x generali, appartenga anch'essa al tipo speciale, la risposta sarà affermativa.

Disgraziatamente, il TZITZÉICA si è limitato a far conoscere la sua inte-

⁽¹⁾ H. JONAS, *Ueber eine Klasse von Flächen, die ein Gegenstück zu den von Demoulin und Tzitzéica betrachteten R-Flächen bilden*. Berl. Math. Ges. Ber. 19 (1921), 18.

⁽²⁾ G. TZITZÉICA, *Sur une nouvelle classe de surfaces*. Palermo, Rend. 25 (1908), 180; 28 (1909), 210.

ressante scoperta in due brevi note ⁽¹⁾ inserite nei *Rendiconti dell'Accademia di Parigi*, indicandovi solo le formole principali della sua trasformazione ed avvertendo l'esistenza di un teorema di permutabilità senza darne le formole. Del resto, allorchè mi accinsi all'accennata ricerca, queste note, non staccandosi pel loro titolo dalle due Memorie comparse nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, mi erano sfuggite; cosicchè, più tardi, non ho potuto servirmene che di conferma pei risultati che avevo ottenuti da parte mia. Non essendo a mia cognizione per qual via l'eminente geometra sia giunto alla sua trasformazione, giova notar qui pertanto che nelle sue pubblicazioni non figura il concetto della Π_x generale, che perciò pare essere del tutto nuovo.

L'importanza della trasformazione di TZITZÉICA va ancora aumentando, quando si consideri che, utilizzando la bella proposizione di WEINGARTEN ⁽²⁾, essa può servire ad edificare un'intera teoria delle trasformazioni per le deformate della superficie

$$z = \frac{1}{k} \left(x^{2/s} - y^{2/s} \right).$$

Ho stimato opportuno riserbare ad un prossimo lavoro l'esposizione dei miei risultati rispetto a questo problema.

Da ultimo si troverà considerato nel presente scritto un caso singolare, meritevole d'attenzione, che si presenta nel comporre le trasformazioni di TZITZÉICA. Dimosteremo che da una delle dette superficie si può passare ad una sua omotetica rispetto al centro mediante tre successive trasformazioni asintotiche del tipo speciale che peraltro possono essere individuate in infiniti modi.

§ 1.

GENERALITÀ SULLE TRASFORMAZIONI ASINTOTICHE DELLE SUPERFICIE E SUL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ.

Conviene dapprima ricordare le nuove formole ⁽³⁾ relative alla costruzione delle congruenze W , tangenti ad un'assegnata superficie $S(x, y, z)$ che supporremo riferita alle sue asintotiche (α, β) .

⁽¹⁾ G. TZITZÉICA, *Sur une nouvelle classe de surfaces*. C. R. 150 (1910), 955, 1227.

⁽²⁾ L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 2 (1903), Cap. XIX.

⁽³⁾ Per questo paragrafo dobbiamo sempre riferirci alla Memoria citata nella Prefazione: *Ueber die Konstruktion der W-Kongruenzen*, ecc.

Siano

$$\xi = X\sqrt{\rho}, \quad \eta = Y\sqrt{\rho}, \quad \zeta = Z\sqrt{\rho}$$

i coseni di direzione *normalizzati* della normale a S . Si ha

$$\rho = \Sigma \xi^2, \quad K = -\frac{1}{\rho^2},$$

indicando con K la curvatura di S .

Essendo ξ, η, ζ tre soluzioni di un'equazione di MOUTARD:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} = M\xi,$$

la superficie S sarà definita dalle formole di LELIEUVRE:

$$x = \int \left[-\left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right) d\beta \right]^{(1)}.$$

Formando ora il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \beta} & \frac{\partial \eta}{\partial \beta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{\rho}}, \quad (1)$$

si ponga

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \log \Delta}{\partial \beta} = \frac{\partial \theta}{\partial \beta},$$

per modo che si abbia

$$e^\theta = m \Delta, \quad (2)$$

essendo m una costante di cui si potrà disporre convenientemente nelle applicazioni, mentre nel caso generale basta farla = 1.

(1) Per brevità, non scriverò che la prima di tre formole relative agli assi coordinati, tralasciando di accennare all'aver luogo delle due analoghe.

Faremo uso delle identità seguenti, già date dal PICONE:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + p \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + p \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} &= \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} + p q \right) \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} &= q \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} + q \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) \xi, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove si è posto

$$\left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 2 \end{array} \right\}' = - \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 2 \end{array} \right\} = p, \quad \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 1 \end{array} \right\}' = - \left\{ \begin{array}{l} 22 \\ 1 \end{array} \right\} = q,$$

i simboli coll'apice riferendosi al $d s^2$ della sfera rappresentativa. Osserviamo le due relazioni differenziali da soddisfarsi dalle funzioni θ , p , q , perchè il sistema (3) risulti illimitatamente integrabile. Ponendo per brevità

$$P = \frac{\partial p}{\partial \beta} + p \frac{\partial \theta}{\partial \beta}, \quad Q = \frac{\partial q}{\partial \alpha} + q \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}$$

e tenendo conto che si ha

$$M = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} + p q,$$

esse si scrivono come segue:

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} M + \frac{\partial P}{\partial \beta} + p Q = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \beta} - \frac{\partial \theta}{\partial \beta} M + \frac{\partial Q}{\partial \alpha} + q P = 0. \quad (4)$$

Ora, per costruire la più generale congruenza W i cui raggi siano tangenti alla S , partiamo da una coppia a , b di soluzioni del sistema differenziale

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} + q b = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} + p a = 0, \quad (5)$$

riducibile del resto ad una sola equazione alle derivate seconde. Calcolando di qui

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b}{\partial \beta} - \frac{\partial a}{\partial \alpha} - a \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right), \\ c &= - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial a}{\partial \alpha} + a \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

onde per derivazione

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} + \frac{\partial c}{\partial \beta} = -aM + bQ, \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha} - \frac{\partial c}{\partial \alpha} = -aP + bM, \quad (7)$$

si dimostra senza difficoltà che la funzione R verifica appunto l'equazione di MOUTARD:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \beta} = MR. \quad (8)$$

Ciò premesso, la determinazione della superficie trasformata S_1 , costituente la seconda falda focale della congruenza W , si ottiene *in termini finiti*. Avremo rispettivamente pei coseni normalizzati della normale ξ_1, \dots e per le coordinate x_1, \dots di S_1 :

$$\xi_1 = \frac{1}{R} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + b \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + c \xi \right), \quad (9)$$

$$x_1 = x + n_1 \zeta - \zeta_1 n = x + \frac{1}{R} \left(a \frac{\partial x}{\partial \alpha} - b \frac{\partial x}{\partial \beta} \right). \quad (10)$$

Risultano così ancora confermate le equazioni differenziali ben note della trasformazione di MOUTARD

$$\frac{\partial (\xi_1 + \xi)}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \log R}{\partial \alpha} (\xi_1 - \xi), \quad \frac{\partial (\xi_1 - \xi)}{\partial \beta} = -\frac{\partial \log R}{\partial \beta} (\xi_1 + \xi),$$

la cui applicazione a base di una data soluzione R della (8) richiederebbe *tre quadrature*.

Per le applicazioni che abbiamo in vista, occorre anzitutto calcolare le funzioni θ_1, p_1, q_1 relative alla superficie trasformata S_1 . Consideriamo a tale scopo l'espressione

$$\Lambda = a \frac{\partial R}{\partial \alpha} + b \frac{\partial R}{\partial \beta} + c R. \quad (11)$$

Differenziandola, viene

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = a h, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = b k, \quad (12)$$

dove si è posto

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial R}{\partial \alpha} - p \frac{\partial R}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + p \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) R &= h, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \beta^2} - q \frac{\partial R}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial R}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} + q \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) R &= k. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Le ultime due relazioni formando insieme colla (8) un sistema illimitatamente integrabile per la funzione R , ne derivano le equazioni seguenti, particolarmente semplici e distinte dalle (5) solo per l'essere permutate p e q , la cui importanza del resto si manifesterà nel seguito:

$$\frac{\partial h}{\partial \beta} + p k = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial \alpha} + q h = 0. \quad (14)$$

Rimandando il lettore pel calcolo alla mia citata Memoria, mi contento di richiamar qui le formole finali:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -p - \frac{b}{a \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = -p - \frac{b h}{\Lambda}, \\ q_1 &= -q - \frac{a}{b \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = -q - \frac{a k}{\Lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\Delta_1 = -\frac{\Lambda}{R^2} \Delta, \quad (16)$$

essendo

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta} \end{vmatrix}, \quad e^{\theta_1} = m_1 \Delta_1 \quad (17)$$

con m_1 costante disponibile.

Scriveremo qui ancora le formole per la *trasformazione inversa* che torneranno utili più tardi. Rammentando un fatto ben noto dalla teoria delle trasformazioni di MOUTARD, cioè che il passaggio inverso da S_1 a S corrisponde alla soluzione $\frac{1}{R}$ dell'equazione di MOUTARD relativa alla superfi-

cie S_1 , poniamo

$$\xi = R \left(\bar{a} \frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha} + \bar{b} \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta} + \bar{c} \xi_1 \right).$$

Con questo si ottiene

$$\bar{a} = \frac{a}{\Lambda}, \quad \bar{b} = -\frac{b}{\Lambda}, \quad \bar{c} = \frac{1}{\Lambda} \left(R + \frac{a}{R} \frac{\partial R}{\partial \alpha} - \frac{b}{R} \frac{\partial R}{\partial \beta} \right). \quad (18)$$

Ora, volgendo al *teorema di permutabilità*, consideriamo due trasformazioni asintotiche di S , individuate da due coppie a_1, b_1 e a_2, b_2 , soluzioni del sistema differenziale (5). Calcolate le c_1, R_1, c_2, R_2 , avremo per le S_1 le formole seguenti:

$$x_1 = x + \frac{1}{R_1} \left(a_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} - b_1 \frac{\partial x}{\partial \beta} \right), \quad \xi_1 = \frac{1}{R_1} \left(a_1 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + b_1 \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + c_1 \xi \right),$$

le analoghe coll'indice 2 valendo per S_2 .

Insistiamo sul fatto che nell'istesso tempo viene a determinarsi un *fascio lineare* (1) di trasformazioni asintotiche col porre

$$a_v = \nu_1 a_1 + \nu_2 a_2, \quad b_v = \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2,$$

indicando ν_1, ν_2 due costanti arbitrarie; di qui si ha

$$R_v = \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2, \quad c_v = \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2$$

e per ciò

$$x_v = \frac{\nu_1 R_1 x_1 + \nu_2 R_2 x_2}{\nu_1 R_1 + \nu_2 R_2}, \quad \xi_v = \frac{\nu_1 R_1 \xi_1 + \nu_2 R_2 \xi_2}{\nu_1 R_1 + \nu_2 R_2}.$$

Si riconosce la superficie $S_v(x, \dots)$, dipendente dal solo rapporto $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$, essere ancora seconda falda focale d'una congruenza W tangente a S ed avere i suoi punti sulle congiungenti le coppie di punti corrispondenti di S_1 e S_2 , mentre i rispettivi piani tangenti passano per le rette condotte pei punti di S , lungo le quali si segano i piani tangenti di S_1 e S_2 . È appunto su queste rette che si trovano i punti delle ∞^1 quarte superficie S' , fornite dal

(1) Cf. TORTORICI, *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie e sul teorema di permutabilità*. Palermo, Rend. 35 (1913), 289.

teorema di permutabilità, ciascuna delle quali ammette, come la S , la medesima coppia S_1, S_2 di superficie trasformate, in guisa da formarsi una doppia infinità di quadrilateri sghembi i cui lati toccano a due a due nei rispettivi vertici le quattro superficie. Orbene si noti che, più in generale, scelte a volontà due coppie di superficie nelle schiere (S_*) e (S') , queste costituiscono, precisamente come S, S_1, S', S_2 , le quattro falde focali di una *quaderna di congruenze* W .

Pel calcolo adunque della quarta superficie S' con cui riesce completo il ciclo di trasformazioni, sarà necessario eseguire la quadratura:

$$J = \int \left[- \left(R_1 \frac{\partial R_2}{\partial \alpha} - R_2 \frac{\partial R_1}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left(R_1 \frac{\partial R_2}{\partial \beta} - R_2 \frac{\partial R_1}{\partial \beta} \right) d\beta \right]. \quad (19)$$

Allora, per una qualunque delle superficie S' che a causa della costante di integrazione contenuta nella J formano una semplice infinità, le coordinate x', \dots ed i coseni normalizzati ξ', \dots della normale risultano dalle formole:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - \frac{R_1 R_2}{J} (\eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2), \\ \xi' &= \xi - \frac{R_1 R_2}{J} (\zeta_1 - \zeta_2) = \\ &= \xi - \frac{1}{J} \left[(a_1 R_2 - R_1 a_2) \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + (b_1 R_2 - R_1 b_2) \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + (c_1 R_2 - R_1 c_2) \xi \right]. \end{aligned} \right\} (20)$$

Convieni da ultimo aggiungere qui parecchie relazioni che ci offriranno un importante vantaggio nello specializzare il teorema di permutabilità. Per la dimostrazione, che del resto richiederebbe dei calcoli alquanto prolissi, mi giova riferirmi ancora alla mia Memoria citata, indicando qui solo le formole di cui faremo uso nel seguito.

Denotiamo con $a'_1, b'_1, c'_1, R'_1, h'_1, k'_1$ le funzioni trasformatrici che si presentano nel passaggio da S_1 a S' e consideriamo insieme alle quantità

$$\Lambda_1 = a_1 \frac{\partial R_1}{\partial \alpha} + b_1 \frac{\partial R_1}{\partial \beta} + c_1 R_1, \quad \Lambda_2 = a_2 \frac{\partial R_2}{\partial \alpha} + b_2 \frac{\partial R_2}{\partial \beta} + c_2 R_2 \quad (21)$$

le due seguenti:

$$\Phi_{21} = a_2 \frac{\partial R_1}{\partial \alpha} + b_2 \frac{\partial R_1}{\partial \beta} + c_2 R_1, \quad \Phi_{12} = a_1 \frac{\partial R_2}{\partial \alpha} + b_1 \frac{\partial R_2}{\partial \beta} + c_1 R_2. \quad (22)$$

Da queste si ha per derivazione:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (\Phi_{21} + J)}{\partial \alpha} = a_2 h_1, \quad \frac{\partial (\Phi_{21} + J)}{\partial \beta} = b_2 k_1, \\ \frac{\partial (\Phi_{12} - J)}{\partial \alpha} = a_1 h_2, \quad \frac{\partial (\Phi_{12} - J)}{\partial \beta} = b_1 k_2. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Introducendo ancora, in analogia alle (11), l'espressione

$$\Lambda'_1 = a'_1 \frac{\partial R'_1}{\partial \alpha} + b'_1 \frac{\partial R'_1}{\partial \beta} + c'_1 R'_1,$$

avremo finalmente le formole domandate:

$$\left. \begin{aligned} R'_1 &= \frac{J}{R_1}, \\ a'_1 &= a_1 \frac{\Phi_{21} + J}{\Lambda_1} - a_2, \quad b'_1 = -b_1 \frac{\Phi_{21} + J}{\Lambda_1} + b_2, \\ h'_1 &= h_1 \frac{\Phi_{12} - J}{\Lambda_1} - h_2, \quad k'_1 = -k_1 \frac{\Phi_{12} - J}{\Lambda_1} + k_2, \\ \Lambda'_1 &= \Lambda_2 - \frac{(\Phi_{21} + J)(\Phi_{12} - J)}{\Lambda_1}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

§ 2.

LA TRASFORMAZIONE Π_k PER LE SUPERFICIE $p = q$.

Dopo queste generalità, passiamo a studiare in particolare le superficie, le quali, riferite alle linee asintotiche, si caratterizzano dalla relazione

$$p = q, \quad \text{cioè} \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\}.$$

Adottando la denotazione p pel valore comune, osserviamo le condizioni d'integrabilità (4) che qui assumono la forma seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \theta}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} + p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + \frac{\partial p}{\partial \beta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} + 3p \frac{\partial p}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial^3 \theta}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} + p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} + 3p \frac{\partial p}{\partial \beta} = 0, \end{aligned}$$

Un esempio, bensì molto speciale, viene dato dalle quadriche ove si ha $p = 0$, la θ soddisfacendo all'equazione di LIOUVILLE ovvero riducendosi, nel caso dei paraboloidi, ad una costante. Integrando le (5), cioè

$$\frac{\partial a}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} = 0,$$

avremo

$$a = a(\alpha), \quad b = b(\beta),$$

indicando qui con a , b due funzioni della sola α o β . Indi, col riflettere che a , $-b$ sono i parametri di direzione dei raggi della congruenza W così definita, il che vale a dire che le curve di S inviluppate dai raggi corrispondono all'equazione differenziale

$$\frac{d\alpha}{a(\alpha)} + \frac{d\beta}{b(\beta)} = 0,$$

arriveremo subito alla proposizione dovuta al BIANCHI (¹): *Le più generali congruenze W che ammettano una quadrica per prima falda focale sono quelle costituite dalle tangenti alle curve appartenenti ad un suo sistema isotermino-coniugato.*

Accenniamo ad un altro caso particolare in cui del resto cadremmo col l'assoggettare una quadrica alla trasformazione segnalata per le superficie R nel § 6 della mia Memoria citata. Consideriamo la superficie S definita dall'equazione

$$z = \frac{y^2}{2x} - \frac{x^3}{6},$$

ovvero un'altra che ne deriva per una qualsivoglia affinità. Riferendo la S alle sue asintotiche, abbiamo

$$x = \alpha + \beta, \quad y = \beta^2 - \alpha^2, \quad z = \frac{1}{3}(\alpha^3 + \beta^3) - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2$$

e quindi

$$\xi = \alpha^2 + \beta^2, \quad \eta = \alpha - \beta, \quad \zeta = 1,$$

$$\Delta = -2(\alpha + \beta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{\alpha + \beta}, \quad p (= q) = \frac{1}{\alpha + \beta}.$$

(¹) L. BIANCHI, *Ricerche sulla deformazione delle quadriche*. Palermo, Rend. 22 (1906), 75.

Troveremo anche qui che, introducendo due funzioni arbitrarie della α e β sole, la seconda falda focale di una qualunque congruenza W aderente a S può esprimersi in termini finiti. Infatti, dalle equazioni differenziali

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + \frac{b}{\alpha + \beta} = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{a}{\alpha + \beta} = 0$$

si deduce per derivazione

$$\frac{\partial^2 (\alpha - b)}{\partial \alpha \partial \beta} = 0;$$

di qui si ricava subito la soluzione generale:

$$a = \varphi'(\alpha) - \frac{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)}{\alpha + \beta}, \quad b = \psi'(\beta) - \frac{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)}{\alpha + \beta},$$

gli apici indicando derivate.

