ÉTUDE

SUR

DIVERS POINTS

DE LA PHILOSOPHIE DES SCIENCES;

PAR

M. J. BOUSSINESQ,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55

1879.

ÉTUDE

SUR

DIVERS POINTS DE LA PHILOSOPHIE DES SCIENCES.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

EN VENTE CHEZ M. GAUTHIER-VILLARS.

ESSAI théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui de massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion. In-4° de 180 pages, 1876 . . . . 10 fr.

Conclusions du Rapport de M. de Tilly à l'Académie Royale de Belgique :

« En résumé, ce Mémoire renferme l'exposition des principes et des résultats les plus immédiats d'une branche nouvelle et féconde de la Mécanique moléculaire ou interne. On avait réussi à représenter par des équations aux dérivées partielles l'équilibre d'élasticité des solides, ainsi que celui des fluides, et l'on avait même pu, dans les cas les plus simples, intégrer ces équations. Il restait à traiter le même problème pour les massifs pulvérulents ou sablonneux, intermédiaires entre les solides et les fluides, et plus difficiles à étudier à cause même de ce caractère mixte. C'est ce qu'a fait M. Boussinesq. Il a de plus, en rattachant la théorie de l'équilibre limite à celle de l'équilibre d'élasticité, éclairé d'un jour nouveau les rapports qui existent entre l'état élastique ou ordinaire de la matière et cet état extrême qu'elle affecte parfois, et qu'on appelle état plastique pour les solides, état ébouleux pour les masses inconsistantes. Enfin, il a donné les lois de l'équilibre-limite des terres, dans des cas beaucoup plus généraux qu'on ne l'avait fait jusqu'ici. Je considère le travail de M. Boussinesq comme très-important et très-remarquable..... »

Outre les problèmes d'équilibre de massifs (solides ou pulvérulents) qui importent le plus dans la pratique, l'auteur y étudie l'écoulement du sable par un orifice, le poinçonnage et l'écoulement des solides malléables, l'état ébouleux ou plastique d'une masse remplissant l'angle dièdre formé par deux plans rigides, etc.

ESSAI sur la Théorie des Eaux courantes. In-4° de 766 pages, 1877. 20 fr.

Ce travail embrasse d'un point de vue nouveau, exclusivement scientifique et rationnel, l'étude de la plupart des phénomènes que présentent les fluides en mouvement, phénomènes qui étaient restés presque tous jusqu'à ce jour, au dire des Commissaires de l'Académie des Sciences, des *énigmes* dont on cherchait *mal et vainement* le mot. Il y est traité, avec des détails proportionnés à l'importance pratique des questions, de l'écoulement par les tuyaux et les canaux de diverses grandeurs et de diverses formes, ainsi que par les orifices et les déversoirs; des régimes, uniforme et varié, permanent et non permanent, des cours d'eau; de l'influence des coudes et des ondulations du fond, de la houle et du clapotis de la mer, en tenant compte des variations qu'introduisent dans leurs lois la hauteur même des vagues et l'influence des frottements; des ondes liquides dans les bassins limités; des marées fluviales; des ondes, intumescences de diverses formes et crues propagées le long des canaux et des cours d'eau, en tenant compte des influences de leur hauteur et de leur courbure, des frottements et de la pente du fond, des inégalités de vitesse des filets fluides, de la forme, constante ou variable, des sections. Il y est traité aussi des modifications produites par les courants, droits ou courbes, sur les lits qui les contiennent et généralement sur la surface terrestre; des tourbillons liquides à axe vertical; de l'écoulement, permanent et non permanent, des eaux d'infiltration; de la transpiration, de la diffusion et de l'effusion des gaz; de l'action de la capillarité sur le mouvement des liquides en nappes minces; etc.

CONCILIATION du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale. Grand in-8° de 256 pages, 1878... 5 fr.

Mémoire physico-mathématique sur une importante question de philosophie naturelle, précédé d'un Rapport de M. Paul Janet, membre de l'Institut, à l'Académie des sciences morales et politiques, et suivi de notes complémentaires, sur l'existence des dérivées dans toutes les fonctions continues qui représentent des phénomènes naturels, sur les équations différentielles et les diverses intégrales qu'elles admettent, sur la notion des forces des mécaniciens et son origine dans nos sensations d'effort musculaire, etc.

ÉTUDE

SUR

DIVERS POINTS

DE LA PHILOSOPHIE DES SCIENCES;

PAR

M. J. BOUSSINESQ,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Extrait des Mémoires de la *Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille*, année 1879, tome VII, 4e série.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1879.

ÉTUDE

SUR

DIVERS POINTS DE LA PHILOSOPHIE DES SCIENCES.

I. — SUR LE RÔLE ET LA LÉGITIMITÉ DE L'INTUITION GÉOMÉTRIQUE (1).

1.— *De la défiance que l'intuition géométrique inspire à quelques partisans des doctrines non-euclidiennes.*

On connaît l'extension que prennent de nos jours les études relatives aux géométries dites *non-euclidiennes* ou *imaginaires*, c'est-à-dire aux géométries dans lesquelles on admet, soit, avec Lobatchefski et Jean Bolyai, que par un point il passe tout un faisceau de parallèles à une droite donnée, soit au contraire, à la suite de Riemann, qu'il n'existe pas de parallèles, ou que deux droites d'un plan vont toujours concourir à une distance finie, comme si l'espace plan se fermait de tous côtés à la manière d'un espace sphérique. Ces idées nouvelles, que d'intéressantes recherches philosophico-mathématiques de M. Hoüel, en France, et de M. de Tilly, en Belgique, ont répandues parmi nous (2), sont visiblement démenties, en ce qui les distingue

(1) Article lu, le 17 avril 1879, à la réunion des sociétés savantes des départements, tenue à la Sorbonne (section des sciences mathématiques). Il a déjà paru, presque en entier, dans la *Revue philosophique* d'octobre 1879.

(2) Voir surtout le remarquable traité intitulé « *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, par M. de Tilly, *membre de l'Académie royale des Sciences de Belgique* », publié en 1879 dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (tome III, 2e série, 1er cahier).

de la géométrie euclidienne, par l'intuition géométrique telle qu'elle existe chez tous les hommes. Aussi, les mathématiciens qui les développent ne se proposent-ils sans doute (à quelques exceptions près) qu'un but de pure logique, consistant à mettre en vue et à combiner entr'elles, non pas toutes les données premières ou irréductibles du sens géométrique pris dans son intégrité, mais seulement les données qui semblent les plus nécessaires pour édifier un corps de doctrine, en commençant par ce principe, qu'il est possible de mener, à partir de chaque point de l'espace et dans chaque direction, une ligne droite et une seule. Ils font, au contraire, abstraction de l'idée de *similitude*, jugée par eux moins fondamentale ou moins indispensable, c'est-à-dire qu'ils conviennent de ne pas recourir à l'intuition, en tant qu'elle nous assure que toute figure peut être reproduite à une échelle de grandeur quelconque sans qu'aucun de ses angles soit altéré, ou, par conséquent, en ce qu'elle nous montre une corrélation stricte entre le fait de l'égalité des angles correspondants, formés dans un plan par deux droites que coupe une sécante, et le fait de la non-intersection de ces droites, autant dans le cas où la portion de sécante comprise entre les droites est finie, que dans le cas où elle est infiniment petite et où cette corrélation résulte de l'idée même de ligne droite

Ils ne nient donc pas la valeur et la légitimité de l'intuition géométrique dans ses applications à l'ordre concret; en sorte que leurs recherches, utiles tout au moins par les classements rationnels d'idées qu'elles peuvent faire connaître, paraissent sans danger pour la rectitude de l'esprit, même aux yeux de ceux qui ne se sentent pas certains de la possibilité de scinder ainsi fictivement leur faculté de se représenter les formes, et qui, par suite, conservent quelques doutes sur la portée — fût-elle tout abstraite — des conséquences ainsi déduites.

Mais d'autres partisans de la géométrie non-euclidienne ne s'en tiennent pas là. Désireux, naturellement, de donner plus d'importance à leurs spéculations, ils voudraient pouvoir les introduire dans la pratique, là où leur négation de l'idée de similitude, cessant d'être purement fictive, est condamnée de suite et sans appel par le sens géométrique tel qu'il existe chez eux autant que chez les autres hommes. Force leur est donc de s'attaquer à ce sens lui-même. Et c'est ainsi qu'ils se décident à mettre en suspicion *l'intuition* ou *évidence* géométrique, la qualifiant de « *chose mal définie* », la regardant comme une transformation ou un simple produit capitalisé de l'expérience sensible, comme « *une expérience dans laquelle la mémoire remplace l'activité physique* » : ce qui en ferait, tout au plus, une sorte de souvenir généralisé des perceptions tactiles et visuelles. Ils en viennent à dire qu'il faut assimiler ce qu'elle nous montre à des données empiriques, aux résultats, toujours plus ou moins grossiers, de nos observations, et l'écarter entièrement des raisonnements vraiment mathématiques, qui seuls, d'après eux, seraient rigoureux ou exacts.

Il peut donc être bon d'examiner rapidement si ces objections sont fondées, et si les raisonnements des mathématiciens subsisteraient, en dehors des matériaux que leur fournit l'intuition géométrique ou, tout au moins, de l'appui qu'elle leur prête.

2. — *Cette défiance n'est pas justifiée, car l'évidence ou intuition géométrique ne saurait être, comme ils le supposent, un produit de l'observation externe.*

Tout le monde admet que le sens idéal de l'espace et des figures n'a pu se développer en nous qu'à la suite des observations qui ont éveillé notre activité intellectuelle.

Sans le choc provoqué dans notre système sensitif par le monde extérieur et par ses contrastes, il est probable que nos facultés seraient restées engourdies, faute de sollicitations ou même, si l'on veut, faute de matière première. Mais il y a infiniment loin des résultats incomplets et grossiers de l'expérience aux données de l'intuition géométrique une fois exercée, données qui se présentent à nous comme des créations de l'esprit, avec des caractères de simplicité, de précision, de généralité, que la nature physique ne comporte guère et que, certainement, nous n'y avons pas vus. Donc, les constructions idéales que nous édifions et contemplons au moyen de notre sens intérieur de l'étendue et des formes ne sont pas le produit de l'observation externe : elles constituent un ordre de choses spécial, autonome, bien distinct de celui avec lequel nous met en rapport notre nature sensible.

Celle-ci, telle que l'a sans doute façonnée peu à peu l'influence des réalités extérieures, paraît même repousser, dans leur expression exacte et seule intelligible, les principes essentiels qui nous fournissent comme les matériaux de nos constructions géométriques. Les principes dont il s'agit consistent, en effet: 1° dans la notion de points *sans étendue;* 2° dans celle des droites, *sans largeur ni épaisseur*, mais *infiniment* divisibles en longueur, qui joignent ces points deux à deux; 3° dans l'idée d'angles divisibles aussi *indéfiniment*, espaces plans, illimités d'un côté, qui relient deux droites issues d'un même point; 4° dans la notion des lignes *courbes*, qui, bien que n'étant pas réductibles à des droites par voie de déduction logique, le deviennent, comme on dit, à *l'infini* ou à *la limite* grâce à une certaine vue transcendante de la raison, vue sans laquelle, d'après le mot de Pascal, on n'est pas géomètre; etc. Voilà pourquoi la tournure d'esprit du mathématicien et celle du physicien ou du naturaliste sont si différentes, et pourquoi leurs langages, leurs manières de voir, se trouvent souvent en opposition (au moins apparente).

En résumé, l'observation externe, qui est incapable d'atteindre positivement aux conceptions du géomètre *entendues dans leur sens rigoureux*, et qui, en se laissant guider par l'instinct, leur semble même contraire, n'est pas la source *propre* où nous avons puisé ces conceptions. Elle a pu seulement en suggérer un certain nombre, par voie d'analogie, ou tourner de leur côté notre attention, en la mettant à même d'utiliser d'imparfaites ressemblances. Les figures de la géométrie et les lois que l'intuition y fait découvrir sont jugées par nous tellement indépendantes de tout empirisme, et de l'existence même de l'univers physique, que nous ne pouvons nous empêcher de les regarder comme nécessaires ou éternelles, c'est-à-dire comme exactement pareilles chez tous les esprits, existants ou possibles, de tous les temps et de tous les lieux, même dans ce qui nous semble, en elles, contraire aux données des sens et, probablement, étranger à la stricte réalité concrète ou matérielle. Aussi a-t-on toujours admis, dans la science, qu'elles constituent un ordre de choses supérieur, dont la manière d'être, il est vrai, nous échappe.

Sans doute, nous sommes dans une ignorance profonde du chemin que notre intelligence a suivi, pour arriver à la claire vision de ces vérités, à partir du jour où la perception encore sourde des mouvements imprimés à nos organes tactiles a commencé à lui révéler l'extension matérielle. Mais cette ignorance ne doit pas nécessairement nous rendre incertains de l'exactitude objective des lois mathématiques. Car, autre chose est un but que l'on se propose, et autre chose les voies multiples qui y conduisent. L'obscurité de ces dernières n'empêche pas le but dont il s'agit ici d'être en pleine lumière, une fois qu'on l'a atteint, et d'être reconnu exactement le même, soit qu'on y parvienne en s'appuyant pour toute donnée physique sur les sensations du tact, comme ont fait les aveugles de naissance devenus géomètres, soit qu'on ait pu s'aider en outre de la vue. Il n'y a donc pas lieu, pour apprécier la justesse du sens géométrique, de se préoccuper des premières phases qu'il a dû traverser, dans une mesure plus grande qu'on ne s'inquiète, en jugeant des bonnes qualités d'un œil, de la série des transformations qu'il a subies durant sa période embryonnaire.

3. — *Quelque opinion que l'on ait d'ailleurs sur son origine, le sens géométrique n'en reste pas moins la plus parfaite de nos facultés intellectuelles, la mieux définie dans son objet.*

Mais — les notions fournies par l'intuition géométrique fussent-elles seulement subjectives, ou encore dût-on les supposer, en quelque sorte, fonction tout à la fois de la nature de notre esprit et de celle des choses, — l'admirable uniformité et la clarté singulière qu'elles présentent dans toutes les têtes humaines, ainsi que leur conformité constante, sans limite *assignable*, à tous les résultats d'expériences précises, n'en feraient pas moins la plus solide base des sciences et même, dans l'ordre logique, la meilleure pierre de touche des doctrines. Le sens géométrique ne serait donc pas, même alors, une chose *mal définie*, de telle manière qu'on dût s'en défier et qu'il fût possible d'espérer mieux. Loin de là, il resterait ce qu'il n'a jamais cessé d'être, savoir, la chose la mieux définie, celle qui prête le moins aux malentendus et aux désaccords.

Nous sommes tous convaincus dans la pratique que nos conceptions abstraites des grandeurs et des figures peuvent exprimer les faits naturels avec une exactitude très-supérieure à celle que comportent les meilleures observations; et l'expérience vient, à tout instant, apporter à cette manière de voir une confirmation nouvelle, d'autant plus admirable, que l'origine ou du moins l'élaboration de nos idées mathématiques est, pour la plus notable part, rationnelle et non empirique. Comment s'étonner, après cela, que le pouvoir, dont nous jouissons, de nous représenter l'étendue figurée et d'en évaluer en nombre chaque partie nous paraisse invinciblement la plus parfaite de nos facultés intellectuelles ? Aussi est-ce celle que nous accuserions la dernière, celle que nous jugerions avoir le moins besoin de progresser, pour se mettre, d'une manière adéquate, à l'unisson ou à la forme des objets extérieurs.

Ce qui prouve qu'elle est très-voisine de la perfection et qu'il ne lui est plus possible, en quelque sorte, d'en approcher, c'est qu'elle n'a pas varié d'une manière appréciable depuis les premières origines des sciences, depuis Thalès de Milet, en dépit du besoin de changement qui n'a cessé d'agiter les esprits, et malgré les efforts séculaires dépensés dans l'intervalle pour élever l'édifice immense de nos mathématiques. De tels efforts n'auraient pas manqué d'accroître par l'exercice la justesse de la faculté qui les déployait, pour peu que cette justesse eût laissé à désirer dans une mesure sensible. Donc, elle avait déjà comme atteint sa limite extrême dès le début du développement historique des sciences, à supposer qu'elle ait eu jamais besoin de progresser et que sa perfection en quelque sorte absolue ne fasse pas essentiellement partie de notre nature intellectuelle. Et c'est ce qui explique pourquoi la faculté dont il s'agit a offert cette garantie singulière de véracité, de se montrer absolument pareille chez tous les hommes connus, à quelque époque et à quelque société qu'ils appartinssent, dictant les mêmes réponses à tous ceux qui l'ont consultée attentivement sur telle ou telle question : genre de contrôle qu'elle peut seule, à ce qu'il semble, supporter victorieusement, ou qui, dans tout autre ordre d'idées, trouverait sans doute en défaut notre faible raison. En un mot, l'intuition ou sens géométrique paraît comprendre ce qu'il y a de plus ressemblant en nous et hors de nous, ce qui, dans notre intelligence, est à la fois le mieux approprié à la forme de notre esprit et à la nature du monde extérieur.

Du reste, les géomètres non-euclidiens dont je combats ici la tendance à supprimer *positivement* la notion de similitude, comme idée nécessaire, et à en refuser l'application aux faits, conviennent eux-mêmes que toutes les figures qui ont leurs dimensions inférieures ou comparables à celles de notre globe, et que nous pouvons mesurer directement dans leurs diverses parties, sont régies sans erreur appréciable par la géométrie ordinaire, c'est-à-dire euclidienne. Ils invoquent précisément l'expérience, pour juger l'étendue absolue de toutes ces figures très-faible, et pour les assimiler à des figures infiniment petites, qui, dans leurs idées, sont susceptibles de devenir semblables entr'elles, à la limite ou sauf erreurs relatives tendant vers zéro, et comportent pour cette raison une géométrie plus simple que celle des grandes figures. En d'autres termes, la géométrie euclidienne est, à leur sens, une première approximation, applicable en toute rigueur aux figures infiniment petites (1) et, avec une exactitude suffisante, aux figures finies dont les dimensions ne dépassent pas certaines limites, qu'il appartient à l'expérience (jointe à la théorie) de fixer. En dehors de ces limites, la même géométrie usuelle peut au contraire, d'après eux, tomber complétement en défaut, ou conduire aux erreurs les plus grossières pour des figures assez grandes.

Ainsi, les doutes qu'ils émettent, touchant l'emploi de

(1) On le reconnait de suite en concevant un triangle qui se réduise à un point (ou dont les côtés décroissent de plus en plus tout en conservant des directions déterminées) et en lui appliquant une démonstration célèbre du théorème de Thalès qui devient rigoureuse dans ce cas limite. Il suffit, pour cela, de prolonger la base dans les deux sens et les autres côtés au-delà du sommet. Alors, les deux angles à la base, joints à l'opposé de celui du sommet, valent bien deux droits ; car ils occupent précisément la moitié de l'espace angulaire compris autour du point auquel le triangle se réduit. Or, on sait que le théorème de Thalès est une proposition corrélative du *postulatum* d'Euclide.

cette géométrie dans des questions réelles, concernent tout au plus les immenses triangles que considère l'astronome, ou même seulement les plus grands d'entr'eux, ceux qui, ayant pour base un diamètre de l'orbite terrestre et pour sommet une étoile fixe, servent à calculer la parallaxe annuelle de l'étoile et sa distance à notre système. Il est vrai que les doutes dont je parle — les bornât-on à ces derniers triangles — auraient encore en astronomie des conséquences graves, pour peu qu'ils fussent fondés, c'est-à-dire pour peu que la géométrie euclidienne laissât à désirer sous le rapport de l'exactitude. Car il suffirait que la somme des angles de ces très-grands triangles fût inférieure ou supérieure à deux droits d'une quantité comparable à une seconde, pour infirmer le calcul de l'angle au sommet d'où se déduit la parallaxe, angle qui, évalué en retranchant de deux droits la somme des deux angles à la base, se trouve être de l'ordre de petitesse d'une seconde.

Mais les conséquences théoriques de ces doutes seraient autrement importantes. A quels principes, à quels moyens de penser pourrions-nous accorder la moindre confiance, si nous suspections celle de nos facultés qui voit le plus clair, celle qui perçoit et juge avec une précision absolue dans l'ordre idéal et qui, même dans l'ordre pratique où elle est moins chez elle, ne peut être suppléée par les sens, qu'elle devance toujours de beaucoup ? Qu'une telle faculté laisse échapper encore d'imperceptibles nuances dans les questions concrètes, étrangères à son domaine propre, en y transportant, de la sphère des idées pures qui est la sienne, certaines notions incapables de s'adapter parfaitement aux réalités physiques, cela se conçoit chez des êtres imparfaits comme nous. Mais qu'elle commette dans son propre domaine, fatalement et irrémédiablement, des erreurs finies, même grossières, et surtout générales, que le raisonnement venant à son aide prétendrait relever et mesurer, voilà ce qui ne peut être admis, ou le système tout entier de nos idées s'écroule, et il ne reste plus qu'à dire que nous sommes foncièrement des esprits manqués, des instruments qui résonnent faux. Aussi ne voit-on pas de quel droit les géomètres critiqués ici continuent à accepter sur le seul témoignage de l'intuition, à moins que ce ne soit d'une manière tout hypothétique, les principes dont ils n'ont pu se passer, et qu'ils conservent dans leurs études abstraites, mais qu'elle ne saurait garantir autrement que celui de similitude auquel ils renoncent.

Sans doute, le sens géométrique ne s'est jamais laissé analyser dans son mode de procéder et dans tous les résultats qu'il fournit ou peut fournir : à cet égard, rien n'est plus vrai que de dire qu'il n'a pas été *défini*. La lumière qu'il répand est pour nous une sorte de mystère, tant en elle-même que dans sa source. Pareil à toutes les œuvres de la nature, qui soutiennent des rapports avec l'ensemble des choses et dont les racines plongent dans un infini où nous nous perdons, il n'a pas permis à notre science, nécessairement discursive et bornée, d'explorer entièrement, et de classer, même les premiers principes qu'il nous fait connaître. Seules, les constructions artificielles de notre raison, se déroulant en une série linéaire, tout au plus en quelques séries entrecroisées, se laissent pénétrer ou reproduire parfaitement dans leurs parties explicites. Mais, outre ces parties, elles contiennent toujours, même à notre insu, des profondeurs inexplorées, expression du sentiment instinctif d'où jaillit la pensée claire et qui la dépasse de toutes parts, ou vague reproduction des contours indécis entourant les objets mis en lumière, que l'œil ne peut ni ne doit séparer jamais complétement de leurs attaches naturelles, non plus que des objets voisins maintenus dans l'ombre.

Il n'est donc pas surprenant qu'il reste en géométrie une infinité de points obscurs, de rapports, même élémentaires, non encore débrouillés. Le géomètre peut se sentir impatient ou mal à l'aise au milieu de la multiplicité des voies qu'il connaît ou qu'il soupçonne dans sa science, et de la difficulté qu'il éprouve à choisir, parmi tous ces chemins, celui qui, suivi d'une manière continue comme l'exige le discours, relie mieux que tous les autres les points de vue importants et est le plus propre à faire saisir les rapports les plus nombreux ou les plus féconds, leur totalité même, s'il était possible. Mais cette difficulté ne concerne que l'ordre logique des idées : elle n'atteint nullement la clarté et la valeur de l'intuition géométrique, qui seule, au contraire, éclaire tous ces horizons et permet de s'y mouvoir.

4. — *Sans l'intuition, tout raisonnement deviendrait impossible en géométrie et, probablement, même dans les autres branches des mathématiques.*

Que resterait-il, en effet, surtout en géométrie, du raisonnement pur, c'est-à-dire des modes de groupement et de succession si multiples des idées, sans la vue idéale de l'espace et des figures, qui conserve à ces idées leur vie et aux mots leur sens? Rien évidemment, pas même des cases vides. Le flambeau de l'intuition une fois éteint, les notions qu'il éclaire et qui ne subsistent que par lui s'évanouiraient aussitôt ; et avec elles disparaîtraient tous leurs rapports, tous les enchaînements qu'elles forment. Le rôle du raisonnement en géométrie se borne, en quelque sorte, à classer les mille voies qui se croisent dans le monde de l'intuition, et à les fixer par le langage afin de permettre de les retrouver au besoin : tâche très-utile, qui ne sera jamais accomplie, à cause de l'étendue sans bornes du champ à explorer et des croisements infinis qui s'y trouvent, mais tâche qui deviendrait illusoire, si le champ entier se dérobait par suite de la disparition, réelle ou fictive, de la lumière qui, en l'éclairant, le crée pour l'esprit.

Certains géomètres opposent quelquefois, il est vrai, le raisonnement à l'intuition pure ou immédiate. Mais c'est simplement parce qu'ils entendent par cette dernière l'intuition à l'état statique, ou se bornant au premier objet qui se présente à elle; tandis qu'ils appellent *raisonnement*, l'intuition à l'état dynamique, l'intuition se déplaçant avec continuité, soit pour passer d'un horizon à d'autres voisins, soit pour explorer dans chacun les détails qui échappent à un premier coup d'œil.

On s'aperçoit même, en suivant attentivement les démonstrations des théorèmes les plus simples de la géométrie, de ceux qui concernent, par exemple, les perpendiculaires, l'égalité de tous les angles droits, l'égalité des triangles, etc., que le rôle du sens géométrique ne s'y borne pas à maintenir aux mots leur signification et à contrôler l'exactitude des propositions principales. Il y a du moins, dans l'enchaînement de celles-ci, plus que des syllogismes, plus que de la déduction pure. A côté de ce qui est dit explicitement, il y a quelque chose d'indéfinissable qu'on laisse entendre, il y a un recours direct à l'intuition prise en bloc, ou instinctive, et celle-ci peut seule compléter ce qui manquerait au raisonnement pur.

C'est précisément parce que les propositions les plus essentielles de la géométrie semblent rester indémontrées, tant qu'on ne fait pas appel à l'intuition simple, prise dans son intégrité naturelle, qu'un doute légitime plane, à mon avis, sur les conclusions propres à la géométrie non-euclidienne, considérées même à un point de vue purement logique. Et en effet, le géomètre non-euclidien, s'il ne peut se dispenser d'employer, au moins implicitement, le sens géométrique tel qu'il est chez tous les hommes, n'a-t-il pas à craindre d'introduire à son insu dans ses raisonnements quelque chose des vérités, relatives aux parallèles, dont il voudrait faire abstraction? Et sera-t-il bien certain que les propositions auxquelles il parviendra en soient complétement indépendantes, alors qu'il ne sait pas au juste ce qu'il y a mis? Pour être exact, il devrait donc se borner à regarder ces propositions comme n'ayant aucun rapport *explicite* avec les vérités dont il s'agit, c'est-à-dire concernant les parallèles entendues à la manière euclidienne.

Mais la géométrie ne serait pas la seule science atteinte par la suppression de l'intuition géométrique. Le cerveau *pensant* tout entier paraît n'être, à quelques égards, qu'une extension du système visuel, qui est par excellence l'organe de la représentation et des figures. Nous condensons et précisons toutes nos idées par des formes, des constructions idéales, sans lesquelles nous ne parviendrions pas à les fixer, à les voir nettement; et on dirait que c'est, précisément, dans la mesure où leur assimilation à des images réussit que nous pouvons en faire l'objet de connaissances positives.

Par exemple, l'idée du temps ne se présente pas à nous sans celle du mouvement, c'est-à-dire d'un chemin qu'un point décrirait, quoique nous sentions qu'elle en est distincte. De même, nous ne pensons pas nettement à des nombres, sans qu'à l'instant divers points ou objets disséminés, dont chacun nous représente une unité ou un groupe, viennent se placer sous l'œil de l'esprit.

De même encore, nous ne raisonnons jamais clairement, ce me semble, sur la quantité algébrique continue, sans voir à l'instant une étendue qui nous la représente, notamment la plus simple des étendues, c'est-à-dire l'étendue à une dimension, la ligne droite. Celle-ci, supposée commencer à l'infini et prolongée d'abord jusqu'à une origine choisie arbitrairement, peut être, en partant ensuite de cette origine, augmentée ou diminuée de longueurs quelconques. Ces longueurs sont justement pour nous les images naturelles de toutes les quantités, positives ou négatives; et elles viennent se placer bout à bout, suivant les sens indiqués par leurs signes, croître ou décroître dans certains rapports, toutes les fois que nous transformons, par exemple, une équation et que, craignant une erreur ou nous défiant du mécanisme algébrique, nous tenons notre attention en éveil. Si l'analyse pure, la théorie de la quantité (réelle) en général, est plus simple, plus uniforme dans ses procédés, que la géométrie ordinaire, cela est dû précisément à ce que cette quantité est exprimable par une ligne, et par suite à ce qu'elle n'a qu'une dimension ou ne varie que dans un sens et dans le sens opposé, à la place des trois dimensions de l'étendue et de la multiplicité infinie de rapports qu'elles amènent.

Il semble que, si on nous ôtait le sens de l'espace et des figures, nous n'entendrions plus même la branche de l'analyse qui paraît, en quelque sorte, la moins géométrique, je veux dire, celle où l'on opère sur de purs symboles algébriques, que l'on combine d'après certaines lois sans leur attribuer aucune signification de quantité continue ou de nombre. En effet, les mots *arrangement*, *disposition*, *substitution*, *permutation*, etc., dont il faut bien se servir pour exprimer les manières d'être relatives d'éléments diversement rapprochés et ordonnés, supposent les idées *d'étendue*, de *groupement dans l'espace;* et ils deviendraient inintelligibles si ces idées venaient à disparaître.

