ARITHMÉTIQUE

UNIVERSELLE

DE NEWTON.

ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE DE NEWTON,

TRADUITE

DU LATIN EN FRANÇAIS;

AVEC

DES NOTES EXPLICATIVES,

PAR NOEL BEAUDEUX.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez BERNARD, Libraire, quai des Augustins, N°. 31.

An X. — 1802.

ANALYSES

DE LA TRADUCTION

DE

L'ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE DE NEWTON,

AVEC DES NOTES EXPLICATIVES;

PAR LE C. BEAUDEUX.

EXTRAIT DE LA BIBLIOTHEQUE FRANÇAISE.

« UN des livres qui mérite le premier rang, dit Montucla, est l'*Arithmetica* » *universalis*. Il suffit d'en nommer l'Auteur, pour en faire concevoir la plus » grande idée; à la vérité, nous ne conseillerons pas cet ouvrage à ceux qui » ne sont pas encore initiés dans l'Algèbre, et dans l'analyse appliquée à la » Géométrie; mais nous dirons avec confiance à ceux qui s'y sont familiarisés : » *Nocturnâ versate manu, versate diurnâ.* On doit cependant avertir qu'il y a » dans ce chef-d'œuvre de Newton, des endroits qui sont de nature à ne pou- » voir être entendus que par des personnes déjà versées dans l'analyse. Telles » sont diverses méthodes nouvelles sur l'invention des diviseurs, sur la déter- » mination des limites, et du nombre des racines imaginaires dans les équa- » tions, etc. C'est pourquoi il seroit à désirer qu'un habile analyste entreprît » un commentaire sur ces objets épineux. Un auteur Italien (*Lecchi*), a

» donné, il y a quelques années, un ouvrage sur ce titre ; mais on peut lui » appliquer ce qu'on a dit de bien des commentateurs : *in re difficili mutus.* »

Annoncer la traduction et les notes du Cit. Beaudeux, c'est assurer que le vœu de Montucla est rempli.

Depuis long-temps, les ouvrages de Newton ne sont guère qu'entre les mains d'un très-petit nombre de savans. Si le hasard en fait rencontrer un exemplaire dans le commerce, il faut y mettre un prix exorbitant pour se le procurer. Ce n'est pas que les sublimes découvertes de ce Grand Homme n'aient été consignées, et même considérablement perfectionnées dans les écrits des Géometres qui sont venus après lui ; mais il est si naturel à ceux qui veulent s'instruire, d'aimer à consulter quelquefois l'original, et à puiser dans la source même ! L'extrême rareté de ce livre immortel, d'une part, et de l'autre, l'abandon presque total de l'étude de la langue latine, depuis onze ans, devoient donc effrayer les amateurs des sciences, et leur inspirer le juste désir de voir promptement imprimée, et traduite pour la première fois en Français, l'*Arithmétique universelle de Newton.*

Le C. Beaudeux vient de se charger de cette noble et pénible entreprise ; il l'a exécutée avec le plus grand succès. Ce Mathématicien a comblé les désirs de ceux qui s'intéressent au progrès des sciences, par les éclaircissemens et les notes intéressantes qui accompagnent sa traduction. Les démonstrations omises par l'Auteur, il les supplée quelquefois de plusieurs manières ; les principes qui servent de fondement à certaines propositions, et que souvent *Newton* ne fait que supposer, il les développe avec clarté et précision ; les passages obscurs, il les éclaircit avec une adresse et une célérité qui ne laissent rien à désirer. En un mot, par ses soins, un ouvrage qui, jadis, ne pouvoit être entendu que par quelques Géomètres, sera lu désormais sans peine, par tous ceux qui aspirent à le devenir.

Le discours préliminaire du C. Beaudeux présente des détails pleins d'intérêt sur Newton, des rapprochemens très-lumineux sur l'histoire des sciences, une exposition très-bien faite de l'Arithmétique universelle, et suffiroit pour la réputation de son Auteur.

Dans le *premier tome*, l'Auteur, après avoir exposé rapidement les premières règles de l'Arithmétique et de l'Algèbre, l'extraction de la racine carrée et cubique, le calcul des quantités radicales, et la réduction des fractions, soit au même dénominateur, soit à de moindres termes, se hâte d'arriver à la méthode qu'il a inventée, pour trouver les diviseurs d'une quantité polynôme. Il part de ce principe (que le Traducteur démontre ensuite), qu'aucun diviseur du dernier terme ne peut être adopté pour former avec l'inconnue le diviseur d'un polynôme, s'il n'est moyen proportionnel arithmétique entre deux diviseurs qui proviendroient de deux autres suppositions, et en faisant voir que la différence de cette progression peut être un nombre plus grand que l'unité, il a soin d'observer que l'inverse de sa proposition générale n'est pas vraie; observation bien essentielle, qui paroît avoir échappé à quelques mathématiciens qui, depuis, ont exposé la même méthode, d'après le livre de *Newton*. Tant il est vrai que, pour bien saisir l'esprit et la marche d'un auteur, il est souvent nécessaire de consulter ses ouvrages!

Je ne parlerai ni de la recherche qu'il continue de faire des diviseurs à deux dimensions des quantités numériques et littérales, ni des exemples d'élimination, dont il se contente de donner les résultats, pour ménager au Traducteur le plaisir d'en fournir la démonstration; je ne dirai pas non plus que cette méthode d'éliminer, consiste à multiplier chacune des deux équations par les coëfficiens réciproques des termes que l'on veut faire disparoître, et à les soustraire ensuite, ou à les ajouter, pour parvenir à l'équation finale. Pourquoi enfin parlèrois-je de l'extraction de racine carrée ou cubique, des grandeurs en partie rationnelles et en partie incommensurables, qu'il traite avec tant de soin et tant de profondeur, sinon pour rappeler que les auteurs classiques paroissent aujourd'hui (on ne sait pourquoi), négliger une méthode d'autant plus propre à fortifier les commençans dans le calcul des quantités radicales, qu'elle est plus nécessaire dans toutes les applications de l'analyse? Arrêtons-nous un instant de préférence à la règle qu'il donne pour mettre en équation les problèmes arithmétiques et géométriques.

Ici l'Auteur met continuellement en pratique cette maxime importante : Les *exemples sont plus utiles que les préceptes*. C'est donc par des exemples multipliés et bien choisis, qu'il enseigne, et force pour ainsi dire le lecteur à traduire lui-même en langage algébrique les conditions d'une question arithmétique. Que dirai-je de son application de l'Algèbre à la Géométrie? Quelle variété! quelle multitude de problèmes! Que d'élégance et de sagacité dans les différentes solutions qu'il en donne! Comme il est attentif à faire connoître les divers procédés qui peuvent conduire à des équations plus simples et à des constructions plus faciles? Quelquefois, il est vrai, on a de la peine à le suivre; un principe supposé dans le cours d'une démonstration,

A 2

peut arrêter le lecteur ; mais le traducteur est un guide assuré qui lui fait bientôt retrouver sa route primitive.

Le *deuxième tome* comprend les principales propriétés des équations, et leur construction linéaire.

Et d'abord Newton fait voir par des considérations géométriques, comment une équation peut avoir plusieurs racines. Il prouve, à l'aide d'une simple figure, que l'équation du cinquième degré, à laquelle on est conduit pour la quinti-section de l'angle, renferme nécessairement cinq racines. Cette vérité, sans doute, peut être démontrée par le seul secours de l'analyse ; mais convenons qu'un exemple tiré de la Géométrie la rend encore plus sensible et plus palpable.

Il passe ensuite à des recherches sur le nombre des racines imaginaires, et à la sommation des puissances d'un certain ordre de racines de toutes les équations. Bientôt il détermine les limites de ces mêmes racines, apprend à réduire les équations elles-mêmes par la méthode des diviseurs incommensurables, et se sert de la méthode de *Descartes*, pour résoudre une équation du quatrième degré. En admirant son extrême fécondité et ses ressources inépuisables, qu'il nous soit permis de remarquer que le Traducteur a perfectionné la méthode de *Mac-Laurin*, déjà plus générale que celle de Newton, et qu'il donne une démonstration à la fois neuve et ingénieuse de ce théorême : savoir ; *Que toute équation à deux termes, d'un degré pair, ne peut jamais avoir plus de deux racines réelles, et qu'une équation à deux termes, d'un degré impair, n'en peut jamais avoir plus d'une.*

Newton termine son livre par la construction linéaire des équations. Il expose, développe, et simplifie la méthode de *Descartes* pour résoudre les équations du troisième degré ; c'est par la combinaison de la ligne droite avec la conchoïde et le cercle, qu'il détermine les trois racines de l'équation, à laquelle conduit le problême de la tri-section de l'angle ; c'est par l'intersection de la parabole et du cercle, qu'il trouve deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. Enfin, le Traducteur, réparant une omission de l'Auteur, prouve, dans un supplément, que toute équation du quatrième degré est susceptible d'être construite par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle.

Tel est en substance l'exposé des matières contenues dans cet Ouvrage. Je regrette que les bornes prescrites pour une simple analyse ne me permettent pas d'entrer dans de plus longs détails, non sur le mérite d'un livre qu'il seroit superflu de vanter, mais sur les notes que fournit le Traducteur. Je me contente de remarquer qu'il a eu l'attention, toutes les fois qu'il l'a pu, sans s'écarter de son sujet, de nous faire part des découvertes qui ont été faites par les Géomètres modernes, en y ajoutant des développemens précieux. Bien différent de ceux qui, dépourvus même du talent de la rédaction, couvrent leur pauvreté d'une richesse étrangère, sans rendre hommage aux auteurs dont ils empruntent leur éclat, ce Traducteur géomètre sépare avec une modeste franchise ce qui est à lui de ce qui ne lui appartient pas. Ainsi, au mérite de conserver l'*Arithmétique universelle*, qui contient les plus belles productions du siècle dernier, il joint celui de nous présenter en même temps le tableau d'une partie des productions qui honorent notre siècle; double titre qui lui assure des droits à la reconnoissance des savans et de la postérité.

On remarque avec plaisir que l'exécution typographique de cet ouvrage est d'une grande perfection; elle est digne de l'Editeur des *Œuvres complètes de Montesquieu*. Les mathématiciens sauront gré au C. Bernard du Catalogue des éditions de Newton, qui est à la fin de celle-ci.

GUILLARD, *Professeur de mathématiques à Paris.*

EXTRAIT DE LA DÉCADE PHILOSOPHIQUE, LITTÉRAIRE ET POLITIQUE.

Cet Ouvrage, publié en 1707, avoit été composé, trente ans auparavant, pour servir aux leçons que donnoit son immortel Auteur dans l'Université de Cambridge, où il étoit professeur de mathématiques. Peu volumineux, comme tous les bons livres que la réflexion a mûris, celui-ci mérita non seulement d'être mis au nombre des plus excellens livres élémentaires, mais encore de tenir une place remarquable parmi les ouvrages d'invention, qui augmentent le domaine de la science par des vérités neuves et importantes. Voici ce qu'en disoit, sous ce dernier rapport, l'abbé de Gua, Géomètre de l'Académie des Sciences, en 1741.

« Quoique Newton fût né, dit-il, dans un temps où l'analyse paroissoit déjà » presque parfaite, *cependant un si grand génie ne pouvoit manquer de trouver* » à y ajouter encore. Il a donné en effet, successivement, dans son *Arithmé-* » *tique universelle* : 1°. *Une règle très-élégante et très-belle pour reconnoître* » les cas où les équations peuvent avoir des diviseurs rationnels, et pour déter- » miner, *dans ces cas, quels polynômes peuvent être ces diviseurs*; 2°. Une » autre règle pour reconnoître, dans un grand nombre d'occasions, combien il » *doit se trouver de racines imaginaires dans une équation quelconque*; une » troisième pour déterminer d'une manière nouvelle les limites des équations ; » *enfin une quatrième pour découvrir en quel cas les équations des degrés pairs* » peuvent se résoudre en d'autres de degrés inférieurs dont les coëfficiens ne » *contiennent que de simples radicaux du premier degré* ».

Considérée comme ouvrage élémentaire destiné aux commençans, l'Arithmétique universelle nous paroît encore plus recommandable. C'est un modèle de méthode, de précision, d'élégance : c'en est un dans l'art de généraliser ses idées, dans le choix des problèmes, dans la variété des solutions.

Ce qui embarrasse les commençans en algèbre (et le livre dont il s'agit est un traité de cette science) ce qui, dis-je, est difficile pour eux, ce n'est pas de comprendre, ni de suivre le mécanisme de cette langue jusques dans ses moindres détails, un esprit ordinaire en vient facilement à bout; c'est de saisir, dans une question, les rapports que les grandeurs ont entr'elles, et de les traduire en langage algébrique. On n'a point de règles générales à ce sujet, et il est impossible d'en trouver, parce que les principes d'où dérivent les rapports sont différens dans les problèmes de différens genres. Il n'y a que l'habitude d'envisager ces sortes de questions, de les discuter, de les varier, qui puisse, après beaucoup d'exercice, donner de la facilité dans ces recherches. Aussi Newton semble-t-il s'être proposé principalement de plier les esprits à cette habitude. La moitié de son livre n'a point d'autre objet. Les sujets des questions qu'il présente sont pris dans toutes les parties de nos connoissances auxquelles l'algèbre est applicable : elles sont choisies avec tant de soin, et disposées avec tant d'art, qu'un jeune esprit a besoin de déployer à chaque instant une sagacité nouvelle, et qu'en même temps, à chaque pas, il a le sentiment agréable de l'accroissement de ses forces.

Nous avons aujourd'hui des traités d'algèbre plus étendus et plus complets; différens points de la science y sont éclaircis et présentés avec plus de développemens : cela doit être, puisque la science a été perfectionnée depuis Newton : cependant, quels que soient le mérite et la réputation de ces ouvrages, celui-ci peut rivaliser avec eux, et seroit digne au moins de passer un des premiers dans les mains des jeunes géomètres.

La langue latine dans laquelle fut écrite l'Arithmétique universelle, étoit un obstacle à ce que cet Ouvrage servît aux commençans, même dans les temps où le latin étoit plus cultivé qu'aujourd'hui. Le C. Beaudeux a donc rendu un service réel à la science, en transportant dans notre langue cet Ouvrage intéressant. Il est juste de lui en témoigner de la reconnoissance, et de lui décerner le tribut d'éloges qu'il mérite, par la manière dont il a rempli cette tâche pénible; et c'est une chose d'autant plus fondée, que, dans les ouvrages de cette nature, après le sentiment d'avoir bien fait une chose utile, le suffrage de quelques lecteurs est presque la seule récompense de l'Auteur. Au surplus, l'Arithmétique de Newton n'a rien perdu dans les mains du C. Beaudeux. On trouve dans la traduction la même clarté, autant de concision et de netteté que dans l'original; il nous a paru impossible de rendre avec plus d'exactitude l'esprit et la lettre de son Auteur.

Les notes que le Traducteur ajoute pour éclaircir le texte, ou suppléer des choses découvertes depuis Newton, sont toujours nécessaires, et ne laissent rien d'obscur ; c'est tout ce qu'on désire dans un commentaire. Le C. Beaudeux a soigneusement évité le défaut ordinaire des commentateurs qui se croient obligés de tout dire, comme si l'auteur original n'eût pas exprès laissé çà et là des intervalles à remplir pour l'instruction et l'agrément du lecteur. Ce sont nos propres pensées qui nous instruisent ; le meilleur maître, ou le meilleur livre, est celui qui les fait naître.

Cet Ouvrage annonce un savant bien propre à briller dans l'instruction publique. Si le C. Beaudeux peut y être appelé, nous ne doutons pas qu'il ne soit un professeur très-distingué.

La partie typographique de l'ouvrage a été soignée : le texte est exact, les planches sont bien gravées, la plupart des calculs sont figurés et tenus hors du texte, le caractère et le papier sont agréables à l'œil. Tout cela ne fait pas le bon livre, mais contribue plus qu'on ne croit à en faciliter l'intelligence. Cette réflexion tient aux travaux du C. Bernard qui est ce que doivent être tous ceux qui exercent sa profession, homme éclairé, en même temps que libraire, et qui sait aimer les sciences, leur être utile, et avoir des amis parmi ceux qui les cultivent.

L. Lefèvre-Gineau, *membre de l'Institut national, et professeur au Collége de France.*

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

Il serait superflu de vanter le mérite d'un Ouvrage de Mathématiques sorti des mains du grand Newton. Son nom respectable suffit seul pour persuader que son livre renferme tous les trésors du génie. L'éloge de l'auteur, qui est dans toutes les bouches, n'est-il pas en même temps celui de tous ses ouvrages? Plus on l'étudie, plus on est frappé d'admiration pour ses inépuisables ressources. Quelle multitude, quelle variété de questions! Que d'élégance, que de profondeur dans ses moyens de les résoudre! on croirait qu'il se joue avec les difficultés. Tantôt il traite un même sujet de dix manières différentes; tantôt il fait des applications neuves et inattendues des principes les plus simples et les mieux connus; tantôt se créant de nouvelles méthodes, il s'avance par des sentiers où jamais on n'avait pénétré avant lui. Il sème par-tout l'instruction sur ses pas; mais moins prodigue de lumières, il dérobe souvent, à dessein, le flambeau qui le guide: alors ceux qui le suivent, ne tardent pas à le perdre de vue, et ce n'est qu'après l'avoir cherchée longtemps qu'on peut retrouver sa trace. Il n'appartenait sans doute qu'aux savans de l'admirer; mais leurs acclamations ont été si unanimes, que la multitude enfin les a entendues, et la France, aussi bien que l'Angleterre, ne le nomme plus aujourd'hui que le Grand Newton. Son nom est devenu le symbole du génie des hautes sciences, comme ceux de Cicéron et de Démosthènes le sont de celui de l'éloquence. Les Anglais sont fiers, et avec raison, d'avoir vu naître parmi eux un si grand homme; ils lui ont prodigué les éloges les plus pompeux; et les Français, malgré leur rivalité, n'en ont point été jaloux. Newton, au contraire, a été loué et admiré parmi nous, plus peut-être que s'il eût été notre concitoyen. Au reste, jamais éloges n'eurent un plus digne objet; Newton doit être regardé comme un bienfaiteur de l'humanité entière, puisqu'il l'a éclairée. Sa main est parvenue à soulever un petit coin du voile, et nos yeux ont pu entrevoir quelques-unes de ces loix admirables qui régissent l'univers. Ce grand homme devait être frappé plus qu'un autre de ce magnifique spectacle; aussi ne prononçait-on jamais, en sa présence, le nom de la Divinité, sans qu'il se découvrît et s'inclinât profondément.

Il est probable que la Nature, toujours la même, a produit dans tous les temps des hommes de génie capables des plus grandes choses; mais les circonstances où ils sont nés, ne leur ont pas toujours permis de se développer; mille accidens ont pu les arrêter au milieu de leur course. Quelques gondoliers de Venise, trois ou quatre matelots Hollandais n'ont-ils pas été sur le point de ravir aux sciences, les immortelles découvertes de Descartes et de Leibnitz (1)? Et parmi ceux même

(1) Descartes avait pris à Embden un bateau pour le conduire lui et son domestique en Hollande; les mariniers formèrent le complot de le tuer pour

qui peuvent se livrer aux travaux où leur penchant les entraîne, combien en est-il qui, ne trouvant pas les circonstances préparées, ne font rien de ce qu'ils auraient pu faire? Il faut des hommes aux circonstances, mais il est encore plus vrai peut-être qu'il faut des circonstances aux hommes. Combien aujourd'hui cette vérité est frappante! Sans la terrible révolution qui vient d'ébranler le monde, verrions-nous dans le Héros, pacificateur de l'univers, la grande ame, et la fortune d'Alexandre, le génie réparateur de Charlemagne, de Henri IV et de Sully? La nature n'a rien fait en créant un grand homme, si elle ne l'entoure en même temps des circonstances propres à manifester ses talens. La conception la plus heureuse est condamnée à la stérilité, si les idées qui doivent la rendre féconde, ne sont pas nées encore. Sans la mesure exacte d'un degré de la terre, donnée antérieurement par Picard, Newton eût abandonné ses spéculations comme inexactes; et qui sait combien de temps nous aurions été privés de la sublime théorie de l'attraction! Il est probable du moins que la gloire de cette découverte

---

s'emparer de ses dépouilles : heureusement, ne le soupçonnant pas d'entendre le hollandais, ils tinrent leur conseil en sa présence. Aussitôt Descartes mettant l'épée à la main d'un air fier, menaça de percer le premier qui oserait s'approcher de lui, et cette fermeté le sauva.

Leibnitz allant de Venise à Mesola, fut surpris par une tempête; les matelots persuadés qu'un Allemand ne pouvait être qu'un hérétique, résolurent de le jeter à la mer, croyant par-là calmer la colère céleste. Leibnitz qui les entendit, tira sans affectation un chapelet de sa poche, et se mit à le réciter; son action désarma ces fanatiques.

eût été réservée à un autre. Les connaissances humaines sont liées les unes aux autres par une chaîne invisible, dont chaque anneau a sa place marquée; si un seul manque, ou est dérangé, tout l'ordre est détruit. Ce fut donc un bonheur singulier pour Newton, d'être né au milieu des circonstances les plus propres à développer tout son génie, d'avoir été précédé par une foule de grands hommes dont les travaux, pendant deux cents années, avaient créé ou ressuscité tous les genres de sciences.

Depuis le milieu du quinzième siècle, une grande fermentation agitait tous les esprits; toutes les nations de l'Europe paraissaient se réveiller à-la-fois d'un long engourdissement. Avant cette mémorable époque, on sait dans quelle stupide ignorance croupissaient tant de peuples, devenus aujourd'hui si célèbres par la culture des sciences et des lettres. L'astronomie alors n'était que l'art de deviner les événemens futurs; la géométrie, négligée ou méprisée, n'offrait plus qu'un enfantillage digne tout au plus d'amuser des esprits oisifs (2). La physique, entièrement fondée sur des qualités occultes, ou sur des hypothèses chimériques, avait oublié depuis long-temps, ou peut-être n'avait jamais bien su, que son seul, son véritable guide est l'expérience; la chimie ne cherchait que le grand-œuvre; la botanique n'existait pas; l'anatomie était presque regardée comme un crime (3); qu'on juge de ce que devait être la

(2) Les quarrés magiques et d'autres spéculations aussi stériles occupaient alors beaucoup les mathématiciens.

(3) Il faut pourtant convenir que cette prévention de la multitude, contre

médecine ! La jurisprudence consistait à faire combattre l'accusé contre son accusateur ; la géographie n'était qu'un assemblage de souvenirs confus ou de notions incertaines ; les nations voisines, sans communications entre elles, étaient plus inconnues les unes aux autres que ne le sont aujourd'hui les peuples séparés par un diamètre de la terre (4) ; les Arabes, soumis à l'empire des Califes, étaient, à la vérité, un peu moins barbares ; ils cultivaient avec quelques succès les mathématiques et l'astronomie ; le Calife Almamon avait envoyé, dans les plaines de Sennaar, deux astronomes-géomètres pour y mesurer un degré du méridien terrestre ; mais toutes leurs autres études se réduisaient à commenter les ouvrages de quelques philosophes grecs, et principalement ceux d'Aristote ; et c'est d'eux enfin que nous avons hérité cette scholastique barbare, mille fois plus détestable qu'une ignorance absolue, puisqu'elle étouffa si long-temps la vraie philosophie.

---

les premiers restaurateurs de l'anatomie, pouvait paraître excusable. Les plus célèbres anatomistes de l'antiquité, Hérophile et Erasistrate disséquaient tout-vifs des criminels qu'on leur livrait ; et lorsque Berenger de Carpi voulut recommencer les expériences anatomiques, ses envieux ne manquèrent pas de publier, qu'il imitait ces anciens anatomistes, en disséquant des hommes vivans. Malheureusement Vesale qui le suivit de près, donna une apparence de vérité à ces calomnies ; il ouvrit le corps d'un gendarme espagnol qu'il croyait mort et qui ne l'était pas. Il fut condamné par l'Inquisition, à faire le voyage de la Terre-Sainte, et à son retour, il mourut de misère dans l'île de Zante.

(4) Jusques vers le milieu du quinzième siècle, on connaissait très-mal l'étendue de la Méditerranée. Gemma-le-Frison qui passait pour habile astronome, dans un livre qu'il publia en 1530, donne 53 degrés pour la différence en longitude entre Tolède et le Grand-Caire : c'est-à-dire 18 degrés de trop.

Arrivèrent enfin ces trois grandes découvertes qui devaient changer la face de la terre, je veux dire celles de l'imprimerie, de la poudre à canon, et d'une quatrième partie du globe. Esquissons rapidement la révolution qui s'opéra dans l'esprit humain par rapport aux sciences mathématiques. C'est l'immortel Copernic qui donne le signal. Après un demi-siècle de méditations, il parvient à découvrir le véritable système du monde, et à l'établir sur les bases les plus solides; il sent le besoin de quelques preuves nouvelles, mais le temps seul peut les révéler, et il ose se les promettre. S'il était vrai, lui objectait-on, que toutes les planètes tournent autour du Soleil, Vénus aurait des phases que nous devrions appercevoir; *aussi les appercevrez-vous*, répondait-il, *lorsque vous aurez trouvé l'art de perfectionner vos yeux*. Les savantes et nombreuses observations de Tico-Brahé procurent bientôt à son disciple, le savant et ingénieux Képler, le bonheur de rencontrer les loix fondamentales de l'astronomie, ces loix que la plus profonde géométrie, et deux siècles d'observations ont mises aujourd'hui au-dessus des atteintes même du doute (5).

---

(5) Il est bien étonnant que la même tête qui a pu découvrir ces sublimes loix, ait pu également enfanter les plus singulières chimères. Képler voulait savoir pourquoi les planètes sont au nombre de sept; pourquoi leurs orbites avaient les dimensions que Copernic leur avait assignées par ses observations; et quelle était enfin la cause de leurs révolutions. Euclide avait démontré qu'il n'y a que cinq corps réguliers; c'en fut assez pour que Képler imaginât une analogie mystérieuse entre ces cinq corps et les sphères des planètes. Il crut qu'un cube inscrit dans la sphère de Saturne, toucherait par ses six pans la sphère de Jupiter; et que les quatre autres corps réguliers avaient de semblables rapports avec les sphères des autres planètes. Il crut trouver une ressemblance entre les distances

Le grand Galilée découvre les loix de l'accélération des corps graves, les quatre satellites de Jupiter, et confirme par une nouvelle preuve le systême de Copernic, en appercevant le premier les phases de Vénus; il reconnaît aussi la pesanteur de l'air, qu'il tâche de comparer à celle de l'eau; mais une connaissance plus approfondie de ce phénomène était réservée à son disciple Toricelli et à Pascal (6). François Bacon, sans faire lui-même aucune découverte importante, trace, d'une main guidée par le plus pénétrant génie, la route

---

moyennes des planètes au soleil et les intervalles des sept tons de la musique. Pour expliquer le mouvement des planètes autour du soleil, il suppose dans ces corps célestes une vertu semblable à celle de l'aimant; et comme deux aimans s'attirent par les pôles opposés et se repoussent par les pôles semblables, Képler explique par ce principe le mouvement des planètes vers le périhélie, et leur retour à l'aphélie, en supposant que, dans le premier cas, la planète présente au soleil son côté ami, et dans le second, son côté ennemi. Cette dernière idée ne ressemble point aux précédentes, elle est certainement très-ingénieuse, et j'ignore pourquoi Voltaire, *dans ses Élémens de la Philosophie de Newton*, la trouve si ridicule. Je sais bien que la géométrie fait voir sa fausseté, en démontrant que, si la planète parvenue en périhélie était repoussée par le soleil, elle s'en éloignerait par une courbe dont la convexité serait tournée vers cet astre, ce qui rendrait impossible son mouvement périodique; mais du temps de Képler on ne savait pas calculer le mouvement dans les courbes, et il n'est pas étonnant qu'il n'ait pu deviner de si loin, la seule objection raisonnable qu'on pût faire à son hypothèse. Pour moi, si j'osais dire ma pensée, je serais porté à croire que cette idée de Képler n'a pas été inutile à Newton.

(6) Galilée déduisit encore de sa théorie de la chûte des corps graves ce beau théorême : *Que dans un cercle vertical, le temps de la chûte par une corde inclinée à l'horizon, est plus grand que le temps de la chûte par l'arc de cette corde;* mais il eut tort d'en conclure, qu'entre deux points donnés dans une ligne non-verticale, la brachystochrone, ou la ligne de plus vîte descente est un arc de cercle; car Jean Bernouilli a démontré depuis, que c'est un arc de cycloïde.

de toutes les découvertes. Descartes, qui eût été peut-être le plus grand philosophe de la terre, s'il se fût moins abandonné à son imagination, Descartes, fatigué de voir les hommes courbés depuis si long-temps sous le poids de l'autorité, secoue avec violence toutes leurs chaînes, les brise, et donne à leur raison une direction différente. Dans les circonstances où il se trouve, il croit qu'il faut étonner, par des coups d'audace, des esprits façonnés au joug d'un ancien esclavage; il détruit les vieux systêmes, il en crée un nouveau, et si le sien n'est plus regardé aujourd'hui que comme une chimère, on ne lui en a pas moins l'obligation très-réelle d'avoir donné une grande et salutaire impulsion. Mais il a laissé, dans les mathématiques, des monumens plus durables de sa gloire. Le premier, il imagina de déterminer la nature des courbes à double courbure par deux équations variables: que ne doit pas la haute géométrie à son ingénieux artifice des indéterminées? Sa *dioptrique* est la première et une des plus brillantes applications de l'analyse à la physique; mais sa plus importante découverte est l'application de l'algèbre à la géométrie des courbes; idée, dit d'Alembert, la plus vaste, la plus féconde qu'ait jamais conçue l'esprit humain. Enfin, le célèbre Huygens découvre l'anneau de Saturne, et un satellite de cette planète. Digne rival des anciens, il parvient par la synthèse à sa profonde théorie des forces centrales, à celle des développées (7),

---

(7) Huygens a découvert la loi des forces centrales dans le cercle, ainsi que celles des développées, et c'est en réunissant ces deux théories, que Newton

et

et Newton paraît sur la scène des sciences. Il était alors âgé de ving-un ans (8). Parcourir les Elémens d'Euclide et les comprendre ne furent pour lui qu'une même chose. Il crut que la Géométrie de Descartes lui présenterait des objets plus dignes de fixer son attention; il l'étudia soigneusement. Les ouvrages de Wallis, l'optique de Képler partagèrent aussi ses momens. Mais en étudiant les pensées des autres, son génie inventeur

---

est parvenu à en déduire la loi générale des forces centrales dans une courbe quelconque. Au reste, quoiqu'il n'y eût plus, en apparence, qu'un pas pour arriver des théorèmes particuliers de Huygens au théorême général que Newton a trouvé, qu'on n'imagine pas qu'il fût aisé de le faire. Une conséquence nouvelle tirée d'un principe connu, est l'œuvre d'un grand génie. Que Snellius ait connu la loi de la réfraction des rayons solaires, lorsqu'ils passent d'un milieu dans un autre, d'une densité différente, cette observation aurait pu rester stérile pendant des siècles; Descartes s'en empara, et bientôt elle devint la base d'une science nouvelle et intéressante. Qu'on ne croie pas cependant, que je partage en aucune manière l'opinion de ceux qui prétendent, que Descartes est redevable à Snellius de cette découverte, qui n'était au fond qu'une belle expérience : cette opinion n'est fondée que sur des ouï-dire; mais le fût-elle sur la vérité, cela ôterait bien peu de chose à la gloire de Descartes. Le hasard peut offrir à des yeux vulgaires un fait important, l'homme de génie seul peut en tirer un parti avantageux, et jusqu'à ce qu'il se présente, le domaine des sciences n'est enrichi que d'un fait nouveau. La propriété qu'a l'aimant d'attirer le fer, était connue des anciens : long-temps après on s'apperçut de sa tendance vers le Nord; mais combien s'est-il écoulé de siècles, avant qu'on imaginât d'en faire un des plus précieux instrumens de la navigation? De tout temps les hommes ont vu la fumée s'élever dans l'air : toujours ils ont desiré de s'y élever eux-mêmes; la fable de Dédale et d'Icare, mille tentatives infructueuses faites à différentes époques, en sont un assez bon témoignage; et pourtant ce n'est que de nos jours, et avec le seul secours de la fumée, que Mongolfier leur a révélé l'art de traverser l'athmosphère.

(8) Il naquit le 15 décembre 1642, à Volstrope, dans la province de Lincoln. Il avait étudié à Grantham et à Cambridge.

répandait par-tout des vues nouvelles. Il ne recevait en quelque sorte de Descartes, de Képler ou de Wallis, que le texte de ses méditations. C'est ainsi, qu'en cherchant à perfectionner la Méthode d'Interpolation de ce dernier, il trouva celle des séries par l'extraction des racines, et par la division.

La Géométrie de Descartes lui fournit l'idée de son *Arithmétique Universelle*. Dans cet ouvrage il perfectionne plusieurs règles inventées par Descartes, et en imagine beaucoup d'autres. Descartes avait enseigné que les racines commensurables d'une équation se trouvent parmi les diviseurs de son dernier terme; mais il fallait en essayer un grand nombre, et c'est un travail fastidieux. Newton apprit à réduire considérablement les essais, et donna une belle règle pour trouver les diviseurs commensurables de deux dimensions. Descartes avait reconnu par les signes d'une équation, le nombre de ses racines positives et celui de ses racines négatives, mais il limite lui-même sa règle aux équations qui ne contiennent point d'imaginaires. Newton fit voir qu'elle est générale, en démontrant que parmi les imaginaires il en est qui doivent être classées parmi les racines positives, et d'autres parmi les négatives; et il donna en même temps une méthode pour reconnaître le nombre des racines imaginaires qu'une équation peut contenir. Sa règle échoue dans plusieurs cas; mais elle mit du moins sur la voie le célèbre Mac-Laurin, qui en a trouvé une qui réussit bien plus souvent. Descartes avait donné la méthode de déterminer les limites des racines des équations qu'on peut résoudre exactement; Newton en donna une pour trouver les limites des racines d'une équation quelconque. Enfin, Descartes avait construit, par le moyen des sections coniques, les équations du troisième et du quatrième degrés; Newton suivit son exemple, simplifia sa méthode en plusieurs points, et imagina lui-même de construire ces équations de la manière la plus élégante par la combinaison de la conchoïde avec la ligne droite et le cercle. Je ne finirais pas, si je voulais faire le détail de toutes les choses neuves et intéressantes qu'il a répandues dans son *Arithmétique Universelle.* On pensera peut-être que j'en ai déjà trop dit sur cet article; mais on voudra bien considérer que c'est le traducteur de cet ouvrage qui parle, et on ne trouvera plus étrange qu'il en ait fait une mention un peu détaillée.

Suivons, s'il est possible, Newton dans ses progrès. L'optique de Képler et celle de Barrow lui donnèrent les premiers élémens de cette science; mais bientôt elle changea de forme dans ses mains. Il ne tarda pas à s'appercevoir que les différens rayons de la lumière sont doués d'une réfrangibilité différente; et cette découverte importante fit une révolution dans la science (9). L'arc-en-ciel, ce phénomène si ravissant, et qui

---

(9) Si l'on fait passer un rayon de lumière à travers un petit trou fait à la fenêtre d'une chambre obscure, et qu'on le reçoive sur un prisme, il peindra toutes les couleurs de l'arc-en-ciel dans toute leur vivacité, sur un papier blanc, savoir le rouge, l'orangé, le jaune, le verd, le bleu, l'indigo et le violet. Chacun de ces rayons colorés conserve toutes les propriétés de la lumière, il se propage en ligne droite, il se réfléchit sur la surface d'un miroir, il se rompt en passant à travers une lentille, mais il conserve toujours sa même couleur, et ne se décompose plus. Si on rassemble ensuite tous ces rayons au foyer d'un verre convexe, leur réunion compose une lumière blanche fort éclatante; mais comme

exciterait bien plus notre admiration s'il frappait moins souvent nos yeux, était pour les anciens un problême inexplicable; *Antonio de Dominis* en avait ébauché la théorie, Descartes l'avait considérablement perfectionnée; mais Newton, par ses nouvelles expériences, fut le premier en état d'en donner une explication complète et satisfaisante. Il fut même conduit bientôt à une idée plus utile encore, je veux dire celle du télescope de réflexion. Je sais bien que la première conception de cet instrument ne lui appartient pas, elle est due au P. Mersenne; et le savant Grégori d'Abeerden eut aussi avant lui la même idée. Mais ni Mersenne, ni Grégori ne l'exécutèrent; l'un n'en fit pas même la tentative, parce qu'il en fut détourné par les vives objections de Descartes; l'autre n'étant pas secondé par d'habiles artistes, eut le malheur

---

ils se séparent de nouveau au-delà du foyer, ils reprennent leur première couleur. Telle est l'expérience de Newton, la plus admirable, je crois qu'on ait jamais faite sur la lumière. Quelques auteurs ont prétendu réduire à quatre les sept couleurs qu'il attribue à la lumière; ils se fondaient sur des expériences où l'on n'apperçoit réellement que quatre couleurs, et ils en concluaient que le verd, l'orangé et l'indigo ne sont point des couleurs primitives, mais accidentelles, produites par le mélange de deux couleurs voisines. Mais ces expériences sont trompeuses. En effet, si on reçoit sur un prisme une lumière très-faible, et que l'image soit peu étendue, on n'appercevra réellement que quatre couleurs; qu'on suppose l'image encore plus resserrée, ou la lumière plus faible, et on n'en distinguera plus aucune, on ne verra plus qu'un spectre d'un blanc sale ou rougeâtre. C'est ainsi que le C^{n}. Rochon en recevant sur un prisme armé d'une forte lunette, la lumière d'une étoile, montre distinctement quatre couleurs, le rouge, le jaune, le bleu et le violet, et qu'en employant une lunette plus faible, il fait disparaître le jaune et le bleu qui sont remplacés par le verd. Cette belle expérience en confirmant la théorie de Newton, nous révèle en même temps une vérité bien intéressante, c'est que la lumière des étoiles est de même nature que celle du soleil.

d'échouer ; tous deux ne concevaient que confusément l'utilité de ce télescope ; tous deux ils n'avaient en vue que de remédier à la perte que fait la lumière en traversant le verre d'un télescope dioptrique. Newton avait appris par ses propres découvertes, que quelque forme, ou sphérique, ou hyperbolique, qu'on donnât aux lentilles, on ne pourrait détruire les iris, puisqu'il était impossible de réunir dans un même foyer des rayons différemment réfrangibles (10). Il sentait donc que le seul moyen de parer à ces inconvéniens, était le télescope de réflexion ; et malgré les difficultés d'une première exécution, l'instrument fut construit par ses soins, et répondit aux vues de son auteur. Lorsque Mercator publia, en 1668, sa Méthode

(10) Newton a prouvé que la dispersion des rayons, provenant de la forme sphérique de la lentille, est à la dispersion de ces mêmes rayons, causée par la différence de leur réfrangibilité, comme 1 est à 1200 ; ensorte que dans deux lunettes, l'une à lentille sphérique, l'autre à lentille hyperbolique, les dispersions des rayons seraient représentées respectivement par les nombres 1200 et 1199. On voit donc que l'on gagnerait bien peu de chose, en donnant aux lentilles une forme hyperbolique, tant qu'on laisserait subsister l'erreur bien plus considérable causée par la différence de réfrangibilité. Cette erreur est si grande, que dans une lunette de vingt-sept pieds, les rayons rouges se réunissent à un foyer éloigné de près d'un pied du foyer des rayons verds. Enfin les efforts réunis de quelques grands géomètres et des plus habiles artistes du dix-huitième siècle, à la tête desquels on doit mettre Euler et Dolon, sont parvenus, par l'invention des lunettes achromatiques, à faire disparaître ce défaut capital. On a fait encore quelques nouveaux progrès dans la théorie de la lumière. Madame Duchâtelet conjectura la première, que les couleurs différentes des rayons, devaient être les indices de différens degrés de chaleur ; et cette opinion a été confirmée depuis, par les expériences du C^n. Rochon. Enfin Herschell vient de prouver que le foyer de la chaleur se trouve hors du spectre coloré, un peu au-delà du rayon rouge, ce qui le porte à affirmer, qu'il existe un rayon sans couleur, et par conséquent invisible, mais doué d'un degré de chaleur plus considérable qu'aucun de ceux qu'on apperçoit.

de quarrer l'espace hyperbolique par le moyen des logarithmes, il y avait déjà long-temps que Newton s'étoit créé une théorie générale pour quarrer, soit rigoureusement, soit au moins par approximation, toute espèce de courbes, les rectifier, trouver leurs centres de gravité, leurs solides de révolution, et les surfaces de ces solides (11). Enfin, ce fut dans l'année 1676

---

(11) Voici ce qu'on trouve dans une lettre de Barrow à Collins, sous la date du 20 Juillet 1669.

A friend of mine hire, that hath an excellent genius to these things, brought me the other day, some papers, wherein he hath set down methods of calulating the dimensions of magnitudes, like that of M. Mercator, but very general, as also of resolving equations, wich, I suppose, will please you, and I shall send you them the next.

Un de mes amis (*et cet.ami, c'était Newton*) qui demeure ici, et qui a un génie merveilleux pour toutes ces choses, m'a envoyé dernièrement quelques papiers dans lesquels se trouve une méthode de calculer les dimensions des grandeurs, qui ressemble à celle de Mr Mercator, mais de la plus grande généralité; il y a également des méthodes de résoudre les équations; je vous enverrai le tout incessamment, et j'espère que cela vous fera plaisir.

L'ouvrage célèbre dont il est principalement question ici, est connu sous ce titre : *Methodus fluxionum et serierum infinitarum.* Newton y enseigne d'abord l'art d'approcher aussi près que l'on veut de la valeur des racines des équations; moyen précieux, et qui supplée si heureusement à une méthode générale de résoudre rigoureusement les équations des degrés supérieurs; ensuite il y développe avec assez d'étendue, les premiers principes de sa théorie des fluxions, et l'applique à la géométrie des courbes. Cette découverte immortelle, et qui forme un des plus beaux titres de la gloire de ce grand géomètre, se trouve encore mieux expliquée dans son Traité *de quadraturâ curvarum.* Et comme il n'est rien de tout ce qui peut l'avoir conduit à une si belle invention, qui ne doive exciter le plus grand intérêt, je vais citer les paroles où Newton rend compte lui-même de ses premières pensées : *Considerando igitur quod quantitates æqualibus temporibus crescentes, et crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores,* qu'il parvint à démontrer ce beau théorême de Képler : *Que les planètes décrivent des ellipses autour du Soleil qui est à un de leurs foyers, et que leurs rayons vecteurs parcourent des aires proportionnelles au temps.* Il fit voir, que si on suppose une planète attirée vers un centre, en raison réciproque du quarré de sa distance, elle décrira autour de ce centre, comme foyer, une ellipse, et que son rayon vecteur parcourra des aires proportionnelles au temps. Cette sublime hypothèse, si heureusement appliquée, devint la base du livre *des Principes*. Mais je dois entrer dans quelques détails sur une époque si importante à la gloire de Newton et aux sciences. Nulle part je n'en trouve une histoire qui porte un plus grand caractère de vérité, que dans Pemberton; j'en traduirai ici tout ce qu'il en rapporte (12). « Newton avait abandonné Cambridge, désolée par la peste en 1666, et il s'était retiré à la campagne. Un jour qu'il était assis dans un jardin, il tomba dans la rêverie sur le pouvoir de la gravité; il considéra que cette force n'éprouve aucune diminution sensible ni sur le haut des édifices, ni sur le sommet des plus hautes montagnes; et de là il lui parut raisonnable de conclure, que sa puissance s'étendait beaucoup plus loin qu'on ne l'imaginait

---

methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur, et has motuum vel incrementorum velocitates nominando fluxiones, et quantitates genitas nominando fluentes, incidi paulatim annis 1665 *et* 1666 *in methodum fluxionum quâ hic usus sum in quadraturâ curvarum.*

(12) Voyez la préface de son ouvrage intitulé : *A view of sir Isaac Newton's philosophy*.

» communément; eh! pourquoi, se dit-il en lui-même, ne » s'étendrait-elle pas jusqu'à la lune? Et si cela est ainsi, le » mouvement de cette planète doit en ressentir l'influence; » peut-être est-ce par ce pouvoir qu'elle est retenue dans son » orbite; et quoiqu'il ne paraisse pas diminuer à quelque dis» tance que nous le considérions, par rapport au centre de la » terre, il est probable qu'à un éloignement tel que celui de » la lune, il doit être considérablement affaibli. Pour estimer » le degré de cet affaiblissement, il imagina que si la lune est » retenue dans son orbite par la force de la gravité, cette » même force devait aussi retenir les planètes principales autour » du soleil; et en comparant leurs révolutions périodiques » avec leurs distances à cet astre, il trouva que la gravité » devait diminuer en raison doublée de l'accroissement de la » distance, en supposant que les planètes se meuvent dans des » cercles concentriques au soleil. En effet, la plus grande » partie des orbites diffère peu du cercle. Il chercha donc, si » la gravité agissant selon la même loi sur la lune, ne serait » pas suffisante pour la retenir dans son orbite. Mais étant » privé de livres, il prit pour base de ses calculs l'estimation » qui était en usage parmi les géographes et les marins Anglais, » avant que Norvood eût donné une mesure plus exacte de la » terre, c'est-à-dire qu'il donna 60 milles anglais à un degré » terrestre, au lieu de 69 $\frac{1}{2}$ milles. Une erreur si considérable » dans les bases de son calcul, lui fit conclure que la lune » n'était pas soumise à la seule action de la gravité; et dès» lors il abandonna ses spéculations sur ce sujet. Quelques » années après il reçut du docteur Hook une lettre qui » l'engageait

» l'engageait à rechercher quelle ligne décrit un corps qui tombe » d'un lieu élevé. Or, un tel corps partageant nécessairement » le mouvement de la terre autour de son axe, doit être con- » sidéré comme projeté dans un sens, tandis qu'il est précipité » dans un autre vers le centre de ce globe. Ces recherches le » ramenèrent à ses premières pensées sur la lune. Et Picard, » en France, ayant tout récemment mésuré un degré du mé- » ridien terrestre, Newton se servit de cette mesure, et vit » que la gravité seule agissait sur la lune, qu'elle suffisait » seule pour la retenir dans son orbite, et que par conséquent » la puissance de la gravité allait en diminuant selon la loi » qu'il lui avait d'abord soupçonnée. Sur ce principe, il trouva » que la ligne que décrit un corps en tombant, est une ellipse » qui a un de ses foyers au centre de la terre; et comme les » orbites des planètes principales sont aussi des ellipses, il eut » la satisfaction de voir qu'une spéculation de pure curiosité » pouvait s'appliquer à des objets plus importans. Il se contenta » pourtant de composer quelques propositions relatives au mou- » vement des planètes autour du soleil; et ce ne fut qu'une » douzaine d'années après, que le docteur Halley, dans une » visite qu'il fit à Newton, l'excita à reprendre de nouveau » ce sujet. Alors il commença à travailler à son livre *des* » *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*. » Cet ouvrage, si plein de profondes découvertes, fut achevé » dans l'espace de dix-huit mois, sans autres matériaux que » le peu de propositions dont nous avons parlé ».