Osservando le (6), abbiamo

$$R = -\frac{1}{2}(\varphi'' - \psi''), \quad c = -\frac{1}{2}(\varphi'' + \psi''),$$

onde segue per la seconda falda focale S_1 :

$$x_1 = x - \frac{2}{\varphi'' - \psi''} \left[\left(\varphi' - \frac{\varphi + \psi}{\alpha + \beta} \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \left(\psi' - \frac{\varphi + \psi}{\alpha + \beta} \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} \right].$$

Ritornando ora al *caso generale* delle superficie $p = q$, ci proponiamo di ricercare le trasformazioni asintotiche che facciano passare da una tale superficie ad una nuova della medesima classe. Raggiungeremo il nostro scopo col paragonare i due sistemi differenziali (5) e (14), attualmente scrivendosi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \beta} + p b = 0, & \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} + p a = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial \beta} + p k = 0, & \quad \frac{\partial k}{\partial \alpha} + p h = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Tenendo conto della condizione $p_1 = q_1$, imposta alla S_1 , avremo in forza delle (15)

$$b h = a k$$

ovvero, introducendo un fattore di proporzionalità,

$$h = \lambda a, \quad k = \lambda b. \quad (26)$$

Sostituendo questi valori nella seconda coppia delle equazioni (25) col-l'aver riguardo alla prima, si vedrà subito che x si riduce ad una costante, le sue derivate essendo nulle. Ora è facile accertarsi che basterà raccogliere le formole (5), (6), (7), (8), (13), affinché, assumendo $\lambda = \frac{\partial R}{\partial \alpha}$, $\mu = \frac{\partial R}{\partial \beta}$, si pervenga a stabilire un sistema lineare, omogeneo ed illimitatamente integrabile per le sei funzioni incognite a, b, c, λ, μ, R :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} a - R - c, & \frac{\partial a}{\partial \beta} &= -p b, \\ \frac{\partial b}{\partial \alpha} &= -p a, & \frac{\partial b}{\partial \beta} &= -\frac{\partial \theta}{\partial \beta} b + R - c, \\ \frac{\partial c}{\partial \alpha} &= \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + p \frac{\partial \theta}{\partial \beta}\right) a - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} + p^2\right) b + \lambda, \\ \frac{\partial c}{\partial \beta} &= -\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} + p^2\right) a + \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + p \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\right) b - \lambda, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \lambda + p \mu - \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} + p \frac{\partial \theta}{\partial \beta}\right) R + x a, & \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} &= \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} + p^2\right) R, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \beta} &= p \lambda + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \mu - \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} + p \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}\right) R + x b, \\ & & \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= \lambda, & \frac{\partial R}{\partial \beta} &= \mu. \end{aligned} \right\} (27)$$

Diremo che la superficie S , le cui coordinate x_1, \dots si calcolano secondo le formole (10):

$$x_1 = x + \frac{1}{R} \left(a \frac{\partial x}{\partial \alpha} - b \frac{\partial x}{\partial \beta} \right), \quad (28)$$

nasce dalla S mediante una *trasformazione* Π_x , ponendo così in evidenza la *costante caratteristica* x che figura nel sistema differenziale.

Benchè nell'integrazione entrino come costanti arbitrarie i sei valori iniziali di a, b, c, λ, μ, R , si conclude dall'essere la (28) omogenea di grado zero nelle funzioni trasformatrici che, tenendo fissa la costante x , l'applicazione della più generale trasformazione Π_x ad una data superficie $p = q$ ci fornisce soltanto una *quintupla infinità di superficie trasformate*.

Passiamo ora a dimostrare il *teorema di permutabilità per le trasformazioni* Π_x . A tale scopo suppongasì che del sistema differenziale (27) siano

noti due gruppi di soluzioni $a_1, b_1, c_1, \lambda_1, \mu_1, R_1$ e $a_2, b_2, c_2, \lambda_2, \mu_2, R_2$, corrispondenti rispettivamente ai valori x_1 e x_2 della costante caratteristica. Indichino S_1 e S_2 le superficie nascenti da S per l'applicazione delle trasformazioni Π_{x_1} e Π_{x_2} così definite. Si tratta adunque di far vedere che *nella schiera delle ∞^1 quarte superficie S' , ottenute per mezzo del teorema generale di permutabilità, ve ne è una sola, pienamente determinata e costruibile in termini finiti, che appartenga anch'essa alla classe $p = q$.*

Ponendo secondo le (21), (22) del § 1:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= a_1 \lambda_1 + b_1 \mu_1 + c_1 R_1, & \Lambda_2 &= a_2 \lambda_2 + b_2 \mu_2 + c_2 R_2, \\ \Phi_{21} &= a_2 \lambda_1 + b_2 \mu_2 + c_2 R_1, & \Phi_{12} &= a_1 \lambda_2 + b_1 \mu_2 + c_1 R_2 \end{aligned}$$

e ricordando la (19):

$$J = \int \left[- (R_1 \lambda_2 - \lambda_1 R_2) d\alpha + (R_1 \mu_2 - \mu_1 R_2) d\beta \right], \quad (29)$$

cominciamo dallo stabilire la relazione

$$x_2 (\Phi_{21} + J) - x_1 (\Phi_{12} - J) = \text{cost.} \quad (30)$$

che si verifica senza difficoltà per derivazione, utilizzando le (23) che qui si presentano sotto la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Phi_{21} + J)}{\partial \alpha} &= x_1 a_1 a_2, & \frac{\partial (\Phi_{21} + J)}{\partial \beta} &= x_1 b_1 b_2, \\ \frac{\partial (\Phi_{12} - J)}{\partial \alpha} &= x_2 a_1 a_2, & \frac{\partial (\Phi_{12} - J)}{\partial \beta} &= x_2 b_1 b_2. \end{aligned}$$

Adottando per il passaggio da S_1 a S' le notazioni già introdotte alla fine del § 1, si ha

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 \frac{\Phi_{21} + J}{\Lambda_1} - a_2, & b'_1 &= -b_1 \frac{\Phi_{21} + J}{\Lambda_1} + b_2, \\ h'_1 &= x_1 a_1 \frac{\Phi_{12} - J}{\Lambda_1} - x_2 a_2, & k'_1 &= -x_1 b_1 \frac{\Phi_{12} - J}{\Lambda_1} + x_2 b_2. \end{aligned}$$

Ora, perchè risultino soddisfatte le equazioni

$$h'_1 = x'_1 a'_1, \quad k'_1 = x'_1 b'_1 \quad (31)$$

che costituiscono come le (26) le condizioni richieste dal problema attuale, sarà necessario e sufficiente che, assumendo $x'_1 = x_2$, abbia luogo l'identità

$$x_2 (\Phi_{21} + J) - x_1 (\Phi_{12} - J) = 0,$$

il che corrisponde all'annullarsi della costante arbitraria nella (30). Di qui si trae l'espressione

$$J = \frac{x_1 \Phi_{12} - x_2 \Phi_{21}}{x_1 + x_2} \quad (32)$$

che ci dà la quarta superficie S' in senso ristretto, servendoci della formola:

$$x' = x - \frac{R_1 R_2}{J} (\eta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \eta_2).$$

Per quanto si è visto, la S' deriva dalla S_1 per mezzo di una Π_{x_2} . Concludiamo che vale la proposizione seguente del teorema di permutabilità così dimostrato per le trasformazioni Π_x : *Se le superficie S_1 e S_2 nascono dalla medesima S rispettivamente mediante le trasformazioni Π_{x_1} e Π_{x_2} , la quarta superficie S' si trova invece collegata a S_1 e S_2 da due Π_{x_1} e Π_{x_2} colle costanti invertite.*

Sarebbe da escludersi il caso $x_2 = -x_1$, perchè allora viene ad annullarsi il denominatore nella (32). Ma, ripetendo il ragionamento di sopra a base della relazione

$$\Phi_{21} + \Phi_{12} = 0, \quad (33)$$

la quale nell'ipotesi $x_1 + x_2 = 0$ è verificata a meno di una costante arbitraria di cui disponiamo così, in guisa da fare sparire anche il numeratore nella (32), si vedrà subito che hanno luogo, e cioè con $x'_1 = -x_1$, appunto le equazioni (31) da cui dipendeva la proprietà di S' di essere anch'essa una superficie $p = q$. Occorre intanto eseguire la quadratura domandata dalla (29). Si osservi che la condizione (33), scritta per disteso:

$$a_2 \lambda_1 + b_2 \mu_1 + c_2 R_1 + a_1 \lambda_2 + b_1 \mu_2 + c_1 R_2 = 0,$$

colla quale bisogna vincolare le funzioni trasformatrici delle due Π_x a costanti eguali e di segno contrario, influisce solo sui loro valori iniziali. Diremo, coll'adottare una denotazione già usata in casi simili, che siffatti due gruppi di soluzioni del sistema differenziale (27) pei rispettivi valori x e $-x$ della costante si trovano *in relazione armonica*.

Possiamo dunque enunciare il corollario seguente: *Nel caso di due trasformazioni Π_x a costanti eguali ed opposte, avendosi due gruppi armonici di funzioni trasformatrici, tutte le ∞^1 superficie S' , risultanti dall'applicazione del teorema generale di permutabilità, appartengono alla classe $p = q$. Esse si ottengono per mezzo di una quadratura, introducendo la costante arbitraria.*

§ 3.

LE TRASFORMAZIONI T_n DELLE SUPERFICIE DI TZITZÉICA.

In questo paragrafo ci proponiamo di svolgere a base dei risultati da noi ottenuti nel precedente la trasformazione delle superficie di TZITZÉICA ⁽¹⁾, godenti della proprietà *di aver la loro curvatura proporzionale alla quarta potenza della distanza del piano tangente da un punto fisso*. Esse costituiscono fra le superficie $p = q$ un caso speciale particolarmente interessante, tutta questa teoria aggirandosi intorno all'unica equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = e^\theta - e^{-2\theta}, \quad (34)$$

alla quale si riducono le condizioni d'integrabilità (4) nell'ipotesi $p = q = e^{-\theta}$. Notiamo che, restando nel campo reale, coll'introdurre l'esponenziale e^θ in luogo della notazione h usata da TZITZÉICA non sottintenderemo esclusi valori negativi di e^θ ; l'inconveniente della costante immaginaria πi che entra allora nella θ non significa nulla in vista dei vantaggi che offrirà questo cambiamento di notazione, cagionato peraltro dagli sviluppi precedenti.

Partendo da una soluzione θ dell'equazione (34), occorre integrare il si-

(1) Per le citazioni si veggia la Prefazione.

stema differenziale:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + e^{-\theta} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} &= e^{\theta} \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} &= e^{-\theta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Conoscendone tre soluzioni ξ , η , ζ , linearmente indipendenti, si otterranno le coordinate x , y , z della superficie S , senza ricorrere alle formole di LEBLIEUVRE che si verificano per derivazione, in termini finiti:

$$x = e^{-\theta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \right). \quad (36)$$

Dopo di ciò, formando il determinante Δ , secondo la (1) del § 1 e tenendo conto della relazione $\Delta = m e^{\theta}$, si ha

$$\Sigma x \xi = m, \quad (37)$$

dove per la superficie iniziale, scegliendo convenientemente l'unità di lunghezza, si potrebbe ancora fare la costante $m = 1$; questo però non sarà più ammissibile, come vedremo, per le superficie che ne derivano per l'applicazione della Π_x specializzata che andiamo a stabilire nel seguito. Indicando ora, come al solito, con W la distanza del piano tangente dall'origine, avremo:

$$W = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Sigma x \xi = \frac{m}{\sqrt{\rho}}$$

e poichè $K = -\frac{1}{\rho^2}$:

$$\frac{K}{W^4} = -\frac{1}{m^2} = \text{cost.} \quad (38)$$

Le superficie caratterizzate dall'enunciata proprietà espressa da questa relazione le diremo *superficie di TZITZÉICA*, chiamando *centro* il punto fisso da cui si prende la distanza del piano tangente. Notiamo previamente che per tutte le superficie di questa classe che s'incontreranno nel seguito il centro sarà costituito dall'origine.

Derivando due volte la (36) coll'aver riguardo al sistema differenziale (35), si dimostra che x, y, z soddisfano al sistema duale:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - e^{-\theta} \frac{\partial x}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} &= e^\theta x, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} &= -e^{-\theta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Siccome oltre le relazioni

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha} \xi = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \beta} \xi = 0$$

valgono le inverse

$$\sum \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} x = 0, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial \beta} x = 0,$$

si riconosce che la superficie Σ colle coordinate correnti ξ, η, ζ , riferita anch'essa, come risulta dalle (39), alle linee asintotiche (α, β) , appartiene appunto alla medesima classe, essendo x, y, z proporzionali ai coseni di direzione della normale di Σ . A causa dell'equazione $\sum x \xi = m$ le due superficie S e Σ si trovano legate fra di loro da una trasformazione per polari reciproche rispetto ad una sfera (reale od immaginaria) di raggio \sqrt{m} col centro nell'origine. Si notino di più le relazioni che si ricavano dalle precedenti per derivazione:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \sum \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = -m e^\theta. \quad (40)$$

Giò premesso, cominciamo dall'indicare che cosa diventa il sistema differenziale della trasformazione U_x nel caso attuale di una superficie di TZITZÉICA:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} a - R - c, & \frac{\partial a}{\partial \beta} &= -e^{-\theta} b, \\ \frac{\partial b}{\partial \alpha} &= -e^{-\theta} a, & \frac{\partial b}{\partial \beta} &= -\frac{\partial \theta}{\partial \beta} b + R - c, \\ \frac{\partial c}{\partial \alpha} &= -e^\theta a + \lambda, & \frac{\partial c}{\partial \beta} &= -e^\theta b - \mu, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \lambda + e^{-\theta} \mu + \alpha a, & \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} &= \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = e^{\theta} R, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \beta} &= e^{-\theta} \lambda + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \alpha b, & \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= \lambda, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta} = \mu. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Cerchiamo adunque di specializzare questo sistema in tal maniera che la superficie trasformata S_1 , appartenente in generale soltanto alla classe $p = q$, riesca anch'essa superficie di ΤΖΙΤΖΕΪΚΑ. Per ciò sarà necessario che valga la relazione

$$p_1 = e^{\theta_1}.$$

Paragonando questa colla

$$p_1 = -p - \frac{\alpha a b}{\Lambda},$$

dedotta dalla (15), e tenendo conto delle (16), (17), cioè

$$\Delta_1 = -\frac{\Lambda}{R^2} \Delta, \quad \Delta_1 = m_1 e^{\theta_1},$$

si trova

$$e^{\theta_1} = -\frac{m}{m_1} e^{\theta} \frac{\Lambda}{R^2}, \quad e^{-\theta_1} = -e^{-\theta} - \frac{\alpha a b}{\Lambda}, \quad (42)$$

per modo che dovrà aver luogo la relazione

$$n R^2 = \Lambda + \alpha a b e^{\theta}, \quad (43)$$

dove si è posto

$$\frac{m_1}{m} = n,$$

significando n una costante disponibile.

Ora, ammettendo la possibilità di verificare la (43), la deriviamo col ricorrere al sistema differenziale (41) ed alle formole (12) scrivendosi

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = \alpha a^2, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = \alpha b^2.$$

Viene così:

$$2 n R \lambda = -\alpha e^{\theta} b (R + c), \quad 2 n R \mu = \alpha e^{\theta} a (R - c), \quad (44)$$

onde, moltiplicando rispettivamente per a e b e sommando, si trae

$$n R (a \lambda + b \mu) = -x e^{\theta} a b c;$$

di qui, osservando che $a \lambda + b \mu + c R = \Lambda$,

$$n R \Lambda = c (n R^2 - x e^{\theta} a b),$$

cioè in forza della stessa (43):

$$c = n R. \tag{45}$$

Notiamo qui per incidenza che nella ricerca della più generale congruenza W , avente per prima falda focale una data superficie di TZITZÉICA, si conclude dalle relazioni (7) del § 1 che allora la c soddisfa sempre all'equazione di MOUTARD verificata da R :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial \beta} = e^{\theta} c.$$

Questo fatto già suggerisce lo studio delle trasformazioni asintotiche per cui le funzioni R e c coincidano a meno di un fattore costante.

Ritornando al problema nostro, sostituiamo $c = n R$ nella terza coppia d'equazioni del sistema (41); con ciò avremo

$$a = -(1 + n) e^{-\theta} \mu, \quad b = (1 - n) e^{-\theta} \lambda. \tag{46}$$

Basta sostituire per a , b , c le espressioni (46), (45) nell'una o nell'altra delle equazioni (44) per dedurne la relazione seguente da cui si trovano legate le due costanti x e n :

$$x = -\frac{2n}{1-n^2}. \tag{47}$$

Colle medesime sostituzioni la

$$\Lambda = a \lambda + b \mu + c R$$

diventa

$$\Lambda = n (R^2 - 2 e^{-\theta} \lambda \mu), \tag{48}$$

coincidendo coll'equazione di partenza (43), che viene così a ridursi ad una identità.

Siamo ora in grado di scrivere le formole effettive per la trasformazione scoperta da TZITZÉICA, mediante la quale si passa ad una nuova superficie della classe considerata. La denoteremo col simbolo T_n , assumendo n in luogo di α come costante caratteristica. Rimangono sole delle equazioni (41) quelle che danno le derivate delle tre funzioni incognite λ , μ , R , le altre trovandosi identicamente soddisfatte dalle espressioni di a , b , c . Si ottiene così il sistema differenziale seguente, ancora lineare, omogeneo ed illimitatamente integrabile che sarà necessario integrare per dedurne la T_n ricercata:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \gamma + \frac{1+n}{1-n} e^{-\theta} \mu, & \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} &= \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = e^{\theta} R, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \beta} &= \frac{1-n}{1+n} e^{-\theta} \lambda + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \mu, & \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= \lambda, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta} = \mu, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ovvero scrivendolo secondo TZITZÉICA sotto la forma di tre equazioni simultanee a derivate seconde per la funzione incognita R :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{1+n}{1-n} e^{-\theta} \frac{\partial R}{\partial \beta}, & \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \beta} &= e^{\theta} R, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \beta^2} &= \frac{1-n}{1+n} e^{-\theta} \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial R}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Dopo di ciò, sostituendo nelle (9) e (10) del § 1 i valori

$$a = -(1+n) e^{-\theta} \frac{\partial R}{\partial \beta}, \quad b = (1-n) e^{-\theta} \frac{\partial R}{\partial \alpha}, \quad c = n R, \quad (51)$$

avremo per le coordinate x_1, \dots di S_1 e pei coseni normalizzati della normale ξ_1, \dots , cioè contemporaneamente per le coordinate della superficie ausiliaria Σ_1 , trasformata di S_1 per polari reciproche, le formole seguenti:

$$x_i = x - \frac{e^{-\theta}}{R} \left[(1+n) \frac{\partial R}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + (1-n) \frac{\partial R}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right], \quad (1) \quad (52)$$

$$\xi_i = n \left\{ \xi - \frac{e^{-\theta}}{R} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{\partial R}{\partial \beta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{\partial R}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right] \right\}. \quad (53)$$

(1) È questa la formola segnalata da TZITZÉICA nella prima delle due note citate (C. R., 150 (1910), 955).

Conformemente alle (37), (38) si ha:

$$\sum x_1 \xi_1 = m_1, \quad \frac{K_1}{W_1^2} = -\frac{1}{m_1^2} \quad \text{con } m_1 = n m,$$

la costante caratteristica n dovendo essere diversa da 1 a causa delle (50).

Per riconoscere il grado d'arbitrarietà della trasformazione T_n basta tener conto dell'omogeneità del sistema differenziale (49) e così anche di quella di grado zero delle formole (52), (53). Ne concludiamo che, tenendo fissa la costante n , la integrazione del sistema permetterebbe di passare da una data superficie di TZITZÉICA ad una doppia infinità di superficie della medesima classe.

Sostituendo nella prima delle equazioni (42) per Λ il suo valore tratto dalla (48), si ha

$$e^{\theta_1} + e^\theta = \frac{2 \lambda \mu}{R^2}.$$

Questa formula è notevole costituendo il passaggio alla nuova soluzione θ , dell'equazione alle derivate parziali seconde. Essa risulterebbe anche dal paragonare le relazioni

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \beta} = e^\theta, \quad R \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial \alpha \partial \beta} = e^{\theta_1},$$

la seconda delle quali esprime il fatto ben noto, ricordato del resto nel § 1, che il passaggio inverso da S_1 a S si eseguisce per mezzo della funzione trasformatrice $\frac{1}{R}$, soddisfacente all'equazione di MOUTARD relativa alla S_1 .