Il y a donc tout lieu de croire que, sans le concours apporté au raisonnement par l'intuition géométrique, les mathématiques seraient impossibles. Bien plus, nos connaissances ou notions de toute nature se trouveraient sans doute, du même coup, profondément mutilées, peut-être même anéanties dans ce qu'elles ont de précis, de scientifique. On sait, en effet, quel rôle universel, inévitable, prennent dans le langage philosophique, autant que dans le langage populaire, les métaphores empruntées aux choses matérielles, dès qu'il s'agit de désigner des objets intellectuels et moraux. L'image est toujours à côté de la notion abstraite ou immatérielle, pour lui donner un corps, pour la rendre accessible et la fixer. Il ne semble donc pas possible qu'un raisonnement puisse jamais se faire sur des idées pures, séparées de la forme qui nous les représente.

5. — *Réflexions sur la notion d'espace.*

Ce n'est pas seulement au nom des doctrines non-euclidiennes que la légitimité de l'intuition géométrique a été mise en doute par des mathématiciens. Certains géomètres acceptent sans restriction cette faculté en tout ce qui concerne les figures tracées dans l'espace, mais ils la suspectent et même la rejettent dans sa donnée la plus fondamentale, sans laquelle les figures ne pourraient se concevoir, je veux dire dans ce qu'elle nous apprend touchant l'espace même.

Le sens géométrique nous montre, en effet, l'espace comme quelque chose d'infini, d'immuable, d'antérieur (logiquement) à toutes les figures que l'imagination y voit dessinées comme à tous les corps qui en occupent des portions et qui s'y meuvent. Or, il y a dans notre esprit une certaine tendance, qui nous porte à rattacher tout ce qui est concevable à l'une des deux catégories de la substance et du mode (créées de bonne heure d'après les données ou sous la prédominance des sens externes), et qui voudrait nous faire regarder cet espace sans limites, emplacement de toutes les figures et de tous les corps possibles, soit comme un être véritable, une sorte de matière, soit du moins comme un attribut d'un être réel. Mais l'une et l'autre de ces suppositions nous répugnent; car, d'une part, l'espace ne nous paraît pas un être réel, et, d'autre part, l'intuition ne nous le montre pas davantage comme étant nécessairement le mode d'un être réel, puisque nous nous le représentons subsistant toujours, quand bien même on supprimerait tous les êtres que nous y voyons ou y concevons. L'idée la plus essentielle que nous fournisse le sens géométrique, celle sans laquelle tout ce qu'il y a de plus clair pour notre esprit deviendrait nintelligible, paraît donc se trouver en contradiction avec d'autres données de l'intelligence, très-confuses, il est vrai, incapables de servir de base à aucune science positive, mais qui puisent une certaine force dans notre nature sensible où elles ont pris naissance dès les premières phases du développement intellectuel : nouvelle preuve, pour le dire en passant, de ce fait, que l'intuition géométrique n'est pas un simple produit de l'expérience sensible et que son objet propre, bien que réel en tant qu'impliqué dans toute réalité physique, est d'un ordre très-spécial.

Eh bien, cette impossibilité de faire de l'étendue pure une substance ou un mode, de la définir comme une chose qui se palpe et se sente, voilà précisément la raison pour laquelle les géomètres dont je parle rejettent en théorie la notion d'un espace absolu. Ils s'appuient bien aussi en mécanique, comme on verra ci-après (p. 24), sur le fait de l'absence de tout signe, de tout jalon fixe, qui permette de reconnaître les vrais mouvements des corps : mais cette nouvelle raison semble n'être, au fond, qu'une transformation de la précédente ; car le manque de repères dans l'étendue pure tient justement à la nature hyperphysique de cette étendue ou à ce que ses parties ne tombent pas sous les sens. (1)

(1) En d'autres termes, si, *par impossible*, l'espace pur pouvait être perçu expérimentalement, il semble que ses parties seraient par le fait même distinguées les unes des autres et que l'on sentirait, dans le mouvement, les changements absolus de position éprouvés par l'organe en jeu. En effet, il n'y a de sensation proprement dite, assez persistante pour laisser dans l'esprit quelque connaissance de son objet, que là où il y a contraste, changement, variations plus ou moins fréquentes. Une sensation qui se rapporterait à l'espace en général, sans être accompagnée d'aucun discernement des

D'ailleurs, les géomètres qui repoussent ainsi en principe, pour des motifs quelconques, l'idée de l'espace, continuent néanmoins à l'admettre implicitement et à s'en servir dans les détails de la science, à cause de l'impossibilité où ils seraient, sans cela, de concevoir aucune figure, et de la nécessité qui les domine d'imprimer à toutes leurs conceptions le caractère, essentiellement géométrique, de l'esprit humain.

La difficulté que leur offre la notion d'un espace absolu, tel que l'intuition le montre, s'explique donc, pour ainsi dire, par une sorte de réaction, qui se produit entre les régions obscures de l'esprit, d'où émergent vaguement les idées de substance et de mode, et la région claire qui ne connaît pas ces idées : l'ombre ou le voile qui couvre les premières régions ferait effort pour s'étendre aussi sur la dernière, comme si ce n'était pas sans des fluctuations, sans quelques défaillances, que la région claire parvient à se dégager du milieu des autres et que celles-ci peuvent, en la portant, l'élever en quelque sorte jusqu'aux niveaux où pénètre la lumière. Le parti le plus simple et le plus sage, dans ces conditions, est sans doute d'admettre que les substances et leurs modes ne comprennent pas tout, pas même tout ce dont nous avons quelque connaissance (puisque ce qu'il y a de plus évident en est distinct), de se défier par suite de ce genre de classification, en substances et modes, auquel peut-être les réalités purement matérielles se prêtent seules convenablement, et d'accepter enfin l'espace pour ce que nous le donne le sens géométrique, seul compétent à cet égard autant que le comporte notre nature.

Il est, d'ailleurs, bien entendu que cette adhésion ne doit pas nous empêcher de soupçonner et même d'ad-

parties mêmes de l'espace, serait absolument uniforme du côté de son objet: elle ne tarderait sans doute guère à s'émousser autant que si cet objet n'existait pas, et elle aurait cessé d'être perçue bien avant l'époque où la réflexion et la mémoire s'éveillent chez l'enfant.

mettre l'existence de différences très-petites entre l'espace idéal ainsi conçu et l'espace réel où sont les corps, quoique nous ne puissions fixer ces différences. Car, d'une part, nous sentons que notre science est imparfaite en tout, même dans les choses où nous voyons le plus clair; et, d'autre part, la distinction que nous concevons entre l'ordre géométrique pur et la partie de l'ordre physique qui lui ressemble, ou qui concerne les formes et les grandeurs, doit exister ailleurs que dans notre esprit, c'est-à-dire être vraie d'une manière absolue, si, comme il paraît, le second de ces ordres est une représentation nécessairement imparfaite, quoique fort approchée, du premier. Or, il faut bien qu'il y ait, dans cette question du passage de l'abstrait au concret, quelque irréductibilité ou, pour ainsi dire, quelque incommensurabilité de l'une ou de l'autre espèce, subjective ou objective, pour que les problèmes de la divisibilité indéfinie des corps, de l'étendue ou de l'inétendue des atomes, etc., soulèvent, comme on sait, dans toutes les hypothèses, d'inextricables difficultés[1], ou, encore, pour que le sens pratique répugne à accepter dans leur rigueur les données fondamentales du sens géométrique, notamment celle qui les domine peut-être toutes et qui consiste dans notre manière de concevoir la continuité par la divisibilité à l'infini.[2]

Renonçons donc à creuser la notion d'espace, puisqu'on ne le peut sans sortir du champ qui nous est accessible; et, en particulier, ne la rapprochons pas des idées de

(1) Voir à ce sujet, page 63, le numéro 2 de la troisième partie.

(2) Il ne me semble pas impossible qu'il existe dans la nature, quoique ce soit peut-être tout-à-fait en dehors de la portée de notre esprit, une certaine continuité n'entraînant pas la divisibilité indéfinie. Car le sens pratique admet parfaitement la continuité dans les mêmes choses dont il repousse la divisibilité à l'infini. Or, nous devons tenir notre intelligence ouverte à toute lumière et attentive surtout aux moindres indications de nos facultés expérimentales, sauf à coordonner ensuite ces indications dans la mesure du possible. Mieux vaut d'ailleurs laisser subsister quelques contradictions apparentes, jusqu'au jour où l'on parvient enfin à trouver le point de vue d'où tout s'accorde naturellement, plutôt que de sacrifier à la logique étroite d'un esprit de système certains faits, certains éléments du vrai, en les atténuant ou les dénaturant.

substance et de mode, dont l'obscurité profonde est une preuve qu'elles sont peu appropriées à la forme de notre intelligence.

On sait que Leibniz, pour expliquer l'espace, en a fait un mode des corps, et l'a défini le rapport ou l'ordre des coexistences. Mais l'espace, tel que nous le concevons spontanément, n'est pas précisément cela, vu que l'intuition nous le montre logiquement antérieur aux corps et même à toutes les figures qu'on peut y tracer. De plus, il y a, dans un sens très-vrai, des ordres de coexistences qui ne sont pas dans l'espace, savoir, ceux que constituent les sentiments, pensées et volitions se produisant sur le théâtre éclairé par la conscience de chaque homme, théâtre bien distinct de l'étendue matérielle. Donc, l'espace n'est pas l'ordre des coexistences; il est seulement un ordre de coexistences, ou, pour mieux dire, il est le lieu dans lequel se déploie un certain ordre de coexistences. Dès lors, pour distinguer cet ordre de coexistencs d'avec les autres, il faut lui chercher un caractère spécifique, et nos facultés expérimentales ou rationnelles n'en indiquent qu'un seul, consistant en ce que l'ordre dont il s'agit est celui qui se déroule dans l'espace. Ainsi, nous nous retrouvons au point de départ, et la notion d'espace est bien irréductible.

A quoi bon, d'ailleurs, chercher à la définir, alors que tout le monde admet en pratique qu'elle est ce qu'il y a de plus clair, ou alors que toute science atteint son maximum de précision et de netteté dès qu'elle s'y ramène, dès qu'elle prend la forme géométrique.

6. — *De la distinction des mouvements absolus et des mouvements relatifs.*

C'est principalement en mécanique, lorsqu'il s'agit de définir le repos absolu et le mouvement absolu, que les géomètres peuvent être dans l'embarras au sujet de la notion d'espace. Avec un espace absolu, le repos absolu est l'absence de tout déplacement dans cet espace. Seulement, nous ne connaissons pas de repère fixe, pas de corps que nous ayons quelque motif de supposer parfaitement en repos; nous n'observons jamais que des repos relatifs ou des mouvements relatifs, c'est-à-dire des variations insensibles ou finies de distance entre des corps en mouvement. Or, c'est surtout cette impossibilité où nous sommes de constater et de mesurer les vrais mouvements des corps, qui a porté un certain nombre de géomètres à nier qu'il y ait des mouvements absolus et que l'espace pur soit quelque chose, présentant une certaine réalité. Ces géomètres rejettent ainsi, pour une raison purement négative, et sacrifient, du moins en principe, une idée des plus claires: ils oublient combien nous sommes pauvres de pareilles idées, combien nous devons en être avares.

Des considérations rationnelles, sans lesquelles nulle science n'existerait, permettent d'ailleurs d'arriver aux vraies lois générales des mouvements absolus, malgré l'impossibilité d'observer de pareils mouvements. Les équations différentielles de la dynamique ne reçoivent, comme on sait, le maximum de simplicité dont elles sont susceptibles, qu'autant qu'on y rapporte les mouvements à certains axes de coordonnées x, y, z. Il y a, en d'autres termes, une manière d'expliquer les mouvements relatifs observés, qui est la plus simple possible, qui, notamment, ne fait pas dépendre les accélérations des vitesses (1), et cette

(1) On sait que, d'après une loi fondamentale de la mécanique, les actions réciproques de divers atomes en présence ne dépendent que de leur nature et de leurs distances mutuelles, non de leurs vitesses : ce qui, dans le langage des géomètres, signifie que leurs accélérations vraies sont de simples fonctions de leurs situations relatives actuelles. Or, si l'on rapportait le mouvement à des axes animés de certaines vitesses, il s'adjoindrait en général à ces fonctions, pour exprimer les accélérations apparentes des atomes, des termes dépendant du mouvement même des axes, c'est-à-dire fonction d'autres variables que les seules distances réciproques de ces atomes, et qui, par suite, compliqueraient généralement les expressions totales.

manière peut se déduire de l'application du calcul aux données même de l'observation. Or, dès qu'on admet un espace absolu, les vrais mouvements sont les mouvements rapportés à cet espace; et ce sont ceux-là, non des mouvements relatifs, qui sont régis par les lois *générales* ou les équations différentielles les moins complexes obtenues: car le bon sens dit qu'en combinant plusieurs choses on les complique (si ce n'est dans des cas improbables, d'ailleurs *particuliers*), et que, par suite, les mouvements absolus doivent obéir à des lois générales aussi simples ou plus simples que les mouvements résultant de leur composition. De fait, une translation uniforme imprimée aux axes des coordonnées ne compliquerait pas les lois et n'y changerait même rien; mais il en est autrement, comme on sait, d'une rotation.

Dans les problèmes pratiques, on peut supposer fixes les gros corps, avec une approximation d'autant plus grande qu'ils sont plus considérables, lorsqu'on étudie les mouvements qu'exécutent à leur intérieur, ou près de leur surface, d'autres corps beaucoup plus petits. Cela revient à admettre que les grandes masses ne sont animées, dans la nature, que de vitesses de translation et de rotation très-faibles ou, du moins, *très-graduellement variables*, en comparaison de celles qu'ont relativement à elles les petits corps contigus; de telle manière qu'il soit permis d'attribuer aux lois du mouvement relatif de ceux-ci la même simplicité qu'à des lois de mouvements absolus, en commettant seulement des erreurs à peine sensibles aux moyens d'expérimentation les plus délicats. C'est ainsi que la terre peut être censée fixe, avec une approximation très-notable, par rapport aux corps qui se meuvent à sa surface. Une approximation plus grande s'obtient en supposant la terre et les planètes en mouvement autour du centre de gravité du système solaire, c'est-à-dire, à fort peu près, autour du centre du soleil. Enfin, dans l'approximation la plus haute à laquelle nous puissions prétendre de nos jours, on ne regarde comme immobile que l'ensemble des étoiles visibles et de l'éther qui nous transmet leur lumière.

Le bon sens de tous les temps a donc eu bien raison d'attribuer le mouvement aux petits corps de préférence aux gros. La fausse application qu'il a faite autrefois de cette loi, en quelque sorte instinctive, quand il en déduisit l'hypothèse de l'immobilité de la terre dans l'espace et du mouvement absolu des astres autour d'elle, avait pour véritable cause l'ignorance où l'on était des distances et des vraies grandeurs de ces astres. Pour rester fidèle à son principe, il ne pouvait s'empêcher de faire mouvoir la terre plutôt que le soleil et les étoiles, dès qu'il devenait palpable que celles-ci sont beaucoup plus grosses qu'elle. L'erreur dont il s'agit, la plus grande peut-être qu'ait commise le sens commun, n'est donc, au fond, qu'une erreur matérielle; et elle n'empêche nullement de penser que ce sens commun, interrogé convenablement, est encore, de tous les criteriums philosophiques ou scientifiques, celui qui trompe le moins.

II. — CONSIDÉRATIONS SUR LE BUT, LA MÉTHODE ET LES PRINCIPAUX RÉSULTATS DE LA MÉCANIQUE PHYSIQUE.

1. — *Coup d'œil sur le but de la mécanique physique.*

La mécanique céleste et la mécanique dite rationnelle n'étudient guère d'autres mouvements réels que ceux de corps situés à des distances perceptibles les uns des autres et qui se comportent, ou comme de simples points, ou comme des solides de forme invariable. Les principes classiques des quantités de mouvement et des moments, appliqués à chaque corps en particulier, leur suffisent pour cela : car le premier fournit les trois équations qui déterminent la translation du corps, c'est-à-dire le mouvement de son centre de gravité ; et le second donne de même les trois équations qui représentent sa rotation autour du centre de gravité. Les réactions mutuelles des diverses parties du corps s'éliminent d'elles-mêmes, comme on sait, de ces six relations, auxquelles on ajoute quelquefois, pour arriver plus vite à certains résultats, l'emploi du principe des forces vives ou de l'énergie.

Mais, dès qu'il y a lieu de considérer autre chose que des mouvements d'ensemble, dès qu'on veut pénétrer dans le détail des déplacements relatifs éprouvés par des parties de matière très-voisines les unes des autres et appartenant à une même masse ou à des masses contiguës, on entre dans le domaine d'une nouvelle branche de la mécanique, de celle à laquelle convient le nom de *mécanique physique*. Il y intervient ces actions, exercées à des distances imperceptibles, qu'on appelle vulgairement *actions de contact*, et dont les rapides changements de grandeur, ou même de signe, en fonction des distances moléculaires, contrastent tant avec la constance ou la lenteur de variation de la force de pesanteur dont l'astronome calcule les effets variés. Le *contact physique* n'est, en effet, qu'un rapprochement de deux corps suffisant pour mettre en jeu les actions dont il s'agit ici : il ne faut pas le confondre avec le *contact géométrique* ou absolu, qui ne comporte pas de degrés, tandis que le contact physique peut être plus ou moins intime, suivant l'intensité du choc qui le produit ou suivant le degré de compacité de la matière où on l'observe à l'état permanent.

Il n'est pas possible au géomètre d'évaluer individuellement la part de chaque molécule, dans l'effort total supporté par une petite partie perceptible de matière ; il faudrait, pour cela, avoir, sur la composition des molécules, sur leur mode de groupement, sur leurs actions réciproques, plus de données positives que l'induction, à défaut de l'expérience, n'en a fourni jusqu'à présent. C'est tout au plus si nous pouvons aborder de ce point de vue, à l'aide de considérations plausibles, l'explication des phénomènes fondamentaux de la solidité, de la fluidité, de l'état gazeux, et seulement dans un chapitre spécial, consacré à des explorations hors du domaine accessible à l'expérience[1]. Mais le nombre immense des molécules comprises dans les plus petites portions perceptibles de matière permet à ces fragments, en quelque sorte élé-

(1) On peut voir à ce sujet, en y joignant les deux alinéas suivants et le numéro 4 de la troisième partie ci-après (p. 70), les §§ VIII et IX d'un mémoire intitulé *Recherches sur les principes de la mécanique, sur la constitution moléculaire des corps et sur une nouvelle théorie des gaz parfaits*, dans le volume de 1873 du *Journal de mathématiques pures et appliquées*, de M. Liouville ; tome XVIII (2e série), p. 305.

mentaires pour nous, d'affecter à chaque instant un état moyen, où se trouvent masquées, par une espèce de neutralisation mutuelle, les irrégularités complexes, peut-être inextricables, que présenteraient les derniers détails des phénomènes. C'est de *l'état moyen local* ainsi défini, parfaitement évaluable, et variant avec continuité, soit d'un point à l'autre d'un même corps, soit d'un instant à l'autre, que la *mécanique physique* recherche les lois.

Par exemple, dans l'étude des légères déformations qu'éprouve un solide élastique soumis à des actions extérieures données, le géomètre ne s'occupe que des déplacements d'ensemble des dernières particules observables du corps, déplacements qui, à chaque instant, varient graduellement d'une particule à ses voisines. Il suppose donc réduits à leurs centres de gravité les groupes matériels complexes, propres à l'état solide ou caractéristiques des structures fibreuse, cristalline, etc., qu'on appelle des *molécules intégrantes*, et dont chacun doit comprendre un grand nombre de *molécules chimiques* : en effet, le passage à l'état fluide, cette rupture qu'un corps éprouve dans ses plus petites parties sensibles, et les changements brusques de volume qui l'accompagnent, ne se conçoivent guère que par une sorte de pulvérisation des unités matérielles propres à l'état solide, ou molécules intégrantes. Ainsi, le mathématicien ne s'occupe nullement des rotations et déformations des molécules intégrantes elles-mêmes, bien que ces rotations et déformations soient sans doute, à cause du fait de la solidité, des fonctions déterminées, quoique probablement fort complexes, des variations de distance des centres mêmes des molécules intégrantes.

Par exemple encore, quand il traite du mouvement des fluides, le géomètre ne peut songer à embrasser dans son analyse les petites variations accidentelles, très-rapides, qu'éprouve continuellement la vitesse en un point donné. Tout en attribuant à *l'agitation* qui résulte de ces variations irrégulières une influence, sur le frottement tant intérieur qu'extérieur du fluide, en rapport avec son intensité à l'endroit considéré, il n'introduit explicitement dans les formules que les valeurs moyennes des vitesses successives qui s'y produisent. Car les moyennes *locales* dont il s'agit, seules importantes aux yeux de l'hydraulicien, sont les seules vitesses qui varient assez graduellement, d'un point de l'espace aux points voisins et d'un instant à l'autre, pour permettre l'application, à l'ensemble du fluide, des méthodes de l'analyse infinitésimale.

2. — *Principes de cette science.*

Dans ces conditions, l'étude des principales espèces de corps, fluides, solides, plastiques, pulvérulents, ou des classes de mouvements qui présentent le plus d'intérêt (telles que mouvements vibratoires, écoulements par filets presque rectilignes et parallèles), devient possible au moyen de tout autant de principes simples, directement empruntés à l'expérience, et qui, pour chaque cas, nous tiennent lieu de la connaissance détaillée de circonstances multiples dont nos sens ne nous révèlent que l'effet général.

Par exemple, dans la théorie de l'équilibre et du mouvement des fluides, on admettra, comme fait d'expérience, que la pression exercée à l'intérieur d'un tel corps, à travers un élément de surface quelconque, se compose d'une force, dite *pression élastique du fluide*, perpendiculaire à cet élément plan, variable avec la densité, le degré de condensation de la matière à l'endroit où il se trouve, et, en outre, d'une autre force, ordinairement bien plus petite, provenant sans doute de ce que les particules fluides ne peuvent pas, à l'état de mouvement, conserver entre leurs éléments l'ordre ou la disposition symétrique qui permet à la pression d'être exactement normale, bien qu'elles tendent sans cesse, *et très-vite*, à réaliser cette disposition. La petite force considérée, étant ainsi nulle à l'état de repos et indépendante de tout mouvement qui ne serait pas très-récent, se trouvera naturellement fonction des simples vitesses relatives dont sont animées, à l'instant actuel, les particules fluides qui passent près de l'élément plan ou qui le traversent.

De même encore, dans l'étude des solides élastiques, où l'on suppose ces corps assez peu déformés, par des actions extérieures, pour qu'ils reviennent d'eux-mêmes à leurs dimensions primitives lorsqu'on écarte les actions dont il s'agit, on admet que les tractions et pressions, développées à l'intérieur de chacune de leurs petites parties perceptibles, dépendent de la constitution primitive de ces parties et des déformations actuelles mesurables, au nombre de six distinctes, qu'elles ont éprouvées, de manière à s'annuler, ou du moins à retrouver leurs premières valeurs, dès que les déformations cessent. Toutefois, elles seraient également fonction de la température, si celle-ci venait à changer sensiblement.

Par exemple aussi, dans la théorie analytique de la chaleur, qui est l'étude de la distribution des températures (supposées assez peu variables) aux divers points d'un corps athermane, on ne pourrait nullement calculer les travaux individuels, correspondant aux vibrations calorifiques, des actions moléculaires exercées à travers un élément plan quelconque sur la matière qui est d'un côté de l'élément plan. Et, cependant, la somme de ces travaux dans l'unité de temps constitue, pour chaque élément superficiel, une quantité, appelée *flux de chaleur*, qu'on ne peut se dispenser d'évaluer. Mais on y arrive en s'appuyant directement sur ce fait, que le flux dont il s'agit, fini par unité de surface et dans l'unité de temps, dépend de la distribution des températures, dans une très petite étendue tout autour de l'élément plan, et s'annule quand ces températures deviennent égales. Par suite, les flux de chaleur seront des fonctions déterminées de la température, prise au point que l'on considère, et de ses trois dérivées partielles premières par rapport aux coordonnées, dérivées qui caractérisent la manière dont varie la température dans une étendue très-petite : en outre, ces fonctions s'annuleront en même temps que les trois dérivées dont elles dépendent.

De tels principes, suggérés par l'expérience, sont en quelque sorte, pour le géomètre, la définition du corps ou de la classe de phénomènes qu'il étudie. Combinés, d'une part, avec la grande loi de continuité, qui s'applique à l'état moyen local affecté par la matière aux divers endroits et aux divers instants, d'autre part, avec les lois non moins importantes de la conservation des quantités de mouvement, des moments, des forces vives, qu'on emploie pour connaître à chaque instant l'état moyen de très-petits volumes matériels découpés par la pensée dans le corps, ces principes particuliers donnent prise à l'analyse infinitésimale. Et celle-ci, par l'application de ses méthodes générales, surtout par un emploi judicieux de la série de Taylor, en déduit tout un vaste corps de lois précises, aussi intéressantes pour le praticien que pour le savant. Dans les cas où les phénomènes se simplifient assez pour que le physicien puisse saisir des relations numériques entre les diverses quantités réelles qu'il mesure, le géomètre est assuré de pouvoir représenter analytiquement les faits en question ; car l'analyse, malgré ses imperfections et ses lacunes, sait exprimer des nuances plus délicates et plus compliquées que celles dont les meilleurs moyens de recherche expérimentale décèlent l'existence.

Sans doute, comme je le disais en 1873 dans un mémoire synthétique relatif à la *théorie des ondes lumineuses* (1),

(1) *Journal de mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, tome XVIII (2e série), p. 369.

on peut regretter que toutes les belles lois ainsi établies, au lieu de nous révéler en détail les mystères du monde des atomes, ou infiniment petits de la nature, sur lequel elles semblaient devoir nous éclairer, ne soient que la traduction, sous mille formes différentes, de quelques faits simples, qu'un premier coup d'œil jeté sur les choses rend en quelque sorte évidents, et qui ne concernent que l'action totale de particules matérielles dont chacune contient un nombre immense de molécules. Mais, d'un autre côté, le géomètre ne saurait être fâché de voir l'analyse mathématique lui dérouler les magnifiques conséquences des idées les plus simples et les plus communes. La possession de ces idées, dont le riche épanouissement constitue une si grande partie de la science humaine, vaut peut-être plus que la connaissance détaillée de toutes les forces individuelles qu'elles négligent pour embrasser leur effet général; car la simplicité, qui seule nous les rend intelligibles et intéressantes, tient probablement à ce que nous observons des effets moyens où les discordances individuelles disparaissent et se neutralisent en vertu de la *loi des grands nombres*. S'il nous était donné, au contraire, de voir les détails, nous serions tentés peut-être, à cause des bornes actuelles de notre esprit, de ne trouver que désordre et incohérence dans le monde des infiniment petits, pareillement à ce qui arrive quand nous nous perdons dans la multiplicité des phénomènes que nous offre le monde plus grand placé à notre portée.

Les lois dont il s'agit ne sont, il est vrai, qu'approchées; et le recours à l'observation est souvent indispensable pour fixer les limites entre lesquelles leur emploi n'entraîne aucune erreur sensible. Par exemple, dans le problème du mouvement d'un projectile à travers un milieu fluide, les auteurs des traités de mécanique admettent, implicitement, que la vitesse du projectile varie assez graduellement pour qu'un état à fort peu près permanent du fluide s'établisse autour du corps ; en sorte que cet état et, par suite, la résistance opposée au mouvement du projectile soient de simples fonctions de la vitesse actuelle de celui-ci. Le principe fondamental de la balistique consiste justement à regarder la résistance du milieu comme fonction de la valeur actuelle de la vitesse, à l'exclusion des valeurs antérieures, dont l'état actuel du fluide dépend, néanmoins, dans une mesure plus ou moins sensible. Or, si ce principe est comme évident, tant que le rapport de la dérivée de la vitesse à la vitesse même reste petit et compris entre d'assez étroites limites, il appartient, jusqu'à présent, à l'expérience seule de fixer ces limites.

3. — *Sa méthode.*

Mais il n'y a nullement lieu d'être surpris du caractère de simple approximation, ou même d'indécision (en ce qui concerne leur champ d'applicabilité), que présentent les théories dont se compose la mécanique physique. Les moindres faits observables contiennent tant de complications, il y a peut-être aussi une disproportion si radicale entre leurs plus petits détails et notre intelligence, qu'il nous faut renoncer à saisir les choses absolument telles qu'elles sont. Notre esprit se représente et leur substitue, presque sans s'en douter, des objets abstraits, qui en diffèrent fort peu, et dont les notions sont plus simples, c'est-à-dire plus intelligibles ou mieux adaptées à sa forme propre. Cette substitution serait nécessaire, même pour des phénomènes qu'atteindrait directement le calcul avec un degré de précision très-supérieur à celui des meilleures expériences, ou alors même que les changements qu'elle introduit échapperaient tout-à-fait par leur petitesse à nos appréciations : car notre nature intellectuelle nous ferait encore remplacer les quantités ou les figures réelles existant hors de nous, et dont l'observation nous fournit seulement une connaissance plus ou môins grossière, par les quantités abstraites de l'analyse ou par les figures idéales de la géométrie. Et, pourtant, aucun moyen de constatation ne nous donne le droit de regarder celles-ci comme leur étant identiques, bien que les idées que nous en avons présentent seules assez de clarté pour servir de base à nos raisonnements.