Après avoir tracé le tableau raccourci des immenses travaux de ce grand philosophe, je ne dois pas omettre ses opinions sur quelques géomètres et sur leurs ouvrages. Il n'approuvait pas qu'on traitât les sujets géométriques par les calculs de l'algèbre; il regrettait d'avoir souvent lui-même résolu des questions purement géométriques, par les méthodes de l'analyse, et il ne donna le titre d'*Arithmétique Universelle* à son *Traité d'Algèbre*, que par opposition au titre peu réfléchi de *Géométrie* que Descartes avait donné au sien. Il ne cessait de recommander le style et la manière de Huygens; il le regardait comme le meilleur modèle dans l'art d'écrire sur les mathématiques, et comme le plus judicieux imitateur des anciens; il ne tarissait pas sur les éloges qu'il donnait au goût de ceux-ci, à la forme heureuse de leurs démonstrations; il faisait le plus grand cas du livre d'Apollonius *de sectionis ratione*, où l'on peut puiser l'idée la plus claire de leur analyse; il se reprochait de ne les avoir pas suivis plus scrupuleusement, et il ne parlait qu'avec regret, de la fausse route qu'il avait prise au commencement de sa carrière mathématique, en s'appliquant à l'étude des ouvrages de Descartes, avant d'avoir donné aux *Élémens* d'Euclide toute l'attention que mérite un si excellent écrivain (13). Son admiration pour les anciens allait si loin, qu'il lui arrivait souvent de dire, que, si tous leurs ouvrages nous étaient parvenus, il ne serait resté aux modernes aucunes découvertes à faire, dans aucune branche des mathé-

(13) C'est Pemberton qui prête à Newton toutes ces opinions et ces jugemens; et quoiqu'on ne puisse guère douter de sa véracité, il est bon pourtant de faire observer, que le seul géomètre moderne qui soit cité dans l'*Arithmétique universelle*, est Descartes, qu'il l'est plusieurs fois, et toujours d'une manière honorable.

matiques (14). Un tel langage a bien de quoi surprendre dans la bouche de Newton. Il fallait que son extrême modestie l'aveuglât, ou il devait sentir intérieurement que personne n'y aurait perdu plus que lui (15). Plus de trente ans avant sa

(14) Voyez la préface de Coste à la tête de sa traduction de la *Chronologie de Newton.*

(16) Je ne dois pas dissimuler que ce sentiment de préférence que Newton accorde par-tout aux anciens sur les modernes, a trouvé d'illustres adversaires, et a été combattu par de grands exemples. Je vais rapporter les raisons qu'allègue pour la défense de l'analyse mathématique, un de nos plus célèbres géomètres, d'Alembert. Voici comment il s'exprime dans ses *Élémens de Philosophie.*

La géométrie des courbes, dit-il, demande nécessairement l'usage de l'algèbre. Ainsi le premier pas qu'on doit faire dans cette science, est l'explication des principes sur lesquels est appuyée l'application de l'algèbre à la géométrie, c'est par où l'on doit commencer au sortir des élémens, parce que c'est alors que l'algèbre commence à rendre les démonstrations et les solutions plus faciles. Nous n'ignorons pas néanmoins, qu'il y a plusieurs recherches dans la géométrie des courbes, où l'on peut absolument se passer de l'analyse algébrique; nous n'ignorons pas avec combien d'éloges, de très-grands géomètres ont parlé de l'utilité qu'on peut tirer de la méthode des anciens, dans ces recherches, pour donner plus d'exercice à l'esprit, et plus de rigueur aux démonstrations. Mais leurs raisons ne nous paraissent pas fort solides. En premier lieu, n'y a-t-il pas en géométrie, assez de difficultés naturelles à vaincre, pour ne pas en faire naître d'inutiles? A quoi bon user toutes les forces de son esprit sur des connaissances qu'on peut acquérir avec moins de peines? Les propriétés de la spirale que de très-grands mathématiciens n'ont pu suivre dans Archimède, se démontrent d'un trait de plume par l'analyse; serait-il raisonnable de consumer un temps précieux, à suivre avec fatigue dans Archimède, ce qu'il est si facile d'apprendre ailleurs? A l'égard de l'avantage qu'on veut donner aux démonstrations faites à la manière des anciens, d'être plus rigoureuses que les démonstrations algébriques, cette prétention ne nous paraît guère mieux établie. La démonstration algébrique, il est vrai, a cela de particulier, que quand on aura désigné toutes les lignes des figures par des lettres, on pourra faire, au moyen de ces lettres, beaucoup d'opérations et de combinaisons, sans songer à la figure, sans même l'avoir devant les yeux; mais ces opérations, même toutes machinales qu'elles sont, ou plutôt parce qu'elles sont purement machinales, ont mort il avait entièrement renoncé aux mathématiques; il se contentait de jouir en paix de la considération universelle, méritée par tant de grands travaux. Un silence d'une si longue durée avait produit sur l'envie le même effet que le tombeau; il avait cessé de travailler, c'était pour elle comme s'il eût cessé de vivre; aussi goûta-t-il, sur la fin de sa longue carrière, le bonheur bien rare de ne compter plus, parmi ses compatriotes, que des admirateurs ou des disciples. Jusqu'à l'âge de quatre-vingts ans il conserva une santé parfaite, et ce ne fut qu'à cette époque de sa vie qu'il ressentit les premières atteintes d'un mal qui tourmenta ses dernières années. Pendant les cinq

---

l'avantage de soulager l'esprit dans des recherches souvent très-pénibles, et pour lesquelles il a besoin de tous ses efforts. L'analyse lui ménage, autant qu'il est possible, des instans nécessaires de délassement et de repos; il suffit de savoir que les principes du calcul sont certains; la main calcule en toute sûreté, et parvient enfin à un résultat auquel, sans ce secours, on ne serait point parvenu, ou auquel on ne serait arrivé qu'avec beaucoup de peines. Mais il ne tiendra qu'à l'analyste de donner ensuite à sa démonstration, ou à sa solution, la rigueur prétendue qu'on croit lui manquer; il lui suffira pour cela de traduire cette démonstration dans le langage des anciens. Nous conviendrons sans peine que l'usage mécanique et trop fréquent d'une analyse facile et peu nécessaire, rendra l'esprit paresseux, prompt à se rebuter par les obstacles, et par-là moins propre aux découvertes; mais nous ne conviendrons jamais que l'analyse rende les démonstrations moins rigoureuses. On peut regarder la méthode des anciens comme une route tortueuse, difficile et embarrassée, dans laquelle le géomètre exerce et fatigue ses lecteurs; l'analyste, placé à un point de vue plus élevé, voit cette route d'un coup-d'œil; il ne tient qu'à lui d'en parcourir tous les sentiers, d'y conduire les autres, et de les y arrêter aussi long-temps qu'il veut. Enfin (et c'est ici le plus grand avantage de la méthode analytique) combien de questions en géométrie, auxquelles cette méthode seule peut atteindre? Qu'on essaie d'employer à des recherches sur l'astronomie physique, la méthode des anciens, on sentira bientôt l'impossibilité d'y réussir.

ans qu'il vécut encore, il jouit pourtant d'assez longs intervalles de tranquillité, qu'il dut sans doute en grande partie, à un régime extrêmement modéré. Il ne souffrit jamais de grandes douleurs, excepté les vingt-quatre derniers jours de sa vie. On s'apperçut alors qu'il était travaillé par les douleurs de la pierre, et on ne se flatta plus de pouvoir le conserver long-temps (16). Lorsque les accès étaient si violens que son visage en était baigné de sueur, jamais il ne laissa échapper une plainte, jamais il ne montra la moindre impatience; s'il survenait le moindre relâche, le sourire reparaissait sur ses lèvres, et il se livrait au commerce de ses amis, avec son calme accoutumé. Le dix-huit de mars 1727, après avoir conversé long-temps avec le docteur Mead, son ami et son médecin, il perdit tout-à-coup la connaissance, et ne la recouvra plus. Deux jours après, s'éteignit ce flambeau divin qui avait répandu sur toutes les sciences la lumière la plus vive qui les éclaira jamais. Ce fut pour l'Angleterre un deuil public; on plaça son corps sur un lit de parade, dans la salle de Westminster, où sont exposés les grands du royaume, et quelquefois les rois eux-mêmes. Lorsqu'il fut porté au tombeau, le grand chancelier d'Angleterre, les ducs de Montrose, de Roxburg, les comtes de Pembrok, de Sussex, et de Maclesfield soutenaient le poële; la première noblesse suivait le convoi. Il fut déposé dans l'église de Westminster, à la porte du chœur. C'est en rendant de

---

(16) Cette cruelle maladie paraît être le fléau particulier des hommes de cabinet; c'est elle qui nous a enlevé presque en même temps d'*Alembert*, *Buffon*, et qui vient de conduire au tombeau le savant et respectable *Cousin*.

tels honneurs aux restes de ce grand homme, que le peuple Anglais se montra digne de l'avoir vu naître dans son sein.

Newton était d'une stature médiocre, et d'une figure gracieuse; mais dans sa vieillesse sa personne avait quelque chose de vénérable. Son caractère était si doux, si ami de la paix, qu'il eût mieux aimé se condamner à une éternelle obscurité, que de livrer des combats pour soutenir ses opinions. Il était sur le point de publier *ses Leçons d'Optique*, et *sa Méthode des Fluxions et des Séries infinies*, lorsqu'il apprit, par diverses lettres, qu'on lui préparait des objections; c'en fut assez pour le faire changer de dessein. *Je n'aurai pas*, dit-il, *l'imprudence de perdre une chose aussi substancielle que mon repos, pour courir après une ombre.* Il étoit d'une telle modestie, que malgré sa célébrité si justement, si universellement reconnue, il ne montrait aucun entêtement pour ses sentimens. La plus touchante des vertus, la bienfaisance, pouvait-elle être étrangère à une ame si noble? Non, sans doute; aussi Newton en donna-t-il des preuves multipliées envers les malheureux. Il ne voulait point faire de testament, parce qu'il ne croyait pas qu'on pût donner ce qu'on ne possédait plus; mais il faisait souvent des libéralités considérables à ses parens. Les jeunes gens sans fortune, qui montraient d'heureuses dispositions pour les sciences, étaient aussi les objets de ses bienfaits. *Inscrivez-moi pour une somme de vingt livres sterling par an,* mandait-il aux administrateurs du collège d'Edimbourg; *cette somme servira de supplément aux honoraires de M. Mac-Laurin; elle sera un témoignage de mon amitié pour sa personne, et de mon estime pour ses talens.*

C'est ainsi que ce grand homme réunissait tout ce que le génie a de plus sublime, avec ce que les qualités sociales ont de plus aimable (17).

Newton a cessé d'appartenir à l'Angleterre, il est devenu l'homme de toutes les nations, de tous les temps; tous les peuples civilisés le reconnaissent pour leur législateur dans les sciences; tous les savans, d'un bout à l'autre de l'Europe, sont ses disciples; et si, depuis sa mort, on a fait des pas considérables, si l'on s'est avancé plus loin que lui, c'est toujours en s'appuyant sur ses immortelles découvertes. Horace promettait à ses vers une durée aussi longue que celle du temple de Jupiter au Capitole; les siècles ont détruit jusqu'aux ruines de ce temple fameux, et le nom d'Horace est plus illustre qu'il ne fut jamais. L'Angleterre changerait de face, serait bouleversée, engloutie même sous l'Océan, que la gloire de Newton n'en recevrait aucune atteinte. Son nom est gravé profondément

(17) Il est bien rare que la fortune marche de pair avec le génie; mais lorsque cela arrive, on voit par le respectable usage que les hommes supérieurs savent faire des richesses, combien ils sont dignes de les posséder. Boileau achète la bibliothèque de Patru un tiers de plus qu'elle ne vaut, et met pour condition, que ce célèbre avocat en conservera la jouissance jusqu'à sa mort. Voltaire élève et dote la petite-nièce du grand Corneille; il fait de Ferney l'asyle des artistes indigens, et donne pour jouet aux enfans d'un malheureux débiteur, le billet de leur père. Buffon consacre une partie de son bien à agrandir, à décorer ce Jardin des Plantes devenu, par ses soins, un des plus beaux ornemens de Paris. Avec quel soin Montesquieu cache la main qui brise les fers d'un infortuné Français tombé dans l'esclavage? La chimie et la physique sont-elles moins redevables aux richesses de Lavoisier qu'à son génie? Et au moment où j'écris, Lalande ne dépose-t-il pas entre les mains de l'Institut, une somme de dix mille francs, destinée à l'encouragement des sciences? Pourquoi de pareils traits n'inspirent-ils qu'une admiration stérile, à ceux qui pourraient les imiter?

sur chacune des branches de l'arbre des sciences, leur destinée désormais est de croître ou de périr ensemble.

Après avoir parlé de *Newton*, me sera-t-il permis de dire un mot de ma *traduction?* J'ai fait tous mes efforts pour être toujours clair et fidèle; et dans les notes qui l'accompagnent, j'ai tâché d'éviter une concision trop rigoureuse qui touche à l'obscurité, ou une prolixité qui fatigue et dégoûte. Je ne dissimulerai pas que j'ai été souvent arrêté par de très-grandes difficultés; que j'avais même renoncé à une entreprise qui me paraissait au-dessus de mes faibles moyens, lorsqu'un ami intime, le plus aimable, le meilleur des hommes (18), sut ranimer mon ardeur, et m'exciter à continuer; il m'envoya même de Hollande les *Commentaires de Castillon*, que je n'avais pu me procurer à Paris; ainsi soutenu par ses encouragemens, j'arrivais aux dernières pages de mon travail, lorsqu'un coup mortel vint m'arracher l'ami le plus tendre, ôter à son pays un officier aussi distingué par ses talens que par sa valeur; à sa famille inconsolable, un fils, un frère, un époux, un père, également digne, sous tous ces rapports, d'un éternel regret.

---

(18) Jean-Nicolas Bontemps, chef de bataillon dans l'arme du génie, mort à Wertheim, près de Wurtzbourg, des suites d'une blessure, le 13 nivôse an 9, à l'âge de 27 ans.

ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE,

OU

DE LA COMPOSITION

ET

DE LA DÉCOMPOSITION

ARITHMÉTIQUES.

LES calculs se font, ou par le moyen des nombres, comme dans l'Arithmétique vulgaire, ou avec des lettres comme dans l'analyse. Ces deux procédés sont fondés sur les mêmes principes, et conduisent au même résultat; l'Arithmétique, d'une manière définie et particulière; l'Algèbre, d'une manière indéfinie et universelle. Mais dans cette dernière méthode, presque tous les énoncés, et sur-tout les conclusions, sont de véritables théorêmes.

L'Arithmétique ne marche jamais que du connu à l'inconnu; l'Algèbre, au contraire, marche souvent de l'inconnu au connu, de sorte que, de quelque manière qu'elle arrive à une conclusion ou équation, elle peut toujours parvenir à la connaissance de la quantité inconnue. C'est par ce moyen qu'on résout des Problêmes très-difficiles, dont on eût vainement cherché la solution par l'Arithmétique seule.

Cependant l'Arithmétique est tellement indispensable dans toutes les opérations de l'Algèbre, que leur réunion seule forme la science complette du calcul.

C'est pour cette raison que je traiterai de toutes les deux en même temps. Lorsqu'on veut se livrer à l'étude de cette science, il faut d'abord se familiariser avec les termes et les signes qu'elle emploie, apprendre les opérations fondamentales, telles que l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, l'Extraction des racines, la Réduction des fractions, et des Quantités radicales, la Méthode d'ordonner les termes des équations, d'en éliminer les inconnues, lorsqu'il y en a plusieurs; ensuite s'exercer à la pratique de toutes ces opérations, en mettant des Problêmes en équation; et enfin, étudier la nature et la résolution des équations.

Notation; signification de quelques termes; emploi des signes.

On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le *nombre* est de trois espèces, l'*entier*, le *fractionnaire* et le *sourd*. L'*entier* est mesuré par l'unité; le *fractionnaire* par un sous-multiple de l'unité; le *sourd* est incommensurable avec l'unité.

Les signes des nombres entiers sont: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tout le monde connaît ces caractères; tout le monde sait la manière dont on les combine pour exprimer tous les nombres entiers possibles: mais de même qu'un nombre, à la première place à gauche de l'unité, désigne des dixaines d'unités, à la seconde, des centaines, à la troisième, des mille, etc. de même un nombre, à la première place à droite de l'unité, désigne des dixièmes de cette unité; à la seconde place, des centièmes; à la troisième, des millièmes, etc. Nous appelons ces derniers nombres des *fractions décimales*, parce qu'elles décroissent en raison décuple; et pour distinguer les entiers des décimales, on les sépare par une virgule, ou par un point, ou par une petite ligne. Ainsi 732,569 ou 732 . 569, ou bien 732 | 569 ne sont que trois manières différentes d'exprimer le même nombre, qui est sept cents trente-deux unités, cinq dixièmes, six centièmes, neuf millièmes. Ainsi le nombre 57104,2083 désigne cinquante-sept mille cent quatre unités, deux dixièmes, huit millièmes, et trois dix-millièmes parties de l'unité. Le nombre 0,064 désigne six centièmes et quatre millièmes.

Nous parlerons ailleurs des nombres sourds et des autres fractions.

Lorsqu'on veut traiter les quantités, soit connues, soit inconnues, comme des indéterminées, il n'est pas possible de les exprimer par des nombres, et on les désigne par des lettres de l'alphabet. On emploie les premières, a, b, c, d, etc. pour les connues, et les dernières, z, y, x, etc. pour les inconnues. Il y a quelques auteurs qui expriment les connues par les consonnes, et les inconnues par les voyelles.

On appelle *quantités positives* celles qui sont plus grandes que zéro, et *négatives*, celles qui sont moindres que zéro. Ainsi, dans la vie civile, on pourrait dire qu'un bien est une quantité positive, et une dette une quantité négative. C'est ainsi encore, que le mouvement d'un corps en avant, pourrait s'appeler *positif*, et le mouvement en arrière, négatif; parce que l'un augmente le chemin que le corps a fait, et que l'autre le diminue. De même encore, dans la Géométrie, si on appelle positives les lignes qui iront dans un sens, les négatives seront celles qui iront dans le sens directement opposé.

Par exemple, (*Pl.* I, *Fig.* 1) si AB est menée vers la droite et BC

vers la gauche, et que AB soit prise pour une ligne positive, BC sera négative, parce qu'elle tend à diminuer AB qui se trouve réduite à AC, ou même à zéro, si le point C tombe sur le point A, ou à une valeur moindre que zéro, si BC était plus grande que AB dont il faut la soustraire. On a coutume de faire précéder les quantités négatives du signe —, et les positives du signe +. Les signes $\mp$ et $\pm$ sont arbitraires, mais le premier est toujours le contraire du second.

Dans l'assemblage de plusieurs quantités, le signe + devant l'une d'elles, marque qu'il faut l'ajouter, et le signe —, qu'il faut la soustraire. De ces deux signes, le premier s'exprime par *plus*, et le second par *moins*. Ainsi $2+3$ ou 2 plus 3, marquent également qu'il faut ajouter 3 à 2, ce qui fait 5; et $5-3$ ou 5 moins 3, qu'il faut retrancher 3 de 5, ce qui donne 2; et $-5+3$ est la différence qui provient en soustrayant 5 de 3, et qui est égale à -2; et $6-1+3$ vaut 8; enfin $a+b$ est la somme des quantités a et b; et $a-b$ est la différence qui provient en soustrayant b de a; et $a-b+c$ est la somme de cette différence et de la quantité c. Par exemple, si a vaut 5, b, 2, et c, 8, alors $a+b$ vaut 7, $a-b$ vaut 3, et $a-b+c$ vaut 11; enfin $2a+3a$ vaut $5a$, et $3b-2a-b+3a$ vaut $2b+a$; car $3b-b$ vaut $2b$, et $-2a+3a$ vaut a, donc la somme égale $2b+a$, et ainsi du reste. Ces caractères + et — s'appellent signes. Lorsqu'une quantité n'est précédée d'aucun signe, elle est censée précédée du signe +.

LA MULTIPLICATION proprement dite, ne peut se faire qu'avec des nombres entiers. C'est une opération par laquelle on cherche une nouvelle quantité qui contienne le multiplicande, autant de fois que le multiplicateur lui-même contient l'unité. Mais, faute d'une expression plus juste, on est aussi convenu d'appeler multiplication, une opération semblable qui se fait avec les nombres incommensurables ou fractionnaires, et par laquelle on cherche une nouvelle quantité, qui soit au multiplicande, dans le même rapport quelconque qui existe entre le multiplicateur et l'unité. La multiplication ne se fait pas seulement avec des nombres abstraits, mais aussi avec des quantités concrètes, telles que des lignes, des superficies, des mouvemens, des poids, etc. En effet, toutes ces quantités ont avec une quantité connue de leur espèce, prise pour unité, des rapports qu'on peut exprimer par des nombres. Par exemple, qu'il s'agisse de multiplier A par une ligne de douze pieds, en prenant pour unité la ligne de deux pieds, le produit sera $6A$; c'est-à-dire, le même qu'on obtiendrait en multipliant A par le nombre abstrait 6. Effectivement $6A$ est à A dans le même rapport que la ligne de 12 pieds est à la ligne de 2 pieds, qui est prise pour unité. Ainsi, lorsqu'il faut multiplier l'une par l'autre, deux lignes, telles que AC et AD (*Pl.* I, *Fig.* 3), on prendra AB pour unité; on unira les points B et C par la droite BC; on menera DE parallèle à BC, et AE sera le produit de cette multiplication, parce que AE est à AD dans le même rapport que AC est à l'unité AB. De plus, l'usage a voulu que la génération d'une surface par le mouvement à angle droit, d'une ligne le long d'une autre, s'appelât *multiplication de ces lignes*; car quoiqu'une ligne multipliée comme on voudra, ne puisse jamais produire une surface, et qu'ainsi cette génération de la surface par les lignes, soit fort différente d'une multiplication, voici cependant en quoi elles se ressemblent : c'est que si on multiplie le nombre d'unités linéaires contenues dans une des lignes, par le nombre d'unités linéaires contenues dans l'autre ligne, le produit sera un nombre abstrait qui contiendra autant de fois l'unité abstraite, que la surface engendrée par les deux lignes, contiendra de fois l'unité de surface, pourvu qu'on entende par unité de surface, ce qu'on a coutume d'entendre; un quarré dont chaque côté est égal à l'unité linéaire. Par exemple, si la droite AB a quatre unités et AC trois, le rectangle AD contiendra quatre fois trois ou douze unités quarrées, comme on peut le voir en jetant les yeux sur la seconde Figure de la première planche. On suit la même analogie pour les solides, que l'on regarde comme les produits de la surface par la ligne. Réciproquement, les termes *contenu*, *rectangle*, *quarré*, *cube*, *dimension*, et autres qui appartiennent proprement à la Géométrie, sont fréquemment employés dans l'Arithmétique; car on n'entend pas toujours par quarré ou rectangle ou quantité de deux dimensions, une surface, mais très-souvent une quantité qui est le produit de deux autres, ou une ligne qui est le produit de deux autres lignes. Nous entendons de même par *cube* ou *parallélipipède* ou *quantité de trois dimensions*, le produit de deux multiplications successives.

Un nombre placé immédiatement devant une lettre, marque combien de fois il faut ajouter cette lettre à elle-même. Ainsi $2a$ marque deux a; $3b$, trois b; $15x$, quinze x.

Deux ou un plus grand nombre de lettres de suite, sans interposition de signe, caractérisent un produit résultant de la multiplication de toutes ces lettres entre elles. Ainsi ab désigne le produit de a par b, et abx, celui de a par b et par x. Par exemple, si a est 2; b, 3; et x, 5; ab sera 6, et abx, 30.

Quelquefois on place entre les quantités le signe $\times$, ce qui marque que les quantités qui sont d'un côté de ce signe, doivent être multipliées par celles qui sont de l'autre. Ainsi 3×5 ou 3 multipliant 5 signifient la même chose, et sont tous deux égaux à 15. Mais le principal usage de ce dernier signe, a lieu pour indiquer la multiplication entre des quantités complexes. Ainsi, qu'il s'agisse de multiplier $y - 2b$ par $y + b$, on tire sur les termes de chaque facteur une petite ligne, et on écrit $\overline{y - 2b} \times \overline{y + b}$, ou bien $\overline{y - 2b}$ multipliant $\overline{y + b}$.

LA DIVISION proprement dite, n'a lieu que pour les nombres entiers. C'est une opération, par laquelle on cherche une nouvelle quantité plus petite que le dividende, autant de fois que l'unité est elle-même plus petite que le diviseur. Mais, par analogie, on a coutume aussi d'appeler division, toute opération par laquelle on cherche une nouvelle quantité qui soit au dividende dans un rapport quelconque, pourvu qu'il soit le même que celui de l'unité au diviseur, ce diviseur pouvant être un nombre fractionnaire, ou sourd, ou une quantité d'une espèce quelconque. Ainsi (*Pl.* I, *Fig.* 3) s'il s'agit de diviser la ligne AE par la ligne AC, AB étant prise pour unité, il faut mener ED parallèlement à CB, et AD sera le quotient. Si on a un rectangle d'une surface connue, et qu'on veuille lui donner pour base une ligne arbitraire, on trouvera, par une opération semblable, la hauteur qu'il faudrait lui donner, et cette opération s'appelle encore une division.

Si une quantité est placée au-dessous d'une autre, et séparée d'elle par une petite ligne, l'assemblage de ces deux quantités désigne un quotient, ou le résultat de la division de la quantité supérieure par l'inférieure. Ainsi $\frac{6}{2}$ marque le quotient de 6 par 2 qui est 3, et $\frac{5}{8}$ marque le résultat de la division de 5 par 8, c'est-à-dire, la huitième partie de 5; $\frac{a}{b}$ est le résultat de la division de a par b. Par exemple si a vaut 15, et b, 3, $\frac{a}{b}$ vaudra 5. De même $\frac{ab - b^2}{a + x}$ désigne la quantité qui provient de la division de $ab - b^2$ par $a + x$, et ainsi du reste. Les quantités de cette espèce s'appellent *fractions*, le nombre supérieur s'appelle *numérateur*, et l'inférieur *dénominateur*.

Quoique des quantités placées immédiatement à la suite les unes des autres, annoncent une multiplication, cependant si un nombre entier précède un nombre fractionnaire, sans interposition de signe, cela ne désigne plus qu'une addition de ces deux nombres, ainsi $3\frac{1}{2}$ marque trois plus une demie.

Lorsqu'une quantité se multiplie elle-même, on a coutume, pour abréger, d'écrire au-dessus un nombre qui désigne combien de fois elle est facteur. Ainsi au lieu de aaa, on écrit a^3; au lieu de $aaaa$, on écrit a^4; au lieu de $aaaaa$, on écrit a^5; au lieu de $aaabb$, on écrit a^3bb ou a^3b^2. Par exemple, si a vaut 5 et b, 2, a^3 sera $5 \times 5 \times 5$ ou 125; a^4 sera $5 \times 5 \times 5 \times 5$ ou 625, et a^3b^2 sera $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$ ou 500. Remarquez ici, qu'un nombre écrit entre deux lettres appartient toujours à la première; ainsi 3 dans a^3bb ne marque pas qu'il faut prendre bb trois fois, mais qu'il faut multiplier a deux fois par lui-même. Remarquez encore que dans une quantité, le nombre des facteurs qui se multiplient les uns les autres, annonce toujours le nombre des dimensions, ou le degré de puissance de cette quantité, et le nombre qui s'écrit au-dessus de cette quantité, s'appelle *indicateur*, ou exposant de la puissance ou des dimensions. Ainsi aa est de deux dimensions, a^3 de trois dimensions, comme l'indique le nombre 3 écrit au-dessus; aa s'appelle aussi un quarré; a^3 un cube; a^4 un quarré-quarré; a^5 un quarré-cube; a^6 un cube-cube; a^7 un quarré-quarré-cube; et ainsi du reste. Et la quantité a dont les multiplications successives ont produit ces différentes puissances, s'appelle *racine* de ces puissances. Par exemple, a est la racine quarrée de aa et la racine cubique de a^3, etc.

Une

Une racine multipliée par elle-même produit un quarré; le quarré multiplié par la racine produit un cube, etc. Ainsi, d'après la définition qui a été donnée de la multiplication, on voit qu'il y a même rapport de l'unité à la racine, que de la racine au quarré, que du quarré au cube, etc. Donc la racine quarrée d'une quantité quelconque, est toujours moyenne proportionnelle entre l'unité et la quantité elle-même; et la racine cubique est la première de deux moyennes proportionnelles entre l'unité et cette même quantité; et la racine quatrième est la première de trois moyennes proportionnelles, et ainsi du reste. On pourra donc reconnaître les racines à deux caractères; en tant que se multipliant elles-mêmes, elles produisent les puissances; et en tant qu'elles sont des termes moyens entre ces puissances et l'unité. Ainsi on reconnaît, par exemple, que la racine quarrée de 64 est 8, et sa racine cubique 4, soit, parce que 8.8 vaut 64, ou que 4.4.4 vaut 64, ou bien, que 1 est à 8 comme 8 est à 64; ou bien, pour la racine cubique, parce que 1 est à 4 comme 4 est à 16 comme 16 est à 64. Il suit de-là, que s'il s'agit de tirer la racine quarrée d'une ligne, telle que AB (*Pl.* I, *Fig.* 4), il faut prolonger la ligne AB d'une quantité BC qu'on prendra pour unité, et sur AC comme diamètre ayant décrit un demi-cercle, on élevera au point B, la perpendiculaire BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en D la demi-circonférence, et la ligne BD sera la racine cherchée, parce qu'elle est moyenne proportionnelle entre AB et l'unité BC.

Pour désigner la racine d'une quantité quelconque, on a coutume de faire précéder cette quantité de la marque $\sqrt{}$, quand il s'agit de la racine quarrée; de $\sqrt[3]{}$, s'il s'agit d'une racine cubique; de $\sqrt[4]{}$, s'il s'agit d'une racine quatrième, etc. Ainsi, $\sqrt{64}$ est la même chose que 8; et $\sqrt[3]{64}$ est la même chose que 4; $\sqrt{aa}$ vaut a; $\sqrt{ax}$ annonce la racine quarrée de ax; et $\sqrt[3]{4ax^2}$ la racine cubique de $4ax^2$; de manière que si a vaut 3 et x, 12; $\sqrt{ax}$ sera la même chose que $\sqrt{36}$ ou 6, et $\sqrt[3]{4ax^2}$ sera $\sqrt[3]{1728}$ ou 12. Lorsqu'il n'est pas possible d'extraire ces racines, on les appelle quantités sourdes, telle est $\sqrt{ax}$; ou nombres sourds; tel est $\sqrt{12}$.

Il y a quelques auteurs qui, pour désigner un quarré, emploient le caractère q; pour un cube c; pour un quarré-quarré qq; pour le quarré-cube cq. Ainsi, pour exprimer le quarréde A, ils écriraient Aq; pour son cube Ac; pour sa quatrième puissance Aqq; et pour exprimer la racine cubique de $ab^2 - x^3$, ils écriraient $\sqrt[c]{ab^2 - x^3}$. On a encore employé d'autres symboles, mais que l'usage a déjà presque abandonnés.

La marque $=$ signifie, que les quantités qu'elle sépare sont égales. Ainsi $x = b$ désigne que x est égal à b. La marque $::$ signifie, que les quantités de part et d'autre sont proportionnelles. Ainsi $a : b :: c : d$ signifie que a est à b comme c est à d. Et $a : b : e :: c : d : f$ signifie que a, b et e sont entre eux respectivement comme c, d et f, ou que les quantités a, b, e, et c, d, f sont entre elles dans les mêmes rapports.

Il n'est pas difficile de connaître par analogie, la valeur de quelques autres signes qui se composent de ceux qu'on vient de voir. Ainsi $\frac{3}{4}a^3bb$ marque qu'il faut prendre les trois quarts de a^3bb; et $3\frac{a}{c}$, qu'il faut prendre trois fois $\frac{a}{c}$; et $7\sqrt{ax}$, qu'il faut prendre sept fois la racine de ax; enfin $\frac{a}{b}x$, annonce qu'il faut multiplier $\frac{a}{b}$

par x; et $\frac{5ee}{4a+9e}\cdot z^3$ marque la multiplication de z^3 par $\frac{5ee}{4a+9e}$, c'est-à-dire, par le quotient provenant de la division de $5ee$ par $4a+9e$, et $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$, qu'il faut multiplier $\sqrt{ax}$ par $\frac{2a^3}{9c}$; et $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ n'est autre chose que le quotient provenant de la division de $7\sqrt{ax}$ par c; et $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ est le quotient provenant de la division de $8a\sqrt{cx}$ par la somme des quantités $2a+\sqrt{cx}$. De même $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ est le quotient, provenant de la division de la différence $3axx-x^3$ par la somme $a+x$; et $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ est la racine de ce même quotient. Et $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ est la racine de ce même quotient multipliée par $2a+3c$. De même encore $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$ marque, qu'il faut prendre la racine de la somme des quantités $\frac{1}{4}a^2$ et b^2; et $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ désigne la racine de la somme des quantités $\frac{1}{2}a$ et $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$; $\frac{2a^3}{a^2-z^2}\times\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ est la même racine multipliée par le quotient provenant de la division de $2a^3$ par la différence a^2-z^2; et ainsi du reste.

Remarquez que dans des quantités complexes de cette espèce, il n'est pas nécessaire de s'arrêter toujours à la valeur particulière de chaque lettre; il suffit de savoir en général, par exemple, que $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}$ est la racine de la somme $\frac{1}{2}a$ et $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$, quelle que puisse être la valeur de cette somme, lorsqu'on substituera des nombres ou des lignes à la place des lettres. De même dans cet exemple-ci, $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}}}{a-\sqrt{ab}}$, on voit qu'il faut prendre le quotient provenant de la division de la quantité $\sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$ par la quantité $a - \sqrt{ab}$, comme si ces quantités étaient simples et connues. Dans le cas où quelques-unes des quantités ou même toutes seraient inconnues, il ne faut pas s'en embarrasser, il ne faut voir dans l'exemple cité qu'un quotient, quelle qu'en soit la valeur. J'ai cru devoir donner cet avertissement aux commençans, de peur qu'effrayés par la multiplicité des termes d'une quantité, ils ne s'arrêtassent dès l'entrée de la carrière.

De l'Addition.

LORSQUE les nombres ne sont pas trop compliqués, l'addition est une opération qui n'a pas besoin de règles. En effet, quelle règle faut-il pour voir que 7 et 9 ou $7 + 9$ font 16? ou que $11 + 15$ font 26? Mais lorsque les nombres à ajouter sont plus composés, il faut les écrire les uns au-dessous des autres, et faire la somme de chacune des colonnes en particulier. Par exemple, s'il faut faire la somme des nombres 1357 et 172, il faut écrire 172 au-dessus ou au-dessous de 1357, de manière que les unités 2 de 172 se trouvent dans la même colonne que les unités 7 de 1357; ses dixaines 7 dans la même colonne que les dixaines 5; ses centaines 1 dans la même colonne que les centaines 3. Je place ici l'arrangement figuré des deux nombres.

$$\begin{array}{r} 1357 \\ 172 \\ \hline 1529 \end{array}$$

Alors commençant par la droite, je dirai 7 et 2 font 9, et je l'écris au-dessous. Ensuite 5 et 7 font 12. J'écris au-dessous de cette seconde colonne le dernier nombre 2, et je garde le premier qui est 1 pour l'ajouter avec les nombres 3 et 1 de la colonne suivante. Je dis ensuite, 1 et 3 font 4 et 1 font 5; et j'écris 5 au-dessous de cette troisième colonne; il ne reste plus que 1 qui est la première figure du nombre supérieur. Je l'écris encore au-dessous, et la somme des deux nombres 1357 et 172 est 1529.

Ainsi, pour faire la somme des nombres 87899 + 13403 + 885 + 1920, écrivez tous ces nombres les uns au-dessous des autres, de manière que leurs unités se trouvent toutes dans la même colonne, les dixaines dans une autre, les centaines dans la troisième, les mille dans la quatrième, et ainsi du reste.

$$\begin{array}{r} 87899 \\ 13403 \\ 885 \\ 1920 \\ \hline 104107 \end{array}$$

Dites ensuite : 9 + 3 font 12, et 12 + 5 font 17. Écrivez 7 au-dessous, et ajoutez 1 aux nombres de la colonne suivante, en disant : 1 + 9 font 10, et 10 + 8 font 18, et 18 + 2 font 20; écrivez 0 au-dessous, et dites comme toute-à-l'heure : 2 + 8 font 10, et 10 + 4 font 14, et 14 + 8 font 22, et 22 + 9 font 31. Ainsi en gardant 3, écrivez 1 au-dessous, et dites comme précédemment : 3 + 7 font 10, et 10 + 3 font 13, et 13 + 1 font 14; écrivez 4 au-dessous de la colonne, et gardez 1 pour l'ajouter à la colonne suivante, en disant encore : 1 + 8 font 9, et 9 + 1 font 10. Écrivez 10, et vous aurez pour somme de tous les nombres qu'il falloit ajouter 104107.

L'addition des nombres décimaux se fait comme celle des nombres entiers, comme on peut le voir dans l'exemple ci-à-côté.

$$\begin{array}{r} 630{,}953 \\ 51{,}0807 \\ 305{,}37 \\ \hline 987{,}4037 \end{array}$$

L'addition des quantités algébriques se fait en liant par des signes convenables les quantités qui doivent être ajoutées, et de plus, en réunissant celles qui doivent être réunies. Ainsi a et b font $a+b$, et a et $-b$ font $a-b$. $7a$ et $9a$ font $7a+9a$; $-a\sqrt{ac}$ et $b\sqrt{ac}$ font $-a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$, ou bien $b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}$; car l'ordre dans lequel sont écrites les quantités est fort indifférent.

Lorsqu'il s'agit d'additionner des quantités algébriques positives et exprimées par la même lettre, il suffit d'écrire une seule fois cette lettre, en lui donnant pour coëfficient la somme des coëfficiens de chacune des parties qu'il faut additionner. Ainsi $9a+7a$ font $16a$; et $11bc+15bc$ font $26bc$. De même $3\frac{a}{c}+5\frac{a}{c}$ font $8\frac{a}{c}$ et $2\sqrt{ac}+7\sqrt{ac}$ font $9\sqrt{ac}$. Et $6\sqrt{ab-x^2}+7\sqrt{ab-x^2}$ font $13\sqrt{ab-x^2}$. De même encore $6\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ font $13\sqrt{3}$. Et $a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}$ font $(a+b)\sqrt{ab}$, en ajoutant a et b, comme s'ils étaient des nombres multiplicateurs de $\sqrt{ab}$. C'est ainsi que $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3ax^2-x^3}{a+x}}+3a\sqrt{\frac{3ax^2-x^3}{a+x}}$ font $\overline{5a+3c}\sqrt{\frac{3ax^2-x^3}{a+x}}$ par la raison que $2a+3c+3a$ font $5a+3c$.

On réunit les fractions positives qui ont le même dénominateur, en additionnant leurs numérateurs. Ainsi $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ font $\frac{3}{5}$. Et $\frac{2ax}{b}+\frac{3ax}{b}$ font $\frac{5ax}{b}$. Et $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}+\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ font $\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ et $\frac{a^2}{c}+\frac{bx}{c}$ font $\frac{a^2+bx}{c}$.

L'addition des quantités négatives n'est pas différente de celle des quantités positives. Ainsi -2 et -3 font -5. Et $-\frac{4ax}{b}$ et $-\frac{11ax}{b}$ font $-\frac{15ax}{b}$. $-a\sqrt{ax}$ et $-b\sqrt{ax}$ font $\overline{-a-b}\sqrt{ax}$.

Mais lorsqu'on doit ajouter une quantité négative avec une positive, il faut diminuer la positive de toute la valeur de la négative. Ainsi 3 et -2 font 1. $\frac{11ax}{b}$ et $-\frac{4ax}{b}$ font $\frac{7ax}{b}$. $-a\sqrt{ac}$ et $b\sqrt{ac}$ font $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et remarquez que lorsque la quantité négative l'emporte sur la positive, le résultat de l'opération est négatif. Ainsi 2 et -3 font -1. $-\frac{11ax}{b}$ et $\frac{4ax}{b}$ font $-\frac{7ax}{b}$. et $2\sqrt{ac}$ et $-7\sqrt{ac}$ font $-5\sqrt{ac}$.

Lorsqu'il s'agit d'additionner un plus grand nombre de quantités, ou des quantités plus composées, il est nécessaire de suivre une marche réglée, comme on a fait plus haut pour l'addition des nombres. Ainsi $17ax-14a+3$ et $4a+2-8ax$ et $7a-9ax$ étant des quantités qu'il faut ajouter, je les écris les unes au-dessous des autres, de manière que les termes qui ont le plus d'affinité entre eux, se trouvent dans les mêmes colonnes. Par exemple, les nombres 3 et 2 dans une colonne; les lettres $14a$, $4a$ et $7a$ dans une autre colonne; enfin les lettres $17ax$, $9ax$ et $8ax$ dans une troisième, comme on peut le voir par l'exemple placé ici à côté. Ensuite j'additionne chaque colonne en particulier,

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline 0 & -3a & +5 \end{array}$$

en disant 2 et 3 font 5, que j'écris au-dessous. Ensuite $7a+4a$ font $11a$ et $-14a$ font $-3a$, que j'écris encore. Enfin $-9ax$ et $-8ax$ font $-17ax$ et $+17ax$ font 0, ainsi la somme est $-3a+5$.

Je joins ici plusieurs exemples où on opère en suivant la même marche.

1er. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 12x + 7a \\ 7x + 9a \\ \hline 19x + 16a \end{array}$$

2e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} 11bc - 7\sqrt{ac} \\ 15bc + 2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc - 5\sqrt{ac} \end{array}$$

3e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} -\frac{4ax}{b} + 6\sqrt{3} + \frac{1}{3} \\ +\frac{11ax}{b} - 7\sqrt{3} + \frac{2}{3} \\ \hline \frac{7ax}{b} - \sqrt{3} + 1 \end{array}$$

4e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} + a^2y + 2a^3 - \frac{a^4}{2y} \\ -2ay^2 - 4a^2y + a^3 \\ y^3 + 2ay^2 - \frac{1}{2}a^2y \\ \hline y^3 \quad 0 \quad - 3\frac{1}{2}a^2y + 3a^3 - \frac{a^4}{2y} \end{array}$$

5e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r} -6x^2 + \frac{3}{7}x \\ +5x^3 \qquad + \frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3 - 6x^2 + \frac{8}{7}x \end{array}$$

6e. EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} 5x^4 + 2ax^3 \\ -3x^4 - 2ax^3 + 8\frac{1}{4}a^3\sqrt{a^2+x^2} \\ -2x^4 + 5bx^3 - 20a^3\sqrt{a^2-x^2} \\ \qquad -4bx^3 - 7\frac{1}{4}a^3\sqrt{a^2+x^2} \\ \hline 0 \quad + bx^3 + a^3\sqrt{a^2+x^2} - 20a^3\sqrt{a^2-x^2}. \end{array}$$

De la Soustraction.

LORSQUE les nombres sont peu composés, rien n'est plus facile que d'en trouver la différence. En effet, s'il s'agit de soustraire

9 de 17, qui n'apperçoit au premier coup-d'œil que le reste est 8? Mais lorsque les quantités sont plus composées, la soustraction se fait en écrivant le nombre à soustraire au-dessous de celui dont il faut le retrancher, ensuite on retranche chaque figure inférieure de la supérieure correspondante. Ainsi, pour soustraire 63543 de 782579, écrivez 63543 au-dessous de 782579, comme on le voit ici à côté. Et dites : 3 de 9 reste 6, et écrivez 6 au-dessous. Ensuite 4 de 7 reste 3, que vous écrirez pareillement. Ensuite 5 de 5 reste o qu'il faut aussi écrire. Il s'agit maintenant de retrancher 3 de 2; mais comme 3 est plus grand que 2, j'emprunte une unité sur le plus prochain chiffre à gauche 8 : cette unité ajoutée avec 2 vaut 12, dont on peut retrancher 3, le reste est 9, qu'il faut encore écrire au-dessous. Maintenant ce n'est plus 6 seulement qu'il faut retrancher de 8, mais 6 augmenté de l'unité empruntée; c'est donc 7 qui, ôté de 8, laisse 1 pour reste que j'écris encore au-dessous. Ensuite comme il n'y a plus de chiffre inférieur qui réponde au supérieur 7, je l'écris encore au-dessous, et la différence des deux nombres est 719036.

$$\begin{array}{r} 782579 \\ 63543 \\ \hline 719036 \end{array}$$

Au reste, en ordonnant les deux nombres pour faire l'opération, il faut bien prendre garde que les figures de l'un répondent aux figures homogènes de l'autre; c'est-à-dire, que les unités soient placées sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les dixièmes sous les dixièmes, etc. comme il a été dit pour l'addition. Ainsi, pour retrancher la quantité décimale 0,63 du nombre entier 547, vous vous garderez bien de disposer ces deux nombres en cette manière : $\begin{array}{r} 547 \\ 0{,}63 \end{array}$. Mais il faut les disposer ainsi, $\begin{array}{l} 547 \\ 0{,}63 \end{array}$, en sorte que le zéro qui, dans les décimales, occupe la place des unités, réponde au-dessous des unités de l'autre nombre; les places vides du nombre supérieur, qui répondent à 6 et à 3 du nombre inférieur, étant censées occupées par des zéros. Dites donc; de o ôtez 3, cela est impossible; mais en empruntant une unité à gauche, o deviendra 10; d'où retranchant 3, le reste est 7 qu'il faut écrire au-dessous. Ensuite ajoutant 1 qui a été emprunté avec 6, cela fait 7 qu'il faut retrancher du o supérieur; et comme cela est impossible, j'emprunte encore 1 à gauche, afin que o devienne 10; d'où retranchant 7, le reste est 3 que j'écris au-dessous, et cet 1 emprunté étant ajouté avec o, et retranché de 7, laisse 6 pour reste qu'il faut encore écrire au-dessous; enfin descendez aussi les Figures 54, puisqu'on n'en doit rien retrancher, et vous aurez pour différence des deux nombres.... 546,37. Nous allons placer ici plusieurs exemples pour exercer les commençans.

$$\begin{array}{r} 547 \\ 0{,}63 \\ \hline 546{,}37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1673 \\ 1541 \\ \hline 132 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1673 \\ 1580 \\ \hline 93 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 458074 \\ 9205 \\ \hline 448869 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35{,}72 \\ 14{,}32 \\ \hline 21{,}40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 46{,}5003 \\ 3{,}078 \\ \hline 43{,}4223 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 308{,}7 \\ 25{,}74 \\ \hline 282{,}96 \end{array}$$

Lorsqu'on a un nombre plus grand à retrancher d'un plus petit, il faut retrancher le plus petit du plus grand, et donner au reste le signe négatif. Par exemple, s'il fallait ôter 1673 de 1541, j'ôterais 1541 de 1673, et je mettrais le signe — devant le reste 132.

La soustraction algébrique se fait en liant toutes les quantités par des signes, après avoir changé ceux des quantités à soustraire; et il faut en outre réunir tout ce qui peut être réuni, comme on l'a fait pour l'addition. Ainsi $+7a$ retranché de $9a$, s'écrit ainsi : $9a - 7a$

ou $2a$; et $-7a$ de $+9a$, reste $+9a+7a$ ou $16a$; $+7a$ de $-9a$, reste $-9a-7a$ ou $-16a$; et $-7a$ de $-9a$, reste $-9a+7a$ ou $-2a$. Ainsi $3\frac{a}{c}$ de $5\frac{a}{c}$, reste $5\frac{a}{c}-3\frac{a}{c}$ ou $2\frac{a}{c}$. $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$, reste $2\sqrt{ac}-7\sqrt{ac}$ ou bien $-5\sqrt{ac}$. $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$, reste $\frac{3}{9}$. $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$, reste $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}$ ou $\frac{7}{7}$. $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$, reste $\frac{3ax}{b}+\frac{2ax}{b}$ ou $\frac{5ax}{b}$. $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $-\frac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$, reste $-\frac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{a^2}{c}$ de $\frac{bx}{c}$, reste $\frac{bx}{c}-\frac{a^2}{c}$ ou $\frac{bx-a^2}{c}$; $a-b$ de $2a+b$, reste $a+2b$; $3az-z^2+ac$ de $3az$, reste z^2-ac; $\frac{2a^2-ab}{c}$ de $\frac{a^2+ab}{c}$, reste $\frac{2ab-a^2}{c}$; et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$, reste $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$, ou bien $2x\sqrt{ax}$, et ainsi de suite.

Au reste, lorsque les quantités sont composées de plusieurs termes, on doit ordonner l'opération comme pour les nombres, ainsi qu'on peut le voir dans les exemples suivans :

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15bc+12\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc+5\sqrt{ac} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x^3+\frac{5}{7}x \\ 6x^2-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6x^2+\frac{8}{7}x \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

De la Multiplication.