Benchè la proprietà curiosa dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = e^\theta - e^{-2\theta}$$

di trasformarsi in se stessa mediante la formula

$$e^{\theta_1} = -e^\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \alpha} \frac{\partial R}{\partial \beta}, \tag{54}$$

R essendo soluzione del sistema differenziale (50), già fosse segnalata da TZITZÉICA, convien qui, per essere completi, convincersene con calcolo diretto.

Posto per semplicità

$$R = e^\tau,$$

il sistema (50) assume la forma seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tau}{\partial \alpha^2} &= -\left(\frac{\partial \tau}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{1+n}{1-n} e^{-\theta} \frac{\partial \tau}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 \tau}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} + e^\theta, \\ \frac{\partial^2 \tau}{\partial \beta^2} &= -\left(\frac{\partial \tau}{\partial \beta}\right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \frac{1-n}{1+n} e^\theta \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

Con questo, derivando la

$$e^{\theta_1} = 2 \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - e^\theta$$

rapporto ad α , si ottiene

$$e^{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}\right) \left(2 \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - e^\theta\right) + 2 \frac{1+n}{1-n} e^{-\theta} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \beta}\right)^2$$

e di qui coll'aggiungere la formola analoga:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + 2 \frac{1+n}{1-n} e^{-\theta-\theta_1} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \beta}\right)^2, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} &= \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial \beta} + 2 \frac{1-n}{1+n} e^{\theta-\theta_1} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \alpha}\right)^2.\end{aligned}$$

Derivando ancora una volta e cioè p. es. la prima rispetto a β , avremo:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \alpha \partial \beta} = -e^\theta - e^{-2\theta} + 2 \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} \left(1 + 2 e^{-2\theta-\theta_1} - 2 e^{-2\theta-2\theta_1} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \beta}\right)$$

ovvero, sostituendovi $e^{\theta_1} + e^\theta$ per $2 \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} \frac{\partial \tau}{\partial \beta}$:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \alpha \partial \beta} = e^{\theta_1} - e^{-2\theta_1}$$

che dà appunto l'equazione differenziale richiesta.

Prima di dimostrare il teorema di permutabilità per le trasformazioni T_n , premettiamo un'osservazione relativa alla trasformazione inversa, impor-

tante del resto per le cose che dovremo dire nel seguito. Adoperiamo qui le formole (18) del § 1, mediante le quali si esprimono le funzioni trasformatrici \bar{R} , \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} che figurano nell'inversa di una data trasformazione asintotica, sostituendovi i valori di a , b dati dalle formole (51) e quello di Λ tratto dalle (42):

$$\Lambda = -n R' e^{\theta_1 - \theta}. \quad (55)$$

Avremo così con lievi modificazioni

$$\bar{a} = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\theta} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \beta}, \quad \bar{b} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{-\theta} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \alpha}, \quad \bar{c} = \frac{1}{n} \bar{R}$$

con $\bar{R} = \frac{1}{R}$. Confrontando queste formole colle (51), concludiamo subito: *La inversa della trasformazione T_n è una $T_{\frac{1}{n}}$.*

§ 4.

IL TEOREMA DI PERMUTABILITÀ PER LE TRASFORMAZIONI T_n .

Ora si immaginino note due soluzioni R_1 , R_2 del sistema differenziale (50), corrispondenti rispettivamente ai valori n_1 e n_2 della costante caratteristica. Siano S_1 , S_2 le due nuove superficie di TZITZÉICA ottenute per l'applicazione delle trasformazioni T_{n_1} , T_{n_2} così definite. Per rendere manifesta, nel campo ristretto delle trasformazioni T_n , la validità del *teorema di permutabilità* cui già accennò il TZITZÉICA, conviene appoggiarsi sul teorema più generale del § 2, da noi stabilito per la composizione delle trasformazioni Π_x applicabili alle superficie $p = q$. Basterà infatti provare che, calcolata la S' secondo il metodo indicatovi, il passaggio da S_1 a S' non differisce da una trasformazione T_{n_2} .

Partiamo dalle formole:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(1 + n_1) e^{-\theta} \mu_1, & b_1 &= (1 - n_1) e^{-\theta} \lambda_1, \\ a_2 &= -(1 + n_2) e^{-\theta} \mu_2, & b_2 &= (1 - n_2) e^{-\theta} \lambda_2, \end{aligned}$$

dove

$$\lambda_1 = \frac{\partial R_1}{\partial \alpha}, \quad \mu_1 = \frac{\partial R_1}{\partial \beta}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial R_2}{\partial \alpha}, \quad \mu_2 = \frac{\partial R_2}{\partial \beta}.$$

Sostituendo di più nella (32) del § 2 per x_1 e x_2 i loro valori dati dalla relazione (47) del § 3, cioè

$$x_1 = -\frac{2n_1}{1-n_1^2}, \quad x_2 = -\frac{2n_2}{1-n_2^2},$$

questa può mettersi sotto la forma:

$$J = e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) + \frac{n_1 - n_2}{1 - n_1 n_2} [R_1 R_2 - e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2)]. \quad (56)$$

Ponendo per abbreviare

$$R_1 R_2 - e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2) = \Omega,$$

la scriveremo:

$$J = e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) + \frac{n_1 - n_2}{1 - n_1 n_2} \Omega.$$

Di qui si ricavano le relazioni seguenti:

$$\Phi_{21} + J = \frac{1 - n_2^2}{1 - n_1 n_2} \Omega, \quad \Phi_{12} - J = \frac{1 - n_1^2}{1 - n_1 n_2} \Omega. \quad (57)$$

Ritenendo le denotazioni R', a', b' , già utilizzate nei paragrafi precedenti per indicare le funzioni trasformatrici nel passaggio da S_1 a S , abbiamo secondo le (24) del § 1:

$$a'_1 = a_1 \frac{\Phi_{21} + J}{\Lambda_1} - a_2, \quad b'_1 = -b_1 \frac{\Phi_{21} + J}{\Lambda_1} + b_2. \quad (58)$$

D'altra parte, affinché questo passaggio riesca appunto una trasformazione T_{n_2} , sarà evidentemente necessario che siano soddisfatte al tempo stesso le due eguaglianze:

$$a'_1 = -(1 + n_2) e^{-\theta} \mu'_1, \quad b_1 = (1 + n_2) e^{-\theta} \lambda'_1, \quad (59)$$

nelle quali

$$\lambda'_1 = \frac{\partial R'_1}{\partial \alpha}, \quad \mu'_1 = \frac{\partial R'_1}{\partial \beta}, \quad R'_1 = \frac{J}{R_1}.$$

Resta dunque a provare la equivalenza delle formole (58) e (59).

Limitandoci pel calcolo alla prima coppia, cioè alla verifica dell'identità

$$-(1+n_2)e^{-\theta_1}\mu'_1 = \alpha_1 \frac{\Phi_{21} + J}{\Lambda_1} - \alpha_2,$$

procediamo in guisa da cangiare il primo membro di questa nel secondo. Segue dalla (42)

$$e^{-\theta_1} = -\frac{n_1 R_1^2 e^{-\theta}}{\Lambda_1},$$

e poichè di più

$$\mu'_1 = \frac{\partial \left(\frac{J}{R_1} \right)}{\partial \beta} = \frac{1}{R_1} (R_1 \mu_2 - \mu_1 R_2 - J \mu_1),$$

traendo la J dalla (56), si avrà:

$$\begin{aligned} -(1+n_2)e^{-\theta_1}\mu'_1 &= (1+n_2)n_1 \frac{e^{-\theta}}{\Lambda_1} \left[R_1^2 \mu_2 - R_1 R_2 \mu_1 - e^{-\theta} \mu_1 (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_1 - n_2}{1 - n_1 n_2} \Omega \right] \\ &= (1+n_2)n_1 \frac{e^{-\theta}}{\Lambda_1} \left[\mu_2 (R_1^2 - 2e^{-\theta} \lambda_1 \mu_1) - \frac{(1+n_1)(1-n_2)}{1-n_1 n_2} \mu_1 \Omega \right]; \end{aligned}$$

di qui, in virtù delle (48) e (57)

$$n_1 (R_1^2 - 2e^{-\theta} \lambda_1 \mu_1) = \Lambda_1, \quad \frac{1-n_2^2}{1-n_1 n_2} \Omega = \Phi_{21} + J,$$

risulta la uguaglianza domandata:

$$-(1+n_2)e^{-\theta}\mu'_1 = -(1+n_1)e^{-\theta}\mu_1 \frac{(\Phi_{21} + J)}{\Lambda_1} + (1+n_2)e^{-\theta}\mu_2 = \alpha_1 \frac{\Phi_{21} + J}{\Lambda_1} - \alpha_2.$$

Con ciò, si trova stabilito il teorema di permutabilità per la cui applicazione, fondandosi sulla formola (56), sarebbe da escludersi il caso $n_1 n_2 = 1$. Possiamo enunciarlo nel modo seguente: *Se si fa derivare da una data superficie di TZITZÉICA per mezzo di due trasformazioni T_{n_1}, T_{n_2} ($n_1 n_2 \neq 1$) due nuove superficie S_1, S_2 , esiste sempre una quarta superficie S' della medesima classe, costruibile in termini finiti, alla quale si passa da S_1 e S_2 mediante due rispettive trasformazioni T_{n_2} e T_{n_1} , cioè colle costanti n_1, n_2 scambiate fra loro.*

Da ultimo, faremo l'esame dei *casi singolari* che qui si presentano. Per tal via saremo condotti ad un'elegante proposizione geometrica. Cominciamo dal considerare la composizione di *due trasformazioni* T_n a costanti eguali, indicando con n il loro valore comune. La (56) riducendosi allora a

$$J = e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2),$$

la quarta superficie S' sarà ancora unica e costruibile in termini finiti. Intanto qui si constata che colle R_1, R_2 , appartenenti al medesimo valore della costante n , è definito un fascio lineare di trasformazioni T_n . Infatti, prendendo come nel § 1

$$R_v = v_1 R_1 + v_2 R_2,$$

si ottiene una semplice infinità di superficie trasformate S_v , ciascuna di esse legandosi alle superficie isolate S e S' precisamente nel modo indicato per S_1 e S_2 . Nel percorrere questa schiera costituita da superficie di TZITZÉICA i punti di S_v descrivono le rette congiungenti i punti corrispondenti di S_1 e S_2 .

Cangiando ora leggermente di punto di vista, se riflettiamo che da S_1 ovvero da una qualunque delle S_v si passa a S' mediante una trasformazione T_n , mentre invece, secondo quanto abbiamo detto alla fine del § 3, la S ne nascerebbe per mezzo di una $T_{\frac{1}{n}}$, sarà palese che tale configurazione risulta anche dalla composizione di due trasformazioni T_n e $T_{\frac{1}{n}}$. Cadiamo così appunto nel *caso singolare* $n_1 n_2 = 1$, ove la formola principale (56) del teorema di permutabilità è in difetto.

D'altra parte, nell'ipotesi $n_1 n_2 = 1$, supposte notè due soluzioni R_1, R_2 del sistema differenziale (50) coi rispettivi valori $n_1 = n$ e $n_2 = \frac{1}{n}$ della costante caratteristica, giova riportarsi al ragionamento utilizzato nel § 2 per la composizione di due Π_x a costanti eguali e di segno contrario. Anche qui sarà necessario che abbia luogo l'eguaglianza

$$\Phi_{21} + \Phi_{12} = 0, \tag{60}$$

portante solo sui valori iniziali, perchè risultino identicamente soddisfatte le relazioni che se ne ricavano per derivazione. Due siffatte trasformazioni T_n e $T_{\frac{1}{n}}$ le chiameremo ancora *in relazione armonica*. La condizione (60)

può mettersi sotto la forma

$$\Omega = R_1 R_2 - e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2) = 0.$$

Con ciò, il calcolo della quarta superficie S' dipende dalla quadratura

$$J = \int \left[- (R_1 \lambda_2 - \lambda_1 R_2) d\alpha + (R_1 \mu_2 - \mu_1 R_2) d\beta \right]$$

che introduce una costante arbitraria. Dunque: *Nel comporre due trasformazioni T_n e $T_{\frac{1}{n}}$, supposte in relazione armonica, l'applicazione del teorema di permutabilità, domandando qui una quadratura, fornisce una semplice infinità di quarte superficie S' .*

Confrontando col caso di sopra $n_1 = n_2$, si vede che questa schiera delle S' corrisponde a quella delle S , generata dal fascio lineare di trasformazioni T_n , mentre la coppia S_1, S_2 , restando isolata, dovrebbe mutarsi nella coppia S, S' .

Per giungere all'interessante risultato con cui termineremo l'attuale ricerca, conviene ancora partire da due trasformazioni T_n a costanti eguali, individuate da due soluzioni R_1, R_2 del sistema differenziale (50).

Calcolata la

$$J = e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2),$$

si verifica senza difficoltà che hanno luogo le relazioni

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} e^{-\theta} \frac{\partial J}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha \partial \beta} = e^{\theta} J,$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} e^{\theta} \frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \frac{\partial J}{\partial \beta},$$

cioè che la J soddisfa al sistema differenziale (50), sostituitovi il valore $\frac{1}{n}$ per la costante. Quindi, assumendo

$$R_0 = J = e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_1 \mu_2), \tag{61}$$

potremo servirci della R_0 per assoggettare la data superficie S in pari tempo ad una trasformazione $T_{\frac{1}{n}}$. Questa $T_{\frac{1}{n}}$ di più la riconosciamo essere in relazione armonica con ambedue le T_n definite da R_1 e R_2 . Infatti, combinando convenientemente le equazioni che risultano dalla (61) per derivazione e scrivendovi $\frac{\partial R_0}{\partial \alpha} = \lambda_0$, $\frac{\partial R_0}{\partial \beta} = \mu_0$, avremo le relazioni

$$\begin{aligned} R_0 R_1 - e^{-\theta} (\lambda_0 \mu_1 + \mu_0 \lambda_1) &= 0, \\ R_0 R_2 - e^{-\theta} (\lambda_0 \mu_2 + \mu_0 \lambda_2) &= 0 \end{aligned}$$

con cui resta provato quanto abbiamo asserito. Dunque: *Date due trasformazioni T_n a costanti eguali, si può dedurre senz' integrazione una trasformazione $T_{\frac{1}{n}}$ che sta alla sua volta in relazione armonica con ambedue le T_n .*

Inversamente, quando si supponga nota una coppia armonica $T_n, T_{\frac{1}{n}}$, definita da R_1, R_0 , la determinazione della R_2 richiederebbe una quadratura. Per convincersene basta fare

$$R_2 = t R_1;$$

con ciò, si avrà

$$t = - \int \frac{\lambda_0 d\alpha - \mu_0 d\beta}{R_1^2},$$

la condizione d'integrabilità verificandosi in virtù delle (49).

Ora restando nell'ipotesi di due assegnate T_n con R_1, R_2 da cui immaginiamo dedotta nell'indicato modo la $T_{\frac{1}{n}}$ definita dalla R_0 , indicheremo ancora con S_1, S_2, S_0 le rispettive superficie trasformate.

Adoperiamo inoltre il teorema di permutabilità per ricavare dalla coppia S_1, S_2 la quarta superficie S' , ricordando a quest'effetto che si ha $J = R_0$. Dopo ciò, passando al confronto delle superficie S' e S_0 , stabiliremo fra queste una relazione geometrica che offre una notevole semplicità.

Valgono le formole seguenti per le coordinate correnti delle superficie S' e S_0 :

$$x' = x - \frac{R_1 R_2}{R_0} (n_1 \zeta_2 - \zeta_1 n_2), \quad (62)$$

$$x_0 = x - \frac{e^{-\theta}}{R_0} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \mu_0 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lambda_0 \frac{\partial x}{\partial \beta} \right]. \quad (63)$$

La prima di queste ci dà:

$$\sum x' \xi = m - \frac{R_1 R_2}{R_0} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}.$$

Ricorrendo ora alla formola

$$\xi_1 = n \left\{ \xi - \frac{e^{-\theta}}{R} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \mu_1 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right] \right\}$$

ed alla sua analoga per l'indice 2, sostituiamo nel determinante per $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ i loro valori; indi scindendolo secondo la regola di moltiplicazione ed osservando che

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \beta} & \frac{\partial \eta}{\partial \beta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \Delta = m e^\theta, \quad R_0 = e^{-\theta} (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2),$$

avremo

$$\sum x' \xi = m n^2. \tag{64}$$

Ciò premesso, possiamo disporre di tre coefficienti A, B, C in guisa da fare

$$x' = A \frac{\partial x}{\partial \alpha} + B \frac{\partial x}{\partial \beta} + C x. \tag{65}$$

A causa della (64) viene subito

$$C = n^2. \tag{66}$$

Pel calcolo di A e B basta dedurre dalla (62) le relazioni

$$\sum (x' - x) \xi_1 = 0, \quad \sum (x' - x) \xi_2 = 0,$$

colle quali, introducendovi le espressioni di $\xi_1, \dots, \xi_2, \dots$ e tenendo conto delle formole (40) del § 3, si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lambda_1 A + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mu_1 B &= (1 - n^2) R_1, \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lambda_2 A + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mu_2 B &= (1 - n^2) R_2. \end{aligned}$$

Di qui, essendo

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2 &= e^\theta R_0 \\ R_1 \lambda_2 - \lambda_1 R_2 &= -e^\theta \lambda_0, \quad R_1 \mu_2 - \mu_1 R_2 = e^\theta \mu_0 \end{aligned}$$

risultano le espressioni cercate:

$$A = -n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\theta} \frac{\mu_0}{R_0^2}, \quad B = -n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{-\theta} \frac{\lambda_0}{R_0^2}. \quad (67)$$

In forza delle (66) e (67) la (65) diventa:

$$x' = n^2 \left\{ x - \frac{e^{-\theta}}{R_0} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \mu_0 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lambda_0 \frac{\partial x}{\partial \beta} \right] \right\},$$

e quindi, confrontando questa colla (63), si ha finalmente:

$$x' = n^2 x_0.$$

Siamo così giunti alla notevole proposizione seguente: *La superficie S' che si ottiene come la quarta superficie del teorema di permutabilità nel comporre due trasformazioni T_n a costanti eguali è un'omotetica (rispetto all'origine) della superficie S_0 che si ricava dalla primitiva S per l'applicazione della $T_{\frac{1}{n}}$ deducibile senza integrazione dalla coppia di trasformazioni T_n .*

È da osservarsi che essendo la $T_{\frac{1}{n}}$ l'inversa di una T_n , si può passare dalla S_0 alla sua omotetica S' per mezzo di tre successive trasformazioni T_n . Queste peraltro potrebbero essere realizzate in infiniti modi; cioè, più in generale, vale la proposizione seguente che si dimostra subito:

Essendo S una superficie di TZITZÉICA e S^ una sua omotetica rispetto al centro, in guisa da aversi*

$$\frac{x^*}{x} = \frac{y^*}{y} = \frac{z^*}{z} = N$$

con $N = n^2$ costante positiva per causa di realtà, si può sempre passare da S a S^ e cioè in infiniti modi mediante tre successive trasformazioni T_n , la prima di queste potendo scegliersi in modo affatto arbitrario.*

Infatti, operate sulla S due qualunque trasformazioni T_n con $n = \sqrt{N}$, sia S' la quarta superficie che risulta dall'applicazione del teorema di permutabilità. Consideriamo ancora nell'istesso tempo la S_0 ottenuta per mezzo della $T_{\frac{1}{n}}$ che abbiamo visto ricavarci dalla coppia di trasformazioni T_n . Se-

condo quanto si è dimostrato, fra le due superficie S' e S_0 ha luogo un'omotetia rispetto all'origine, essendo

$$x_0 = \frac{1}{n^2} x'.$$

Sostituendo adunque per l'applicazione di questa $T_{\frac{1}{n}}$ alla data superficie S la sua omotetica S^* , ne risulterà una S_0^* che viene a coincidere colla S' . Con questo sarà stabilito il passaggio

$$S \rightarrow S_1 \rightarrow S' (= S_0^*) \rightarrow S^*$$

che si effettua con tre successive trasformazioni T_n , nel senso indicato (ovvero per mezzo di tre $T_{\frac{1}{n}}$ in senso inverso).