Or, ce n'est pas tout. La réalité est d'ordinaire, sinon toujours, si complexe, qu'il nous faut, pour arriver à la comprendre, tolérer dans une première étude des erreurs parfois très-appréciables, mais jugées par nous assez petites, en remplaçant les diverses quantités en vue, *données* ou *résultats*, par d'autres relativement peu différentes, dont les relations mutuelles soient les plus simples possibles. Cette étude préalable permet à l'esprit de se faire une juste idée des objets divers qu'il considère ; et elle lui sert de point de départ ou d'appui pour une évaluation approchée des quantités négligées d'abord, dont on avait, sous forme implicite, certaines expressions que le calcul déjà fait permet justement de développer et de connaître en grande partie. Il suffit même, ordinairement, que la deuxième approximation obtenue de la sorte soit moins inexacte que la première, pour que celle-ci puisse être regardée comme légitime.

C'est en procédant ainsi par voie d'approximations successives, dont chacune laisse toujours subsister une erreur plus ou moins petite en comparaison des résultats poursuivis, que l'intelligence humaine parvient à démêler, dans les phénomènes naturels, des relations assez simples pour pouvoir les saisir et s'y intéresser.

4. — *Caractère de la plupart des lois qu'elle découvre.*

De telles relations ou *lois* ont, aux yeux du savant, une valeur qui est en raison composée de leur simplicité même et de leur degré d'exactitude. La plupart pourraient être appelées des *lois-limites*; car elles comportent des erreurs relatives d'autant moindres, que certaines quantités, considérées dans la question, sont elles-mêmes plus petites: et elles deviendraient tout-à-fait exactes à la limite, c'est-à-dire si ces quantités décroissaient jusqu'à zéro. Telles sont, pour l'étude du système planétaire, les lois de Képler, qui, dans la double hypothèse de l'attraction neutonienne et d'une parfaite sphéricité des astres, seraient vérifiées en toute rigueur si les masses des planètes devenaient infiniment petites en comparaison de celle du soleil. Telle est encore la loi classique des petits mouvements pendulaires qui suppose les excursions du mobile proportionnelles au cosinus d'une fonction linéaire du temps, loi d'autant plus approchée que l'amplitude des oscillations est plus faible.

Les faits étudiés dans la mécanique physique doivent souvent leur caractère propre, fixant l'attention de l'observateur, à la petitesse même des quantités dont le géomètre néglige les puissances supérieures à celle d'un degré déterminé, qui est ordinairement le premier ou le second. Alors les phénomènes s'altèrent, se dénaturent, à mesure que les quantités en question grandissent; et ils deviennent méconnaissables en même temps que les lois approchées, fournies par l'analyse, tombent en défaut. Ces phénomènes, en d'autres termes, ne nous intéressent, ils ne nous sont même intelligibles, qu'à la condition de reproduire assez fidèlement les traits de certains objets simples de l'ordre géométrique idéal, vrai domaine immédiat de notre esprit, et à la faveur de la clarté qu'ils leur empruntent par suite de la ressemblance reconnue. C'est surtout pour de tels cas que les lois dont il s'agit, quoique seulement approximatives, doivent être regardées comme de vraies lois naturelles ; puisqu'elles se vérifient dans la mesure même où *existe* le phénomène qu'elles doivent représenter, c'est-à-dire dans la mesure où se montrent les caractères qui le définissent aux yeux de l'observateur. Il est vrai que cette existence du phénomène, en tant que nous lui faisons une place à part, motivée par l'intérêt qu'il nous offre, tient autant à notre manière de voir, à la forme de notre intelligence, ou du moins à l'analogie qu'il présente avec des réalités d'un ordre supérieur perçues par nous, qu'à son essence même : mais toute science porte inévitablement l'empreinte du *sujet* connaissant, et une loi n'est *naturelle* qu'à la condition de se trouver tout à la fois, dans la mesure du possible, conforme à la *nature* de notre esprit et à celle des choses. D'ailleurs, une ressemblance — fût-elle seulement ébauchée — entre un fait physique et une conception géométrique pure, a certainement sa valeur objective, si l'on admet, comme il est impossible de ne pas le faire, que les vérités géométriques sont absolues, les mêmes chez tous les esprits, et qu'elles ont ainsi comme une existence propre ou constituent un monde à part, en dehors de nous. Cette ressemblance de deux objets d'ordre pourtant bien différent est l'expression d'une sorte de parenté qui les relie et qui relève on ennoblit le fait phsyique. Elle n'échapperait donc pas à une intelligence supérieure, qui, douée d'une connaissance également parfaite, également directe des deux ordres de réalités, les jugerait l'un et l'autre tels qu'ils sont et ne serait pas réduite, comme nous, à ne comprendre les choses physiques qu'à la lumière des conceptions géométriques abstraites.

Je citerai, comme exemple remarquable, l'onde solitaire de Scott Russell [1] : lorsque la hauteur de l'onde grandit

(1) Voir, pour l'étude de cette onde, les §§ XXXI et XXXII de mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*, au tome XXIII du *Recueil des savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris*, et, de plus, les pages 36, 51, des *Additions* à ce mémoire, au tome suivant, XXIV, du même recueil, ainsi qu'un dernier *Complément*, dans le tome IV (3e série) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de MM Liouville et Résal (p. 363 à 365).

au point que les lois de seconde approximation obtenues en la supposant petite cessent d'être vérifiées, la forme de la surface perd sa stabilité et la continuité même du fluide n'est plus garantie. On peut en dire autant des petits mouvements vibratoires d'un corps limité ou d'un milieu élastique indéfini. Les caractères les plus saillants que présentent ces mouvements, aux yeux du physicien, sont leur *isochronisme*, c'est-à-dire l'invariabilité, quelle que soit l'amplitude, de la durée de la période pour un corps limité (invariabilité revenant à celle de la vitesse de propagation pour un milieu indéfini), la simple superposition de plusieurs systèmes de vibrations émanés de centres différents, etc. Or, ces propriétés supposent en général la petitesse des vitesses effectives des molécules ; elles ne sont donc qu'approchées, et elles disparaîtraient si le rapport des vitesses considérées à la vitesse même de propagation devenait comparable à l'unité.

Telles sont encore les lois de l'*extension* (ou de la *contraction*), de la *flexion* et de la *torsion* d'une *tige* élastique, fixée par une de ses extrémités, tandis que l'autre extrémité supporte diverses actions extérieures. Ces actions, aux endroits mêmes où elles sont appliquées, produisent des déformations très-complexes, variables suivant que la tige est sollicitée au moyen de tenailles, ou d'autres tiges soudées à la première, ou de liens de différente nature, etc. Mais leurs effets se régularisent, se simplifient à une certaine distance de l'extrémité, et ils y deviennent sensiblement indépendants du mode de distribution des forces extérieures qui les causent, pour ne varier qu'en fonction de la résultante et du couple auxquels équivaudraient toutes ces forces au point de vue des principes des quantités de mouvement et des moments. C'est là seulement, c'est-à-dire à des distances de l'extrémité un peu grandes par rapport aux dimensions transversales de la tige, que se produisent, séparément ou à la fois, les phénomènes appelés extension, flexion, torsion, seuls assez simples pour que l'esprit s'en forme une idée précise et sente le besoin de leur imposer des noms spéciaux. La nature ne réalise donc ces phénomènes si importants que d'une manière approchée ou asymptotique; et leurs vraies lois, leurs lois *naturelles*, ne sont, par suite, vérifiées qu'approximativement. Quant aux lois exactes des phénomènes bruts, lois inconnues et sans doute inextricables, elles se rapportent à des modes de déformation qui ne sont, à proprement parler, ni de simples extensions, ni des flexions, ni des torsions, ni même des combinaisons de ceux-là. Des réflexions analogues s'appliquent aux plaques élastiques minces, sollicitées, sur leurs bords, par des forces extérieures qui les font s'étendre, se contracter ou fléchir (1).

5. — *Exemple que lui donne l'astronomie.*

L'exemple de l'astronomie montre bien que telle est la seule voie ouverte devant la mécanique physique. Cette aînée des sciences de la nature serait encore à naître, si deux circonstances importantes ne lui avaient ménagé de très-grandes simplifications. La première de ces circonstances consiste dans la petitesse du rayon terrestre, ou même des dimensions du système planétaire, en comparaison des distances qui nous séparent des étoiles, et dans la lenteur des déplacements relatifs apparents de celles-ci; la

(1) La science peut néanmoins, dans certains cas malheureusement bien restreints, calculer aussi les phénomènes bruts ou, ce qui revient au même, les *perturbations locales* qui tiennent aux divers modes d'application des forces extérieures s'exerçant sur chaque partie donnée très-petite d'un solide. Je pense avoir réuni au moins les principaux de ces cas (dont le plus simple, relatif à la torsion des plaques, avait été traité d'abord en 1867 par MM. William Thomson et Tait) dans un mémoire, non encore publié, où j'étudie surtout en détail les déformations et les pressions produites à l'intérieur d'un sol élastique horizontal, quand ce sol supporte des pressions ou tractions verticales distribuées à sa surface d'après une loi quelconque ou de manière à faire prendre à leur région d'application une forme connue. Ce mémoire paraîtra, je l'espère, en 1880, dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

seconde, dans la propriété, que présentent les trajectoires des planètes par rapport au soleil, d'être des courbes à fort peu près fermées.

La première circonstance a permis aux astronomes d'assimiler sensiblement les étoiles à des repères fixes, distribués sur la surface d'une sphère de rayon infini dont la terre et même le système planétaire tout entier occuperaient le centre. Grâce à ces repères, disséminés au loin tout autour du théâtre des mouvements du système solaire, la droite suivant laquelle nous voyons un astre à un moment donné peut être assez bien définie sous le rapport de la direction, en supposant du moins que l'espace ne contienne pas (surtout ailleurs qu'autour des astres) des milieux réfringents capables de dévier beaucoup les rayons lumineux qui le traversent. Par suite, l'astronome sait déterminer, en particulier, le mouvement relatif de la terre autour du soleil, s'il convient de prendre pour unité la distance moyenne de leurs centres, dont la détermination devient possible seulement plus tard, et s'il juge d'ailleurs des variations modérées de la distance du soleil à nous par celles de son diamètre apparent, c'est-à-dire s'il admet l'invariabilité du diamètre réel de cet astre.

La seconde circonstance, en tenant compte de ce que les durées des révolutions planétaires ne sont pas des multiples exacts d'une année (ni même d'une demi-année) (1),

(1) Si la durée de la révolution d'une planète s'était trouvée un multiple exact de l'année, on aurait presque indéfiniment revu cette planète, à un point donné de son orbite, d'une même position de la terre sur la sienne, et il aurait été impossible de déterminer trigonométriquement le lieu de la planète. On n'aurait pu tourner la difficulté en laissant écouler, entre deux observations, assez de périodes pour que le point de l'écliptique occupé par la terre aux moments considérés eût éprouvé à la longue des déplacements *séculaires* notables ; car le lieu de la planète en aurait en même temps éprouvé d'analogues, restés inconnus.

Dans le cas où la durée de la révolution aurait été, au contraire, un multiple impair d'une demi-année, deux observations successives de la planète, à un même point de sa trajectoire, se seraient faites à des moments où la terre aurait occupé deux positions sensiblement opposées sur l'écliptique. Alors la détermination du lieu de la planète aurait été également impossible, si l'on avait employé la méthode simple où l'on se borne à observer un astre aux moments de ses conjonctions et de ses oppositions avec le soleil ;

permet ensuite de revoir chaque planète à un même point de son orbite, après une, deux, trois,..... révolutions, de plusieurs positions déterminées de la terre sur l'écliptique, et suivant des directions qui se coupent sous des angles finis; en sorte qu'il devient possible de dessiner ou de calculer les positions successives de la planète par rapport au soleil et à la terre[1].

Malgré ces éléments de simplification, l'astronomie a

en effet, à ces moments, la planète se serait trouvée à fort peu près sur la *base* imposée, c'est-à-dire sur la droite qui aurait joint les deux seules positions occupées par la terre au bout de toutes les périodes : par suite, le triangle à résoudre aurait eu deux angles en quelque sorte nuls et ses deux côtés autres que la base indéterminés.

[1] Cette seconde circonstance (consistant en ce que les orbites des planètes sont à fort peu près fermées), conservera même, ce me semble, quelque chose d'hypothétique, tant qu'on n'aura pas un grand nombre d'observations un peu précises de parallaxes, c'est à-dire tant qu'on pourra expliquer les apparences que perçoivent divers observateurs terrestres, en supposant chaque planète située sur la droite qui joint son centre au centre de la terre et à une distance de celui-ci très-sensiblement différente de le distance vraie.

Avant l'invention de la lunette astronomique, les astres, à l'exception du soleil et de la lune, se réduisaient pour l'œil à de simples points lumineux : l'observation n'indiquait donc, pour chaque planète, que la direction suivant laquelle elle était vue à un moment donné; en sorte qu'une infinité de trajectoires, extrêmement différentes les unes des autres, pouvaient représenter à la rigueur les mouvements de chacune d'elles. Seules, les orbites du soleil et de la lune avaient pu être déterminées avec plus de précision, grâce à la connaissance que l'on avait des diamètres apparents de ces corps. L'observation des phases de la lune, qui ne s'expliquent naturellement que par la triple hypothèse de l'opacité de cet astre, de sa sphéricité et de son éclairement par le soleil, avait même permis, comme on sait, en appréciant la distance angulaire de la lune et du soleil au moment des quadratures, de prouver que la lune est beaucoup plus près de nous que le soleil.

Quand les lunettes eurent rendu perceptible le diamètre apparent des planètes et fait connaître leurs phases ou d'autres détails les concernant, ces nouvelles données permirent de comparer, comme on avait fait pour la lune, leurs parallaxes à celle du soleil et de fixer certaines limites relatives où elles doivent être comprises. Mais des procédés de mesure utilisant de pareilles données sont bien vagues et ne conduisent que très-exceptionnellement à des résultats suffisamment exacts.

Donc, jusqu'à ce qu'on ait trouvé des méthodes d'observation assez précises pour rendre sensible la différence de direction des deux rayons visuels qui vont de deux observateurs terrestres vers le centre de la même planète, la meilleure des raisons prouvant la réalité du système astronomique moderne consistera dans la simplicité des principes qui suffisent à ce système pour expliquer une variété immense de faits : preuve non-mathématique, mais, il est vrai, très-suffisante; car le bon sens n'en possède pas d'autre dans la plupart des cas où il y a certitude morale et même certitude physique (comme, par exemple, quand nous croyons que les corps continuent à exister aux moments où nous ne les observons pas) eu beaucoup de peine à se constituer, c'est-à-dire à découvrir les lois dont Newton a tiré le principe de la gravitation universelle ; et elle aurait certainement échoué dans son œuvre, si on lui avait refusé l'emploi d'hypothèses approximatives, accommodées à la faiblesse de l'esprit humain. Même la supposition de mouvements exactement circulaires et uniformes a rendu de grands services, bien qu'elle soit devenue finalement presque un obstacle.

Il y a plus. Une fois que le principe de la gravitation universelle a été trouvé, que la théorie des mouvements planétaires a pu se déduire, désormais, des équations différentielles qui déterminent à chaque instant les accélérations des divers astres en fonction de leurs situations relatives, les deux mêmes circonstances sont restées aussi nécessaires qu'elles l'avaient été dans la période précédente, pour rendre abordable l'intégration de ces équations. La première, qui est l'éloignement des étoiles fixes, a dispensé les astronomes de faire intervenir dans l'étude du système solaire les influences déformatrices extérieures, c'est-à-dire les différences entre les accélérations que l'attraction des étoiles imprime aux divers corps du système, ou que du moins elle leur aurait imprimées à des distances beaucoup moindres. Quant à la seconde circonstance, relative à la nature des orbites (qui sont sensiblement des courbes fermées), elle revient à admettre l'extrême petitesse des attractions mutuelles des planètes devant celle du soleil ; et l'on sait qu'elle est également nécessaire pour rendre applicables les méthodes par approximations successives auxquelles la science n'a pu, jusqu'à ce jour, se dispenser de recourir.

6. — *Difficultés plus grandes qu'elle rencontre.*

Moins heureuse que la mécanique céleste, dont l'objet s'offrait de lui-même aux astronomes avec les simplifications qu'ils ne pouvaient manquer d'y reconnaître tôt ou tard, la mécanique physique doit d'abord chercher avec soin, en s'aidant de l'expérience, les divers groupes de phénomènes qui sont accessibles à l'analyse ou qui comportent des lois numériques approchées. Tels sont, dans l'étude des fluides pesants, soit les mouvements de médiocre durée (pour chaque molécule), qui se font suivant des lignes peu inclinées sur l'horizon et presque parallèles, mouvements donnant lieu à ce qu'on appelle des *ondes de translation*, soit les mouvements de *houle simple* et de *clapotis*, où chaque particule fluide s'agite indéfiniment dans un espace limité et reste entourée des mêmes particules. Tel est encore l'écoulement d'un liquide par filets peu courbes et peu inclinés les uns sur les autres, écoulement dont le type ou le cas le plus simple est celui que les ingénieurs qualifient de *régime uniforme*.

Pour chaque classe de phénomènes qu'elle a ainsi découverte, la mécanique physique doit mettre en relief le caractère distinctif qui en est comme la définition et d'où peuvent se déduire les lois propres à la classe en question. Elle constitue ou édifie de la sorte tout autant de chapitres de la science ; et ces chapitres concernent presque toujours les cas les plus intéressants, tant pour le savant que pour l'ingénieur. Ce sont, en effet, ceux où les phénomènes se règlent le mieux, où ils s'assujettissent le plus possible à l'ordre que les hommes recherchent, dans leurs constructions matérielles, et dont l'état de choses au milieu duquel nous vivons approche notablement, par le fait même qu'il est compatible avec l'existence d'êtres organisés.

7. — *Nature des résultats qu'elle obtient.*

Par exemple, quand un ingénieur doit construire un canal, le sentiment esthétique, indice des préférences de l'esprit, et les raisons d'utilité, d'économie, de durée de l'œuvre, expressions de rapports multiples entre les choses, s'accordent pour lui faire donner au canal la forme prismatique ou cylindrique, qui est géométriquement la plus simple, et qui se prête aussi aux modes d'écoulement les moins compliqués, les plus accessibles à notre analyse. Les cours d'eau naturels finissent également par acquérir des lits dont la forme se rapproche de celle d'un prisme ou d'un cylindre ; parce que la vitesse ne peut y varier dans de trop larges limites, aux moments de grande crue, sans provoquer, aux étranglements ou aux parties à forte pente, des érosions considérables, suivies de dépôts proportionnés dans les parties élargies ou trop peu inclinées, de manière que les sections normales et les pentes tendent vers certaines moyennes. Par exemple encore, ceux d'entre les solides élastiques qui présentent le plus d'intérêt pour l'ingénieur, à tel point qu'on leur consacre la majeure partie des cours usuels sur la résistance des matériaux, ne sont autres que les *tiges* ou solides allongés (cordes, poutres, arbres tournants, etc.), c'est-à-dire les corps les plus simples qu'imagine le géomètre et les seuls dont une étude théorique à peu près complète (abstraction faite de perturbations locales) soit possible dans l'état actuel de la science. Les solides aplatis ou *plaques* viennent ensuite, tant dans l'ordre pratique que dans l'ordre spéculatif; mais les intégrations qu'il faut y effectuer, pour déterminer théoriquement leur résistance statique ou dynamique, sont loin d'aboutir dans des cas aussi étendus que pour les tiges (1).

(1) Même quand on se borne aux questions d'équilibre, il est très-peu de cas, en dehors des tiges et des plaques, c'est-à-dire pour des corps élastiques ayant leurs trois dimensions comparables entr'elles, où l'on puisse réellement calculer les déformations qu'ils éprouvent dans des circonstances données. Non seulement les forces actuelles de l'analyse y échouent presque toujours, surtout dès qu'il s'agit de problèmes ayant une certaine généralité, mais il arrive (tant dans cette branche de la mecanique physique que dans les autres) que les plus difficiles des intégrations qui aboutissent analytiquement, c'est-à-dire, celles où brille le mieux la puissance de combinaison mathématique de leurs auteurs, ont des résultats trop compliqués pour représenter rien d accessible à l'esprit. De

La forme-limite que prend, à la longue, un système matériel, sous l'action de forces d'abord non contenues, mais tendant peu à peu à se faire équilibre, est d'ordinaire plus simple, à raison même de son unité, que les formes dynamiques, infiniment variées, pour lesquelles ces forces ne se neutralisent pas. Par suite, des dispositions relativement peu complexes, accessibles à nos calculs, doivent se présenter dans un ordre de choses voisin de l'équilibre, et où les puissances naturelles ne déploient que des énergies assez restreintes pour rendre possible notre vie si délicate. Effectivement, la terre a fini par acquérir une forme peu différente de la plus simple de toutes, qui est celle d'une sphère, et la pesanteur ne peut guère s'y déchaîner qu'autant qu'il le faut pour compléter le poliment de la surface. Quant aux forces moléculaires (affinités, chaleur, élasticité, etc.), qui, souvent, l'écartent de sa forme d'équilibre-hydrostatique et s'opposent ainsi à.

telles formules, tout en contenant d'une certaine manière la solution cherchée, sont complétement inutiles au physicien : autant vaut pour lui s'en tenir aux équations différentielles d'où l'on est parti et qui, si elles n'expriment les choses que dans leurs détails les plus menus, dans leurs variations infiniment petites, ont du moins l'avantage d'être comprises. Au point de vue concret, les formules très-compliquées où triomphe l'analyste pur ne valent, quelque élégantes qu'elles puissent être, que comme nouveaux moyens de tenter ultérieurement des simplifications et, par là, d'obtenir des résultats plus nets, si la question en comporte. D'ailleurs, ces résultats plus simples, ainsi trouvés, peuvent toujours se démontrer directement à partir des équations différentielles du problème, et l'on a même, en général, moins de peine à les en tirer qu'à les déduire des formules complexes. On y parvient aussi, bien souvent, sans connaître celles-ci ; et cette recherche directe de lois intuitives ou, du moins, abordables doit être le but principal des géomètres physiciens.

A part les cas élémentaires, évidemment les plus simples, d'un solide homogène dont on déforme les plus petites parties symétriquement par rapport à une famille de plans parallèles, ou de cylindres circulaires conaxiques, ou de sphères concentriques, et de la même manière sur toute l'étendue de chaque surface, il n'y a probablement pas de problème, concernant l'équilibre d'élasticité d'un solide à trois dimensions, où les expressions des déplacements éprouvés par la matière soient moins compliquées que lorsqu'il s'agit, soit d'un corps indéfini de toutes parts, sollicité en un point intérieur par une force donnée dF, soit d'un sol horizontal, d'une étendue et d'une profondeur indéfinies, à la surface duquel s'exerce en un point une pression verticale donnée dP, positive ou négative. En effet, si l'on appelle r le rayon mené du point d'application de la force à un point quelconque du corps, α l'angle que fait ce rayon avec la force dF ou dP, et que son polissage parfait, elles déterminent seulement des oscillations, autour de cette forme-limite, très-petites comparativement au rayon de la planète. Il ne se produit presque plus sur celle-ci que des mouvements résultant de faibles ruptures de l'équilibre, simples vibrations ou oscillations dans un grand nombre de cas, écoulements de fluides par filets presque horizontaux et peu courbes, dans la plupart des autres.

Les faits appartenant aux classes les plus faciles à définir sont donc les seuls que la mécanique physique parvienne à représenter dans leurs détails avec une approximation satisfaisante. Quant aux phénomènes plus complexes,

λ, μ désignent les deux coefficients d'élasticité de la matière, le point considéré de chaque corps éprouve, dans le sens de la force, le déplacement respectif

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{dF}{16\pi\mu r}\left(\frac{3\lambda+7\mu}{\lambda+\mu}+\cos 2\alpha\right)$$

ou

$$\frac{dP}{4\pi\mu r}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}+\cos^2\alpha\right),$$

et, dans le sens perpendiculaire, en s'écartant de la force, le déplacement respectif

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{dF}{16\pi\mu r}\sin 2\alpha$$

ou

$$\frac{dP}{4\pi\mu r}\left(\cos^2\alpha+\cos\alpha-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\tang\frac{\alpha}{2}.$$

Ces formules nouvelles se traduisent géométriquement avec une grande simplicité. On les trouvera démontrées dans le travail cité plus haut en note (p. 39 ci-dessus), ainsi que d'intéressantes et utiles applications obtenues en superposant une infinité de forces dF ou de pressions dP, supposées s'exercer en des points différents et dont les effets suivant chaque axe s'ajoutent algébriquement. Parmi ces applications, il faut distinguer celles qui concernent la résistance et les déformations d'un sol élastique supportant diverses charges, et, en particulier, la manière dont le poids d'un corps, posé sur un tel sol, se répartit dans les cas les plus simples entre tous les éléments de sa base de sustentation. Ce dernier problème, quoique soulevé depuis un siècle par d'Alembert et Euler, n'avait pas encore été résolu.

presque toujours intermédiaires entre différentes catégories de phénomènes simples, nous devrons nous borner, longtemps encore sans doute, à en esquisser les traits généraux au moyen d'une sorte d'intercalation ou d'interpolation peu précise, suffisante parfois dans la pratique.

Par exemple, le problème du régime uniforme d'un fluide pesant, c'est-à-dire de son écoulement par filets parallèles dans un lit prismatique, est abordable, soit quand les sections sont assez petites et le lit assez poli pour qu'il n'y ait pas *d'agitation* sensible, soit, au contraire, quand les sections sont assez grandes pour que l'agitation tourbillonnaire se développe pleinement. Le produit de la pente par le rayon moyen (rapport de l'aire de la section normale à son contour mouillé) et par l'inverse du carré de la vitesse, est constant dans le second cas, réciproquement proportionnel au rayon moyen et à la vitesse dans le premier. Il sera naturel d'induire de cette double loi que, dans les cas intermédiaires, inaccessibles jusqu'à présent à l'analyse, le produit dont il s'agit varie en sens contraire de la vitesse et du rayon moyen, mais moins vite que les inverses de leurs premières puissances; et c'est, en effet, ce que montre l'expérience, qui apprend même que, dans le cas de petites rigoles d'une profondeur de quelques centimètres, ce produit est environ proportionnel aux puissances $-\frac{1}{2}$ de la vitesse et du rayon moyen.

Par exemple encore, la marche descendante, le long des rivières, de ces longues *intumescences liquides* qu'on appelle des crues, est un phénomène généralement inabordable à l'analyse, à cause de la complication des résultats[1]. Mais ce phénomène se trouve compris entre deux autres qu'atteint le calcul, et qui se produiraient, le premier, si la crue se réduisait à une onde courte de médiocre hauteur, le second, si, d'un volume et d'une hauteur

(1) Voir, à ce sujet, le numéro 125 *bis* de *l'Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 270) et surtout la note qui l'accompagne.

d'ailleurs quelconques, elle était, au contraire, assez allongée pour que le régime du cours d'eau ne différât pas beaucoup, sur son passage, d'un régime permanent. Or, dans ces deux cas extrêmes, on reconnaît qu'en général la crue s'aplatit peu à peu, et, par suite, s'allonge à mesure qu'elle avance dans le canal. On en conclura donc qu'elle s'aplatirait de même dans les cas intermédiaires, bien qu'on ne soit pas en état de calculer la diminution effective qu'y éprouve, d'un instant à l'autre, la hauteur maxima de l'intumescence.

8. — *De son importance dans l'étude des choses et pour le progrès de l'esprit.*

En résumé, la mécanique physique ou terrestre, tout en conservant le caractère dominant de science mathématique, a besoin d'emprunter à l'expérience quelques principes, pour la plupart très-simples, spéciaux à chacune de ses branches, en outre des principes généraux et classiques (conclus aussi de l'ensemble des faits) de la mécanique dite rationnelle. Elle ne peut, ni ne doit se dispenser tout-à-fait d'être une science expérimentale. Le savant qui la cultive, —obligé de porter tout à la fois son attention sur les choses extérieures et sur les constructions géométriques idéales par lesquelles il les représente, mais que régissent des lois qui leur sont propres, — tenu de plus à choisir, parmi toutes les expressions également approchées d'un même phénomène, celle qui est la plus simple, la plus naturelle, — trouve à y exercer simultanément des aptitudes intellectuelles diverses, tant spéculatives que pratiques. Par l'effort qu'il fait sans cesse pour se placer au point de vue d'où l'observation et le calcul s'accordent sans se fausser, par le commerce continuel qu'il établit entre la réalité et les conceptions abstraites que lui montre et que combine sa raison, il ne peut que perfectionner sa justesse d'esprit, c'est-à-dire compléter l'adaptation de ses manières de voir et de juger à leurs véritables objets.

D'ailleurs, les relations théoriques auxquelles il est conduit ne présentent pas moins d'intérêt, pour le mathématicien pur, que celles dont la spéculation abstraite a enrichi l'analyse et la géométrie proprement dites. Mais elles ont, de plus, l'avantage de s'appliquer au monde qui nous entoure, d'appartenir tout à la fois aux deux ordres de réalités, physique et géométrique, au milieu desquels nous vivons : marque certaine de leur haute valeur et, à tous les points de vue, de leur fécondité. A supposer même que l'ordre géométrique n'eût pas d'existence hors de nous, qu'il se réduisît à être une pure émanation de l'intelligence humaine, ou mieux, une simplification et une généralisation abstraites, appropriées à notre esprit, d'une certaine catégorie de réalités extérieures, ces lois de la mécanique physique resteraient encore comme les reflets les plus précis de la nature en nous, ou comme la forme que prennent les choses à nos yeux, en tant qu'elles peuvent être figurées et mesurées dans leur évolution réelle.