Il faut apprendre de mémoire tous les nombres qui proviennent de la multiplication de deux nombres quelconques qui ne sont pas plus grands que 9, tels que ceux-ci, par exemple, 5 multipliant 7 donne 35; ou 8 multipliant 9, donne 72, etc. La multiplication des nombres plus grands se fera à l'aide de ceux-ci. S'il s'agit de multiplier 795 par 4, écrivez 4 au-dessous de 795, comme on le voit ici à côté. Ensuite dites : 4 par 5 donne 20, écrivez la dernière Figure 0 du produit 20 sous le nombre 4, et gardez la première 2 pour l'opération suivante. Dites ensuite : 4 par 9 donne 36; à quoi ajoutant 2 que vous aviez gardé, le total est 38. Écrivez encore au bas la dernière Figure 8 de ce produit, et retenez la première 3. Enfin dites : 4 par 7 donne 28, à quoi ajoutant 3 que vous aviez gardé, le total est 31. Écrivant encore 31 au bas, le produit total de la multiplication de 795 par 4 est 3180.

$$\begin{array}{r} 795 \\ 4 \\ \hline 3180 \end{array}$$

Enfin s'il fallait multiplier 9043 par 2305, écrivez le second de ces deux nombres au-dessous du premier, comme auparavant, et multipliez le nombre supérieur 9043 d'abord par 5, comme il a été enseigné plus haut, et vous trouverez pour produit 45215. Multipliez ensuite par 0, ce qui donnera 0000, continuez la multiplication par 3, et le produit sera 27129; et enfin par 2, et le produit sera 18086. Distribuez tous ces produits partiels les uns au-dessous des autres, de manière que la dernière Figure du nombre inférieur soit plus reculée d'une place vers la gauche, que la dernière

$$\begin{array}{r} 9043 \\ 2305 \\ \hline 45215 \\ 0000 \\ 27129 \\ 18086 \\ \hline 20844115 \end{array}$$

Figure du nombre immédiatement supérieur. Enfin faites la somme de tous ces produits partiels, et vous trouverez 20,844,115 pour le produit total de 9095 par 2305.

L'opération est absolument la même pour multiplier des nombres décimaux par des nombres entiers, ou par d'autres nombres décimaux, comme on peut le voir dans les exemples suivans :

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
651 6	25 090	7 8050
1448	3 5126	117 075
2099,6	10 036	390 25
	137,9950	0,05151300

Mais observez qu'il faut marquer dans le produit autant de Figures décimales sur la droite, qu'il y en a dans le multiplicande et dans le multiplicateur. Et si, par hazard, il n'y avait pas pour cela assez de Figures dans le produit, il faudrait y suppléer par des zéros ajoutés à gauche, comme on a fait ci-dessus pour l'exemple troisième.

La multiplication des quantités algébriques simples se fait en écrivant à côté l'un de l'autre sans interposition de signe, le multiplicande et le multiplicateur, et en donnant au produit le signe +, si les facteurs ont tous deux le signe positif, ou tous deux le signe négatif; ou bien en lui donnant le signe négatif, si les facteurs sont de signes différens.

Ainsi $2a$ par $3b$, ou $-2a$ par $-3b$, donne $+6ba$ ou $+6ab$, car l'ordre des lettres est indifférent. Ainsi $-2a$ par $+3b$, ou bien $2a$ par $-3b$, donne $-6ab$. Et $2ac$ par $8bcc$, donne

$16\,abccc$ ou $16\,abc^3$. Et $7\,ax^2$ par $-12\,a^2x^2$ donne $-84\,a^3x^4$. Et $-16\,cy$ par $31\,ay^3$ donne $-496\,acy^4$. Et $-4z$ par $-3\sqrt{az}$ donne $12z\sqrt{az}$. De même 3 par -4 donne -12; et -3 par -4 donne 12.

La multiplication des fractions se fait en multipliant numérateurs par numérateurs, et dénominateurs par dénominateurs. Ainsi $\frac{2}{5}$ par $\frac{5}{7}$ donne $\frac{10}{35}$; et $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ donne $\frac{ac}{bd}$; et $2\frac{a}{b}$ par $3\frac{c}{d}$ donne $6 \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, ou bien $6\frac{ac}{bd}$; et $\frac{3\,acy}{2\,bb}$ par $-\frac{7\,cy^2}{4\,b^3}$ donne $-\frac{21\,ac^2y^3}{8\,b^5}$; et $-\frac{4z}{c}$ par $-\frac{3\sqrt{az}}{c}$ donne $\frac{12z\sqrt{az}}{c^2}$; $\frac{a}{b}\cdot x$ par $\frac{c}{d}\cdot x^2$ donne $\frac{ac}{bd}\cdot x^3$. Enfin 3 par $\frac{2}{5}$ donne $\frac{6}{5}$, comme on peut s'en convaincre en mettant 3 sous la forme d'une fraction qui aurait l'unité pour dénominateur, telle que $\frac{3}{1}$. Ainsi $\frac{15\,a^2z}{c^2}$ par $2a$ donne $\frac{30\,a^3z}{c^2}$. D'où l'on peut remarquer en passant, que $\frac{ab}{c}$ et $\frac{a}{c}\cdot b$ ont la même valeur. Il en est de même de $\frac{abx}{c}$ et de $\frac{ab}{c}\cdot x$ ou $\frac{a}{c}\cdot bx$. Ces trois quantités ne sont que la même, sous des formes différentes. Dites-en autant de $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ et de $\frac{a+b}{a}\cdot\sqrt{cx}$. Ainsi du reste.

Lorsque les quantités radicales ont la même dénomination, c'est-à-dire, qu'elles sont toutes des racines quarrées, ou toutes des racines cubiques, ou des racines quatrièmes; la multiplication s'en fait en multipliant les termes, comme s'il n'y avait point de signe radical, et en donnant au produit le radical commun. Ainsi $\sqrt{3}$ par $\sqrt{5}$ donne $\sqrt{15}$; et $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{cd}$ donne $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt[3]{5\,ay^2}$ par $\sqrt[3]{7\,ayz}$ donne $\sqrt[3]{35\,a^2y^3z}$; et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ par $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$ donne....

$\sqrt{\frac{a^4 b^2}{c^2}}$ qui se réduit à $\frac{a^2 b}{c}$; et $2\,a\sqrt{a z}$ par $3\,b\sqrt{a z}$ donne $6\,a\,b\sqrt{a^2 z^2}$, ou bien $6\,a^2 b z$; et $\frac{3\,x^2}{\sqrt{a c}}$ par $-\frac{2\,x}{\sqrt{a c}}$ donne.... $-\frac{6\,x^3}{\sqrt{a^2 c^2}}$, ou bien $-\frac{6\,x^3}{a c}$; et $-\frac{4\,x\sqrt{a b}}{7\,a}$ par $-\frac{3\,d^2\sqrt{5\,c\,x}}{10\,c^2}$ donne $\frac{12\,d^2\,x\sqrt{5\,a\,b\,c\,x}}{70\,a\,c^2}$.

Lorsque les quantités sont complexes, la multiplication s'en fait, en multipliant chaque partie du multiplicande par chaque partie du multiplicateur, comme on l'a enseigné pour la multiplication des nombres. Ainsi en multipliant $c - x$ par a, on obtient $a c - a x$; et $a^2 + 2\,a c - b c$ par $a - b$ donne $a^3 + 2\,a^2 c - a^2 b - 3\,a b c + b^2 c$. Car $a^2 + 2\,a c - b c$ par $-b$ donne $-a^2 b - 2\,a b c + b^2 c$, et $a^2 + 2\,a c - b c$ par a donne $a^3 + 2\,a^2 c - a b c$, et la somme de ces deux produits est $a^3 + 2\,a^2 c - a^2 b - 3\,a b c + b^2 c$.

Je place ici cet exemple de multiplication avec quelques autres.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & a^2 & +2\,ac & -\,bc & \\
 & & a & -\,b & \\
\hline
 & -\,a^2 b & -2\,abc & +\,b^2 c & \\
+a^3 & +2\,a^2 c & -\,abc & & \\
\hline
a^3 & +2\,a^2 c & -\,a^2 b & -3\,abc & +\,b^2 c
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a + b \\
a + b \\
\hline
a^2 + ab + ab + b^2 \\
\hline
a^2 + 2\,ab + b^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a + b \\
a - b \\
\hline
a^2 + ab \\
\quad\ - ab - b^2 \\
\hline
a^2 - b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & & y^2 & +\,2\,a\,y & -\,\frac{1}{2}\,a^2 \\
 & & y^2 & -\,2\,a\,y & +\,a^2 \\
\hline
 & & +\,a^2 y^2 & +\,2\,a^3 y & -\,\frac{1}{2}\,a^4 \\
 & -2\,a y^3 & -\,4\,a^2 y^2 & +\,a^3 y & \\
+y^4 & +2\,a y^3 & -\,\frac{1}{2}\,a^2 y^2 & & \\
\hline
y^4 & 0 & -\,3\frac{1}{2}\,a^2 y^2 & +\,3\,a^3 y & -\,\frac{1}{2}\,a^4
\end{array}
$$

$$\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$3a + \sqrt{\frac{ab^2}{c}}$$

$$\frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}} - \sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$$

$$\frac{6a^2x}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$\frac{6a^2x}{c} - 3a\sqrt{\frac{a^3}{c}} + \frac{2ax}{c}\sqrt{\frac{ab^2}{c}} - \frac{a^2b}{c}$$

De la Division.

LA division dans les nombres se fait en cherchant combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, et en écrivant au quotient un chiffre qui indique ce nombre de fois. On réitère cette opération autant de fois qu'il est possible de soustraire le diviseur du dividende.

Ainsi pour diviser 63 par 7, cherchez combien de fois 7 est contenu dans 63, et vous trouverez qu'il y est contenu exactement neuf fois. Par conséquent $\frac{63}{7}$ vaut 9. S'agit-il de diviser 371 par 7? Ecrivez 7 à la suite du nombre 371, comme vous pouvez le voir dans l'exemple ci-à-côté. Et commençant l'opération par les premières figures à gauche du dividende, dites: en 37 combien de fois 7? Réponse, 5. Alors écrivez 5 au quotient; multipliez 5 par 7, et ôtez le produit 35 de 37, il restera 2, à côté duquel

$$\begin{array}{r|l} 371 & 7 \\ \underline{35} & \overline{53} \\ 21 & \\ \underline{21} & \\ 0 & \end{array}$$

descendez la dernière figure du dividende, et le reste sera 21, sur lequel il faut encore recommencer l'opération. Dites donc comme

auparavant

auparavant; combien de fois 7 est-il contenu dans 21? Réponse, 3. Ainsi écrivez 3 au quotient, et ôtez le produit 3×7 ou 21 de 21, et il restera o. D'où il résulte que 53 est le quotient ou le nombre exact qui provient de la division de 371 par 7.

Pour diviser 4798 par 23, commencez par les premières figures 47, et dites: combien de fois 23 est-il contenu dans 47? Réponse, 2. Ecrivez 2 au quotient, et de 47 ôtez 2×23, ou 46, et le reste est 1, à côté duquel descendez la figure suivante du dividende, c'est-à-dire 9; et alors votre nouveau dividende est 19. Dites donc, en 19 combien de fois 23? Réponse, o. Ecrivez o au quotient, et descendez à côté de 19 la dernière Figure 8, ce qui forme 198, qu'il faut encore diviser. Dites donc combien de fois 23 est-il contenu dans 198 (chose qu'on peut facilement conjecturer en considérant les premiers nombres, et en estimant le nombre de fois que 2 peut être contenu dans 19). Réponse, 8. Ainsi écrivez 8 au quotient, et de 198 retranchez 8×23, ou 184, et le reste sera 14, qu'il faudra encore diviser par 23. Ainsi le quotient sera $208\,\frac{14}{23}$. Mais si l'on ne veut pas de la fraction $\frac{14}{23}$, on peut, au moyen des nombres décimaux, pousser la division aussi loin qu'on voudra, en mettant toujours un o à côté du reste. Ainsi à côté du reste 14 je mets o, et il devient 140. Alors dites: en 140 combien de fois 23? Réponse, 6. Ecrivez 6 au quotient, et de 140 retranchez 6×23, ou 138, et il restera 2. Ajoutez-y un o comme auparavant; et après avoir poussé l'opération aussi loin que vous voudrez, vous aurez enfin pour quotient 208,6086, etc.

$$
\begin{array}{r|l}
4798 & 23 \\
\underline{46} & \overline{208{,}608,\text{ etc.}} \\
198 & \\
\underline{184} & \\
140 & \\
\underline{138} & \\
200 & \\
\underline{184} & \\
160 &
\end{array}
$$

On divisera de la même manière la fraction décimale 3,5218 par une autre fraction décimale 46,1, et le quotient sera 0,07639. On doit remarquer ici qu'il faut qu'il y ait dans le quotient autant de décimales qu'il y en a dans le dernier dividende de plus que dans le diviseur. Ainsi, dans cet exemple, le diviseur en contient une, le dernier dividende 0,004370 en contient six; il doit donc y en avoir cinq au quotient.

3,5218	46,1
3 227	0,07639
0,2948	
0,2766	
0,01820	
0,01383	
0,004370	

Nous plaçons ici plusieurs exemples pour servir d'éclaircissemens.

20844115	9043
18086	2305
27581	
27129	
45215	
45215	
0	

2099,6	72,4
1448	29
6516	
6516	
0	

137,995	50,18
10036	2,75
37635	
35126	
25090	
25090	
0	

0,051513	0,0132
396	3,9025
0,01191	
1188	
0,0000330	
264	
0,00000660	
660	
0	

La division des quantités algébriques se fait en décomposant tout ce qui s'est fait par voie de multiplication. Ainsi ab divisé par a, donne b au quotient. $6ab$ divisé par $2a$, donne $3b$, et divisé par $-2a$, donne $-3b$. $-6ab$ divisé par $2a$, donne $-3b$, et divisé par $-2a$, donne $3b$. $16abc^3$ divisé par $2ac$, donne $8bc^2$. Et $-84a^3x^4$ divisé par $-12a^2x^2$, donne $7ax^2$. Enfin $\frac{6}{35}$ divisé par $\frac{2}{5}$, donne $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ divisé par $\frac{a}{b}$, donne $\frac{c}{d}$. $-\frac{21ac^2y^3}{8b^5}$ divisé par $\frac{3acy}{2b^2}$, donne $-\frac{7cy^2}{2b^3}$. $\frac{6}{5}$ divisé par 3, donne $\frac{6}{15}$ ou $\frac{2}{5}$. Et $\frac{6}{5}$ divisé par $\frac{2}{5}$, donne $\frac{3}{1}$ ou 3. $\frac{30a^3z}{c^2}$ divisé par $2a$, donne $\frac{15a^2z}{c^2}$. Et $\frac{15a^2z}{c^2}$ divisé par $2a$, donne $\frac{15az}{2c^2}$. $\sqrt{15}$ divisé par $\sqrt{3}$, donne $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ divisé par $\sqrt{cd}$, donne $\sqrt{ab}$; et par $\sqrt{ab}$, donne $\sqrt{cd}$. $\sqrt{a^3c}$ par $\sqrt{ac}$, donne $\sqrt{a^2}$ ou a...... $\sqrt[3]{35a^2y^3z}$ divisé par $\sqrt[3]{5ay^2}$, donne $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$ divisé par $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$, donne $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$. $\frac{12d^2x\sqrt{5abcx}}{70ac^2}$ divisé par $-$...... $\frac{3d^2\sqrt{5cx}}{10c^2}$, donne $-\frac{4x\sqrt{ab}}{7a}$. De même $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ divisé par $a+b$, donne $\sqrt{ax}$. Et réciproquement divisé par $\sqrt{ax}$, donne $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\cdot\sqrt{ax}$ divisé par $\frac{1}{a+b}$, donne $a\sqrt{ax}$. Ou divisé par a, donne $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$. Et réciproquement $\frac{a}{a+b}\cdot\sqrt{ax}$ divisé par $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$, donne a. Au reste, dans ces sortes de divisions, il faut prendre garde à ne diviser les unes par les autres que des quantités de même espèce; c'est-à-dire, des nombres par des nombres, des lettres par des lettres; des quantités radicales par d'autres quantités radicales; les numérateurs des fractions par des numérateurs; les dénominateurs par des dénominateurs, etc. Et de plus, dans les numérateurs, les dominateurs et les radicaux, il ne faut diviser les quantités d'une espèce quelconque que par leurs homogènes.

Si la quantité à diviser ne peut pas être décomposée par le diviseur, il suffit, lorsque les deux quantités sont entières, d'écrire le diviseur au-dessous du dividende, en les séparant par une petite ligne. Ainsi pour diviser ab par c, on écrit $\frac{ab}{c}$; et pour diviser...... $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ par a, on écrit $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$ ou $\frac{a+b}{a}\cdot\sqrt{cx}$. De même $\sqrt{ax-x^2}$ divisé par $\sqrt{cx}$, donne $\frac{\sqrt{ax-x^2}}{\sqrt{cx}}$ ou $\sqrt{\frac{ax-x^2}{cx}}$. Et $\overline{a^2+ab}\sqrt{a^2-2x^2}$ divisé par $\overline{a-b}\sqrt{a^2-x^2}$, donne....... $\frac{a^2+ab}{a-b}\sqrt{\frac{a^2-2x^2}{a^2-x^2}}$. Et $12\sqrt{5}$ divisé par $4\sqrt{7}$ donne $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Lorsqu'il faut diviser l'une par l'autre des fractions, multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, et le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur, le premier produit sera le numérateur du quotient, et le second le dénominateur de ce même quotient. Ainsi, pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, il faut écrire $\frac{ad}{bc}$, en multipliant a par d et b par c. Par la même raison, $\frac{3}{7}$ divisé par $\frac{5}{4}$, donne $\frac{12}{35}$. Et $\frac{3a}{4c}\cdot\sqrt{ax}$ divisé par $\frac{2c}{5a}$, donne $\frac{15a^2}{8c^2}\sqrt{ax}$; mais divisé par $\frac{2c\sqrt{a^2-x^2}}{5a\sqrt{ax}}$, donne.... $\frac{15a^3x}{8c^2\sqrt{a^2-x^2}}$. De même $\frac{ab}{d}$ divisé par c, donne $\frac{ab}{cd}$. Et c ou

$\frac{c}{1}$ divisé par $\frac{ab}{d}$, donne $\frac{cd}{ab}$. Et $\frac{3}{7}$ divisé par 5, donne $\frac{3}{35}$. Et 3 divisé par $\frac{5}{4}$, donne $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c} \cdot \sqrt{cx}$ divisé par a, donne... $\frac{a+b}{ac} \sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ divisé par $\frac{a}{c}$, donne $\frac{ac+bc}{a} \sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{ax^2}{c}}$ divisé par $3\sqrt{cd}$, donne $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^2}{c^2d}}$. Et $2\sqrt{\frac{ax^2}{c}}$ divisé par $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$, donne $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{c^2d}}$. Et $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divisé par..... $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, donne $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Ainsi du reste.

Lorsque le dividende est complexe, il faut diviser chacun de ses termes par le diviseur. Ainsi $a^2 + 3ax - x^2$ divisé par a, donne pour quotient $a + 3x - \frac{x^2}{a}$. Mais lorsque le diviseur est aussi lui-même complexe, il faut ordonner l'opération comme pour la division des nombres. Ainsi, pour diviser $a^3 + 2a^2c - a^2b - 3abc + b^2c$ par $a - b$, dites : combien de fois a est-il contenu dans a^3, c'est-à-dire, le premier terme du diviseur dans le premier terme du dividende ? Réponse, a^2. Ecrivez donc a^2 au quotient. Et après avoir retranché du dividende le produit du quotient a^2 par le diviseur $a - b$, ou $a^3 - a^2b$, le reste sera $2a^2c - 3abc + b^2c$, qu'il faut encore diviser. Dites donc de nouveau : combien de fois a est-il contenu dans $2a^2c$? Réponse, $2ac$. Ecrivez $2ac$ au quotient, et retranchez le produit de $2ac$ par $a - b$, ou $2a^2c - 2abc$, le reste sera $- abc + b^2c$. Dites encore : combien de fois a est-il contenu dans $- abc$? Réponse, $- bc$. Ecrivez $- bc$ au quotient, et retranchant son produit par $a - b$, ou $- abc + b^2c$ du dernier dividende, il ne restera rien. Ce qui marque que la division se fait exactement, et que le quotient est $a^2 + 2ac - bc$.

Au reste pour ramener des opérations de cette espèce à la forme que nous avons employée pour la division des nombres, il faut ordonner les termes, tant du dividende que du diviseur, par rapport aux puissances d'une même lettre ; de manière qu'on placera au premier rang le terme où cette lettre a le plus grand nombre de dimensions ; au second rang, celui où les dimensions de cette même lettre approchent le plus de celles qu'elle a dans le premier terme, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des termes où cette lettre n'est plus facteur, et qu'on placera pour cette raison au dernier rang. Ainsi dans la division que nous avons faite plus haut, qu'on ordonne tous les termes par rapport aux dimensions de la lettre a, et l'exemple que nous allons mettre sous les yeux donnera une idée de la forme que nous demandons.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
a^3 + 2a^2c & - 3abc & + b^2c & & a - b \\
- a^2b & & & & \overline{a^2 + 2ac - bc} \\
\hline
a^3 - a^2b & & & & \\
\hline
0 + 2a^2c & - 3abc & + b^2c & & \\
+ 2a^2c & - 2abc & & & \\
\hline
0 & - abc & + b^2c & & \\
& - abc & + b^2c & & \\
\hline
& 0 & 0 & &
\end{array}
$$

On peut voir dans cet exemple que le terme a^3, où a est de trois dimensions, occupe la première place du dividende, et que les termes $2a^2c$ et $-a^2b$, où a est de deux dimensions, occupent la seconde, et ainsi du reste. On aurait pu écrire le dividende encore ainsi : $a^3 \begin{array}{l} +2c \\ -b \end{array} \Big| a^2 - 3bca + b^2c$, où l'on n'a écrit qu'une seule fois au second rang la lettre par rapport à laquelle toute l'opération a été ordonnée. Si l'on voulait ordonner l'opération par rapport à la lettre b, il faudrait disposer les termes comme on le voit dans l'exemple suivant, auquel on a cru à propos de joindre une explication.

$$
\begin{array}{l|l}
cb^2 \begin{array}{l} -3ac \\ -a^2 \end{array} \left| b \begin{array}{l} +a^3 \\ +2a^2c \end{array} \right. & -b+a \\
\cline{2-2}
\cline{1-1}
cb^2 - abc & -bc \begin{array}{l} +2ac \\ +a^2 \end{array} \\
\cline{1-1}
0 \begin{array}{l} -2ac \\ -a^2 \end{array} \left| b \begin{array}{l} +a^3 \\ +2a^2c \end{array} \right. & \\
 \begin{array}{l} -2ac \\ -a^2 \end{array} \left| b \begin{array}{l} +2a^2c \\ +a^3 \end{array} \right. & \\
\cline{1-1}
\qquad 0 \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Dites : combien de fois $-b$ est-il contenu dans cb^2? Réponse, $-cb$. Ecrivez donc $-cb$ au quotient, et retranchez du dividende le produit de $-cb$ par le diviseur $-b+a$, ou $cb^2 - abc$, et il restera au second rang $\begin{array}{l} -2ac \\ -a^2 \end{array} \Big| b$. Ajoutez à ce reste, si vous voulez, les quantités qui occupent le dernier rang, c'est-à-dire $\begin{array}{l} a^3 \\ +2a^2c \end{array}$, et dites encore combien de fois $-b$ est-il contenu dans $\begin{array}{l} -2ac \\ -a^2 \end{array} \Big| b$? Réponse, $\begin{array}{l} +2ac \\ +a^2 \end{array}$. Ecrivez ces quantités au quotient, et les multipliant par le diviseur, retranchez du reste du dividende leur produit, ou ...... $\begin{array}{l} -2ac \\ -a^2 \end{array} \Big| b \begin{array}{l} +a^3 \\ +2a^2c \end{array}$, et il ne restera rien. D'où on peut conclure que la division est achevée, et que le quotient est comme auparavant $-bc + 2ac + a^2$.

S'il faut diviser $a^2y^4 - a^2c^4 + y^2c^4 + y^6 - 2y^4c^2 - a^6 - 2a^4c^2 - a^4y^2$ par $y^2 - a^2 - c^2$; ordonnez les quantités par rapport à la lettre y en cette manière. . . . .

$$y^6\begin{matrix}+a^2\\-2c^2\end{matrix}\Bigg|\,y^4\begin{matrix}+c^4\\-a^4\end{matrix}\Bigg|\,y^2\begin{matrix}-a^2c^4\\-a^6\\-2a^4c^2\end{matrix}\;\Bigg|\;\begin{array}{l} y^2\begin{matrix}-a^2\\-c^2\end{matrix}\\ \hline y^4\begin{matrix}+2a^2\\-c^2\end{matrix}\Big|\,y^2\begin{matrix}+a^4\\+a^2c^2\end{matrix}\end{array}$$

Ensuite faites la division comme dans l'exemple ci-à-côté.

$$\begin{array}{l}
y^6\begin{matrix}-a^2\\-c^2\end{matrix}\Big|\,y^4\\
\hline
0\begin{matrix}+2a^2\\-c^2\end{matrix}\Big|\,y^4\\[1ex]
\begin{matrix}+2a^2\\-c^2\end{matrix}\Big|\,y^4\begin{matrix}-2a^4\\-a^2c^2\\+c^4\end{matrix}\Bigg|\,y^2\\
\hline
0\\[1ex]
\qquad\begin{matrix}+a^4\\+a^2c^2\end{matrix}\Big|\,y^2\\[1ex]
\qquad\begin{matrix}+a^4\\+a^2c^2\end{matrix}\Big|\,y^2\begin{matrix}-a^6\\-2a^4c^2\\-a^2c^4\end{matrix}\\
\hline
\qquad\quad 0 \quad * \quad 0
\end{array}$$

On propose aussi d'autres exemples de division sur lesquels il est bon d'observer, que lorsque les termes sont ordonnés par rapport à une lettre, et que toutes les dimensions de cette lettre ne se suivent pas selon la même progression arithmétique, mais qu'il se fait dans quelques endroits des sauts d'un terme à l'autre, il faut marquer les places vacantes par une astérisque *.

$$\begin{array}{lll|l}
a^2 & * & -b^2 & \underline{a+b}\\
\cline{1-3}
a^2 & +ab & & a-b\\
\cline{1-2}
0 & -ab & & \\
 & -ab & -b^2 & \\
\cline{1-3}
 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llllll|l}
y^4 & * & -3\tfrac{1}{2}a^2y^2 & +3a^3y & -\tfrac{1}{2}a^4 & & y^2-2ay+a^2 \\ \hline
y^4 & -2ay^3 & +a^2y^2 & & & & y^2+2ay-\tfrac{1}{2}a^2 \\ \cline{1-3}
0 & +2ay^3 & -4\tfrac{1}{2}a^2y^2 & & & & \\
 & +2ay^3 & -4a^2y^2 & +2a^3y & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -\tfrac{1}{2}a^2y^2 & +a^3y & & & \\
 & & -\tfrac{1}{2}a^2y^2 & +a^3y & -\tfrac{1}{2}a^4 & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll|l}
a^4 & * & * & * & +b^4 & & a^2+ab\sqrt{2}+b^2 \\ \hline
a^4 & +a^3b\sqrt{2} & +a^2b^2 & & & & a^2-ab\sqrt{2}+b^2 \\ \hline
 & -a^3b\sqrt{2} & -a^2b^2 & & & & \\
 & -a^3b\sqrt{2} & -2a^2b^2 & -ab^3\sqrt{2} & & & \\ \cline{2-4}
 & & +a^2b^2 & +ab^3\sqrt{2} & & & \\
 & & +a^2b^2 & +ab^3\sqrt{2} & +b^4 & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

Quelques auteurs commencent la division par les derniers termes; mais on arrive aux mêmes résultats si, en renversant l'ordre des termes, on commence par les premiers.

Il y a encore d'autres méthodes de faire la division; mais il suffit de connaître la plus facile et la plus commode.

DE L'EXTRACTION DES RACINES.

Lorsqu'on veut extraire la racine quarrée d'un nombre, il faut partager ce nombre en tranches de deux chiffres chacune, par une petite virgule, en partant de l'unité; ensuite il faut écrire au quotient ou à la racine la Figure dont le quarré est égal aux Figures qui précèdent la première virgule, ou du moins la Figure dont le quarré approche le plus des Figures ou de la Figure précédant la première virgule. Et après avoir retranché ce quarré, on trouvera successivement les autres chiffres de la racine, en divisant le reste par le double de la partie trouvée de la racine, ayant soin chaque fois qu'on trouve une nouvelle Figure à la racine de la multiplier par elle-même, et par le double des Figures déjà trouvées, et de retrancher ce produit du reste.

Ainsi pour extraire la racine de 99856, séparez par des virgules de cette manière. . . . Ensuite cherchez le nombre dont le quarré égale la première Figure 9, c'est 3. Ecrivez-le au quotient; et de 9 ôtez 3 × 3 ou 9, le reste sera 0, à côté duquel vous descendrez la tranche suivante 98; et négligeant la dernière Figure 8, dites: combien de fois le double de 3, ou 6, est-il contenu dans la première 9? Rép. 1. Ecrivez donc

9,98,56	316
9	
0 98	
61	
3756	
3756	
0	

1 au quotient, et ôtez 1 × 61, ou 61 de 98, et il restera 37; à côté duquel descendez les dernières Figures 56, et il viendra 3756; nombre sur lequel il faut recommencer l'opération. Ainsi négligeant la dernière Figure 6, dites : combien de fois le double de 31, ou 62,

est-il contenu dans 375 ? (On peut facilement conjecturer la réponse en voyant combien la première Figure 6 du diviseur est contenue de fois dans les deux premières 37 du dividende.) Rép. 6. Ecrivez 6 au quotient, et retranchez 6×626, ou 3756, et il ne restera rien; ce qui prouve que l'opération est achevée, et que la racine est 316.

Si on demande la racine de 22178791, commencez par le séparer en tranches de deux chiffres en allant de droite à gauche, et opérant sur les deux Figures qui précèdent la première virgule, cherchez quel est le nombre dont le quarré approche le plus de 22 (je dis, approche le plus, car il n'est aucun nombre dont le quarré soit exactement égal à 22), vous trouverez que c'est 4; car 5×5, ou 25, est plus grand que 22, et 4×4 est plus petit; donc 4 sera la première Figure de la racine. Ecrivez donc 4 à la racine, et de 22 ôtez 4×4, ou 16, et il restera 6. A côté de ce reste, descendez la tranche suivante 17, et vous aurez 617 qui, étant divisé par le double de 4, vous donnera la seconde Figure de la racine. Négligez donc la dernière Figure 7, et dites: combien de fois 8 est-il contenu dans 61 ? Rép. 7. Ecrivez 7 au quotient, et de 617 ôtez le produit de 7 par 87, ou 609, et il restera 8. A côté de ce reste descendez les deux Figures suivantes 87, et vous aurez 887,

```
22,17,87,91 | 4709,43637, etc.
16          |
-----------
 617
 609
-----------
  88791
  84681
-----------
   4110,00
   3767 36
-----------
    3426400
    2825649
-----------
     60075100
     56513196
-----------
      356190400
      282566169
-----------
       73624231
```

qui, étant divisé par le double de 47, ou 94, vous donnera la troisième Figure de la racine. Dites par conséquent : combien de fois 94 est-il contenu dans 88? Rép. 0. Ecrivez donc 0 au quotient, et descendez encore à côté de votre nombre les deux dernières Figures 91, et vous aurez 88791, qui, étant divisé par le double de 470, ou 940, donnera la dernière Figure de la racine. Dites donc : combien de fois 940 est-il contenu dans 8879? Rép. 9. Ecrivez 9 au quotient, et vous aurez pour racine 4709.

Mais ayant fait le produit de 9 par 9409, ou 84681, et l'ayant retranché de 88791, il reste 4110, ce qui annonce que 4709 n'est pas la racine exacte du nombre 22178791, mais qu'elle est un peu plus petite. Alors dans ce cas, et dans tous ceux qui lui ressemblent, si on veut approcher plus près de la véritable racine, il faut continuer l'opération par les décimales, en ajoutant, pour chaque nouvelle opération, deux zéros à côté du reste. Ainsi au dernier reste 4110 ajoutant deux zéros, il devient 411000; et si on divise ce nombre par le double de 4709, ou 9418, on obtiendra la première Figure décimale, c'est-à-dire 4. Ecrivez donc 4 au quotient, et retranchez son produit par 94184, ou 4×94184, ou 376736 du nombre 411000, et il restera 34264. Placez encore deux zéros à la droite de ce nombre, et poussez de cette manière l'opération aussi loin que vous jugerez à-propos, vous aurez enfin pour racine 4709,43637, etc.

Lorsqu'on est parvenu par la méthode que nous venons d'enseigner, à obtenir la moitié ou plus des chiffres qu'on se propose d'avoir à la racine, on peut obtenir les autres par la seule division. Ainsi dans l'exemple actuel, si nous voulons extraire la racine jusqu'à la neuvième Figure; après avoir trouvé les cinq premières 4709,4, on peut obtenir les quatre dernières 3637 en divisant le reste 34264 par le double de 4709,4.

Par exemple, si on demande la racine de 32976 poussée jusqu'à cinq Figures : après avoir partagé ce nombre en tranches, comme à l'ordinaire, écrivez 1 au quotient, parce que 1 × 1, ou le quarré de 1 est le plus grand quarré contenu dans 3 qui précède la première virgule; retranchez 1 de 3, et il restera 2, à côté duquel descendez la tranche suivante 29, ce qui fera 229. Négligez la dernière Figure 9, et divisez 22 par le double de 1, ou 2, et vous trouverez qu'il y est plus de dix fois; mais il n'est jamais permis de prendre le diviseur dix fois, ici même on ne peut pas le prendre neuf fois, parce que 9 × 29, ou 261, est plus grand que 229, d'où il faudrait le retrancher; ainsi écrivez seulement 8 au quotient, et ôtant 8 × 28, ou 224 de 229, il restera 5, à côté duquel descendant les deux dernières Figures 76, vous aurez 576. Cherchez combien le double de 18, ou 36, est contenu de fois dans 57, et vous trouverez qu'il y est 1. Ecrivez 1 au quotient, et retranchant le produit 1 × 361, ou 361, de 576, il restera 215. Enfin, pour obtenir les autres Figures, divisez le reste 215 par le double de 181, ou 362, et vous trouverez les deux Figures 59 que vous écrirez au quotient, et la racine sera 181,59.

3,29,76	181,59
1	
229	
224	
576	
361	
215	

On tire, par la même méthode, la racine des nombres décimaux. Ainsi la racine de 329,76 est 18,159; et celle de 3,2976 est 1,8159; et celle de 0,032976 est 0,18159, et ainsi du reste. Mais celle de

3297,6 est 57,4247; et celle de 32,976 est 5,74247. De même la racine de 9,9856 est 3,16; mais celle de 0,99856 est 0,999279, etc. On peut se convaincre de la vérité de ces résultats par les exemples que nous plaçons ci-dessous. Un point avec une virgule sépare les décimales d'avec les entiers.

32,97;6	57,4247	0;99,85,6	0,999279, etc.
25		81	
797		1885	
749		1701	
4860		18460	
4576		17901	
284	1148	559	1998
	247		279

Je comprendrai dans une règle générale l'extraction de la racine cubique et de toutes les autres : la méthode en est facile à comprendre, quoique la pratique en soit assez longue; mais pour ne pas retarder la marche des commençans, je glisserai légèrement sur des calculs d'un usage très-peu commun.

Il faut partager toute la quantité en tranches de trois chiffres à compter des unités, si on cherche une racine cubique, et en tranches de cinq chiffres, si c'est une racine cinquième, etc.; ensuite écrire au quotient une Figure dont le cube ou la cinquième puissance (selon qu'on cherche une racine cubique ou une racine cinquième) égale la Figure ou les Figures qui précèdent la première virgule, ou du moins qui en approche le plus en moins; et ayant retranché cette puissance, vous obtiendrez le second chiffre de la racine en divisant le reste auquel vous aurez joint le premier chiffre de la tranche *suivante, par le quotient élevé à une puissance immédiatement inférieure, et multiplié par un chiffre qui soit l'exposant de la puissance supérieure; c'est-à-dire, en divisant par le triple du quarré du quotient pour une racine cubique, et par le quintuple de la quatrième puissance du quotient pour une racine cinquième, etc.; ensuite élevant le quotient trouvé à la puissance dont on cherche la racine, et le retranchant du nombre donné, on trouvera le troisième chiffre de la racine, en divisant ce reste augmenté du premier chiffre de la tranche suivante, par le quotient élevé à la puissance immédiatement inférieure, et multiplié par l'exposant de la puissance supérieure; et ainsi jusqu'à l'infini.*

Ainsi, pour extraire la racine cubique de 13312053, il faut commencer par partager ce nombre par des virgules en cette manière 13,312,053; ensuite il faut écrire au quotient le nombre 2, dont le cube est 8, cube qui approche le plus en moins de la valeur de 13, et dont il faut se contenter, puisqu'il n'y a point de cube qui égale 13. Retranchez-le, et le reste est 5, à côté duquel descendez la première Figure de la tranche suivante, vous aurez 53, qui, étant divisé par le triple du quarré de 2, ou 12, donne pour seconde Figure de la racine, 4. Mais comme la racine 24 élevée au cube donnerait 13824, nombre trop grand pour pouvoir être retranché de 13312 qui précède la seconde virgule, il faut seulement écrire 3 au quotient.

13,312,053	237
8	4×3
53	
$\frac{53}{12}$ donne 4 ou 3	
12167	
11450	
13312053	
0	

Alors, sur un papier à part, faites le produit de 23 par 23, et vous aurez 529, qui, étant de nouveau multiplié par 23, donnera 12167 pour le cube de 23. Retranchez-le de 13312, le reste sera 1145;

à côté de ce reste descendez o, premier chiffre de la dernière tranche, ce qui donne 11450; divisez ce nombre par le triple du quarré de 23, ou par 3×529, ou par 1587, vous aurez 7 au quotient, et c'est le troisième chiffre de la racine. Alors 237 élevé au quarré, donne 56169, et ce quarré multiplié de nouveau par 237, donne le cube 13312053, et ce dernier nombre retranché du nombre donné, il ne reste rien, ce qui fait voir que la racine est exactement 237.

Ainsi, pour trouver la racine cinquième 36430820, séparez par une virgule cinq Figures vers la droite, et 3, dont la cinquième puissance 243 approche le plus en moins du nombre 364, qui est à la gauche de la virgule, est bon pour le premier chiffre de la racine; retranchez sa cinquième puissance 243 de 364, il restera 121, à côté duquel descendant 3, premier chiffre de la seconde tranche, vous aurez 1213,

364,30820	32,5
243	405
1213	
33554432	5242880
28763880	

qui, étant divisé par le quintuple de la quatrième puissance de 3, ou par 5×81, ou par 405, donnera au quotient 2 pour la seconde Figure de la racine. Le quotient 32, multiplié trois fois par lui-même, sera élevé à sa quatrième puissance 1048576, et ce dernier produit, multiplié de nouveau par 32, formera la cinquième puissance de 32, ou bien 33554432, qui, retranché du nombre donné, laisse pour reste 2876388. Ainsi 32 est en nombres entiers la seule racine qu'on doive espérer, mais elle n'est pas exacte. Si donc l'on veut continuer l'opération par les décimales, il faut placer un o à côté du dernier reste, et diviser le nombre qui en proviendra par le quintuple de la quatrième puissance du quotient déja trouvé, en cherchant, par exemple, combien de fois 5 × 1048576, ou 5242880, est

est contenu dans 28763880, et il viendra au quotient 5, troisième Figure de la racine et la première décimale; et en ôtant du nombre donné la cinquième puissance de 32,5, et divisant le reste par le quintuple de sa quatrième puissance, on pourra obtenir le quatrième chiffre de la racine; et ainsi du reste jusqu'à l'infini.

Lorsqu'il faut extraire une racine quarrée-quarrée, on y parvient en extrayant deux fois la racine quarrée, parce que $\sqrt[4]{}$ vaut $\sqrt[2\times 2]{}$. Et lorsqu'il s'agit d'une racine cubo-cubique, il faut d'abord tirer la racine cubique, et ensuite la racine quarrée, parce que $\sqrt[6]{}$ vaut $\sqrt[3\times 2]{}$. C'est de-là, que quelques-uns ont cru qu'il ne fallait pas appeler cette espèce de racine cubo-cubique, mais quarrée-cubique. Il faut étendre cette observation à toutes les racines dont les exposans ne sont point des nombres premiers.

Lorsqu'il s'agit d'extraire les racines de quantités algébriques simples, l'opération n'a aucune difficulté. Il est clair, par exemple, que $\sqrt{aa}$ est a, et que $\sqrt{aacc}$ est ac, et que $\sqrt{9aacc}$ est $3ac$. Que.... $\sqrt{49a^4xx}$ est $7aax$. Et de même $\sqrt{\frac{a^4}{c^2}}$ ou $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{c^2}}$ est $\frac{a^2}{c}$. Et.. $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^2}}$ est $\frac{a^2b}{c}$. $\sqrt{\frac{9a^2z^2}{25b^2}}$ est $\frac{3az}{5b}$. Et encore $\sqrt{\frac{4}{9}}$ est $\frac{2}{3}$..... $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{27a^3}}$ est $\frac{2b^2}{3a}$. Et $\sqrt[4]{a^2b^2}$ est $\sqrt{ab}$. Il n'est pas moins évident que $b\sqrt{a^2c^2}$ ou b multipliant $\sqrt{a^2c^2}$, vaut b multipliant ac, ou abc. Et que $3c\sqrt{\frac{9a^2z^2}{25b^2}}$ vaut $3c.\frac{3az}{5b}$ ou $\frac{9acz}{5b}$. Et que... $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4b^2x^4}{81a^2}}$ vaut $\frac{a+3x}{c}.\frac{2bx^2}{9a}$, ou bien.............. $\frac{2abx^2}{9ac}+\frac{6bx^3}{9ac}$.

J'ai dit que toutes ces opérations étaient fort claires; qui ne voit effectivement du premier coup-d'œil que les racines que nous avons trouvées étant multipliées par elles-mêmes, reproduiront les puissances dont nous avons dit qu'elles étaient les racines? Ainsi a par a donne a^2; ac par ac donne a^2c^2; $3ac$ par $3ac$ donne $9a^2c^2$, etc. Mais lorsque les quantités sont complexes, il faut ordonner l'opération comme pour les nombres. Ainsi, pour extraire la racine quarrée de $a^2+2ab+b^2$, il faut d'abord tirer la racine quarrée du premier terme, qui est a, et l'écrire au quotient; ensuite retrancher son quarré a^2, et il restera $2ab+b^2$, qui nous fournira l'autre partie de la racine. Dites donc: combien de fois le double du quotient, ou $2a$, est-il contenu dans le premier terme du reste, c'est-à-dire dans $2ab$? Rép. b. Ecrivez b au quotient, et retranchez son produit par $2a+b$, ou $2ab+b^2$, il ne restera rien, ce qui indique que l'opération est terminée, et que la racine est $a+b$.

$$\begin{array}{l|l}
a^2+2ab+b^2 & a+b \\
\underline{a^2\qquad\qquad\quad} & \\
0\ +2ab+b^2 & \\
\quad\ \underline{2ab+b^2} & \\
\qquad 0 \quad\ 0 &
\end{array}$$

Ainsi pour extraire la racine $a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$, commencez d'abord par écrire au quotient la racine du premier terme a^4, c'est-à-dire a^2, et retranchant son quarré $a^2\times a^2$, ou bien a^4, il restera $6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$. Pour en tirer le reste de la racine, dites: combien de fois $2a^2$

$$\begin{array}{l|l}
a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4 & a^2+3ab-2b^2 \\
\underline{a^4} & \\
0 & \\
\quad\underline{6a^3b+9a^2b^2} & \\
\qquad 0\ -4a^2b^2 & \\
\qquad\ \underline{-4a^2b^2-12ab^3+4b^4} & \\
\qquad\qquad 0 \qquad\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

est-il contenu dans $6a^3b$? Rép. $3ab$. Ecrivez donc $3ab$ à la racine, et retranchant son produit par $2a^2 + 3ab$, ou $6a^3b + 9a^2b^2$, il restera encore $-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$. Dites de nouveau : combien de fois le double du quotient, ou $2a^2 + 6ab$, est-il contenu dans le reste ; ou, ce qui revient au même, combien de fois le double du premier terme du quotient $2a$, est-il contenu dans $-4a^2b^2$, premier terme du reste ? Rép. $-2b^2$. Ecrivez $-2b^2$ au quotient, et retranchant le produit de $-2b^2$ par $\overline{2a^2 + 6ab - 2b^2}$, ou $-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$, il ne reste rien ; ce qui annonce que la racine est $a^2 + 3ab - 2b^2$.

De même la racine de $x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ est $x - \frac{a}{2}$. La racine de $y^4 + 4y^3 - 8y + 4$ est $y^2 + 2y - 2$; et enfin la racine de $16a^4 - 24a^2x^2 + 9x^4 + 12b^2x^2 - 16a^2b^2 + 4b^4$ est $3x^2 - 4a^2 + 2b^2$. On pourra suivre la marche de toutes ces opérations dans les exemples suivans.

$$
\begin{array}{ll|l}
x^2 - ax + \frac{a^2}{4} & & \underline{x - \frac{1}{2}a} \\
\underline{x^2} & & \\
0 & & \\
\quad - ax + \frac{a^2}{4} & & \\
\quad \underline{- ax + \frac{a^2}{4}} & & \\
\quad\ \ 0 \qquad 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
9x^4 \begin{array}{l} -24a^2 \\ +12b^2 \end{array} & \left| x^2 \begin{array}{l} +16a^4 \\ -16a^2b^2 \\ +\ 4^4b \end{array} \right. & \underline{3x^2 - 4a^2 + 2b^2} \\
\underline{9x^4} & & \\
0 & & \\
\begin{array}{l} -24a^2 \\ +12b^2 \end{array} & \left| x^2 \begin{array}{l} +16a^4 \\ -16a^2b^2 \\ +\ 4b^4 \end{array} \right. & \\
\hline
0 & \qquad 0 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{llll|l}
y^4+4y^3 & * & -8y+4 & & y^2+2y-2 \\
y^4 & & & & \\
\hline
0 & & & & \\
+4y^3+4y^2 & & & & \\
\hline
0\ -4y^2 & & & & \\
-4y^2-8y+4 & & & & \\
\hline
0\quad 0\quad 0 & & & &
\end{array}$$

Si on veut la racine cubique de $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, l'opération se fait de la manière suivante. Tirez la racine du premier terme a^3 qui est a. Ecrivez a au quotient, et retranchant son cube a^3, dites : combien de fois le triple de son quarré $3a^2$ est-il contenu dans le premier terme du reste ? Rép. b. Ecrivez b au quotient, et ôtant le cube du quotient $a+b$, il ne restera rien. La racine est donc $a+b$.

$$\begin{array}{l|l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a+b \\
a^3 & 3a^2 \\
\hline
0 & \\
+3a^2b+3ab^2+b^3 & \\
\hline
0\quad 0\quad 0 &
\end{array}$$

De même, si on voulait extraire la racine cubique de $z^6+6z^5-40z^3+96z-64$, on trouverait z^2+2z-4. On s'y prendrait d'une manière analogue pour les racines plus élevées.

De la réduction des Fractions et des quantités radicales.

La réduction des quantités fractionnaires et radicales soit à leurs moindres termes, soit à la même dénomination, est très-utile pour les opérations précédentes.

De la réduction des Fractions à leurs moindres termes.

On réduit les fractions à leurs moindres termes, en divisant leurs numérateurs et leurs dénominateurs par leur plus grand commun diviseur. Ainsi $\frac{a^2 c}{b c}$ se réduit à la fraction plus simple $\frac{a^2}{b}$, en divisant son numérateur et son dénominateur par c. $\frac{203}{667}$ peut se réduire à la fraction plus simple $\frac{7}{23}$, en divisant 203 et 667 par 29. Et $\frac{203\, a^2 c}{667\, b c}$ se réduit à $\frac{7 a^2}{23 b}$, en divisant haut et bas par $29 c$. De même $\frac{6 a^3 - 9 a c^2}{6 a^2 + 3 a c}$ devient $\frac{2 a^2 - 3 c^2}{2 a + c}$, en divisant par $3 a$. Et $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a^2 - a b}$ devient $\frac{a^2 + b^2}{a}$, en divisant par $a - b$.