Notiamo finalmente che in questa terna l'arbitrarietà del secondo passo per cui ci siamo appoggiati sul teorema di permutabilità sarà limitata per la proprietà della rispettiva T_n di trovarsi in relazione armonica colla $T_{\frac{1}{n}}$, inversa della T_n iniziale.

Le trasformazioni birazionali periodiche sulle superficie iperellittiche con due fasci di curve ellittiche.

(Di NICOLÒ SPAMPINATO, a Catania).

Sopra una superficie iperellittica con due (soli) fasci ellittici di curve ellittiche, le trasformazioni birazionali periodiche, che non siano di 2^a specie, si distribuiscono, per un teorema noto (¹), in schiere continue ∞^1 o ∞^2 .

Qui si vuole determinare per ogni intero positivo n assegnato il numero delle trasformazioni birazionali periodiche di 2^a specie col periodo n ; e il numero delle schiere continue ∞^1 o ∞^2 in cui si dispongono le trasformazioni periodiche, di periodo n , che non siano di 2^a specie.

Di questi numeri, il primo è da riguardare come noto (²), ed è lo stesso per *ogni* superficie iperellittica. Ma, per ragioni di completezza, abbiamo creduto opportuno ricalcolarlo, anche perchè per trovarlo ci serviamo dello stesso metodo che ci serve per calcolare l'altro, e che è diverso da quello seguito dagli autori citati.

1. Sia V_2 una superficie iperellittica di un S_r e perciò rappresentabile parametricamente mediante funzioni abeliane $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ a due variabili u e v appartenenti ad una stessa tabella di periodi.

Adottando la nomenclatura e le notazioni della Memoria del Prof. SCORZA qui sotto citata, se V_2 possiede due soli fasci ellittici di curve ellittiche, essa

(¹) RACITI, *Trasformazioni birazionali periodiche di una varietà abeliana in se stessa* (Atti della R. Accademia dei Lincei, Volume XXVIII, I semestre, Fascicolo 9^o-10^o).

(²) CASTELNUOVO, *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, t. XXV (1892); od anche ENRIQUES et SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Acta Mathematica, t. 32, 1909), p. 292.

non può essere che del tipo III), IV) o VI) ⁽³⁾, e il gruppo Γ ⁽⁴⁾ ad essa relativo non può presentare che sei alternative; e cioè il gruppo Γ ⁽⁵⁾

α) o è il gruppo ciclico G_2 di ordine 2 costituito da:

$$u' = u \quad v' = v; \quad u' = -u \quad v' = -v;$$

β) o è il gruppo quadrimo G_4 costituito da:

$$u' = u \quad v' = v; \quad u' = -u \quad v' = -v;$$

$$u' = u \quad v' = -v; \quad u' = -u \quad v' = v;$$

γ) o è il gruppo G_8 d'ordine 8 generato:

$$u' = -u \quad v' = -v; \quad u' = u \quad v' = i v; \quad (i = \sqrt{-1}):$$

δ) o è il gruppo G_6 d'ordine 6 generato da:

$$u' = -u \quad v' = -v; \quad u' = u \quad v' = \varepsilon v; \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right):$$

ε) o è il gruppo G_{12} d'ordine 12 generato da:

$$u' = -u \quad v' = -v; \quad u' = i u \quad v' = -\varepsilon v;$$

ζ) o è il gruppo G_{24} d'ordine 24 generato da:

$$u' = -u \quad v' = -v; \quad u' = i u \quad v' = \varepsilon v.$$

2. Alternativa α).

In questo caso, delle due trasformazioni del gruppo Γ la prima risponde alla schiera ∞^2 delle trasformazioni di 2^a specie, la seconda alla schiera delle trasformazioni di 1^a specie che sono tutte periodiche col periodo 2, cioè involutorie.

Andiamo a vedere sotto quali condizioni una trasformazione di 2^a specie può essere involutoria.

⁽³⁾ SCORZA, *Intorno alla teoria delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XLI, Anno 1916), Parte II, n.° 2.

⁽⁴⁾ Loc. cit. ⁽³⁾, Parte II, n.° 4.

⁽⁵⁾ Loc. cit. ⁽³⁾, Parte II, n.° 35.

Una trasformazione T di tale specie è rappresentata da equazioni della forma

$$u' = u + a, \quad v' = v + b$$

con a e b costanti (complesse) qualunque. La potenza n^{ma} di T è rappresentata dalle equazioni

$$u' = u + na, \quad v' = v + nb:$$

quindi se

$$\omega \equiv \left\| \begin{array}{c} \omega_1 \dots \omega_4 \\ \omega'_1 \dots \omega'_4 \end{array} \right\| \tag{1}$$

è la matrice riemanniana cui appartengono le funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, T^n risulta identica se, e solo se, è

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{\lambda_1}{n} \omega_1 + \dots + \frac{\lambda_4}{n} \omega_4 \\ b = \frac{\lambda_1}{n} \omega'_1 + \dots + \frac{\lambda_4}{n} \omega'_4 \end{array} \right\} \tag{2}$$

con le $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ interi scelti comunque nella serie $0, 1, \dots, n - 1$.

Di qua discende intanto che:

Se n è un intero qualunque, il numero complessivo delle trasformazioni di 2^a specie di V_4 periodiche e aventi per periodo n o un divisore di n è n^4 ; e, come ha mostrato il prof. CASTELNUOVO, basta applicare a questo punto una famosa formola del DEDEKIND per determinare il numero delle trasformazioni di 2^a specie periodiche e col periodo n .

A ciò possiamo anche pervenire facendo vedere che se è

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_4, n)^{(6)} = 1 \tag{3}$$

la trasformazione periodica risulta a periodo n .

Infatti ammettiamo che la trasformazione T corrispondente a valori λ , soddisfacenti alla (3) sia a periodo $n' < n$ (n' divisore di n): allora deve essere

$$n'a \equiv 0 \quad n'b \equiv 0 \pmod{\omega}$$

⁽⁶⁾ Con $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, n)$ denotiamo, secondo l'uso, il massimo comun divisore degli interi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, n$.

e perciò accanto alle (2) avremo le relazioni

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\lambda'_1}{n'} \omega_1 + \dots + \frac{\lambda'_4}{n'} \omega_4 \\ b &= \frac{\lambda'_1}{n'} \omega'_1 + \dots + \frac{\lambda'_4}{n'} \omega'_4 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

essendo $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4$ convenienti interi.

Ponendo

$$n : n' = n'' \quad (n'' > 1)$$

dalle (2) si ricava:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\lambda_1 : n''}{n'} \omega_1 + \dots + \frac{\lambda_4 : n''}{n'} \omega_4 \\ b &= \frac{\lambda_1 : n''}{n'} \omega'_1 + \dots + \frac{\lambda_4 : n''}{n'} \omega'_4 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Confrontando le (4) con le (5), per un'osservazione nota [vedi, p. esempio, loc. cit. (3), Parte I, n° 9, b)], si ha che deve essere

$$\lambda_1 : n'' = \lambda'_1, \dots, \quad \lambda_4 : n'' = \lambda'_4.$$

Si deduce dunque che n'' è divisore comune di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$; e ciò è assurdo, perchè è $n'' > 1$.

Segue che T è proprio a periodo n .

Ne discende che il numero delle trasformazioni periodiche di 2ª specie di V_2 aventi per periodo n è uguale al numero delle quaterne $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ soddisfacenti alla (3). Tale numero è dato dall'indicatore di n d'ordine 4, $\varphi_4(n)$ (7).

Abbiamo dunque:

Il numero delle trasformazioni periodiche di 2ª specie di V_2 aventi per periodo un numero intero n assegnato è dato da:

$$\varphi_4(n) = n^4 \left(1 - \frac{1}{p^4}\right) \left(1 - \frac{1}{q^4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{t^4}\right)$$

dove con p, q, \dots, t s'indicano i divisori primi di n .

(7) CAHEN, *Théorie des nombres* (Paris, Hermann), Tome Premier, n.º 411, 412.

3. *Alternativa β).*

Per le due schiere ∞^2 di trasformazioni determinate dalle due trasformazioni

$$u' = u, v' = v; \quad u' = -u, v' = -v$$

si ripetono le cose dette nell'alternativa α) e ciò vale per tutte le altre alternative.

4. Consideriamo ora la schiera ∞^2 di trasformazioni generata dalla trasformazione

$$u' = u, v' = -v.$$

La trasformazione generica T di detta schiera sarà data da:

$$u' = u + a, v' = -v + b$$

essendo a e b due costanti qualunque.

La potenza n^{ma} di T sarà data da:

$$\begin{aligned} u' &= u + n a, & v' &= v & \text{se } \mathbf{\acute{e} } n \text{ pari,} \\ u' &= u + n a, & v' &= -v + b & \text{se } \mathbf{\acute{e} } n \text{ dispari.} \end{aligned}$$

Segue che *nella schiera non esistono trasformazioni periodiche a periodo dispari*. Se è poi n pari ed è $(n a, 0)$ un periodo simultaneo delle funzioni φ , sarà T periodica avente per periodo n o un divisore di n .

Com'è noto ⁽⁶⁾ la tabella a cui appartengono le φ , nel caso che si considera può ridursi ad uno dei tre tipi seguenti

$$\left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega'_1 & \omega'_2 \end{array} \right\|, \quad (6) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega'_1}{2} & \omega'_1 & \omega'_2 \end{array} \right\|, \quad (7) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \frac{\omega'_1}{2} & \frac{\omega'_2}{2} & \omega'_1 & \omega'_2 \end{array} \right\| \quad (8).$$

Se la V_2 appartiene alla tabella (6) perchè $(n a, 0)$ sia un periodo simultaneo delle φ , bisogna che esistano degl'interi $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ per i quali sia:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\lambda_1}{n} \omega_1 + \frac{\lambda_2}{n} \omega_2 \\ 0 &= \lambda_3 \omega'_1 + \lambda_4 \omega'_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(6) Loc. cit. (3), Parte II, n.º 37.

Segue che deve essere

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Basta poi far variare λ_1, λ_2 fra i numeri $0, 1, \dots, n-1$ per ottenere sempre per a valori che insieme ad una quantità b qualunque danno una trasformazione T periodica col periodo n o un divisore di n .

Ora ci domandiamo: come si devono scegliere gl'interi λ_1 e λ_2 perchè la corrispondente trasformazione T risulti col periodo n ?

Intanto si vede subito che se è

$$D(\lambda_1, \lambda_2, n) = 1 \quad (10)$$

T risulta col periodo n . Le coppie λ_1, λ_2 soddisfacenti alla (10) sono $\varphi_2(n)$.

Sia invece

$$D(\lambda_1, \lambda_2, n) = n'' > 1. \quad (11)$$

Allora per un ragionamento fatto si vede subito che, posto

$$n : n'' = n'$$

la sostituzione T risulterà a periodo n' se n' è pari, e a periodo $2n'$ se n' è dispari.

Segue che, non potendo essere $n = n'$, perchè T risulti a periodo n bisogna che sia n' dispari e $n = 2n'$, cioè che n sia il doppio di un numero dispari. Si ha inoltre che deve essere $n'' = 2$.

Abbiamo dunque:

Da una coppia λ_1, λ_2 non soddisfacente alla (10) può provenire una corrispondenza T periodica a periodo n quando, e solo quando, è n della forma $4K + 2$ ed è

$$D(\lambda_1, \lambda_2, n) = 2. \quad (12)$$

Perchè sia soddisfatta la (12), essendo n il doppio di un numero dispari, basta che λ_1, λ_2 siano due numeri pari, e che $\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}$ formino con $\frac{n}{2}$ una terna di numeri primi fra di loro. Segue che le coppie λ_1, λ_2 soddisfacenti alle condizioni volute sono in numero di $\varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$.

Raccogliendo si ha:

Se la V_2 appartiene alla tabella (6), nella schiera ∞^2 considerata non esiste alcuna sostituzione periodica avente per periodo un numero dispari,

mentre ne esistono

$$\varphi_2(n) \text{ o } \varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$$

schiere ∞^1 , aventi per periodo un numero n pari assegnato, secondo che è n della forma

$$4K \text{ o } 4K + 2.$$

5. Si osservi ora che quello che s'è detto per la schiera precedente può ripetersi per la schiera ∞^2 determinata dalla trasformazione

$$u' = -u \quad v' = v.$$

Raccogliendo allora si ha:

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_4 e la V_2 appartiene alla tabella (6), essa di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un intero n assegnato ne ammette:

Nessuna	se è	$n \equiv 1$	(mod. 2)
$2\varphi_2(n)$	se è	$n \equiv 0$	(mod. 4)
$2\left[\varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)\right]$	se è	$n \equiv 2$	(mod. 4).

6. Appartenga la V_2 alla tabella (7).

In questo caso perchè $(n\alpha, 0)$ sia un periodo simultaneo delle funzioni φ , bisogna che sia:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\lambda_1}{n} \omega_1 + \frac{\lambda_2}{n} \omega_2 \\ 0 &= \lambda_2 \frac{\omega'_1}{2} + \lambda_3 \omega'_1 + \lambda_4 \omega'_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Dalla 2^a delle (13) ricavasi

$$\frac{\lambda_2}{2} + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0.$$

Segue che l'intero λ_2 deve esser pari. Allora la costante α si deve calcolare mediante la formola:

$$\alpha = \frac{\lambda_1}{n} \omega_1 + \frac{2K_2}{n} \omega_2$$

dove si faccia

$$\lambda_1 = 0, 1, \dots, n-1$$

$$K_2 = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$$

(si ricordi che n è pari).

Come sopra si trova che per essere la trasformazione T corrispondente ad una coppia λ_1, λ_2 a periodo n , basta che sia

$$D(\lambda_1, 2K_2, n) = 1 \quad (14)$$

e che se poi è n il doppio di un numero dispari basta che sia

$$D(\lambda_1, 2K_1, n) = 2 \quad (15)$$

e che se la coppia λ_1, λ_2 non entra in nessuno dei due casi considerati, la corrispondente trasformazione T non sarà certo a periodo n .

Ora il numero delle coppie soddisfacenti alla (14), tenendo conto che è n pari, e perciò deve essere λ_1 dispari, con un procedimento classico nella teoria dei numeri ⁽⁹⁾ si trova che è $\varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$ se $\frac{n}{2}$ non contiene il fattore 2, mentre è

$$\varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{4}{3} \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$$

se $\frac{n}{2}$ contiene il fattore 2.

Il numero delle coppie λ_1, λ_2 soddisfacenti alla (15) è $\varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$.

Raccogliendo si ha (tenendo conto anche dell'altra schiera ∞^2):

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_4 e la V_2 appartiene alla tabella (7), essa di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un intero n assegnato ne ammette:

$$\text{Nessuna} \quad \text{se è} \quad n \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$$

$$\frac{8}{3} \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{se è} \quad n \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4)$$

$$4 \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{se è} \quad n \equiv 2 \quad (\text{mod. } 4).$$

⁽⁹⁾ Loc. cit. (7).

7. *Appartenga la V_2 alla tabella (8).*

In questo caso procedendo come nel n.º 6 si trova che deve essere

$$\lambda_3 = -\frac{\lambda_1}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_4 = -\frac{\lambda_2}{2}$$

e perciò λ_1, λ_2 devono essere pari.

Conseguentemente dovendo essere n pari sarà

$$D(\lambda_1, \lambda_2, n) \equiv 2$$

e perciò quando è n della forma $4K$, non potendo essere

$$D(\lambda_1, \lambda_2, n) = 1,$$

non si hanno trasformazioni periodiche col periodo n .

Se invece n è della forma $4K + 2$ esistono trasformazioni periodiche a periodo n e queste corrispondono alle coppie λ_1, λ_2 per cui risulti

$$D(\lambda_1, \lambda_2, n) = 2.$$

Il numero delle coppie soddisfacenti alla precedente condizione, tenendo conto che λ_1, λ_2 sono pari, è $\varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$.

Raccogliendo si ha (tenendo conto anche dell'altra schiera ∞^2):

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_4 e la V_2 appartiene alla tabella (8), essa di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un intero n assegnato ne ammette:

<i>Nessuna</i>	<i>se è</i>	$n \equiv \equiv 2$	$(\text{mod. } 4)$
$2\varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$	<i>se è</i>	$n \equiv 2$	$(\text{mod. } 4).$

8. *Alternativa γ .*

In questo caso il gruppo Γ coincide col gruppo G_6 , somma del gruppo G_2 e delle 6 trasformazioni:

$$\left. \begin{array}{l} u' = u \\ v' = -v, \end{array} \right\} (16) \qquad \left. \begin{array}{l} u' = -u \\ v' = v, \end{array} \right\} (17)$$

$$\left. \begin{array}{l} u' = u \\ v' = i v, \end{array} \right\} (18) \qquad \left. \begin{array}{l} u' = -u \\ v' = -i v, \end{array} \right\} (19)$$

$$\left. \begin{array}{l} u' = u \\ v' = -iv, \end{array} \right\} (20) \quad \left. \begin{array}{l} u' = -u \\ v' = iv. \end{array} \right\} (21)$$

La V_2 allora apparterrà ad una delle seguenti due tabelle ⁽¹⁰⁾:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{array} \right\|, (22) \quad \left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i+1}{2} & 1 & i \end{array} \right\|. (23)$$

9. *Appartenga la V_2 alla tabella (22).*

a) Per le schiere ∞^2 determinate dalle trasformazioni (16) e (17) si può ripetere ciò che si è detto nei n.° 4 e 5 perchè la tabella (22) è dello stesso tipo della tabella (6).

b) Le schiere ∞^2 di trasformazioni determinate dalle (19) e (21) sono tutte formate con trasformazioni tutte periodiche col periodo 4.

c) Consideriamo ora la schiera ∞^2 determinata dalla (18). La trasformazione generica T di essa è data da:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = u + a \\ v' = iv + b. \end{array} \right.$$

La potenza n^{ma} di T è data da:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = u + na \\ v' = iv + b, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u' = u + na \\ v' = -v + (1+i)b, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u' = u + na \\ v' = -iv + ib, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u' = u + na \\ v' = v \end{array} \right.$$

secondo che è

$$n \equiv 1, \quad n \equiv 2, \quad n \equiv 3, \quad n \equiv 0 \pmod{4}.$$

Si ha intanto:

Nella schiera considerata non possono esservi sostituzioni periodiche aventi per periodo un numero che non sia multiplo di 4.

Per essere poi T periodica la coppia $(na, 0)$ deve essere un periodo simultaneo delle funzioni φ_i . Allora deve essere

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\lambda_1}{n} \omega_1 + \frac{\lambda_2}{n} \omega_2 \\ 0 = \lambda_3 + i \lambda_4. \end{array} \right.$$

⁽¹⁰⁾ Loc. cit. ⁽³⁾, Parte II, n.° 38.