Elles constituent, de toute manière, la partie la moins imparfaite des connaissances qu'il nous est donné d'acquérir sur l'univers; car la forme et la quantité sont incontestablement les modes de l'existence dont nous avons les idées les plus nettes et, peut-être aussi, ceux au sujet desquels il y a le plus d'accord entre notre intelligence et le monde extérieur. Au contraire, les vérités de la géométrie et de la cinématique pures se rapportent à des formes et à des mouvements conçus par l'esprit comme seulement possibles, mais que la nature ne réalise pas en général, même d'une manière approchée.

9. — *Aperçu des principales branches qu'elle comprend et, d'abord, de l'hydrodynamique.*

Une rapide énumération des principaux résultats acquis servira de complément naturel aux réflexions précédentes.

La partie la plus ancienne et la moins imparfaite de la mécanique physique est, sans contredit, l'hydrodynamique. Déjà, au dix-septième siècle, la théorie de l'équilibre des fluides était très avancée, alors que celle des solides élastiques ne devait réellement se constituer qu'au siècle suivant pour ses cas les plus simples, c'est-à-dire pour ce qui regarde les tiges et les plaques, et seulement de nos jours si on la considère dans sa généralité. D'autre part, la théorie des ondes liquides a été abordée avec succès, il y a cent ans, par Lagrange et Laplace, après qu'Euler eut formé des équations aux dérivées partielles qui conviennent aux fluides pour leurs mouvements produits sans frottements sensibles et, en particulier, pour les ondes; puis Gerstner, Poisson et Cauchy, au commencement de ce siècle, traitèrent des cas plus difficiles du même problème général. Au contraire, les équations aux dérivées partielles des petites vibrations analogues des solides élastiques n'ont été trouvées que de notre temps, par Navier, Poisson, Cauchy, Lamé, etc., et se sont montrées encore plus rebelles à l'intégration. Enfin, la théorie des mouvements d'amplitude indéfinie, des *écoulements*, ébauchée, pour les fluides, dès l'époque de Torricelli, a été, pour les mêmes corps et déjà avant ce siècle, l'objet de progrès notables, dus à Daniel Bernoulli, du Buat, etc., tandis que, pour les solides à l'état plastique ou qu'on déforme, d'une manière persistante, sous l'influence de pressions très-inégales exercées en divers sens, elle a commencé seulement de nos jours, par l'initiative de M. Tresca, à se dégager des vagues lueurs de l'empirisme.

Ainsi, l'hydrodynamique, dans toutes ses parties, est de beaucoup la branche la plus avancée de la mécanique physique. Les phénomènes nombreux qui peuvent s'y étudier théoriquement d'une manière bien satisfaisante se rangent presque tous en trois classes, sans compter les ondes sonores, propagées par les liquides ou les gaz, et qui se rattachent plutôt aux vibrations longitudinales des solides qu'aux phénomènes hydrauliques proprement dits. D'ailleurs, dans ces trois classes de mouvements, les particules fluides se déforment beaucoup plus qu'elles ne changent de volume, en sorte qu'on peut y utiliser l'hypothèse simplificatrice de l'incompressibilité.

La première classe comprend les mouvements que présentent les fluides pesants, quand leurs vitesses ne font que de petits angles avec l'horizon et que chaque particule se meût, ou seulement pendant un temps assez court, ou d'un mouvement en très-grande partie oscillatoire et d'assez brève période. Les composantes horizontales de la vitesse y varient peu, à chaque instant, le long d'une même verticale. De plus, les frottements n'y jouent que le rôle de forces perturbatrices. A cette classe appartiennent les ondes dites de *translation*, en relief ou en creux, solitaires ou multiples, les têtes des longues intumescences *(remous indéfinis)*, propagées au sein d'une eau en repos, les *houles* et *clapotis* à longues vagues (*seiches* des lacs, etc.), et même, par une analogie évidente, les ondes propagées le long de la colonne liquide remplissant un tube en caoutchouc ainsi que les oscillations de l'eau dans un siphon renversé (1). Comme en astronomie,

(1) Toutefois, les marées de l'Océan, que leurs causes extérieures à la terre rattachent d'ailleurs à la mécanique céleste, ne font pas partie de cette classe, et pour deux raisons. La première est que ces marées sont des ondes *forcées* (surtout à l'équateur, où elles se forment en grande partie) et non pas des ondes libres comme les autres :

les lois théoriques y sont d'accord avec les faits au degré de précision que comportent les observations bien faites.

La seconde classe, qui a certains points de contact avec la première, concerne les phénomènes où chaque particule fluide s'agite indéfiniment dans un espace limité assez petit, en restant sans cesse entourée des mêmes molécules. Elle comprend donc tous les déplacements périodiques d'une amplitude modérée et ceux qui s'y ramènent : ondes courantes (*houles simples*), où les molécules décrivent d'un mouvement continu des orbites fermées ; ondes mobiles sur place (*clapotis*), où elles oscillent indéfiniment le long d'arcs sensiblement rectilignes ; ondes composées, résultant de la superposition d'un nombre quelconque de houles ou de clapotis. Les frottements n'y ont guère pour effet, comme dans la classe précédente, que d'user à la longue les mouvements, sans en changer les lois.

Il n'en est plus de même chez la troisième classe, où l'on étudie les écoulements qui se produisent dans des lits assez réguliers, et depuis des temps assez longs, pour que les frottements aient pu y établir un *régime* lentement variable d'un endroit à l'autre et d'un instant à l'autre. Ces mouvements *graduellement variés* — où il faut d'ailleurs tenir compte du caractère, soit bien continu, soit tumultueux, de l'écoulement, suivant l'ampleur des sections et l'agitation tourbillonnaire qui en résulte — comprennent les phénomènes hydrauliques les plus intéressants pour l'ingénieur; savoir: 1° le régime uniforme, et aussi le régime *quasi-uniforme* qu'affectent presque partout les grands cours d'eau, ainsi que les eaux souterraines d'in-

je veux dire que les forces périodiquement variables qui les produisent ne les abandonnent jamais à elles-mêmes ou ne cessent à aucun instant d'agir sur toute la masse fluide, circonstance qui complique les équations indéfinies du problème, en y ajoutant un terme fonction explicite du temps. La seconde raison consiste en ce que la période des marées se trouve assez longue pour que les frottements aient chaque fois le temps de rendre les vitesses notablement plus faibles au fond qu'à la surface. Les marées se rapprochent donc des courants continus, c'est-à-dire des phénomènes de la troisième classe dont il va être parlé, sans qu'on puisse cependant les faire entrer dans cette classe.

filtration; 2° les régimes dits *permanents*, dans les tuyaux de conduite et dans les cours d'eau à lit découvert, en exceptant les endroits où les dimensions transversales de la masse fluide qui s'écoule changeraient trop vite; 3° les régimes *non-permanents* qui s'observent dans les tuyaux et dans les cours d'eau découverts à des époques de crue ou de décrue, en exceptant de même les endroits et les instants, bien rares, où la graduelle variation supposée n'existerait pas; 4° les ondes de translation, en relief ou en creux, propagées le long d'une eau courante.

On peut rattacher à la troisième classe, et traiter par une méthode de calcul analogue, quoique moins exacte, des modes d'écoulement qui, sans être graduellement variés, en ce sens que les courbures des filets fluides n'y sont pas insensibles ou presque insensibles comme il le faudrait pour cela, ont néamoins de commun, avec les mouvements graduellement variés, que les filets fluides dont il s'agit se trouvent peu inclinés les uns par rapport aux autres et sont animés de vitesses distribuées avec une certaine approximation comme dans un régime uniforme. Tels sont les mouvements qu'on observe aux endroits des cours d'eau où un régime graduellement varié commence à s'établir ou à se détruire rapidement; et tels sont aussi ceux qui se présentent dans les *ondes fixes* produites, soit localement, à l'aval des ressauts, soit sur une longueur indéfinie, quand le fond a sa pente périodiquement variable ou dessine une série d'ondulations longitudinales.

En dehors des classes précédentes, un grand nombre de phénomènes hydrauliques plus complexes peuvent être étudiés par le calcul, sinon complétement, du moins de manière à y établir certaines lois, qui répondent aux principaux besoins de la pratique. Ce sont: 1° les phénomènes de *contraction*, relatifs aux masses fluides qui, en s'écoulant, se resserrent pour passer à travers des orifices ou sur des déversoirs; 2° ceux, au contraire, d'*épanouissement* brusque, où la formule de Borda, celle du ressaut et, dans le cas le plus général, une autre formule assez simple qui les comprend toutes les deux (1), permettent de déterminer la principale inconnue ; 3° les phénomènes qui se présentent dans les coudes ou les tournants, et ceux qui constituent les tourbillons fluides ; 4° les réactions mutuelles des fluides et des solides immergés ou flottants, soit quand leur mouvement relatif est toujours de même sens, soit quand il est pendulaire, réactions qui comprennent, notamment, l'influence modificatrice et régulatrice des cours d'eau sur leurs lits altérables ; 5° les perturbations, sensibles dans certains cas, que produit la tension superficielle ou action capillaire ; etc. (2).

Telles sont les principales questions que comprendrait, de nos jours, un cours d'hydrodynamique fait au point de vue d'une science concrète, soucieuse de connaître les véritables phénomènes naturels, mais d'ailleurs désintéressée de toute application immédiate aux machines mues par les fluides ou aux autres travaux hydrauliques dont s'occupent les ingénieurs. On le complèterait par une théorie mécanique des corps semi-fluides, dont deux espèces, les masses pulvérulentes et les solides plastiques, ont pu être abordées par l'analyse.

Les masses pulvérulentes, parfaitement fluides tant qu'elles ne sont pas comprimées, résistent, au contraire, aux actions déformatrices dès que leurs petites parties (composées pourtant, chacune, de beaucoup de *grains* solides) supportent en tous sens des pressions, et elles leur

(1) Voir, pour cette formule générale et nouvelle, le § III du *Complément* à l'essai sur la théorie des eaux courantes, inséré dans le volume de 1878 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (tome IV, pages 366 à 371).

(2) On peut voir, pour prendre une idée de l'étendue et de l'intérêt que présentent toutes ces questions, l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, aux tomes XXIII et XXIV du *Recueil des savants étrangers* de l'Académie des sciences de Paris, ainsi que le *Complément* inséré en 1878 au tome IV (3e série) du *Journal de mathématiques pures et appliquées* (p. 385).

résistent d'autant plus que ces pressions sont plus grandes [1]. Ce simple fait, traduit analytiquement d'après une méthode dont le fond se retrouve dans les principales branches de la mécanique physique, permet d'établir les équations d'équilibre et de mouvement des masses inconsistantes, pourvu que leurs déformations se maintiennent petites, inférieures à certaines limites d'élasticité. Et quand celles-ci sont atteintes, ou que la matière passe à l'état d'équilibre-limite dit *état ébouleux*, on peut encore, en exprimant ce fait dans l'hypothèse la plus naturelle, former des équations de mouvement, applicables tant que les vitesses restent assez modérées, et dont la plus importante a été posée d'une autre manière par Macquorn-Rankine (comme traduction directe d'une loi expérimentale du frottement). Ces diverses équations conduisent à des lois intégrales simples dans certains cas importants, notamment pour les massifs pesants, indéfinis en dessous, mais limités supérieurement par des surfaces, de grande étendue, plus ou moins inclinées sur l'horizon. Les analogies et les contrastes que présentent les corps pulvérulents, comparés aux fluides, ressortent de cette étude, ainsi que de celle des écoulements de sable par un orifice (écoulements dont la vitesse, loin de croître avec la hauteur de charge d'après la loi de Torricelli, tend rapidement vers une limite constante, pourvu que la section du vase soit assez grande par rapport à celle de l'orifice).

Quant aux corps plastiques, en exprimant de la manière la plus simple, comme pour les massifs pulvérulents, que leurs limites d'élasticité sont sans cesse atteintes lorsqu'on les pétrit, on commence également à démêler les lois des pressions qui s'exercent à leur intérieur; et la théorie peut y démontrer, en tant qu'expression approximative

(1) A la condition toutefois que les pressions dont il s'agit n'acquièrent pas des valeurs trop considérables, cas où la masse deviendrait cohérente, comme on verra plus loin, au numéro 4 de la troisième partie (p. 72).

des faits, les formules pratiques auxquelles M. Tresca a été conduit par ses expériences sur le poinçonnage du plomb et même d'autres métaux et de diverses pâtes céramiques. (1)

Osons le dire : l'hydrodynamique, comprise de cette manière, est une science aussi étendue, plus variée et non moins utile que la mécanique céleste, quoique son objet ne frappe pas au même degré, par sa grandeur, notre imagination. Elle a, d'ailleurs, sur la mécanique céleste, l'avantage d'être encore neuve dans un grand nombre de ses chapitres et d'offrir ainsi un champ des plus vastes aux recherches originales. (2)

10. — *Quelques réflexions sur les autres branches de la mécanique physique.*

Je passerai beaucoup plus rapidement sur les autres parties de la mécanique physique.

La plus importante est la théorie de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Elle comprend : 1° l'étude générale de la manière dont les pressions intérieures, dans ces corps, dépendent en chaque endroit des petites déformations, suivant les diverses contextures internes de la matière et aussi d'après le principe de la conservation de l'énergie; 2° l'étude des conditions d'équilibre et des équations des petits mouvements, ainsi que leur intégration dans quelques cas simples; 3° et, surtout,

(1) Pour cette démonstration, comme pour les autres questions de la mécanique des corps semi-fluides indiquées ci-dessus, on peut voir l'*Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui de massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion* (*Mémoires des savants étrangers de* l'*Académie Royale de Belgique*, tome XL ; ou chez M. Gauthier-Villars).

(2) Et, cependant, aucune chaire, aucun cours, même accessoire, ne lui est consacré dans aucun de nos principaux établissements d'enseignement supérieur !

l'application de ces formules générales à la démonstration des lois de l'extension, de la flexion et de la torsion des corps allongés, afin de rendre rationnel l'enseignement de toute une grande section de la mécanique appliquée. Pour cette dernière partie, qui est une œuvre capitale, M. de Saint-Venant, créateur de la véritable théorie de la torsion, a signalé tous les faits importants et, en comparaison, n'a plus laissé que peu de chose à faire à ses successeurs, dans ce qui concerne du moins les principes (1).

On peut, de la *Théorie générale des phénomènes ondulatoires*, former une troisième branche de la mécanique physique. On y traiterait d'abord des ondes produites à la surface d'une eau tranquille par un solide qui la bat périodiquement à des intervalles assez rapprochés, phénomène vulgaire, immédiatement observable, et qui, pour ces deux raisons, a fourni le type de tous les mouvements ondulatoires. D'ailleurs, la réflexion, les interférences et la diffraction de ces ondes ont la plus grande analogie avec celles de la lumière; et elles peuvent leur servir d'images palpables, car il y paraît, extrêmement agrandis, des détails qui restent insaisissables dans les phénomènes lumineux à cause de la petitesse excessive des espaces où ils sont contenus (2).

Les ondes sonores, longitudinales et transversales, propagées à l'intérieur des milieux élastiques homogènes

(1) Voir, par exemple, son édition annotée du *Cours de mécanique appliquée* de Navier Il restait cependant, pour rendre entièrement rationnelle la théorie fondamentale de M. de St-Venant, à démontrer par les équations générales de l'élasticité ce fait, choisi par lui comme point de départ, que, *dans une tige longue*, *les fibres longitudinales n'exercent sensiblement*, *les unes sur les autres*, *que des actions dirigées suivant leurs tangentes*. J'ai donné cette démonstration, qui n'a rien de compliqué, en 1871, et, sous une forme plus concrète, dans un mémoire récemment inséré au *Journal de mathématiques pures et appliquées* (tome V, p. 163).

(2) Voir, à ce sujet, les §§ VIII et IX de ma *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris*, tome XX).

solides (ou fluides dans un cas limite), seraient l'objet d'un second chapitre. On y remarquerait, en particulier, l'impossibilité de limiter latéralement des ondes à vibrations longitudinales progressant dans un milieu indéfini, de manière à en faire des sortes de rayons sonores, tandis que les ondes à vibrations transversales peuvent, du moins à l'intérieur des milieux *isotropes* (pareillement constitués en tous sens) et de ceux qui sont presque isotropes, se diffracter et se délimiter comme la lumière (1). De plus, la théorie des ondes propagées dans les solides non-isotropes et surtout dans les plus simples d'entr'eux, provenant de solides isotropes modérément déformés d'une manière persistante (2), y préparerait à l'étude de la double réfraction.

Enfin, le reste de la théorie des phénomènes ondulatoires serait consacré aux ondes lumineuses. Divers géomètres, en voyant que *certains* faits d'optique, notamment ceux qui concernent les directions des rayons réfractés dans les cristaux biréfringents, pouvaient s'expliquer de plusieurs manières différentes, ont été portés à croire que cette partie de la science se trouve encore, à certains égards, dans l'état le plus indéterminé. Mais quel est le problème qui ne paraît pas indéterminé, lorsqu'on ne fait usage que d'une partie des équations nécessaires pour le définir ? L'opinion des géomètres dont je parle ne serait fondée que si l'on connaissait deux systèmes distincts d'explication embrassant l'*ensemble* des phénomènes lumineux. Or, il ne s'en est produit jusqu'ici qu'un seul.

(1) C'est ce que j'ai démontré en 1868 (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome XIII) dans une *Étude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux*.

(2) Les propriétés élastiques de ces corps, les plus importants des solides après les corps isotropes, ont été remarquées d'abord par M. de Saint-Venant, en 1863. Je les ai démontrées d'une manière aussi exempte que possible d'hypothèses en 1868, au § 1er d'un mémoire *Sur les ondes dans les milieux isotropes déformés* (*Journal de mathématiques*, même tome XIII).

C'est celui où l'on regarde l'éther des corps transparents comme identique à l'éther libre, et où les molécules pondérables sont supposées vibrer lumineusement à l'unisson de l'éther, en lui empruntant une fraction sensible de sa quantité de mouvement, à peu près comme il arrive pour un fil massif inerte, enroulé autour d'une corde élastique vibrante et entraîné par elle : il y a, toutefois, cette différence, qu'une telle charge, imposée à une corde élastique, exécute nécessairement des oscillations identiques pour l'étendue à celles de la corde, tandis qu'au contraire les molécules pondérables, plongées dans l'éther comme dans un fluide extrêmement raréfié et très-peu résistant, accomplissent, sous les impulsions alternatives de ce fluide, des oscillations dont l'amplitude est infiniment plus faible que l'amplitude des siennes et varie d'ailleurs, dans les divers sens, d'après la forme de ces molécules ou, par suite, d'après leur facilité correspondante à se laisser mouvoir.

Je n'insisterai pas davantage, ici, sur ce sujet (1), non plus que sur une quatrième branche de la mécanique physique où, tâchant de pénétrer plus avant dans la constitution intime des corps, on étudierait le mieux possible les mouvements imperceptibles qui ne se font pas par ondes, mais qui, encore plus rapidement variables d'un point à l'autre que les précédents, tendent à disjoindre les plus petites particules matérielles par les vitesses inégales qu'ils leur impriment. Ces mouvements, qui constituent la *chaleur*, deviennent donc le plus puissant agent de transformation, parce qu'ils atteignent, ce semble, la matière dans ses dernières profondeurs, dans ses parcelles les plus ténues et les moins résistantes. Malheureusement, ils n'ont probablement leur type, leur

(1) Voir les volumes de 1868, 1872 et 1873 du *Journal de mathematiques pures et appliquées* (2e série, tomes XIII, XVII, XVIII).

image suffisamment claire, dans aucune des classes de mouvements perceptibles et *simples* que nous offre la nature. Aussi, ne peut-on guère, jusqu'à présent, que leur appliquer certains principes généraux, indiqués ou exposés, les uns, dans les traités sur la théorie analytique de la chaleur, les autres, dans les cours de thermodynamique. Le plus important de ces principes n'est autre que la grande loi fondamentale de la conservation des forces vives ou de l'énergie. En thermodynamique, il devient le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail (1); dans la théorie analytique de la chaleur, son expression, développée et simplifiée, est l'équation générale de cette science, c'est-à-dire l'équation aux dérivées partielles de la température.

La même grande loi de la conservation des forces vives relie également entr'eux les divers phénomènes électriques: preuve que ces phénomènes appartiennent, eux aussi, à la mécanique physique. Malheureusement, pour que nous puissions en faire, dans cette science, l'objet d'une branche d'études aussi avancée que l'est la théorie des ondes lumineuses, il nous manque une conception précise des mouvements qui les constituent. Nous n'avons pas

(1) Dans l'exposé de ce principe, les auteurs classiques ont tous, à ma connaissance, laissé subsister un point obscur, qu'il eût pourtant, si je ne me trompe, été facile d'éclaircir; ce qui aurait évité à de jeunes géomètres bien des tâtonnements, et même des erreurs graves. Ces auteurs ne montrent pas que la pression supportée par un élément de la surface d'un corps, tout en étant propre à représenter aux points de vue des quantités de mouvement et même des moments l'ensemble des forces moléculaires exercées sur le corps à travers l'élément de surface, est, au contraire, insuffisante quand il s'agit de représenter leur travail; en effet, son produit par le déplacement d'ensemble observé de l'élément superficiel n'exprime que la partie du travail des forces moléculaires qui correspond au mouvement visible de la matière. Il faut donc y joindre le travail total que produisent les forces moléculaires individuelles dans le mouvement vibratoire calorifique superposé au mouvement visible. Or, c'est précisément ce dernier travail qu'on appelle la *chaleur cédée* au corps (par conductibilité ou par rayonnement) et que les auteurs de thermodynamique ajoutent bien, mais sans faire voir ce qu'il représente mécaniquement ou de quelles forces il exprime le travail. On peut voir, à ce sujet, le § VII des *Recherches sur les principes de la mécanique, etc.* (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome XVIII; 1873).

réussi encore à les rattacher, d'une manière naturelle, à un type simple, comme l'a été celui des *ondes* pour le son et la lumière. Rien ne dit même que la nature ait mis ce type à notre portée ; car est-elle tenue de nous offrir en grand des images de tout ce qu'elle produit en petit? Espérons, toutefois, que les diverses parties de la belle théorie de l'électricité ne tarderont pas à trouver l'idée mère qui leur manque : ce qui leur permettrait de se souder complétement entr'elles et au reste de nos connaissances mécaniques.

III. — QUESTIONS DIVERSES.

1. — *Sur la notion de différentielle.*

C'est l'élan de l'esprit au-delà de ce que montre l'observation, au-delà même de tout ce qu'elle est capable de donner, qui seul a pu nous faire connaître la série indéfinie des nombres entiers, celle des grandeurs continues, et nous conduire par là aux idées d'infiniment petit, de point, de ligne, de surface, limites de quantités indéfiniment décroissantes ou d'étendues dont certaines dimensions diminuent jusqu'à zéro. Ces notions se présentent donc à nous, comme des créations de l'intelligence dans sa recherche de la simplicité et de la perfection absolues pour ce qui concerne les grandeurs, comme des données que la vue des choses n'implique pas logiquement, c'est-à-dire déductivement, mais qu'elle suggère à notre faculté d'intuition idéale, ou, si l'on veut, à notre pouvoir de généralisation. L'infiniment petit, notamment, n'est pas le zéro pur, le zéro considéré isolément, mais bien le zéro en tant que limite des décroissements d'une grandeur, ou en tant que point de départ d'une quantité qui naît et augmente.

Dans la pratique de l'analyse infinitésimale, le géomètre appelle infiniment petites, par extension, des quantités qu'il se représente comme très-petites, qui, par conséquent, sont actuellement finies, mais qu'il introduit dans les calculs avec l'*intention expresse* de les faire décroître indéfiniment et de ne chercher que les limites vers lesquelles tendront les résultats des calculs. On qualifie donc de telles quantités d'infiniment petites, non pas à raison de ce qu'elles sont, mais à raison de ce qu'on veut qu'elles deviennent au moment où seront utilisés les résultats qu'on leur demande.

Quand il s'agit en particulier des accroissements simultanés très-petits de variables continues, la caractéristique d, mise à la place de la caractéristique Δ pour les désigner, exprime justement l'intention où l'on est de ne chercher que des résultats-limites. *Cette intention est la seule chose qui distingue la différentielle d'une différence finie très-petite.* Aussi, l'idée qu'a eue Leibniz de l'inscrire explicitement dans les formules, par l'emploi du signe spécial d, et quoiqu'il ne s'agisse là que d'une distinction purement subjective en quelque sorte, peut être regardée comme l'idée mère de l'analyse infinitésimale. Car elle permet de supprimer sans erreur, de toutes les expressions, les termes qui, *masqués par d'autres incomparablement plus grands*, n'influeraient plus à la limite sur les résultats formés avec ces expressions : principe fécond d'où découlent les règles des calculs différentiel et intégral.

2. — *Sur les difficultés que présentent, dans leurs rapports avec notre idée de l'étendue, les diverses opinions possibles touchant les atomes.*

Si l'on suppose que l'espace où sont les corps ne diffère aucunement de celui que nous concevons, ou sur lequel nous raisonnons en géométrie, et qu'il se trouve par suite, comme ce dernier, indéfiniment subdivisible, il arrivera nécessairement l'une des deux choses suivantes. 1° Ou bien un corps ne sera pas composé à l'infini de parties; et alors ses derniers éléments, appelés *atomes*, en nombre limité, seront de simples points sans étendue, maintenus à distance les uns des autres, de manière à donner au corps un certain volume apparent sans volume réel. 2° Ou bien, les plus petites fractions imaginables de matière seront elles-mêmes indéfiniment divisibles, soit qu'elles remplissent l'espace où elles sont étalées et se groupent ainsi en atomes, étendus et figurés comme ceux des anciens, soit, au contraire, qu'elles présentent partout des discontinuités et ne puissent être conçues que comme *limites* d'assemblages de pleins et de vides juxtaposés, qui décroîtraient indéfiniment en augmentant de nombre et en gardant entr'eux certains rapports de dimensions, cas où l'atome n'est plus qu'un infiniment petit, une conception de l'esprit et ne conserve qu'une existence idéale. Or, le sens pratique repousse la première hypothèse, parce qu'elle fait, du point géométrique qui, pour lui, n'est qu'une abstraction, et une abstraction irréalisable ou dépourvue du moins de toute probabilité, la seule réalité matérielle existante. D'autre part, il n'est guère plus satisfait de la seconde, à cause de la divisibilité à l'infini qu'elle implique; et il la rejette surtout sous sa dernière forme, dans laquelle les plus petites parties imaginables de la matière sont privées tout à la fois des deux attributs de continuité et d'indivisibilité, que le bon sens, à tort ou raison, leur concède.

Ces difficultés, sans issue apparente, me semblent ne comporter qu'une solution, consistant à admettre que, *même dans les catégories de la forme et de la quantité*, la nature se dérobe en partie à tous les efforts de notre faculté de représentation, ou que le fond des choses nous échappe, par suite d'un défaut d'adaptation très-léger, mais peut-être irrémédiable, de notre esprit.

Quoi qu'il en soit, le mécanicien-géomètre ne peut jamais, dans ses calculs, se passer de la première opinion; car il n'y a pas pour lui d'autre élément corporel possible, c'est-à-dire bien défini en position, que le *point* *matériel.* Il résout forcément les corps, explicitement ou à son insu, en des assemblages de points maintenus à distance les uns des autres. Ce n'est qu'indirectement qu'il pourrait tirer partie de l'idée d'une matière divisible à l'infini ; et il le ferait, s'il y avait lieu, soit en multipliant de plus en plus et sans fin le nombre des points matériels qu'il suppose répartis dans une étendue donnée, soit en *assimilant à des points* matériels — sauf à commettre des erreurs relatives susceptibles de s'annuler à la limite — de très-petits volumes, qu'il supposerait de plus en plus nombreux à mesure que chacun d'eux tendrait vers zéro. Donc, quoique le mécanicien-géomètre ait presque instinctivement, comme tout le monde, une certaine vue directe d'une matière continue, rien ne le dispense d'adopter, dans l'exposition de sa science, l'hypothèse qui réduit les corps à des groupes de points, puisque même il lui serait impossible de ne pas traiter comme de simples cas limites de cette hypothèse les autres qu'on pourrait faire et, en particulier, celle de la continuité.

Ainsi, le système des atomes inétendus, exposé au dernier siècle par le P. Boscowich, et soutenu depuis par Ampère, Cauchy, M. de Saint-Venant (1), M. l'abbé Moigno, etc., est indispensable aux géomètres comme le plus simple, le plus naturel à leur point de vue, quelque choquant qu'il paraisse au sens commun et, par conséquent, à la plupart des hommes, même de science. On peut dire qu'il est le seul qui se prête à une explication précise des phénomènes mécaniques : preuve qu'il se trouve, tout à la fois, en parfaite harmonie avec les régions claires

(1) Voir, par exemple, dans les *Annales de la Société scientifique* de Bruxelles (1877-1878), sous le titre « *De la Constitution des atomes* », une nouvelle rédaction, très-étendue, du remarquable mémoire publié en 1844, par M. de Saint-Venant, *Sur la question de savoir s'il existe des masses continues et sur la nature probable des dernières particules des corps (Bulletin de la Société philomathique*, tome de 1844, page 3).

de notre esprit et dans un accord suffisant avec la réalité. Mais il faudrait, pour lui accorder une valeur objective absolue, ne pas tenir compte de notre répugnance naturelle à réaliser les points mathématiques, et croire aussi que nous avons une idée adéquate de l'espace extérieur où se meuvent les corps : double décision à prendre, qu'il me semblerait difficile de justifier.