Il arrive souvent qu'on peut réduire par cette méthode les résultats d'une multiplication ou d'une division. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait de multiplier la fraction $\frac{2 a b^3}{3 c^2 d}$ par $\frac{9 a c^2}{b d^2}$, ou de la diviser par $\frac{b d^2}{9 a c^2}$, dans l'un et l'autre cas, on obtiendrait $\frac{18 a^2 b^3 c^2}{3 b c^2 d^3}$ qui peut se réduire à $\frac{6 a^2 b^2}{d^3}$. Mais dans des cas semblables, il vaut bien mieux réduire les quantités avant l'opération, en divisant par le plus grand commun diviseur.

Ainsi, dans l'exemple cité plus haut, je diviserai $2 a b^3$ et $b d^2$ par leur commun diviseur b; et $3 c^2 d$ et $9 a c^2$ par leur commun diviseur $3 c^2$. Par-là, on aura $\frac{2 a b^2}{d}$ à multiplier par $\frac{3 a}{d^2}$, ou à diviser par $\frac{d^2}{3 a}$, ce qui donnera la quantité toute réduite $\frac{6 a^2 b^2}{d^3}$, comme ci-dessus. Ainsi $\frac{a^2}{c}$ multipliée par $\frac{c}{b}$, devient $\frac{a^2}{1}$ multipliée par $\frac{1}{b}$ ou $\frac{a^2}{b}$. Et $\frac{a^2}{c}$ divisée par $\frac{b}{c}$, devient a^2 divisée par b, ou $\frac{a^2}{b}$. Et $\frac{a^3 - a x^2}{x^2}$ multipliée par $\frac{c x}{a^2 + a x}$, devient $\frac{a - x}{x}$ multipliée par $\frac{c}{1}$, ou bien $\frac{a c}{x} - c$. Et 28 divisé par $\frac{7}{3}$, devient 4 divisé par $\frac{1}{3}$ ou bien 12.

De la manière de trouver les Diviseurs.

C'EST ici que doit naturellement se placer la méthode de trouver les diviseurs.

Si la quantité est incomplexe, divisez-la par son moindre diviseur; divisez ensuite le quotient par son moindre diviseur, et continuez de la même manière, jusqu'à ce que vous parveniez à un quotient indivisible; alors vous aurez tous les premiers diviseurs de la quantité. Multipliez tous ces diviseurs deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., et vous aurez tous les diviseurs composés de la quantité.

S'il s'agit, par exemple, de trouver tous les diviseurs du nombre 60, divisez-le par 2, et le quotient 30 par 2, ensuite le quotient 15 par 3, il restera le quotient indivisible 5. Ainsi les diviseurs premiers sont : 1, 2, 2, 3, 5. Si on les combine en les multipliant deux à deux, on aura 4, 6, 10, 15; trois à trois, 12, 20, 30; et tous ensemble, 60.

Si on demandait tous les diviseurs de $21\,ab^2$; on n'a qu'à diviser cette quantité par 3; et son quotient par 7, et le second quotient par a; et le troisième par b; et il restera le quotient indivisible b. Ainsi les diviseurs premiers sont : 1, 3, 7, a, b, b. Les diviseurs composés deux à deux sont : 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; composés trois à trois, $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; quatre à quatre, $21\,ab$, $21\,bb$, $3\,abb$, $7abb$; cinq à cinq $21\,abb$. On trouverait de la même manière tous les diviseurs de $2ab^2 - 6a^2c$; ils sont : 1, 2, a, $b^2 - 3ac$, $2a$, $2b^2 - 6ac$, $ab^2 - 3a^2c$, $2ab^2 - 6a^2c$.

Si la quantité, après avoir été divisée par tous les diviseurs simples, demeure encore composée, et qu'on soupçonne qu'elle contienne quelque diviseur composé; disposez-la selon les dimensions de quelqu'une de ses lettres, et substituez successivement à la place de cette lettre, trois ou un plus grand nombre de termes de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, — 1, — 2. Et il en résultera autant de valeurs différentes, que vous écrirez avec leurs diviseurs à côté des termes de la progression qui les auront produites; ayant soin d'écrire aussi chaque diviseur avec un signe positif et un signe négatif. Comparez les diviseurs qui se trouvent dans une ligne avec ceux des autres lignes, pour voir s'ils ne formeraient pas une progression arithmétique. Et pour cela, commencez par les plus forts, pour descendre aux plus faibles, en suivant la même marche que la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, — 1, — 2. Si cette recherche vous fournit quelque progression dont les termes ne diffèrent que d'une unité, ou de quelque nombre qui divise la plus haute puissance de la quantité proposée, écrivez cette progression dans le même ordre que la première, plaçant chacun de ses termes à côté de la ligne des diviseurs qui l'a produit; et le terme qui, dans cette progression, répondra au terme 0 de la progression primitive, étant divisé par la différence des termes, et joint à la lettre à laquelle il avait été substitué, formera une quantité avec laquelle il faudra tenter la division (1).

Si, par exemple, la quantité proposée est $x^3 - x^2 - 10x + 6$, à la place de x je substitue successivement les termes de la progression arithmétique 1, 0, — 1, il en naîtra les nombres — 4, + 6, + 14. Je place chacun d'eux avec tous ses diviseurs dans la ligne du terme de la progression 1, 0, — 1, qui l'a produit, comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

1	4	1, 2, 4	+ 4
0	6	1, 2, 3, 6	+ 3
— 1	14	1, 2, 7, 14	+ 2

Ensuite comme le terme le plus élevé x^3 n'a de diviseur que l'unité, je cherche parmi les diviseurs quelque progression dont les termes ne diffèrent que d'une unité, et qui, en descendant des plus forts aux plus faibles, décroissent comme ceux de la progression $1, 0, -1$. Je ne trouve qu'une progression de cette espèce, c'est $4, 3, 2$. Je prends donc le terme $+3$ qui se trouve dans la même ligne que 0 de la première progression $1, 0, -1$, je le joins à x, et je tente la division par $x+3$; elle réussit, et j'obtiens pour quotient $x^2 - 4x + 2$ (2).

Si la quantité proposée est $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20$; à la place de y je substitue successivement $2, 1, 0, -1, -2$, et il en résulte les nombres $30, 7, 20, 3, 34$. Je les place avec tous leurs diviseurs comme dans l'exemple suivant; et je vois que dans tous les diviseurs il n'existe qu'une seule progression arithmétique décroissante $+10, +7, +4, +1, -2$. La différence de ses termes est 3, qui divise exactement le terme le plus élevé $6y^4$ de la quantité proposée. Je prends donc le terme $+4$ qui se trouve dans la même ligne que 0 de la première progression, et le divisant par la différence des termes 3, je le joins à la lettre y, et je tente la division par $y + \frac{4}{3}$, ou ce qui revient au même, par $3y + 4$. La division réussit, et j'ai pour quotient $2y^3 - 3y^2 - 3y + 5$ (3).

2	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.	+ 10
1	7	1, 7.	+ 7
0	20	1, 2, 4, 5, 10, 20.	+ 4
− 1	3	1, 3.	+ 1
− 2	34	1, 2, 17, 34.	− 2

Si la quantité proposée est $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140a^2 + 64a + 30$, on en fera l'opération comme il suit.

2

2	42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.	+ 3	+ 3	+ 7
1	23	1, 23.	+ 1	− 1	+ 1
0	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.	− 1	− 5	− 5
− 1	297	1, 3, 9, 11, 27, 33, 99, 297.	− 3	− 9	− 11

On trouve ici trois progressions dont les termes — 1, — 5, — 5, correspondans au terme 0 de la première progression, étant divisés par les différences respectives de leurs progressions, donnent trois diviseurs qu'il faut essayer, savoir; $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$, et $a - \frac{5}{6}$; et la division par le dernier $a - \frac{5}{6}$, ou $6a - 5$, réussit, et donne pour quotient $4a^4 - 5a^3 + 4a^2 - 20a - 6$ (4).

Si on ne trouve par cette méthode aucune quantité qui divise la proposée, il faudra conclure qu'elle n'a aucun diviseur d'une dimension. Cependant lorsque la proposée est de plus de trois dimensions, il est possible qu'elle ait un diviseur de deux; si elle en avoit un, voici de quelle manière on le trouverait.

Substituez dans la proposée, à la place de la lettre, quatre ou un plus grand nombre de termes de la progression 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3. *Placez tous les diviseurs des nombres qui en résulteront dans les mêmes lignes que les termes de la progression; élevez les termes de la progression au quarré; multipliez ces quarrés par quelque diviseur numérique du terme le plus élevé de la quantité proposée; ajoutez successivement à ces produits les diviseurs des nombres qui ont résulté de vos suppositions; retranchez-les ensuite, et écrivez ces sommes et ces différences dans le même ordre que les termes de la première progression; cherchez toutes les progressions qui peuvent se rencontrer dans ces sommes et ces différences, en allant des termes d'une ligne à ceux de la ligne suivante. Soit, par exemple,* $\mp C$. *le terme d'une progression de cette espèce qui se trouve dans la même ligne que le terme* 0 *de la première progression; soit* $\mp B$ *la différence qu'on obtient en retranchant*

$\mp C$ du terme immédiatement supérieur qui se trouve dans la même ligne que le terme 1 de la première progression ; soit enfin A un diviseur numérique du terme le plus élevé, et l la lettre de la quantité proposée ; alors $All \pm Bl \pm C$ sera un diviseur qu'il faudra essayer (5).

Soit, par exemple, la proposée $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6$; à la place de x j'écris successivement $3, 2, 1, 0, -1, -2$. Les nombres qui en résulteront, seront $39, 6, 1, -6, -21, -26$. J'écris chacun d'eux, avec tous ses diviseurs, dans la ligne du terme de la première progression qui l'a produit.

J'élève chacun des termes de la première progression au quarré, et j'écris tous ces quarrés dans une colonne ; je les multiplie par un diviseur numérique du terme le plus élevé de la proposée ; j'ajoute successivement à ces produits tous les diviseurs pris en plus et en moins, ce qui me donne des sommes et des différences que j'écris dans leurs lignes respectives. Ensuite parcourant ces nouvelles quantités en comparant chaque terme d'une ligne à ceux des autres lignes, j'écris dans de nouvelles colonnes toutes les progressions que cet examen me procure. Toutes ces opérations peuvent se voir dans l'exemple suivant.

3	39	1, 3, 13, 39.	9	−30, −4, 6, 8, 10, 12, 22, 48.	−4	6
2	6	1, 2, 3, 6.	4	− 2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10.	−2	3
1	1	1.	1	0, 1.	0	0
0	6	1, 2, 3, 6.	0	− 6, −3, −2, −1, 1, 2, 3, 6.	2	−3
−1	21	1, 3, 7, 21.	1	−20, −6, −2, 0, 2, 4, 8, 22.	4	−6
−2	26	1, 2, 13, 26.	4	−22, −9, 2, 3, 5, 6, 17, 30.	6	−9

Je prends successivement 2 et −3 qui se trouvent dans la même ligne que le 0 de la première progression, je les prends, dis-je, successivement pour $\mp C$, et je prends respectivement pour $\mp B$ les différences $+3$ et -2 qui naissent en soustrayant -3 et $+2$ des termes supérieurs 0 et 0; enfin, je prends l'unité pour A, et x pour l; ainsi, au lieu de l'équation $All \pm Bl \pm C$, j'ai à essayer les deux diviseurs $x^2 + 2x - 2$, et $x^2 - 3x + 3$, l'une et l'autre réussissent.

Si la quantité proposée était $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8y^2 - 14y + 14$, l'opération s'en ferait comme il suit. D'abord je l'essaie en ajoutant aux quarrés des termes de la progression $2, 1, 0, -1$, les diviseurs pris en plus et en moins, et employant 1 qui est un des diviseurs numériques du terme $3y^5$ à la place de A, et l'opération ne réussit pas. Je mets à la place de A le nombre 3 qui est un autre diviseur numérique du terme le plus élevé $3y^5$; et les quarrés des termes de la progression étant multipliés par 3, et ajoutés à tous les diviseurs pris successivement en plus et en moins, parmi les nouveaux nombres qui en résulteront, je trouve ces deux progressions, $-7, -7, -7, -7$, et $11, 5, -1, -7$. Pour abréger, j'avais négligé les diviseurs des deux derniers nombres 170 et 190 qui sont dans la seconde colonne.

3	170		27		−7	17
2	38	1, 2, 19, 38.	12	−26, −7, 10, 11, 13, 14, 31, 50.	−7	11
1	10	1, 2, 5, 10.	3	− 7, −2, 1, 2, 4, 5, 8, 13.	−7	5
0	14	1, 2, 7, 14.	0	−14, −7, −2, −1, 1, 2, 7, 14.	−7	− 1
−1	10	1, 2, 5, 10.	3	− 7, −2, 1, 2, 4, 5, 8, 13.	−7	− 7
−2	190		12		−7	−13

Je continue donc les deux progressions en ajoutant à chacune un terme en haut et un terme en bas, c'est-à-dire -7 et 17, et -7 et -13, et j'essaie si, en soustrayant ces nombres de 27 et de 12 qui se trouvent dans la quatrième colonne sur mêmes lignes que 170

et 190 qui sont dans la seconde colonne, leurs différences ne pourraient pas diviser ces mêmes nombres 179 et 190. Et en effet la différence entre 27 et -7, qui est 34, divise 170; et la différence de 12 et -7, qui est 19, divise aussi 190. Enfin la différence entre 27 et 17, qui est 10, divise aussi 170; mais la différence entre 12 et -13, qui est 25, ne divise pas 190, c'est pourquoi je rejette la dernière progression. La première me donne pour $\mp C$, -7, et 0 pour $\mp B$, parce que les termes de la progression n'ont aucune différence. Ainsi le diviseur qu'il faut essayer est $All \pm Bl \pm C$, qui devient $3y^2 + 7$. La division réussit, et le quotient est $y^3 - 2y^2 - 2y + 2$.

Si on ne peut trouver par cette méthode aucun diviseur qui réussisse, il en faut conclure que la quantité proposée n'a aucun diviseur de deux dimensions.

La même méthode pourrait s'étendre à la recherche de diviseurs de dimensions plus élevées, en cherchant dans les sommes et les différences, non des progressions arithmétiques, mais d'autres progressions quelconques, dont les différences premières, secondes, troisièmes, etc., seraient en progression arithmétique; mais il ne faut pas y arrêter les commençans.

Lorsqu'une quantité proposée contient deux lettres, et que tous ses termes contiennent le même nombre de dimensions, mettez à la place d'une de ces lettres l'unité; ensuite, par les règles précédentes, cherchez le diviseur de cette quantité, et complettez les dimensions du diviseur, en remettant à la place de l'unité la lettre que vous aviez supprimée.

Par exemple, si la quantité était $6y^4 - cy^3 - 21c^2y^2 + 3c^3y + 20c^4$, dans laquelle tous les termes sont de quatre dimensions; à la place de c mettez 1, et la quantité deviendra $6y^4 - y^3 - 21y^2$

$+3y+20$, dont on trouvera, comme ci-dessus, que le diviseur est $3y+4$, et complettant la dimension qui manque au dernier terme en remettant c, le diviseur cherché sera $3y+4c$. Si la quantité était $x^4 - bx^3 - 5b^2x^2 + 12b^3x - 6b^4$, mettez 1 pour b, vous aurez pour résultat $x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 6$, dont le diviseur est $x^2 + 2x - 2$. Je complette les dimensions qui lui manquent en remettant b, et le diviseur trouvé devient $x^2 + 2bx - 2b^2$.

Lorsqu'il y a trois ou un plus grand nombre de lettres dans la quantité proposée, et que tous ses termes ont le même nombre de dimensions, on en peut trouver le diviseur par les règles précédentes; mais on pourrait abréger l'opération en cette manière: *Cherchez tous les diviseurs de tous les termes dans lesquels une des lettres ne se trouve pas; cherchez pareillement tous les diviseurs de tous les termes dans lesquels une seconde lettre ne se trouve pas; cherchez de nouveau tous les diviseurs de tous les termes dans lesquels une troisième, une quatrième, une cinquième lettres ne se trouvent pas. Parcourez de cette manière toutes les lettres. Ecrivez respectivement tous ces diviseurs sur la même ligne horizontale que les lettres; examinez ensuite si dans quelque série des diviseurs dont les termes sont pris d'une ligne horizontale à l'autre, examinez, dis-je, si les parties de ces diviseurs, composées d'une seule lettre, se répètent autant de fois moins une qu'il y a de lettres dans la quantité proposée, et si les parties des diviseurs, composées de deux lettres, se répètent autant de fois moins deux qu'il y a de lettres dans la quantité proposée. S'il en est ainsi, toutes ces parties prises une seule fois avec leur signe formeront le diviseur cherché* (6).

Soit la quantité proposée $12x^3 - 14bx^2 + 9cx^2 - 12b^2x - 6bcx + 8c^2x + 8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$; en cherchant par les règles précédentes les diviseurs d'une dimension des termes $8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$, dans lesquels il n'y a point d'x, on trouvera que ces diviseurs sont $2b - 3c$ et $4b - 6c$. L'unique diviseur de $12x^3 + 9cx^2 + 8c^2x + 6c^3$, où b ne se trouve pas, est $4x + 3c$; et les diviseurs des termes $12x^3 - 14bx^2 - 12b^2x + 8b^3$, dans lesquels c ne se trouve pas, sont $2x - b$ et $4x - 2b$. Je dispose ces diviseurs dans les lignes des lettres, comme vous pouvez le voir dans l'exemple à côté, c'est-à-dire que je place les diviseurs des termes où il n'y a point d'x, sur la ligne des x; les diviseurs des termes où il n'y a point de c, sur la ligne des c; et ceux des termes où il n'y a point de b, sur la ligne des b.

$$\begin{array}{c|l} x & 2b - 3c,\ 4b - 6c. \\ b & 4x + 3c. \\ c & 2x - b,\quad 4x - 2b. \end{array}$$

Comme il y a trois lettres dans la quantité proposée, et que chaque partie des diviseurs n'en contient qu'une, il faut que dans la série des diviseurs ces parties se trouvent répétées deux fois; mais dans les diviseurs $4b - 6c$ et $2x - b$, les parties $4b$, $6c$, $2x$, b, ne se rencontrent qu'une fois, on ne les trouve plus hors du diviseur dont elles font partie; en conséquence je néglige ces diviseurs, et il ne m'en reste plus que trois, qui sont $2b - 3c$, $4x + 3c$, et $4x - 2b$. Ces diviseurs forment une série qui se continue par toutes les lettres x, b, c, et chacune de leurs parties $2b$, $4x$, $3c$ se trouve deux fois répétée dans la série, comme il fallait qu'elle le fût, et avec les mêmes signes, pourvu qu'on change ceux du diviseur $2b - 3c$, et qu'on l'écrive ainsi $-2b + 3c$, ce qui est toujours permis; car lorsqu'une quantité est le diviseur d'une autre, elle le sera encore si on change ses signes. Je prends donc une seule fois chacune des parties de ces diviseurs avec son signe, et la somme $-2b + 3c + 4x$ sera le diviseur qu'il fallait trouver. En effet, si on l'emploie pour diviser la quantité proposée, on obtient pour quotient $3x^2 - 2bx + 2c^2 - 4b^2$.

Si la quantité proposée est $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26a^2x^3 + 12abx^3 + 6b^2x^3 + 24a^3x^2 - 8a^2bx^2 - 8ab^2x^2 - 24b^3x^2 - 4a^3bx + 6a^2b^2x - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32a^2b^3 - 12b^5$; je place les diviseurs des termes où il n'y a point d'x, sur la ligne des x; ceux des termes où il n'y a point d'a, sur la ligne des a; et ceux des termes où il n'y a point de b, sur la ligne des b, comme vous pouvez le voir dans l'exemple.

$$\begin{array}{c|l} x & b,\ 2b,\ 4b,\ a^2+3b^2,\ 2a^2+6b^2,\ 4a^2+12b^2,\ b^2-3a^2,\ 2b^2-6a^2,\ 4b^2-12a^2. \\ a & 4x^2-3bx+2b^2,\ 12x^2-9bx+6b^2. \\ b & x,\ 2x,\ 3x-4a,\ 6x-8a,\ 3x^2-4ax,\ 6x^2-8ax,\ 2x^2+ax-3a^2,\ 4x^2+2ax-6a^2. \end{array}$$

Ensuite il est manifeste qu'il faut rejeter tous les diviseurs d'une dimension, car les simples, tels que b, $2b$, $4b$, x, $2x$, etc., et les parties des composés $3x - 4a$, $6x - 8a$ ne se trouvent qu'une seule fois parmi les diviseurs; or il y a trois lettres dans la quantité proposée, et les diviseurs simples d'une seule dimension, et les parties d'une seule dimension des diviseurs composés, telles que $3x - 4a$ ne contenant qu'une seule lettre, devraient s'y trouver deux fois.

Il faut également rejeter les diviseurs de deux dimensions, tels que $a^2 + 3b^2$, $2a^2 + 6b^2$, $4a^2 + 12b^2$, $b^2 - 3a^2$, et $4b^2 - 12a^2$, parce que les parties de ces diviseurs, telles que a^2, $2a^2$, $4a^2$, b^2 et $4b^2$ ne contiennent chacune qu'une lettre unique, soit a, soit b, et ne se trouvent qu'une seule fois parmi les diviseurs. Mais le diviseur $2b^2 - 6a^2$ qui reste seul dans la ligne des x, a deux parties, qui ne contiennent chacune également qu'une seule lettre, mais ces parties se trouvent répétées dans d'autres diviseurs; la partie $2b^2$, par exemple, se retrouve dans le diviseur $4x^2 - 3bx + 2b^2$, et la partie $6a^2$ se retrouve dans le diviseur $4x^2 + 2ax - 6a^2$. Il y a plus, ces trois diviseurs $2b^2 - 6a^2$, $4x^2 - 3bx + 2b^2$, et $4x^2 + 2ax - 6a^2$ forment une série qui parcourt les lignes des trois lettres x, a, b; et toutes leurs parties $2b^2$, $6a^2$, $4x^2$, qui ne renferment qu'une seule lettre, ou b, ou a, ou x, se retrouvent deux fois et avec les mêmes signes; les autres parties de ces mêmes diviseurs $3bx$, $2ax$ ne se trouvent à la vérité qu'une seule fois; mais comme elles sont composées chacune de deux lettres, elles doivent être admises. Ainsi rassemblant les parties différentes de ces trois diviseurs $2b^2$, $6a^2$, $4x^2$, $3bx$, $2ax$ avec leurs propres signes, elles formeront le diviseur cherché $2b^2 - 6a^2 + 4x^2 - 3bx + 2ax$. Divisez donc la quantité proposée par ce diviseur, et vous aurez pour quotient $3x^3 - 4ax^2 - 2a^2b - 6b^3$.

Si tous les termes de la quantité proposée n'ont pas le même nombre de dimensions, il faut les y ramener en multipliant les termes les moins élevés par les dimensions d'une lettre quelconque; ensuite, ayant trouvé le diviseur par les règles précédentes, il faut effacer la lettre introduite.

Soit, par exemple, la quantité proposée $12x^3 - 14bx^2 + 9x^2 - 12b^2x - 6bx + 8x + 8b^3 - 12b^2 - 4b + 6$. Prenez la lettre quelconque c, et par ses dimensions complettez celles de la quantité proposée en cette manière: $12x^3 - 14bx^2 + 9cx^2 - 12b^2x - 6bcx + 8c^2x + 8b^3 - 12b^2c - 4bc^2 + 6c^3$. Ensuite ayant trouvé le diviseur $4x - 2b + 3c$ de cette nouvelle quantité, effacez c, et le diviseur de la quantité proposée est $4x - 2b + 3$.

Quelquefois

Quelquefois on trouve les diviseurs plus facilement que par les règles précédentes. Par exemple, lorsque dans la quantité proposée une lettre ne se trouve que d'une seule dimension, il faut chercher le plus grand commun diviseur des termes dans lesquels cette lettre se trouve, et des termes dans lesquels elle ne se trouve pas, et ce diviseur commun divisera toute la quantité proposée; et si on ne trouve aucun diviseur commun, on peut être sûr que la proposée n'a point de diviseur. Par exemple, soit la quantité proposée $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c - 8a^4$; cherchez le diviseur commun des termes $+cx^3 - acx^2 - 8a^2cx + 6a^3c$, où c n'est que d'une dimension, et des autres termes $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$, et ce diviseur commun $x^2 + 2ax - 2a^2$ divisera la quantité toute entière.

Lorsque la seule inspection de deux quantités ne suffit pas pour faire découvrir leur diviseur commun, on parvient à le trouver en retranchant continuellement la plus petite des deux quantités de la plus grande, et ensuite le reste, de la plus petite; et le diviseur cherché sera enfin celui qui ne laissera aucun reste. Ainsi pour trouver le plus grand commun diviseur des nombres 203 et 667, ôtez trois fois 203 de 667, ôtez ensuite trois fois le reste 58 de 203, et deux fois le reste 29 de 58, et il ne restera rien. Ce qui marque que 29 est le diviseur cherché.

La manière de trouver le diviseur commun des quantités littérales n'est pas différente de celle des nombres. Lorsqu'elles sont composées, on y parvient en retranchant la plus petite, ou ses multiples, de la plus grande; mais il faut pour cela ordonner les deux quantités et le reste, par rapport à une même lettre, comme on l'a fait pour la division; et à chaque soustraction, réduire les quantités en les divisant par leurs diviseurs simples, ou par quelque quantité qui divise tous leurs termes, comme feraient des diviseurs *simples.* Ainsi pour trouver le diviseur commun du numérateur et du dénominateur de la fraction $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - ax^2 - 8a^2x + 6a^3}$, multipliez le dénominateur par x, afin que son premier terme devienne égal au premier terme du numérateur; faites ensuite la soustraction, et il restera $- 2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$; quantité qu'on peut réduire en la divisant par $- 2a$, et qui devient $x^3 - 6a^2x + 4a^3$. Retranchez-la du dénominateur, et il restera $- ax^2 - 2a^2x + 2a^3$. Divisez encore cette dernière quantité par $- a$, et elle deviendra $x^2 + 2ax - 2a^2$. Multipliez-la par x, afin que son premier terme devienne égal au premier terme de la dernière quantité soustraite $x^3 - 6a^2x + 4a^3$, et de laquelle maintenant il faut soustraire; et l'opération faite, il restera $- 2ax^2 - 4a^2x + 4a^3$, qui, étant divisé par $- 2a$, devient $x^2 + 2ax - 2a^2$, et comme cette dernière quantité est absolument la même que le reste précédent, si on l'en retranche, il ne restera rien: il est par conséquent le diviseur cherché. Divisez maintenant le numérateur et le dénominateur de la fraction donnée par ce diviseur, et elle sera réduite à la fraction plus simple $\frac{x^2 - 5ax + 4a^2}{x - 3a}$.

De même si on avait la fraction $\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3}$, il faudrait commencer par réduire ses termes en divisant le numérateur par a^2, et le dénominateur par $3b$; ensuite retranchant le double de $3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3$ de $6a^3 + 15a^2b - 4ac^2 - 10bc^2$, il restera $\left.\begin{array}{r} 15b \\ +18c \end{array}\right| \begin{array}{l} a^2 - 10bc^2 \\ \quad - 12c^3 \end{array}$; quantité qui peut être réduite en divisant chacun de ses deux termes par $5b + 6c$ (comme si $5b + 6c$ était un diviseur simple) et elle devient $3a^2 - 2c^2$. Multipliez-la par a, et la retranchez de $3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3$, et le second reste sera $-9a^2c+6c^3$, qu'on peut simplifier de même en le divisant par $-3c$, et il devient $3a^2-2c^2$ comme le précédent ; c'est pourquoi $3a^2-2c^2$ est le commun diviseur cherché. Divisez donc le numérateur et le dénominateur de la fraction proposée par ce diviseur, et elle se trouvera réduite à $\frac{2a^3+5a^2b}{3ab-9bc}$.

Lorsqu'on n'a pu trouver par cette méthode de diviseur commun, on peut être sûr qu'il n'y en a point, à moins qu'il ne vienne des quantités qui ont servi à réduire le numérateur et le dénominateur, comme, par exemple, dans la fraction $\frac{a^2d^2-c^2d^2-a^2c^2+c^4}{4a^2d-4acd-2ac^2+2c^3}$, si on dispose tous les termes selon les dimensions de la lettre d, le numérateur deviendra $\left.\begin{array}{r} a^2 \\ -c^2 \end{array}\right| d^2 \begin{array}{l} -a^2c^2 \\ +c^4 \end{array}$, et le dénominateur . . . . $\left.\begin{array}{r} 4a^2 \\ -4ac \end{array}\right| d \begin{array}{l} -2ac^2 \\ +2c^3 \end{array}$. Il faut commencer par les réduire en divisant chaque terme du numérateur par a^2-c^2, et chaque terme du dénominateur par $2a-2c$, comme si a^2-c^2, et $2a-2c$ étaient des quantités simples. Alors le numérateur sera réduit à d^2-c^2, et le dénominateur à $2ad-c^2$, et ces deux quantités ainsi préparées n'ont plus aucun diviseur commun ; mais les termes a^2-c^2 et $2a-2c$, qui ont servi à réduire le numérateur et le dénominateur, ont le diviseur commun $a-c$, par le moyen duquel on peut réduire la fraction proposée à celle-ci : $\frac{ad^2+cd^2-ac^2-c^3}{4ad-2c^3}$. Mais si les termes a^2-c^2 et $2a-2c$ n'avaient eu aucun diviseur commun, la fraction aurait été irréductible.

Telle est la méthode générale de trouver les diviseurs communs. Mais on les trouve presque toujours d'une manière plus courte en cherchant tous les diviseurs premiers de l'un des deux termes de la fraction, et en essayant si, parmi ces diviseurs premiers, il ne s'en trouverait pas quelqu'un qui divisât l'autre terme sans reste. Ainsi, pour réduire la fraction $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a^2 - a b}$ à ses moindres termes, il faut trouver les diviseurs de la quantité $a^2 - ab$, qui sont a et $a - b$; il faut essayer ensuite si a ou $a - b$ peut diviser sans reste $a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3$: $a - b$ le divise, et le quotient est $a^2 + b^2$. De sorte que la fraction proposée se réduit à $\frac{a^2 + b^2}{a}$.

De la réduction des Fractions à un dénominateur commun.

Les fractions se réduisent à un dénominateur commun, en multipliant chaque terme de l'une par le dénominateur de l'autre, et réciproquement.

Supposons qu'on ait les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ qu'il faille réduire au même dénominateur. Multipliez les deux termes de $\frac{a}{b}$ par d, et les deux termes de $\frac{c}{d}$ par b, et elles deviendront $\frac{ad}{bd}$ et $\frac{bc}{bd}$. Or ces deux fractions ont le dénominateur commun bd. De même a ou $\frac{a}{1}$ et $\frac{ab}{c}$ deviennent $\frac{ac}{c}$ et $\frac{ab}{c}$. Mais lorsque les dénominateurs ont un diviseur commun, il suffira de multiplier réciproquement par les quotiens. Ainsi les fractions $\frac{a^3}{bc}$ et $\frac{a^3}{bd}$ peuvent être ramenées à celles-ci, $\frac{a^3 d}{bcd}$ et $\frac{a^3 c}{bcd}$, en multipliant alternativement, par les quotiens qu'on obtient, en divisant les dénominateurs par leur commun diviseur b.

Cette réduction à un dénominateur commun est sur-tout utile dans l'addition et la soustraction des fractions. Car lorsque deux fractions ont des dénominateurs différens, elles ne peuvent être réunies, avant d'avoir été réduites à la même dénomination. Ainsi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ devient, par la réduction, $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$ ou $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a + \frac{ab}{c}$ devient $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ devient $\frac{a^3 d - a^3 c}{bcd}$ ou $\frac{\overline{d-c}\,.\,a^3}{bcd}$. Et $\frac{c^4+x^4}{c^2-x^2} - c^2 - x^2$, devient..................

$\frac{c^4 + x^4 - c^4 - c^2 x^2 + c^2 x^2 + x^4}{c^2 - x^2}$ qui se réduit à $\frac{2x^4}{c^2 - x^2}$. De même... $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ devient $\frac{14}{21} + \frac{15}{21}$ ou $\frac{14+15}{21}$ qui est la même chose que $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$ devient $\frac{22}{12} - \frac{9}{12}$ ou $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ devient $\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$ ou $\frac{4}{12}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{3}$. Et $3\,\frac{4}{7}$ ou $\frac{3}{1} + \frac{4}{7}$ devient $\frac{21}{7} + \frac{4}{7}$ ou $\frac{25}{7}$. Et $25\,\frac{1}{2}$ devient $\frac{51}{2}$.

Lorsque les fractions sont en plus grand nombre, il faut les réduire par parties. Si vous avez, par exemple, $\frac{a^2}{x} - a + \frac{2x^2}{3a} - \frac{ax}{a-x}$, commencez par retrancher a de $\frac{a^2}{x}$, le reste sera $\frac{a^2 - ax}{x}$; ajoutez à cette quantité $\frac{2x^2}{3a}$, et vous aurez $\frac{3a^3 - 3a^2x + 2x^3}{3ax}$. Retranchez enfin de cette dernière quantité $\frac{ax}{a-x}$, et le reste sera......... $\frac{3a^4 - 6a^3x + 2ax^3 - 2x^4}{3a^2x - 3ax^2}$. De même si on avait $3\,\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, il faut commencer par trouver la somme de $3\,\frac{4}{7}$ qui est $\frac{25}{7}$, et ensuite de ce dernier nombre retrancher $\frac{2}{3}$, et le reste sera $\frac{61}{21}$.

De la réduction des Radicaux à leurs moindres termes.

Lorsqu'il est impossible de tirer la racine de toute une quantité radicale, on peut souvent la réduire en tirant celle d'un de ses diviseurs.

C'est ainsi que $\sqrt{a^2bc}$ devient $a\sqrt{bc}$, en tirant la racine du diviseur a^2. Et $\sqrt{48}$ ou $\sqrt{16 . 3}$ devient $4\sqrt{3}$, en tirant la racine du diviseur 16. Et $\sqrt{48a^2bc}$ devient $4a\sqrt{3bc}$, en tirant la racine du diviseur $16a^2$. Et $\sqrt{\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{c^2}}$ ou................ $\sqrt{\frac{(a^2 - 4ab + 4b^2)\,ab}{c^2}}$ devient $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, en tirant la racine du diviseur $\frac{a^2 - 4ab + 4b^2}{c^2}$. Et $\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2z^2} + \frac{4a^2m^2}{pz^2}}$, ou en réduisant les deux termes au même dénominateur... $\sqrt{\frac{a^2 o^2 m^2 + 4 a^2 p m^2}{p^2 z^2}}$ devient en extrayant la racine du diviseur, $\frac{a^2 m^2}{p^2 z^2}$ commun aux deux termes.... devient, dis-je, $\frac{a m}{p z} \sqrt{o^2 + 4 p}$. Et $6 \sqrt{\frac{75}{98}}$ ou $6 \sqrt{\frac{25}{49} \cdot \frac{3}{2}}$ devient.. $6 \cdot \frac{5}{7} \sqrt{\frac{3}{2}}$ (en extrayant la racine du diviseur $\frac{25}{49}$) ou bien $\frac{30}{7} \sqrt{\frac{3}{2}}$, ou bien $\frac{30}{7} \sqrt{\frac{6}{4}}$, et en extrayant encore la racine du dénominateur 4... $\frac{15}{7} \sqrt{6}$. C'est ainsi que $a \sqrt{\frac{b}{a}}$, ou ce qui est la même chose, $a \sqrt{\frac{a b}{a^2}}$ devient $\frac{a}{a} \sqrt{a b}$ (en extrayant la racine du dénominateur a^2), ou enfin $\sqrt{a b}$. Et $\sqrt[3]{8 a^3 b + 16 a^4}$, ou ce qui revient au même, $\sqrt[3]{8 a^3 (b + 2 a)}$ devient $2 a \sqrt[3]{b + 2 a}$, en extrayant la racine cubique du diviseur $8 a^3$. De même si on a $\sqrt[4]{a^3 x}$, on peut tirer la racine quatrième de son facteur a^2 qui devient alors $\sqrt{a}$, et le multipliant par $\sqrt[4]{a x}$, on a $\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a x}$, ou bien en extrayant la racine quatrième du facteur a^4, elle devient $a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}$. De même $\sqrt[6]{a^7 x^5}$ peut être changé en $a \sqrt[6]{a x^5}$, ou bien en $x a \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$, ou même encore en $\sqrt{a x} \sqrt[3]{a^2 x}$. (7).

Au reste, cette réduction ne sert pas seulement à abréger les expressions des quantités radicales, mais encore à les additionner et à les soustraire, lorsqu'elles sont réduites à leurs plus simples termes, pourvu toutefois que leurs signes radicaux soient de même degré; car autrement l'addition et la soustraction seraient impossibles : c'est ainsi que $\sqrt{48} + \sqrt{75}$; ou ce qui est la même chose................ $\sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3}$ deviennent, par la réduction, $4 \sqrt{3} + 5 \sqrt{3}$ ou

$9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$ devient $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$ ou $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. De même $\sqrt{\frac{4ab^3}{c^2}}+\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{c^2}}$, ou bien.................. $\sqrt{\frac{4b^2.ab}{c^2}}+\sqrt{\frac{(a^2-4ab+4b^2)ab}{c^2}}$ devient, en tirant hors du radical tout ce que cette quantité contient de rationnel........... $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, qui se réduit à $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et......... $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}-\sqrt[3]{b^4+2ab^3}$, ou ce qui revient au même... $\sqrt[3]{8a^3(b+2a)}-\sqrt[3]{b^3(b+2a)}$, et en tirant de cette quantité tout ce qu'elle contient de rationnel, elle devient............. $2a\sqrt[3]{b+2a}-b\sqrt[3]{b+2a}$ qui se réduit à $\overline{2a-b}\sqrt[3]{b+2a}$.

De la réduction des Radicaux à la même dénomination.

Lorsqu'on a des quantités radicales de différentes dénominations à multiplier ou à diviser, il faut d'abord les ramener à la même dénomination; ce qui se fait, en donnant pour exposant à leur radical commun le plus petit nombre qui puisse être divisé sans reste par les autres exposans; et en multipliant les exposans des quantités sous le signe par le nombre même qui a servi à multiplier l'exposant du signe. Ainsi $\sqrt{ax}$ à multiplier par $\sqrt[3]{a^2x}$, devient d'abord $\sqrt[6]{a^3x^3}$ qu'il faut multiplier par $\sqrt[6]{a^4x^2}$, ce qui donne $\sqrt[6]{a^7x^5}$. Et $\sqrt{a}$ par....... $\sqrt[4]{ax}$, devient $\sqrt[4]{a^2}$ à multiplier par $\sqrt[4]{ax}$, ce qui donne $\sqrt[4]{a^3x}$. Et $\sqrt{6}$ par $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$, devient $\sqrt[4]{36}$ à multiplier par $\sqrt[4]{\frac{5}{6}}$, ce qui donne $\sqrt[4]{\frac{180}{6}}$ ou $\sqrt[4]{30}$. Par la même raison, $a\sqrt{bc}$ devient $\sqrt{a^2}$

multipliant

multipliant $\sqrt{bc}$ ou $\sqrt{a^2bc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ devient $\sqrt{16a^2}$, multipliant $\sqrt{3bc}$ ou $\sqrt{48a^2bc}$. Et $2a\sqrt[3]{b+2a}$ devient $\sqrt[3]{8a^3}$, multipliant $\sqrt[3]{b+2a}$ ou $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$. De même encore $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ devient.. $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b^2}}$ ou bien $\sqrt{\frac{ac}{b^2}}$. Et $\frac{6ab^2}{\sqrt{18ab^3}}$ devient $\frac{\sqrt{36a^2b^4}}{\sqrt{18ab^3}}$ ou bien.. $\sqrt{2ab}$. Et ainsi du reste.

De la réduction des Radicaux à leurs expressions radicales les plus simples par l'extraction des Racines.

Lorsque les racines sont composées d'une partie rationnelle et d'une partie radicale quarrée, il faut en extraire la racine de la manière suivante :

A désignera la partie la plus considérable d'une quantité quelconque proposée et B la moindre ; $\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ sera le quarré de la plus grande partie de la racine, et $\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ sera le quarré de la plus petite qu'il faudra joindre à la plus grande avec le signe de B. (8).

Si la quantité proposée est, par exemple, $3+\sqrt{8}$, en écrivant 3 pour A et $\sqrt{8}$ pour B; $\sqrt{A^2-B^2}$ sera 1, et le quarré de la plus grande partie de la racine sera $\frac{3+1}{2}$ ou 2, et le quarré de la plus petite sera $\frac{3-1}{2}$ ou 1 : donc la racine de la quantité proposée est $\sqrt{1}+\sqrt{2}$ ou bien $1+\sqrt{2}$.

S'il s'agit de trouver la racine de $\sqrt{32}-\sqrt{24}$, je fais $A=\sqrt{32}$ et $B=\sqrt{24}$, alors $\sqrt{A^2-B^2}$ devient $\sqrt{32-24}=\sqrt{8}$, et....

$\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ devient $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$ ou bien $3\sqrt{2}$; et $\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}$ devient $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$ ou bien $\sqrt{2}$. C'est-à-dire, que le quarré de la plus grande partie de la racine est $3\sqrt{2}$, et le quarré de la plus petite est $\sqrt{2}$. Par conséquent la racine quarrée de la proposée est $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$.

De même si on a $a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}$ dont il faille extraire la racine quarrée, faites $A=a^2$, et $B=2x\sqrt{a^2-x^2}$, et vous aurez $A^2-B^2=a^4-4x^2(a^2-x^2)$ ou bien $a^4-4a^2x^2+4x^4$ dont la racine est a^2-2x^2. Le quarré de la plus grande partie sera donc $\frac{2a^2-2x^2}{2}$ ou a^2-x^2; et le quarré de la plus petite $\frac{a^2-(a^2-2x^2)}{2}$, ou x^2, et par conséquent la racine de la proposée est $\sqrt{x^2}+\sqrt{a^2-x^2}$ ou bien $x+\sqrt{a^2-x^2}$. Qu'on ait encore la quantité $a^2+5ax-2a\sqrt{ax+4x^2}$ dont il faille extraire la racine quarrée; faites $a^2+5ax=A$, et $2a\sqrt{ax+4x^2}=B$; alors A^2-B^2 deviendra $a^4+10a^3x+25a^2x^2-4a^3x-16a^2x^2$, ce qui se réduit à $a^4+6a^3x+9a^2x^2$, dont la racine quarrée est a^2+3ax, valeur de $\sqrt{A^2-B^2}$. Maintenant le quarré de la plus grande partie de la racine ou $\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}=\frac{a^2+5ax+a^2+3ax}{2}=a^2+4ax$; et le quarré de la plus petite partie, ou........................ $\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}=\frac{a^2+5ax-(a^2+3ax)}{2}=ax$. Donc la racine quarrée de la quantité proposée est $\sqrt{a^2+4ax}-\sqrt{ax}$.

Enfin qu'on demande la racine de $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$. Je fais $6+\sqrt{8}=A$ et $B=-\sqrt{12}-\sqrt{24}$; alors $A^2-B^2=8$.

Donc la plus grande partie de la racine est $\sqrt{3+\sqrt{8}} = 1+\sqrt{2}$, comme ci-dessus; et la plus petite partie de la racine est $\sqrt{3}$. Donc enfin la racine de la proposée est $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Au reste, lorsqu'on a plusieurs radicaux de cette espèce, on peut trouver les parties de la racine beaucoup plus promptement, en divisant le produit de deux quelconques de ces quantités radicales par une autre quantité radicale qui donne pour quotient un nombre rationnel et entier; car la racine du double de ce quotient sera le double de la partie de la racine cherchée. Prenons le dernier exemple où nous avions $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{24}$, et faisons d'abord $\frac{\sqrt{8}.\sqrt{12}}{\sqrt{24}} = 2$; ensuite.... $\frac{\sqrt{8}.\sqrt{24}}{\sqrt{12}} = 4$, et enfin $\frac{\sqrt{12}.\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = 6$; donc les parties de la racine sont 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, comme ci-dessus. (9).

Il y a aussi des règles pour trouver les racines plus élevées des quantités numériques, composées de deux parties, qui, étant élevées au quarré, deviennent commensurables.

Soit une quantité composée des deux parties $A \pm B$; que A soit la plus grande; et que le degré de la racine soit indiqué par c. Cherchez le plus petit nombre n dont la puissance n^c soit divisible sans reste par $A^2 - B^2$, et soit le quotient Q; prenez en nombres entiers la valeur la plus approchée de $\sqrt[c]{\overline{A+B}.\sqrt{Q}}$, et que le résultat en soit r. Divisez $A\sqrt{Q}$ par son plus grand diviseur rationnel, et que le quotient soit s. Prenez la valeur la plus approchée en nombres entiers de $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$; et soit cette valeur t; et

I 2

$\dfrac{ts \pm \sqrt{t^2 s^2 - n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *sera la racine cherchée, si elle est susceptible d'extraction.* (10).

Qu'on ait, par exemple, à extraire la racine cubique de $\sqrt{968} + 25$; on aura $A^2 - B^2 = 343$, dont les diviseurs sont 7, 7, 7. Donc $n = 7$ et $Q = 1$. Ensuite $\overline{A + B\sqrt{Q}}$ ou $\sqrt{968} + 25$, a une valeur un peu plus grande que 56; car, en tirant la racine approchée du premier terme, on trouve 31, qui, étant ajouté à 25, donne 56, dont la racine cubique la plus approchée est 4. Donc $r = 4$. De plus, $A\sqrt{Q}$ ou $\sqrt{968}$ devient, en extrayant tout ce qu'il y a de rationnel, $\sqrt{4 \,.\, 121 \,.\, 2}$ ou $22\sqrt{2}$. Ainsi en divisant $22\sqrt{2}$ par toute sa partie rationnelle, le quotient est $\sqrt{2}$. Donc $s = \sqrt{2}$, et $\dfrac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ devient $\dfrac{4 + \frac{7}{4}}{2\sqrt{2}}$ ou $\dfrac{\frac{16+7}{4}}{2\sqrt{2}}$ ou $\dfrac{\frac{23}{4}}{2\sqrt{2}}$, ou, en se contentant de prendre en nombres entiers sa partie la plus approchée, $\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$. Et en prenant encore dans cette dernière quantité la valeur la plus approchée en nombres entiers, elle devient 2. On a donc $t = 2$ et $ts = 2\sqrt{2}$, et $\sqrt{t^2 s^2 - n} = \sqrt{8 - 7} = 1$, et $\sqrt[2c]{Q} = 1$. Donc $2\sqrt{2} + 1$ est la racine cherchée, si pourtant la racine de la proposée est susceptible d'extraction. Je l'essaye donc en élevant $2\sqrt{2} + 1$ au cube, et il me vient $\sqrt{968} + 25$. Donc la racine est exacte.