Deve essere intanto

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Basta poi far variare λ_1 e λ_2 fra i numeri $1, 2, \dots, n$ ed in corrispondenza ai valori che si ottengono per a , e qualunque sia b , trasformazioni periodiche aventi il periodo n o un divisore di n .

E più precisamente abbiamo:

Se è $D(\lambda_1, \lambda_2, n) = 1$ la T sarà a periodo n .

Se è $D(\lambda_1, \lambda_2, n) = n'' > 1$ e posto $n:n'' = n'$, la trasformazione T avrà il periodo:

n'	se è	$n' \equiv 0$	(mod. 4)
$2n'$	se è	$n' \equiv 2$	(mod. 4)
$4n'$	se è	$n' \equiv 1$ o $n' \equiv 3$	(mod. 4).

Nel primo caso non si possono ottenere trasformazioni a periodo n perchè è sempre $n' < n$.

Nel 2° caso posto $2n' = n$ ed essendo

$$n' \equiv 2 \pmod{4},$$

cioè essendo n' della forma $4K + 2$, sarà

$$n = 2n' = 2(4K + 2) = 8K + 4.$$

Ed allora al solito si trova che:

Se n è della forma $8K + 4$ ed è $D(\lambda_1, \lambda_2, n) = 2$, la coppia λ_1, λ_2 dà luogo ad una trasformazione periodica col periodo n .

Analogamente si trova nel 3.° caso che:

Se n è della forma $16K + 4$ o $16K + 12$ ed è $D(\lambda_1, \lambda_2, n) = 4$, la coppia λ_1, λ_2 dà luogo ad una trasformazione periodica a periodo n .

Il numero delle coppie λ_1, λ_2 soddisfacenti alle due suddette condizioni è rispettivamente $\varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$ e $\varphi_2\left(\frac{n}{4}\right)$.

Osservando che un numero divisibile per 4 o è della forma $8K$ o è della forma $8K + 4$ e che un numero della forma $8K + 4$ o è della forma $16K + 4$ o della forma $16K + 12$ si ha raccogliendo:

Nella schiera ∞^2 considerata di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche

aventi per periodo un numero n assegnato ne esistono:

Nessuna	se è	$n \equiv 0$	(mod. 4)
$\varphi_2(n)$	se è	$n \equiv 0$	(mod. 8)
$\varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{n}{4}\right)$	se è	$n \equiv 4$	(mod. 8).

d) Si osservi infine che quello che s'è detto per la schiera precedente può ripetersi per la schiera determinata dalla (20). Per accorgersi di ciò basta dare l'espressione della potenza n^a della sua trasformazione generica.

Raccogliendo quanto abbiamo detto in a), b), c), d) si ha:

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_8 e la V_2 appartiene alla tabella (22), essa di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un numero n assegnato ne ammette:

Nessuna	se è	$n \equiv 1$	(mod. 2)
$2 \left[\varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) \right]$	se è	$n \equiv 2$	(mod. 4)
$4 \varphi_2(n)$	se è	$n \equiv 0$	(mod. 8)
$2 \left[\varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{n}{4}\right) \right]$	se è	$n \equiv 4$	(mod. 8).

La V_2 ammette inoltre due schiere ∞^2 di trasformazioni periodiche a periodo 4.

10. La V_2 appartenga alla tabella (23).

Questa volta deve essere:

$$\begin{cases} a = \frac{\lambda_1}{n} \omega_1 + \frac{\lambda_2}{n} \omega_2 \\ 0 = \lambda_2 \frac{1+i}{2} + \lambda_3 + i \lambda_4 \end{cases}$$

e perciò deve essere

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{\lambda_2}{2},$$

cioè restano indeterminate al solito λ_1 e λ_2 , colla condizione che λ_2 deve essere pari.

a) Per le schiere determinate dalle due trasformazioni (16) e (17) si può ripetere ciò che si è detto al n.º 6.

b) L'osservazione fatta in b) nel n.º 9 vale, s'intende, anche qua.

c) Nel ragionamento poi fatto in c) del n.º 9 per la schiera ∞^2 determinata dalla (18) la nuova condizione che λ_2 sia pari influisce solo nel fatto che il numero delle coppie λ_1, λ_2 soddisfacenti alla condizione $D(\lambda_1, \lambda_2, n) = 1$ anzichè essere $\varphi_2(n)$ è

$$\frac{4}{3} \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$$

perchè dovendo essere n multiplo di 4, $\frac{n}{2}$ conterrà il fattore 2 (n.º 6).

d) L'osservazione fatta in d) del n.º 9 vale anche qua.

Abbiamo quindi:

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_8 e la V_2 appartiene alla tabella (23), essa di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un numero n assegnato ne ammette:

$$\text{Nessuna} \qquad \qquad \qquad \text{se è} \qquad \qquad n \equiv 1 \qquad \qquad (\text{mod. } 2)$$

$$4 \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) \qquad \qquad \qquad \text{se è} \qquad \qquad n \equiv 2 \qquad \qquad (\text{mod. } 4)$$

$$\frac{14}{3} \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) \qquad \qquad \qquad \text{se è} \qquad \qquad n \equiv 0 \qquad \qquad (\text{mod. } 8)$$

$$\frac{20}{3} \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) + 2 \varphi_2\left(\frac{n}{4}\right) \qquad \qquad \qquad \text{se è} \qquad \qquad n \equiv 4 \qquad \qquad (\text{mod. } 8).$$

La V_2 ammette inoltre due schiere di trasformazioni periodiche a periodo 4.

11. Alternativa δ).

Il gruppo Γ in questo caso è somma del gruppo G_2 e delle 4 trasformazioni

$$\left. \begin{aligned} u' &= u \\ v' &= \varepsilon^2 v, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= -u \\ v' &= -\varepsilon v, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= u \\ v' &= \varepsilon^2 v, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= -u \\ v' &= -\varepsilon^2 v. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

La V_3 allora apparterrà ad una delle tabelle ⁽¹¹⁾:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{array} \right\|, \quad (28)$$

$$\left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon - 1}{3} & 1 & \varepsilon \end{array} \right\|. \quad (29)$$

12. *Appartenga la V_2 alla tabella (28).*

a) Le schiere ∞^2 determinate dalle trasformazioni (25) e (27) sono formate da sostituzioni periodiche a periodo 6.

b) La potenza n^α della trasformazione generica T della schiera ∞^2 determinata dalla (24) è data da:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = u + na \\ v' = \varepsilon v + b, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = u + na \\ v' = \varepsilon^2 v + (\varepsilon + 1)b, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = u + na \\ v' = v, \end{array} \right.$$

secondo che è

$$n \equiv 1, \quad n \equiv 2, \quad n \equiv 0 \pmod{3}.$$

Con procedimento del tutto analogo a quello tenuto in c) del n.º 9 si trova che:

Nella schiera considerata di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un numero n assegnato ve ne sono:

$$\begin{array}{lll} \text{Nessuna} & \text{se è} & n \equiv 0 \pmod{8} \\ \varphi_2(n) & \text{se è} & n \equiv 0 \pmod{9} \\ \varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{3}\right) & \text{se è} & n \equiv 0 \pmod{9}. \end{array}$$

c) Per la schiera determinata dalla (26) vale quanto è stato detto per la precedente.

Raccogliendo si ha:

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_6 e la V_2 appartiene alla tabella (28), essa di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un numero n assegnato ne ammette:

$$\begin{array}{lll} \text{Nessuna} & \text{se è} & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 2 \varphi_2(n) & \text{se è} & n \equiv 0 \pmod{9} \\ 2 \left[\varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{3}\right) \right] & \text{se è} & n \equiv 0 \pmod{9}. \end{array}$$

⁽¹¹⁾ Loc. cit. (3), Parte II, n.º 39.

La V_2 ammette inoltre due schiere ∞^2 di trasformazioni periodiche a periodo 6.

13. La V_2 appartenga alla tabella (29).

Questa volta per le λ_i si trovano le condizioni:

$$\lambda_4 = -\frac{\lambda_2}{3}, \quad \lambda_3 = \frac{\lambda_2}{3}.$$

Restano sempre indeterminate λ_1 e λ_2 colla condizione che λ_2 sia multiplo di 3.

Questa ulteriore condizione porta al seguente risultato:

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_6 e la V_2 appartiene alla tabella (29), essa di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un numero n assegnato ne ammette:

<i>Nessuna</i>	se è	$n \equiv 0 \pmod{3}$	(mod. 3)
$\frac{9}{4} \varphi_2 \left(\frac{n}{3} \right)$	se è	$n \equiv 0 \pmod{9}$	(mod. 9)
$6 \varphi_2 \left(\frac{n}{3} \right)$	se è	$n \equiv 0 \pmod{9}$	(mod. 9).

La V_2 ammette inoltre due schiere ∞^2 di trasformazioni periodiche a periodo 6.

14. Alternativa ε).

Il gruppo Γ della V_2 sarà nel caso attuale il gruppo G_{12} , somma del gruppo G_6 e delle 6 trasformazioni

$$\left. \begin{aligned} u' &= u \\ v' &= -v \end{aligned} \right\} (30) \qquad \left. \begin{aligned} u' &= -u \\ v' &= v \end{aligned} \right\} (31)$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= u \\ v' &= -\varepsilon v \end{aligned} \right\} (32) \qquad \left. \begin{aligned} u' &= -u \\ v' &= \varepsilon v \end{aligned} \right\} (33)$$

$$\left. \begin{aligned} u' &= u \\ v' &= -\varepsilon^2 v \end{aligned} \right\} (34) \qquad \left. \begin{aligned} u' &= -u \\ v' &= \varepsilon^2 v. \end{aligned} \right\} (35)$$

La V_2 apparterrà allora alla tabella ⁽¹²⁾

$$\left\| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \epsilon. \end{array} \right\| \quad (36)$$

a) Riguardo alle schiere ∞^2 determinate dalle trasformazioni (30) e (31) vale quanto è stato detto al n.º 4.

b) Riguardo alle schiere ∞^2 determinate dalle trasformazioni del gruppo G_6 vale quanto è stato detto al n.º 12.

c) Le schiere ∞^2 determinate dalle trasformazioni (33) e (35) son tutte periodiche e a periodo 3.

d) Con procedimento usato si trova poi che *nella schiera ∞^2 determinata dalla (32) o dalla (34), di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi un assegnato numero n ne esistono:*

Nessuna	se è	$n \equiv 0$	(mod. 6)
$(\varphi_2 n)$	se è	$n \equiv 0$	(mod. 36)
$\varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right)$	se è	$n \equiv 18$	(mod. 36)
$\varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{3}\right)$	se è	$n \equiv 12$ o $n \equiv 24$	(mod. 36)
$\varphi_2(n) + \varphi_2\left(\frac{n}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{n}{3}\right) + \varphi_2\left(\frac{n}{6}\right)$	se è	$n \equiv 6$ o $n \equiv 30$	(mod. 36).

Raccogliendo si ha:

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_{12} , la V_2 di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un numero n assegnato ne ammette solo per valori di n che siano multipli di 2 o di 3. La V_2 ammette quattro schiere ∞^2 di trasformazioni tutte periodiche, due a periodo 3 e due a periodo 6.

(Il numero delle schiere ∞^1 si calcola al solito mediante i risultati ottenuti).

15. Alternativa ξ).

In questo caso il gruppo Γ coincide col gruppo G_{24} , somma del gruppo G_{12}

⁽¹²⁾ Loc. cit. (3), Parte II, n.º 40.

e delle 12 trasformazioni date da:

$$\left. \begin{matrix} u' = i u \\ v' = v \end{matrix} \right\} (37) \quad \left. \begin{matrix} u' = -i u \\ v' = -v \end{matrix} \right\} (38) \quad \left. \begin{matrix} u' = i u \\ v' = -v \end{matrix} \right\} (39) \quad \left. \begin{matrix} u' = -i u \\ v' = v \end{matrix} \right\} (40)$$

$$\left. \begin{matrix} u' = i u \\ v' = \varepsilon v \end{matrix} \right\} (41) \quad \left. \begin{matrix} u' = -i u \\ v' = -\varepsilon v \end{matrix} \right\} (42) \quad \left. \begin{matrix} u' = i u \\ v' = -\varepsilon v \end{matrix} \right\} (43) \quad \left. \begin{matrix} u' = -i u \\ v' = \varepsilon v \end{matrix} \right\} (44)$$

$$\left. \begin{matrix} u' = i u \\ v' = \varepsilon^2 v \end{matrix} \right\} (45) \quad \left. \begin{matrix} u' = -i u \\ v' = -\varepsilon^2 v \end{matrix} \right\} (46) \quad \left. \begin{matrix} u' = i u \\ v' = -\varepsilon^2 v \end{matrix} \right\} (47) \quad \left. \begin{matrix} u' = -i u \\ v' = \varepsilon^2 v \end{matrix} \right\} (48)$$

La V_2 apparterrà ancora ad una tabella del tipo (36).

a) Per le schiere determinate dalle trasformazioni del gruppo G_{12} vale quanto è stato detto nel n.º 14.

b) Le schiere ∞^2 determinate dalle trasformazioni (38) e (39) sono formate da trasformazioni periodiche a periodo 4.

c) Le schiere determinate dalle trasformazioni (41), (42), ..., (48) sono formate da trasformazioni periodiche a periodo 12.

d) Per le schiere determinate dalle trasformazioni (37) e (40) vale quanto è stato detto in (c) del n.º 9.

Raccogliendo si ha:

Se il gruppo Γ della V_2 coincide col gruppo G_{24} , la V_2 di schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche aventi per periodo un numero n assegnato ne ammette solo per valori di n multipli di 2 o di 3.

La V_2 ammette poi 14 schiere ∞^2 di trasformazioni tutte periodiche due a periodo 3, due a periodo 4, due a periodo 6 e otto a periodo 12.

(Il numero delle schiere ∞^1 di trasformazioni periodiche si calcola al solito con i risultati ottenuti).

Catania, Luglio 1920.

Sopra una relazione fra certe forme differenziali quadratiche e le algebre commutative.

(Di FRANCESCO CECIONI, a Livorno.)

1. In una Nota dei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* ⁽¹⁾ il prof. BIANCHI ha osservato una notevole corrispondenza fra i sistemi commutativi (con unità principale) di numeri complessi ad n unità e le forme differenziali quadratiche in n variabili

$$ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k,$$

a curvatura Riemanniana nulla e con valori costanti dei simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$ di Christoffel, per le quali *un certo determinante* (che troveremo poi) *non è identicamente nullo*.

Mostrerò, nelle righe che seguono, come questa limitazione possa togliersi per mezzo della considerazione dei sistemi commutativi *degeneri*, cioè privi di unità principale, riducendo così alla determinazione dei sistemi commutativi (con o senza unità principale) la risoluzione *completa* del problema della determinazione delle forme soddisfacenti alle due condizioni sopra dette. Tratterò per disteso i casi $n = 2$, $n = 3$.

2. Ricordiamo dalla teoria dei numeri complessi a più unità quanto segue:

α) Siano

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

n unità fondamentali (cioè una *base*) di un sistema di numeri complessi di

(1) L. BIANCHI, *Sopra un'interpretazione geometrica dei sistemi commutativi di numeri a più unità* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5^a, vol. XXV, fasc. 6^o, 1916].

ordine n , a coordinate complesse usuali, che supponiamo senz'altro commutativo, e

$$e_i e_k = \sum_1^n \gamma_{iks} e_s \quad (\gamma_{iks} = \gamma_{kis})$$

le formule elementari di moltiplicazione, dove supponiamo verificate le ben note condizioni che esprimono la proprietà associativa della moltiplicazione, condizioni che (tenendo conto della supposta commutatività) scriviamo

$$\sum_1^n \gamma_{ils} \gamma_{sj\lambda} = \sum_1^n \gamma_{ijs} \gamma_{si\lambda}, \quad (i, l, j, \lambda = 1, 2, \dots, n). \quad (A)$$

Se il *determinante caratteristico* del sistema

$$\Delta = \left| \sum_1^n \gamma_{iks} \xi_i \right| \quad \begin{array}{l} (s = 1, 2, \dots, n) \\ (k = 1, 2, \dots, n) \end{array} \quad (B)$$

non è *identicamente nullo* rispetto alle variabili indipendenti ξ_i , è possibile, in generale, la *divisione*, ed esiste nel sistema un numero non nullo e_0 , ed uno solo, detto *unità principale* o *modulo*, tale che se a è un *qualsivoglia* numero del sistema si ha

$$e_0 a = a e_0 = a.$$

Se poi è *identicamente*

$$\Delta = 0,$$

la divisione è sempre o indeterminata o impossibile, e non esiste alcun numero e_0 che goda della proprietà suddetta. Questi sistemi di numeri si chiamano *sistemi degeneri* o *privi di unità principale*. In essi manifestamente ogni numero è *divisore dello zero* ⁽²⁾.

b) Un sistema S di numeri (con o senza unità principale) si dice *riducibile* quando, con una trasformazione lineare omogenea a coefficienti reali

⁽²⁾ V., ad es., Encyclopédie des sciences math. pures et appliquées. Tomo I, vol. 1, fasc. 3^o, p. 394. — Per quanto riguarda queste ed altre proprietà che richiamiamo appresso può vedersi anche la recente importante Memoria di G. SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann* [Rend. del Circolo matematico di Palermo, t. XLV (1921), pp. 1-204], nella prima parte della quale si ha una utilissima esposizione (in parte originale) della teoria generale delle algebre associative.

o complessi usuali, si possono in esso prendere n unità fondamentali

$$\eta'_1, \dots, \eta'_p, \eta''_1, \dots, \eta''_q \quad (p + q = n)$$

le quali si ripartiscano in due gruppi tali che il prodotto di due unità di uno stesso gruppo sia una combinazione lineare delle unità del gruppo stesso, mentre ogni prodotto $\eta'_i \eta''_k$ sia *nullo*. Ciascuno dei due gruppi definisce un sistema di numeri complessi contenuto in S ⁽³⁾.

c) Due sistemi S ed S' , di ordine n , si dicono *equivalenti* quando, con una trasformazione lineare omogenea a coefficienti reali o complessi usuali, si possono in ciascuno di essi prendere n unità fondamentali le quali soddisfacciano alle stesse formule di moltiplicazione alle quali soddisfano le unità fondamentali dell'altro. Due tali sistemi debbono ritenersi identici, in quanto che il passaggio dall'uno all'altro equivale ad un cambiamento delle unità fondamentali ⁽⁴⁾.

d) È manifesto che se

$$(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

è la base di un sistema *degenere* di ordine n , introducendo una nuova unità e_0 con le formule

$$e_0 e_i = e_i, e_0 = e_i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

si ha un sistema *non degenere* d'ordine $n + 1$ ⁽⁵⁾. Cioè ogni sistema *privo di unità principale, di ordine n , è contenuto in un sistema con unità principale, d'ordine $n + 1$.*

e) *In un sistema commutativo irriducibile di ordine $n + 1$, con unità principale, si può scegliere una base*

$$(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$$

tale che:

1° si ha

$$e_0^2 = e_0 \quad e_0 e_i = e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

⁽³⁾ Encyclopédie . . . , loc. cit., pag. 396.

⁽⁴⁾ Encyclopédie . . . , loc. cit., pag. 395.

⁽⁵⁾ Encyclopédie . . . , loc. cit., pag. 394. — Cfr. anche FROBENIUS, *Theorie der hypercomplexen Grössen* [Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1903), pp. 634-645], p. 636.

2° le unità e_1, e_2, \dots, e_n determinano un sottosistema di ordine n nel quale tutti i numeri sono radici dello zero (hanno cioè una loro potenza uguale a zero);

3° nelle formole di moltiplicazione delle unità e_1, e_2, \dots, e_n ,

$$e_i e_k = \sum_1^n \gamma_{iks} e_s \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

si ha $\gamma_{iks} = 0$ quando è $s \leq i$ o $s \leq k$; cioè ogni prodotto $e_i e_k$ dipende solamente dalle unità che seguono tanto e_i come e_k .