De plus, pour ceux qui réduisent l'espace à certains rapports des corps entr'eux, lui refusant toute espèce de réalité propre, l'hypothèse des atomes inétendus entraînerait une difficulté spéciale, peut-être bien difficile à lever. Dans cette hypothèse, la distance de deux atomes est toujours infinie par rapport à leurs dimensions, supposées nulles : on ne voit donc pas qu'il soit possible de trouver *en eux*, pour l'évaluer, aucune mesure, aucun terme de comparaison, qui ne la rende infiniment supérieure à tout nombre donné. Si donc cette distance n'était rien en dehors de son rapport aux deux atomes, l'action réciproque de ceux-ci paraîtrait devoir s'annuler constamment, comme il arrive, à la limite, quand ils s'éloignent de plus en plus l'un de l'autre. Et, surtout, l'on ne conçoit pas comment, aux plus petites distances où s'exercent les actions moléculaires, l'attraction des deux atomes pourrait se changer en répulsion, ainsi qu'il semble absolument nécessaire pour l'explication des phénomènes d'élasticité.

3. — *Réflexions sur l'attraction neutonienne.*

Dès qu'on admet, d'une part, que les accélérations de divers atomes mis en présence les uns des autres sont des fonctions déterminées des situations relatives de ces atomes, et, d'autre part, qu'on obtient une somme indépendante du temps en ajoutant à leur demi-force vive totale (ou *énergie actuelle*) une certaine fonction de leurs distances mutuelles r, r_1, r_2, ..., dite *fonction des forces* (ou *énergie potentielle*), il en résulte, comme on sait, que la quantité appelée action réciproque d'un couple d'atomes égale la dérivée, par rapport à leur distance r, de cette fonction des forces [1].

Or, l'expérience a fait voir, comme on le sait également que, lorsque la distance r des deux atomes considérés est perceptible à nos sens, c'est-à-dire supérieure aux très-petites distances auxquelles se manifestent les forces de cohésion, de pression, etc., la dérivée ou action dont il s'agit ne dépend que de cette distance r et des masses des deux atomes ; elle égale le quotient du produit des masses par le carré de la distance (en admettant qu'on ait adopté une unité de distance ou une unité de masse convenable). Sa valeur est donc indépendante de la présence des atomes qui peuvent se trouver dans le voisinage des deux dont il s'agit, et indépendante même de la nature chimique de ceux-ci — supposé qu'il existe des atomes de plusieurs espèces, ou que les différences chimiques des corps dits *simples* ne tiennent pas uniquement à des modes divers de groupement atomique —. La résultante de toutes les actions exercées ainsi, à des distances sensibles, sur l'unité de masse d'un atome quelconque, est appelée *la pesanteur* au point de l'espace qu'occupe cet atome.

Telles sont les lois de l'attraction aux distances perceptibles, lois que l'expérience a établies et dont on doit la connaissance à Newton. On pourrait peut-être se les expliquer, jusqu'à un certain point, de la manière suivante.

Soit φ la fonction des forces, qui dépend des distances

(1) Voir, par exemple, le numéro 8 des *Recherches sur les principes de la mécanique, etc.*, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2e série, tome XVIII, p. 315).

atomiques r, r_1, r_2,... ou, ce qui revient au même, de leurs inverses $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$,.... Il est naturel de supposer que φ et ses dérivées partielles des divers ordres sont des fonctions finies et continues des variables $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$,..., dont elles ne deviendraient indépendantes que dans le cas-limite où les distances seraient infinies. Or, ce cas-limite, exigeant, pour se produire, l'annulation des variables mêmes $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$,.., ne correspond qu'à de simples valeurs particulières de la fonction φ et ne doit empêcher en rien sa continuité. Si donc, parmi les variables dont il s'agit, quelques-unes, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R_1}$,.... par exemple, sont suffisamment petites, incomparablement moindres que les autres $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$,..., on pourra ordonner φ suivant leurs puissances croissantes, par la série de Mac-Laurin, et négliger même les termes d'un ordre de petitesse supérieur au premier. La fonction φ prendra la forme

$$\varphi = A - \frac{B}{R} - \frac{B_1}{R_1} - \ldots = A - \sum \frac{B}{R},$$

où le terme principal A et les coefficients B, B_1,... devront être supposés des fonctions des variables bien plus grandes $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$,...., c'est-à-dire des distances très-petites r, r_1, r_2....

Mais il n'est pas naturel que B, B_1,..... dépendent de r, r_1,..., du moins d'une manière appréciable. En effet, la différentiation de φ par rapport à r et à R donne

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{dA}{dr} - \frac{dB}{dr}\frac{1}{R} - \frac{dB_1}{dr}\frac{1}{R_1} - \ldots, \quad \frac{d\varphi}{dR} = \frac{B}{R^2}.$$

Or, dans la première de ces dérivées, qui exprime l'action mutuelle du couple d'atomes très-voisins dont la distance est r, la longueur R entre par son inverse, au terme $-\frac{dB}{dr}\frac{1}{R}$, tandis qu'elle ne paraît que par le carré de son inverse dans l'action même $\frac{d\varphi}{dR}$ du couple d'atomes dont elle mesure la distance. Si donc les coefficients tels que B variaient sensiblement avec les distances imperceptibles r, les grandes distances R influeraient incomparablement plus, en valeur absolue, sur les actions mutuelles des points qu'elles ne relient pas que sur l'action propre des couples d'atomes qu'elles relient; ce qui paraît invraisemblable. On est ainsi conduit à supposer les coefficients tels que B indépendants des petites distances, comme ils le sont déjà des grandes. D'ailleurs, ces coefficients devront être positifs, pour que l'action, $\frac{B}{R^2}$, de deux atomes éloignés tende à les rapprocher, non à les écarter indéfiniment, et qu'il puisse se former, par suite, dans l'univers, des systèmes matériels durables.

Si l'on accepte ces inductions, il ne reste plus qu'à expliquer pourquoi le coefficient B est simplement proportionnel au produit des masses des deux atomes dont R désigne la distance, quelle que soit leur nature chimique. Cela est évident quand on admet l'unité de composition de la matière; car tous les atomes, ayant alors même nature et même masse, constituent deux à deux des couples exactement pareils à égalité de distance, et le coefficient B est le même pour tous ces couples. S'il existe, au contraire, des atomes de plusieurs espèces différentes, on peut toujours dire que, pendant l'immense période préparatoire de temps durant laquelle la matière d'un groupe stellaire est à l'état d'une nébuleuse extrêmement raréfiée, chaque point ne s'y trouve guère soumis qu'à la pesanteur, exercée sur lui par les autres points du groupe. Or, cette pesanteur ne peut laisser ensemble, c'est-à-dire dans une même région de l'espace, que les atomes auxquels elle imprime une même accélération. Il s'opère donc un triage, et il ne reste en définitive, dans chaque système planétaire ou même stellaire, que des atomes jouissant de la propriété de peser tous également, à masses égales, ou d'être attirés par les autres aux distances perceptibles proportionnellement à leurs masses, quelle que soit leur nature chimique.

4. — *Sur l'explication de divers phénomènes moléculaires ou atomiques fondamentaux.*

Aux très-petites distances, l'action de deux atomes a une expression bien plus complexe qu'aux distances mesurables, et cette expression est encore inconnue. On peut affirmer, toutefois, qu'elle y est incomparablement plus grande, qu'elle change de signe une ou plusieurs fois, de manière à être négative (ou *répulsive*) aux plus petites distances, positive (*attractive*) aux moins petites, enfin, qu'elle ne dépend pas d'une manière appréciable de l'existence ou de la situation des atomes qui sont à des distances perceptibles du couple dont il s'agit, condition nécessaire pour que les phénomènes physico-chimiques produits quelque part ne varient qu'avec l'état de la matière au même endroit, conformément à ce que montre l'observation.

Le rapide décroissement de l'action de deux atomes, dès que leur distance r grandit et devient sensible, ainsi que le changement de l'attraction en répulsion, quand la distance est au contraire très-petite, sont absolument nécessaires pour que les corps conservent leur individualité et puissent se rapprocher beaucoup les uns des autres tout en restant distincts.

Demandons-nous, par exemple, comment il se fait qu'un solide, posé sur le sol, s'y maintienne en équilibre sans adhérer. Il s'en rapproche pourtant bien assez pour que des attractions se développent entre eux; puisque le sol exerce sur ce corps une répulsion totale qui l'arrête dans sa chûte et qui continue à neutraliser son poids, et puisque, d'autre part, les répulsions moléculaires se produisent à des distances plus petites que les attractions analogues, destinées qu'elles sont à empêcher un trop grand rapprochement, de même que les attractions à empêcher de trop grands écartements. Il y a donc lieu de se demander pourquoi le rapprochement du corps et du sol, suffisant pour faire naître des répulsions énergiques, ne développe pas, à plus forte raison, des attractions équivalant à une cohésion sensible, et capables de retenir le corps dès qu'en le soulevant légèrement on ferait disparaître les répulsions.

Pour comprendre comment une telle cohésion ne se produit pas, il faut observer que les répulsions sont beaucoup plus énergiques, à masses égales, que les attractions. En effet, dans un solide homogène à l'état naturel (ou non comprimé), un plan quelconque, tracé à son intérieur, n'éprouve qu'une pression nulle ou insignifiante; cela suppose que, si l'on considère les forces exercées par la matière située d'un côté du plan sur celle qui est de l'autre côté, les répulsions, produites seulement par une couche mince de molécules contigüe au plan sur la couche pareille adjacente, font à elles seules équilibre aux attractions, qui sont incomparablement plus nombreuses sur chaque molécule de cette dernière couche et que supportent aussi bien d'autres couches moins rapprochées du plan. Donc, les attractions ont besoin de s'exercer entre des quantités de matière beaucoup plus grandes que les répulsions, pour les neutraliser.

Cela posé, notre corps solide, placé sur le sol, et toujours plus ou moins rugueux comme celui-ci, n'est en contact *physique* avec lui que par des saillies ayant de grandes courbures. Autour du point de contact de chaque plan tangent (apparent) commun, les répulsions sont presque en aussi grand nombre que si les surfaces du corps et du sol y étaient planes, tandis que les attractions, ne se produisant qu'entre molécules moins rapprochées, dont l'une au moins, sur deux, est quelque peu éloignée du point de contact, et n'ayant pourtant de valeur sensible qu'à des distances bien plus faibles que les dimensions des rugosités, sont loin de s'exercer en aussi grand nombre que dans le cas où les surfaces en question seraient planes. Les attractions se trouvent donc très-insuffisantes pour contrebalancer les répulsions.

Il n'en serait évidemment plus de même, si une pression énergique rapprochait assez les deux solides pour qu'il n'y eût entr'eux que peu de vides sensibles; alors les attractions entreraient en jeu au même degré que les répulsions et le corps adhèrerait au sol. C'est ce que prouvent les remarquables expériences de M. W. Spring, qui, en comprimant fortement des poussières de nitrate de potassium et de sodium, de la sciure de bois, etc., a obtenu des blocs durs, très-résistants, plus compactes que ceux que donnait la fusion (quand elle était possible), et, parfois, translucides même [1].

Les répulsions considérables auxquelles se réduit presque l'action des particules, en contact physique, de deux solides à surfaces plus ou moins rugueuses, peuvent rendre très-difficile un rapprochement, entre leurs molécules les plus voisines, suffisant pour mettre en jeu leurs actions chimiques réciproques, dont le rayon d'activité n'est, sans doute, comparable qu'aux dimensions même d'une molécule chimique. Ainsi s'explique l'adage des chimistes : « corpora non agunt nisi soluta. » Il serait, à ce sujet, curieux de voir jusqu'à quel point un morceau de sodium

(1) Voir une analyse de ces expériences au numéro du 15 août 1878 du journal *Les Mondes*, de M. l'abbé Moigno, (tome XLVI, deuxième série, p 845 à 848).

devrait être pressé contre un bloc de glace pour le décomposer (1).

Observons encore que les attractions chimiques entre atomes, s'exerçant à des distances incomparablement plus faibles que les répulsions physiques, sont probablement plus grandes qu'elles; et que les répulsions chimiques entre les mêmes atomes, répulsions qui contrebalancent les attractions chimiques dont il vient d'être parlé quoiqu'elles ne s'exercent qu'à des distances bien moindres, doivent être beaucoup plus considérables encore.

D'ailleurs, il faut que les forces chimiques, en général, soient excessivement grandes, presque infinies par rapport à la pesanteur, pour développer, dans les rapprochements ou écarts imperceptibles d'atomes qui constituent les phénomènes de combinaison et de décomposition, les travaux énormes mesurés par les chaleurs émises ou absorbées lors de ces changements de la constitution moléculaire d'un mélange.

Les oscillations que présente l'action $\varphi(r)$ de deux atomes (supposés seuls pour plus de simplicité), quand on y fait décroître la distance r de l'infini à zéro, paraissent donc avoir de plus en plus d'amplitude à mesure qu'elles se resserrent davantage; en sorte que les valeurs successives les plus petites de cette fonction $\varphi(r)$ représenteraient les attractions s'exerçant aux distances r sensibles, et qu'au contraire les valeurs les plus grandes, infinies mêmes, exprimeraient les répulsions que ferait naître un contact mathématique des deux atomes, s'il était réalisable. Ce mode de variation de $\varphi(r)$ n'a rien d'invraisemblable ni de compliqué (2).

(1) Je suppose qu'on porte le bloc de glace à une température notablement inférieure au point de fusion et même assez basse pour qu'il ne se dégage plus de vapeur d'eau en quantité sensible.

(2) Le plus simple, ce me semble, des fonctions où on l'observe est l'expression $\frac{1}{r}\sin\frac{1}{\varepsilon + r}$, dans laquelle je désigne par ε une constante positive dont l'inverse soit

5 — *Sur le principe de la moindre action.*

La loi d'*économie* ou de la *moindre action,* telle qu'elle est parfois utilisée dans des questions physiques réelles, consiste à admettre que des influences modificatrices, agissant sur un système matériel, y produisent à chaque instant, parmi toutes les transformations dont notre science imparfaite nous fait entrevoir la possibilité, celle qui exige la moindre dépense d'énergie étrangère ou qui provoque le plus grand dégagement d'énergie intérieure. Cette loi s'explique peut-être, suffisamment, par l'effet des vibrations incessantes qui ne manquent jamais d'agiter la matière, mais qu'accroît beaucoup une action extérieure appropriée. Effectivement, ces vibrations offrent en peu de temps, à un grand nombre d'arrangements plus ou moins stables, l'occasion de se produire, et ne peuvent guère, ce semble, laisser passer sans en amener la réalisation celui qui devient le premier possible à

compris entre un multiple impair de π, $(2k - 1)\pi$, et le multiple pair suivant, $2k\pi$. Quand r décroît de l'infini à zéro, l'arc $\frac{1}{\varepsilon + r}$ grandit de zéro à $\frac{1}{\varepsilon}$, et son sinus, d'abord positif, change de signe $2k - 1$ fois, de manière à être finalement négatif. Par suite, l'expression considérée, $\frac{1}{r} \sin \frac{1}{\varepsilon + r}$, d'abord sensiblement proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$, comme l'est $\varphi(r)$ aux distances sensibles, effectue bien ensuite un nombre impair d'oscillations simples, de plus en plus grandes et de plus en plus rapprochées, comme $\varphi(r)$, et se trouve également, à la limite $r = 0$, infinie négative comme $\varphi(r)$.

En réalité, la fonction $\varphi(r)$ doit être beaucoup moins simple que l'expression $\frac{1}{r} \sin \frac{1}{\varepsilon + r}$. Il faut surtout que ses variations soient incomparablement plus rapides encore, aux très-petites distances, et ses maxima ou minima beaucoup plus grands en valeur absolue, pour que les travaux, $\int \varphi(r)\,dr$, produits par d'insignifiantes variations de distance du couple d'atomes, expliquent, quant r est très-petit, les énormes changements éprouvés en même temps par leur vitesse relative.

mesure que grandit l'énergie communiquée au système. Le changement effectif observable se produit donc dans le sens, dit *de moindre résistance,* suivant lequel un effet apparent d'une certaine amplitude correspond, vu la constitution de l'ensemble moléculaire considéré, à l'effort le moins grand de la cause déformatrice. Et les mêmes vibrations, quand elles ont assez d'étendue, ne peuvent guère manquer non plus d'amener finalement le système matériel, une fois abandonné à lui-même, dans la situation la plus stable possible, dans celle où, après que s'est dissipée l'énergie dégagée lors de la transformation précédente, il n'en reste plus de disponible pour alimenter de nouveaux mouvements.

Le principe de la moindre action, ainsi compris, est fréquemment employé en chimie, surtout par M. Berthelot dans ses beaux travaux de statique chimique; la dépense ou l'acquisition d'énergie d'un mélange, au passage d'un état à un autre état, s'y évalue en général au moyen des quantités de chaleur cédées ou prises par le mélange au milieu ambiant. On l'utilise aussi, ou l'on pourrait du moins l'utiliser :

1° En hydraulique, dans la théorie de l'écoulement par un déversoir, et, plus généralement, dans toutes les questions d'écoulement où intervient ce que j'appelle la condition de stabilité du mouvement, d'après laquelle le débit effectif est le plus grand de ceux que comportent, vu l'équation des forces vives, la hauteur de charge donnée ou les dénivellations produites [1] ;

2° En plasticodynamique, c'est-à-dire dans l'étude de la déformation des corps ductiles, où il permet de prévoir, par exemple, si une pression suffisamment forte, exercée sur un bloc plastique d'une certaine épaisseur, produira,

1) *Essai sur la théorie des eaux courantes*, pages 120, 661, 571, 578 591.

soit l'écrasement du bloc, soit l'expulsion de sa partie centrale par un orifice sous-jacent(1);

3° Dans la mécanique des masses pulvérulentes, où fait connaître les modes d'équilibre les plus stables et les plus naturels d'un massif sablonneux, soutenu d'une manière déterminée(2);

4° Dans la dynamique des solides en mouvement qui en touchent d'autres, où il pourrait, ce me semble, permettre de distinguer les cas où il y a glissement des parties en contact d'avec les cas où il y a roulement, etc.;

5° Enfin, quoique probablement pour d'autres raisons, même en optique, où, si l'on considère toutes les ondes, d'une période déterminée, qui partent d'un centre lumineux et qui se rendent par des voies diverses à un point donné quelconque, les seules d'entr'elles qui subsistent en arrivant à ce point, c'est-à-dire qui ne s'y trouvent pas entièrement neutralisées par d'autres, sont, conformément aux opinions de Fermat et de Leibniz, celles qui emploient le moins de temps à faire le trajet ou qui suivent, en quelque sorte, la voie de moindre résistance.

Il n'est pas, d'ailleurs, très-facile de reconnaître les rapports que ce principe pratique de la moindre action doit avoir, en général, avec le théorème de mécanique rationnelle connu sous le même nom. Celui-ci, en effet, n'est démontré que pour des systèmes matériels purement fictifs; puisqu'on y suppose possible l'introduction de *liaisons* ne développant aucune résistance qu'il soit nécessaire de faire figurer dans la formule des vitesses virtuelles, comme s'il existait des courbes ou des surfaces sans frottement, des

(1) Voir le premier éclaircissement placé à la suite de mon *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui de massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion* (chez M. Gauthier-Villars, ou au *Recueil des savants étrangers de l'Académie Royale de Belgique*, tome XL).

(2) Voir le § VIII du même mémoire.

tiges parfaitement rigides, des fils sans raideur, inextensibles, et que les liaisons considérées fussent toujours réalisables au moyen de pareilles lignes ou surfaces, au moyen de telles tiges ou de pareils fils.

Le principe des vitesses virtuelles n'est, en quelque sorte, qu'une forme abstraite, dans laquelle on peut faire entrer tous les problèmes de mécanique, à la condition de joindre aux forces extérieures données des forces supplémentaires calculées juste en vue de rendre utilisable cette méthode de calcul. Par suite, toute démonstration où l'on néglige les forces supplémentaires est inapplicable à la réalité, même approximativement, à moins qu'il ne s'agisse de cas particuliers pour lesquels des considérations directes suppléeraient à l'absence ou à l'insuffisance de la démonstration générale.

Par exemple, dans le cas d'un point sans pesanteur[1], mobile sur une surface concave fixe et animé d'une certaine vitesse initiale, on peut admettre, ce semble, avec quelque approximation, que le point vient à chaque instant comprimer la surface comme il le ferait s'il se heurtait sous un petit angle contre le plan tangent à celle-ci; de manière à éprouver une résistance contenue dans le plan de la normale et de la vitesse actuelle, malgré la dissymétrie que la surface courbe présente en général de part et d'autre de ce plan. S'il en est ainsi, ce même plan, normal à la surface, coïncide avec le plan osculateur de la trajectoire, *courbe qui devient, dès lors, une ligne minima ou géodésique*, comme si la surface était infiniment polie ou n'exerçait qu'une réaction dirigée suivant sa normale. Mais le recours à l'observation serait nécessaire, pour justifier l'hypothèse faite touchant le mode de compression de la surface *courbe* par le mobile, et surtout pour

(1) Ou n'ayant qu'un poids négligeable, vu sa grande vitesse supposée d'où résulteraient, à cause de la courbure de la trajectoire, des réactions incomparablement plus grandes que ce poids.

reconnaître s'il est exact de calculer, comme on le fait d'ordinaire, le frottement, ou composante tangentielle de la réaction, d'après des expériences relatives à des mouvements de corps pesants sur des *plans*.

6. — *Sur le passage de l'abstrait au concret, dans les applications de l'analyse des mathématiciens aux réalités physiques.*

Même quand il s'agit des choses les plus à notre portée, je veux dire des formes qui se dessinent et des grandeurs qui se laissent exprimer par des nombres, l'imperfection de notre nature nous oblige très-probablement à altérer un peu les vraies notions des objets extérieurs, dans une mesure qui nous échappe. Par exemple, le géomètre ne peut s'empêcher d'assimiler les dernières particules de la matière à de simples points, ni de regarder l'espace et le temps comme divisibles à l'infini. Il n'est à l'aise, et ne se sent certain de ses affirmations, que lorsqu'il a porté les questions sur le terrain de l'analyse et de la géométrie abstraites, que lorsqu'il a substitué, aux quantités réelles, à l'espace et au temps réels, donnés seulement d'une manière imparfaite par l'observation, les quantités, l'espace et le temps que lui révèle avec une précision absolue sa faculté d'intuition idéale. Une position, dans l'espace, une époque dans le temps, ne lui paraissent donc pas suffisamment définies, tant que leurs dimensions n'ont pas décru jusqu'à zéro; et la distance de deux positions ou de deux époques, distance qui exprime leur rapport et qui est l'élément mesurable des phénomènes, n'a de sens net qu'autant qu'elle relie deux points sans étendue ou deux instants sans durée. Voilà pourquoi, notamment, le géomètre ne peut s'empêcher d'arriver jusqu'au point inétendu pour concevoir les éléments de la matière.

Cette transition du concret à l'abstrait est si naturelle, qu'elle reste presque toujours inaperçue. Par exemple, nous n'hésitons pas à dire égales deux quantités réelles (distances, volumes, temps, poids, etc.) entre lesquelles les sens ne nous montrent aucune différence marquée, quoique la réflexion nous apprenne qu'il est presque impossible que des quantités pareilles ne diffèrent pas véritablement quelque peu l'une de l'autre. Plutôt que de nous en tenir à la réalité stricte, et de traduire par la supposition d'une inégalité imperceptible le jugement que le témoignage des sens nous permet de porter dans de tels cas, nous ne voyons même pas d'abord cette supposition générale, qui a pour elle les plus grandes probabilités, et nous allons tout droit à l'hypothèse exceptionnelle, unique, d'une égalité extrêmement improbable *à priori*. Notre recherche de la simplicité en toutes choses, notre foi dans l'existence de quelque unité au sein de toute pluralité, nous fait donc, à notre insu, mettre à la place des quantités concrètes proposées certaines quantités idéales, entre lesquelles s'effectue la comparaison d'égalité que nous croyons n'établir qu'entre les objets donnés eux-mêmes. Et c'est ainsi que, remplissant l'univers physique de nos conceptions, nous transportons, presque sans nous en douter, dans un monde concret très-complexe et qui nous dépasse, les notions plus simples du monde géométrique perçu en toute clarté par notre raison. Heureusement, grâce à l'harmonie des divers ordres de choses, ou, si l'on veut, au degré déjà très-haut de notre adaptation au milieu qui nous voit naître, les faits justifient cette croyance à l'intelligibilité de la nature : ils montrent que l'univers physique a des lois, surtout des lois quantitatives, et que ces lois sont traduisibles mathématiquement comme les objets eux-mêmes, c'est-à-dire comportent des expressions analytiques aussi approchées que le sont des vrais objets leurs types géométriques idéaux, sous le rapport des formes et grandeurs mesurables : par suite, les expressions analytiques dont il s'agit ne diffèrent pas des relations mêmes qui régissent ces types et leurs transformations successives.

D'ailleurs, malgré les nuances, tenant aux bornes de notre esprit, qui différencient très-probablement les idées mathématiques que nous nous formons des choses d'avec leurs véritables objets, et qui, en particulier, doivent distinguer légèrement la continuité et la divisibilité des quantités réelles ou des formes réelles de celles des quantités ou des formes idéales, nous ne cessons pas d'être convaincus que nos conceptions abstraites des grandeurs et des figures peuvent exprimer les faits naturels, avec une exactitude très-supérieure à celle que comportent les meilleures expériences et la plus parfaite qui nous soit accessible. Aussi, ne sommes-nous conduits, par le bon sens, à trouver en défaut nos facultés mathématiques, que dans les plus extrêmes de leurs affirmations, comme lorsqu'elles nous font supposer les choses concrètes (espaces, temps, vitesses, etc.) divisibles à l'infini, à la manière des quantités idéales que nous leur substituons presque à notre insu. Et, même dans un tel cas, où notre répugnance à admettre la divisibilité du réel à l'infini nous empêche d'ajouter foi à leur assertion, il nous est absolument impossible de fixer la limite supérieure des erreurs qu'elles nous induisent à commettre; en sorte que nous sommes portés, tout à la fois, à affirmer l'existence de cette limite et sa petitesse infinie ou du moins inappréciable.

Aussi, faut-il, par exemple, que deux courbes qui ne concourent pas en toute rigueur abstraite soient *analytiquement asymptotes*, c'est-à-dire puissent s'approcher à des distances moindres que toute ligne finie donnée, pour que nous affirmions, sans hésitation, qu'elles se joignent *physiquement* ou qu'elles sont aptes à représenter toujours, dans leur application à des phénomèmes réels, un véritable raccordement.

A ce propos, j'observerai que si, en effet, aucune quantité concrète n'est indéfiniment divisible, l'attraction exercée sur un corps déterminé par un autre qui s'en éloigne de plus en plus doit enfin, après avoir décru autant que possible conformément à la loi de Newton, s'annuler en toute rigueur objective, quand la distance dépasse une certaine limite, non évaluable pour nous. Cette limite serait le véritable rayon d'activité de l'attraction des deux corps : sa mise en compte permettrait d'expliquer, de la manière la plus naturelle, comment, malgré l'immense étendue de l'univers et la valeur appréciable de la densité moyenne de la matière dans toute cette étendue, la pesanteur (ou *force de gravitation*) en chaque point de l'espace est toujours finie, et paraît même souvent très-petite par rapport aux actions exercées, à d'imperceptibles distances, entre des quantités de matière minimes. On sait, en effet, que la loi de Newton attribue à deux couches matérielles de même densité une égale attraction sur un atome donné, quand, vues de cet atome, elles présentent une égale surface apparente, ou occupent le même champ angulaire, et qu'elles ont, en outre, leurs épaisseurs égales dans les sens des rayons visuels ainsi menés. Cette loi n'est donc pas propre à faire tendre vers zéro, ou du moins vers une limite finie, l'attraction supportée par un atome, suivant une certaine direction, de la part de toute la matière très-éloignée qui se trouve à l'intérieur d'un petit angle solide ayant l'atome pour sommet et comprenant entre ses arêtes la direction considérée; vu que cette matière est décomposable, par des sections transversales, en un nombre illimité de couches d'épaisseur finie et de même grandeur apparente.

IV. — COMPLÉMENT A UN MÉMOIRE, PUBLIÉ EN 1878, SUR LA CONCILIATION DU VÉRITABLE DÉTERMINISME MÉCANIQUE AVEC L'EXISTENCE DE LA VIE ET DE LA LIBERTÉ MORALE[1].