Soit encore $68 - \sqrt{4374}$, dont il faille extraire la racine cubique. On aura $A^2 - B^2 = 250$. Ses diviseurs sont : 5, 5, 5, 2. Faisons $n = 2 \times 5 = 10$. Et $n^c = 10^3 = 1000$ qui se divise sans reste par

250, et donne pour quotient 4. Donc $Q = 4$. Et $\sqrt[c]{\overline{A+B}.\sqrt{Q}}$, ou bien $\sqrt[3]{(68+\sqrt{4374}).\sqrt{4}}$ étant pris en nombres entiers les plus près de sa valeur, donne $7 = r$. De plus $A\sqrt{Q}$ ou $68\sqrt{4}$, en extrayant tout ce qui est rationnel, est $136\sqrt{1}$. Donc $s = 1$ et $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ou $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$ ou $\frac{59}{14} = 4$. Donc $t = 4$, en se bornant aux nombres entiers les plus approchés. Donc $ts = 4$ et............ $\sqrt{t^2s^2-n} = \sqrt{16-10} = \sqrt{6}$ et $\sqrt[2c]{Q}$ ou $\sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$. Par conséquent la racine qu'il faut essayer est $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Si on demandait la racine quarrée-cubique (*) de $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$, on aurait $A^2-B^2 = 3$, on aurait aussi $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$, $ts = \sqrt{6}$ et $\sqrt{t^2s^2-n} = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$; et $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[10]{81}$ ou $\sqrt[5]{9}$. Ainsi la racine qu'il faut essayer est... $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Au reste, dans des opérations de cette espèce, si la quantité contient une fraction, il faut réduire tout au même dénominateur, et prendre séparément la racine du numérateur et du dénominateur. Si les termes de la quantité avaient un commun diviseur, il faudrait prendre séparément la racine de chacun des facteurs. Si on demandait, par exemple, la racine cubique de $\sqrt{242}-12\frac{1}{2}$, il faudrait

(*) C'est ce qu'on appelle plus communément la racine cinquième.

d'abord tout réduire au dénominateur commun, et on aurait $\frac{\sqrt{968}-25}{2}$, et en tirant séparément la racine cubique du numérateur et du dénominateur, on trouverait $\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{2}}$, parce que nous avons déjà vu que la racine cubique de $\sqrt{968}-25$ était $2\sqrt{2}-1$.

S'il s'agit d'extraire la racine quelconque de $\sqrt[3]{3993}+\sqrt[6]{17578125}$; les deux parties ont le diviseur commun $\sqrt[3]{3}$, et l'autre facteur est $11+\sqrt{125}$, ainsi la quantité proposée est $(11+\sqrt{125})\times\sqrt[3]{3}$. Et on en obtiendra la racine, en tirant séparément la racine de chacun de ses facteurs $\sqrt[3]{3}$ et $11+\sqrt{125}$.

DE LA FORME DE L'ÉQUATION.

LES équations sont un assemblage de plusieurs quantités ou égales entre elles, ou égales à zéro. On considère les équations sous deux rapports différens ; ou comme les dernières conclusions auxquelles on arrive dans la résolution des problêmes, ou comme les moyens par lesquels on parvient aux équations finales.

De la première espèce sont les équations uniques qui ne renferment qu'une seule inconnue mêlée avec des connues, pourvu toutefois que le problême soit déterminé, et qu'il demande une chose possible.

De la seconde espèce sont les équations qui renferment plusieurs inconnues qu'il faut comparer et combiner entre elles, de manière qu'il en résulte une équation nouvelle qui ne contienne plus qu'une seule inconnue mêlée avec des connues. Pour obtenir plus facilement la valeur de cette inconnue, il est presque toujours nécessaire de donner à l'équation résultante différentes formes, jusqu'à ce qu'on l'ait réduite à sa plus grande simplicité possible, et qu'elle se rapporte, suivant son degré, à quelques-unes des formules suivantes, dans lesquelles tous les termes sont ordonnés par rapport aux dimensions de x, qui désigne l'inconnue. p, q, r, s, sont des quantités déterminées et connues, au moyen desquelles on parvient à trouver la valeur de x par des méthodes que nous expliquerons.

$$
\begin{array}{lll}
x = p & & x - p = 0. \\
x^2 = px + q. & \text{ou bien} & x^2 - px - q = 0. \\
x^3 = px^2 + qx + r. & & x^3 - px^2 - qx - r = 0. \\
x^4 = px^3 + qx^2 + rx + s. & & x^4 - px^3 - qx^2 - rx - s = 0. \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}
$$

C'est sur le modèle de ces formules qu'il faut toujours ordonner les termes des équations, selon le nombre des dimensions de l'inconnue, en plaçant au premier rang le terme où l'inconnue est le plus élevée, au second rang le terme où elle est d'une dimension moindre, et ainsi de suite. Quels que soient les signes des différens termes, ils ne doivent rien changer à cet arrangement; en supposant même qu'il manque quelques termes intermédiaires, il doit subsister encore. Ainsi $x^3 * - b^2x + b^3 = 0$, ou $x^3 = b^2x - b^3$ est une équation du troisième degré; $z^4 \begin{smallmatrix} + a \\ - b \end{smallmatrix} \Big| z^3 * \begin{smallmatrix} + ab^3 \\ - b^4 \end{smallmatrix} = 0$, est une équation du quatrième; car le degré d'une équation s'estime par la plus haute dimension de l'inconnue, sans aucun égard aux quantités connues, non plus qu'aux termes intermédiaires. Cependant l'absence de quelques termes intermédiaires rend très-souvent l'équation plus simple, et sert même quelquefois à la faire descendre à des degrés plus bas. C'est ainsi que $x^4 = qx^2 + s$ peut être regardée comme une équation du second degré, parce qu'elle est décomposable en deux équations du second degré; car en supposant $x^2 = y$ et en substituant y à la place de x^2 dans l'équation, on aura la nouvelle équation $y^2 = qy + s$, qui est visiblement une équation du second degré; et lorsque, par son moyen, on aura déterminé la valeur de y, l'autre équation du second degré $x^2 = y$ servira à faire trouver celle de x.

Tels

Tels sont les résultats auxquels les problêmes doivent être ramenés. Mais avant d'entreprendre leur résolution, il est nécessaire d'enseigner la méthode de transformer les équations, de les réduire, et d'arriver par les équations moyennes aux équations finales. Je renfermerai dans les règles suivantes tous les moyens de réduire une équation unique.

De la manière de réduire une Équation unique.

RÈGLE PREMIÈRE. *Lorsqu'il y a dans une équation des quantités qui se détruisent mutuellement, ou qui peuvent se réunir soit par addition, soit par soustraction, il faut effectuer ces destructions ou ces réunions; cela diminue le nombre des termes.*

Si on a, par exemple, $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$; qu'on retranche de part et d'autre $2x$, et qu'on ajoute $3a$, et on aura $5b - 3a + 2x + 3a - 2x = 5a + 3x - 2x + 3a$, qui se réduit à $5b = 8a + x$. De même soit $\frac{2ab + bx}{a} - b = a + b$. Multiplions tous les termes par a, l'équation deviendra $2ab + bx - ab = a^2 + ab$, qui se réduit, en effaçant les quantités qui se détruisent, qui se réduit, dis-je, à $bx = a^2$.

On doit rapporter à cette règle l'arrangement des termes d'une équation, qui consiste à les transporter d'un côté à l'autre du signe d'égalité avec un signe contraire. Par exemple, dans l'équation $5b = 8a + x$, si on veut avoir la valeur de x, il faut ôter de part et d'autre $8a$, ou, ce qui revient au même, transporter $8a$ du côté opposé, en changeant son signe, et on aura $5b - 8a = x$. De même si on avait $a^2 - 3ay = ab - b^2 + by$, et qu'on voulût avoir y, il faudrait transporter $- 3ay$ et $ab - b^2$ de manière que tous les termes affectés de y se trouvassent dans un seul membre, et tout le reste dans l'autre, et on aurait $a^2 - ab + b^2 = 3ay + by$; et en dégageant y, comme on l'enseignera dans la règle cinquième, c'est-à-dire en divisant chaque membre de l'équation par $3a + b$, elle deviendrait $\frac{a^2 - ab + b^2}{3a + b} = y$. De même l'équation $abx + a^3 - a^2x = ab^2 - 2abx - x^3$, devient, en transposant et en ordonnant, $x^3 = \left.\begin{array}{r} a^2 \\ -3ab \end{array}\right| x \begin{array}{l} -a^3 \\ +ab^2 \end{array}$, ou bien $x^3 \begin{array}{r} -a^2 \\ +3ab \end{array}\Big| x \begin{array}{l} +a^3 \\ -ab^2 \end{array} = 0$.

RÈGLE II. *Si tous les termes d'une équation sont multipliés par une même quantité, divisez-les tous par cette quantité; et réciproquement s'ils sont tous divisés par une même quantité, multipliez-les tous par cette quantité.*

Ainsi dans l'équation $15b^2 = 24ab + 3bx$, divisez tous ses termes par b, et elle deviendra $15b = 24a + 3x$; ensuite divisez tout par 3, et elle sera réduite à $5b = 8a + x$. Soit encore l'équation $\frac{b^3}{ac} - \frac{b^2x}{c^2} = \frac{x^2}{c}$; multipliez tout par c, et vous aurez $\frac{b^3}{a} - \frac{b^2x}{c} = x^2$.

RÈGLE III. *S'il se trouve une fraction irréductible, dont le dénominateur contienne la lettre même par rapport à laquelle l'équation doit être ordonnée, il faut multiplier tous les termes par ce dénominateur ou par quelqu'un de ses diviseurs.*

Soit l'équation $\frac{ax}{a-x} + b = x$, et qu'il faille ordonner par rapport à la lettre x; multipliez tous ses termes par $a - x$, dénominateur de la fraction $\frac{ax}{a-x}$, puisque x se trouve dans ce dénominateur; et l'équation deviendra $ax + ab - bx = ax - x^2$, ou $ab - bx = -x^2$, ou bien, en transposant chaque membre avec des signes contraires, $x^2 = bx - ab$. Qu'on ait encore l'équation $\frac{a^3 - ab^2}{2cy - c^2}$

$= y - c$, qu'il faille ordonner par rapport à y; multipliez tous ses termes par $2cy - c^2$, ou du moins par un de ses facteurs $2y - c$, afin de faire disparaître y du dénominateur, et vous aurez $\frac{a^3 - ab^2}{c} = 2y^2 - 3cy + c^2$. C'est ainsi que $\frac{a^2}{x} - a = x$ étant multipliée toute entière par x, devient $a^2 - ax = x^2$, et que $\frac{a^2b^2}{cx^2} = \frac{x^2}{a+b-x}$ étant d'abord multipliée par x^2, et ensuite par $a + b - x$, devient $\frac{a^3b^2 + a^2b^3 - a^2b^2x}{c} = x^4$.

RÈGLE IV. *Si la lettre par rapport à laquelle l'équation doit être ordonnée, se trouve unie avec une quantité sourde, il faut transporter tous les autres termes non affectés de la quantité sourde dans l'autre membre de l'équation, avec des signes contraires, et multiplier chaque membre de l'équation une fois par lui-même, si la quantité sourde est une racine quarrée; deux fois, si c'est une racine cubique, et ainsi du reste.*

Ainsi pour ordonner l'équation $\sqrt{a^2 - ax} + a = x$, par rapport à x, il faut transporter a dans l'autre membre, et on a $\sqrt{a^2 - ax} = x - a$, et en élevant chaque membre au quarré, on a $a^2 - ax = x^2 - 2ax + a^2$, ou bien $0 = x^2 - ax$, qui donne $x = a$. Soit encore $\sqrt[3]{a^2x + 2ax^2 - x^3} - a + x = 0$, en transposant $- a + x$, cette équation devient, $\sqrt[3]{a^2x + 2ax^2 - x^3} = a - x$, et en élevant chaque membre au cube, on a, $a^2x + 2ax^2 - x^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$, ou bien en effaçant tout ce qui se détruit, $x^2 = 4ax - a^2$.

Soit de même $y = \sqrt{ay + y^2 - a\sqrt{ay - y^2}}$; si on élève chacun de ses membres au quarré, on aura.......................

$y^2 = ay + y^2 - a\sqrt{ay - y^2}$; faisant ensuite les transpositions nécessaires, après avoir effacé y^2 de part et d'autre, l'équation devient $ay = a\sqrt{ay - y^2}$, ou bien $y = \sqrt{ay - y^2}$, et en élevant de nouveau tout au quarré, $y^2 = ay - y^2$, et en transposant encore, $2y^2 = ay$, ou $2y = a$.

RÈGLE V. *Lorsqu'on a ordonné tous les termes d'une équation par rapport aux dimensions d'une même lettre, comme il a été enseigné par les règles précédentes; si la plus haute dimension de cette lettre est multipliée par une quantité connue, il faut diviser toute l'équation par cette même quantité.*

Soit $2y = a$, en divisant tout par 2, on a $y = \frac{a}{2}$; et $\frac{bx}{a} = a$ devient $bx = a^2$, ou $x = \frac{a^2}{b}$, en divisant tout par $\frac{b}{a}$.......

Et $\left.\begin{matrix} 2ac \\ -c^2 \end{matrix}\right| x^3 \left.\begin{matrix} +a^3 \\ +a^2c \end{matrix}\right| x^2 \left.\begin{matrix} -2a^3c \\ +a^2c^2 \end{matrix}\right| x - a^3c^2 = 0$, devient, en divisant tout par $2ac - c^2$, $x^3 \dfrac{\left.\begin{matrix} +a^3 \\ +a^2c \end{matrix}\right| x^2 \left.\begin{matrix} -2a^3c \\ +a^2c^2 \end{matrix}\right| x - a^3c^2}{2ac - c^2} = 0$,

ou bien $x^3 + \dfrac{a^3 + a^2c}{2ac - c^2} \cdot x^2 - a^2x \dfrac{-a^3c}{2a - c} = 0$.

RÈGLE VI. *On peut quelquefois opérer une réduction en divisant l'équation par une quantité composée.*

C'est ainsi que $y^3 = \left.\begin{matrix} -2c \\ +b \end{matrix}\right| y^2 + 3bcy - b^2c$ peut se réduire à $y^2 = -2cy + bc$ en transportant d'abord tous les termes d'un même côté en cette manière, $y^3 \left.\begin{matrix} +2c \\ -b \end{matrix}\right| y^2 - 3bcy + b^2c = 0$, et ensuite en divisant par $y - b$, comme il a été enseigné au chapitre de la division. Mais il est difficile de trouver ces sortes de diviseurs ; au reste nous en avons précédemment indiqué la méthode (*).

RÈGLE VII. *On peut quelquefois réduire une équation en extrayant la racine de chacun de ses membres.*

En effet, soit $x^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$, en tirant la racine quarrée de chaque membre on a, $x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. De même, si on a $x^2 + a^2 = 2ax + b^2$, il faut transporter $2ax$, et l'équation devient $x^2 - 2ax + a^2 = b^2$, et en tirant la racine quarrée de chaque membre, on a, $x - a = +$ ou $- b$, ou bien $x = a \pm b$.

Si vous avez $x^2 = ax - b^2$, ajoutez à chaque membre $-ax + \frac{1}{4}a^2$, et l'équation deviendra $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$; et en tirant la racine quarrée de part et d'autre, $x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ou $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

Prenons pour exemple général $x^2 = px + q$. La valeur de x sera, $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, où l'on voit que $\frac{p}{2}$ et q ont les mêmes signes que dans la première équation, mais $\frac{p^2}{4}$ doit toujours être affecté du signe $+$. Cet exemple est une formule à laquelle on peut rapporter toutes les équations du second degré. Par exemple, qu'on propose l'équation $y^2 = \frac{2x^2y}{a} + x^2$, et qu'on demande la racine y; il faut égaler $\frac{2x^2}{a}$ à p, et x^2 à q. Par conséquent $\frac{x^2}{a} = \frac{p}{2}$, et $\frac{x^4}{a^2} + x^2 = \frac{p^2}{4} + q$, et on aura $y = \frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\frac{x^4}{a^2} + x^2}$. De même dans l'équation $y^2 = ay - 2cy + a^2 - c^2$, faites $a - 2c = p$, et $a^2 - c^2 = q$, et la valeur de y sera, $y = \frac{1}{2}a - c \pm$ . .

(*) Page 46 et suivantes.

$\sqrt{\frac{5a^2}{4} - ac}$. Il y a plus ; c'est qu'on peut même, par cette règle, obtenir la valeur de x dans l'équation du quatrième degré $x^4 = - a^2x^2 + ab^3$, où les termes impairs manquent ; car on aura d'abord, par la règle que nous venons d'établir, $x^2 = - \frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + ab^3}$, et en tirant de nouveau la racine quarrée, $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{- \frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + ab^3}}$; et ainsi du reste.

Telles sont les règles pour réduire une équation unique. Lorsqu'on se sera familiarisé assez avec leur usage pour pouvoir ordonner une équation quelconque par rapport aux dimensions d'une de ses lettres, et tirer la valeur de cette lettre, dans le cas où elle n'a qu'une dimension, ou bien la valeur de sa plus haute puissance, lorsqu'elle en a plusieurs, il sera facile de comparer entre elles plusieurs équations ; et c'est de cette comparaison que je vais enseigner la méthode.

Méthode pour réduire deux ou un plus grand nombre d'Équations à une seule, afin d'en dégager les inconnues.

Lorsque dans la solution d'un problême on a plusieurs équations qui renferment l'état de la question, et dont chacune contient plusieurs inconnues, il faut comparer deux à deux ces équations (si on en a plus de deux), et répéter ces comparaisons autant de fois qu'il est nécessaire, et à chaque opération il naîtra une nouvelle équation, qui contiendra une inconnue de moins que la précédente. Si on a, par exemple, $2x = y + 5$, et $x = y + 2$, il est clair que par la première on a, $2x - 5 = y$, et que par la seconde on a, $x - 2$

$= y$; d'où, en retranchant de part et d'autre des quantités égales, on tire $x = 3$.

C'est une règle générale, que par le moyen de chaque équation on peut éliminer une inconnue. Donc, lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues, toutes les équations peuvent se réduire à une équation unique qui ne renferme plus qu'une seule inconnue. S'il y avait une inconnue de plus qu'il n'y a d'équations, il se trouverait encore deux inconnues dans l'équation résultante; il s'en trouverait trois, si le nombre des inconnues surpassait de deux le nombre des équations, et ainsi de suite.

Il n'est pas quelquefois impossible d'éliminer deux, ou même un plus grand nombre d'inconnues par le moyen de deux équations. Si on a, par exemple, $ax - by = ab - az$, et $bx + by = b^2 + az$. La première donne $az = ab - ax + by$, et la seconde, $az = bx + by - b^2$; donc $ab - ax + by = bx + by - b^2$, d'où on tire, en effaçant ce qui se détruit, et transposant, $bx + ax = ab + b^2$, où l'on voit que y et z sont éliminés. Mais des cas de cette espèce annoncent ou un vice caché dans l'état de la question, ou une erreur, ou un défaut d'adresse dans le calcul. Nous allons enseigner la méthode d'éliminer une inconnue par le moyen de chaque équation.

De l'élimination d'une inconnue par l'égalité de ses valeurs.

Lorsque la quantité qu'on veut éliminer n'est que d'une dimension dans chacune des équations, on en trouvera la valeur par les règles que nous avons déjà données; et alors on comparera ces valeurs entre elles.

Soient les deux équations $a + x = b + y$, et $2x + y = 3b$. Si c'est y que nous voulons éliminer, la première équation nous donnera, $a+x-b=y$, et la seconde, $3b-2x=y$; par conséquent $a+x-b=3b-2x$, ou, en dégageant x, $x=\frac{4b-a}{3}$.

C'est ainsi que les deux équations $2x=y$, et $5+x=y$ donnent, $2x=5+x$, ou $x=5$. Et les équations $ax-2by=ab$, et $xy=b^2$ donnent, la première, $\frac{ax-ab}{2b}=y$, et la seconde, $y=\frac{b^2}{x}$. Donc $\frac{b^2}{x}=\frac{ax-ab}{2b}$, ou, en ordonnant, $x^2-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Si on a encore les deux équations $\frac{b^2x-aby}{a}=ab+xy$, et $bx+\frac{ay^2}{c}=2a^2$; en dégageant x, la première donne $x=\frac{a^2b+aby}{b^2-ay}$, et la seconde, $x=\frac{2a^2c-ay^2}{bc}$, on a donc $\frac{a^2b+aby}{b^2-ay}=\frac{2a^2c-ay^2}{bc}$; et en réduisant, $y^3-\frac{b^2}{a}y^2-\left(\frac{2a^2c-b^2c}{a}\right)y+b^2c=0$.

Enfin si on a, $x+y-z=0$, et $ay=xz$; en dégageant z, la première devient $x+y=z$, et la seconde, $\frac{ay}{x}=z$. Donc $\frac{ay}{x}=x+y$, ou bien $x^2+xy=ay$, en multipliant tout par x. On arrive aux mêmes résultats en soustrayant une des valeurs de l'inconnue de l'autre, et en égalant le reste à zéro. Ainsi, dans le premier exemple, retranchez $3b-2x$ de $a+x-b$, et il viendra $a+x-b-3b+2x=0$, ou $a+3x-4b=0$, et enfin $x=\frac{4b-a}{3}$.

De l'élimination d'une inconnue par la substitution de sa valeur.

Lorsque, dans l'une des équations, l'inconnue qu'on veut éliminer n'est que d'une dimension, c'est dans cette équation qu'il faut prendre la valeur de l'inconnue, et la substituer à la place de l'inconnue même dans l'autre équation. Si on a les deux équations $xy^2 = b^3$; et $x^2 + y^2 = by - ax$, en éliminant x, la première donnera $x = \frac{b^3}{y^2}$; à la place de x substituez sa valeur dans la seconde, et vous aurez $\frac{b^6}{y^4} + y^2 = by - \frac{ab^3}{y^2}$, ou bien $\frac{b^6 + y^6}{y^4} = \frac{by^3 - ab^3}{y^2}$ ou bien $b^6 + y^6 = by^5 - ab^3y^2$, et en ordonnant, $y^6 - by^5 + ab^3y^2 + b^6 = 0$.

Si on a, $ay^2 + a^2y = z^3$, et $yz - ay = az$, et qu'on veuille éliminer y, il faudra prendre sa valeur dans la seconde équation qui donne, $y = \frac{az}{z - a}$, et en substituant cette valeur à la place de y dans la première, on a, $\frac{a^3z^2}{(z-a)^2} + \frac{a^3z}{z-a} = z^3$, et en réduisant, $z^4 - 2az^3 + a^2z^2 - 2a^3z + a^4 = 0$.

De même, si on a, $\frac{xy}{c} = z$, et $cy + zx = c^2$, et qu'on veuille éliminer z, il faut substituer dans la seconde équation, sa valeur $\frac{xy}{c}$, ce qui donne, $cy + \frac{x^2y}{c} = c^2$.

Au reste, quand on est exercé dans ces sortes de calculs, on apperçoit souvent des moyens plus expéditifs de chasser une inconnue.

Soient données les équations $ax = \frac{b^2 x - b^3}{z}$ et $x = \frac{az}{x-b}$, en multipliant la première par z, elle devient $azx = b^2(x-b)$, et en multipliant la seconde d'abord par x, elle devient $x^2 = \frac{axz}{x-b}$, et ensuite par $x-b$, elle devient enfin $x^2(x-b) = axz$; par conséquent $\frac{b^2(x-b)}{x^2(x-b)} = 1$, donc $x = b$.

Mais j'abandonne des cas particuliers de cette espèce à la sagacité des hommes studieux.

De l'élimination d'une inconnue qui est de plusieurs dimensions dans chaque équation.

Lorsque la quantité qu'on veut éliminer est de plus d'une dimension dans chaque équation, déterminez dans chacune la valeur de sa plus haute puissance; et si les équations ne sont pas de même dégré, multipliez celle qui est la moins élevée par l'inconnue que vous voulez éliminer, ou par son quarré, ou par son cube, afin qu'elle devienne d'une puissance égale à celle de l'autre équation. Alors égalez entre elles ces plus hautes puissances, et il en résultera une nouvelle équation, où cette plus haute puissance ne se trouvera plus. Et en réitérant l'opération autant de fois qu'il sera nécessaire, vous finirez par faire évanouir cette inconnue.

Par exemple, si on avait $x^2 + 5x = 3y^2$, et $2xy = 3x^2 + 4$, je tire de la première de ces deux équations, $x^2 = 3y^2 - 5x$, et de la seconde, $\frac{2xy - 4}{3} = x^2$; et en comparant ensemble les deux valeurs de x^2, j'ai, $3y^2 - 5x = \frac{2xy - 4}{3}$, où x ne se trouve plus qu'à la première puissance; ainsi on peut l'éliminer par les règles données plus haut. En effet, en réduisant la dernière équation, elle devient $9y^2 - 15x = 2xy - 4$. D'où, $x = \frac{9y^2+4}{2y+15}$; et en mettant cette valeur de x dans l'une quelconque des deux équations proposées, dans $x^2 + 5x = 3y^2$, par exemple, il viendra........ $\frac{81y^4+72y^2+16}{4y^2+60y+225} + \frac{45y^2+20}{2y+15} = 3y^2$; et en multipliant tout par $4y^2 + 60y + 225$, et ordonnant, il vient, $81y^4 + 72y^2 + 16 + 90y^3 + 40y + 675y^2 + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675y^2$, ou bien $69y^4 - 90y^3 + 72y^2 + 40y + 316 = 0$.

Qu'on ait encore les deux équations, $y^3 = xy^2 + 3x$ et $y^2 = x^2 - xy - 3$. Si c'est y qu'on veut faire évanouir, il faut multiplier la seconde par y, et elle devient $y^3 = x^2y - xy^2 - 3y$, qui est du même nombre de dimensions que la première; et en égalant entre elles les valeurs de y^3, on a $xy^2 + 3x = x^2y - xy^2 - 3y$, où y est descendu d'une dimension. Par le moyen de cette nouvelle équation, et de la plus simple des deux premières, de $y^2 = x^2 - xy - 3$, par exemple, on peut éliminer y, en répétant l'opération que nous venons de faire.

On a encore d'autres moyens de parvenir aux mêmes résultats, et souvent d'une manière plus courte. Veut-on faire disparaître y des équations $y^2 = \frac{2x^2y}{a} + x^2$, et $y^2 = 2xy + \frac{x^4}{a^2}$? qu'on prenne dans chaque équation la valeur de y, par la méthode de la règle 7 (page 77) et on aura $y = \frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\frac{x^4}{a^2} + x^2}$ et $y = x \pm$..... $\sqrt{x^2 + \frac{x^4}{a^2}}$, et en comparant ces deux valeurs de y, on a.... $\frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\frac{x^4}{a^2} + x^2} = x \pm \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{a^2}}$, et en effaçant de part

L 2

et d'autre ce qui se détruit, on obtient enfin $\frac{x^2}{a} = x$, ou bien $x^2 = ax$ et $x = a$.

Pour faire disparaître x des équations, $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$, et $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$, retranchez y de chaque membre de la première, et il restera $x + \frac{y^2}{x} = 20 - y$, et en quarrant, $x^2 + 2y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y + y^2$, et en effaçant y^2 de part et d'autre, il restera $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 400 - 40y$. Or $400 - 40y$ et 140 étant égales aux mêmes quantités, il s'en suit qu'elles sont égales entre elles; donc $400 - 40y = 140$, ou $40y = 260$, ou enfin $y = 6\frac{1}{2}$. C'est ainsi que dans presque toutes les équations on trouvera des moyens d'abréger le travail.

Au reste, lorsque la quantité qu'il faut éliminer a beaucoup de dimensions, le calcul qu'on est obligé de faire pour y parvenir, est quelquefois très-pénible. Les exemples suivans, considérés comme des règles, pourront donner des moyens de le faciliter.

RÈGLE PREMIÈRE.

Soient, $ax^2 + bx + c = 0$, et $fx^2 + gx + h = 0$,

x étant éliminé, on a

$$(ah - bg - 2cf)\,ah + (bh - cg)\,bf + (ag^2 + cf^2)\,c = 0. \quad (12).$$

RÈGLE DEUXIÈME.

Soient, $ax^3+bx^2+cx+d=0$, et $fx^2+gx+h=0$.

En éliminant x, on a

$$(ah-bg-2cf)ah^2+(bh-cg-2df)bfh+(ch-dg)\ldots(ag^2+cf^2)+(3agh+bg^2+df^2)df=0. \quad (13).$$

RÈGLE TROISIÈME.

Soient, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, et $fx^2+gx+h=0$.

En éliminant x, on a

$$(ah-bg-2cf)ah^3+(bh-cg-2df)bfh^2+(ag^2+cf^2)\ldots(ch^2-dgh+eg^2-2efh)+(3agh+bg^2+df^2)dfh+\ldots(2ah^2+3bgh-dfg+ef^2)ef^2+(-bg-2ah)efg^2=0.$$

RÈGLE QUATRIÈME.

Soient, $ax^3+bx^2+cx+d=0$, et $fx^3+gx^2+hx+k=0$.

En éliminant x, on a

$$(ah-bg-2cf)(adh^2-achk)+(ak+bh-cg-2af)bdfh+(-ak+bh+2cg+3df)a^2k^2+(cdh-d^2g-c^2k+2bdk)(ag^2+cf^2)+(3agh+bg^2+df^2-3afk)d^2f+(-3ak-bh+cg+df)bcfk+(bk-2dg)b^2fk+(-b^2k-3adh-cdf)agk=0.$$

Par exemple, si on veut faire disparaître x des équations x^2+

$5x - 3y^2 = 0$, et $3x^2 - 2xy + 4 = 0$; qu'on emploie la formule de la première règle, et qu'on mette, au lieu de $a, b, c; f, g, h$, leurs valeurs respectives $1, 5, -3y^2; 3, -2y, 4$: et on aura $(4 + 10y + 18y^2) 4 + (20 - 6y^3) 15 + (4y^2 - 27y^2) \times - 3y^2 = 0$, qui se réduit à, $16 + 40y + 72y^2 + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$, équation où il n'y a plus d'x.

De même, pour faire disparaître y des équations $y^3 - xy^2 - 3x = 0$, et $y^2 + xy - x^2 + 3 = 0$, employez la formule de la seconde règle, en mettant pour $a, b, c, d; f, g, h, x$, les valeurs respectives $1, -x, 0, -3x; 1, x, -x^2 + 3, y$; et vous aurez........ $(-x^2 + 3 + x^2)(x^4 - 6x^2 + 9) + (x^3 - 3x + 6x)(x^3 - 3x) + 3x^2 \times x^2 + (-3x^3 + 9x - 3x - x^3) \times - 3x = 0$; et en effaçant ce qui se détruit, et faisant les multiplications indiquées, il viendra, $3x^4 - 18x^2 + 27 + x^6 - 9x^2 + 3x^4 + 12x^4 - 18x^2 = 0$, et en réduisant et ordonnant, $x^6 + 18x^4 - 45x^2 + 27 = 0$.

Jusqu'ici nous n'avons eu à éliminer qu'une seule inconnue au moyen de deux équations; si on avait plusieurs inconnues à chasser d'un plus grand nombre d'équations, on y parviendrait par des opérations successives. Par exemple, si vous voulez tirer la valeur de y des équations, $ax = yz$, $x + y = z$, et $5x = y + 3z$; commencez par faire évanouir une des deux inconnues x ou z; x (je suppose) en substituant sa valeur $\frac{yz}{a}$ tirée de la première, dans la seconde et la troisième, ce qui vous donnera, $\frac{yz}{a} + y = z$, et $\frac{5yz}{a} = y + 3z$. Faites disparaître z de ces deux équations, comme ci-dessus, et vous n'aurez plus qu'une seule équation qui ne contiendra que la seule inconnue y.

Méthode d'éliminer toutes les quantités sourdes des équations.

C'est ici qu'il convient de placer la méthode d'éliminer les quantités sourdes ou incommensurables, en les supposant égales à des lettres quelconques. Par exemple, si on a l'équation $\sqrt{ay} - \sqrt{a^2 - ay} = 2a + \sqrt[3]{ay^2}$; en faisant $t = \sqrt{ay}$, $v = \sqrt{a^2 - ay}$, et $x = \sqrt[3]{ay^2}$, l'équation proposée devient, $t - v = 2a + x$. Mais d'ailleurs, puisque $x = \sqrt[3]{ay^2}$, il s'en suit que $x^3 = ay^2$; et par la même raison, $t^2 = ay$; et $v^2 = a^2 - ay$. Si, au moyen de ces quatre équations, on élimine successivement t, v et x, il en résultera une nouvelle équation entièrement délivrée d'incommensurables. (14).

Méthode pour mettre une question en équation.

LORSQU'ON se sera suffisamment exercé à transformer et à réduire des équations, il faut essayer ses forces, en mettant des questions en équation. Une question étant proposée, une partie importante de l'art du calculateur consiste à exprimer par des équations chacune des conditions du problême. Pour y parvenir, il examinera d'abord si toutes ces conditions peuvent être exprimées par des caractères algébriques, de la même manière que nous peignons nos pensées par le moyen des lettres de l'alphabet. Si la chose est possible (comme elle l'est toujours, lorsque la question roule sur des nombres ou sur des quantités abstraites), alors il donnera des noms aux quantités connues, de même qu'aux quantités inconnues ; et le sens de la question sera exprimé, si on peut parler ainsi, par un discours analytique. Et les conditions ainsi traduites en langage algébrique, donneront autant d'équations qu'il en faut pour résoudre la question.

Par exemple, qu'on demande trois nombres en proportion continue, dont la somme soit 20, et la somme des quarrés 140, j'appellerai ces trois nombres inconnus x, y, z; et la question sera traduite du langage ordinaire en langage algébrique, en cette manière :

Question

Question énoncée en langage ordinaire.	*La même en langage algébrique.*
On cherche trois nombres qui aient ces conditions :	$x, y, z,$
1°. Qu'ils soient en proportion continue.	$x : y :: y : z$, ou bien $xz = y^2$.
2°. Que leur somme fasse 20.	$x + y + z = 20$.
3°. Que la somme de leurs quarrés fasse 140.	$x^2 + y^2 + z^2 = 140$.

Ainsi la question est réduite aux équations $xz = y^2$, $x + y + z = 20$, $x^2 + y^2 + z^2 = 140$. A l'aide de ces équations et des règles données précédemment, on trouvera les valeurs de x, de y et de z.

Au reste, il faut observer que la résolution des problêmes est d'autant plus facile et plus élégante, qu'on emploie moins d'inconnues. Ainsi dans le problême dont il s'agit, en mettant x pour la première inconnue, y pour la seconde, la troisième sera $\frac{y^2}{x}$, qui est en proportion continue avec les deux autres. J'énonce donc la question en cette manière :

En langage ordinaire.	*En langage algébrique.*
Chercher trois nombres en proportion continue,	$\div x : y : \frac{y^2}{x}$.
dont la somme soit 20,	$x + y + \frac{y^2}{x} = 20$.
et la somme des quarrés 140.	$x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$.

Les deux équations $x + y + \frac{y^2}{x} = 20$, et $x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = 140$ étant réduites, on en tirera les valeurs de x et de y.

Voici un autre exemple. Un marchand augmente son argent d'un tiers chaque année, moins cent livres (*) qu'il dépense dans le même espace de temps pour les besoins de sa famille ; au bout de trois ans ses richesses sont doublées ; on demande combien il avait d'argent. Voici toutes les propositions qui sont renfermées implicitement dans cette question, et qui doivent être exprimées, pour parvenir à la résolution du problême.

Question exprimée en langage ordinaire.	*La même en langage algébrique.*
Un marchand a un certain nombre d'écus,	x.
sur lesquels il dépense cent livres la première année ;	$x - 100$.
Il augmente ce qui lui reste d'un tiers.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$, ou bien $\frac{4x - 400}{3}$.
La seconde année il dépense encore cent livres,	$\frac{4x - 400}{3} - 100$, ou bien $\frac{4x - 700}{3}$.
et il augmente ce qui lui reste d'un tiers.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$, ou bien $\frac{16x - 2800}{9}$.
La troisième année il dépense encore cent livres,	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$, ou bien $\frac{16x - 3700}{3}$.
et il augmente ce qui lui reste d'un tiers,	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$, ou bien $\frac{64x - 14800}{27}$.
et il se trouve deux fois plus riche qu'au commencement de la première année.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$.

(*) Il s'agit ici, comme on pense bien, de livres sterlings, ainsi cent livres font environ 2200 francs.

Ainsi la question est exprimée par l'équation $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$, et en la résolvant, on en tirera la valeur de x. Multipliez-la par 27, et vous aurez $64x - 14800 = 54x$; retranchez de chaque membre $54x$, et le reste sera $10x - 14800 = 0$; ou bien $10x = 14800$, et en divisant par 10, il viendra $x = 1480$. Ainsi 1480 est le nombre de livres qu'il avait au commencement de la première année.

Vous voyez que, dans les problêmes qui ne renferment que des nombres, ou des quantités abstraites, il n'y a, pour ainsi dire, rien autre chose à faire qu'à traduire la question du langage ordinaire en langage algébrique; c'est-à-dire, à exprimer ses conditions par des caractères propres à peindre nos idées sur les rapports des quantités. Il arrive assez souvent que le discours par lequel l'état d'une question est exprimé, ne paraît pas pouvoir être traduit en langage algébrique; mais on l'y disposera facilement, en opérant quelques changemens, et sur-tout en s'attachant plus aux sens des paroles qu'aux paroles elles-mêmes.

C'est ainsi que toutes les langues ayant leur idiôme particulier, lorsqu'il faut faire passer un ouvrage de l'une dans une autre, ce ne sont pas les mots, mais les pensées qu'il faut traduire. Au reste, comme les arts s'apprennent bien plus facilement par des exemples que par des préceptes, je vais donner ici la solution de plusieurs problêmes.

PROBLÊME Ier.

La somme de deux nombres égale a; la différence de leur quarré est b; on demande quels sont ces deux nombres ?

Soit x le plus petit, l'autre sera $a - x$; leurs quarrés seront respectivement x^2, et $a^2 - 2ax + x^2$; la différence de ces quarrés est $a^2 - 2ax$, qu'on suppose égale à b. On a, par conséquent, l'équation $a^2 - 2ax = b$, donc en réduisant, $a^2 - b = 2ax$, ou bien $\frac{a^2 - b}{2a} = x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$.

Exemple. Si la somme des deux nombres que nous avons supposée a, est 8, et la différence b de leurs quarrés, 16, on aura..... $x = \frac{64 - 16}{16}$, ou $x = 3$, et $a - x = 5$; les deux nombres seraient donc 3 et 5.

PROBLÊME II.

On a trois quantités x, y, z. On connaît les sommes de ces quantités prises deux à deux, on demande la valeur de chacune en particulier?

Soit a la somme des deux quantités x et y; et b, celle de x et z; enfin c, celle de y et z. Pour déterminer les trois quantités x, y et z, on a donc les trois équations $x + y = a$; $x + z = b$; et $y + z = c$. Maintenant pour éliminer deux des trois inconnues y et z, par exemple, retranchez x dans la première et dans la seconde équation, et vous aurez $y = a - x$; et $z = b - x$, substituez ces valeurs de y et z, dans la troisième $y + z = c$, elle deviendra, $a - x + b - x = c$; et en réduisant et dégageant x, vous aurez, $x = \frac{a + b - c}{2}$. x étant trouvé, on substituera sa valeur dans les deux équations $y = a - x$ et $z = b - x$, et on aura les valeurs de y et de z.

Par exemple, si la somme de y et x est 9; celle de x et z, 10; et celle de y et z, 13; alors susbtituez dans les équations, 9 au lieu de a; 10 au lieu de b, et 13 au lieu de c; et $a + b - c$ sera égal à 6. Et $x = \frac{a + b - c}{2} = 3$; $y = a - x = 6$; et $z = b - x = 7$.

PROBLÈME III.

Il s'agit de partager un nombre donné en parties telles, que chacune des plus grandes surpasse la plus petite d'une quantité donnée.

Soit a la quantité qu'il faut partager en quatre parties, et x la première et la plus petite de ces parties; b l'excès de la seconde sur la première; c l'excès de la troisième; et d l'excès de la quatrième. La seconde partie sera donc $x+b$, la troisième $x+c$, et la quatrième $x+d$. La somme de toutes ces parties sera $4x+b+c+d$ qui doit être égale à a. Donc $4x+b+c+d=a$. Retranchez de part et d'autre, $b+c+d$, et le reste sera $4x=a-b-c-d$, ou $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

Par exemple, qu'il s'agisse de partager une ligne de 20 pieds en quatre parties, de manière que l'excès de la seconde sur la première soit de deux pieds; celui de la troisième sur la première de 3 pieds, et enfin celui de la quatrième de 7 pieds. La valeur de x sera.... $x=\frac{a-b-c-d}{4}$, ou $x=\frac{20-2-3-7}{4}=2$. $x+b=4$, $x+c=5$, $x+d=9$.

On suivra la même marche pour diviser une autre quantité quelconque, en un nombre de parties telles qu'on voudra.

PROBLÈME IV.

Un homme veut distribuer de l'argent à des pauvres. S'il avait huit deniers de plus, il pourrait en donner trois à chacun; il ne leur en donne donc que deux, et il lui en reste trois. On demande le nombre des pauvres?

Soit x le nombre des pauvres. Il s'en faut de huit deniers que l'homme ne puisse distribuer $3x$. Son argent peut donc être représenté par $3x - 8$. Il distribue sur cet argent $2x$ de deniers : par conséquent, ce qui lui reste après la distribution sera représenté par $3x - 8 - 2x$, ou $x - 8$; mais nous avons dit que ce reste était égal à trois deniers; par conséquent, $x - 8 = 3$, ou $x = 11$.

PROBLÊME V.

Deux messagers A et B sont éloignés l'un de l'autre de 59 milles; ils partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle. A fait 7 milles en deux heures, et B en fait 8 en trois heures, mais A est parti une heure avant B. On demande combien A fera de milles avant de rencontrer B.

Appelez ce nombre de milles x. Alors $59 - x$ sera le chemin qu'aura fait B. Et comme A fait 7 milles en deux heures, il fera x de milles en $\frac{2x}{7}$ d'heures; ce qu'on trouve en faisant cette proportion, 7 milles : 2 heures :: x milles : $\frac{2x}{7}$ heures. De même, comme B fait 8 milles en 3 heures, il fera $59 - x$ milles en $\frac{177 - 3x}{8}$ d'heures. Maintenant, comme la différence de ces temps est 1 heure, ils deviendront égaux, en ajoutant 1 au plus petit, c'est-à-dire à $\frac{177 - 3x}{8}$; et on aura l'équation $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$. Et en réduisant, on trouve $x = 35$. En effet, si on multiplie l'équation $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$ par 8, elle devient, $8 + 177 - 3x = \frac{16x}{7}$, ou $185 - 3x = \frac{16x}{7}$, et en multipliant de nouveau tout par 7, on a enfin, $1295 - 21x = 16x$, ou, $1295 = 37x$; et en divisant par 37, on a, $x = 35$. Ainsi A fera 35 milles avant de rencontrer B.

Le même problême d'une manière plus générale.

On donne les vîtesses de deux mobiles A et B; on donne aussi la différence des temps et des lieux de départ; on demande de déterminer le lieu où ils se rencontreront.

Supposez que la vîtesse de A soit telle, qu'il parcoure l'espace c pendant le temps f; et celle du mobile B telle, qu'il parcoure l'espace d dans le temps g; supposez encore que la différence des points de départ soit e, et la différence des instans de départ h.

PREMIER CAS.

Si les deux mobiles vont dans le même sens, et que A poursuive B, le chemin de A sera égal à celui de B, plus à l'intervalle qui séparait les deux mobiles au commencement du mouvement : appelez x le chemin de A; retranchez e de x, et le reste $x - e$ sera le chemin de B. Et comme A parcourt l'espace c dans le temps f, on trouvera le temps qu'il emploie pour parcourir x par cette proportion, l'espace c : au temps f :: l'espace x : au temps $\frac{fx}{c}$. Et comme B parcourt l'espace d dans le temps g, il parcourra l'espace $x - e$ dans le temps $\frac{gx - ge}{d}$. Et comme on suppose la différence des temps égale à h, il suffira d'ajouter h au plus petit pour les rendre égaux ; par exemple à $\frac{fx}{c}$ si c'est B qui a commencé à se mouvoir le premier, et on aura l'équation $\frac{fx}{c} + h = \frac{gx - ge}{d}$; et en réduisant il vient, $\frac{cge + cdh}{cg - df} = x$. Si au contraire c'est A qui est entré le premier en mouvement, alors il faut ajouter h à $\frac{gx - ge}{d}$, et on aura $\frac{fx}{c} = h + \frac{gx - ge}{d}$, et en réduisant, il vient $x = \frac{cge - cdh}{cg - df}$.

SECOND CAS.

Si les deux mobiles vont à la rencontre l'un de l'autre, et qu'on suppose, comme auparavant, que la distance initiale de A, au point de rencontre, soit x, la distance initiale de B, au même point sera, $e - x$; le temps employé par A, pour parcourir l'espace x, sera $\frac{fx}{c}$, et $\frac{ge - gx}{d}$ sera le temps employé par le mobile B, pour parcourir l'espace $e - x$. Au plus petit de ces deux temps ajoutez, comme ci-dessus, la différence h, c'est-à-dire à $\frac{fx}{c}$ si c'est B qui a commencé le premier à se mouvoir, et vous aurez $\frac{fx}{c} + h = \frac{ge - gx}{d}$, et en réduisant, $x = \frac{cge - cdh}{cg + df}$; mais si c'est A qui est entré le premier en mouvement, ajoutez h au temps $\frac{ge - gx}{d}$, et votre équation sera, $\frac{fx}{c} = h + \frac{ge - gx}{d}$, et en réduisant, $x = \frac{cge + cdh}{cg + df}$.

EXEMPLE I^er^. Si chaque jour le soleil parcourt un degré, et la lune 13; qu'à une certaine époque, le soleil se trouve au commencement du cancer, et trois jours après, la lune au commencement du bélier, on demande où se fera leur première conjonction? Rép. à $10° 45'$ du cancer. En effet, les deux corps marchent dans le même sens; mais comme le mouvement de la lune ne se compte qu'après que le soleil a déjà marché trois jours, qu'elle est aussi plus loin du point d'arrivée que le soleil, il faut la désigner par A, et et le soleil le sera par B, et $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ sera la longueur du chemin que fera la lune. Et si on substitue dans la formule, 13 au lieu de c; 1 au lieu de f, d et g; 90 au lieu de e; et 3 au lieu de h, elle deviendra $\frac{13\times 1\times 90+13\times 1\times 3}{13\times 1-1\times 1}=\frac{1209}{12}=100\frac{3}{4}$. Comptez donc ces cent degrés trois quarts depuis le commencement du bélier, et vous arriverez à $10^\circ\frac{3}{4}$, ou $10^\circ\ 45'$ du cancer.

Exemple II. Si deux messagers, A et B, éloignés l'un de l'autre de 59 milles, partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle; que A fasse 7 milles en deux heures, et B, 8 milles en trois heures; que B se mette en route une heure plus tard que A, on demande le chemin que fera A avant de rencontrer B? Rép. 35 milles. En effet, puisqu'ils vont à la rencontre l'un de l'autre, et que c'est A qui s'est mis le premier en route, ce sera la formule $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ qui désignera le chemin qu'aura fait A avant de rencontrer B. Et si on substitue dans cette formule 7 pour c, 2 pour f, 8 pour d, 3 pour g, 59 pour e, et 1 pour h, elle deviendra... $\frac{7\times 3\times 59+7\times 8\times 1}{7\times 3+8\times 2}=\frac{1295}{37}=35$.

PROBLÊME VI.

Étant donnée la puissance d'un agent quelconque, trouver combien il faudrait d'agens de cette espèce pour produire, dans un temps donné b, un effet demandé a.

Soit la puissance de cet agent telle, que dans un temps donné d, elle produise un effet c, il faut chercher combien cette même puissance produira d'effet dans le temps b; ce qu'on trouvera par cette proportion $d : c :: b : \frac{bc}{d}$. Voilà l'effet d'un seul agent pendant le temps b. Pour trouver combien il faut d'agens de cette espèce pour produire l'effet demandé a, faites cette proportion......... $\frac{bc}{d} : 1 :: a : \frac{ad}{bc}$, qui signifie, en langage ordinaire, $\frac{bc}{d}$ (l'effet d'un agent unique) est à 1 (cet agent unique) comme a (l'effet de tous les agens) est à $\frac{ad}{bc}$ (tous ces agens).

EXÉMPLE. Si un écrivain peut, en 8 jours, écrire 15 feuilles, combien faudra-t-il d'écrivains pour en écrire 405 en 9 jours? Rép. 24. Car si on met 8 à la place de d, 15 au lieu de c, 405 au lieu de a, et 9 au lieu de b, le nombre d'écrivains $\frac{ad}{bc}$ deviendra $\frac{405 \times 8}{9 \times 15}$, c'est-à-dire $\frac{3240}{135}$ ou 24.

PROBLÊME VII.

Les forces de plusieurs agens étant données, déterminer le temps x dans lequel, toutes ensemble, elles peuvent produire un effet demandé d.