Manifestamente il numero e_0 è l'unità principale, ed il sottosistema

$$(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

è degenerare (°).

f) Osserviamo che dalla condizione 3ª si ha

$$e_n e_1 = 0, \quad e_n e_2 = 0, \dots, \quad e_n e_{n-1} = 0, \quad e_n^2 = 0,$$

cioè il prodotto di e_n per qualunque numero del sottosistema (e_1, e_2, \dots, e_n) è uguale a zero. Del resto l'esistenza di un tale numero viene provata per poter dimostrare i risultati indicati alla lettera e) (°).

g) Se in un sistema commutativo irriducibile non degenerare si sceglie la base come è indicato alla lettera e), i divisori dello zero sono solamente i numeri

$$\sum_1^n \lambda_i e_i,$$

quelli cioè che non contengono l'unità principale.

Ciò è conseguenza di proprietà generali dei sistemi commutativi irriducibili (°) (ed indipendente dalla condizione 3ª della lettera e)), ma si può anche vedere immediatamente, adoperando però la detta condizione. Se infatti è $\lambda_0 \neq 0$, ed è

$$(\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) (\mu_0 e_0 + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) = 0,$$

(°) CARTAN, *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* [Ann. Fac. sc. Toulouse, 12 (1898)], p. 60, e pp. 24-25; e FROBENIUS, loc. cit., p. 641. — Cfr. anche Encyclopédie . . . , loc. cit., pp. 411 e 424.

(°) CARTAN, loc. cit., p. 32.

(°) V., ad es., Encyclopédie . . . , loc. cit., pp. 409 e segg. e p. 421.

cio è brevemente

$$\begin{array}{l} S_1) (\overline{R}_1, R_2, \dots, R_q) \\ S_2) (R_1, \overline{R}_2, \dots, R_q) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ S_q) (R_1, R_2, \dots, \overline{R}_q), \end{array}$$

le cui basi si hanno dalla base (1) di S sopprimendo volta a volta le singole unità principali $\eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{q0}$. È facile vedere che essi sono appunto privi di unità principale.

Indichiamo infatti con $\eta_i, \eta'_i, \eta''_i, \dots$ dei numeri appartenenti al sistema R_i , e con $\bar{\eta}_i, \bar{\eta}'_i, \bar{\eta}''_i, \dots$ dei numeri appartenenti al sistema degenere corrispondente \overline{R}_i ; avremo che *ogni* numero del sistema S_1 (ad es.) è del tipo

$$a = \bar{\eta}_1 + \eta_2 + \dots + \eta_q$$

e perciò esiste per ogni a un conveniente numero non nullo $\bar{\eta}'_1$ (appartenente quindi al sistema S_1 stesso) per il quale si ha

$$a \bar{\eta}'_1 = \bar{\eta}_1 \bar{\eta}'_1 = 0.$$

S_1 è dunque degenere; e così $S_2 \dots S_q$.

Dimostriamo di più che nel sistema totale S non sono contenuti altri sistemi d'ordine n privi di unità principale.

Osserviamo anzitutto che se un numero $b = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_q$ di S è un divisore dello zero, e lo si esprime per le η_i , esso non può contenere *tutte* le unità principali $\eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{q0}$. Se infatti il numero b contiene tutte queste unità principali, nessuno dei numeri $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ è un divisore dello zero *nel corrispondente sistema* R_1, R_2, \dots, R_q (n.° 2g). D'altra parte l'equazione

$$bz = 0.$$

ossia

$$(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_q) (\eta'_1 + \eta'_2 + \dots + \eta'_q) = 0$$

equivale alle equazioni simultanee

$$\eta_1 \eta'_1 = 0 \quad \eta_2 \eta'_2 = 0 \dots \eta_q \eta'_q = 0;$$

poichè nessuno dei numeri η_i è divisore dello zero nel corrispondente si-

stema R_i , si ha dunque $\eta'_1 = \eta'_2 = \dots = \eta'_q = 0$, cioè $z = 0$, e b non è divisore dello zero.

Sia ora S' un sistema degenere di ordine n contenuto in S , e siano

$$b_k = \beta_{10}^{(k)} \eta_{10} + \beta_{11}^{(k)} \eta_{11} + \dots + \beta_{20}^{(k)} \eta_{20} + \dots + \beta_{q0}^{(k)} \eta_{q0} + \dots + \beta_{qpq}^{(k)} \eta_{qpq}$$

$$(k = 1, 2 \dots n)$$

gli n numeri che costituiscono la base del sistema S' ; ogni numero $\sum_1^n x_k b_k$, dove gli x_k sono numeri ordinari arbitrari, deve essere divisore dello zero in S' (n.º 2 a) e quindi anche in S ; ne segue, per l'osservazione precedente, che in *ognuno* di questi numeri $\sum x_k b_k$ deve mancare almeno una delle unità principali $\eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{q0}$. Ma se i coefficienti $\beta_{i0}^{(1)} \beta_{i0}^{(2)} \dots \beta_{i0}^{(n)}$ ($i = 1, 2 \dots q$) non sono tutti nulli per un certo medesimo valore di i , si può sempre, ed in infiniti modi, soddisfare alle q disuguaglianze

$$\sum_1^n x_k \beta_{i0}^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

e ciò contraddice a quanto sopra. Dunque per un certo i deve aversi

$$\beta_{i0}^{(1)} = \beta_{i0}^{(2)} = \dots = \beta_{i0}^{(n)} = 0.$$

Ciò prova che S' coincide con il sistema S , della tabella (2), e che quindi non vi sono altri sistemi, oltre quelli trovati, del tipo considerato.

4. Rimane però da considerare il caso che qualcuno dei numeri p_1, p_2, \dots, p_q sia uguale ad 1, che cioè qualcuna delle parti irriducibili di S sia ad una sola unità. Notiamo subito che la seconda parte della dimostrazione del n.º precedente non adoperava l'ipotesi $p_i > 1$, onde essa vale anche adesso, ed i sistemi degeneri d'ordine n , contenuti in S , non possono dunque, anche in tal caso, essere altri all'infuori degli S_1, S_2, \dots, S_q . Ma se, ad es., è $p_h = 1$, il sistema S_h non è degenere (ammette infatti l'unità principale $\eta_{10} + \dots + \eta_{h-1,0} + \dots + \eta_{h+1,0} + \dots + \eta_{q0}$); perciò il risultato di questo n.º e del n.º precedente può riassumersi dicendo che *i sottosistemi di ordine n privi di unità principale contenuti in S sono al massimo tanti quante sono le parti irriducibili di S contenenti più di una unità*; e sono rappresentati dalla tabella (2), intendendo omissi quei valori h dell'indice di S_h pei quali è $p_h = 1$.

5. Per completare, occorre esaminare se due dei sottosistemi trovati possano essere equivalenti.

Consideriamone due S_i ed S_j ; sarà dunque $p_i > 1$, $p_j > 1$. Può darsi che la i -esima e la j -esima parte irriducibile, R_i ed R_j , di S siano equivalenti; tali sono anche, allora (n.º 2, g)) i sistemi degeneri \bar{R}_i ed \bar{R}_j , e perciò sono manifestamente equivalenti anche i due sistemi S_i ed S_j . Dimostriamo ora inversamente che se S_i ed S_j sono equivalenti, sono equivalenti pure R_i ed R_j .

Supponiamo infatti che S_i ed S_j siano equivalenti; esisteranno in S_i n numeri indipendenti i quali soddisferanno alle stesse formole di moltiplicazione alle quali soddisfano le unità fondamentali di S_j ; consideriamo quelli di detti n numeri che costituiscono l' j -esimo gruppo e siano essi $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{p_j}}$; avremo per essi (con notazioni analoghe a quelle del n.º precedente):

$$\left. \begin{aligned} a_{j_1} &= \eta'_1 + \dots + \bar{\eta}'_i + \dots + \eta'_p \\ a_{j_{p_j}} &= \eta_1^{(p_j)} + \dots + \bar{\eta}_i^{(p_j)} + \dots + \eta_q^{(p_j)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

e gli altri numeri a_{hk} che costituiscono la nuova base di S_i , e che non scriviamo, saranno del medesimo tipo

$$\eta_1 + \dots + \bar{\eta}_i + \dots + \eta_q.$$

Il numero $a_{j_{p_j}}$ dovrà essere tale che moltiplicato per *qualunque* altro a_{hk} deve dare per prodotto 0: ciò a causa della struttura della base del sistema S_j , alle cui leggi debbono soddisfare gli a_{hk} . Poichè è

$$\begin{aligned} (\eta_1^{(p_j)} + \dots + \bar{\eta}_i^{(p_j)} + \dots + \eta_q^{(p_j)}) (\eta_1 + \dots + \bar{\eta}_i + \dots + \eta_q) = \\ = \eta_1^{p_j} \eta_1 + \dots + \bar{\eta}_i^{(p_j)} \bar{\eta}_i + \dots + \eta_q^{(p_j)} \eta_q \end{aligned}$$

dovremo avere

$$\eta_1^{(p_j)} \eta_1 = 0, \dots, \quad \bar{\eta}_i^{(p_j)} \bar{\eta}_i = 0, \dots, \quad \eta_q^{(p_j)} \eta_q = 0.$$

Se ora $\eta_1^{(p_j)}$ non è nullo, dalla prima di queste uguaglianze segue che tutti i termini η_1 in tutti gli a_{hk} (compresovi $a_{j_{p_j}}$) devono essere divisori dello zero, e quindi, per le proprietà (n.º 2 g)) del sistema R_i , i detti termini η_1 non debbono contenere η_{10} ; ma allora gli a_{hk} non sarebbero indipendenti (supposto $i \neq 1$), e quindi non costituirebbero una base per S_i . È dunque

$$\eta_1^{(p_j)} = 0,$$

ed analogamente

$$\eta_2^{(p_j)} = \dots = \eta_{i-1}^{(p_j)} = \eta_{i+1}^{(p_j)} = \dots = \eta_q^{(p_j)} = 0,$$

e quindi, per le (3),

$$\alpha_{jp_j} = \bar{\eta}_i^{(p_j)}.$$

Consideriamo ora il numero precedente $\alpha_{j,p_{j-1}}$; a causa anche qui della struttura della base del sistema S_j , alle cui leggi debbono soddisfare gli α_{hk} (n.º 2 e)), dovremo avere

$$\alpha_{j,p_{j-1}} \cdot \alpha_{j_s} = \alpha_s \bar{\eta}_i^{(p_j)} \quad (s = 1, 2, \dots, p_j)$$

essendo gli α_s dei numeri ordinari, e quindi (come sopra)

$$\eta_1^{(p_j-1)} \eta_1^{(s)} = 0 \quad \dots \quad \eta_{i-1}^{(p_j-1)} \eta_{i-1}^{(s)} = 0 \quad \eta_{i+1}^{(p_j-1)} \eta_{i+1}^{(s)} = 0 \quad \dots \quad \eta_q^{(p_j-1)} \eta_q^{(s)} = 0.$$

E poichè moltiplicando $\alpha_{j,p_{j-1}}$ per qualunque altro α_{hk} dobbiamo ottenere 0, vediamo che per *qualunque numero* α_{hk} deve aversi

$$\eta_1^{(p_j-1)} \eta_1 = 0 \quad \dots \quad \eta_{i-1}^{(p_j-1)} \eta_{i-1} = 0 \quad \eta_{i+1}^{(p_j-1)} \eta_{i+1} = 0 \quad \dots \quad \eta_q^{(p_j-1)} \eta_q = 0.$$

Ragionando come sopra si trova di qui

$$\eta_1^{(p_j-1)} = \dots = \eta_{i-1}^{(p_j-1)} = \eta_{i+1}^{(p_j-1)} = \dots = \eta_q^{(p_j-1)} = 0$$

e quindi

$$\alpha_{j,p_{j-1}} = \bar{\eta}_i^{(p_j-1)}.$$

Così seguitando si trova che le (3) si riducono a

$$\alpha_{j_1} = \bar{\eta}'_i \quad \alpha_{j_2} = \bar{\eta}''_i \quad \dots \quad \alpha_{j_{p_j}} = \bar{\eta}_i^{(p_j)}.$$

Ma i numeri $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_{p_j}}$ soddisfano alle stesse leggi di moltiplicazione delle unità

$$\eta_{j_1} \quad \eta_{j_2} \quad \dots \quad \eta_{j_{p_j}},$$

e sono linearmente indipendenti. Ne segue, che nel sistema degenero \bar{R}_i (al quale appartengono i numeri indipendenti $\bar{\eta}'_i, \dots, \bar{\eta}_i^{(p_j)}$) vi è un sottosistema equivalente al sistema degenero \bar{R}_j .

Scambiando nel ragionamento i con j si trova che in \bar{R}_j vi è un sottosistema equivalente ad \bar{R}_i ; perciò i due sistemi \bar{R}_i ed \bar{R}_j sono equivalenti, e sono quindi tali anche i sistemi *non degeneri* R_i ed R_j c. d. d.

Possiamo dunque completare il risultato del n° 4 nel modo seguente:

Un sistema commutativo d'ordine $n + 1$, con unità principale, contiene tanti sistemi distinti di ordine n , senza unità principale, quante sono le sue parti irriducibili non equivalenti con più di una unità. Le basi di questi sistemi degeneri si hanno come risulta dalla tabella (2) del n° 3.

Osserviamo esplicitamente che i sistemi S_i di detta tabella si possono riguardare dedotti dal sistema S in conformità dell'osservazione *d*) del n° 2. Infatti

$$e_0 = \eta_{10} + \eta_{20} + \dots + \eta_{q0}$$

è l'unità principale di S , e se nella base (1) di S si sostituisce al posto di η_{i0} l'unità e_0 , si ottiene un'altra base di S .

6. Possiamo enunciare il risultato del n° precedente anche in altro modo, premettendo quanto segue.

Un sistema, si dice, con CARTAN (¹⁰), *pseudonullo* quando tutti i suoi numeri sono radici dello zero (di un conveniente ordine).

I *radicali* (n° 2 *g*)) dei sistemi (non degeneri) irriducibili sono sistemi pseudonulli; viceversa è facile dedurre da quanto sopra la seguente proprietà:

Ogni sistema commutativo pseudonullo di ordine n è radicale di un sistema irriducibile (non degenero) d'ordine $n + 1$.

Sia infatti T un sistema pseudonullo (e_1, e_2, \dots, e_n) e supponiamo, se è possibile, che il sistema non degenero S di base

$$(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$$

(e_0 unità principale) sia riducibile; il sistema T sarà allora un sistema degenero di ordine n contenuto nel sistema riducibile S di ordine $n + 1$, e perciò, per il n° precedente, si potrà prendere in T una base del tipo indicato nella tabella (2) del n° 3. Ma allora esiste in T qualche numero η_{i0} tale che $\eta_{i0}^k = \eta_{i0}$ qualunque sia k , e che quindi non è radice dello zero; e ciò contraddice all'ipotesi. Il sistema S è dunque irriducibile.

Il risultato del n° 5 può allora enunciarsi così:

Un sistema commutativo senza unità principale è formato dalla riunione

(¹⁰) CARTAN, loc. cit., pag. 57. Un tale sistema viene chiamato, da B. PEIRCE, *nilpotent*; cfr. H. E. HAWKES, *On hypercomplex number systems* [Transactions of the American Mathematical Society, vol. 3, 1902], p. 313 def. 7; p. 321, Theor. VII.

(o, come anche si dice, *somma diretta*) di ALCUNI (eventualmente nessuno) sottosistemi irriducibili con unità principale, e di UN sistema pseudonullo.

Osserviamo al riguardo che un sistema pseudonullo può essere riducibile, ma le sue eventuali parti irriducibili sono tutte degeneri; se infatti una parte avesse unità principale, questa non sarebbe una radice dello zero.

7. Quanto abbiamo detto al n° 2 e), g) ed ai nn. 3-4-5 costituisce un metodo per dedurre i sistemi commutativi degeneri d'ordine n da quelli non degeneri d'ordine $n + 1$.

Osserviamo esplicitamente che se si parte da sistemi non degeneri non equivalenti, si hanno con questo metodo sistemi degeneri pure non equivalenti.

Si ricordi infatti l'ultima osservazione del n° 5, e si noti che se i sistemi degeneri

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad (e'_1, e'_2, \dots, e'_n),$$

fossero equivalenti, tali sarebbero anche i sistemi non degeneri d'origine

$$(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n) \quad (e'_0, e'_1, e'_2, \dots, e'_n),$$

dove e_0, e'_0 sono, al solito, le unità principali.

8. Osserviamo pure che manifestamente in ogni sistema commutativo senza unità principale esiste almeno un numero che moltiplicato per ogni altro numero del sistema dà prodotto nullo. Tale infatti è l'unità e_n del n° 2 e) (V. n° 2 f)), e perciò tali sono le unità η_{μ, p_μ} dei sistemi indicati nella tabella (2), per le quali è $p_\mu > 1$. Anzi da questa tabella si vede che in ogni sistema i numeri che godono della detta proprietà sono almeno tanti quante sono le parti irriducibili, con più di una unità, del sistema non degeneri dal quale il sistema considerato proviene.

9. Applichiamo quanto sopra alla determinazione dei sistemi commutativi privi di unità principale, di ordine $n = 2$, ed $n = 3$.

Per $n = 3$ non sono, che io sappia, conosciuti; mentre per $n = 2$ essi sono noti, essendo noti, per questo valore di n , tutti i sistemi associativi, con unità principale e senza unità principale⁽¹¹⁾; tratterò non ostante anche il caso $n = 2$, dato che l'esame di esso è brevissimo.

⁽¹¹⁾ A. CAYLEY, *On double Algebra* [Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 15 (1883-84), pp. 185-197]. — Cfr. anche G. MARLETTA, *Sistemi lineari d'omografie, che sono gruppi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XLIII (1918-19), pagine 269-351], p. 333.

Per $n = 2$ dovremo prendere per punto di partenza i sistemi commutativi non degeneri di 3° ordine. Di questi se ne hanno due tipi irriducibili ⁽¹²⁾, i quali, essendo e_0 l'unità principale, sono dati rispettivamente dalle seguenti formule di moltiplicazione (omettiamo quelle ove compare e_0):

$$\text{Tipo I)} \quad (e_0, e_1, e_2) \quad e_1^2 = e_2 \quad e_2^2 = 0 \quad e_1 e_2 = 0$$

$$\text{Tipo II)} \quad (e_0, e_1, e_2) \quad e_1^2 = 0 \quad e_2^2 = 0 \quad e_1 e_2 = 0.$$

I tipi riducibili poi si hanno combinando l'unico tipo irriducibile non degenero di 2° ordine ⁽¹³⁾ con l'unico tipo di 1° ordine, oppure combinando tre tipi di 1° ordine; ma quest'ultimo tipo è inutile per la nostra ricerca, perchè non contiene, per il teor. del n° 5, alcun sistema degenero di 2° ordine. Consideriamo dunque solo il tipo detto precedentemente, che rappresentiamo così:

$$\text{Tipo III)} \quad (e_0, e_1; e_2) \quad e_1^2 = 0 \quad e_2^2 = e_2$$

dove il segno « ; » separa le basi delle due parti irriducibili, e non sono scritte le formule di moltiplicazione delle unità di una parte con l'unità dell'altra, perchè si sa che questi prodotti sono nulli; così faremo sempre, anche nel caso successivo.