1. — *Sur le caractère, scientifique et non métaphysique, de ce mémoire de 1878.*

Le mémoire que j'ai publié l'année dernière, sur la *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale*, a trouvé, d'une part, un accueil bienveillant et même en général l'approbation la plus expresse chez les philosophes, que préoccupaient depuis longtemps les difficultés auxquelles il répond. Mais, d'autre part, si des savants éminents en ont bien compris la pensée et ont aussi jugé sa publication opportune, plusieurs l'ont écarté, sous la prévention qu'il y serait fait un emploi des mathématiques en dehors de leur domaine légitime et à des questions pour lesquelles la plupart des hommes de science contemporains manifestent une vive antipathie. Ils ont pris, en d'autres termes, ce mémoire pour un travail de métaphysique, comme le

(1) Précédé d'un rapport de M. Paul Janet à l'Académie des Sciences morales et politiques, et extrait des mémoires de la Société des Sciences de Lille. — Se trouve à Paris, chez M. Gauthier-Villars.

titre qu'il porte, interprété d'une certaine manière, pourrait le faire penser. Avant d'exposer quelques réflexions qui me sont venues depuis et qui éclaircissent ou complètent diverses propositions de cet essai, je crois donc utile de montrer de nouveau qu'il n'est pas un travail de métaphysique, mais un travail de science, une simple étude physico-mathématique, sur une importante question de philosophie naturelle qui préoccupe, depuis deux siècles, un grand nombre d'esprits.

Que présentent de particulier, pour le mécanicien géomètre, ces curieux systèmes matériels qu'on appelle des organismes vivants? Si la vie, à ses divers états, est la manifestation d'un principe directeur spécial, comme l'affirme le bon sens et comme l'admettent Berzélius, Claude Bernard, Cournot, etc., comment ce principe directeur peut-il présider à la formation des organes et influer sur leurs mouvements sans créer ni détruire aucune énergie, sans disposer même d'aucune force proprement dite, mécanique, physique ou chimique, évaluable en poids ou par son travail, comme l'ont conclu de leurs expériences les plus grands physiologistes et chimistes contemporains? Telle est la question abordée dans ce mémoire de 1878. J'y en indique, et en développe pour les cas les plus simples, l'unique solution, constituée par des bifurcations de voies, c'est-à-dire par la multiplicité des intégrales qu'admettent dans des circonstances singulières, à partir d'un même état initial, les équations différentielles du mouvement de certains systèmes matériels.

De pareils cas existent, contrairement à une opinion généralement enseignée, depuis Leibniz, dans les cours de mécanique. Le mémoire dont il s'agit a justement pour but principal d'établir ce fait, d'en signaler des exemples simples, et de montrer que le principe de détermination qui doit alors suppléer à l'insuffisance des équations différentielles n'est pas une force au sens des géomètres, c'est-à-dire n'est pas une cause modifiant les accélérations des points du système [1].

Une certaine indétermination des intégrales, malgré la détermination complète des accélérations en fonction des situations relatives produites à chaque instant, serait donc le vrai caractère distinctif de la vie, conformément à ce qu'on sait touchant l'instabilité physico-chimique extrême, et inimitable ou caractéristique, des êtres vivants.

L'analyse ne peut actuellement examiner en détail, de ce point de vue, que des systèmes très-simples, infiniment moins complexes que n'est un organisme animé. D'ailleurs, elle se borne à déterminer les conditions mécaniques ou matérielles des phénomènes, à désigner les circonstances dans lesquelles surviennent des bifurcations de voies, sans qu'il lui soit permis, du moins encore, d'aborder le mode même d'intervention, pour chaque cas, du pouvoir directeur préposé à l'évolution des phénomènes vitaux. En d'autres termes, ce n'est que par le dehors que le calcul atteint les faits dont il s'agit : il en fixe simplement les limites, exprime des conditions nécessaires pour qu'ils se produisent. Cependant, dès ses premiers pas dans la voie nouvelle, il prouve à sa manière et il fait comprendre l'impossibilité pratique de la génération spontanée, ce

(1) Poisson avait déjà, en 1806, à propos d'études purement analytiques sur les solutions singulières des équations différentielles (*Journal de l'Ecole polytechnique*, XIIIe cahier, p. 100), trouvé l'exemple le plus simple d'une telle indétermination, dans le mouvement rectiligne d'un point dont l'accélération égale le produit d'une constante par la n^{me} puissance de l'abscisse. Il est vrai qu'il y déclare ne pas pouvoir s'expliquer cette *sorte de paradoxe* ; et c'est sans doute faute de lui avoir découvert aucune application possible au monde réel qu'il n'en a rien dit plus tard dans son *Traité de mécanique*. D'ailleurs, quoiqu'il eût appelé en 1806 toute l'attention des géomètres sur ce fait analytique remarquable, aucun de ses contemporains, ni de ses successeurs dans l'enseignement de la mécanique, n'a paru en avoir la moindre connaissance. La théorie exposée ici n'a même rien emprunté à l'analyse de Poisson, que j'ignorais complétement quand, persuadé *a priori* qu'il devait exister des solutions singulières en mécanique pour permettre d'expliquer les phénomènes vitaux, je trouvai toute la catégorie de ces solutions qui correspond à des points d'arrêt et qui comprend comme cas particulier très-simple l'exemple de Poisson

principe général qui domine toute la physiologie. Persistance en quelque sorte indéfinie (pour des conditions de milieu assez favorables) de la vie *une fois produite*, mais probabilité infiniment faible de première réalisation des circonstances physico-chimiques propres à l'apparition d'êtres vivants, tel est le double fait qui se révèle au géomètre dès l'étude d'un couple d'atomes.

2. — *Sur la place que fait la mécanique classique à des principes directeurs distincts des forces dont elle évalue les effets.*

Le point de départ de tout ce travail, bien loin d'être emprunté à la philosophie pure, est pris dans la mécanique et la physique classiques, telles qu'elles s'enseignent partout. Il consiste à admettre que les lois auxquelles obéit la matière brute s'expriment au moyen d'équations différentielles, ou, en d'autres termes, que la dérivée, par rapport au temps, de chacune des quantités dont dépend l'état d'un système de corps, est une fonction continue et parfaitement déterminée des valeurs actuelles de ces quantités mêmes. De l'avis unanime des géomètres, physiciens et chimistes, ce principe général régit les effets visibles ou calculables des énergies inconnues de la matière avec le plus haut degré de précision auquel nous puissions prétendre : il en donne la meilleure explication susceptible d'être formulée mathématiquement, la seule qui semble exacte dans la mesure même de la continuité avec laquelle paraît s'écouler le temps et avec laquelle paraissent varier toutes les quantités physiques fonctions de cette variable indépendante. Je n'aurais donc pu choisir pour mon étude une base plus solide, un point de départ moins contesté, ou laissant subsister, dans l'esprit, des traces moindres de ce doute que le sentiment profond de notre faiblesse nous impose dans toute recherche philosophique et même scientifique.

Si l'on voulait éluder cette grande loi, en la remplaçant par d'autres qui en différassent, d'une manière tant soit peu *appréciable*, non pas certes au point de vue de l'expérience — ce qui serait aller à l'encontre de tout le mouvement scientifique depuis trois siècles —, mais seulement au point de vue du calcul, on tomberait dans les mêmes difficultés, inextricables, que si l'on voulait *fixer* les nuances qui distinguent probablement la continuité objective des quantités, dans la nature, d'avec celle que conçoivent les mathématiciens. En effet, on serait conduit à interpréter les équations différentielles des phénomènes naturels comme des équations à très-petites différences finies, ou à admettre qu'elles donnent directement, en fonction des valeurs actuelles des quantités physiques (distances, vitesses, températures, etc.), les accroissements réels ultérieurs les plus petits de ces quantités et non pas, précisément, leurs dérivées. On supposerait donc les variations *dernières* des choses accessibles au calcul, évaluables à la manière des quantités abstraites, indéfiniment divisibles, du géomètre : hypothèse qui semble contradictoire, car elle présente comme physiquement élémentaire ce qu'elle affirme en même temps ne l'être pas, c'est-à-dire ce qu'elle évalue en nombre, et elle dénature le problème.

J'admets en outre que les lois physico-mathématiques, ainsi exprimées par des équations différentielles, s'étendent aux êtres vivants comme aux corps non organisés. Mon but est précisément de chercher quelle place ces lois, tout en s'appliquant sans restriction, laissent dans l'univers à des causes différentes de celles dont elles déterminent les effets, c'est-à-dire à des causes irréductibles aux forces que se représentent les mécaniciens. C'est bien, d'ailleurs, de cette manière que la question se pose dans les sciences biologiques. Car les recherches expérimentales les plus délicates, entreprises en vue de prouver que les énergies de la matière brute se heurteraient, chez les êtres vivants, à des forces d'une autre espèce et n'y produiraient pas tous leurs effets propres, ont été, au contraire, impuissantes à montrer aucune limitation de cette nature, aucune exception aux lois physico-chimiques. Celles-ci, autant que nous pouvons en juger, développent aussi pleinement leurs effets dans les organismes animés que dans les autres corps.

Et nous concevons qu'effectivement de véritables lois naturelles, comme sont sans doute les lois primordiales du mouvement, doivent régir tous les faits naturels sans exception. Il nous répugnerait, ou nous paraîtrait du moins bien peu satisfaisant, qu'elles fussent suspendues dans tout un ordre de phénomènes. Aussi, une pareille supposition, qui ouvrirait dans la science la porte à l'arbitraire, n'est jamais venue à l'esprit des plus grands philosophes, Descartes, Leibniz, etc.; et on ne devrait y recourir, pour l'explication des faits, que si la réalité infligeait un grave démenti à notre raison.

Or, c'est dans cet ordre d'idées que les solutions dites *singulières* des équations, et, plus généralement, toutes les bifurcations que comportent leurs intégrales, montrent la possibilité, l'existence même, de phénomènes mécaniques où subsiste aux yeux du physicien géomètre une certaine indétermination, de phénomènes dans lesquels il reste de la place pour des causes qui soient distinctes des forces physico-chimiques ou *qui, du moins, aient leur effet absolument distinct de l'effet connu de ces forces*. Il suffit que le mouvement d'un système matériel soit régi par les équations différentielles proposées, et qu'une indétermination ou bifurcation de voies se présente, pour qu'une pareille cause doive nécessairement y intervenir, sans apporter, bien entendu, aucun travail, sans modifier aucune accélération, mais avec la simple charge de diriger le système.

Il est naturel, vu le caractère spécial de ses effets, de distinguer une telle cause, au moins logiquement, des puissances mécaniques ordinaires : aussi, l'ai-je appelée *principe directeur*. Seule, elle serait absolument impuissante à produire le moindre mouvement; elle n'obtient ses effets qu'avec le concours des forces ordinaires de la matière.

Le nom de « puissance mécanique » ne pourrait donc lui convenir que d'une manière très-indirecte, puisque, tout en intervenant dans certains mouvements pour les diriger, elle n'en engendre aucun, c'est-à-dire ne fait naître, en un temps fini, aucune vitesse ou composante de vitesse.

Ainsi, c'est l'essence même des lois physico-chimiques, ou du moins leur expression universellement admise, telle qu'elle est enseignée dans tous les cours, qui conduit à reconnaître des bornes à l'empire de ces lois, à concevoir une classe de mouvements naturels qu'elles sont impuissantes à déterminer. Une pareille conclusion, bien que pouvant être basée sur l'observation exclusive des faits de la nature inorganique, n'a rien d'illégitime; car il est possible, sans sortir du champ de ces faits, d'en explorer les limites et de prouver qu'il y a, au-delà, place pour un autre ordre de phénomènes.

L'analyse mathématique appliquée à la mécanique des corps bruts ne peut pas, il est vrai, nous faire franchir les limites qu'elle constate, c'est-à-dire nous introduire dans le domaine qui est au-delà et nous apprendre les faits réels qu'il comprend. On concevrait même, si la nature nous offrait uniquement des êtres sans vie, que nous fussions tentés de nier la réalité de ce domaine extra-physique ou des limites ainsi reconnues. Alors nous pourrions essayer d'expliquer leur apparition dans la science par l'imperfection de notre esprit, par l'existence de nuances, imperceptibles pour nous, qui distingueraient légèrement les véritables lois physico-chimiques d'avec leurs expressions mathématiques reçues et qui, au lieu d'ôter quelque chose à la rigueur de nos équations différentielles, réputées pourtant si inflexibles, compléteraient au contraire leur déterminisme.

Mais les données de l'expérience, telles qu'elles s'offrent au sens commun, viennent sur ce point en aide au calcul: car elles permettent d'ériger en axiome que la vie est irréductible aux énergies des corps bruts et que les êtres organisés, en qui elle se révèle, constituent avec ces corps la totalité des choses visibles. Donc, sans autre preuve et sous peine de s'abandonner irrémédiablement à un scepticisme déraisonnable, on a le droit de dire que ce sont précisément les êtres vivants qui remplissent la lacune signalée, ou, du moins, qu'ils y trouvent leur place. Cette hypothèse est seule fondée en droit, seule conforme à l'expérience, surtout dès qu'il est reconnu que la supposition contraire d'un déterminisme mécanique absolu, déjà condamnée par le bon sens, ne peut nullement s'appuyer sur les lois physico-chimiques.

3. — *Les phénomènes que présentent les êtres vivants sont explicables de deux manières différentes par ces principes directeurs.*

Toutefois, on peut adopter deux opinions différentes au sujet des principes directeurs, comme je l'ai dit au numéro 25 du mémoire (p. 130).

La plus simple et, ce me semble, la plus logique, consiste à admettre que les forces physico-chimiques sont nécessairement bornées au rôle qu'on leur connaît et qui consiste à déterminer à tout instant les accélérations des atomes en fonction de leurs situations relatives actuelles.

Alors la charge de pouvoir directeur sera toujours dévolue à une cause supérieure, telle que la *vie* et la *volonté*. Je ne vois pas que cette hypothèse, toute hardie qu'elle puisse paraître de nos jours, soulève aucune difficulté philosophique sérieuse, quoiqu'elle fasse du monde inorganique un monde incomplet, incapable de se suffire toujours à lui-même, et de la vie un principe d'action parfois nécessaire. En effet, n'est-il pas très-conforme au bon sens de penser que les êtres vivants sont aussi naturels que les corps bruts, malgré leur caractère d'êtres relativement exceptionnels ou singuliers, et que leur existence est indispensable à la perfection et à l'harmonie de l'univers ?

Mais, comme les forces de la nature nous échappent absolument dans leur essence, il n'est pas non plus inadmissible que celles de la matière brute puissent jouer quelquefois aussi le rôle de principe directeur, pourvu qu'elles ne s'en acquittent pas toujours et qu'elles laissent à la vie, sous toutes ses formes, sa place obligée, reconnue par le sens commun. Il est clair que, même dans cette seconde opinion, aucune force finie, évaluable dynamométriquement, ne serait nécessaire pour conduire, aux points de bifurcation, la matière suivant des voies différentes de celle qu'elle prendrait d'elle-même. Donc les actions vitales n'auraient besoin d'atteindre aucune intensité analytiquement évaluable pour neutraliser les forces physico-chimiques dans le rôle de principe directeur, en admettant du moins, comme tout le monde, que les mouvements se font avec continuité, que les vitesses ne changent pas par sauts brusques : hypothèse en dehors de laquelle notre raison, transportée au milieu des différentielles inconnues du temps et des choses, hésite et se trouble.

Et si, au contraire, cette continuité n'existant pas, les véritables lois physico-mathématiques s'exprimaient plutôt par des équations déterminant les plus petits changements réels (supposés finis) que par les équations différentielles connues et acceptées de la science, les quantités, très-petites, qui différencieraient alors les variations élémentaires de vitesse, dans une solution singulière, d'avec les variations pareilles dans chacune des solutions particulières qui s'y joignent, devraient être supposées purement fictives ou abstraites, autant que nous pouvons en juger : car elles seraient incomparablement moindres que les plus petites quantités réelles ou réalisables dans les conditions considérées, puisqu'elles se trouveraient d'un ordre de petitesse supérieur à l'ordre de ces quantités, c'est-à-dire à l'ordre des variations élémentaires mêmes des vitesses. Les forces vitales n'auraient donc encore besoin d'atteindre aucune valeur dynamométrique *objective*, autant qu'il nous est permis d'affirmer quelque chose en pareille matière, pour s'emparer de la direction du mouvement aux bifurcations de voies indiquées par l'hypothèse de la continuité.

On voit que les réunions et bifurcations d'intégrales paraissent bien appartenir à ces catégories d'idées ou de faits que les changements de point de vue peuvent transposer, mais qu'ils n'éliminent pas, et que l'on retrouve toujours sous quelque forme qu'on ait traduit la pensée.

La seule différence qu'il y aurait, entre ce mode d'explication et celui où l'on regarde les équations différentielles comme exprimant tout ce que peuvent l'inertie et les forces physico-chimiques, consisterait donc en ce que, dans celui-ci, le principe directeur aux bifurcations est considéré, à cause du caractère spécial de ses effets, comme une cause essentiellement distincte, et qualifié de *principe de vie*; tandis que, dans l'autre opinion, la direction du mouvement aux bifurcations serait confiée, suivant les cas, ou à un principe vital, ou simplement aux puissances ordinaires de la nature inorganique, qui joindraient exceptionnellement cette fonction à leur fonction habituelle de *régulatrices des accélérations*. Des lois spéciales, encore inconnues, règleraient les rôles respectifs des énergies physico-chimiques et des principes directeurs plus élevés, dans le domaine mixte où les unes et les autres interviendraient tour à tour. Les circonstances d'état initial, pour lesquelles les équations du mouvement admettent des bifurcations d'intégrales, resteraient toujours des conditions nécessaires à la vie : mais elles ne seraient plus suffisantes pour que la vie jaillît infailliblement par le fait de leur réalisation.

4 — *La théorie qui réduit la vie et la volonté à de simples principes directeurs n'est que la forme la plus épurée de l'ancienne hypothèse des forces vitales.*

Enfin, l'explication des phénomènes vitaux au moyen des bifurcations d'intégrales, toujours avec cette restriction que le pouvoir directeur pourrait être exercé au besoin par les puissances physico-chimiques, subsisterait même dans le cas où l'on tiendrait absolument à conserver l'hypothèse des forces vitales. En effet, l'expérience des physiologistes obligerait de n'attribuer à ces forces vitales que de très-petites valeurs, de l'ordre de celles qui échappent à l'observation. Elle les ferait, en particulier, supposer impropres à développer des travaux appréciables, comme en produisent, notamment sous forme de chaleur, les actions atomiques et moléculaires lors de modifications et réactions chimiques même très-faibles ; en sorte qu'il serait difficile de ne pas les regarder comme bien moindres que les actions ordinaires s'exerçant entre atomes. Or, de telles forces vitales ne peuvent amener des effets sensibles que dans des systèmes dont l'état physico-chimique est presque instable, ou extrêmement peu différent d'un état d'indétermination mécanique parfaite. Donc, les solutions singulières (proprement dites ou simplement asymptotes), les bifurcations et réunions d'intégrales, conserveraient toute leur importance, puisqu'elles fourniraient les repères naturels pour déterminer certaines conditions nécessaires d'existence des êtres vivants et feraient même connaître ces conditions avec une approximation pratiquement équivalente à l'exactitude.

Ainsi, l'opinion qui consiste à admettre de très-petites forces vitales ne paraît pas différer sensiblement, quant aux explications qu'elle pourrait permettre de donner des phénomènes observables, de celle qui réduit la vie et la volonté au rôle de simples principes directeurs. Le géomètre qui la partagerait pourrait toujours, au point de vue analytique, ou *à titre d'hypothèse simplificatrice n'altérant pas les résultats d'une manière appréciable*, accepter l'opinion contraire qui annule ces forces; tout comme il assimile les atomes à de simples points, qualifiés par lui de *points matériels*, pour ce simple fait que leurs dimensions (s'ils en ont réellement) sont imperceptibles et paraissent être beaucoup plus petites que les distances d'atomes voisins.

Il serait d'ailleurs bien inutile, aux partisans respectifs de l'une et de l'autre opinion, de se critiquer mutuellement pour de légères nuances, que l'imperfection de nos moyens de connaître rendrait à peu près insaisissables et qui ne correspondraient peut-être même à rien de réel hors de nous, mais seulement à des différences subjectives de point de vue. En effet, dans l'ordre d'idées dont il s'agit, il n'y a pas jusqu'à la distinction entre les qualifications de « conditions suffisantes pour que la vie surgisse » et de « conditions simplement nécessaires », appliquées aux circonstances amenant une indétermination mathématique de voies, qui ne puisse être fictive ; car il y a toute probabilité que les circonstances en question ne sont jamais réalisées en dehors des êtres vivants et qu'il existe par suite une corrélation *physique* constante entre ces circonstances et la présence de la vie.

L'hypothèse exposée dans mon mémoire de 1878, ou d'après laquelle la vie et la volonté interviendraient dans le monde à la manière de simples principes directeurs, est donc comme la forme la plus pure ou le fond même de l'antique et respectable supposition des forces vitales. C'est, en quelque sorte, sa dernière évolution possible, son essence vraie, dégagée des éléments étrangers que les progrès de la science devaient en élaguer tôt ou tard.

La seule opinion réellement inconciliable avec la théorie que j'ai exposée est celle où l'on admettrait des forces vitales comparables, pour l'intensité, aux forces mécaniques, physiques ou chimiques ordinaires, des forces vitales capables, en un mot, de produire chez les êtres animés des mouvements en contradiction avec ceux qui, pour les mêmes circonstances, résulteraient des réactions mutuelles de leurs organes. Mais les partisans d'une telle opinion, s'il en existe, devraient expliquer de leur point de vue comment il se fait que la vie la plus robuste soit si délicate, à la merci de mille agents inférieurs, astreinte à des besoins continuels de respiration, de nutrition, etc.; et pourquoi, si la volonté, par exemple, est au-dessus des nécessités physiques ou assez puissante pour neutraliser directement les lois naturelles, elle a constamment besoin d'un organisme en bon état pour agir? Pourquoi il ne lui arrive jamais d'animer et de mettre en mouvement des minéraux inertes, tels que des cailloux? (1)

(1) Le R. P. Carbonnelle, dans un article tout récent, inséré à la *Revue des questions scientifiques* de Bruxelles (numéro de juillet 1879) et dont il a eu l'obligeance de me communiquer une épreuve, se montre résolument partisan de l'opinion critiquée ici. Il y émet l'espoir que les physiologistes pourront bien, de nos jours même, réussir à mesurer au dynamomètre les forces que, d'après lui, tout agent volontaire crée directement et introduit dans le monde en les appliquant à certaines cellules du cerveau qui lui est uni.

Le savant P. jésuite se sert ingénieusement de ces actions, que l'agent volontaire exercerait sur les atomes cérébraux et varierait jusqu'à ce qu'il eût surmonté les résistances opposées à des mouvements voulus par lui, pour expliquer comment le *moi* parvient à acquérir quelque connaissance des phénomènes du monde extérieur, sans avoir eu d'abord

5. — *Sur la persistance de l'indétermination physico-chimique chez les êtres vivants.*

Au numéro 18 du mémoire, j'ai montré comment, dans le plus important et le plus concret des cas d'indétermination mécanique que j'ai pu traiter en détail par le calcul, savoir celui qui concerne le mouvement de deux points soumis uniquement à leur action mutuelle ou supposés seuls dans l'univers, les bifurcations se reproduisent indéfiniment pourvu qu'elles se soient présentées une fois. Il y a donc

— à ce qu'il suppose — aucune autre notion à ce sujet que celle de son propre effort. Doué ainsi d'une connaissance immédiate de l'effort qu'il déploie à chaque instant, le moi jugerait, par cet effort même, des actions physiques qui lui résistent et indirectement des rapports, corrélatifs à ces actions, du cerveau avec les organes ou avec le reste du monde matériel. Mais il paraît bien difficile d'admettre que l'agent volontaire puisse exercer un effort quelconque avant d'avoir été préalablement éveillé par quelque sensation. Parvînt-il à sortir de son sommeil primitif tout spontanément, ou quoique complétement sourd aux excitations extérieures, il devrait d'abord, ce semble, commencer par voir ou du moins pressentir quelque chose de l'existence de ses organes, pour qu'il lui vînt, en quelque sorte, l'idée de les modifier, d'agir sur eux. Donc, je crois à tous égards plus satisfaisant de supposer le moi immédiatement uni au cerveau d'une double manière, et quant à sa faculté de connaître, et quant à celle d'agir, c'est-à-dire de mouvoir, ou simplement de *diriger* (acte auquel le sentiment d'*effort* correspondrait peut-être plus directement qu'aux tensions nerveuses et aux contractions musculaires qui s'ensuivent), sans qu'aucune des deux manières soit réputée plus essentielle que l'autre. S'il fallait assigner quelque antériorité à l'un des deux éléments, perceptif ou intellectuel et actif ou volontaire, dont se compose le lien qui unit le moi au cerveau, c'est sans doute l'élément perceptif qui serait jugé le plus ancien quant à l'ordre d'évolution. Il semble donc inévitable d'attribuer à l'agent volontaire un certain sentiment immédiat de l'état de ses organes, en même temps qu'un pouvoir sur eux.

D'ailleurs, comment le moi, s'il était d'abord totalement étranger à la connaissance de son corps et, par suite, de tout l'ordre matériel, pourrait-il jamais passer de la notion d'effort pur, qu'on lui attribue en propre, mais dont l'objet est tout interne ou n'a rien de géométrique, à la notion du mouvement et à celles de *direction linéaire* et puis *d'espace*, visiblement irréductibles à l'idée de cause? Celle-ci ne peut donc pas être supposée l'unique point de départ de tout le développement intellectuel relatif au monde physique.

Le lecteur trouvera aux numéros 5, 6 et 7, ci après, la réponse à diverses objections que le R. P. Carbonnelle oppose, dans le même article de la *Revue des questions scientifiques*, à la théorie des principes directeurs.

persistance de l'instabilité, dès que celle-ci a eu lieu un seul instant : circonstance qui exige, il est vrai, pour se réaliser, que la constante des forces vives reçoive certaines valeurs déterminées, c'est-à-dire que l'état initial vérifie une relation spéciale où paraissent la distance des deux atomes et leur vitesse relative. En étendant ce résultat, par analogie, au cas analytiquement inabordable d'un système matériel quelconque, on est porté à penser que certaines relations, entre les situations et les vitesses des atomes, doivent de même y être satisfaites pour que l'indétermination survienne, mais qu'alors celle-ci peut, dans un grand nombre de circonstances, se conserver indéfiniment d'elle-même. L'analyse confirme de tous points cette induction pour des cas extrêmes, accessibles au calcul et étudiés aux numéros 12 à 16, mais malheureusement hypothétiques, où un seul des atomes serait animé de mouvements sensibles. D'ailleurs, dans l'application d'un tel principe aux êtres vivants, il ne faudrait pas manquer de regarder comme faisant partie du système ce que j'appelle au numéro 11 (p. 64) « le milieu ambiant », c'est-à-dire l'immense ensemble de tous les êtres qui sont effectivement, d'une manière quelconque, en rapport avec un organisme, et dont l'action sur celui-ci varie à chaque instant en fonction de leur état, mais surtout en fonction de l'état de l'organisme lui-même.

C'est ce que j'ai observé assez longuement au numéro 21, sous le double point de vue mathématique et expérimental, dans la mesure que me semblait comporter l'imperfection de notre science. Toutefois, à cause de l'importance du sujet, on voudra bien me permettre d'ajouter ici quelques réflexions.

Il faudrait donc, dans une étude analytique rigoureuse des mouvements auxquels la vie coopère, considérer les organismes où elle réside comme composant un même système général avec tout le milieu matériel qui les entoure.

Les êtres vivants seraient, dans ce vaste ensemble, les groupes spéciaux d'atomes, sans cesse changeants, qui se trouveraient le siége d'une indétermination mécanique et qui, en même temps, grâce à une merveilleuse structure et à des enveloppes protectrices appropriées, ne recevraient le contre-coup des changements extérieurs que sous une forme inoffensive pour la persistance de leur instabilité.

Rien n'oblige, d'ailleurs, à supposer que l'indétermination dont il s'agit doive résider à la fois ou se produire spontanément dans toutes les parties du système matériel considéré, pour y être possible quelque part. Il suffit que les dispositions et les vitesses de l'ensemble des atomes soient compatibles avec son existence en des endroits spéciaux, qui seront les seuls où les bifurcations se feront *immédiatement* sentir ou relieront des voies *rapidement* divergentes, c'est-à-dire les seuls qu'occupera une matière animée. De là, l'indétermination rayonnera peu à peu tout autour, en ce sens que les êtres où elle siége produiront directement, sur leurs organes, et indirectement, sur la matière qui en est voisine, des effets que ne contiennent pas d'une manière expresse les équations différentielles.

En d'autres termes, pour admettre, dans le mode d'explication exposé ici, l'existence continue d'êtres vivants, il n'est nullement nécessaire de supposer que l'état initial de l'univers ait été réglé d'après les conditions, infiniment particulières sans doute, qui seraient propres à y produire une indétermination mécanique ayant son siége partout. Il ne serait pas impossible au contraire que, étant donné au hasard tout mode d'état initial d'un aussi vaste ensemble, l'indétermination y existât d'elle-même en des points spéciaux, susceptibles de se déplacer plus ou moins dans la suite des temps sans disparaître jamais. Là se trouveraient les seuls êtres doués d'instabilité physico-chimique, les seuls, en particulier, qui jouiraient du pouvoir de se déterminer librement et par lesquels entrerait dans le monde la part de contingence que nous y observons.