Soient les agens A, B, C tels, que dans les temps e, f, g, ils produisent respectivement les effets a, b, c; ces agens produiront aussi respectivement dans le temps x les effets $\frac{ax}{e}$; $\frac{bx}{f}$; $\frac{cx}{g}$, ainsi la somme de tous ces effets partiels sera, $\frac{ax}{e} + \frac{bx}{f} + \frac{cx}{g} = d$, et en dégageant x, on a, $x = \frac{d}{\frac{a}{e} + \frac{b}{f} + \frac{c}{g}}$.

EXEMPLE. Trois ouvriers peuvent faire un ouvrage quelconque dans un certain temps; A, je suppose, peut le faire une fois dans trois semaines; B, trois fois dans huit semaines; et C, cinq fois dans douze semaines. On demande en combien de temps, tous ensemble, ils pourront faire ce même ouvrage? Or, puisque les agens A, B, C produisent respectivement les effets 1, 3, 5 dans les temps 3, 8, 12, et qu'on cherche dans quel temps leurs efforts réunis produiront l'effet 1, qu'on écrive dans la formule trouvée plus haut, les nombres 1, 3, 5; 1; 3, 8, 12, au lieu des lettres a, b, c; d; e, f, g, et il viendra $x = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$, ou $\frac{8}{9}$ d'une semaine, c'est-à-dire 6 jours et $5\frac{1}{3}$ heures, temps dans lequel leurs efforts réunis feront l'ouvrage. (15).

PROBLÊME VIII.

On a différens mélanges de plusieurs substances, on veut en former un nouveau, de manière que ces différentes substances s'y trouvent dans une proportion donnée.

Soit un de ces mélanges $dA + eB + fC$; un second, $gA + hB + kC$; et un troisième, $lA + mB + nC$. Dans ces expressions, les lettres A, B, C désignent les substances mélangées; et d, e, f, g, h, etc. les proportions dans lesquelles ces substances se trouvent dans chaque mélange. Soit $pA+qB+rC$ le nouveau mélange qu'on veut composer en prenant des parties des autres. Supposez que x, y, z soient les nombres par lesquels il faut multiplier respectivement les trois premiers mélanges, pour que leur somme devienne $pA + qB + rC$,

On aura donc $\left\{\begin{array}{r} dxA + exB + fxC \\ + gyA + hyB + kyC \\ + lzA + mzB + nzC \end{array}\right\} = pA + qB + rC.$

Ainsi les lettres A, B, C étant les mêmes dans les deux membres

N 2

de l'équation, il faut que leurs coefficiens soient égaux; on a donc $dx + gy + lz = p$; $ex + hy + mz = q$; et $fx + ky + nz = r$. Et en dégageant x dans ces trois équations, on a $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{q - hy - mz}{e} = \frac{r - ky - nz}{f}$. Et en réduisant de nouveau, on trouve $y = \frac{ep - dq + dmz - elz}{eg - dh} = \frac{fq - er + enz - fmz}{fh - ek}$. Faisons, pour abréger, $\alpha = ep - dq$; $\beta = dm - el$; $\gamma = eg - dh$; $\delta = fq - er$; $\zeta = en - fm$, et $\theta = fh - ek$. Alors la première valeur de y deviendra, $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$, et la seconde, $y = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$. Donc $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{\delta + \zeta z}{\theta}$; et en dégageant z de cette dernière équation, il vient $z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta}$. La valeur de z étant trouvée, substituez-la dans l'équation $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$, la valeur de y sera alors donnée en quantités toutes connues: il ne s'agira plus que de substituer les valeurs de z et de y dans l'équation $x = \frac{p - gy - lz}{d}$ pour avoir aussi la valeur de x en quantités toutes connues.

EXEMPLE. On a trois mélanges de métaux en fusion: une livre du premier mélange contient 12 onces d'argent, une once de cuivre, et 3 d'étain; une livre du second contient une once d'argent, 12 onces de cuivre, et 3 d'étain; une livre du troisième contient 14 onces de cuivre, 2 d'étain, et ne contient point d'argent. Il s'agit, avec ces trois mélanges, d'en former un nouveau qui, sur chaque livre, contienne 4 onces d'argent, 9 onces de cuivre, et 3 d'étain. Au lieu des lettres $d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r$, écrivez respectivement leurs valeurs 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3; alors $\alpha = ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9 = -104$, $\beta = dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0 = 168$. On trouvera de même que $\gamma = -143$, $\delta = 24$; $\zeta = -40$, et $\theta = 33$. Ainsi l'équation $z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544} = 0$; $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143} = \frac{8}{11}$, et $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12} = \frac{3}{11}$. Par conséquent si on prend, pour chaque livre, $\frac{8}{11}$ du second mélange, et $\frac{3}{11}$ du premier, sans rien prendre du troisième, chaque livre du nouveau mélange contiendra quatre onces d'argent, neuf de cuivre, et trois d'étain.

PROBLÊME IX.

On connaît les prix de différens mélanges et les proportions de chacune des choses qui les composent; il s'agit de déterminer le prix de chacune des choses composantes en particulier.

Les objets qui entrent dans le premier mélange sont désignés respectivement par A, B, C; leurs proportions par d, g, l, et le prix de ce mélange par p. Ce mélange et son prix seront exprimés par l'équation $dA + gB + lC = p$. Un second mélange, $eA + hB + mC$, a pour prix q; et un troisième, $fA + kB + nC$, a pour prix r. On demande les prix de A, B, et C. Soient respectivement ces prix x, y, z. Il est évident qu'on aura ces trois équations $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, et $fx + ky + nz = r$; et en traitant ces trois équations comme nous avons fait celles du problême précédent, on trouvera $z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta}$, $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma}$ et $x = \frac{p - gy - lz}{d}$.

Exemple. Un homme achète 40 boisseaux de froment, 24 d'orge, et 20 d'avoine, pour le prix de 15 liv. 12 s. (*). Il fait

(*) On doit bien voir que par-tout où Newton fait des évaluations en argent, il s'agit de livres et de sols sterlings.

un second achat de 26 boisseaux de froment, 30 boisseaux d'orge, et 50 d'avoine, pour le prix de 16 liv. Enfin il fait un troisième achat de 24 boisseaux de froment, 120 d'orge, et 100 d'avoine, pour le prix de 34 liv. On demande le prix du boisseau de chaque espèce de grain? Rép. le boisseau de froment lui a coûté 5 s., celui d'orge 3 s., et celui d'avoine 2 s. Car au lieu de d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, et r, substituez respectivement dans les équations, 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, et 34, et vous aurez $\alpha = ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16 = -234\frac{2}{5}$. $\beta = dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20 = 1480$. De même $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, et $\theta = -2400$. Ainsi, $z = \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 288000}{-806400 + 3552000} = \frac{274560}{2745600} = \frac{1}{10}$. $y = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-576} = \frac{3}{20}$. $x = \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40} = \frac{1}{4}$. Donc le boisseau de froment a coûté $\frac{1}{4}$ de livre ou 5 sous, le boisseau d'orge $\frac{3}{20}$ ou 3 sous, et le boisseau d'avoine $\frac{1}{10}$ ou 2 sous.

PROBLÊME X.

Connaissant la pesanteur spécifique d'un composé, et celle de chacun de ses composans, déterminer dans quelle proportion ces derniers s'y trouvent.

Soit e la pesanteur spécifique du composé, dont les parties composantes sont $A + B$; soit de plus a la pesanteur spécifique de la partie composante A, et b la pesanteur spécifique de la partie composante B. On sait que la pesanteur absolue d'un corps est égale à son volume multiplié par sa pesanteur spécifique; ainsi aA est la pesanteur absolue ou le poids de la partie composante A, et bB la pesanteur absolue de B. D'un autre côté $eA + eB$ est le poids du composé; ainsi $aA + bB = eA + eB$, ou bien $aA - eA = eB - bB$, ou bien enfin $e - b : a - e :: A : B$.

EXEMPLE. Soit la pesanteur spécifique de l'or comme 19; celle de l'argent comme 10 $\frac{1}{3}$ ou $\frac{31}{3}$, et celle de la couronne d'Hiéron comme 17. On trouvera que la proportion du volume d'or à celui de l'argent dans la couronne, sera :: 10 : 3 :: $e - b : a - e :: A : B$. Et la proportion du poids de l'or au poids de l'argent dans cette même couronne :: 190 : 31 :: $19 \times 10 : \frac{31}{3} \times 3 :: a(e-b) : b(a-e)$. Et le poids de la couronne est au poids de l'argent qu'elle contient :: 221 : 31. (16).

PROBLÊME XI.

On a trois prés d'une qualité égale, et dans lesquels on suppose que l'herbe croît uniformément. Le premier b peut nourrir un nombre de bœufs a pendant le temps c; le second e peut nourrir un nombre de bœufs d pendant le temps f; on demande combien le troisième g peut en nourrir pendant le temps h?

Si les bœufs a dans le temps c mangent le pré b, on voit que par proportion il faudra les bœufs $\frac{ae}{b}$ pour manger le pré e pendant le même temps, ou les bœufs $\frac{ace}{bf}$ pour le manger pendant f, ou les bœufs $\frac{ace}{bh}$ pour le manger pendant le temps h, en supposant que les herbes cessent de croître après le temps c. Mais à cause de la crue uniforme des herbes, il faut un troupeau d pour manger le pré e dans le temps f. Il s'en suit que l'herbe qui aura cru dans ce pré pendant le temps $f - c$, suffira pour nourrir pendant le temps f, un nombre de bœufs exprimé par $d - \frac{cea}{bf}$; ou pour nourrir pendant le temps h un nombre de bœufs exprimé par $\frac{df}{h} - \frac{ace}{bh}$. Et par proportion, l'herbe qui aura crû dans ce pré pendant le temps $h-c$, sera suffisante pour nourrir pendant le temps h un nombre de bœufs exprimé par $\left(\frac{h-c}{f-c}\right)\left(\frac{df}{h} - \frac{ace}{bh}\right) = \frac{bdfh - aceh - bdcf + aec^2}{bfh - bch}$. Ajoutez ce troupeau de bœufs à celui qui est exprimé par $\frac{ace}{bh}$, et il viendra.... $\frac{bdfh - aceh - bcdf + acef}{bfh - bch}$, nombre de bœufs suffisant pour manger le pré e pendant le temps h. Maintenant une proportion va nous faire connaître le nombre de bœufs qu'il faut pour manger le pré g pendant le même temps h, et ce nombre est............... $\frac{bdfgh - acegh - bcdgf + acefg}{befh - bceh}$. (*).

Exemple. 12 bœufs paissent l'herbe de $3\frac{1}{3}$ arpens en 4 semaines; 21 bœufs paissent celle de 10 arpens en 9 semaines; on demande combien il faudra de bœufs pour manger l'herbe de 24 arpens en 18 semaines? Rép. 36. Remarquez qu'on suppose les prés d'une même bonté. On trouvera la réponse à cette question en substituant respectivement les nombres 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24 et 18, à la place des lettres a, b, c, d, e, f, g et h dans la formule $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$. Mais l'opération ne serait peut-être pas moins courte, si on la reprenait dès son origine, en la modelant sur celle que nous avons faite en lettres. En effet, si 12

(*) La meilleure explication qu'on puisse donner de ce problême, se trouve dans l'exemple qui le suit. Le C[n]. Bossut a traité le même problême dans son Algèbre, et il me semble que la marche qu'il a suivie est plus facile que celle de Newton.

bœufs

bœufs ont pu paître en 4 semaines l'herbe de 3 arpens et $\frac{1}{3}$, il faudra par proportion, ou 36 bœufs en 4 semaines, ou 16 bœufs en 9 semaines, ou 8 bœufs en 18 semaines, pour paître l'herbe de 10 arpens, en supposant, bien entendu, que l'herbe cesserait de croître après les quatre semaines. Mais comme l'herbe ne cesse pas de croître, 21 bœufs en 9 semaines ne peuvent paître que 10 arpens; il faut donc que l'herbe qui a cru dans ces 10 arpens pendant l'excès de 9 semaines sur quatre semaines, ou pendant 5 semaines, soit suffisante pour nourrir, pendant 9 semaines, l'excès de 21 bœufs sur 16 bœufs, ou 5 bœufs, ou bien $\frac{5}{2}$ bœufs pendant 18 semaines. De même, l'herbe qui aura cru pendant 14 semaines (excès de 18 semaines sur 4) doit nourrir 7 bœufs pendant 18 semaines, comme on le voit en faisant cette proportion, 5 (semaines) : 14 (semaines) :: $\frac{5}{2}$ (bœufs) : un quatrième terme 7 bœufs. Ainsi, 10 arpens ont suffi à la nourriture de 8 bœufs pendant 18 semaines, dans la supposition que l'herbe aurait cessé d'y croître après les quatre premières semaines; or, nous venons de voir que l'herbe qui a cru pendant ces 14 semaines de surplus, était suffisante pour nourrir 7 bœufs pendant 18 semaines. Donc ces 10 arpens ont pu nourrir 15 bœufs pendant les 18 semaines. Et enfin, si 10 arpens peuvent nourrir 15 bœufs pendant 18 semaines, combien 24 arpens pourront-ils en nourrir pendant le même temps? On trouvera, en faisant la proportion, qu'ils peuvent en nourrir 36.

PROBLÊME XII.

Etant données les grandeurs et les quantités respectives de mouvement le deux corps sphériques qui se meuvent sur la même ligne droite et se choquent; déterminer leurs quantités respectives de mouvement après le choc.

La résolution de ce problême dépend des deux propositions suivantes: 1°. C'est que chaque corps éprouve une réaction égale à l'action qu'il a eue sur l'autre. 2°. C'est que la vîtesse relative pour s'éloigner après le choc, est égale à celle qu'ils avaient avant, pour s'approcher. Cela posé, soient les deux corps A et B, et leurs vîtesses respectives a et b; leurs quantités de mouvement seront aA et bB (parce que la quantité de mouvement d'un corps est égale au produit de sa masse par sa vîtesse). Supposons que les deux corps marchent du même côté, mais que la vîtesse de A soit la plus considérable, et qu'il tende par conséquent à atteindre B; supposons de plus, que x soit la quantité de mouvement que aA perdra par le choc, par conséquent x sera aussi la quantité de mouvement qu'aura gagnée bB. Ainsi, après la réflexion, les quantités respectives de mouvement seront, $aA - x$ et $bB + x$; et les vîtesses seront, $\frac{aA - x}{A}$, et $\frac{bB + x}{B}$. (*). Or la différence des vîtesses

(*) Newton vient de dire plus haut, que la quantité de mouvement d'un corps était égale au produit de sa masse par sa vîtesse. Donc, si on divise ce produit par la masse, le quotient sera la vîtesse. Or, $aA - x$ est la quantité de mouvement de A après la réflexion; donc $\frac{aA - x}{A}$ sera sa vîtesse après la réflexion : de même $bB + x$ est la quantité de mouvement de B après le choc; donc $\frac{bB + x}{B}$ sera la vîtesse de B après le choc.

après le choc doit être égale à $a - b$, différence des vîtesses avant le choc. Nous aurons donc, $\frac{bB + x}{B} - \left(\frac{aA - x}{A}\right) = a - b$. Et en réduisant, on a, $x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}$. Et en substituant cette valeur de x dans l'expression des vîtesses $\frac{aA - x}{A}$ et $\frac{bB + x}{B}$, la vîtesse de A devient, après le choc, $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$, et celle de B, $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$. Si les deux mobiles allaient en sens directement opposés, il faudrait changer par-tout le signe de b; et les vîtesses respectives de A et de B, après la réflexion, seraient $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$, et $\frac{2aA + bA - bB}{A + B}$. Si l'une ou l'autre de ces vîtesses est négative, c'est une preuve que le mobile auquel elle appartient est poussé dans une direction contraire à celle qu'avait A avant le choc. On doit entendre la même chose du mouvement de A dans le cas précédent.

EXEMPLE. Soient deux mobiles de matière homogène qui aient, le premier A, 3 livres de masse, et 8 degrés de vîtesse; le second B, 9 livres de masse, et 2 degrés de vîtesse, et supposons que ces deux corps marchent dans le même sens. Alors à la place de A, a, B, b, substituez respectivement dans les formules les nombres, 3, 8, 9, 2, et $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$ devient $= - 1$, et $\frac{2aA - bA + bB}{A + B} = 5$. Ainsi, après la réflexion, A retournera en sens contraire avec un degré de vîtesse, et B continuera son mouvement dans sa première direction avec 5 degrés de vîtesse.

PROBLÈME XIII.

Trouver trois nombres en proportion continue, dont la somme soit 20, *et dont la somme des quarrés soit* 140.

Soit le premier de ces nombres x, et le second y, le troisième sera $\frac{y^2}{x}$. On aura donc $x+y+\frac{y^2}{x}=20$. Et $x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=140$. Et en réduisant, la première équation devient, $x^2+(y-20)x+y^2=0$. Et la seconde $x^4+(y^2-140)x^2+y^4=0$. Pour faire disparaître x de ces deux équations, employez la méthode de la règle troisième sur l'élimination, et substituez dans la formule à la place des lettres a, b, c, d, e, f, g et h, leurs valeurs respectives 1, 0, y^2-140, 0, y^4; 1, $y-20$, et y^2, il viendra........ $(-y^2+280)\times y^6+(2y^2-40y+260)\times(260y^4-40y^5)+3y^4\times y^4-2y^2(y^6-40y^5+400y^4)=0$, et en faisant les multiplications indiquées, on a, $1600y^6-20800y^5-67600y^4=0$, qui se réduit à, $4y^2-52y+169=0$, ou bien, en résolvant, $2y-13=0$, ou bien $y=6\frac{1}{2}$. C'est le même nombre que nous avons trouvé ci-devant, par une méthode beaucoup plus courte, mais moins directe. Enfin pour trouver x, substituez $6\frac{1}{2}$ au lieu de y dans l'équation $x^2+(y-20)x+y^2=0$, et vous aurez, $x^2-13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}=0$, il en résultera cette équation $x=6\frac{3}{4}\pm\sqrt{3\frac{5}{16}}$. C'est-à-dire, que $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$ est le plus grand des trois nombres cherchés, et que $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$ en est le plus petit; car x peut être indifféremment l'un ou l'autre des extrêmes de la proportion : de-là il résulte pour x deux valeurs; et lorsqu'une de ces valeurs est le premier extrême, $\frac{y^2}{x}$ est le second, et réciproquement.

Le même problême d'une autre manière.

Nous supposerons, comme auparavant, que les nombres cherchés sont x, y et $\frac{y^2}{x}$. Par conséquent on aura, $x+y+\frac{y^2}{x}=20$, ou bien $x^2+(y-20)x+y^2=0$, et en résolvant cette équation on trouve, $x=10-\frac{y}{2}\pm\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}y^2}$. Si nous retranchons y, et la valeur que nous venons de trouver pour x, du nombre 20, la différence sera la valeur du troisième terme $\frac{y^2}{x}$. Nous aurons donc $\frac{y^2}{x}=10-\frac{1}{2}y\mp\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}y^2}$. Faisons maintenant les quarrés de ces trois nombres, leur somme doit être égale à 140. Nous aurons donc $\left(10-\frac{y}{2}\pm\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}y^2}\right)^2+y^2+\left(10-\frac{1}{2}y\mp\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}y^2}\right)^2=140$: quantité qui se réduit, toutes opérations faites, à $400-40y=140$, ou bien à $y=6\frac{1}{2}$, comme nous l'avons trouvé auparavant. Substituons cette valeur de y, dans l'équation qui donne la valeur de x, et le premier nombre sera, $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$, et le dernier $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$ comme ci-devant.

PROBLÊME XIV.

On veut trouver quatre nombres en proportion continue, dont la somme des deux moyens fasse 12, *et celle des deux extrêmes* 20.

Soit x le second de ces nombres, alors $12-x$, sera le troisième; et en faisant la proportion, $12-x : x :: x :$ un quatrième terme $\frac{x^2}{12-x}$, qui sera notre premier nombre. Nous trouverons le quatrième par cette autre proportion; x (le second nombre) : $12-x$ (le troisième) :: $12-x$: $\frac{144-24x+x^2}{x}$ qui sera enfin le quatrième nombre cherché. Or une des conditions du problême est que la somme du premier et du quatrième doit être égale à 20, il faut donc que $\frac{x^2}{12-x} + \frac{144-24x+x^2}{x} = 20$, ou bien en réduisant $x^2 - 12x = -30\frac{6}{7}$, et en résolvant..... $x = 6 \pm \sqrt{5\frac{1}{7}}$. Ce nombre une fois trouvé, on obtiendra successivement tous les autres, en substituant sa valeur dans les équations précédentes.

PROBLÊME XV.

Trouver quatre nombres en proportion continue, dont la somme soit a, et la somme des quarrés b.

Quoique notre coutume ait été jusqu'ici de chercher, de la manière la plus directe, les quantités inconnues, cependant lorsqu'il se trouve deux de ces quantités tellement équivoques, que les mêmes conditions puissent leur convenir (comme sont ici les deux extrêmes ou les deux moyens de notre proportion continue), dans ce cas, il ne faut chercher ni l'une ni l'autre; il en faut chercher une nouvelle qui puisse servir à les déterminer également, comme serait, par exemple, ou leur somme, ou leur différence, ou leur produit. Supposons donc que la somme de nos moyens soit s, et que leur produit soit r, il est évident que la somme des extrêmes est $a - s$, et que leur produit est aussi r, le même que celui des moyens. C'est maintenant de ces quantités qu'il faut tirer les quatre termes de notre proportion. Soit donc x le premier et y le second, alors $s - y$ sera le troisième, et $a - s - x$ le quatrième. Le produit des moyens sera $sy - y^2 = r$. Par conséquent la valeur du premier moyen y sera, $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - r}$, et celle du second moyen sera, $s-y=\frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}s^2-r}$. Enfin le produit des extrêmes est, $ax-sx-x^2=r$. On voit par-là, que la valeur du premier extrême est, $x=\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{s^2-2as+a^2}{4}-r}$; celle du second extrême est, $a-s-x=\frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{s^2-2as+a^2}{4}-r}$.

La somme des quarrés de ces quatre nombres est, $2s^2-2as+a^2-4r$ qui est égale à b. En tirant de cette équation la valeur de r, on a, $r=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}as+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b$; et en mettant à la place de r sa valeur dans nos quatre équations, voici celles qui nous viendront pour nos nombres.

$$\text{Les deux moyens}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}s+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}a^2}.\\ \frac{1}{2}s-\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}a^2}.\end{array}\right.$$

$$\text{Les deux extrêmes}\left\{\begin{array}{l}\frac{a-s}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2}.\\ \frac{a-s}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2}.\end{array}\right.$$

Il nous reste maintenant à déterminer la valeur de s. Afin d'y parvenir, faisons pour abréger, $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2}as-\frac{1}{4}a^2}=p$, et $\sqrt{\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}s^2}=q$, de sorte que l'expression des moyens sera $\frac{1}{2}s+p$, et $\frac{1}{2}s-p$. L'expression des extrêmes sera $\frac{a-s}{2}+q$, et $\frac{a-s}{2}-q$. Faisons usage actuellement des deux conditions renfermées dans l'énoncé du problême : la première est, que le produit du second et du quatrième termes est égal au quarré du troisième; et la seconde, que le produit du premier et du troisième est égal au quarré du second. La première condition nous donne, $\frac{as-s^2}{4}-\frac{1}{2}qs+\frac{pa-ps}{2}-pq=$

$\frac{1}{4}s^2 - ps + p^2$; et la seconde condition donne, $\frac{as - s^2}{4} + \frac{1}{2}qs - \left(\frac{pa - ps}{2}\right) - pq = \frac{1}{4}s^2 + ps + p^2$. Retranchant la première de ces équations de la seconde, il restera $qs - pa + ps = 2ps$, ou bien $qs = pa + ps$. Remettons maintenant, au lieu de p, sa valeur.... $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2}$, et à la place de q, sa valeur......... $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2}$, ce qui nous donnera, $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2} = (a + s)$ $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}a^2}$. Et en quarrant chaque membre...... $s^2 = -\frac{b}{a} \cdot s + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b$, ou $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b2}{4a^2} + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b}$. La quantité s une fois déterminée, toutes les autres se déduisent des équations trouvées ci-dessus.

PROBLÊME XVI.

Une pension d'une somme a *chaque année, doit être payée pendant cinq ans; quelqu'un achète cette pension pour une somme c d'argent comptant. On demande à combien pour cent se monte, dans ce marché, l'intérêt des intérêts de chaque année.*

Soit $1 - x$ l'intérêt des intérêts de la somme x par an. C'est-à-dire que si on devait acquitter, après l'année révolue, une somme $= 1$, on acquitterait la même dette en payant seulement au commencement de l'année une somme x, plus petite que 1. Donc, par analogie, si on avait à payer à la fin de l'année une somme a, cette même somme payée au commencement ne vaudrait qu'une somme ax. a payable après deux ans, ne vaudrait, argent comptant, que ax^2; après 3 ans, que ax^3; après 4 ans, que ax^4; et après 5 ans, que ax^5. Ajoutez ces cinq sommes, et vous aurez $ax^5 + ax^4 + ax^3 + ax^2 + ax = c$; ou bien $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = \frac{c}{a}$, équation

équation du cinquième degré. Lorsque, par les règles qui seront enseignées dans la suite, on aura déterminé la valeur de x (*), on fera cette proportion, $x : 1 :: 100 : y$. On aura donc $y - 100$ pour l'intérêt des intérêts par an. (17).

Nous croyons avoir assez multiplié les exemples de problêmes où on ne cherche que les rapports des quantités, il est temps de nous occuper de ceux où on cherche en outre les positions des lignes, c'est-à-dire des problêmes géométriques.

(*) C'est-à-dire qu'on trouvera, par une construction mécanique quelconque, les premiers chiffres de la racine, et qu'ensuite on obtiendra les autres par la méthode de Viette.

De la manière de mettre les questions de Géométrie en équation.

IL est quelquefois aussi aisé de mettre en équation une question de géométrie qu'une question purement numérique. Au reste les règles sont les mêmes dans l'un et l'autre cas. Par exemple (*Pl.* I, *Fig.* 5.) s'il s'agit de couper en C une droite AB en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire de la partager de manière que le quarré BE de la plus grande partie soit égal au rectangle BD de la ligne totale par la plus petite; faites $AB = a$, et $BC = x$, AC égalera $a - x$, et $x^2 = a(a - x)$. Et en résolvant cette équation, il vient $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

Mais les positions des lignes, leurs rapports, compliquent le plus souvent les questions de géométrie à un point, qu'on a besoin de méthodes et d'artifices particuliers pour les ramener à la forme de simples quantités algébriques. Et quoiqu'il soit fort difficile de donner des préceptes généraux dans une semblable matière, où chacun doit compter principalement sur son adresse, je tâcherai pourtant d'indiquer la route aux commençans. Il faut donc savoir que les mêmes lignes pouvant être comparées entre elles sous différens rapports, il en peut naître autant de questions différentes, selon que l'on prendra tantôt les unes, tantôt les autres pour inconnues, et qu'on cherchera la valeur de ces inconnues par le moyen de celles qu'on aura regardées comme connues. Au reste, quelles que soient, dans chaque question, les connues et les inconnues, la résolution s'achève toujours par les mêmes moyens analytiques qui servent à résoudre des questions purement numériques; la seule différence, c'est que les lettres qui, dans les questions algébriques, désignent des quantités abstraites, représentent ici des lignes connues ou inconnues.

(*Pl.* I, *Fig.* 6.) Par exemple, s'il s'agit du triangle isocèle CBD inscrit dans un cercle, et qu'on veuille comparer ses côtés BC et BD, et sa base CD avec le diamètre du cercle AB, la question pourrait être de chercher le diamètre par le moyen des côtés et de la base, ou bien de chercher la base par le moyen des côtés et du diamètre, ou bien enfin, de chercher les côtés par le moyen de la base et du diamètre. Mais quelle que soit celle de toutes ces questions que l'on veuille choisir, on la mettra en équation par les mêmes méthodes analytiques.

Si c'est le diamètre que l'on cherche, on fait $AB = x$, $CD = a$, et BC ou $BD = b$. Alors si on mène la corde AC, on aura, à cause des triangles semblables ABC et CBE, $AB : BC :: BC : BE$, ou en mettant les valeurs analytiques, $x : b :: b : BE = \frac{b^2}{x}$. D'un autre côté, $CE = \frac{a}{2}$, et dans le triangle CEB, à cause de l'angle droit, on a, $\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$, ou bien $\frac{1}{4} a^2 + \frac{b^4}{x^2} = b^2$, équation qu'il est facile de résoudre, et qui nous donnera la valeur de x. (18).

Si c'est la base que l'on cherche, alors il faut faire $AB = c$, $CD = x$, et BC ou $BD = b$, et tirant AC, on a, à cause des triangles semblables, ABC et CBE, $AB : BC :: BC : BE$, ou $c : b :: b : BE = \frac{b^2}{c}$. D'un autre côté, $CE = \frac{1}{2} CD = \frac{x}{2}$. Et à cause du triangle rectangle CEB, on a $\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$, ou bien $\frac{x^2}{4} + \frac{b^4}{c^2} = b^2$, équation qui, étant résolue, nous donnera la valeur de x. (19).

Si on cherche le côté BC ou BD, il faut faire $AB = c$, $CD = a$, et BC ou $BD = x$, et tirer AC. A cause des triangles semblables ABC, CBE, on a, $AB : BC :: BC : BE$, ou bien $c : x :: x : BE$. Ainsi $BE = \frac{x^2}{c}$. Et comme $CE = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} a$, et que le triangle rectangle CEB donne $\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2$, il s'en suit qu'on a, $\frac{1}{4} a^2 + \frac{x^4}{c^2} = x^2$, équation qui, étant résolue, nous donnera la valeur de x. (20).

Vous voyez donc que dans chaque cas le calcul par lequel on parvient à l'équation est en tout semblable; que l'équation qu'il produit est toujours la même, avec la seule différence que la même ligne est désignée tantôt par une lettre, tantôt par une autre, selon qu'elle est considérée comme connue, ou comme inconnue. Il est vrai que, selon qu'on prendra la même ligne pour connue ou pour inconnue, il naîtra une différence dans la manière de réduire l'équation. En effet, l'équation $\frac{1}{4} a^2 + \frac{b^4}{x^2} = b^2$ donne, par réduction, $x = \frac{-2b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$, valeur de AB; l'équation $\frac{1}{4} x^2 + \frac{b^4}{c^2} = b^2$ donne $x = \frac{2b}{c} \sqrt{c^2 - b^2}$, valeur de CD, et l'équation....... $\frac{1}{4} a^2 + \frac{x^4}{c^2} = x^2$ donne $x = \sqrt{\frac{1}{2} c^2 \pm \sqrt{\frac{c^4 - a^2 c^2}{4}}}$, valeur de BC ou de BD; et pour chacune de ces équations on est parvenu à la valeur de x par des voies différentes (en effet, dans l'équation $\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^4}{c^2} = b^2$, il est bien évident qu'il faudrait s'y prendre de différentes manières, selon qu'on voudrait dégager ou c, ou a, ou b); mais toutes ces équations ont été trouvées de la même manière.

De-là vient la maxime des géomètres, qu'il ne faut mettre aucune différence entre les connues et les inconnues. Maxime très-vraie, puisque si, dans une même question, on regardait successivement chacune des quantités comme l'inconnue, on arriverait toujours à la même équation. (*). Il faut donc considérer toutes les quantités sans aucune différence entre les connues et les inconnues, afin de mieux juger de leurs rapports, et des moyens les plus propres à les calculer; ou mieux encore, qu'on imagine qu'un problême quelconque ne consiste que dans l'art de classer ses quantités en connues et en inconnues, de manière à arriver le plus facilement possible à l'équation.

Lors donc qu'un problême vous est proposé, comparez entre elles toutes les quantités qu'il renferme ; estimez comment quelques-unes de ces quantités vous étant connues, vous pourriez, par un procédé synthétique, parvenir à trouver les autres. Pour cela, il n'est pas nécessaire de reconnaître du premier coup-d'œil par quelle marche le calcul algébrique conduira de l'une à l'autre, il suffit de sentir en général que les unes peuvent être déduites des autres par un moyen quelconque.

(*) C'est ce que nous venons de voir dans les deux paragraphes précédens.

(*Pl.* I, *Fig.* 7). Par exemple, si on proposait une question qui eût pour objet le diamètre *AD*, et les trois lignes *AB*, *BC* et *CD* inscrites dans un demi-cercle, et que toutes les autres étant données, on cherchât *BC*; au premier apperçu, on voit que le diamètre *AD* détermine nécessairement le demi-cercle, et qu'ensuite les lignes *AB* et *CD*, par leur inscription, déterminent aussi les points *B* et *C*, et par conséquent la ligne *BC* qu'on cherche, et cela par le moyen le plus direct. Mais on ne découvre pas avec la même facilité, par quel chemin l'analyse conduit des quantités données à la ligne cherchée *BC*. Ce serait la même chose s'il fallait chercher ou *AB*, ou *CD*, tout le reste étant donné.

Mais si *AB*, *BC* et *CD* étaient donnés, et qu'il fallût chercher le diamètre *AD*, on apperçoit à l'instant que le problême n'est pas possible par la synthèse, parce que la distance des points *A* et *D* dépend de l'ouverture des angles *B* et *C*; que ces angles dépendent du cercle dans lequel les lignes données doivent être inscrites, et que ce cercle n'est point donné, puisque son diamètre est supposé inconnu.

La nature du problême ne permet donc pas de trouver synthétiquement le diamètre *AD*. Alors il faut le traiter comme s'il était connu, pour remonter aux quantités données.

Lorsque vous aurez bien saisi les différens moyens par lesquels chaque terme d'une question peut être déterminé, alors, parmi toutes les lignes qui doivent entrer dans l'état de cette question, regardez comme connues, celles qui vous présenteront la route la plus facile pour arriver à la connaissance des autres, et dont la route inverse serait en même temps la plus difficile. C'est toujours par ces lignes que le calcul doit commencer, quoique dans le cours de l'opération, on puisse en introduire d'autres. Le moyen le plus court d'arriver au but, est de mettre, pour un moment, de côté la question qu'on veut résoudre, et de s'imaginer qu'il ne s'agit uniquement que de choisir, parmi toutes les quantités qui doivent entrer dans le problême, celles qui, étant supposées connues, meneraient plus facilement à la connaissance des autres.

Ainsi, dans l'exemple déjà cité, si c'est le diamètre AD que l'on cherche, il est aisé de voir qu'on ne peut pas le trouver par un moyen synthétique; mais on s'apperçoit bien vîte, que, si ce diamètre était connu, on arriverait aux autres quantités par la route la plus directe. Je regarde donc AD comme connu, et j'établis mon calcul comme s'il l'était véritablement, et qu'il fût question de trouver quelqu'une des lignes données AB, BC, ou CD. Par ce moyen, on obtient les rapports qui existent entre les quantités qu'on traite comme connues et les autres, et on arrive toujours à une équation entre deux valeurs d'une même quantité, soit que l'une des valeurs résulte du nom donné à cette quantité au commencement de l'opération, et que l'autre ait été trouvée par le calcul, soit que toutes deux aient été trouvées par des opérations différentes d'analyse.

Au reste, le plus difficile n'est pas de concevoir les relations générales des termes d'une question, mais bien de saisir certaines liaisons des lignes entre elles, certains rapports plus propres que d'autres à être soumis au calcul. Car il arrive fréquemment, que des relations qui paraissent immédiates au premier coup-d'œil, vous entraînent dans de longs circuits, lorsque vous les traitez analytiquement, et souvent vous forcent à recommencer l'opération par de nouveaux moyens. Il ne faut donc employer que les propositions, ou les énoncés les plus propres à être exprimés par les calculs de l'Algèbre.

Premièrement, le calcul s'opère ou par l'addition des lignes, afin que, de la valeur des parties, on obtienne la valeur du tout; ou par la soustraction, afin que de la valeur du tout et d'une partie, on obtienne la valeur de l'autre partie.

Secondement, le calcul s'opère par la proportion des lignes. Car c'est aussi un principe qui a lieu en Géométrie, que, dans une proportion, si on divise le produit des moyens par un des extrêmes, le quotient donne l'autre extrême; ou, ce qui est une suite du même principe, si on a les valeurs de quatre quantités proportionnelles, il y a toujours égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens. La proportion des lignes se tire sur-tout de la similitude des triangles; et cette similitude se reconnaît à l'égalité des angles. L'analyste doit donc être très-exercé dans l'art de comparer les angles entre eux; et pour cela, il faut qu'il soit bien instruit de toutes les propositions élémentaires qui ont rapport à cette partie.

Troisièmement, le calcul s'opère par l'addition ou la soustraction des quarrés. C'est-à-dire que, dans les triangles rectangles, on ajoute les quarrés des deux petits côtés, ce qui donne le quarré du grand; ou bien du quarré du grand on retranche le quarré d'un des petits, et le reste est le quarré de l'autre petit.

C'est sur ce petit nombre de principes que repose tout l'art d'appliquer l'analyse à la géométrie des lignes droites; il suffira d'y ajouter quelques propositions puisées dans les élémens, pour les cas où il s'agirait des surfaces et des solides. Bien plus, les problêmes les plus difficiles pourraient être résolus par ces deux théorêmes : la composition des lignes par le moyen de leurs parties, et la similitude des triangles. Ainsi il n'y aurait pas de nécessité d'en employer d'autres, puisque ceux-ci suffisent à tout. Pour en donner une preuve, j'ai

résolu,

résolu, sans le secours de la 47e proposition du premier livre des Élémens (*), le problême qui consiste à abaisser une perpendiculaire sur la base d'un triangle obliquangle. Mais quoiqu'il soit infiniment utile de connaître les principes les plus simples d'où dépendent les solutions des problêmes, puisqu'avec ces principes il n'en est aucun qu'on ne puisse résoudre; cependant il est plus expéditif d'employer la 47e proposition du premier livre des Élémens, dont l'usage est presque continuel, et même d'autres théorêmes.

Par exemple, si on abaisse une perpendiculaire sur la base d'un triangle obliquangle, et qu'on veuille faire entrer les segmens de la base dans le calcul, il est bon de savoir que la différence des quarrés des côtés est égale au double produit de la base, par la distance du milieu de la base à la perpendiculaire.

Il sera aussi fort utile, dans ces sortes d'opérations, de savoir, que si on coupe l'angle du sommet d'un triangle en deux parties égales, non seulement la base sera coupée en parties proportionnelles aux côtés, mais encore que l'excès du rectangle des côtés, sur le rectangle des segmens de la base est égal au quarré de la ligne qui partage l'angle.

Lorsqu'il s'agit de figures inscrites dans le cercle, on voit revenir souvent le théorême par lequel on démontre que, dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

L'analyste doit avoir en réserve ces moyens et d'autres semblables pour les cas de besoin; mais il ne doit en user qu'avec économie, et leur préférer, autant qu'il pourra, des principes plus simples,

(*) Les Élémens qui sont cités dans tout le cours de l'Ouvrage, sont ceux d'Euclide.

dussent-ils rendre le calcul un peu plus difficile. En conséquence, il doit graver dans sa mémoire les trois premiers principes que nous avons posés, et s'efforcer de les appliquer à tous les cas, comme étant les plus simples, les plus connus, les plus généraux; qu'il est difficile de les réduire à un plus petit nombre, et que cependant ils suffisent à tout.

Mais, pour que des théorêmes de cette espèce puissent servir à la résolution des problêmes, il est très-souvent nécessaire d'y ajouter des constructions particulières, comme de prolonger certaines lignes jusqu'à ce qu'elles en coupent d'autres; ce qui détermine leur longueur; ou de mener, de quelque point remarquable, des lignes parallèles ou perpendiculaires à d'autres; ou d'unir ces points remarquables; ou enfin de faire toute autre espèce de construction, selon que l'exige l'état du problême, et les théorêmes qu'on emploie à sa solution : comme, par exemple, si deux lignes qui ne se rencontrent pas, forment avec une troisième, des angles connus; en les prolongeant, leur rencontre formera un triangle, dont les angles, et par conséquent aussi les rapports des côtés, seront connus. Qu'un angle nous soit donné, ou qu'il soit égal à un autre, cela nous suffit souvent, en prolongeant quelques lignes, pour en conclure l'espèce du triangle, ou sa similitude avec un autre.

Si le triangle est obliquangle, on le décompose souvent en deux triangles rectangles, en menant une perpendiculaire d'un des angles sur le côté opposé. S'il s'agit de figures qui aient un plus grand nombre de côtés, on les décompose en triangles, en menant des diagonales; et ainsi du reste : faisant en sorte de ramener tout à ces principes simples : *que toute figure peut toujours se décomposer en triangles donnés, ou semblables, ou rectangles.*

(*Pl.* I, *Fig.* 8). Ainsi, dans l'exemple proposé je mène la diagonale BD, et le trapèze $ABCD$ se trouve décomposé en deux triangles; l'un, ABD, rectangle, et l'autre, BCD, obliquangle. Ensuite je décompose le triangle obliquangle en deux rectangles, en abaissant une perpendiculaire d'un quelconque de ses angles B, C, ou D, sur le côté opposé; par exemple, de l'angle B sur le côté CD prolongé jusqu'en E, afin qu'il rencontre la perpendiculaire BE. Or, on sait que la somme des angles BAD et BCD est égale à deux droits (*), (par la 22^e. prop. du 3^e. liv. des Elém.); et que la somme des deux angles BCE et BCD égale aussi deux angles droits, il ne m'est donc pas difficile d'appercevoir que les angles BAD et BCE sont égaux, et que par conséquent les triangles BCE et BAD sont semblables. Ainsi, en regardant AD, AB et BC comme connues, et DC comme l'inconnue que l'on cherche, voici de quelle manière le calcul peut s'établir. Au moyen des lignes connues AD et AB, et à cause du triangle rectangle ABD, il sera facile de tirer la valeur de BD. Et au moyen des deux triangles semblables ABD et BCE, et des lignes connues AD, AB, BD et BC, on trouvera les lignes BE et CE. Et au moyen des lignes BD et BE, et du triangle rectangle BED, on déterminera ED, et alors $ED - EC$, différence de deux lignes connues, nous donne CD, ligne que nous cherchions. On obtiendra par ce moyen une équation entre la valeur de CD trouvée de cette manière, et la lettre par laquelle on l'a désignée. On peut aussi en faire le calcul en employant des principes différens, ce qui donne d'une même quantité deux valeurs, entre lesquelles on établit une

(*) Remarquez bien que la somme des deux angles opposés d'un quadrilatère ne peut être égale à deux droits, qu'autant que le quadrilatère est inscrit ou inscriptible dans un cercle.

équation. Ainsi AB, AD et BC nous donnent BD, BE et CE comme auparavant, ensuite $CD + CE$ donne ED, et enfin BD et ED donnent BE (à cause du triangle rectangle BED).

Ainsi en cherchant des valeurs différemment exprimées d'une même quantité, par le moyen de ses relations avec d'autres quantités, on pourra former des équations entre ses valeurs. C'est ainsi que la relation entre les lignes BD, DC, BC et CE (relation fondée sur la 12^e. prop. du 2^e. liv. des Elém.) étant exprimée de cette manière, $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2CD \times CE$, nous pourrons trouver $\overline{BD}^2$ par le moyen de AD et de AB, et CE par le moyen des connues (*) AD, AB et BC. Alors il n'y a plus dans l'équation $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2CD \times CE$, que CD et son quarré $\overline{CD}^2$ d'inconnu. Mais il sera très-facile d'en avoir la valeur en résolvant l'équation. L'analyste, conduit par cette méthode et d'autres semblables, fera marcher de front son calcul et sa figure, et lira dans son analyse toute sa construction géométrique.

Je crois que par tout ce qui précède, on doit parfaitement comprendre ce que disent les géomètres : *Qu'il faut regarder ce que l'on cherche comme s'il était trouvé.* Ainsi, sans mettre aucune différence entre les quantités connues et les inconnues, vous pouvez prendre celle qu'il vous plaira pour commencer le calcul, comme si tout était déja connu par une résolution précédente, et qu'il ne fût plus question de résoudre le problême, mais seulement de le vérifier. C'est ainsi que dans la première des trois méthodes de calcul, quoique ce soit peut-être véritablement AD que l'on cherche, on feint cependant que c'est CD, comme si on voulait seulement s'assurer

(*) Ou du moins considérées comme telles.

si cette valeur de *CD*, obtenue par le moyen de *AD*, quadre avec une autre valeur du même *CD* précédemment trouvée. De même encore dans les deux dernières méthodes de calcul, mon but n'est pas de découvrir une quantité, mais de trouver une équation par le moyen des relations quelconques des lignes. En conséquence regardant *AD*, *AB*, *BC* et *CD* comme des lignes connues, j'agis comme si la question avait déja été résolue, et qu'il n'y eût plus qu'à examiner si ces quantités satisfont exactement aux conditions du problême, et quadrent avec les équations que leurs rapports nous ont données. C'est ainsi que je commence toujours mon opération, et que je la poursuis jusqu'à ce que je sois arrivé à l'équation; alors changeant de marche, c'est de l'inconnue seule que je m'occupe dans la réduction et la résolution de cette équation. C'est ainsi enfin que nous employons souvent, comme connues, plus de quantités qu'il n'y en a réellement dans l'état de la question. On pourra voir un exemple remarquable de ce que je viens de dire, dans le 55^e^. des problêmes suivans, où, pour déterminer une section conique, j'ai introduit, comme connues, dans l'équation $a^2 + bx + cx^2 = y^2$, non seulement les lignes a, b et c, mais encore les lignes r, s, t, v, dont le problême, tel qu'il est proposé, ne fait aucune mention; car il est permis d'introduire toute quantité par le moyen de laquelle on peut parvenir à l'équation. On doit seulement observer qu'il faut pouvoir en tirer autant d'équations qu'on a réellement introduit d'inconnues.

Dès qu'on a établi sa méthode de calcul, que la figure contient toutes les lignes qui doivent y entrer (c'est-à-dire toutes celles qui doivent donner la valeur des autres, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'équation), alors il faut leur imposer des noms, en choisissant celles qui contiennent toutes les conditions du problême (sans en contenir pourtant plus qu'il n'est besoin) et qui paraissent plus propres que d'autres à rendre, autant qu'on peut le conjecturer d'avance, la conclusion plus simple. Il faut rarement donner des noms aux quantités qui peuvent se déduire d'autres quantités déja nommées. C'est ainsi qu'il suffit de nommer deux côtés d'un triangle rectangle, et deux ou trois termes d'une proportion; parce que le troisième côté du triangle, le troisième ou le quatrième terme de la proportion peuvent se déduire des autres. De même si on a une ligne et trois de ses parties, il suffira de nommer la ligne et deux de ses parties, la troisième pouvant en être déduite. Par exemple, (*Pl.* I, *Fig.* 8). si j'appelle AD, x et AB, a, je ne donnerai point de nom à BD, parce qu'étant le troisième côté d'un triangle rectangle ABD, sa valeur sera $\sqrt{x^2 - a^2}$. Ensuite, dans la même Figure, si je fais $BC = b$, comme les deux triangles DAB, BCE sont semblables, j'ai la proportion $AD : AB :: BC : CE$, dont les trois premiers termes sont nommés; ainsi je laisse sans nom le quatrième, parce que je puis déduire sa valeur $\frac{ab}{x}$ de la proportion. Enfin si on appelle DC, c, il ne faut pas donner de nom à DE, parce que connaissant chacune de ses parties, CE et CD, la ligne totale sera $DE = c + \frac{ab}{x}$.

Par tout ce que nous venons de dire, on voit que le problême est déja presque réduit en équation; car une fois que l'on a désigné par des lettres les lignes principales, il n'y a plus qu'à tirer d'elles, par la méthode indiquée ci-devant, les valeurs des autres lignes, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'équation. Et pour ne pas sortir de l'exemple qui nous a toujours occupés, il ne nous reste plus qu'à trouver une double valeur de BE, par le moyen des deux triangles rectangles BCE et BDE. C'est-à-dire $\overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$, ou...... $b^2 - \frac{a^2 b^2}{x^2} = \overline{BE}^2$; voilà la première. La seconde sera $\overline{BD}^2 - \overline{DE}^2$, ou $x^2 - a^2 - c^2 - \frac{2abc}{x} - \frac{a^2 b^2}{x^2} = \overline{BE}^2$. Comparant ces deux valeurs de $\overline{BE}^2$, et effaçant de part et d'autre $- \frac{a^2 b^2}{x^2}$, le reste sera $b^2 = x^2 - a^2 - c^2 - \frac{2abc}{x}$. Cette équation étant réduite, devient, $x^3 = \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + b^2 \\ + c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc$.