Si hanno dunque, in virtù del n° 5, *tre tipi di sistemi commutativi degeneri di second'ordine*

$$(e_1, e_2),$$

che sono i seguenti:

$$\text{Tipo A)} \quad e_1^2 = e_2 \quad e_2^2 = 0 \quad e_1 e_2 = 0$$

$$\text{Tipo B)} \quad e_1^2 = 0 \quad e_2^2 = 0 \quad e_1 e_2 = 0$$

$$\text{Tipo C)} \quad e_1^2 = 0 \quad e_2^2 = e_2 \quad e_1 e_2 = 0,$$

i quali, per il n° 7, non sono equivalenti. Ciò del resto è facile a verificarsi direttamente.

Osserviamo che il tipo *A)* è irriducibile (come subito si verifica), mentre i tipi *B)* e *C)* sono riducibili.

⁽¹²⁾ Encyclopédie . . . , loc. cit., pag. 402 e 403.

⁽¹³⁾ Encyclopédie . . . , loc. cit., pag. 400 e 401.

10. Passiamo al caso $n = 3$. Dovremo considerare i sistemi commutativi non degeneri per $n = 4$. Di essi quelli irriducibili si riducono a quattro tipi distinti ⁽¹⁴⁾ che qui riportiamo con le stesse convenzioni del n° precedente, indicando la base, al solito, con

(e_0, e_1, e_2, e_3) :

$$\text{Tipo I) } e_1^2 = e_2 \quad e_2^2 = 0 \quad e_3^2 = 0 \quad e_1 e_2 = e_3 \quad e_1 e_3 = 0 \quad e_2 e_3 = 0$$

$$\text{Tipo II) } e_1^2 = e_3 \quad e_2^2 = e_3 \quad e_3^2 = 0 \quad e_1 e_2 = 0 \quad e_1 e_3 = 0 \quad e_2 e_3 = 0$$

$$\text{Tipo III) } e_1^2 = e_2 \quad e_2^2 = 0 \quad e_3^2 = 0 \quad e_1 e_2 = 0 \quad e_1 e_3 = 0 \quad e_2 e_3 = 0$$

$$\text{Tipo IV) } e_1^2 = 0 \quad e_2^2 = 0 \quad e_3^2 = 0 \quad e_1 e_2 = 0 \quad e_1 e_3 = 0 \quad e_2 e_3 = 0$$

I tipi riducibili si hanno poi combinando varie parti irriducibili, secondo le seguenti decomposizioni del numero 4:

$$4 = 3 + 1, \quad 4 = 2 + 2, \quad 4 = 2 + 1 + 1;$$

è omessa (cfr. n.° precedente) la decomposizione $4 = 1 + 1 + 1 + 1$. Dalla prima decomposizione si hanno i seguenti tipi:

$$\text{Tipo V) } (e_0, e_1, e_2; e_3) \quad e_1^2 = e_2, \quad e_3^2 = 0, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_3^2 = e_3$$

$$\text{Tipo VI) } (e_0, e_1, e_2; e_3) \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = 0, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_3^2 = e_3;$$

dalla seconda

$$\text{Tipo VII) } (e_0, e_1; e_2, e_3) \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = 0, \quad e_2 e_3 = e_3;$$

dalla terza

$$\text{Tipo VIII) } (e_0, e_1; e_2; e_3) \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = e_3.$$

È noto poi ⁽¹⁵⁾ che anche questi tipi V-VI-VII-VIII sono effettivamente distinti, cioè che due qualunque di essi non sono equivalenti.

⁽¹⁴⁾ Encyclopédie . . . , loc. cit., pag. 402 e 403. — V. anche STUDY, *Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendungen in der Theorie der Transformationsgruppen* [Monatshefte für Mathematik und Physik, I Jahrgang, 1890, pp. 283-355]. — In questo lavoro lo STUDY (fra l'altro) determina appunto tutti i sistemi *associativi* distinti *aventi modulo*, riducibili ed irriducibili, per $n = 4$. — Non ho potuto vedere questa Memoria dello STUDY; la citazione ed i risultati accennati si trovano nella Memoria di G. MARLETTA (p. 305), già citata.

⁽¹⁵⁾ STUDY, loc. cit.

Applicando il teorema del n.º 5 si ha dunque che esistono otto tipi di sistemi commutativi del terz'ordine, senza unità principale,

$$(e_1, e_2, e_3)$$

che sono i seguenti:

Tipo A)	$e_1^2 = e_2$	$e_2^2 = 0$	$e_3^2 = 0$	$e_1 e_2 = e_3$	$e_1 e_3 = 0$	$e_2 e_3 = 0$
Tipo B)	$e_1^2 = e_3$	$e_2^2 = e_3$	$e_3^2 = 0$	$e_1 e_2 = 0$	$e_1 e_3 = 0$	$e_2 e_3 = 0$
Tipo C)	$e_1^2 = e_2$	$e_2^2 = 0$	$e_3^2 = 0$	$e_1 e_2 = 0$	$e_1 e_3 = 0$	$e_2 e_3 = 0$
Tipo D)	$e_1^2 = 0$	$e_2^2 = 0$	$e_3^2 = 0$	$e_1 e_2 = 0$	$e_1 e_3 = 0$	$e_2 e_3 = 0$
Tipo E)	$e_1^2 = e_2$	$e_2^2 = 0$	$e_3^2 = e_3$	$e_1 e_2 = 0$	$e_1 e_3 = 0$	$e_2 e_3 = 0$
Tipo F)	$e_1^2 = 0$	$e_2^2 = 0$	$e_3^2 = e_3$	$e_1 e_2 = 0$	$e_1 e_3 = 0$	$e_2 e_3 = 0$
Tipo G)	$e_1^2 = 0$	$e_2^2 = e_2$	$e_3^2 = 0$	$e_1 e_2 = 0$	$e_1 e_3 = 0$	$e_2 e_3 = e_3$
Tipo H)	$e_1^2 = 0$	$e_2^2 = e_2$	$e_3^2 = e_3$	$e_1 e_2 = 0$	$e_1 e_3 = 0$	$e_2 e_3 = 0$

i quali, per il n.º 7, non sono equivalenti.

Vediamo dunque che, per ogni valore di n , il numero dei tipi distinti privi di unità principale è maggiore del numero dei tipi distinti aventi unità principale. Così per $n = 2$ si hanno *due* tipi non degeneri e *tre* degeneri; per $n = 3$ si hanno *quattro* tipi non degeneri ed *otto* degeneri. La ragione del fatto sta in ciò, che tutti i sistemi degeneri di ordine $q < n$ combinati coi sistemi (degeneri o no) di ordine $n - q$, danno sistemi degeneri d'ordine n ; si hanno poi inoltre quelli irriducibili d'ordine n .

11. Passiamo finalmente all'applicazione geometrica, osservata da BIANCHI, della quale abbiamo fatto cenno al n.º 1.

Il prof. BIANCHI, nella Nota citata al n.º 1, si propone il problema della determinazione delle forme differenziali quadratiche in n variabili x_1, x_2, \dots, x_n

$$ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k \quad (a_{ik} = a_{ki}) \quad (4)$$

a curvatura Riemanniana nulla, e coi simboli di Christoffel di 2.^a specie

$$\left\{ \begin{array}{c} i \quad k \\ s \end{array} \right\}$$

aventi valori costanti. Egli dimostra dapprima quanto appresso:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinché certe $\frac{n^2(n+1)}{2}$ costanti γ_{ik} ($\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$) appartengano, come valori dei simboli $\left\{ \begin{matrix} i & k \\ s \end{matrix} \right\}$, a forme differenziali (4) a curvatura Riemanniana nulla, sono le seguenti:

$$\sum_1^n \gamma_{is} \gamma_{sj\lambda} = \sum_1^n \gamma_{ij\lambda} \gamma_{s,i\lambda} \quad (i, \lambda, j, l = 1, 2 \dots n) \quad (5)$$

Per ogni soluzione γ_{ik} di questo sistema di equazioni algebriche si hanno $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme differenziali del tipo richiesto, corrispondenti ai considerati valori γ_{ik} dei suddetti simboli, ed esse si ottengono integrando il seguente sistema di equazioni ai differenziali totali, illimitatamente integrabile in virtù delle (5),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} &= \sum_1^n \gamma_{il\lambda} a_{k\lambda} + \sum_1^n \gamma_{kl\lambda} a_{i\lambda} \\ (i, k, l &= 1, 2 \dots n) \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

con la condizione che il determinante $|a_{ik}|$ sia diverso da zero ⁽¹⁶⁾.

In base a questo risultato BIANCHI osserva che le condizioni (5) non sono altro che le condizioni (A) del n.º 2 che stanno a base della teoria dei sistemi (commutativi) di numeri complessi a più unità. *Supponendo perciò che le costanti γ_{ik} non annullino identicamente, nelle ξ_i , il determinante (B) del n.º 2 a)*

$$\Delta = \left| \sum_i^n \gamma_{ik} \xi_i \right|,$$

e chiamando *singolari* quelle forme differenziali (4) per le quali sia identicamente $\Delta = 0$, egli giunge alla corrispondenza accennata al n.º 1 fra le forme *non singolari* dotate delle proprietà volute, ed i sistemi commutativi *non degeneri* ad n unità ⁽¹⁷⁾.

Ora è manifesto dai nn. precedenti che le forme *singolari* corrispondono nel medesimo modo ai sistemi commutativi *degeneri*, i quali, insieme ai non degeneri, danno *tutte* le soluzioni del sistema algebrico (5); può dirsi perciò in modo generale che:

⁽¹⁶⁾ BIANCHI, loc. cit., nn. 2, 3 e 4.

⁽¹⁷⁾ BIANCHI, loc. cit., n. 5.

Ad ogni forma quadratica (4), che gode delle proprietà volute, corrisponde un sistema commutativo di numeri ad n unità; viceversa, ad ogni base (e_1, e_2, \dots, e_n) di un sistema commutativo corrispondono $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ di dette forme.

Così in base ai risultati dei nn.º 9 e 10 potremo calcolare (come faremo al n.º 15) tutte le forme *singolari* del $d s^2$ del piano e dello spazio ordinario con valori costanti pei simboli $\left\{ \begin{matrix} i k \\ s \end{matrix} \right\}$. Ne troveremo, in relazione ai suddetti nn.º 9 e 10, *tre* tipi per il piano ed *otto* per lo spazio, che uniti ai tipi non *singolari* (*due* per il piano e *quattro* per lo spazio) ⁽¹⁸⁾ risolveranno completamente, nel piano e nello spazio ordinario, la questione considerata.

12. Prima di esporre i risultati dei calcoli per $n = 2$ ed $n = 3$, osserviamo il seguente teorema che stabilisce una proprietà caratteristica delle forme *singolari* (che godono delle solite proprietà).

Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma differenziale quadratica (4), a curvatura Riemanniana nulla e con valori costanti pei simboli $\left\{ \begin{matrix} i k \\ s \end{matrix} \right\}$ di Christoffel, sia singolare, cioè sia per essa identicamente nullo nelle ξ_i , il determinante

$$\Delta = \left| \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i k \\ s \end{matrix} \right\} \xi_i \right|, \quad (k, s = 1, 2 \dots n)$$

è che essa, e ciascuna delle $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme che hanno gli stessi valori pei simboli $\left\{ \begin{matrix} i k \\ s \end{matrix} \right\}$, siano trasformabili, con una stessa sostituzione lineare sulle variabili x , in forme nelle quali i coefficienti sono funzioni di $n - 1$ solamente delle nuove variabili (le stesse per tutti i coefficienti).

S'intende che non è escluso che il numero delle variabili dalle quali dipendono i coefficienti delle forme trasformate scenda anche al disotto di $n - 1$. I coefficienti poi della sostituzione lineare possono essere reali o complessi ordinari.

In linguaggio geometrico può dirsi che *le forme singolari* (che soddisfano alle solite condizioni) *sono precisamente quelle che, insieme a tutte le*

⁽¹⁸⁾ BIANCHI, loc. cit., n. 7.

$\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ che corrispondono ai medesimi valori dei simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$ di Christoffel, si trasformano in se stesse per una traslazione arbitraria in (almeno) una medesima direzione determinata.

1° Supponiamo che la forma (4) sia singolare; il sistema commutativo corrispondente

$$(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

sarà degenera. Esiste allora (n° 8) nel sistema almeno un numero, sia e'_n , che moltiplicato per qualunque altro numero del sistema dà prodotto nullo; scegliamo una base

$$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$$

nella quale una delle unità (l'ultima ad es.) sia appunto e'_n , e siano

$$e'_i = \sum_1^n c_{ir} e_r$$

le formule per il cambiamento delle unità. Ciò corrisponde (BIANCHI, Nota citata, n° 6) a passare dalla forma differenziale data

$$f \equiv \sum_1^n \alpha_{ik} dx_i dx_k$$

alla equivalente

$$f' \equiv \sum_1^n \alpha'_{ik} dx'_i dx'_k$$

mediante la *sostituzione lineare* sulle variabili

$$x_i = \sum_1^n c_{ri} x'_r + c_i \quad (6)$$

(c_i costanti); cioè i valori dei simboli di Christoffel $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}'$ per la f' sono le costanti di moltiplicazione γ'_{iks} delle unità della base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

Ma, per il modo col quale è stato scelto e'_n , si ha

$$\gamma'_{nks} = 0 \quad (k, s = 1, 2, \dots, n);$$

dal sistema (C) di equazioni ai differenziali totali, che dà i coefficienti α'_{ik} , si ricava allora

$$\frac{\partial \alpha'_{ik}}{\partial x'_n} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

e quindi tutti i coefficienti α'_{ik} della forma trasformata f' sono indipendenti da x'_n .

È poi manifesto che se si considera una qualunque forma F che abbia pei simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$ di Christoffel gli stessi valori che ha la forma f , il sistema commutativo corrispondente (e_1, e_2, \dots, e_n) è il medesimo, e quindi la stessa sostituzione lineare (6) trasforma la F in una F' che ha pei soliti simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$ gli stessi valori che ha la forma f' ; ne segue, come sopra, che anche i coefficienti della F' sono funzioni solo delle x'_1, x'_2, \dots, x'_n , conforme all'enunciato suesposto.

2.º Supponiamo ora viceversa che una forma

$$f \equiv \sum_1^n \alpha_{ik} dx_i dx_k,$$

dotata delle stesse proprietà, e tutte le $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme che hanno a comune con essa i valori dei simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$, siano trasformabili, con una medesima sostituzione lineare sulle variabili

$$x_i = \sum_1^n c_{ri} x'_r + c_i, \quad |c_{ri}| \neq 0 \quad (6)$$

in forme nelle quali i coefficienti α'_{ik} siano indipendenti da x'_n . Le $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme trasformate avranno tutte, per quanto sopra abbiamo richiamato (BIANCHI, *Nota citata*, n.º 6), i medesimi valori $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}' = \gamma'_{iks}$ dei simboli di Christoffel, ed i coefficienti α'_{ik} di esse costituiranno dunque la *soluzione generale* del sistema, analogo al sistema (C),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha'_{ik}}{\partial x'_l} &= \sum_1^n \gamma'_{il\lambda} \alpha'_{k\lambda} + \sum_1^n \gamma'_{kl\lambda} \alpha'_{i\lambda} \\ (i, k, l &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (C')$$

Ma abbiamo per ipotesi, per *tutte* le forme ora in questione,

$$\frac{\partial \alpha'_{ik}}{\partial x'_n} = 0;$$

ne segue, considerando le equazioni del sistema (C') nelle quali è $l = n$, che la *soluzione generale* di detto sistema soddisfa alle equazioni in termini finiti

$$\sum_1^n \gamma'_{in\lambda} \alpha'_{k\lambda} + \sum_1^n \gamma'_{kn\lambda} \alpha'_{i\lambda} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Poichè il sistema (C'), del quale fanno parte queste ultime equazioni, è illimitatamente integrabile, possono, per un sistema di valori iniziali delle variabili, darsi ad arbitrio i corrispondenti valori iniziali delle funzioni α'_{ik} ; nelle equazioni (7), che debbono essere soddisfatte dalla soluzione generale del sistema, possono perciò le α'_{ik} essere riguardate come variabili arbitrarie, e in questa ipotesi le (7) debbono essere identicamente soddisfatte. Ne segue (considerando quelle delle (7) nelle quali è $i = k$)

$$\gamma'_{n\lambda} = 0, \quad (i, \lambda = 1, 2, \dots, n).$$

Se allora

$$(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$$

è il sistema commutativo corrispondente alla forma trasformata, vediamo che l'unità e'_n moltiplicata per qualunque numero del sistema dà prodotto nullo; il sistema stesso è quindi degenere, ed è tale perciò (perchè equivalente ad esso) anche il sistema corrispondente alla forma data f ; essa è dunque *singolare*. c. d. d.

13. Osserviamo ancora che la condizione posta che *tutte* le $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme che corrispondono agli stessi valori dei simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$ di Christoffel siano trasformabili linearmente in forme nelle quali i coefficienti sono funzioni di non più di $n - 1$ variabili, è una condizione essenziale, nel senso che non sarebbe sufficiente che la *sola* forma data fosse in tal maniera trasformabile. Ad es. la forma che si ottiene dal tipo II) (caso $n = 3$), determinato da BIANCHI nella Nota citata (n° 7), facendovi $\alpha = b = \beta = 0$, $\alpha = -c$, ha i coefficienti dipendenti dalle sole variabili x_1 ed x_2 , ed ha il discriminante $A = |\alpha_{ik}|$ diverso da zero; non ostante essa non è singolare.

14. Osserviamo pure che dal ragionamento del n° 11 risulta quanto appresso:

Data una forma (4) soddisfacente alle solite condizioni, se nel sistema

commutativo corrispondente esistono p (e non più) numeri linearmente indipendenti che moltiplicati per ogni numero del sistema diano prodotto nullo, allora accade che la forma data, e tutte quelle che hanno gli stessi valori per i simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$, sono trasformabili linearmente in forme, i coefficienti delle quali sono funzioni precisamente di $n - p$ variabili.

In altre parole le forme considerate si trasformano in sè per traslazioni arbitrarie in p direzioni determinate.

Se in particolare è $p = n$, i coefficienti della forma sono costanti, e viceversa. Ciò è ben noto; infatti per tutti i valori degli indici sarà allora $\gamma_{iks} = 0$, cioè $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\} = 0$, e quindi, per note formule⁽¹⁹⁾, saranno gli a_{ik} costanti.

Da quanto sopra risulta anche, in generale, che il suddetto numero p delle variabili che si possono far scomparire dai coefficienti della forma per mezzo di una trasformazione lineare delle variabili, è (per il n.º 8) *almeno uguale* al numero delle parti irriducibili, con più di una unità, del sistema non degenerare dal quale proviene il sistema degenerare corrispondente alla forma data.

15. Veniamo ora alla determinazione delle forme singolari del ds^2 del piano e dello spazio ordinario con valori costanti dei simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$. Non vi è che da applicare ai tipi di sistemi commutativi trovati ai nn. 9 e 10 il procedimento di BIANCHI, già ricordato al n.º 11; si trova così quanto appresso.