Il y a donc, chez les êtres organisés, des conditions de vie profondément différentes de celle que l'analyse nous a fait connaître pour le cas d'un simple système de deux atomes. Malgré la délicatesse extrême de ces êtres et leurs besoins incessants, l'instabilité physico-chimique, qui est certainement excessive dans tous leurs tissus — vu que le physiologiste l'y observe à un degré dont la nature morte n'offre pas d'exemple —, doit pouvoir se soutenir pendant le cours de leur existence, nonobstant tous les changements assez modérés qui surviennent dans le milieu environnant. Au contraire, l'intervention d'un pareil milieu détruirait cette instabilité, chez un couple de points matériels disposés pour la présenter quand chacun d'eux n'est en rapport qu'avec l'autre.

6. — *Des moyens de défense ou de conservation de la vie.*

Mais quels sont au juste les moyens dont la vie dispose pour préserver de toute atteinte, pour conserver, dans l'organisme ou dans la série d'organismes qu'elle anime, l'instabilité constante sans laquelle il lui serait impossible de se manifester? L'observation nous permet seulement, comme je l'ai dit au numéro 11 du mémoire (p. 65), de pressentir que les perturbations, dues aux échanges d'énergie entre les organes et les fluides qui y circulent ou entre l'organisme entier et le dehors, sont exactement compensées, dans leurs effets capables de compromettre l'instabilité, par des échanges simultanés de matière. Ces derniers échanges se règlent avec une admirable précision, ou en rapport *parfait* avec les besoins de chaque instant, *d'après les équations même de la mécanique, desquelles résulte justement, pour les cas considérés, la persistance indéfinie ou quasi-indéfinie de l'indétermination.* En effet, si l'on conclut, par analogie, du cas de deux atomes au cas d'un système plus complexe, on concevra que telles conditions d'état initial, qui sont propres à y faire apparaître une fois l'indétermination mécanique, astreignent celle-ci à s'y représenter sans fin, de manière qu'aucune des voies, infiniment diversifiées et contingentes, ouvertes devant le système, ne puisse, pour ainsi dire jamais, le dégager de cette indétermination.

Par exemple, en un point où la vitesse tendrait à s'accélérer, un accroissement de la masse, produit aux dépens d'une matière ambiante plus calme, lui conserverait la valeur convenable; à l'inverse, un ralentissement serait évité au moyen d'une perte de masse, etc. Tous ces échanges se feraient et se règleraient, en quelque sorte, automatiquement, de même que les accélérations se produisent avec une précision absolue pour des situations relatives données et justement en conséquence de ce fait fondamental de la mécanique.

Sans doute aussi, quand un choc modéré, ou toute autre action analogue, s'exerçant à fort peu près avec la même intensité sur un nombre immense de particules matérielles et imprimant surtout une translation commune aux diverses parties de chacune d'elles, vient déranger entre certaines limites les situations réciproques et les vitesses relatives des éléments d'une même cellule, l'influence des fluides qui la baignent ou celle des autres cellules plus intérieures y rétablit facilement l'instabilité physico-chimique, qui ne s'y trouve altérée que très-peu. C'est ainsi que, dans le phénomène de l'assimilation, les aliments végétaux et animaux reviennent aisément à la vie qui les avait à peine quittés, ou l'entretiennent bien mieux que les aliments minéraux, dont certaines plantes seules, tout au plus, pourraient se contenter.

Comme un fluide se déforme sous le moindre effort et passe avec une extrême facilité de chacun de ses états moléculaires (très-peu stables, il est vrai) à d'autres voisins, de même dirait-on qu'une matière récemment abandonnée par la vie est encore à demi-vivante, ou jouit d'une grande aptitude à se remettre, en quelque sorte, dans l'état d'équilibre mobile propre à la vie, sous l'influence assimilatrice d'un être qui la possède actuellement.

A plus forte raison, les variations qu'éprouve d'un instant à l'autre la pesanteur aux divers points d'un organisme, par suite des changements de position des astres et autres corps, ou des mouvements propres de l'organisme considéré à la surface de sa planète, doivent-elles ne produire sur les conditions d'existence et d'instabilité intérieure de celui-ci que des changements compensés à l'instant, si même on doit leur accorder toujours une valeur *concrète*.

Il est bon d'observer, à cette occasion, que la mise en compte de petites forces perturbatrices, dans le problème des solutions singulières que comportent les équations de mouvement d'un système, ne doit généralement modifier que peu les intégrales particulières de ces équations et, par suite, leurs lieux de réunion et de bifurcation, qui sont les solutions singulières cherchées. En effet, elle laisse les solutions singulières obtenues à une première approximation presque *en contact* avec les véritables intégrales particulières; en sorte qu'une légère transformation de ces solutions singulières approximatives doit les rendre exactes ou les maintenir en contact rigoureux avec les intégrales particulières. Un calcul approché des réunions et bifurcations d'intégrales, pour les points matériels qui occupent une certaine région de l'espace de grandeur modérée, peut donc se faire en négligeant l'influence des points non compris dans la région dont il s'agit, ou en la réduisant au changement qu'elle introduit dans la pesanteur. Or, celle-ci, sensiblement constante pour toute la région, imprime une translation commune aux points qui s'y trouvent et n'influe pas directement d'une manière appréciable sur leurs mouvements relatifs.

Ainsi, la recherche des solutions singulières ne paraît pas exiger plus d'exactitude, dans les formules, que celle des intégrales particulières : pour les unes comme pour les autres, l'approximation obtenue sur les intégrales est sans doute proportionnée à la petitesse même des termes négligés dans les équations différentielles.

7. — *Dernières réflexions sur le même sujet.*

Qu'on me permette d'ajouter encore quelques réflexions en réponse à des objections, se rattachant au sujet traité ici, qui ont été soulevées dans la *Revue des questions scientifiques* de Bruxelles (janvier et juillet 1879) par le savant et spirituel P. Carbonnelle.

Il ne semble guère possible, dans l'état actuel de la science, de fixer exactement le sens et la portée de la principale de ces objections, qui est celle même d'instabilité, déjà abordée ci-dessus de la manière qui m'a paru la plus satisfaisante (1).

Si, en général, dans un système matériel d'un nombre donné n de points, les bifurcations de voies se produisaient

(1) L'objection *d'instabilité*, telle que l'avait formulée d'abord le P. Carbonnelle dans la *Revue des questions scientifiques* de Bruxelles (janvier 1879), n'atteignait pas précisément mon explication, mais une autre un peu différente, dont je ne l'avais sans doute pas assez expressément distinguée, et dans laquelle on croirait pouvoir, en toute rigueur, traiter à part le problème des mouvements d'un organisme et des corps qui l'avoisinent le plus sans regarder leur ensemble comme composant un même système général avec le monde extérieur. Alors les actions négligées produiraient inévitablement des perturbations, non prévues par le calcul et qui en rendraient inapplicables les résultats, si l'on admet du moins, quoique ce ne soit pas encore absolument prouvé, que les cas d'indétermination mécanique sont toujours isolés ou n'ont, en un endroit donné de l'espace, qu'une probabilité infiniment petite de réalisation.

Quant à de pareils cas d'instabilité (ne concernant que des systèmes partiels *fictivement* isolés du reste des corps) ou encore à ceux qui pourraient survenir *tout-à-coup* au milieu du monde minéral et qui, par suite, *n'appartiendraient pas à la catégorie des bifurcations essentiellement périodiques ou reproductibles un nombre indéfini de fois*, pour des conditions d'état initial quelconques ou très-peu spécifiées, on ne comprendrait guère pourquoi elles sont absentes de tous les problèmes partiels de mécanique physique (simplement approximatifs, il est vrai) qui ont été traités jusqu'ici, et il serait également difficile de s'expliquer comment leur réalisation, dans le cas particulier abordable $n = 2$, exige que l'état initial satisfasse à une relation déterminée. Donc, il est éminemment probable que les circonstances initiales doivent présenter quelque chose de particulier, dans un système d'un nombre donné quelconque n de points, pour que l'indétermination mécanique y survienne; et l'analogie porte à penser qu'alors les bifurcations pourront se renouveler *indéfiniment*, du moins chez certains systèmes et sous certaines conditions, comme il arrive dans un couple d'atomes.

Mais en quoi consisteraient les caractères spéciaux distinguant ces circonstances, propres à amener une indétermination mécanique soit temporaire, soit indéfinie? Combien faudrait-il, pour les exprimer, de relations distinctes? De quelle nature seraient celles-ci et appartiendraient-elles même aux catégories de relations dont les géomètres ont une idée claire, telles que les équations algébriques ou transcendantes? Combien de groupes atomiques, dans le système, conserveraient-ils les uns à l'égard des autres une certaine indépendance, tout en pouvant être astreints

j'admets, avec le P. Carbonnelle, qu'on peut en faire abstraction. Il est permis de les regarder comme purement hypothétiques, ou de les écarter, au nom d'un grand principe de stabilité du mouvement dont je fais, de même que lui, très grand cas, vu qu'on le rencontre dans l'étude de plusieurs problèmes concrets. J'espère même en avoir démontré la réalité et l'importance pour les questions les plus utiles de l'hydrodynamique (*Essai sur la théorie des eaux courantes*, p. 120, 661, 571, 647). Et, en effet, l'extrême improbabilité que présente la première réalisation de cas d'indétermination pareils s'accroît, dans un rapport énorme, à raison de cette circonstance que, rien n'étant prêt pour y faire subsister l'instabilité mécanique, celle-ci a toute chance d'être détruite sans aucun retard par les causes perturbatrices innombrables dont le monde est plein.

Je profite de l'occasion pour remercier le R. P. Carbonnelle de la bienveillante appréciation qu'il a faite d'ailleurs de mon travail, surtout au point de vue des résultats mathématiques nouveaux qu'il contient.

à présenter quelque chose de constant dans les voies infiniment variées qui s'ouvriraient devant eux, c'est-à-dire tout en suivant une certaine règle plus ou moins large, propre à faire subsister, ou pour un temps, ou toujours, l'indétermination du système? En d'autres termes, combien d'organismes vivants, *d'individus distincts*, seraient-ils possibles dans un même milieu d'une étendue et d'une composition données, sans se nuire mutuellement (comme il arrive en effet sur notre terre quand leur nombre quelque part dépasse certaines limites)? Ce sont là tout autant de questions absolument inabordables, et dont la solution analytique serait cependant nécessaire pour étudier à fond le problème de la persistance ou de la non-persistance de l'instabilité, pour comprendre comment, dans mon essai de théorie, cette instabilité peut tout à la fois être parfaite, multiple quant aux groupes distincts où elle réside, et, néanmoins, se conserver.

En attendant, l'hypothèse qui réduit la vie et la volonté, dans l'ordre physique, à de simples principes directeurs, repose sur la plus solide des bases, sur la nécessité de faire à ces agents supérieurs leur place sans porter atteinte au grand principe de la généralité absolue des lois du mouvement.

A ce propos, il faut se garder de généraliser une circonstance qui se présente dans le mouvement curviligne d'un point autour d'un centre d'attraction fixe. Le principe des aires permet de ramener le calcul d'un tel mouvement à celui des déplacements successifs du point mobile le long de son rayon vecteur, et, d'autre part, dans ce mouvement relatif rectiligne, l'accélération se trouve être, pour chaque valeur de la constante des aires, une fonction déterminée du rayon vecteur lui-même. On en déduit aisément que les trajectoires singulières sont des cercles, complétement définis dans chaque cas, et que toutes les trajectoires particulières possibles, tangentes à ces cercles, constituent en même temps une famille déterminée de lignes planes, dont deux tout au plus passent par chaque point du plan pour servir, l'une, aux évolutions qui se font en s'éloignant du centre, l'autre, à celles où le point mobile se rapproche, au contraire, du centre. Donc, on peut dire que *les trajectoires sont alors tracées dans tout le champ des mouvements*, et il est permis, pour reposer l'imagination, de se les figurer comme des routes, ou mieux comme des tuyaux rigides infiniment étroits, formant un réseau dont le point mobile ne pourrait jamais sortir.

Mais une pareille détermination des trajectoires possibles est due à cette circonstance *exceptionnelle* (rendant justement le problème intégrable), que l'une des deux coordonnées du mobile, l'angle polaire, peut s'obtenir, pour chaque instant, par une simple quadrature en fonction des valeurs successives de l'autre, qui est le rayon vecteur; de sorte que cette dernière coordonnée reste la seule que régisse une équation différentielle du second ordre, comme s'il s'agissait du mouvement d'un point le long d'une ligne connue. En général, dans un système matériel quelconque, il n'en est pas ainsi. La trajectoire décrite par chaque point, à partir d'un moment donné, y dépend des coordonnées actuelles et des vitesses actuelles de *tous* les points du système. Dès que des bifurcations de voies se présentent et que l'indétermination atteint directement plusieurs coordonnées, une multiple infinité de chemins différents peuvent, même pour les mobiles qui n'ont pas ces coordonnées, devenir possibles en chaque point de l'espace. On n'a donc plus le droit de regarder comme tracées d'avance, *une fois pour toutes*, ni les trajectoires particulières, ni même, par suite, les trajectoires singulières. En outre, au moment où une période d'indétermination mécanique se termine pour certains points du système, il n'est pas possible de dire en général quel degré de multiplicité présentent, d'une part, les trajectoires qui, à cet instant, s'ouvrent pour ces points, d'autre part et surtout, celles qui s'ouvrent et peuvent continuer à s'ouvrir encore pendant un temps quelconque pour les autres points du système qui se trouveraient actuellement engagés dans une période pareille. C'est préjuger au moins en partie la question que de voir toutes ces trajectoires, en nombre fini, matériellement *fixées* d'avance. Se les représenter de la sorte serait une illusion, et une illusion dont il faut d'autant plus se défier, qu'elle transforme le problème presque à notre insu, en le simplifiant artificiellement d'une manière très-commode pour l'esprit.

Je ne peux m'expliquer que par une illusion de cette nature, ou par quelque généralisation analogue, également prématurée, la conséquence à laquelle arrive le R. P. Carbonnelle dans son dernier article (juillet 1879). Cette conséquence consiste en ce que l'indétermination mécanique ne pourrait atteindre à la fois qu'un seul point, au sein d'un système matériel, de manière à ne pas permettre dans tout le système l'existence de plus d'un organisme. Un groupe d'atomes ne doit guère pouvoir, il est vrai, quitter des trajectoires singulières, sans qu'il survienne, dans son action (*supposée réelle*) sur les autres groupes, certaines variations, différentes de celles qui auraient eu lieu si le groupe proposé avait continué à suivre ces trajectoires. Il y a donc à un tel moment, dans le groupe considéré, un changement d'allure, propre, ce semble, à provoquer par une sorte de contre-coup quelque changement analogue chez les autres groupes du système qui sont *vraiment* influencés par le premier. Mais, en quoi consistera le changement, pour les groupes qui seraient eux-mêmes engagés sur des trajectoires singulières? Peut-on dire seulement qu'il entraînera l'abandon de ces trajectoires, si celles-ci sont des courbes susceptibles de se modifier avec continuité, d'après l'état produit, et qui, en fait, ne conservent pas deux instants de suite leur situation ni leur forme? Pourquoi ne pas supposer, d'ailleurs, que des trajectoires singulières, en nombre illimité, pourraient se souder entr'elles, de telle manière qu'il fût possible à un atome de quitter les unes pour en prendre d'autres, sans nécessairement s'engager sur une trajectoire particulière? Le changement ou le contre-coup (même à impulsions déviatrices), provoqué par un premier point ou groupe, ne ferait donc cesser forcément pour les autres l'indétermination, que si l'on se représentait les trajectoires singulières comme des courbes rigides, tracées d'avance, et ne se bifurquant pas ou ne présentant que des bifurcations exceptionnelles, en nombre fini. C'est sans doute parce qu'il a raisonné dans ces hypothèses, trop restreintes à mon avis, que le P. Carbonnelle a cru pouvoir faire dépendre d'un seul atome, d'une seule coordonnée même, les modes d'indétermination mécanique les plus compliqués.

L'incertitude est également complète, en ce qui concerne la question de savoir si les bifurcations de voies correspondent toujours à des états où le système serait, en tout ou en partie, dans une sorte *d'équilibre* instable, absolu ou relatif, comme il arrive, par exemple, soit dans le mouvement absolu d'un seul point mobile, quand la trajectoire est donnée, soit dans le mouvement relatif d'un point libre, attiré par un centre fixe, quand on rapporte ce point à son propre rayon vecteur. Tout ce qu'on peut affirmer, c'est que la proposition réciproque est identiquement vraie, c'est-à-dire que, *partout où il y a équilibre instable, absolu ou relatif, il y a indétermination*, choix possible entre plusieurs alternatives, d'après le sens même du mot *instabilité* (1). Il est vrai que la *solution singulière* représentant analytiquement un pareil équilibre

(1) Je réponds ici, comme on voit, à une autre objection du R. P. Carbonnelle, qui voulait qu'on regardât les états comportant indétermination mécanique comme un cas *très-particulier* de ceux d'instabilité.

J'entends d'ailleurs ce dernier mot dans son sens rigoureux. Je suppose qu'il s'agit d'une instabilité véritable, c'est-à-dire d'un équilibre que la plus petite cause pourrait détruire, et non pas seulement d'une faible stabilité, comme l'est celle que présente est bien plus souvent une *intégrale asymptote* qu'une *solution singulière proprement dite*. Mais elle n'en exprime pas moins toujours un véritable lieu de bifurcations : car tous les géomètres qui ont appliqué l'analyse aux phénomèmes n'ont jamais hésité à regarder, par exemple, les courbes *asymptotes* comme des courbes qui, *physiquement*, se réunissent ou se séparent, et même comme les types des *meilleurs contacts*, des *raccordements les plus parfaits*. Si un léger défaut d'adaptation de notre esprit aux choses nous empêche de voir à quels degrés excessifs de petitesse doivent arriver les quantités mathématiques pour cesser d'avoir leurs correspondantes dans l'ordre réel, le bon sens permet d'affirmer hardiment qu'une quantité *physique* qui décroît sans cesse finira par s'annuler, même alors que l'analyse ne sait l'exprimer que par une quantité abstraite tendant indéfiniment vers la limite zéro sans jamais l'atteindre. En d'autres termes, la force *infiniment petite*, jugée nécessaire par le géomètre pur pour détruire un équilibre *véritablement* instable, n'a pas, en tant que force mécanique, productrice d'accélérations, d'existence concrète aux yeux du physicien.

Je remarquerai, en terminant, que la difficulté de concilier l'instabilité extrême de la vie avec sa persistance n'est nullement propre à mon essai de théorie, qu'elle se présenterait dans toute autre tentative d'explication, et, enfin, que la nature n'aurait pas réussi à la résoudre si elle s'était trouvée insoluble. En effet, l'instabilité physico-chimique *incomparable* des tissus vivants n'est pas une hypothèse. Elle est un fait; puisqu'elle constitue, aux

l'état d'un corps pesant, déposé sans vitesse au sommet d'une surface solide et polie. Dans les circonstances ordinaires, où une exactitude absolue n'est pas requise, on qualifie pourtant d'instables l'équilibre d'un tel corps, celui d'un cône posé sur un plan par sa pointe, etc., quoiqu'ils soient stables en réalité, vu que des forces finies, mesurables même, sont nécessaires pour vaincre les petits frottements qui s'y développent toujours.

yeux du physiologiste, le caractère le plus distinctif de ces tissus, et puisque c'est un sujet d'admiration toujours nouveau, pour les esprits réfléchis, qu'une chose aussi frêle que la vie subsiste et se propage, c'est-à-dire qu'il puisse exister des mécanismes, des modes d'organisation, assez parfaits pour atteindre un aussi prodigieux résultat.

8. — *Du caractère qui distingue probablement le mode d'action de la vie végétative.*

Au numéro 27 du même mémoire (p. 134 et 135), en m'appuyant sur les faits si incontestables mais si frappants et même si merveilleux que comprend l'hérédité, j'ai émis l'opinion que les choix du principe directeur préposé à l'évolution des formes organiques doivent dépendre, non seulement de l'état physico-chimique actuel des corps vivants, mais aussi d'évolutions antérieures, de certaines circonstances effacées de l'état géométrique actuel, bien que subsistant d'une autre manière dans le système. J'ai observé qu'il en résulterait, pour chaque être (et même pour chaque espèce, à supposer que les espèces varient), la nécessité d'un développement gradué, dont les phases successives ne dépendraient peut-être pas, quant à leur ordre, des conditions du milieu, ni des circonstances physiques de l'évolution, conditions et circonstances qui pourraient seulement modifier leur rapidité et leur amplitude, ou faire avorter le mouvement si elles étaient trop défavorables.

Ce mode d'influence, sur le présent, d'un passé parfois lointain et paraissant n'avoir laissé aucune trace matérielle serait peut-être, y disais-je, le vrai caractère de la vie inconsciente. Echappant aux étroites bornes de l'instant présent, il constituerait un premier élargissement de point de vue, un premier pas dans la voie d'un affranchissement relatif vis-à-vis des conditions du temps et de l'espace. Il établirait donc, comme je l'observais également, la transition entre la manière dont se comportent les forces physico-chimiques, constamment esclaves de l'état actuel, et le mode d'action, propre à la vie pleinement consciente, que définit le *principe de finalité* et qui, subordonnant au contraire le présent à l'avenir, dispose le premier en vue du second. N'est il pas naturel, en effet, que le pouvoir régulateur de l'évolution vitale ait sa manière spéciale d'agir, se distinguant à la fois de celle des agents mécaniques et de celle des causes libres, marquant un progrès entre la base étroite où sont confinés les premiers et l'ampleur, en quelque sorte sans limites dans l'espace et la durée, du champ où se meuvent les secondes? Car les causes libres, seules, cumulent tous les modes d'action et peuvent chercher partout leurs moyens de se déterminer, c'est-à-dire faire réagir les uns sur les autres, de toutes les manières, des états passés, présents, futurs ou simplement possibles des choses.

Sans doute, une telle supposition revient à admettre qu'il existe des réalités n'ayant actuellement rien de matériel, des faits dépourvus de tout correspondant physique, de tout phénomène corrélatif qu'on puisse se figurer géométriquement. Mais le côté mesurable et descriptible des choses n'est qu'une de leurs faces, la plus claire à notre esprit; et rien ne dit que cette face contienne des détails suffisants pour rappeler ou exprimer tout ce que présenteraient les autres faces s'il nous était donné de les observer.

A part le moi et les faits intérieurs qu'il perçoit immédiatement, les objets qui échappent aux catégories de la forme et de la quantité mesurable sont absolument obscurs pour nous. Dans cette immense classe se trouvent comprises d'abord les substances. Il faut y ranger également les forces et énergies de diverses sortes auxquelles nous attribuons instinctivement les mouvements qui se produisent dans le monde inorganique ou dans celui de la vie inconsciente, et dont l'existence nous est garantie par un certain sens des choses que nous ne pouvons mettre en doute. Notre intelligence, qui nous affirme la réalité de tous ces objets, se trouve impuissante à nous les montrer et ne nous permet de fonder sur eux aucune science positive. Et qu'est la matière elle-même, ce que nous croyons parfois saisir et nous représenter à première vue, sinon le vêtement, la manifestation extérieure des énergies physico-chimiques. Or, ces agents, dont nos équations différentielles expriment si bien les effets perceptibles, se dérobent absolument à tous nos moyens de connaître : ils nous restent tout-à-fait impénétrables dans leur essence, bien plus mystérieux même que la cause des phénomènes volontaires, révélée du moins d'une certaine manière par le sens intime. Donc, le gros des choses nous échappe et ne tombe pas sous nos représentations, ou ne peut s'exprimer géométriquement.

Considérons, par exemple, le simple phénomène d'une onde liquide isolée qui se propage. Ne semble-t-il pas qu'il y a là plus de réalité dans ce qui chemine indéfiniment, dans l'énergie de l'onde, qui paraît se servir de la matière comme d'un véhicule, que dans cette matière même que nous voyons se déplacer à peine et puis rester tout-à-fait en repos?

Ainsi, parmi les conditions qui président à l'apparition et au développement de la vie, surtout d'une vie quelque peu élevée et, à plus forte raison, d'une vie consciente, il doit y en avoir qui ne sont pas purement matérielles, c'est-à-dire qui ne sont pas exprimables géométriquement d'une manière complète. Il est éminemment probable qu'il y entre de bonne heure des circonstances, d'hérédité ou autres, non comprises dans l'état mécanique actuel.

9. — *Additions diverses au même mémoire de* 1878.

Dans le numéro 6 de la même étude (p. 49), j'aurais pu faire observer au lecteur que le cas où les solutions singulières *touchent* les solutions particulières *sans les croiser*, ou en les *enveloppant*, n'est pas seulement le cas le plus connu, mais peut-être le seul qui fut connu jusqu'ici, car je n'ai trouvé nulle part ailleurs que dans mon mémoire des exemples de solutions singulières croisant ou n'enveloppant pas les intégrales particulières.

J'aurais dû remarquer aussi (p. 51) qu'indépendamment des solutions singulières, proprement dites ou asymptotes, les intégrales particulières d'un système d'équations peuvent encore présenter des points de réunion ou de bifurcation, non reliés les uns aux autres par des chemins qui satisfassent aux équations différentielles, c'est-à-dire ne constituant pas ensemble une solution de ces équations. Ce sont, en quelque sorte, des points de réunion instantanée ou de bifurcation instantanée; j'ai traité, d'ailleurs, de ceux-ci aux numéros 2 et 4 de la quatrième note placée à la suite du même mémoire (1).

A la fin du numéro 3 (p. 41), j'ai dit que, dans le cas

(1) J'ai montré dans cette note, par exemble (p. 175 et suivantes), que lorsqu'il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre et du second degré à deux variables x, y, la ligne exprimée par la relation $\frac{dy'}{dy} = \pm \infty$ comprend généralement certaines branches qui jouent le rôle *d'enveloppes*, de contours limites, et qui sont aussi, pour les courbes représentant les intégrales particulières, des lieux de réunion ou de bifurcation, quoiqu'elles ne deviennent à la fois lieux de reunion et de bifurcation que dans un cas particulier, savoir dans le cas où elles constituent des intégrales, des solutions singulières. En outre, rien n'empêche que la ligne $\frac{dy'}{dy} = \pm \infty$ puisse admettre d'autres branches, dépourvues de toutes ces propriétés ou seulement de la première, c'est-à-dire n'étant plus des contours

des actes libres, les conditions matérielles amenant les bifurcations de voies appropriées à ces actes n'ont nullement pour conséquence d'imposer à la volonté son choix, mais que leur réalisation la met, au contraire, en pleine possession d'elle-même, en état de *s'abstenir* ou d'agir à sa guise. Il n'est pas question là, bien entendu, d'une abstention qui consisterait à ne prendre absolument aucun parti, puisqu'il faut que le système matériel suive sans retard un chemin quelconque. Il s'agit donc d'une abstention purement relative, qui est elle-même une certaine manière, tout au moins provisoire, de se déterminer et qui constitue une des voies laissées ouvertes par les équations du mouvement. Elle consiste, par exemple, à maintenir le système matériel le long des trajectoires singulières, c'est-à-dire dans l'instabilité, jusqu'à ce que la délibération de la volonté se termine et qu'une décision, intervenant, soit exécutée. Elle pourrait consister aussi à faire quitter de suite et pour le moment au système les lieux de bifurcations, mais en

limites, et pouvant n'être pas davantage, soit des lieux de réunion ou de bifurcation, soit surtout des intégrales singulières.

Si les lignes enveloppes ou contours-limites ne représentent pas toujours, ni même le plus souvent, des solutions singulières, à l'inverse, il arrive parfois que les solutions singulières d'une équation différentielle du premier ordre, entre une ordonnée y et une abscisse x prise pour variable indépendante, ne représentent pas davantage des contours-limites. Toutefois, ce cas est rare; car le contact d'une intégrale singulière avec les intégrales particulières qui s'y joignent est presque toujours du premier ordre, c'est-à-dire d'ordre impair; et l'on sait qu'alors, à moins de discontinuités exceptionnelles, les courbes ne se croisent pas, en sorte que, si l'une d'elles en touche une infinité d'autres formant ensemble une certaine famille, elle les laisse toutes sur un seul de ses côtés, du moins dans le voisinage des points communs. Mais quand, par extraordinaire, le contact de la solution singulière avec les intégrales particulières devient d'un ordre pair, c'est-à-dire le plus souvent du second, les courbes se croisent, comme on sait, et la solution singulière est, en quelque sorte, traversée par les intégrales particulières. Alors la ligne $\frac{dy'}{dy} = \pm \infty$, tout en continuant à représenter une intégrale lieu de réunion et de bifurcation des intégrales particulières, cesse d'être un contour-limite et ne mérite plus en aucune manière le nom d'enveloppe. Dans d'autres cas, elle peut cesser également d'être un lieu de réunion ou de bifurcation d'intégrales. La page 176 contient des exemples de tous ces cas.

l'engageant dans une voie jugée insignifiante ou au bout de laquelle ne se trouverait aucune conséquence grave au point de vue moral, etc. C'est ainsi qu'un électeur, ayant le choix de voter pour divers candidats, ou de différer son vote, ou enfin de ne pas voter du tout, prend un parti comme un autre lorsqu'il s'abstient, soit pour le moment, soit d'une manière définitive, c'est-à-dire lorsqu'il se détermine, ou à différer son vote, ou à ne pas voter du tout.

A propos de cette même action de la volonté, j'aurais pu faire observer, aux pages 57 et 62, qu'il faut comprendre en premier lieu, au nombre des mobiles qui l'inclinent vers tel ou tel choix, le degré plus ou moins élevé de délicatesse du sens moral des individus et la portée plus ou moins étendue de leur esprit. Quand ce degré ou cette portée atteignent un niveau suffisant, la réalisation de certaines hypothèses, de tel ou tel crime, par exemple, devient très-improbable, moralement impossible même; et il en résulte que les écarts des faits observés d'avec les faits prévus tombent dans des limites extrêmement étroites, pour ce qui concerne certaines catégories d'actions, de manière à rendre possible la confiance mutuelle entre les divers membres d'une société.