Comme j'ai déja donné, pour résoudre ce problême, plusieurs moyens qui ne diffèrent que très-peu, et que cependant celui qui est fondé sur la 12^e. prop. du 2^e. liv. des Elém. me paraît le plus simple, c'est lui que j'employerai ici. Soit donc $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, et $CD = c$. Alors $\overline{BD}^2 = x^2 - a^2$, et $CE = \frac{ab}{x}$, comme ci-dessus. Faites entrer ces valeurs dans le théorême $\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2CD \times CE$, et vous aurez $x^2 - a^2 - b^2 - c^2 = \frac{2abc}{x}$, et en réduisant, $x^3 = \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + b^2 \\ + c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc$, comme auparavant.

Mais pour faire voir combien les solutions d'une question peuvent être variées, et combien il est aisé à un géomètre exercé d'en trouver au moins une, je veux encore en placer ici plusieurs du même problême. Pour cela, je tire la diagonale BD, et si au lieu de mener, comme ci-dessus, la perpendiculaire BE du point B sur le côté DC prolongé, on la mène du point D sur BC, ou du point C sur BD, de manière que le triangle BCD soit résolu en deux triangles rectangles, on pourra parvenir, pour chacun de ces cas, à l'équation, et par des moyens très-peu différens de ceux que j'ai déja indiqués; mais il y en a d'autres aussi qui ne laissent pas de différer beaucoup. Par exemple (*Pl.* I, *Fig.* 9) si on tire les deux diagonales AC et BD, en regardant AD et AB comme connues, on en déduira BD; de même qu'on déduirait AC des lignes AD et CD prises comme connues. Ensuite, par le théorême des figures quadrilatères inscrites dans le cercle, on a l'équation $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$. Laissant donc aux lignes AD, AB, BC, CD les noms x, a, b, c, que nous leur avons donnés ci-devant, nous aurons $BD = \sqrt{x^2 - a^2}$, et......... $AC = \sqrt{x^2 - c^2}$ (par la 47^e. prop. du 1er. liv. des Elém.) et en substituant dans l'équation que nous a donnée le théorême les valeurs de ces lignes, nous aurons, $bx + ac = \sqrt{x^2 - a^2} \times \sqrt{x^2 - c^2}$, et en quarrant chaque membre, et réduisant, on obtiendra.....

$$x^3 = \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + b^2 \\ + c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc.$$

Au reste, il est très-facile de faire voir que les solutions que nous avons obtenues par le moyen du théorême, pouvaient se tirer de la seule similitude des triangles. En effet, qu'on mène BH perpendiculairement à BC, et qui rencontre AC en H; alors les triangles BCH et BDA seront semblables, puisqu'ils ont chacun un angle droit en B, et les angles C et D égaux. Pareillement les triangles BCD et BHA sont aussi semblables, car d'abord les angles inscrits BAC et BDC sont égaux; et ensuite les angles ABH et CBD le sont aussi; car, en retranchant des deux angles droits CBH et DBA,

DBA, la partie commune HBD, il est clair que les restes seront égaux. Des deux premiers on tire la proportion, $BD : AD :: BC : CH$, et des deux derniers la proportion, $BD : CD :: AB : AH$. Or $AH + HC = AC$. Et si on met dans les deux proportions, à la place des lignes, leurs valeurs analytiques, on trouvera que $CH = \frac{bx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ et $AH = \frac{ac}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, par conséquent $CH + AH$ ou $AC = \frac{bx + ac}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Mais d'ailleurs $AC = \sqrt{x^2 - c^2}$. Donc on aura, $\frac{bx + ac}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - c^2}$; et en multipliant tout par $\sqrt{x^2 - a^2}$, et quarrant, on arrivera à une équation absolument pareille à celle que nous avons déjà trouvée plusieurs fois.

Pour montrer encore avec plus d'évidence la multitude de moyens qu'il y a de mettre une question en équation, prolongez BC et AD (*Pl.* I, *Fig.* 10) jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point F, et vous aurez les triangles semblables ABF et CDF; car ils ont chacun un angle commun en F, et les angles ABF et CDF sont égaux, comme étant l'un et l'autre supplément du même angle CDA (par la 13^e^ prop. du premier livre et la 22^e^ du troisième livre des Élémens). Maintenant, il est de toute évidence que si, outre les quatre quantités sur lesquelles roule la question, la ligne AF nous était encore donnée, nous trouverions CF par cette proportion, $AB : AF :: CD : CF$; mais $AF - AD$ donne DF, et la proportion $CD : DF :: AB : BF$, donne BF, d'où l'on tirerait l'équation $BF - CF = BC$. Mais ayant traité comme connues deux quantités inconnues AD et DF, il faut encore trouver une nouvelle équation. Pour cela, j'abaisse du point B sur la base AF la perpendiculaire

BG, ce qui me donne $AD : AB :: AB : AG$; mais, par un théorême de la treizième proposition du deuxième livre des Élémens, j'ai aussi $\overline{BF}^2 + 2AF \times AG = \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2$. Nos premières lignes conservant les noms qu'elles avaient ci-devant, a, b, c, x, je fais de plus $AF = y$. Nous avons donc, par la première proportion trouvée plus haut, $CF = \frac{cy}{a}$, et par la seconde...... $BF = \frac{a(y-x)}{c}$. D'où il suit que $\frac{a(y-x)}{c} - \frac{cy}{a} = b$, première équation trouvée; et comme d'un autre côté, $AG = \frac{a^2}{x}$, nous aurons, $\frac{a^2y^2 - 2a^2xy + a^2x^2}{c^2} + \frac{2a^2y}{x} = a^2 + y^2$, seconde équation; et en les réduisant, elles nous donneront enfin l'équation cherchée. Car la première équation donne $y = \frac{abc + a^2x}{a^2 - c^2}$, cette valeur de y étant substituée dans la seconde, donne après avoir réduit et ordonné, $x^3 = \left.\begin{matrix} +a^2 \\ +b^2 \\ +c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc$, comme auparavant.

Et si on prolonge AB et CD jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, la solution n'aura de différence qu'en ce qu'elle sera peut-être un peu plus facile; ainsi j'aime mieux mettre sous les yeux du lecteur une nouvelle solution déduite d'un principe tout-à-fait différent, par exemple, en cherchant une double valeur de la surface du quadrilatère. Je mène d'abord la diagonale BD, afin que le quadrilatère soit décomposé en deux triangles. Ensuite conservant aux lignes les mêmes noms x, a, b, c, qu'elles avaient auparavant, je vois d'abord que $BD = \sqrt{x^2 - a^2}$, et par conséquent $\frac{1}{2}a \times \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{2}AB \times BD$, surface du triangle ABD. Ensuite ayant abaissé BE perpendiculairement sur CD, on a la proportion $AD : BD :: BC : BE$, à cause des deux triangles semblables ABD et BCE; par conséquent $BE = \frac{b}{x}\sqrt{x^2 - a^2}$, et $\frac{bc}{2x}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} CD \times BE$, surface du triangle BCD. Et en ajoutant ces deux surfaces, on aura, $\frac{ax + bc}{2x}\sqrt{x^2 - a^2}$, surface totale du quadrilatère. Et en menant de la même manière, la diagonale AC, cherchant les surfaces des deux triangles ACD et ABC, et les ajoutant, on aura une nouvelle valeur de la surface du quadrilatère $\frac{cx + ba}{2x}\sqrt{x^2 - c^2}$. En égalant ces deux valeurs, et les multipliant par $2x$, il viendra......... $(ax + bc)\sqrt{x^2 - a^2} = (cx + ab)\sqrt{x^2 - c^2}$, et en élevant tout au quarré, et divisant par $a^2 x - c^2 x$, on arrivera enfin à cette forme déjà trouvée tant de fois, $x^3 = \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + b^2 \\ + c^2 \end{matrix}\right\} x + 2abc$.

On peut remarquer par tous ces exemples, quelle variété de moyens on a pour résoudre une question; mais on doit remarquer en même temps que, parmi tous ces moyens, il en est de bien plus expéditifs que d'autres. C'est par cette raison, que, lorsqu'on a pris une mauvaise route pour arriver à la solution d'un problême, il faut revenir sur ses pas, et faire de nouvelles tentatives, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un chemin plus facile. Car les moyens qui viennent s'offrir les premiers à la pensée, conduisent souvent à des opérations très-laborieuses lorsqu'on les met en usage. Par exemple, dans le problême dont il s'agit, il eût été tout aussi facile de trouver le moyen suivant que ceux que nous avons employés jusqu'ici : c'eût été d'abaisser (*Pl.* I, *Fig.* 11) les perpendiculaires BR et CS sur AD, de même que la perpendiculaire CT sur BR, alors la figure serait décomposée en triangles rectangles; et on voit aisément que AD et

R 2

AB donnent AR; que AD et CD donnent DS; que $AD - AR - DS$ donne RS ou TC. En outre, AB et AR donnent BR; CD et DS donnent CS ou TR; et $RB - RT$ donne BT; et BT et TC donnent BC. De tout cela on obtiendrait une équation. Mais si, par cette méthode, quelqu'un tentait la résolution, il verrait, plus que dans aucune des précédentes, les termes algébriques se multiplier, ce qui les rendrait par conséquent plus difficiles à réduire à l'équation finale.

Voilà ce que l'on peut dire sur la résolution des problêmes rectilignes. Il serait peut-être à propos d'observer encore que, lorsque les angles, ou les positions des lignes données par les angles, entrent dans l'état d'une question, il faut, au lieu des angles, prendre les lignes, ou tels de leurs rapports qui peuvent se déduire de la connaissance des angles, par le moyen du calcul trigonométrique, ou dont la connaissance peut réciproquement faire trouver les angles par le même calcul. On en verra plusieurs exemples dans la suite.

Quant aux lignes courbes, on a coutume de les regarder comme étant engendrées, soit par le mouvement local des lignes droites, soit par des équations indéfinies qui expriment la relation de lignes droites disposées entre elles d'une manière invariable et venant se terminer à la courbe. Les anciens, par la section des solides, sont arrivés au même but, mais cette marche était beaucoup moins facile. Le calcul des courbes décrites par le premier moyen, s'exécute absolument par les mêmes règles que nous avons enseignées ci-devant. Par exemple, si on a une courbe AKC (*Pl.* I, *Fig.* 12) décrite par le sommet d'un angle droit $AK\phi$, dont un des côtés AK glisse librement sur le point A donné de position, tandis que l'autre côté $K\phi$, d'une longueur donnée, glisse sur la droite AD aussi donnée de position;

si on a, dis-je, une telle courbe, et qu'on veuille trouver un point C, dans lequel une droite quelconque CD, d'une position donnée, coupe la courbe, il faudra tirer du point C (qui est censé trouvé) les droites AC, CF, formant un angle droit en C, et qui représentent les deux génératrices, lorsqu'elles ont décrit le point C de la courbe: alors considérant les relations des lignes, sans égard à leur rapport avec la courbe, sans mettre de différence entre ce qui est donné ou ce qui est cherché, j'apperçois sans peine que tout dépend de CF, et de l'une des quatre lignes BC, BF, AF, AC. Je prends donc $CF = a$ (*), $CB = x$; et partant de-là pour commencer mon calcul, j'en déduis aussi-tôt $BF = \sqrt{a^2 - x^2}$; et à cause des deux angles droits ACF et FBC, on a la proportion $BF : BC :: BC : AB$. D'où $AB = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. D'un autre côté, la position de CD étant donnée, la grandeur de AD est connue. J'appelle donc AD, b, et comme le rapport de BC à BD est connu (je le suppose comme celui de d à e), j'ai $BD = \frac{ex}{d}$ et $AB = b - \frac{ex}{d}$, d'où je tire

(*) Newton considère le point C comme s'il était connu; mais il ne l'est pourtant pas, puisque c'est ce point qu'il cherche; donc les lignes AC et CF sont inconnues: pourquoi donc désigne-t-il CF par a? c'est que, en quelque lieu de la courbe que soit situé le point C, si par ce point et par le pôle A, on imagine une droite AC, et une autre droite CF qui lui soit perpendiculaire, cette dernière sera toujours une ligne connue égale à $K\varphi$, puisque, par la nature de la courbe, ces deux droites représentent la situation de l'équerre dans le moment qu'elle a décrit le point C, et que $K\varphi$ ne fait que varier de position, sans varier de longueur.

l'équation $b - \frac{ex}{d} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Et en quarrant chaque membre, et multipliant tout par $a^2 - x^2$, on la réduira sous la forme.......

$x^4 = \frac{2bdex^3 \begin{matrix} -b^2d^2 \\ +a^2e^2 \end{matrix} \Big\} x^2 - 2a^2bdex + a^2b^2d^2}{d^2+e^2}$, d'où enfin, par le moyen des lettres connues a, b, d, e, et des règles qui seront enseignées dans la suite, on déterminera la valeur de x. Cette valeur trouvée, on élevera x ou BC perpendiculairement sur AD, de son extrémité on tirera une parallèle à AD, et le point C où cette parallèle coupera la courbe, sera le point cherché.

Si, au lieu de descriptions géométriques, l'on donne des équations pour exprimer la nature d'une courbe, alors le calcul en sera d'autant plus facile et plus court, qu'on aura ces équations de moins à trouver. Par exemple, si l'on cherchait le point d'intersection C d'une ellipse donnée ACE (*Pl.* I, *Fig.* 13) avec une ligne droite CD donnée de position; pour désigner l'ellipse, je prends quelque équation qui lui soit propre, comme $rx - \frac{r}{q}x^2 = y^2$, où x est pris indéfiniment pour une partie quelconque de l'axe, telle que Ab ou AB, et y pour la perpendiculaire bc ou BC terminée à la courbe. C'est l'espèce de l'ellipse qui détermine r et q. Puisque CD est donnée de position, AD sera donnée de longueur. Soit donc $AD = a$, alors BD sera $a - x$. L'angle ADC est aussi donné, et par conséquent le rapport de BD à BC que je suppose être :: 1 : e. Donc on aura aussi y ou $BC = ea - ex$, et en quarrant, $\overline{BC}^2$ $(y^2) = e^2a^2 - 2e^2ax + e^2x$, quantité qu'il faut égaler à $rx - \frac{r}{q}x^2$, et par la réduction, on obtiendra........

$x^2 = \frac{2ae^2x + rx - a^2e^2}{e^2 + \frac{r}{q}}$, ou $x = \frac{ae^2 + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{r^2}{4e^2} - \frac{a^2r}{q}}}{e^2 + \frac{r}{q}}$.

Si l'on a une courbe obtenue par une description géométrique, ou par la section d'un solide, on pourra toujours exprimer sa nature par une équation. C'est donc à ce point unique, c'est-à-dire à trouver leur équation, que l'on doit rapporter toutes les difficultés des problêmes qu'on propose sur les courbes.

C'est ainsi que dans le premier exemple (*Pl.* I, *Fig.* 12) si on appelle AB, x, et BC, y, la troisième proportionnelle BF sera $\frac{y^2}{x}$, et son quarré, ajouté à celui de BC, donnera celui de CF, c'est-à-dire $\frac{y^4}{x^2} + y^2 = a^2$, ou bien $y^4 + x^2y^2 = a^2x^2$. Telle est l'équation par laquelle, pour chaque longueur déterminée AB de la base, chaque point C de la courbe AKC est déterminé, et par conséquent la courbe elle-même l'est aussi. Et c'est de cette équation qu'on doit attendre la solution de tous les problêmes qu'on peut proposer sur cette courbe.

Si une courbe n'est pas donnée d'espèce, mais qu'on demande de la déterminer, il faut prendre arbitrairement une équation qu'on supposera exprimer d'une manière générale, la nature de cette courbe. Et traitant cette équation comme si elle était donnée, on obtiendra par son moyen d'autres équations qui détermineront les quantités qu'on avait d'abord regardées comme connues; et par ces quantités enfin, la nature de la courbe sera elle-même déterminée. On en verra des exemples dans quelques-uns des problêmes suivans, que j'ai multipliés dans le dessein de les faire servir d'exercice pour ceux qui étudient, et de mettre dans un plus grand jour la doctrine que je viens d'exposer.

PROBLÊME Ier.

Étant donnée une droite BC d'une longueur connue, sur les extrémités de laquelle deux autres droites BA, CA font des angles donnés ABC, ACB, trouver la hauteur AD du point de concours A, au-dessus de la droite donnée BC.

(*Pl.* I, *Fig.* 14). Soit $BC = a$, et $AD = y$. Puisque l'angle ABD est donné, la table des sinus et des tangentes nous donnera le rapport entre les lignes AD et BD que je suppose être comme de d à e. Soit donc $d : e :: AD\,(y) : BD = \frac{ey}{d}$. Pareillement, à cause de l'angle donné ACD, on aura le rapport entre les droites AD et CD, que je suppose celui de d à f, ainsi $DC = \frac{fy}{d}$. Mais $BD + DC = BC$, c'est-à-dire $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Cette équation étant réduite, en multipliant chaque membre par d, et divisant par $e+f$, on a $y = \frac{ad}{e+f}$.

PROBLÊME II.

Si les côtés AB, AC et la base BC d'un triangle quelconque ABC sont donnés, et qu'une perpendiculaire AD soit abaissé du sommet de l'angle A sur la base, on demande de trouver les deux segmens BD et DC.

(*Pl.* I, *Fig.* 15). Soit $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, et $BD = x$, DC sera $c - x$. Maintenant comme $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$, et que $\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2$. En mettant les valeurs analytiques dans chacune de ces équations, la première devient $a^2 - x^2 = \overline{AD}^2$; et la seconde

seconde, $b^2 - (c-x)^2 = \overline{AD}^2$. Ou $b^2 - (c-x)^2 = a^2 - x^2$, ou $b^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2$, qui donne, après la réduction, $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$.

Au reste, pour faire voir que sans le secours de la 47ᵉ. prop. du premier liv. des Elém. et par la seule propriété des lignes proportionnelles, on peut résoudre toutes les difficultés de tous les problêmes (ce qui, à la vérité, se fait d'une manière moins directe) j'ai jugé à propos de placer ici une seconde solution du même problême.

Du point D abaissez la perpendiculaire DE sur le côté BA, et conservant aux lignes les noms qu'elles ont déja, vous aurez $AB : BD :: BD : BE$, ou bien, $a : x :: x : BE = \frac{x^2}{a}$, et....... $BA - BE \left(a - \frac{x^2}{a}\right) = EA$. On peut encore faire la proportion $EA : AD :: AD : AB$, d'où l'on tire, $EA \times AB = \overline{AD}^2$, ou $a^2 - x^2 = \overline{AD}^2$. Et en raisonnant de la même manière pour le triangle ACD, on trouvera de nouveau $\overline{AD}^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2$, d'où on obtiendra encore, comme auparavant, $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$.

PROBLÊME III.

Etant donnés le périmètre et la surface d'un triangle rectangle ABC, trouver son hypothénuse BC.

(*Pl.* II, *Fig.* 1). Soient, le périmètre a, la surface b^2, $BC = x$, et $AC = y$, on aura $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$, ce qui nous donnera une seconde valeur du périmètre, $BC + AC + AB = x + y + \sqrt{x^2 - y^2}$.

La surface est $\frac{1}{2}$ $AC \times AB = \frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - y^2}$. Nous avons donc maintenant deux équations, $x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = a$, et....... $\frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - y^2} = b^2$. Cette dernière donne, $\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{2b^2}{y}$. Je substitue dans la première, $\frac{2b^2}{y}$ au lieu de $\sqrt{x^2 - y^2}$, et elle devient, $x + y + \frac{2b^2}{y} = a$, ou, en multipliant tout par y, $xy + y^2 + 2b^2 = ay$, ce qui donne, $y^2 = ay - xy - 2b^2$. Ensuite je retranche de chaque membre de la première équation, $x + y$, ce qui la réduit à $\sqrt{x^2 - y^2} = a - x - y$. J'élève tout au quarré pour faire disparaître le radical, et j'ai, $x^2 - y^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2$, qui, après avoir ordonné et divisé tout par 2, devient, $y^2 = ay + ax - xy - \frac{a^2}{2}$. Égalons cette seconde valeur de y^2 à la première, il viendra, $ay + ax - xy - \frac{a^2}{2} = ay - xy - 2b^2$, qui se réduit à $ax - \frac{a^2}{2} = -2b^2$, ou bien à $x = \frac{a}{2} - \frac{2b^2}{a}$.

Seconde manière.

Soient, la moitié du périmètre a, la surface b^2, et BC, x. Nous aurons $AC + AB = 2a - x$, et $\overline{BC}^2 (x^2) = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, et..... $\frac{AB \times AC}{2} = b^2$, ou bien, $AB \times AC = 2b^2$, ou bien, $2AB \times AC = 4b^2$. Donc $x^2 + 4b^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AC = (AB + AC)^2 = (2a - x)^2$. Par conséquent, $x^2 + 4b^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$, ou bien, $x = a - \frac{b^2}{a}$.

PROBLÊME IV.

Étant donnés le périmètre et la hauteur d'un triangle rectangle, trouver ce triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, C l'angle droit du triangle ABC, et CD la perpendiculaire sur la base AB. Soient $AB+AC+BC=a$, et $CD=b$. Faites la base $AB=x$, la somme des côtés $AC+CB$ sera $a-x$. Supposez que la différence de ces mêmes côtés soit y, alors le plus grand côté AC sera, $\frac{a-x+y}{2}$, et le plus petit BC sera, $\frac{a-x-y}{2}$. Maintenant, par la nature du triangle rectangle, on a, $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$, c'est-à-dire........ $\frac{a^2-2ax+x^2+y^2}{2}=x^2$. On a encore la proportion $AB:AC::BC:DC$ (*), ainsi $AB\times DC=AC\times BC$, ce qui donne......... $bx=\frac{a^2-2ax+x^2-y^2}{4}$. Or de la première équation l'on tire, $y^2=x^2+2ax-a^2$, et de la seconde, $y^2=x^2-2ax+a^2-4bx$; donc $x^2+2ax-a^2=x^2-2ax+a^2-4bx$, qui se réduit à $4ax+4bx=2a^2$, ou bien, $x=\frac{a^2}{2a+2b}$.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi en langage géométrique : *Dans tout triangle rectangle, la somme faite du périmètre et de la perpendiculaire est au périmètre, comme la moitié du périmètre est à la base.*

Retranchez $2x$ de a, et le reste sera $\frac{ab}{a+b}$, excès des côtés sur

(*) Cette proportion a lieu à cause de la similitude des deux triangles rectangles ACB, CBD.

la base. (21). Ce qui nous montre que dans tout triangle rectangle, *la somme faite du périmètre et de la perpendiculaire est au périmètre, comme la perpendiculaire est à l'excès des côtés sur la base.*

PROBLÊME V.

Étant données la base AB d'un triangle rectangle, ainsi que la somme faite de la perpendiculaire et des côtés $CA + CB + CD$, trouver le triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, $CD = x$, alors $AC + CB = a - x$. Faites $AC - CB = y$, vous aurez $AC = \frac{a - x + y}{2}$, et $CB = \frac{a - x - y}{2}$. De plus, $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, ou bien, $\frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{2} = b^2$. On a encore, $AC \times CB = AB \times CD$; ou $\frac{a^2 - 2ax + x^2 - y^2}{4} = bx$, et en tirant de ces deux équations les valeurs de y^2 et les comparant, on a, $2b^2 - a^2 + 2ax - x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4bx$, et en réduisant, $x^2 = 2ax + 2bx - a^2 + b^2$, d'où l'on tire, $x = a + b - \sqrt{2ab + 2b^2}$.

De cette dernière équation on tire l'énoncé géométrique suivant: *De la somme faite du périmètre et de la perpendiculaire, retranchez une moyenne proportionnelle entre cette même somme et le double de la base, et le reste sera la perpendiculaire.*

Le même d'une autre manière.

Soient, $CA + CB + CD = a$, $AB = b$, et $AC = x$, et on aura, $BC = \sqrt{b^2 - x^2}$, $CD = \frac{x\sqrt{b^2 - x^2}}{b}$, et $x + CB + CD = a$, ou

$CB + CD = a - x$. Par conséquent, $\frac{b+x}{b}\sqrt{b^2 - x^2} = a - x$. Et en élevant chaque membre au quarré, et multipliant tout par b^2, on aura, $-x^4 - 2bx^3 + 2b^3x + b^4 = a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2$. (22). Et en transposant et ordonnant.........................

$$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} +3b^2 \\ +2ab \end{matrix}\left\{ x^2 \begin{matrix} +2b^3 \\ +2ab^2 \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} +b^4 \\ +2ab^3 \\ +a^2b^2 \end{matrix}\right. = \begin{matrix} 2b^2 \\ +2ab \end{matrix}\left\{ x^2 \begin{matrix} +4b^3 \\ +4ab^2 \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} +2b^4 \\ +2ab^3 \end{matrix}\right. .$$

Et en tirant la racine de part et d'autre, on aura, $x^2 + bx + b^2 + ab = (x+b)\sqrt{2ab + 2b^2}$. Et en résolvant cette équation, on a,

$$x = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}ab} \pm \sqrt{b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}ab} - \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{2}ab}.$$

Construction Géométrique.

(*Pl.* II, *Fig.* 2). Faites $AB = \frac{1}{2}b$, $CB = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}AB$. Prenez AE moyenne proportionnelle entre b et AC. Prenez de plus EF moyenne proportionnelle entre b et DE, et portez EF de part et d'autre du point E, et les deux lignes BF, BF seront les deux côtés du triangle. (23).

PROBLÊME VI.

Étant données dans un triangle rectangle ABC, la somme des côtés $AC + BC$, et la perpendiculaire CD, trouver le triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, $AC + BC = a$, $CD = b$, $AC = x$, on aura, $BC = a - x$, et $AB = \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$. On a de plus la proportion $CD : AC :: CB : AB$, ce qui donne....... $AB = \frac{ax - x^2}{b}$. Par conséquent, $ax - x^2 = b\sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}$, et en quarrant chaque membre et ordonnant..................

$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +a^2 \\ -2b^2 \end{matrix} \Big\{ x^2 + 2ab^2x - a^2b^2 = 0$. Ajoutez à chaque membre $a^2b^2 + b^4$, et vous aurez, $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +a^2 \\ -2b^2 \end{matrix} \Big\{ x^2 + 2ab^2x + b^4 = a^2b^2 + b^4$, et en tirant la racine de chaque côté...... $x^2 - ax - b^2 = -b\sqrt{a^2+b^2}$. Et en résolvant cette équation, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2 - b\sqrt{a^2+b^2}}$.

Construction Géométrique.

(*Pl.* II, *Fig.* 3). Faites $AB = BC = \frac{1}{2}a$. Élevez en C la perpendiculaire $CD = b$; prolongez CD jusqu'en E, afin que $DE = DA$; prenez une moyenne proportionnelle CF entre CD et CE, et du point F comme centre, et avec un rayon égal à BC, décrivez l'arc de cercle GH, qui coupera la droite BC en G et en H, et les lignes BG et BH seront les deux côtés du triangle. (24).

Le même d'une autre manière.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, $AC + BC = a$, $AC - BC = y$, $AB = x$, et $DC = b$, on aura $AC = \frac{a+y}{2}$, $BC = \frac{a-y}{2}$, $\frac{a^2+y^2}{2} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 = x^2$. $\frac{a^2-y^2}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC} = AB = x$. Donc $2x^2 - a^2 = y^2 = a^2 - 4bx$, et $x^2 + 2bx = a^2$; équation qui étant résolue donne, $x = -b + \sqrt{b^2+a^2}$. Ce qui, dans la construction ci-dessus, nous donne CE pour hypothénuse du triangle cherché. Or une fois que la base et la perpendiculaire sont connues, tant dans le problême précédent que dans celui-ci, voici de quelle manière on construit le triangle. Faites un parallèlogramme CG (*Pl.* II, *Fig.* 4) dont le grand côté CE soit la base du triangle, et le petit côté CF la perpendiculaire; sur CE, comme diamètre, décrivez un demi-cercle qui coupera le côté opposé FG en H; tirez du point H, aux extrémités du diamètre, les droites CH et EH, et CEH sera le triangle cherché.

PROBLÊME VII.

Étant données dans un triangle rectangle, la somme des côtés, et la somme faite de la perpendiculaire et de la base, trouver le triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Soient, la somme des côtés $AC+CB=a$, la somme de la base et de la perpendiculaire $AB+CD=b$, le côté $AC=x$, la base $AB=y$; et on aura $BC=a-x$, $CD=b-y$, $a^2-2ax+2x^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2=y^2$, $ax-x^2=AC\times BC=AB\times CD=by-y^2=by-a^2+2ax-2x^2$, et $by=a^2-ax+x^2$, et en quarrant chaque membre, $b^2y^2=a^4-2a^3x+3a^2x^2-2ax^3+x^4$. Et en substituant dans le premier membre, à la place de y^2 sa valeur, $a^2-2ax+2x^2$, transposant et ordonnant, on aura, $x^4-2ax^3\begin{matrix}+3a^2\\-2b^2\end{matrix}\Big\{x^2\begin{matrix}-2a^3\\+2ab^2\end{matrix}\Big\{x\begin{matrix}+a^4\\-a^2b^2\end{matrix}=0.$ Et en ajoutant à chaque membre, $b^4-a^2b^2$ (*), elle deviendra,

---

(*) Pour connaître la quantité qu'il faut ajouter à chaque membre d'une équation, afin de rendre le premier un quarré parfait, consultez le chapitre *de la Réduction des équations par les diviseurs incommensurables*, ainsi que la note 74ᵉ qui s'y rapporte, et principalement le deuxième exemple de cette note 74ᵉ qui s'applique au problême actuel.

$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +3a^2 \\ -2b^2 \end{matrix} \left\{ x^2 \begin{matrix} -2a^3 \\ +2ab^2 \end{matrix} \right\{ x \begin{matrix} +a^4 \\ -2a^2b^2 \\ +b^4 \end{matrix} = b^4 - a^2b^2$. Et en tirant la racine quarrée de chaque membre, $x^2 - ax + a^2 - b^2 = - b\sqrt{b^2 - a^2}$, et en résolvant cette dernière équation, on aura enfin, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2 - b\sqrt{b^2 - a^2}}$.

Construction Géométrique.

Prenez une moyenne proportionnelle R entre $b + a$ et $b - a$; une autre moyenne proportionnelle S entre R et $b - R$; enfin une moyenne proportionnelle T entre $\frac{1}{2}a + S$ et $\frac{1}{2}a - S$; et les côtés du triangle cherché seront, $\frac{1}{2}a + T$ et $\frac{1}{2}a - T$. (25).

PROBLÊME VIII.

Étant donnés la surface, le périmètre et l'angle A d'un triangle quelconque ABC, déterminer tout le reste.

(*Pl.* II, *Fig.* 5). Soient, le périmètre $= a$, la surface $= b^2$; et de l'un ou de l'autre des deux angles inconnus, par exemple de C, abaissez une perpendiculaire CD sur le côté opposé AB. A cause de l'angle donné A, on connaîtra le rapport de AC à CD, que je suppose celui de d à e. Faites donc $AC = x$, et vous aurez $CD = \frac{ex}{d}$. Or comme vous connaissez la surface du triangle, et que vous venez de trouver l'expression de la perpendiculaire, divisez la surface par la moitié de la perpendiculaire, le quotient donnera la base AB, ainsi $\frac{2b^2d}{ex} = AB$. A cette base ajoutez AD, c'est-à-dire, c'est-à-dire, $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2}$, ou bien, $\frac{x}{d}\sqrt{d^2 - e^2}$, et vous aurez, $BD = \frac{2b^2d}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{d^2 - e^2}$. Au quarré de chaque membre ajoutez $\overline{CD}^2$, il viendra $\overline{BC}^2 = \frac{4b^4d^2}{e^2x^2} + x^2 + \frac{4b^2}{e} \times \sqrt{d^2 - e^2}$. Otez maintenant du périmètre AC et AB, le reste sera, $a - x - \frac{2b^2d}{ex} = BC$, dont le quarré est, $a^2 - 2ax + x^2 - \frac{4ab^2d}{ex} + \frac{4b^2d}{e} + \frac{4b^4d^2}{e^2x^2} = \overline{BC}^2$. En égalant les deux valeurs de $\overline{BC}^2$, et effaçant ce qui se détruit, il viendra, $\frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2} = a^2 - 2ax - \frac{4ab^2d}{ex} + \frac{4b^2d}{e}$. Qu'on fasse, $a^2 + \frac{4b^2d}{e} - \frac{4b^2}{e}\sqrt{d^2 - e^2} = 4af$, on aura, en substituant et en réduisant, $x^2 = 2fx - \frac{2b^2d}{e}$. D'où l'on tire, $x = f \pm \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$.

On aurait encore trouvé la même équation en cherchant le côté AB; car les côtés AB et AC ont absolument les mêmes conditions dans le problême. Ainsi en supposant que la valeur de AC soit, $f - \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$, celle de AB sera, $f + \sqrt{f^2 - \frac{2b^2d}{e}}$, et réciproquement. Et en soustrayant la somme des deux côtés $2f$ du périmètre a, la différence sera, $a - 2f = BC =$ le troisième côté.

PROBLÊME IX.

Etant données la hauteur, la base et la somme des côtés, trouver le triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 5). Soient, la hauteur $CD = a$, la demi-base

$\frac{1}{2}AB = b$, la moitié de la somme des côtés $= c$, et leur demi-différence $= z$. Le plus grand côté, par exemple BC, sera $c + z$, et le plus petit AC, $c - z$. Retranchez $\overline{CD}^2$ de $\overline{BC}^2$, et vous aurez $\overline{BD}^2$. D'où $BD = \sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2}$. Maintenant $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$. Donc $AD = \sqrt{c^2 - 2cz + z^2 - a^2}$. Retranchez encore AB de BD, et vous aurez, $AD = \sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2} - 2b$. Égalez cette seconde valeur de AD à la première, quarrez et ordonnez, et il viendra, $b^2 + cz = b\sqrt{c^2 + 2cz + z^2 - a^2}$. Enfin, quarrant de nouveau et ordonnant, vous obtiendrez, $c^2z^2 - b^2z^2 = b^2c^2 - b^2a^2 - b^4$. D'où $z = b\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2 - b^2}}$. De la valeur de z vous déduirez facilement celle des côtés.

PROBLÊME X.

Étant donnés la base AB, la somme des côtés $AC + BC$, et l'angle C, trouver le reste du triangle.

(*Pl.* II, *Fig.* 6). Soient, la base $= a$, la demi-somme des côtés $= b$, et leur demi-différence $= x$. Le grand côté BC sera $b + x$, et le petit AC, $b - x$. De l'un ou de l'autre des deux angles inconnus, de A, par exemple, menez la perpendiculaire AD sur le côté opposé BC. Et puisque l'angle C est donné, on connaîtra le rapport de AC à CD; supposons-le comme celui de d à e; il en résultera $CD = \frac{eb - ex}{d}$. Mais on a aussi, par la 13^e. prop. du deuxième liv. des Élém. $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2BC}$, ou bien............

$\frac{2b^2+2x^2-a^2}{2b+2x} = CD$. Nous aurons donc une équation entre les deux valeurs de CD; et cette équation étant résolue, nous donnera, $x = \sqrt{\frac{da^2+2eb^2-2db^2}{2d+2e}}$. La demi-différence x des côtés étant connue, comme on connaît d'ailleurs leur demi-somme b, il est clair que les côtés sont connus.

Si on cherchait les angles sur la base, la résolution serait plus courte. En effet, qu'on partage l'angle donné C en deux parties égales, par une droite CE qui rencontrera la base en un point E, et on aura $AB : AC+BC :: AE : AC ::$ sin. de l'angle ACE : sin. de l'angle CEA (26). L'angle CEA étant ainsi connu, son supplément BEC sera également connu. Pour avoir l'angle A, il faudra retrancher la moitié de l'angle donné C de l'angle trouvé BEC. Et la moitié de C retranchée de AEC, donnera l'angle B. (27).

PROBLÊME XI.

Étant donnés les côtés d'un triangle, trouver les angles.

(*Pl.* II, *Fig.* 7). Soient les côtés du triangle $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, et supposons que l'on cherche l'angle A. Abaissez sur le côté AB la perpendiculaire CD opposée à l'angle A. Cela fait, on a d'abord, $b^2 - c^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 (28) = (AD+BD) \times (AD-BD) = AB \times (2AD-AB) = 2AD \times a - a^2$. Ainsi $b^2 - c^2 = 2AD \times a - a^2$. D'où l'on tire, $AD = \frac{1}{2}a + \frac{b^2-c^2}{2a}$, ce qui fournit un premier théorême énoncé comme il suit :

THÉORÊME I^{er}. $AB : AC+BC :: AC-BC$: une quatrième proportionnelle N. Ce qui donne $AD = \frac{AB+N}{2}$; ensuite $AC : AD ::$ le rayon : au cos. de l'ang. A.

En outre, $\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2} =$ $\frac{(a+b+c)\times(a+b-c)\times(a-b+c)\times(-a+b+c)}{4a^2}$ (29). Et en multipliant le numérateur et le dénominateur de la racine du second membre de cette équation par b, on en déduira le second théorême :

Théorême IIe. $2ab$: une moyenne proportionnelle entre $(a+b+c)\times(a+b-c)$ et $(a-b+c)\times(-a+b+c)$ :: le rayon : au sinus de l'ang. A.

Prenez sur AB la droite $AE = AC$, et tirez CE, l'angle ECD sera égal à la moitié de l'angle A (30). Retranchez AD de AE, et il restera, $DE = b - \frac{1}{2}a - \frac{(b^2-c^2)}{2a} = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$ .... $= \frac{(c+a-b)\times(c-a+b)}{2a}$, par conséquent........................ $\overline{DE}^2 = \frac{(c+a-b)\times(c+a-b)\times(c-a+b)\times(c-a+b)}{4a^2}$. De-là se déduisent le IIIe et le IVe théorêmes :

Théorême IIIe. $2ab : (c+a-b)\times(c-a+b) :: AC : DE$ :: le rayon : au sinus verse de l'angle A.

Théorême IVe. Une moyenne proportionnelle entre $a+b+c$ et $a+b-c$: une moyenne proportionnelle entre $c+a-b$ et $c-a+b$ :: $CD : DE$ :: le rayon : à la tangente de la moitié de l'angle A (31), ou bien :: cot. $\frac{1}{2}A$: au rayon.

De plus, comme on a $\overline{CE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{2ab^2 + bc^2 - ba^2 - b^3}{a}$, il s'en suit que $\overline{CE}^2 = \frac{b}{a}(c+a-b)\times(c-a+b)$. D'où l'on tire le Ve et le VIe théorêmes.

Théorême Ve. Une moyenne proportionnelle entre $2a$ et $2b$: à une moyenne proportionnelle entre $c+a-b$ et $c-a+b$, :: le rayon : au sinus de la moitié de l'angle A. (32).

Ou bien 1 : à une moyenne proportionnelle entre $\frac{c+a-b}{2a}$ et $\frac{c-a+b}{2b}$ :: CE : DE :: le rayon : au sinus de la moitié de l'angle A. (33).

THÉORÊME VI^e^. Une moyenne proportionnelle entre $2a$ et $2b$: une moyenne proportionnelle entre $a+b+c$ et $a+b-c$ :: CE :: CD :: le rayon : au cos. $\frac{1}{2}A$. (34).

Si outre les angles, on veut trouver la surface du triangle, il n'y a qu'à multiplier $\overline{CD}^2$ par $\frac{\overline{AB}^2}{4}$, et la racine quarrée du produit, ou $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\times(a+b-c)\times(a-b+c)\times(-a+b+c)}$ sera la surface cherchée.

PROBLÊME XII.

Les côtés et la base d'un triangle rectiligne quelconque étant donnés, trouver les segmens de la base, la perpendiculaire, la surface et les angles.

(*Pl.* II, *Fig.* 8). Soient AC et BC les côtés du triangle ABC, et AB sa base, coupez AB en deux parties égales en I, et sur chacune de ces parties prolongées, prenez AF et AE égales chacune à AC, et BG et BH égales chacune à BC; tirez les lignes CE et CF, et du point C, abaissez une perpendiculaire CD sur la base. Vous aurez $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = (AD+BD)\times(AD-BD) = AB \times 2DI$. Donc.........

$DI = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2AB}$. Et $2AB : AC+BC :: AC-BC : DI$. Tel est le théorême par lequel on détermine les segmens de la base. De

IE, c'est-à-dire, de $AC - \frac{1}{2}AB$ retranchez DI, et le reste sera, $DE = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 + 2AC \times AB - \overline{AB}^2}{2AB}$ qui est la même chose que... $\frac{(BC + AC - AB) \times (BC - AC + AB)}{2AB}$, ou bien $\frac{EH \times EG}{2AB}$ (35). Retranchez DE de FE, ou de $2AC$, et il restera.................. $FD = \frac{\overline{AC}^2 + 2AC \times AB + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2AB}$, quantité qu'on peut décomposer ainsi, $\frac{(AC + AB + BC)\ (AC + AB - BC)}{2AB}$, ou bien $\frac{FG \times FH}{2AB}$. Et comme CD est moyenne proportionnelle entre DE et DF (36); et CE moyenne proportionnelle entre DE et EF, et CF moyenne proportionnelle en FD et FE, on aura $CD = \frac{\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}}{2AB}$. $CE = \sqrt{\frac{AC \times HE \times EG}{AB}}$, et $CF = \sqrt{\frac{AC \times FG \times FH}{AB}}$. Multipliez $\frac{AB}{2}$ par CD, et vous aurez la surface $= \frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Quant à la détermination de l'angle A, on a pour cela une foule de théorêmes.

THÉORÊME I^er^. $2AB \times AC : HE \times EG :: AC : DE ::$ le rayon : sin. verse de l'angle A.

THÉORÊME II. $2AB \times AC : FG \times FH :: AC : FD ::$ le rayon : au cos. verse de l'angle A.

THÉORÊME III. $2AB \times AC : \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG} :: AC : CD ::$ le rayon : au sin. de l'angle A.

THÉORÊME IV. $\sqrt{FG \times FH} : \sqrt{HE \times EG} :: CF : CE ::$ le rayon : la tang. de la moitié de l'angle A.

THÉORÊME V. $\sqrt{HE \times EG} : \sqrt{FG \times FH} :: CE : CF ::$ le rayon : à la cot. de la moitié de l'angle A.

THÉORÊME VI. $2\sqrt{AB \times AC} : \sqrt{HE \times EG} :: FE : CE ::$ le rayon : au sin. de la moitié de l'angle A.

THÉORÊME VII. $2\sqrt{AB \times AC} : \sqrt{FG \times FH} :: FE : FC ::$ le rayon : au cos. de la moitié de l'angle A.

PROBLÊME XIII.

L'angle CBD étant donné, ainsi que la droite CD, il s'agit de placer cette droite dans l'angle CBD, de manière que, si de son extrémité D on tire en un point A donné sur la droite CB prolongée, la droite DA, l'angle ADC soit égal à l'angle ABD.

(*Pl.* II, *Fig.* 9). Faites $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, et vous aurez $BD : CD :: BA : AD = \frac{ab}{x}$. Abaissez la perpendiculaire DE, et vous aurez $BE = \frac{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{BA}^2}{2BA} = \frac{x^2 - \frac{a^2b^2}{x^2} + b^2}{2b}$. Et comme l'angle DBA est donné, faites la proportion $BD : BE :: b : e$, ce qui donne une seconde valeur de $BE = \frac{ex}{b}$. Donc $\frac{x^2 - \frac{a^2b^2}{x^2} + b^2}{2b} = \frac{ex}{b}$, d'où $x^4 - 2ex^3 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$.

PROBLÊME XIV.

Trouver le triangle ABC dont les trois côtés AB, AC, BC, et la perpendiculaire CD sont en progression arithmétique.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Par l'énoncé du problême on a donc cette proportion $\div AB . AC . BC . DC$. Faites $AC = a$, $BC = x$, vous aurez $DC = 2x - a$ et $AB = 2a - x$; vous aurez aussi......

$AD = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{4ax - 4x^2}$; et $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. Nous aurons donc une seconde valeur de... $AB = \sqrt{4ax - 4x^2} + \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. Ainsi........... $2a - x = \sqrt{4ax - 4x^2} + \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$; ou bien...... $2a - x - \sqrt{4ax - 4x^2} = \sqrt{4ax - 3x^2 - a^2}$. Et en quarrant chaque membre, $4a^2 - 3x^2 - (4a - 2x) \times \sqrt{4ax - 4x^2} = 4ax - 3x^2 - a^2$; ou bien $5a^2 - 4ax = (4a - 2x)\sqrt{4ax - 4x^2}$. Élevant de nouveau chaque membre au quarré et ordonnant, on a $16x^4 - 80ax^3 + 144a^2x^2 - 104a^3x + 25a^4 = 0$, équation qui, étant divisée par $2x - a$, devient, $8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 25a^3 = 0$. Et en la résolvant, on trouvera x pour une valeur arbitraire de a. a et x étant déterminées, construisez le triangle dont les côtés seront $2a - x$, a, et x; et la perpendiculaire abaissée sur le côté $2a - x$ sera égale à $2x - a$,

Si j'avais fait la différence des côtés $= d$, et la perpendiculaire $= x$, l'opération aurait été plus courte, et l'équation finale un peu plus simple, j'aurais eu, $x^3 = 24d^2x + 48d^3$.

PROBLÊME XV.

Trouver le triangle ABC dont les trois côtés AB, AC, BC et la perpendiculaire CD sont en progression géométrique.

(*Pl.* II, *Fig.* 10). Par l'énoncé du problême on a la progression $AB : AC :: AC : BC :: BC : CD$. Et en faisant $AC = x$, et $BC = a$, on aura, $AB = \frac{x^2}{a}$; et $CD = \frac{a^2}{x}$. On a aussi.......

AD

$AD = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}}$; et $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}}$. Donc $\frac{x^2}{a} = (AB) = \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}} + \ldots\ldots \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}}$. Ou bien $\frac{x^2}{a} - \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} = \sqrt{x^2 - \frac{a^4}{x^2}}$; et en quarrant chaque membre, il vient, $\frac{x^4}{a^2} - \frac{2x^2}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^4}{x^2}} + a^2 - \frac{a^4}{x^2} = x^2 - \frac{a^4}{x^2}$, qui se réduit à, $x^4 - a^2x^2 + a^4 = 2a^2x\sqrt{x^2 - a^2}$. Et en quarrant de nouveau chaque membre, on a, $x^8 - 2a^2x^6 + 3a^4x^4 - 2a^6x^2 + a^8 = 4a^4x^4 - 4a^6x^2$, ou bien, $x^8 - 2a^2x^6 - a^4x^4 + 2a^6x^2 + a^8 = 0$. Divisez cette équation par $x^4 - a^2x^2 - a^4$, et il viendra, $x^4 - a^2x^2 - a^4$. Par conséquent, $x^4 = a^2x^2 + a^4$. Et en résolvant cette équation, on a, $x^2 = \frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\frac{5}{4}a^4}$. Ou bien, $x = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Prenez donc a, ou BC à volonté, et faites cette proportion, $BC : AC :: AC : AB :: 1 : \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}$. Le triangle ABC étant construit par le moyen de ses côtés ainsi trouvés, la perpendiculaire DC, abaissée sur BC, sera dans la même raison que les côtés.

Le même d'une autre manière.

(*Pl.* II, *Fig.* 11). Puisqu'on a $AB : AC :: BC : CD$, je dis que l'angle ACB est droit. Si on doutait qu'il le fût, il n'y a qu'à tirer la droite CE de manière que l'angle ECB soit droit; alors, par la 8e. prop. du sixième liv. des Elém. BCE et DBC sont deux triangles semblables, par conséquent, $BE : EC :: BC : CD$.