CASO $n = 2$.

$$ds^2 = a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2$$

$$\text{Tipo A) } a_{11} = c x_1^2 + 2b x_1 + a, \quad a_{12} = c x_1 + b, \quad a_{22} = c$$

$$\text{Tipo B) } a_{11} = a, \quad a_{12} = b, \quad a_{22} = c$$

$$\text{Tipo C) } a_{11} = a, \quad a_{12} = b e^{x_2}, \quad a_{22} = c e^{2x_2}.$$

Il discriminante A della forma è uguale, in tutti tre questi tipi, al de-

⁽¹⁹⁾ BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, Spoerri, 1902), p. 65.

$$\text{Tipo F) } a_{11} = a, \quad a_{22} = c, \quad a_{33} = \gamma e^{2x_3}, \quad a_{12} = b, \quad a_{13} = \alpha e^{x_3}, \quad a_{23} = \beta e^{x_3},$$

$$\text{Tipo G) } \begin{cases} a_{11} = a, & a_{22} = (\gamma x_3^2 + 2\beta x_3 + c) e^{2x_2}, & a_{33} = \gamma e^{2x_2}, \\ a_{12} = (\alpha x_3 + b) e^{x_2}, & a_{13} = \alpha e^{x_2}, & a_{23} = (\gamma x_3 + \beta) e^{2x_2}. \end{cases}$$

$$\text{Tipo H) } a_{11} = a, \quad a_{22} = c e^{2x_2}, \quad a_{33} = \gamma e^{2x_3}, \quad a_{12} = b e^{x_2}, \quad a_{13} = \alpha e^{x_3}, \\ a_{23} = \beta e^{x_2+x_3}.$$

Il discriminante A della forma è uguale, in tutti questi tre tipi, al de-

terminante $\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$, o differisce da esso per un fattore esponenziale; le

tre costanti arbitrarie sono dunque soggette all'unica condizione che detto determinante sia diverso da zero.

È però inutile fare qui, caso per caso, il calcolo del discriminante A , perchè troveremo, al numero seguente, una formula generale che serve allo scopo.

Si ha, analogamente al caso precedente:

Le forme differenziali pel d^2 dello spazio euclideo, con valori costanti pei simboli $\begin{Bmatrix} i & k \\ s \end{Bmatrix}$, possono ridursi a dodici tipi distinti (i quattro determinati da BIANCHI, e gli otto di sopra); tutte le forme richieste si ottengono da questi tipi effettuando sulle variabili la più generale sostituzione lineare intera a coefficienti reali o complessi ordinari.

Osserviamo come sugli esempi di questo numero, sia per $n=2$ come per $n=3$, si verifichino le proprietà notate ai nn.¹ 12 e 14.

16. Per calcolare il discriminante A della forma (singolare o non singolare) ricordiamo la formula ⁽²¹⁾

$$\frac{\partial \log \sqrt{A}}{\partial x_l} = \sum_1^n \begin{Bmatrix} l & i \\ i \end{Bmatrix} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

che scriviamo ora

$$\frac{\partial \log \sqrt{A}}{\partial x_l} = \sum_1^n \gamma_{li} \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

⁽²¹⁾ BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa, Spoerri 1902), pag. 65.

dove i γ_{iii} sono costanti. Da essa si deduce

$$A = A_0 e^{\frac{2}{1} \sum_{i=1}^n \gamma_{iii} x_i} \quad (8)$$

dove A_0 è una costante che rappresenta il valore del discriminante A quando è $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Se dunque, nell'integrare il sistema (C), si scelgono come costanti arbitrarie i valori iniziali $a_{ii}^{(0)}$ delle a_{ii} corrispondenti ai valori nulli delle variabili x_1, x_2, \dots, x_n , il discriminante della forma differisce dal determinante

$$A_0 = |a_{ii}^{(0)}|$$

di queste costanti arbitrarie per un fattore esponenziale (eventualmente = 1). Ciò in conformità a quanto abbiamo detto a proposito delle forme calcolate nel n° precedente, ed in conformità di quanto si riscontra, per le forme non singolari, nella Nota di BIANCHI più volte citata ⁽²²⁾.

Possiamo precisare la formula (8) quando si supponga, come accade al n° precedente, che il sistema commutativo corrispondente alla data forma (singolare o non singolare) abbia una base costituita come è indicato ai nn. 2 e 3. Indichiamo perciò con (e_1, e_2, \dots, e_n) la base del sistema ed osserviamo quanto appresso:

1° Se e_i è unità *principale* di una parte irriducibile, ed e_l è una unità della *stessa* parte irriducibile, è

$$\gamma_{iii} = 1 \quad (l = i, \text{ o } l = i).$$

2° Se, viceversa, e_i è unità *principale* di una parte irriducibile, ed e_l è una unità della stessa parte, ed è $l \neq i$, è

$$\gamma_{iii} = 0.$$

3° In ogni altro caso è pure, manifestamente:

$$\gamma_{iii} = 0.$$

Esaminiamo allora la somma

$$\sigma_i = \sum_{i=1}^n \gamma_{iii} = \gamma_{i11} + \gamma_{i22} + \dots + \gamma_{inn};$$

⁽²²⁾ Fa eccezione, in questa Nota, il tipo II per $n = 2$, perchè ivi le costanti arbitrarie non soddisfano alla condizione suesposta.

se e_i è unità principale di una parte irriducibile di ordine k , si ha dalla 1^a e 3^a delle precedenti osservazioni

$$\sigma_i = k;$$

se e_i non è unità principale, è

$$\sigma_i = 0.$$

Se dunque e_r, e_s, e_t, \dots sono le unità principali delle varie parti irriducibili (che ammettono unità principale), e k_r, k_s, k_t, \dots sono gli ordini di queste parti irriducibili, si ha

$$\sum_1^n \gamma_{ii} x_i = \sum_1^n \sigma_i x_i = k_r x_r + k_s x_s + k_t x_t + \dots$$

e

$$A = A_0 e^{2(k_r x_r + k_s x_s + k_t x_t + \dots)},$$

che è la formula voluta.

È facile verificare questa formula nei casi noti $n = 2$ ed $n = 3$, sia per forme singolari, come non singolari.

Per le forme singolari corrispondenti a sistemi pseudonulli (n° 6) si ha (cfr. osservazione finale del n° 6 stesso)

$$A = A_0;$$

così si verifica pei tipi $A), B)$ per $n = 2$ ed $A), B), C), D)$ per $n = 3$.

17. Nei numeri che seguono esaminerò il problema dal punto di vista reale.

Abbiamo visto che per $n = 2$, e per $n = 3$, qualsiasi forma differenziale quadratica, a curvatura Riemanniana nulla e con valori costanti pei simboli $\begin{pmatrix} i & k \\ s \end{pmatrix}$ di Christoffel, può ridursi, con una sostituzione lineare sulle variabili, ad uno dei *cinque* (risp. *dodici*) tipi di cui al n° 15; però i coefficienti della trasformazione possono anche essere numeri complessi (ordinari). Cerchiamo ora dei tipi ai quali ogni forma a coefficienti reali, che gode delle solite proprietà, possa ridursi con una trasformazione lineare a *coefficienti reali*.

Troveremo che per alcuno dei tipi già determinati nel campo complesso la trasformazione può sempre farsi con coefficienti reali, mentre alcun altro tipo si scinde, nel campo reale, in più tipi, tali dunque che dall'uno all'altro si

può passare con trasformazioni lineari a coefficienti complessi, ma non con trasformazioni lineari a coefficienti reali.

Ci occorrerà perciò richiamare alcuni risultati relativi ai sistemi di numeri complessi a coordinate reali e con costanti di moltiplicazione reali, cioè (come suol dirsi) ai *sistemi reali di numeri complessi* ⁽²³⁾.

18. Ricordiamo perciò che, com'è manifesto, i concetti di *riducibilità* e di *equivalenza* esposti al n° 2 b) e c) si possono applicare ai sistemi reali di numeri complessi, richiedendo che le trasformazioni lineari omogenee, delle quali si parla al luogo ora detto, siano *a coefficienti reali*. Un sistema che sia in tal senso irriducibile si dice *irriducibile nel campo reale*; e due sistemi in tal senso equivalenti si dicono *equivalenti nel campo reale*. Due sistemi equivalenti nel campo reale si dicono della *medesima forma*; la parola *forma* si adopera dunque pei sistemi reali nel medesimo significato che ha la parola *tipo* pei sistemi a coordinate complesse. Un tipo può ammettere una forma sola, o ne può ammettere più di una ⁽²⁴⁾.

19. Non vale nel campo reale (quando l'ordine del sistema è pari) il risultato richiamato al n° 2 e), ma si ha invece il seguente teorema, dovuto a CARTAN ⁽²⁵⁾:

I sistemi commutativi reali di numeri complessi di ordine $n + 1$, irriducibili nel campo reale ed aventi unità principale, si distinguono in due categorie:

1^a CATEGORIA. *In essi si può prendere una base che soddisfi alle stesse condizioni esposte al suddetto n° 2 e).*

2^a CATEGORIA. *I sistemi di questa categoria sono di ordine pari. In essi si può prendere una base*

$$(e_0, e_1, \dots, e_m, e'_0, e'_1, \dots, e'_m) \quad (n = 2m + 1)$$

tale che:

1.° e_0 è l'unità principale;

2.° $e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_m$ sono radici dello zero;

3.° si hanno le seguenti formole di moltiplicazione (omettiamo quelle

⁽²³⁾ CARTAN, loc. cit., p. 61.

⁽²⁴⁾ V., ad es., Encyclopédie, loc. cit., pp. 395-397.

⁽²⁵⁾ CARTAN, loc. cit., p. 80.

ove compare e_0):

$$e_0^2 = -e_0, \quad e'_0 e_i = e'_i, \quad e'_0 e'_i = -e_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$e_i e_k = -e'_i e'_k = \sum_1^m (\gamma_{iks} e_s + \gamma'_{iks} e'_s),$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, m)$$

$$e_i e'_k = e'_i e_k = \sum_1^m (\gamma_{iks} e'_s - \gamma'_{iks} e_s),$$

dove inoltre è $\gamma_{iks} = 0$, $\gamma'_{iks} = 0$, quando è $s \leq i$ ed $s \leq k$ ⁽²⁶⁾.

Un sistema (di ordine $n + 1$) della prima categoria possiede manifestamente (come al n.º 2 g) uno ed un solo sottosistema di ordine n privo di unità principale; ma un sistema (di ordine $n + 1$) della seconda categoria non possiede alcun sottosistema di ordine n privo di unità principale. Ciò è reso manifesto dall'osservazione esposta nella annotazione ⁽²⁶⁾, e si dimostrerebbe del resto con facilità col procedimento tenuto al n.º 2 g).

20. Occorre ora anche esaminare quanti e quali sottosistemi d'ordine n siano contenuti in un sistema (commutativo) S non degenerare, *riducibile nel campo reale*, d'ordine $n + 1$. Esaminando i ragionamenti fatti ai nn.º 3-4-5 si vede che essi sono ora ripetibili con qualche lieve modificazione, dovuta al fatto accennato nell'ultima osservazione del n.º precedente, in base al quale fatto le parti irriducibili di S , che sono della 2.^a categoria, non danno luogo (cfr. tabella (2) del n.º 3) ad alcun sottosistema degenerare d'ordine n .

Abbiamo perciò come al n.º 5:

Un sistema commutativo reale di numeri complessi, non degenerare, di ordine $n + 1$, contiene tanti sistemi degeneri distinti d'ordine n quante sono le sue parti irriducibili (nel campo reale) della prima categoria, non equivalenti, con più di una unità. Le basi di questi sistemi degeneri si hanno come risulta dalla tabella (2) del n.º 3.

Si possono ripetere pure pei sistemi reali i ragionamenti, e quindi le conclusioni, dei nn.º 6-7-8.

⁽²⁶⁾ In altre parole un tale sistema non è che un sistema a coordinate complesse di ordine $m + 1$, (e_0, e_1, \dots, e_m) , soddisfacente alle solite condizioni del n.º 2 e), nel quale ogni coordinata complessa è riguardata come l'insieme di due coordinate reali mediante l'introduzione nel sistema di altre $m + 1$ unità indipendenti $i e_0, i e_1, \dots, i e_m$ (i essendo il solito simbolo dell'unità immaginaria ordinaria). Cfr. Encyclopédie, loc. cit., p. 398.

21. Andremo ora a determinare tutte le *forme* (n.º 18) dei sistemi commutativi degeneri per $n=2$ ed $n=3$; prima converrà, per chiarezza, riportare qui le forme distinte (tutte note) dei sistemi commutativi non degeneri per $n=2$, $n=3$, $n=4$. Di queste, quelle riducibili si ottengono naturalmente combinando quelle irriducibili degli ordini minori, come ai nn.º 9 e 10. Quando un tipo ammette una forma sola, daremo alla forma il numero d'ordine stesso già dato (ai nn.º 9 e 10) al tipo, e non riscriveremo qui il sistema rappresentante della forma perchè identico a quello rappresentante del tipo. Se un tipo, ad es. il IV) per $n=3$, ammette più forme, esse si indicheranno con IV_a), IV_b)...; il rappresentante della IV_a) sarà identico al rappresentante del tipo, e non lo riscriveremo. Adoperiamo qui le stesse convenzioni dei nn.º 9 e 10.

CASO $n=2$ (27). Si hanno *tre* forme distinte (cioè non equivalenti nel campo reale) di sistemi commutativi non degeneri.

Forme irriducibili nel campo reale; base (e_0, e_1) :

$$\text{I)} \quad e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = 0, \quad e_0 e_1 = e_1;$$

$$\text{II}_b) \quad e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = -e_0, \quad e_0 e_1 = e_1 \quad (28).$$

Forma riducibile nel campo reale:

$$\text{II}_a) \quad (e_0; e_1) \quad e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = e_1.$$

CASO $n=3$ (29). Si hanno *cinque* forme distinte di sistemi commutativi non degeneri.

Forme irriducibili nel campo reale; base (e_0, e_1, e_2) : I) e II).

Forme riducibili nel campo reale: III);

$$\text{IV}_a) \quad (e_0; e_1; e_2) \quad e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2;$$

$$\text{IV}_b) \quad (e_0, e_1; e_2) \quad e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = -e_0, \quad e_0 e_1 = e_1, \quad e_2^2 = e_2.$$

CASO $n=4$ (30). Si hanno *quattordici* forme distinte di sistemi commutativi non degeneri.

(27) V., ad es., Encyclopédie, loc. cit., p. 400.

(28) È questa una forma irriducibile del tipo riducibile II); perciò è indicata con II_b).

(29) V., ad es., Encyclopédie, loc. cit., p. 402.

(30) V., ad es., Encyclopédie, loc. cit., pp. 402 e 403.

Forme irriducibili nel campo reale; base (e_0, e_1, e_2, e_3) : I); II_a);

$$\text{II}_b) \quad e_1^2 = e_3, \quad e_2^2 = -e_3, \quad e_3^2 = 0, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_1 e_3 = 0, \quad e_2 e_3 = 0;$$

III); IV);

$$\text{VII}_b) \quad e_1^2 = -e_0, \quad e_2^2 = 0, \quad e_3^2 = 0, \quad e_1 e_2 = e_3, \quad e_1 e_3 = -e_2, \quad e_2 e_3 = 0.$$

Forme riducibili nel campo reale:

V); VI); VII_a); VIII_a);

$$\text{VIII}_b) \quad (e_0, e_1; e_2, e_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = 0, \quad e_0 e_1 = e_1, \\ e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = -e_2, \quad e_2 e_3 = e_3; \end{array} \right.$$

$$\text{IX}_a) \quad (e_0; e_1; e_2; e_3) \quad e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = e_3;$$

$$\text{IX}_b) \quad (e_0, e_1; e_2; e_3) \quad e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = -e_0, \quad e_0 e_1 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = e_3;$$

$$\text{IX}_c) \quad (e_0, e_1; e_2, e_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = -e_0, \quad e_0 e_1 = e_1, \\ e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = -e_2, \quad e_2 e_3 = e_3. \end{array} \right.$$

22. In base ai nn.¹ 19 e 20 possiamo passare ai sistemi degeneri e scrivere tutte le forme distinte di tali sistemi per $n=2$ ed $n=3$. Distingueremo queste forme con lettere maiuscole munite di indici letterali, in modo analogo a quello tenuto al n.^o precedente per le forme non degeneri. Dovremo tener presente che le forme irriducibili II_b) per $n=2$, e VII_b) per $n=4$, sono della 2.^a categoria; e che i tipi IV) per $n=3$ e IX) per $n=4$ non contengono alcun sottosistema degenero di ordine 2 e 3 risp. (Si vede anzi che, per il nostro scopo, era inutile scrivere le forme del tipo IX), così come al n.^o 10 non avevamo scritto il tipo IX)).

CASO $n=2$. Si verifica subito che *in questo caso le forme distinte di sistemi commutativi degeneri coincidono coi tre tipi*

A), B), C)

del n.^o 9; cioè ognuno di tali tipi ammette una forma sola.

CASO $n=3$. Base (e_0, e_1, e_2) . *Si hanno dieci forme distinte di sistemi commutativi degeneri:*

A); B_a);

$$\text{B}_b) \quad e_1^2 = e_3, \quad e_2^2 = -e_3, \quad e_3^2 = 0, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_1 e_3 = 0, \quad e_2 e_3 = 0;$$

C); D); E); F); G); H_a);

$$\text{H}_b) \quad e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_3^2 = -e_2, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_1 e_3 = 0, \quad e_2 e_3 = e_3.$$

23. Veniamo ora all'applicazione alle forme differenziali quadratiche a coefficienti reali, che godono delle solite proprietà, risolvendo per esse la questione posta al n.º 17. Basta evidentemente aggiungere ai tipi ⁽³¹⁾ determinati da BIANCHI (forme non singolari) ed a quelli trovati al n.º 15 della presente Nota (forme singolari), quelli che si deducono col metodo dato da BIANCHI (cfr. n.º 11) dai sistemi commutativi II_a) ⁽³²⁾ per $n = 2$, IV_b), B_b) ed H_b) per $n = 3$.

Vale poi manifestamente anche nel campo reale la formula (nº 16)

$$A = A_0 e^{\sum_1^n \gamma_{ii} u^i x^i}$$

che dà il discriminante della forma.

Eseguendo i calcoli si trova quanto appresso.

CASO $n = 2$.

$$ds^2 = a_{11} dx_1^2 + 2 a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2.$$

$$\text{Tipo II}_a) \quad a_{11} = a e^{2x_1}, \quad a_{12} = b e^{x_1+x_2}, \quad a_{22} = c e^{2x_2}.$$

Le costanti arbitrarie a, b, c debbono al solito esser tali che sia $ac - b^2 = 0$. Si ha dunque:

Tutte le forme differenziali reali pel ds^2 del piano euclideo, con valori costanti pei simboli $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ s \end{smallmatrix} \right\}$, si deducono da sei tipi distinti eseguendo sulle variabili la più generale sostituzione lineare intera a coefficienti reali. Questi sei tipi reali sono:

I tipi I) e II) di BIANCHI (Nota cit. n.º 7); il tipo II_a) di sopra; i tipi A), B), C) del n.º 15.

I tipi I), II), II_a) non sono singolari; gli altri sono singolari.

Non si può passare dall'uno all'altro di questi sei tipi reali con trasformazioni lineari intere a coefficienti reali; si passa dal tipo II_a) al tipo II) con la sostituzione (a coefficienti immaginari)

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + i x'_2 \\ x_2 = x'_1 - i x'_2 \end{cases}$$

⁽³¹⁾ In questa applicazione alle forme differenziali quadratiche adoperiamo la parola *tipo* anche nel caso reale, per non adoperare la parola *forma* in due sensi differenti. Del resto non può nascere equivoco.

⁽³²⁾ BIANCHI assume come rappresentante del tipo II) il sistema II_b) in luogo del sistema II_a).

trasformazioni (a coefficienti immaginari)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(x'_1 + x'_2) \\ x_2 = \frac{i}{2}(x'_1 - x'_2) \\ x_3 = x'_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x'_1 \\ x_2 = i x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x'_1 \\ x_2 = \frac{1}{2}(x'_2 + x'_3) \\ x_3 = \frac{i}{2}(x'_2 - x'_3) \end{array} \right.$$

Livorno, gennaio 1921.