Alors la liberté s'épure et s'élève, mais sans que son domaine en devienne plus restreint; car, ce qu'elle perd du côté du mal, elle le gagne du côté du bien, en concevant et en réalisant de ce côté des actes qui lui auraient été impossibles d'abord. Son champ se déplace donc; mais bien loin de décroître, il grandit, vu que, au bas de l'échelle des êtres moraux, là où règnent encore tous les appétits physiques, la liberté n'est visiblement pas aussi étendue qu'au haut de la même échelle.

Quoiqu'il en soit, dans tous ses états, son action *propre* doit s'éliminer en majeure partie des *grands nombres* que recueille la statistique, par le fait même qu'aucun motif déterminant ne peut, chez une multitude d'individus étrangers les uns aux autres, rendre ses décisions *systématiquement* plus nombreuses dans un sens que dans le sens contraire. Il faudrait, en effet, pour apprécier réellement cette action propre de la volonté, prélever d'abord ce qui revient aux mobiles, à l'état moral, etc., dont l'effet résultant et moyen est justement presque le seul qui ressorte ou se dépeigne sur les grands nombres considérés. Cette raison, qui explique comment une influence prédominante dans les détails peut être masquée dans l'ensemble, s'applique même mieux à la liberté, dont elle exprime comme l'essence, qu'à l'action d'autres causes, jugées aussi par nous accidentellement variables, telles, par exemple, que celles des phénomènes météorologiques. Aussi, l'état moral moyen d'une société paraît-il se révéler assez exactement, dans la statistique, sur des nombres moindres que ceux qu'il faudrait pour bien apprécier le climat de certaines contrées.

Remarquons encore que le même motif, pour lequel les causes agissant indifféremment dans des sens opposés s'éliminent presque de la moyenne d'un grand nombre de faits où elles interviennent, montre qu'elles doivent s'éliminer également des rapports qui expriment comment ces faits se distribuent quand on les classe d'après leurs écarts individuels d'avec la moyenne. Mais il faut, pour cela, que les nombres *partiels* composant chaque groupe, ou correspondant à un écart compris entre deux limites déterminées, soient séparément considérables : il ne suffit plus qu'ils aient pour somme un grand nombre. Alors seulement, les oscillations que présentent les faits observés, en deçà et au-delà de la moyenne, deviennent régulières, soumises à des lois comme la moyenne elle-même, parce qu'elles reflètent, comme elle, l'effet de causes constantes, quoique moins étendues ou d'une portée secondaire. Ces lois ne sont, en d'autres termes, que des applications particulières de la loi générale des grands nombres; et on ne peut en faire le sujet d'une objection spéciale contre la liberté [1].

A la fin de la page 66, où l'évolution d'un organisme est comparée à celle d'une onde liquide, j'ai observé que, de part et d'autre, la dernière phase est à elle seule beaucoup plus longue que toutes les autres ensemble : le lecteur aura compris que c'est celle qui correspond à la forme adulte (ou non-embryonnaire) des êtres vivants. De même, en effet, qu'une intumescence de médiocre grosseur, produite à l'entrée d'un canal de largeur constante à fond horizontal et contenant une eau en repos, tend rapidement, dès le début de sa propagation indéfinie le long du canal, vers sa forme-limite d'*onde solitair* qui est parfaitement déterminée en fonction de son énergie totale et des dimensions transversales de la masse fluide en repos, de même aussi le germe d'un être animé, placé dans les circonstances qui lui conviennent et au milieu de conditions extérieures sensiblement constantes, traverse vite les formes transitoires qui doivent conduire l'être à sa forme adulte. Celle-ci persiste ensuite, dans tous ses traits essentiels, pendant les périodes d'accroissement et de décadence, tout comme l'onde conserve sa physionomie, ses proportions caractéristiques, à mesure qu'elle s'use et s'efface peu à peu sous l'influence des frottements.

On trouve, il est vrai, surtout chez les invertébrés, des exceptions à cette loi. Tel est notamment le cas des animaux à métamorphoses, par exemple, des insectes, dont l'existence comprend deux périodes, comparables entr'elles pour la durée, où la forme de l'être et son mode de vie sont

(1) A la page 58 du même mémoire, où j'oppose l'obscurité profonde des phénomènes purement vitaux à la clarté relative des phénomènes intellectuels et des phénomènes physiques, je considère ces derniers non au point de vue de leurs causes cachées, mais seulement par leur côté géométrique, qui est en effet ce dont nous jugeons le plus nettement.

très-différents. On pourrait peut-être, jusqu'à un certain point, voir quelque analogie entre un organisme pareil et une onde d'une assez grande hauteur, propagée d'aval en amont le long d'un cours d'eau légèrement torrentueux. Une telle onde, tant qu'elle conserve une fraction assez forte de sa hauteur primitive, surmonte le courant et progresse vers l'amont, tandis qu'elle est, au contraire, emportée vers l'aval à partir de l'instant où sa hauteur devient inférieure à une certaine limite. Les conditions particulières, d'ailleurs constantes, que présente par rapport à une pareille intumescence le milieu fluide où elle doit évoluer, sont donc telles, qu'il suffit de modifications légères et continues, survenues chez l'onde même, pour la faire changer complétement de direction et, par suite, d'allure, c'est-à-dire pour scinder son existence en deux parties bien distinctes, opposées même, de grande durée l'une et l'autre. Une période d'immobilité apparente, comme pour l'insecte dans son état intermédiaire de chrysalide, marque la transition de la première partie de l'évolution à la seconde.

J'ai montré à la fin du numéro 19 (p. 109 à 111), en étudiant de simples mouvements rectilignes d'un point, que des bifurcations d'intégrales pourraient se présenter pour tout mode d'état initial, si les accélérations, au lieu de ne dépendre que des coordonnées, dépendaient aussi des vitesses. Voici un exemple particulier très-simple de ce cas. Prenons

$$1)\qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{3}{4}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad v\,\frac{dv}{dx} = \frac{3}{4}\,v^{\frac{2}{3}}:$$

a chaque valeur, positive ou négative, de la vitesse v, il correspond bien une valeur unique et finie de l'accélération. On trouve alors aisément, pour l'intégrale générale première,

$$(2) \qquad x - v^{\frac{4}{3}} = c,$$

et, pour la solution singulière,

$$(3) \qquad v = 0 \quad \text{ou } x = \text{une constante arbitraire.}$$

D'ailleurs, l'intégrale première (2) revient à

$$1 = \pm (x - c)^{-\frac{3}{4}} v \quad \text{ou} \quad dt = \pm (x - c)^{-\frac{3}{4}} dx.$$

D'où, en intégrant et appelant c' une nouvelle constante arbitraire :

$$t - c' = \pm 4 (x - c)^{\frac{1}{4}}.$$

L'intégrale générale est donc

$$(4) \qquad x = c + \left(\frac{t - c'}{4}\right)^4.$$

Quelles que soient les constantes arbitraires c et c', la vitesse v reçoit la même valeur à l'époque $t = c'$, ou pour $x = c$, dans les deux équations (2) et (3). Ainsi, à ce moment, le mobile, qui a déjà d'après l'équation (4) rétrogradé de $x = \infty$ à $x = c$, peut s'arrêter pendant un temps quelconque, et puis revenir sur ses pas en reprenant sa marche désormais accélérée.

Il y a donc un point d'arrêt, $x = c$, *quelles que soient les circonstances initiales*. Ces circonstances influent seulement sur la position du point d'arrêt; elles le déplacent, mais ne le suppriment jamais, contrairement à ce qui arrive dans un mouvement rectiligne où l'accélération ne dépend que de la coordonnée, cas dans lequel les points d'arrêt ne sauraient être ailleurs qu'aux positions naturelles d'équilibre instable du mobile.

Enfin, à la page 123, où je cite l'exemple d'indétermination mécanique trouvé par Poisson dans le mouvement rectiligne fictif que régit l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} = ax^n$, j'aurais peut-être dû faire observer que cet exemple est loin de multiplier les bifurcations comme ceux de même espèce que j'ai donnés : car le point d'arrêt unique $x = 0$, qui s'y présente quand la vitesse à l'origine s'annule, ne peut être atteint qu'une fois par le mobile ; le principe directeur n'a donc à y intervenir qu'une seule fois dans toute la suite des temps.

Au moment où se termine l'impression de cette étude, M. l'ingénieur P. Tannery vient de publier, dans la *Revue philosophique* de novembre 1879, un article, sur *Une théorie de la connaissance mathématique*, où il est accessoirement question (p. 489) de la multiplicité des intégrales que peuvent admettre les équations différentielles du mouvement de certains systèmes matériels, pour un même état initial donné. M. P. Tannery assimile ces multiples intégrales aux solutions *étrangères*, bien connues des analystes, qui se présentent dans certains problèmes, lorsque les équations par lesquelles on exprime algébriquement leur énoncé ne le traduisent pas d'une manière complète et ont ainsi plus d'étendue qu'il ne faudrait. Alors, toutes les solutions des équations posées répondant également bien au problème *algébrique*, un choix entr'elles ne peut se faire qu'à l'aide de conditions d'une autre nature, consistant, par exemple, en ce que les nombres cherchés devront être entiers, positifs, ou en ce qu'on demandera une enveloppe et non les lignes enveloppées, etc. Ces conditions supplémentaires, contenues dans l'énoncé vrai de la question, achèvent de faire connaître les inconnues quand le problème est réellement déterminé. De même — car j'accepte le rapprochement très-naturel présenté par M. P. Tannery — des considérations spéciales, étrangères aux équations classiques du mouvement telles qu'on les connaît et, en particulier, au principe de la conservation des forces vives, qu'il considère surtout, devront nécessairement intervenir pour fixer le choix entre les diverses intégrales compatibles avec toutes ces équations. Je prétends seulement que, parmi les nouvelles conditions reconnues ainsi nécessaires, il y en aura que les lois physiologiques imposeront, chez tout être vivant, et d'autres, qui, dans les actes libres, dépendront de la volonté. Assurément, il ne restera jamais aucune indétermination effective, quand on tiendra compte de toutes les causes en jeu.

A ce propos, M. P. Tannery me permettra de relever, dans le passage de son article dont il est question ici, un membre de phrase où il semble faire remonter jusqu'à Euler la connaissance de cas pour lesquels les équations différentielles du mouvement d'un point admettent plusieurs solutions, à partir d'un même état initial donné. Il y a sans doute là quelque confusion; car Euler ne paraît nullement avoir soupçonné ce fait, qui ne se présente dans aucun des exemples qu'il a traités. Ceux auxquels fait allusion M. Tannery ne comportent deux solutions différentes, que parce qu'il y est question de points soumis à l'action de forces mécaniques incomplétement déterminées, mais astreintes seulement, d'après l'énoncé, à vérifier certaines relations. Euler se demande, par exemple, quelle forme doit avoir une ligne sans frottement, pour qu'un point pesant qui la décrit conserve en projection horizontale une vitesse constante; et il trouve que la ligne doit être, soit la parabole que décrirait le point s'il était libre, cas où la réaction exercée par la trajectoire est nulle, soit une droite horizontale, cas où cette réaction est égale au poids du mobile. Il est clair que, dans de pareils problèmes, l'indétermination est réelle, qu'elle tient à la nature même de la question, contrairement à ce que paraît supposer M. P. Tannery. Mais le mouvement, si l'on considère chaque cas particulier, c'est-à-dire chaque courbe obtenue, y est parfaitement déterminé par sa vraie équation différentielle et par l'état initial.

ÉCLAIRCISSEMENT.

A la page 12 (ligne 12) du mémoire actuel, j'ai parlé, au point de vue non-euclidien, de l'*étendue absolue* des figures. Cette expression, dépourvue de toute signification précise quand les figures peuvent grandir ou décroître dans des rapports quelconques en restant semblables à elles-mêmes et, par suite, en gardant toutes leurs propriétés, est susceptible de recevoir un sens naturel dans l'hypothèse contraire où leurs dimensions ne varient pas sans que leurs angles changent par le fait même. Alors, en effet, tous leurs états de grandeur sont liés à ceux des angles, ou comme jalonnés par ceux-ci, qui comportent une mesure absolue; car l'unité naturelle d'angle est l'angle droit, ou mieux l'espace total compris autour d'un point. Par exemple, dans les systèmes non-euclidiens, on pourrait qualifier d'*absolument petits* les triangles chez lesquels la somme des trois angles serait voisine de la limite, deux droits, qu'elle atteindrait si les côtés venaient à s'annuler, vu que tous ces triangles ne correspondraient qu'à une partie minime du champ total possible des variations de la somme considérée des trois angles et devraient être ainsi réputés très-voisins des triangles infiniment petits, par opposition aux autres triangles, incomparablement plus nombreux, pour lesquels cette somme différerait de deux droits d'une manière sensible.

TABLE DES MATIÈRES.

I. — Sur le rôle et la légitimité de l'intuition géométrique.

II. — Considérations sur le but, la méthode et les principaux résultats de la mécanique physique.

III. — Questions diverses.

IV. — Complément à un mémoire, publié en 1878, *sur la conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale.*

Lille Imp. L. Danel.

CALCUL

DES

DILATATIONS ÉPROUVÉES PAR LES ÉLÉMENTS MATÉRIELS RECTILIGNES

APPARTENANT A UNE PORTION INFINININIMENT PETITE D'UNE MEMBRANE ÉLASTIQUE COURBE QUE L'ON DÉFORME,

ET DÉMONSTRATION TRÈS-SIMPLE DU THÉORÈME DE GAUSS,

SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES INEXTENSIBLES (1);

par M. J. BOUSSINESQ,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

I. — EXPRESSION DE LA DILATATION D'UN ÉLÉMENT RECTILIGNE DE LA MEMBRANE.

Isolons par la pensée, dans la membrane élastique dont on veut étudier les déformations, une partie infiniment petite en tous sens; et considérons d'abord cette petite portion dans son état choisi comme état primitif. Si on la rapporte à une de ses normales pour axe des z et à deux droites rectangulaires, situées dans le plan tangent corres-

(1) Article présenté à l'Académie des Sciences, le 1er avril 1878. — Voir l'extrait aux *Comptes-Rendus* (t. LXXXVI, p. 816).

pondant, pour axes des x et des y, son équation sera réductible, comme on sait, à celle d'un paraboloïde,

$$(1)\qquad 2z = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

Celle-ci, différentiée, donne

$$dz = (rx + sy)\, dx + (sx + ty)\, dy,$$

et, par suite,

$$dz^2 = (rx + sy)^2\, dx^2 + (sx + ty)^2\, dy^2$$
$$+ 2\left[s\,(rx^2 + 2s\,xy + ty^2) + (rt - s^2)\,xy\right] dx\, dy.$$

Or, on a identiquement

$$rx^2 + 2s\,xy + ty^2 = \frac{(rx + sy)^2 + (rt - s^2)\,y^2}{r} = \frac{(sx + ty)^2 + (rt - s^2)\,x^2}{t};$$

en sorte que l'expression

$$2\,(rx^2 + 2s\,xy + ty^2)$$

peut être remplacée par

$$\frac{(rx + sy)^2 + (rt - s^2)\,y^2}{r} + \frac{(sx + ty)^2 + (rt - s^2)\,x^2}{t}.$$

Alors, la valeur précédente de dz^2 devient aisément

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} dz^2 &= dx\, d\,\frac{(rx + sy)^3 + s\,(rt - s^2)\,y^3}{3r} \\ &\quad + dy\, d\,\frac{(sx + ty)^3 + s\,(rt - s^2)\,x^3}{3t} + 2\,(rt - s^2)\,xy\, dx\, dy. \end{aligned}\right.$$

Nous désignerons par C, afin d'abréger, la courbure $rt - s^2$ de la portion considérée de surface ou de membrane, c'est-à-dire le produit de ses deux courbures principales. Enfin, la longueur primitive, dS, de l'élément matériel rectiligne (tracé sur la surface), dont les projections sur les axes sont dx, dy, dz, aura pour carré

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Concevons actuellement qu'on déforme la membrane, en laissant fixes le point matériel situé à l'origine, la direction du plan tangent correspondant et celle de l'élément rectiligne mené à partir de l'origine dans le sens des x. Les petites ordonnées de la portion considérée de surface seront encore données, après les déformations, par une équation analogue à (1), où les constantes r, s, t, C auront d'autres valeurs r', s', t', C'. De plus, les deux coordonnées primitives x, y de chaque point matériel auront reçu des accroissements u, v, qui, fonctions de x, y, s'annuleront à l'origine, et dont le second, v, y aura sa dérivée en x nulle (à cause de la fixité relative supposée de direction de l'élément rectiligne qui émane de l'origine suivant l'axe des x).

D'ailleurs, les déformations d'une membrane élastique dans les sens parallèles à son plan tangent étant en général fort restreintes (par suite de l'existence de limites d'élasticité), les déplacements u, v seront très-petits devant x, y, et les deux projections, suivant les x et les y, d'un élément matériel rectiligne, n'auront varié que de minimes fractions de leurs valeurs primitives dx, dy. Cela serait surtout vrai, si les fibres (dont les éléments sont appelés dS) changeaient de courbure sans s'étendre ni se contracter, cas où leurs projections sur le plan des xy ne varient qu'à cause des changements de leurs très-petites inclinaisons par rapport à ce plan. Alors les droites qui joignent deux à deux des points quelconques de la petite partie considérée de membrane ne varient, soit en grandeur absolue, soit en projection sur le plan des xy, que de quantités du troisième ordre de petitesse en x et y, c'est-à-dire de quantités comparables au produit des petites lignes, du premier ordre en x, y, projetées sur leur corde ou sur le plan des $x\,y$, par les parties variables des cosinus d'angles qui sont du même ordre de petitesse. Et les déplacements u, v, qui s'annuleraient si tous les points dont il s'agit conservaient, en projection sur le plan des $x\,y$, leurs distances respectives, devront être naturellement du même ordre de petitesse que les variations de ces distances, c'est-à-dire du troisième. On le verra d'ailleurs plus loin, par les formules (7), quand on calculera u, v pour ce cas de simples flexions.

Le carré dz^2 aura donc grandi sensiblement de la variation qu'éprouve le second membre de (2) lorsqu'on y laisse constants x, y, dx, dy et qu'on y remplace r, s, t, C par r', s', t', C'. Si l'on pose, pour abréger,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{(rx+sy)^3+s\,\mathrm{C}\,y^3}{6r} - \frac{(r'x+s'y)^3+s'\mathrm{C}'y^3}{6r'},\\ \mathrm{V} &= \frac{(sx+ty)^3+s\,\mathrm{C}\,x^3}{6t} - \frac{(s'x+t'y)^3+s'\,\mathrm{C}'x^3}{6t'},\end{aligned}\right.$$

cet accroissement de dz^2 vaudra, d'après la formule (2),

$$2\left[(\mathrm{C}'-\mathrm{C})\,xy\,dx\,dy - dx\,d\mathrm{U} - dy\,d\mathrm{V}\right].$$

En y joignant les augmentations, $2\,dx\,du$, $2\,dy\,dv$, reçues par dx^2 et dy^2, qui sont devenus $(dx+du)^2$, $(dy+dv)^2$, on trouve

$$2\left[dx\,d(u-\mathrm{U}) + dy\,d(v-\mathrm{V}) + (\mathrm{C}'-\mathrm{C})\,xy\,dx\,dy\right]$$

pour la valeur de l'accroissement qu'a subi le carré de l'élément rectiligne, c'est-à-dire pour la valeur de l'expression $(2\Delta)\,d\mathrm{S}^2$, où Δ désigne la petite *dilatation* relative éprouvée par l'élément $d\mathrm{S}$, qui est devenu ainsi $(1+\Delta)\,d\mathrm{S}$.

Remplaçons les différentielles totales $d(u-\mathrm{U})$, $d(v-\mathrm{V})$ par leurs développements respectifs

$$\frac{d(u-\mathrm{U})}{dx}dx+\frac{d(u-\mathrm{U})}{dy}dy, \quad \frac{d(v-\mathrm{V})}{dx}dx+\frac{d(v-\mathrm{V})}{dy}dy;$$

puis observons que les rapports de dx à $d\mathrm{S}$ et de dy à $d\mathrm{S}$ sont sensiblement le cosinus et le sinus de l'angle α que fait avec les x positifs la projection primitive de l'élément rectiligne sur le plan des xy. Il viendra la formule que je me proposais d'établir :

$$(4)\left\{\begin{aligned}\Delta = {} & \frac{d(u-\mathrm{U})}{dx}\cos^2\alpha+\frac{d(v-\mathrm{V})}{dy}\sin^2\alpha \\ & +\left[\frac{d(u-\mathrm{U})}{dy}+\frac{d(v-\mathrm{V})}{dx}+(\mathrm{C}'-\mathrm{C})\,xy\right]\cos\alpha\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

Telle est l'expression de la dilatation Δ éprouvée par l'élément linéaire considéré de membrane, c'est-à-dire la valeur de son allongement pour l'unité de longueur primitive.

Les coefficients de $\cos^2\alpha$ et de $\sin^2\alpha$, savoir

$$\frac{d(u-\mathrm{U})}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d(v-\mathrm{V})}{dy},$$

y représentent les dilatations de deux éléments primitivement rectangulaires, pris, à partir d'un même point (x, y), sensiblement parallèles, l'un, à l'axe des x, l'autre, à l'axe des y : en effet, ces coefficients sont les valeurs de Δ pour $\alpha=0$ et pour $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ou 90^0.

Quant au coefficient du produit $\cos\alpha\sin\alpha$, c'est-à dire à

$$\frac{d(u-\mathrm{U})}{dy}+\frac{d(v-\mathrm{V})}{dx}+(\mathrm{C}'-\mathrm{C})\,xy,$$

il exprime la petite diminution qu'a éprouvée l'inclinaison de ces deux éléments d'abord rectangulaires, ou le cosinus de l'angle, un peu différent de 90°, qu'ils forment après les déformations.

Pour le démontrer, attribuons à ces deux éléments des longueurs primitives égales, dS; de plus, considérons l'élément rectiligne qui, joignant leurs extrémités, vaut dans l'état primitif $ds\ \sqrt{2}$ et pour lequel on a

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'après la formule fondamentale de la trigonométrie rectiligne, le carré de ce dernier élément, retranché de la somme des carrés des deux autres, égale, après les déformations, le double produit de ceux-ci par le petit cosinus de l'angle qu'ils forment. Or, tous les carrés considérés ont été multipliés respectivement, pendant les déformations, par l'expression $(1+\Delta)^2$, ou par $1+2\Delta$, Δ désignant la dilatation linéaire qui correspond à chacun; en sorte que les carrés des deux éléments primitivement rectangulaires sont devenus

$$(dS)^2\left[1+2\,\frac{d(u-U)}{dx}\right], \quad (dS)^2\left[1+2\,\frac{d(v-V)}{dy}\right],$$

et que celui du troisième élément égale

$$2\,(dS)^2\left[1+\frac{d(u-U)}{dx}+\frac{d(v-V)}{dy}+\frac{d(u-U)}{dy}-\frac{d(v-V)}{dx}-(C'-C)\,xy\right].$$

L'excédant de la somme des deux premiers sur celui-ci est donc

$$2\,(dS)^2\left[\frac{d(u-U)}{dy}+\frac{d(v-V)}{dx}+(C'-C)\,xy\right],$$

et son quotient par le double produit des deux premiers côtés ou sensiblement par $2\,(dS)^2$, c'est-à-dire le cosinus de l'angle cherché, égale bien le coefficient de $\cos\alpha \sin\alpha$ dans la formule (4).

II. — CAS OÙ LA MEMBRANE EST SIMPLEMENT FLÉCHIE, SANS EXTENSION NI CONTRACTION DE SES FIBRES.

Etudions en particulier les déformations qui consistent en de *simples flexions* de la portion considérée de membrane (c'est-à-dire qui se font sans allongement ni raccourcissement d'aucune de ses fibres), déformations auxquelles une plaque solide peu épaisse résiste, comme on sait, incomparablement moins qu'aux déformations accompagnées d'extensions de fibres. On aura, quel que soit α et pour toutes les valeurs très-petites de x et y, $\Delta = 0$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d(u-U)}{dx}\cos^2\alpha + \frac{d(v-V)}{dy}\sin^2\alpha\\ &\quad + \left[\frac{d(u-U)}{dy} + \frac{d(v-V)}{dx} + (C'-C)\,xy\right]\cos\alpha\,\sin\alpha = 0,\end{aligned}\right.$$

équation qui, si l'on y suppose successivement l'angle α nul, droit et puis quelconque, revient à annuler séparément les trois coefficients de $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$, $\cos\alpha\ \sin\alpha$, c'est-à-dire à écrire les trois relations

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d(u-U)}{dx} = 0,\quad \frac{d(v-V)}{dy} = 0,\\ &\qquad\frac{d(u-U)}{dy} + \frac{d(v-V)}{dx} + (C'-C)\,xy = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces trois équations ne s'appliquent en toute rigueur, ou mieux, sauf erreurs relatives infiniment petites, que dans une étendue infiniment petite aussi tout autour de l'origine, c'est-à-dire là où la surface est assimilable, quelle soit sa forme générale, à un simple paraboloïde ayant l'origine pour sommet. Mais on pourra les traiter comme des équations qui seraient satisfaites d'une manière continue dans une étendue finie, si, pour fixer les idées, l'on conçoit adoptée une unité de longueur infiniment petite, propre à faire paraître finie chaque région considérée de la membrane: hypothèse qui ne modifie en rien les démonstrations précédentes, mais qui rend simplement infiniment petites les constantes r, s, t, C, r', s', t', C′ et aussi (pour toutes les valeurs finies de x, y) les fonctions u, v, U, V.

Cela étant admis, les deux premières (5) montrent que les expressions $u - \mathrm{U}$, $v - \mathrm{V}$ doivent dépendre, tout au plus, la première de y, la seconde de x. Or, la troisième relation (5), différentiée deux fois, en x et y, donne alors la condition

$$(6) \qquad \mathrm{C}' - \mathrm{C} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{C}' = \mathrm{C},$$

qui la réduit à

$$\frac{d(u - \mathrm{U})}{dy} + \frac{d(v - \mathrm{V})}{dx} = 0,$$

ou à

$$\frac{d(u - \mathrm{U})}{dy} = -\frac{d(v - \mathrm{V})}{dx}.$$

Mais les deux membres de celle-ci sont constants, vu que le premier est indépendant de x et le second indépendant de y. D'ailleurs, cette valeur constante et commune des deux membres est égale à zéro; car, pour $x = 0$ et $y = 0$, on a par hypothèse $\frac{dv}{dx} = 0$, et la deuxième formule (3) montre qu'alors $\frac{dV}{dx}$ s'annule également. Ainsi les dérivées respectives de $u - U$, $v - V$, par rapport à y et à x, s'annulent; ce qui signifie que les différences $u - U$, $v - V$ ne dépendent pas plus, respectivement, de y ou de x que de x ou de y, et qu'elles sont constantes. Mais comme, par hypothèse, u, v s'annulent à l'origine et que, d'après (3), U, V s'y annulent également, les différences considérées $u - U$, $v - V$ seront nulles partout.

En résumé, on ne peut satisfaire à l'équation $\Delta = 0$, dans toute l'étendue d'une portion infiniment petite de la membrane, qu'en posant à la fois

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = U, \quad v = V, \\ \text{et } C' = C \quad \text{ou} \quad r't' - s'^2 = rt - s^2, \end{array} \right.$$

relations dans lesquelles U et V sont les fonctions du troisième degré en x et y que donnent les formules (3). Les composantes tangentielles u, v des déplacements se trouvent bien du troisième ordre de petitesse en x et y dans le voisinage de l'origine, comme nous l'avions prévu (avant de poser les formules 3) pour le cas, étudié ici, de flexions que n'accompagne aucun allongement, ni aucun raccourcissement des fibres de la membrane.

Il ne reste donc d'arbitraires, pour caractériser la déformation produite, que deux des paramètres r', s', t', c'est-à-dire l'orientation des sections principales de la très-petite partie considérée de membrane et la courbure de l'une d'elles. Quant à la courbure de l'autre section principale, son produit par celle de la première est constant et égal à $rt - s^2$.

Ainsi se trouve démontrée bien simplement la propriété fondamentale des surfaces transformables les unes en les autres sans extension ni contraction des lignes qui y sont tracées, propriété découverte, comme on sait, par Gauss dans son énoncé général, mais utilisée de temps immémorial dans les arts pour ce qui concerne les surfaces réglées développables. M. Maurice Lévy en a signalé, en 1878 (1), une application industrielle, très-familière, observe-t-il, aux ouvriers employés dans certaines branches du travail des métaux. Cette application consiste à faire acquérir par simple flexion, à une plaque presque cylindrique, de grandes courbures suivant le sens des génératrices, en diminuant dans un rapport notable ses courbures suivant le sens perpendiculaire.

La démonstration du théorème de Gauss donnée ci-dessus présente, sur d'autres démonstrations du même théorème, l'avantage de montrer que l'égalité du produit des deux courbures principales est une condition, non seulement nécessaire, mais encore suffisante, pour que deux portions infiniment petites de surface soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

(1) *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, tome LXXXVI, p. 111; 14 janvier 1878.

Lille Imp. L. Danel.