Donc $BE : EC :: AB : AC$. Tirez AF perpendiculaire sur CF, et à cause des parallèles AF et CB, on aura, $BE : EC :: AE : EF :: AB : FC$. (37). Donc, par la 9e. prop. du cinquième liv. des Élém. $AC = FC$, c'est-à-dire que l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égale à un côté de ce même triangle; ce qui est impossible, par la 19e. prop. du premier liv. des Elém. L'angle ECB ne peut donc pas être droit, il faut par conséquent que l'angle ACB le soit. Donc $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$. Or, $\overline{AC}^2 = AB \times BC$ (*). Donc $AB \times BC + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, et en résolvant cette équation pour en tirer la valeur de AB, on aura, $AB = \frac{BC}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}\overline{BC}^2}$. En conséquence, faites $BC : AB :: 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et prenez AC moyenne proportionnelle entre BC et AB, et le triangle étant construit avec les côtés trouvés de cette manière, les lignes AB, AC, BC, DC seront en proportion continue.

PROBLÊME XVI.

Sur une base donnée AB, construire le triangle ABC, dont le sommet C est à une droite CE donnée de position, et dont la base est moyenne proportionnelle arithmétique entre les côtés.

(*Pl.* II, *Fig.* 12). Il faut couper la base en deux parties égales en F, et prolonger cette base jusqu'à ce qu'elle rencontre en un

(*) Newton tire cette équation de l'énoncé du problême, qui veut que les côtés AB, AC, BC soient en proportion continue.

point E la droite EC donnée de position, ensuite abaisser sur la base une perpendiculaire CD. On fera $AB = a$, $FE = b$, et $BC - AB = x$ (38); ce qui donnera $BC = a + x$, et $AC = a - x$. Mais par la 13^{e}. prop. du second liv. des Élém............ $BD = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2AB} = 2x + \frac{a}{2}$. Par conséquent, $FD = 2x$, $DE = b + 2x$, et $CD = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{DB}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$. Mais comme les positions des droites CE et AB sont données, l'angle CED est aussi donné. Ainsi on connaît le rapport de DE à CD. Supposons qu'il soit comme celui de d à e, on aura la proportion $d : e :: b + 2x : \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$. Et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on a l'équation, $eb + 2ex = d\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - 3x^2}$, et en quarrant chaque membre et arrangeant convenablement les termes, on a, $x^2 = \frac{\frac{3}{4}d^2a^2 - e^2b^2 - 4e^2bx}{4e^2 + 3d^2}$, et en résolvant l'équation, il vient, $x = \frac{-2e^2b + d\sqrt{3e^2a^2 - 3e^2b^2 + \frac{9}{4}d^2a^2}}{4e^2 + 3d^2}$ (39). x une fois connue, $BC = a + x$, et $AC = a - x$, le sont aussi.

PROBLÊME XVII.

Étant donnés les côtés AB, BD, DC et AC, et une diagonale BC d'un parallélogramme quelconque, trouver l'autre diagonale AD.

(*Pl.* II, *Fig.* 13). Soit E le point de concours des deux diagonales; abaissez la perpendiculaire AF sur la diagonale BC, et, par la 13^{e}. prop. du second liv. des Elém. vous aurez... . $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2BC} = CF$. Vous aurez également, $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2}{2EC} = \cdot F$.

V 2

PROBLÊME XIX.

On veut entourer un réservoir $ABCD$, d'un trottoir $ABCDEFGH$ d'une surface donnée, et ayant par-tout la même largeur.

(*Pl.* II, *Fig.* 15). Soit la largeur du trottoir x, et sa surface a^2. De tous les angles A, B, C, D, menez aux lignes EF, FG, GH, HE, les perpendiculaires AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI. Le trottoir sera divisé en quatre trapèzes, KI, LM, NO, PQ, et en quatre parallélogrammes, AL, BN, CP, DI, ayant tous x de largeur, et d'une longueur égale à celle des côtés du trapèze donné. Soit donc la somme des côtés de ce trapèze $AB + BC + CD + DA = b$, et la somme des parallélogrammes sera bx.

Ensuite je mène les lignes AE, BF, CG, DH, et puisque $AI = AK$, j'aurai l'angle $AEI =$ l'angle $AEK = \frac{1}{2} IEK = \frac{1}{2} DAB$. Ainsi l'angle AEI est connu, puisqu'il est la moitié d'un angle connu DAB; par conséquent on connaît la raison de AI à EI, qu'elle soit celle de d à e, on aura, $IE = \frac{ex}{d}$. Multipliez IE par $\frac{1}{2} AI$, ou $\frac{1}{2} x$, et la surface du triangle AEI sera, $\frac{ex^2}{2d}$. Mais à cause de l'égalité des angles et des côtés, les deux triangles AEK et AEI sont égaux; ainsi le trapèze $IK = 2$ triangles $AEI = \frac{ex^2}{d}$. Par la même méthode, en faisant, $BL : LF :: d : f$; et $CN : NG :: d : g$; et $DP : PH :: d : h$ (car tous ces rapports sont donnés, parce que les angles A, B, C, D sont donnés) on aura les trapèzes, $LM = \frac{fx^2}{d}$; $NO = \frac{gx^2}{d}$; et $PQ = \frac{hx^2}{d}$. Ainsi

$\frac{ex^2}{d} + \frac{fx^2}{d} + \frac{gx^2}{d} + \frac{hx^2}{d}$ égale la somme des quatre trapèzes, $IK + LM + NO + PQ$. On peut encore abréger cette expression en faisant, $e+f+g+h=p$, ce qui donne $\frac{px^2}{d}$ pour la somme des surfaces de ces mêmes trapèzes. Et en y ajoutant bx, somme des surfaces des quatre parallélogrammes, on aura, $\frac{px^2}{d} + bx = a^2$, surface totale du trottoir. Cette équation étant résolue, donnera, $x = \frac{-db + \sqrt{b^2d^2 + 4a^2pd}}{2p}$. La largeur du trottoir étant ainsi trouvée, il est facile de le décrire.

PROBLÊME XX.

Mener d'un point donné C, une droite CF, qui renferme, avec deux autres droites AE, AF données de position, un triangle AEF d'une grandeur donnée.

(*Pl.* III, *Fig.* 1). Menez CD parallèle à AE, et CB et EG perpendiculaires sur AF. Soient, $AD=a$, $CB=b$, $AF=x$, et la surface du triangle $AEF=c^2$; et à cause des lignes proportionnelles, $DF : AF :: (DC : AE) :: CB : EG$, ou bien, $a+x : x :: b : \frac{bx}{a+x}$, on aura, $EG = \frac{bx}{a+x}$. Multipliez cette perpendiculaire par la moitié de la base AF, et vous aurez pour l'expression de la surface du triangle AEF, $\frac{bx^2}{2a+2x} = c^2$, ou bien, $x^2 - \frac{2c^2x}{b} - \frac{2ac^2}{b} = 0$, équation qui, étant résolue, donne $x = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 2abc^2}}{b}$.

On suivrait absolument la même méthode s'il s'agissait, par un point donné, de mener une droite qui partageât un triangle ou un trapèze en raison donnée.

PROBLÊME XXI.

Déterminer sur la droite DF un point C, tel que si de ce point on mène deux droites AC et BC aux points donnés A et B, la différence de ces deux droites soit égale à une ligne donnée.

(*Pl.* III, *Fig.* 2). Des deux points donnés abaissez les perpendiculaires AD et BF. Faites $AD = a$, $BF = b$, $DF = c$, $DC = x$, et vous aurez $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$, $FC = x - c$, et $BC = \sqrt{b^2 + x^2 - 2cx + c^2}$. Supposons que AC soit la plus grande des deux droites, et BC la plus petite, et que leur différence $= d$; on aura donc $\sqrt{a^2 + x^2} - d = \sqrt{b^2 + x^2 - 2cx + c^2}$. Et en quarrant chaque membre, $a^2 + x^2 + d^2 - 2d\sqrt{a^2 + x^2} = b^2 + x^2 - 2cx + c^2$. Et en effaçant ce qui se détruit, et faisant, pour abréger, $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2e^2$, on aura .... $e^2 + cx = d\sqrt{a^2 + x^2}$, et en élevant de nouveau chaque membre au quarré, $e^4 + 2ce^2x + c^2x^2 = d^2a^2 + d^2x^2$. Et en résolvant cette équation, il viendra, $x = \frac{e^2c + \sqrt{e^4d^2 - a^2d^4 + a^2d^2c^2}}{d^2 - c^2}$.

Le problême se résoudrait d'une manière analogue si, au lieu de la différence des lignes AC et BC, on donnait leur somme, ou la somme, ou la différence de leurs quarrés, ou leur rapport, ou leur produit, ou l'angle qu'elles comprennent; il en serait encore de même si, au lieu

lieu de la droite DC, on donnait ou une circonférence de cercle, ou une autre courbe quelconque, pourvu que dans ce dernier cas le calcul se rapportât à une droite qui unirait les points A et B.

PROBLÊME XXII.

Trois droites, AD, AE, BF, étant données de position, il en faut mener une quatrième, DF, de manière que ses parties DE, EF, interceptées par les premières droites, soient de longueurs données.

(*Pl.* III, *Fig.* 3). Menez sur BF la perpendiculaire EG, et CE parallèle à AD. Les trois droites données de position se rencontreront en A, B et H. Faites $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$, $ED = d$, $EF = e$, et $HE = x$. Maintenant, à cause des triangles semblables ABH, ECH, on a..................... $AH : AB :: HE : CE = \frac{ax}{c}$, et $AH : HB :: HE : HC = \frac{bx}{c}$. Ajoutez ensemble HB et HC, et vous aurez, $BC = b + \frac{bx}{c} = \frac{bc+bx}{c}$. De même, les triangles semblables FEC et FDB donnent, $ED : CB :: FE : FC = \frac{ebx+ebc}{dc}$. Et enfin par les prop. 12 et 13 du second liv. des Elém. on a, $\frac{\overline{EC}^2 - \overline{EF}^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = CG$; et..... $CG = \frac{\overline{HE}^2 - \overline{EC}^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH$. Donc $\frac{\overline{EC}^2 - \overline{EF}^2}{2FC} + \frac{1}{2}FC = \frac{\overline{HE}^2 - \overline{EC}^2}{2CH} - \frac{1}{2}CH$. Et en mettant les valeurs analytiques........................

$$\frac{\frac{a^2x^2}{c^2} - e^2}{\frac{2ebx+2ebc}{dc}} + \frac{ebx+ebc}{2dc} = \frac{x^2 - \frac{a^2x^2}{c^2}}{\frac{2bx}{c}} - \frac{bx}{2c},$$ ou bien.........

$\frac{a^2dx^2 - e^2dc^2}{ebx + ebc} + \frac{ebx}{d} + \frac{ebc}{d} = \frac{c^2x - a^2x - b^2x}{b}$. Faites, pour abréger, $\frac{c^2 - a^2 - b^2}{b} - \frac{eb}{d} = m$, et vous aurez.............. $\frac{a^2dx^2 - e^2dc^2}{ebx + ebc} + \frac{ebc}{d} = mx$. Et multipliant tout par $c + x$, il viendra, $\frac{a^2dx^2 - e^2dc^2}{eb} + \frac{ebcx + ebc^2}{d} = mx^2 + mcx$. Mettez encore p au lieu de $\frac{a^2d}{eb} - m$, et $2pq$ au lieu de $mc - \frac{ebc}{d}$, et enfin pr^2 au lieu de $-\frac{ebc^2}{d} + \frac{e^2dc^2}{eb}$, et l'équation sera réduite à $x^2 = 2qx + r^2$. Ce qui donne $x = q \pm \sqrt{q^2 + r^2}$. x ou HE étant trouvée, menez de son extrémité E la droite EC parallèle à AB. Faites ensuite la proportion $d : e :: BC : FC$. FC étant determinée, par le point F et le point E menez la droite FED, elle satisfera aux conditions du problême.

PROBLÊME XXIII.

Il faut déterminer un point Z tel que, si de ce point on mène, sous des angles donnés, quatre droites, ZA, ZB, ZC et ZD, à quatre autres droites données de position FA, EB, FC, GD, le rectangle des deux droites ZA et ZB soit donné; et que la somme des deux autres droites ZC et ZD soit aussi donnée.

(*Pl.* III, *Fig.* 4). Parmi les lignes données de position, choisissez FA, et parmi celles qui ne sont pas données de position ZA qui tombe sur FA. La longueur de ces droites étant déterminée, la position du point Z le sera aussi. Prolongez, s'il est nécessaire, les droites données de position jusqu'à ce qu'elles rencontrent celles-ci. Faites $EA = x$, et $AZ = y$. Comme les angles du triangle

AEH sont donnés, la raison de AE à AH est connue; supposons qu'elle soit comme celle de p à q, on aura, $AH = \frac{qx}{p}$. Ajoutez AZ à AH, et il viendra, $ZH = y + \frac{qx}{p}$. ZH étant calculée, et les angles du triangle HZB étant donnés, la raison de HZ à ZB est aussi donnée; supposons qu'elle soit celle de n à p, on aura, $ZB = \frac{py + qx}{n}$.

En outre, si on appelle EF, a, AF sera $a - x$; et comme les angles du triangle AFI sont donnés, on supposera que le rapport connu de AF à AI est comme celui de p à r, ce qui donnera, $AI = \frac{ra - rx}{p}$. Retranchez AI de AZ, et le reste sera....... $IZ = y - \frac{(ra - rx)}{p}$. Et comme les angles du triangle ICZ sont connus, on supposera le rapport de IZ à ZC, comme celui de m à p, et on aura, $ZC = \frac{py - ra + rx}{m}$.

En suivant toujours la même méthode, si on fait $EG = b$, et $AG : AK :: l : s$, et $ZK : ZD :: p : l$, on trouvera........ $ZD = \frac{sb - sx - ly}{p}$.

Maintenant, par les conditions du problême, la somme des droites ZC et ZD doit être égale à une quantité donnée; soit f cette quantité. On aura donc $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p} = f$. Et le rectangle des deux autres droites AZ et ZB doit être aussi égal à une quantité donnée. Soit g^2 cette quantité. Nous aurons donc une seconde équation $\frac{py^2 + qxy}{n} = g^2$. Au moyen de ces deux équations on déterminera les valeurs de x et de y. De la dernière on

X 2

tire $x = \frac{ng^2 - py^2}{qy}$, et en substituant cette valeur de x dans la première, elle deviendra.................................

$\frac{py - ra}{m} + \frac{rng^2 - rpy^2}{mqy} + \frac{bs - ly}{p} - \frac{(sng^2 - spy^2)}{pqy} = f$, ou bien,

$y^2 = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + g^2mns - g^2npr}{p^2q - p^2r - m.lq + mps}$. Et en faisant, pour abréger, $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{p^2q - p^2r - mlq + mps} = 2h$. Et $\frac{g^2mns - g^2npr}{p^2q - p^2r - mlq + mps} = k^2$, on aura $y^2 = 2hy + k^2$, ou bien $y = h \pm \sqrt{h^2 + k^2}$. Connaissant y par le moyen de cette équation, on trouvera la valeur de x par le moyen de l'équation $x = \frac{ng^2 - py^2}{qy}$. La valeur de ces deux inconnues étant déterminée, la position du point Z sera connue.

On suivrait à-peu-près la même méthode, s'il s'agissait de déterminer la position d'un point, duquel on voulût mener à un plus ou moins grand nombre de droites données de position, autant de droites, avec ces conditions : que la somme, ou la différence, ou le produit de quelques-unes de ces droites, égalât ou la somme, ou la différence, ou le produit des autres; ou enfin que ces droites eussent des conditions données quelconques à remplir.

PROBLÊME XXIV.

Il faut placer dans l'angle droit EAF une droite donnée EF, de manière que cette droite prolongée passe par un point donné C, également éloigné des des deux droites qui comprennent l'angle droit.

(*Pl.* III, *Fig.* 5). Il faut achever le quarré $ABCD$, et couper la droite donnée EF en deux parties égales par le point G. Alors faites CB ou $CD = a$, EG ou $FG = b$, et $CG = x$; vous aurez $CE = x - b$, et $CF = x + b$. Ensuite comme $\overline{CF}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BF}^2$, il viendra, $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. Et à cause des triangles semblables CDE et FBC, on a, $CE : CD :: CF : BF$, ou $x - b : a :: x + b : \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. D'où l'on tire, $ax + ab = (x - b) \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. Et en quarrant chaque membre de cette équation et ordonnant, on a ....

$$x^4 = \begin{matrix} 2a^2 \\ +2b^2 \end{matrix} \left\{ x^2 \begin{matrix} +2a^2b^2 \\ -b^4 \end{matrix} \right.$$

. Équation qui, étant résolue par la méthode de celles du second degré, donne $x^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}$, et enfin $x = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}}$. La valeur de x ou CG étant ainsi connue sert à déterminer CE ou CF, et par le moyen de l'une ou de l'autre de ces deux droites, on détermine le point E ou le point F, et le problême est résolu.

Le même d'une autre manière.

(*Même Fig.*). Faites $CE = x$, $CD = a$ et $EF = b$, vous aurez $CF = x + b$, et $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$, et la proportion $CE : CD :: CF : BF$, ou $x : a :: x + b : \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$; ce qui donne ......

$ax + ab = x\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$, et en quarrant chaque membre et ordonnant les termes, il vient ....

$$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} + b^2 \\ - 2a^2 \end{matrix} \left\{ x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0. \right.$$

Équation du 4^e degré dont les racines sont plus difficiles à trouver que celles du cas précédent. Voici cependant comme on peut les trouver. Ajoutez de part et d'autre $a^2b^2 + a^4$, afin de faire du premier membre un quarré parfait, et vous aurez ....

$$x^4 + 2bx^3 \begin{matrix} + b^2 \\ - 2a^2 \end{matrix} \left\{ x^2 - 2a^2bx + a^4 = a^2b^2 + a^4; \right.$$

et en tirant

la racine de chaque membre, il viendra $x^2 + bx - a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2}$.

C'est ici l'occasion de donner une règle sur le choix des termes propres à commencer le calcul. *Lorsque deux termes ont une telle ressemblance de rapport avec les autres termes de la question, qu'en prenant l'un ou l'autre on arrive à des équations entièrement semblables; ou qu'en les prenant tous deux en même temps, ils aient dans l'équation finale le même nombre de dimensions, et la même forme, et ne diffèrent peut-être que par les signes + et —, il faut les rejetter tous deux également, et prendre à leur place un troisième terme qui ait un même rapport avec l'un et l'autre, par exemple leur demi-somme, ou leur demi-différence, ou une moyenne proportionnelle, ou enfin telle autre quantité qu'on voudra qui ait avec eux une même relation, pourvu que cette quantité soit la seule qui jouisse de cette propriété.*

C'est ainsi que dans le problême précédent, en voyant que la ligne EF avait une même relation avec AB et AD, comme on peut s'en assurer en menant EF dans l'angle BAH, et que par conséquent aucune raison de préférence ne pouvait me déterminer à prendre pour l'inconnue qu'il fallait chercher, ED plutôt que BF, ou AE plutôt que AF, ou CE plutôt que CF; au lieu donc des points E et F qui causaient toute mon incertitude, j'ai pris, dans la première solution, le point G qui coupe EF en deux parties égales; et comme CG a la même relation avec AB et AD, et qu'il n'y a pas une seconde quantité qui ait avec ces deux lignes la même relation que CG; je me suis déterminé à prendre CG pour l'inconnue qu'il fallait chercher, et j'ai obtenu une équation du 4ᵉ degré, où il ne s'est trouvé aucun terme affecté des puissances impaires de l'inconnue. On voit bien que je serais retombé dans ma première incertitude, si, ayant pris le point G, j'avais voulu chercher une inconnue au moyen d'une perpendiculaire abaissée de ce point sur AF, parce que j'aurois pu également en abaisser une sur AD; par la même raison, je n'en ai abaissé ni sur CB ni sur CD.

J'aurais pu encore, en remarquant que le point G est à la circonférence d'un cercle décrit du point A comme centre et avec GE comme rayon, j'aurais pu, dis-je, abaisser la perpendiculaire GK sur la diagonale AC, et chercher AK ou CK, qui ont le même rapport avec AB ou AD, et arriver à l'équation du second degré $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$, en appelant AK, y; AC, e; et EG, b. AK étant ainsi trouvé, on eût élevé la perpendiculaire KG, et son point de rencontre G, avec la circonférence décrite du centre A, eût servi avec le point C, à diriger la droite CF, et le problême eût été résolu (41).

C'est en suivant l'esprit de cette règle, que dans les problêmes IX et X, où il fallait déterminer les deux côtés AC et BC d'un triangle, au lieu de chercher l'un ou l'autre de ces côtés, j'ai cherché leur demi-différence. Mais on verra encore mieux dans le problême XXVIII^e^, le grand usage de cette règle.

PROBLÊME XXV.

Un cercle étant décrit d'un centre C et avec un rayon CD, mener à ce cercle une tangente BD, de manière que la partie DB de cette tangente interceptée par les droites AP et AB données de position, soit égale à une droite d'une longueur donnée.

(*Pl.* III, *Fig.* 6). Du centre C, menez à une des deux droites données de position, à AB par exemple, la perpendiculaire CE que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente en un point H. Abaissez encore sur AB la perpendiculaire PG, et faites $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$, et $PG = x$, vous aurez à cause des triangles semblables, PGB, CDH, $GB : PB :: CD : CH$. D'où $CH = \frac{cd}{\sqrt{d^2 - x^2}}$. Ajoutez CE à CH, et vous aurez $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{d^2 - x^2}}$. Ensuite on a la proportion $PG : GB :: EH : BE = \frac{b}{x}\sqrt{d^2 - x^2} + \frac{cd}{x}$. En outre, l'angle PAG étant donné, le rapport de PG à AG est aussi donné. Supposons qu'il soit celui de e à f, on aura, $AG = \frac{fx}{e}$. Or $EA + AG + BG = EB$. Donc en mettant les valeurs analytiques, nous aurons une seconde valeur de EB, qui, étant égalée à la première, nous donnera, $a + \frac{fx}{e} + \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{b}{x}\sqrt{d^2 - x^2} + \frac{cd}{x}$. Et en transposant, $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x}\sqrt{d^2 - x^2}$. Ensuite quarrant chaque membre, $a^2 + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{f^2x^2}{e^2} - \frac{2cdf}{e} + \frac{c^2d^2}{x^2} = \frac{b^2d^2}{x^2} - b^2 - \frac{2bd^2}{x} + 2bx + d^2 - x^2$, et en réduisant et ordonnant . . . .

$$x^4 \quad \frac{\left.\begin{matrix}+2aef\\-2be^2\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+a^2e^2\\+b^2e^2\\-d^2e^2\\-2cdef\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+2bd^2e^2\\-2acde^2\end{matrix}\right\} x \begin{matrix}+c^2d^2e^2\\-b^2d^2e^2\end{matrix}}{e^2 + f^2} = 0.$$

PROBLÊME XXVI.

PROBLÊME XXVI.

Étant données trois droites AE, BF, CF, trouver un point D tel que, si de ce point on abaisse sur chacune des droites, des perpendiculaires DA, DB, DC, ces perpendiculaires soient entre elles dans un rapport donné.

(*Pl.* III, *Fig.* 7). Prolongez une des droites données de position, ainsi que la perpendiculaire qui tombe sur elle, BF par exemple, et sa perpendiculaire BD, jusqu'à ce qu'elles rencontrent les deux autres droites AE et FC, la droite BF les rencontrera aux points E et F, et la perpendiculaire aux points G et H. Faites maintenant $EB = x$, et $EF = a$, et vous aurez $BF = a - x$. Et comme les droites EF, EA et FC sont données de position, les angles E et F, et les rapports des côtés des triangles EBH et FBG sont aussi donnés. Soit donc le rapport de EB à BH, comme celui de d à e, et on aura, $BH = \frac{ex}{d}$; et.................. $EH = \sqrt{\overline{EB}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{x^2 + \frac{e^2x^2}{d^2}} = \frac{x}{d}\sqrt{d^2 + e^2}$. Supposons encore que BF soit à BG comme d est à f, et nous aurons, $BG = \frac{fa - fx}{d}$, et $FG = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BG}^2} =$.................. $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + \frac{f^2a^2 - 2f^2ax + f^2x^2}{d^2}}$, ce qui se réduit à... $FG = \frac{a-x}{d}\sqrt{d^2 + f^2}$. Ensuite appelons BD, y; et il nous viendra, $HD = \frac{ex}{d} - y$; et $GD = \frac{fa - fx}{d} - y$. Et comme on a les proportions $AD : HD :: BE : HE :: d : \sqrt{d^2 + e^2}$; et

$DC : GD :: BF : FG :: d : \sqrt{d^2+e^2}$. De la première on tire, $AD = \frac{ex-dy}{\sqrt{d^2+e^2}}$, et de la seconde, $DC = \frac{fa-fx-dy}{\sqrt{d^2+f^2}}$. De plus, comme les rapports des lignes BD, AD, DC, sont donnés, supposons que $BD : AD :: \sqrt{d^2+e^2} : h-d$, et il viendra, $\frac{hy-dy}{\sqrt{d^2+e^2}} = AD = \frac{ex-dy}{\sqrt{d^2+e^2}}$; ce qui donne $hy=ex$. Soit encore $BD : DC :: \sqrt{d^2+f^2} : k-d$, et on aura, $\frac{ky-dy}{\sqrt{d^2+f^2}} = DC = \frac{fa-fx-dy}{\sqrt{d^2+f^2}}$, ce qui donne $ky = fa - fx$, d'où l'on tire,... $y = \frac{fa-fx}{k}$. Mais l'équation $hy=ex$, donne aussi $y=\frac{ex}{h}$, donc $\frac{ex}{h} = \frac{fa-fx}{k}$, ou bien, $x = \frac{afh}{ek+fh}$. Faites donc cette proportion, $\frac{ek}{f}+h : h :: EF : EB$, et EB, ou x, étant ainsi déterminée, substituez sa valeur dans l'équation $hy=ex$, et vous aurez la valeur de y par cette proportion, $h : e :: BE : BD$; ainsi le point D sera déterminé.

PROBLÊME XXVII.

Trouver un point D tel, que si de ce point on tire trois droites DA, DB, DC, à trois points donnés A, B, C, ces droites soient entre elles dans un rapport donné.

(*Pl.* III, *Fig.* 8). Des trois points donnés, joignez-en deux, par exemple A et C, par une droite AC, et du troisième point B, ainsi que du point cherché D, abaissez des perpendiculaires BE et DF sur la droite AC. Faites $AE=a$, $AC=b$, $EB=c$, $AF=x$, et $FD=y$. Et vous aurez, $\overline{AD}^2 = x^2+y^2$; $FC=b-x$;

$\overline{CD}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$. $EF = x - a$, et $\overline{BD}^2 = \overline{EF}^2 + (EB + FD)^2$. (*) $= x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2$. Maintenant comme AD et CD sont en raison donnée, soit cette raison, celle de d à e, et on aura, $CD = \frac{e}{d}\sqrt{x^2+y^2}$. Et puisque AD est aussi à BD en raison donnée, soit cette raison, celle de d à f, et on aura, $BD = \frac{f}{d}\sqrt{x^2+y^2}$. Par conséquent $\frac{e^2x^2 + e^2y^2}{d^2} = \overline{CD}^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$; et $\frac{f^2x^2 + f^2y^2}{d^2} = \overline{BD}^2 = x^2 - 2ax + a^2 + c^2 + 2cy + y^2$. Si, pour abréger, on met dans ces équations p au lieu de $\frac{d^2 - e^2}{d}$; et q au lieu de $\frac{d^2 - f^2}{d}$, on aura, $b^2 - 2bx + \frac{px^2}{d} + \frac{p}{d}y^2 = 0$, et ....
$a^2 + c^2 - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}x^2 + \frac{q}{d}y^2 = 0$. De la première on tire, $\frac{2bqx - b^2q}{p} = \frac{q}{d}x^2 + \frac{q}{d}y^2$. Ainsi, en substituant dans la seconde, au lieu de $\frac{q}{d}x^2 + \frac{q}{d}y^2$ sa valeur $\frac{2bqx - b^2q}{p}$, elle deviendra, $\frac{2bqx - b^2q}{p} + a^2 + c^2 - 2ax + 2cy = 0$. Si, pour abréger, on fait encore, $m = a - \frac{bq}{p}$; et $2cn = \frac{b^2q}{p} - a^2 - c^2$, il viendra, $2mx + 2cn = 2cy$. Et en divisant tout par $2c$, l'équation se réduit à $\frac{mx}{c} + n = y$. Substituez donc dans l'équation.........

(*) Il sera très-facile de voir que $\overline{BD}^2 = \overline{EF}^2 + (EB + FD)^2$, si dans la figure on imagine par le point B une parallèle à AC, et qu'on prolonge la perpendiculaire DF jusqu'à la rencontre de cette parallèle; car le prolongement de DF sera égal à BE, et la partie de la parallèle interceptée entre BD et DF prolongée, sera égale à EF.

$b^2 - 2bx + \frac{p}{d}x^2 + \frac{p}{d}y^2 = 0$, à la place de y^2, le quarré de $\frac{mx}{c} + n$, et vous aurez, $b^2 - 2bx + \frac{p}{d}x^2 + \frac{pm^2}{dc^2}.x^2 + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pn^2}{d} = 0$. Si, pour abréger encore, on écrit dans cette équation $\frac{b}{r}$ au lieu de $\frac{p}{d} + \frac{pm^2}{dc^2}$; $\frac{sb}{r}$ au lieu de $b - \frac{pmn}{dc}$, et $\frac{tb^2}{r}$ au lieu de $b^2 + \frac{pn^2}{d}$, on aura, $x^2 = 2sx - tb$. Cette équation étant résolue, donne $x = s \pm \sqrt{s^2 - tb}$. Lorsque x est trouvée, l'équation $\frac{mx}{c} + n = y$, donnera la valeur de y. Et x et y, ou AF et FD étant déterminées, le point cherché D l'est aussi.

PROBLÊME XXVIII.

On veut inscrire une droite DC, d'une longueur donnée, dans une section conique donnée DAC, de manière que cette droite passe par le point G donné de position.

(*Pl.* III, *Fig.* 9). Soit AF l'axe de la courbe. Des points D, G et C abaissez sur cet axe les perpendiculaires DH, GE et CB. Maintenant, pour déterminer la position de la droite DC, on pourrait indifféremment chercher les points C ou D; mais ces deux points ont des rapports si semblables, que l'opération sera toujours la même, soit qu'on veuille les déterminer par le moyen de lignes CG, CB ou AB; soit par le moyen des lignes DG, DH ou AH. En conséquence je ne chercherai ni l'un ni l'autre, mais un troisième point qui ait la même relation avec les deux premiers, et qui les détermine tous les deux à la fois. Et je vois que le point F remplit ces conditions.

Soit donc $AE = a$, $EG = b$, $DC = c$, $FE = z$. Et comme on a d'ailleurs le rapport entre AB et BC par l'équation de la courbe qui est donnée, nous appellerons AB, x; et BC, y; alors FB sera $x - a + z$. On a encore la proportion $GE : EF :: CB : BF$, d'où l'on tire $BF = \frac{yz}{b}$. Cette seconde valeur de BF étant égalée à la première, donne l'équation $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

Cette préparation faite, chassez x par le moyen de l'équation de la courbe. Par exemple, si la section conique est une parabole, dont l'équation est $rx = y^2$, vous aurez, $x = \frac{y^2}{r}$. Cette valeur de x étant substituée dans l'équation précédemment trouvée, nous donnera, $\frac{y^2}{r} - a + z = \frac{yz}{b}$; et en résolvant....................
$y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{r^2z^2}{4b^2} + ar - rz}$, d'où l'on voit que...........
$\sqrt{\frac{r^2z^2}{b^2} + 4ar - 4rz}$ est la différence des deux valeurs de y, (42), c'est-à-dire des lignes $+BC$ et $-DH$. Donc si du point D on mène sur CB la perpendiculaire DK, la ligne CK sera cette différence. Or on a la proportion, $FG : GE :: DC : CK$. Et en mettant les valeurs analytiques, $\sqrt{b^2 + z^2} : b :: c : \sqrt{\frac{r^2z^2}{b^2} + 4ar - 4rz}$. Et en élevant tous les termes de cette proportion au quarré, et égalant ensuite le produit des extrêmes à celui des moyens, et ordonnant, on aura, $z^4 = \frac{4b^2rz^3 \begin{matrix} -4ab^2r \\ -b^2r^2 \end{matrix} \Big\{ z^2 + 4b^4rz \begin{matrix} -4ab^4r \\ +b^4c^2 \end{matrix}}{r^2}$ (*).

(*) Nous donnerons à la fin des notes, une méthode générale et facile de construire les équations des 3[e] et 4[e] degrés, par le moyen d'une parabole donnée et d'un cercle, et de cette manière, nous éviterons une des principales objections

Cette équation n'est que du quatrième degré ; elle aurait été du huitième, si on eût cherché CG, ou CB, ou AB.

PROBLÊME XXIX.

Il faut multiplier ou diviser un angle donné par un nombre donné.

(*Pl.* III, *Fig.* 10). Dans un angle quelconque FAG, inscrivez les lignes AB, BC, CD, DE, etc. toutes d'une même longueur quelconque, et les triangles ABC, BCD, CDE, DEF, etc. seront tous isocèles. Ainsi, par la 32ᵉ prop. du 1ᵉʳ liv. des Élém., on aura l'angle $CBD =$ ang. $A +$ ang. $ACB = 2$ ang. A, et ang. $DCE =$ ang. $A +$ ang. $ADC = 3$ ang. A. Et ang. $EDF =$ ang. $A +$ ang. $AED = 4$ ang. A. Et ang. $FEG =$ ang. $A +$ ang. $AFE = 5$ ang. A, et ainsi de suite. Maintenant, en regardant les droites AB, BC, CD, etc. comme les rayons de cercles égaux, les perpendiculaires BK, CL, DM, etc. abaissées sur AC, BD, CE, etc. seront les sinus de ces angles, et AK, BL, CM, DN en seront les cossinus ; ou bien en regardant AB comme le diamètre, les droites AK, BL, CM, etc. seront les cordes (43). Soient donc $AB = 2r$ et $AK = x$, le reste de l'opération se fait comme il suit :

---

que Newton fait aux constructions de cette espèce, c'est-à-dire, la difficulté de tracer la parabole : car puisque la même parabole peut servir à la construction de toutes les équations du 3ᵉ et du 4ᵉ degrés, il est clair qu'alors on peut bien prendre la peine de la tracer avec exactitude.

$AB : AK :: AC : AL,$

$2r : x :: 2x : \frac{x^2}{r}$. Donc $AL - AB$, ou $\frac{x^2}{r} - 2r = BL$, cossinus du double de l'angle A.

$AB : AK :: AD\,(2AL - AB) : AM,$

$2r : x :: \frac{2x^2}{r} - 2r : \frac{x^3}{r^2} - x$. Donc $AM - AC$, ou $\frac{x^3}{r^2} - 3x = CM$, cossinus du triple de l'ang. A.

$AB : AK :: AE\,(2AM - AC) : AN,$

$2r : x :: \frac{2x^3}{r^2} - 4x : \frac{x^4}{r^3} - \frac{2x^2}{r}$. Donc...... $AN - AD$, ou $\frac{x^4}{r^3} - \frac{4x^2}{r} + 2r = DN$, cossinus du quadruple de l'ang. A.

$AB : AK :: AF\,(2AN - AD) : AO,$

$2r : x :: \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6x^2}{r} + 2r : \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{r^2} + x$. Donc $AO - AE$, ou $\frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{r^2} + 5x = EO$, cossinus du quintuple de l'ang. A.

Et ainsi de suite. Si, au contraire, vous voulez diviser un angle donné en un nombre quelconque de parties, mettez q à la place de BL, CM, DN, etc. et vous aurez $x^2 - 2r^2 = qr$ pour la bisection; $x^3 - 3r^2x = qr^2$ pour la trisection; $x^4 - 4r^2x^2 + 2r^4 = qr^3$ pour la quatrisection; et enfin $x^5 - 5r^2x^3 + 5r^4x = qr^4$ pour la quintisection (44).

PROBLÊME XXX.

Une comète ayant une marche uniforme sur une ligne droite BD, déterminer la position de sa route par trois observations.

(*Pl.* III, *Fig.* 11). Soit l'œil du spectateur placé au point A; soit B le lieu de la comète dans la première observation; C le même lieu dans la seconde, et D dans la troisième : il faudra chercher l'inclinaison de la droite BD sur la droite AB. D'abord les angles BAD, BAC sont connus par les observations, par conséquent si on mène perpendiculairement sur AB la droite BH qui rencontre AC et AD en E et en F, en prenant la droite quelconque AB pour rayon, les lignes BE et BF seront connues, en tant qu'elles sont par rapport au rayon AB, les tangentes des angles connus BAC et BAD. Soit donc $AB = a$, $BE = b$ et $BF = c$. D'ailleurs, par les intervalles des observations, on connaît le rapport de BC à BD; supposons qu'il soit le même que celui de b à e. Menons DG parallèlement à AC, il est clair que BE et BG seront encore dans le même rapport; et que si l'on fait $BE = b$, on aura $BG = e$, ainsi $GF = e - c$. En outre, si on mène DH perpendiculaire à BG, les triangles semblables ABF et DHF semblablement coupés par les droites AE et DG, nous donnent la proportion $FE : AB ::$ $FG : HD$, ou bien $c - b : a :: e - c : \frac{ae - ac}{c - b} = HD$. On a aussi la proportion $FE : FB :: FG : FH$, ou bien........... $c - b : c :: e - c : \frac{ce - c^2}{c - b} = FH$. Ajoutez BF ou c à FH, et vous aurez $BH = \frac{ce - cb}{c - b}$. Ainsi en considérant HD comme le rayon, BH sera la tangente de l'angle HDB, et on aura......

HD

$HD : HB :: 1 :$ tang. HDB, ou $\frac{ae - ac}{c - b} : \frac{ce - cb}{c - b} :: 1 :$ tang. HDB, ou bien $ae - ac : ce - cb :: 1 :$ tang. HDB, d'où..... $a : \frac{c(e-b)}{e-c} :: 1 :$ tang. HDB, ou ABK. Or comme nous avons supposé que a était le rayon, on aura $e - c : e - b :: c :$ tang. ABK, ou bien $GF : GE :: BF$ (tang. de l'ang. BAF) : tang. de l'ang. ABK.

Résumé. La proportion $BC : BD :: BE : BG$ nous fournit cet énoncé : que le temps écoulé entre la première et la seconde observation, est au temps écoulé entre la première et la troisième, comme la tangente de l'angle BAE est à une quatrième proportionnelle BG. Et la proportion, $GF : GE :: BF$ (tang. de l'ang. BAF) : tang. de l'ang. ABK, nous fournit le second énoncé : GF, excès de la quatrième proportionnelle BG sur BF tang. de l'ang. BAF est à GE, excès de cette même quatrième proportionnelle BG sur BE tang. de l'ang. BAE, comme la tangente de l'angle BAF est à la tangente de l'angle ABK.

PROBLÊME XXXI.

Étant donné un point lumineux d'où partent des rayons divergens qui viennent frapper une surface sphérique réfringente, trouver le point de concours de chaque rayon réfracté avec l'axe de la sphère qui passe par le point lumineux.

(*Pl.* III, *Fig.* 12). Soit A le point lumineux, et BV la sphère, dont l'axe passant par le point lumineux, est AD, son centre C, et son sommet V. Soit AB le rayon incident, et BD son réfracté ; soient abaissées les perpendiculaires CE, CF sur ces rayons, et la perpendiculaire BG sur AD; soit encore mené le rayon BC, et faites $AC=a$, VC ou $BC=r$, $CG=x$ (*) et $CD=z$, et vous aurez $AG=a-x$, $BG=\sqrt{r^2-x^2}$, $AB=\sqrt{a^2-2ax+r^2}$. Et à cause des triangles semblables ABG et ACE, on a...... $CE=\frac{a\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{a^2-2ax+r^2}}$. De plus $GD=z+x$; $BD=\sqrt{z^2+2zx+r^2}$. Et à cause des triangles semblables DBG et DCF, on a...... $CF=\frac{z\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{z^2+2zx+r^2}}$. Et comme on connaît le rapport des sinus d'incidence aux sinus de réfraction, et par conséquent, celui de CE à CF, supposons qu'il soit comme celui de a à f, on aura donc... $\frac{fa\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{a^2-2ax+r^2}}=\frac{az\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{z^2+2zx+r^2}}$, et en multipliant en sautoir et divisant par $a\sqrt{r^2-x^2}$, il viendra $f\sqrt{z^2+2zx+r^2}=$.... $z\sqrt{a^2-2ax+r^2}$, et en quarrant et ordonnant............... $z^2=\frac{2f^2xz+f^2r^2}{a^2-2ax+r^2-f^2}$; enfin, au lieu de $\frac{f^2}{a}$, mettez p, et au lieu de $a+\frac{r^2}{a}-p$, mettez q, et vous aurez $z^2=\frac{2pxz+pr^2}{q-2x}$, et en résolvant cette équation, $z=\frac{px+\sqrt{p^2x^2-2pr^2x+pqr^2}}{q-2x}$. Ainsi z est connu; c'est-à-dire que l'on connaît CD, et par conséquent, le point D de concours du rayon réfracté BD avec l'axe ACD.

J'ai supposé ici que les rayons incidens étaient divergens, et

(*) Il est bien important de remarquer que x désigne ici une quantité indéterminée, mais nullement une inconnue, et que du moment où la position du point B sera fixée, x ou CG sera déterminé, il n'y a donc de véritablement inconnue que z ou CD.

passaient dans un milieu plus dense; si au contraire ils étaient convergens et passaient d'un milieu plus dense dans un plus rare, la marche serait encore la même, en ayant égard toutefois à la différence des conditions.

PROBLÊME XXXII.

Un cône étant coupé par un plan quelconque, trouver la figure de la section.

(*Pl.* IV, *Fig.* 1 et 2). Soient, le cône ABC appuyé sur une base circulaire BC; IEM la section cherchée; $KILM$ une autre section quelconque parallèle à la base, et qui rencontre la première section en IH; et ABC une troisième section perpendiculaire aux deux premières, et qui les rencontre, l'une en EH, l'autre en KL, et coupe le cône selon le triangle ABC. Prolongez EH jusqu'à ce qu'elle rencontre AK en un point D, et ayant mené EF et DG parallèles à KL, jusqu'à ce qu'elles rencontrent AB et AC en F et en G, faites $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$, $EH = x$, et $HI = y$. A cause des triangles semblables EHL, EDG, on a la proportion, $ED : DG :: EH : HL = \frac{bx}{c}$. Et à cause des triangles semblables DEF et DHK, on a encore $DE : EF :: DH(c - x)$ pour la première Fig. et ($c + x$ pour la seconde) : $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$. Maintenant, comme la section KIL a été faite parallèle à la base, elle est nécessairement un cercle, et on a, $HK \times HL = \overline{HI}^2$; c'est-à-dire, $\frac{ab}{c} \cdot x \mp \frac{ab}{c^2} \cdot x^2 = y^2$. Cette équation exprime la relation entre EH (x) et HI (y); c'est-à-dire entre l'axe et l'ordonnée de la section $EIDM$; et comme l'équation est celle de l'ellipse pour la première Figure, et celle de l'hyperbole pour la seconde, il s'en suit que la section est une ellipse ou une hyperbole.

Si ED ne peut jamais rencontrer AK, ce qui arrive dans le cas où elle lui est parallèle, alors $HK = EF$ (a), et par conséquent $HK \times HL \left(\frac{ab}{c} . x\right) = y^2$, équation à la parabole.

PROBLÊME XXXIII.

Si une droite XY, éloignée de l'axe AB de la quantité CD, et ayant une inclinaison connue sur le plan DCB, fait une révolution autour de l'axe AB, et que le solide $PQRVTS$ qu'elle engendrera par cette révolution, soit coupé par un plan quelconque $INQLK$; on demande quelle sera la figure de la section.

(*Pl.* IV, *Fig.* 3). Soit BHQ, ou GHO l'inclinaison de l'axe AB sur le plan de la section, et L un point quelconque de rencontre de la droite XY avec ce même plan. Menez DF parallèlement à AB, et du point L abaissez sur AB la perpendiculaire LG; et sur DF la perpendiculaire LF; et sur HO la perpendiculaire LM. Ensuite tirez MG et FG. Faites $CD = a$, $CH = b$, $MH = x$, et $ML = y$. Actuellement, comme l'angle GHO est donné, supposons que $MH : HG :: d : e$, on aura, $HG = \frac{ex}{d}$, et..... $b + \frac{ex}{d} = GC$ ou FD. En outre, à cause de l'angle connu LDF, (l'angle LDF est connu, parce que l'inclinaison de la droite XY sur le plan $GCDF$ est donnée). Supposons que $FD : FL :: g : h$, on aura, $FL = \frac{hb}{g} + \frac{hex}{dg}$. Au quarré de FL ajoutez le quarré de FG, ou celui de DC, ou a^2, et il viendra, $\overline{GL}^2 = a^2 + \frac{b^2h^2}{g^2} + \frac{2beh^2x}{dg^2} + \frac{e^2h^2x^2}{d^2g^2}$. De $\overline{GL}^2$ retranchez $\overline{MG}^2$ ($\overline{MH}^2 - \overline{GH}^2$), ou $x^2 - \frac{e^2x^2}{d^2}$, et il restera, $\frac{a^2g^2 + b^2h^2}{g^2} + \frac{2beh^2}{dg^2} \cdot x + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\left(\frac{h^2e^2 - d^2g^2 + e^2g^2}{d^2g^2}\right)x^2 = \overline{ML}^2 = y^2$. Équation qui exprime le rapport de x à y, c'est-à-dire, le rapport de l'axe MH de la section à l'ordonnée ML. Et comme x et y ne montent pas dans cette équation au-delà de deux dimensions, il s'en suit que $INQLK$ est une section conique. Ce sera une ellipse, si l'angle MHG est plus grand que l'angle LDF; si au contraire il est plus petit, ce sera une hyperbole; et s'il lui est égal, ce sera une parabole; et si les deux points C et H se confondent, la section sera un parallélogramme. (45).

PROBLÊME XXXIV.

Si on élève sur une droite AF une perpendiculaire AD d'une longueur donnée, et qu'une jambe ED de l'équerre DEF passe sans cesse par le point D, tandis que l'autre jambe EF, égale à AD, glisse sur AF, il s'agit de trouver la courbe HIC que décrira pendant ce mouvement le point C, milieu de la droite EF.

(*Pl.* IV, *Fig.* 4). Soient, EC ou $CF = a$, la perpendiculaire $CB = y$, et $AB = x$. A cause des triangles semblables FBC, FEG, on aura, $BF(\sqrt{a^2 - y^2}) : BC + CF(y + a) :: EF(2a) : EG + GF(AG + GF)$ ou AF. Ainsi, $\frac{2ay + 2a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} = AF = AB +$

$BF = x + \sqrt{a^2 - y^2}$. Et en multipliant chaque membre par $\sqrt{a^2 - y^2}$, on a, $2ay + 2a^2 = a^2 - y^2 + x\sqrt{a^2 - y^2}$, ou bien, $2ay + a^2 + y^2 = x\sqrt{a^2 - y^2}$. Et en divisant chaque membre par $\sqrt{a+y}$, ensuite quarrant et ordonnant, on a, (46)..........

$$y^3 + 3ay^2 \begin{matrix} +3a^2 \\ +x^2 \end{matrix} \left\{ y \begin{matrix} +a^3 \\ -ax^2 \end{matrix} \right. = 0.$$

Le même d'une autre manière.

(*Pl.* IV, *Fig.* 5). Prolongez BC de part et d'autre, en faisant BI et CK égales à CF, et menez KF, HI, HC et DF. Les droites HC et DF rencontreront AF et KI en M et en N. Ensuite du point I abaissez sur HC la perpendiculaire IL, et vous aurez l'angle $K = \frac{1}{2}BCF = \frac{1}{2}FGE = GFD = AMH = MHI = CIL$. (47). Ainsi les triangles rectangles KBF, FBN, HLI et ILC sont semblables. Faites donc $FC = a$, $HI = x$, et $IC = y$, et vous aurez, $BN(2a - y) : BK(y) :: LC : LH :: \overline{CI}^2(y^2) : \overline{HI}^2(x^2)$. (48). Par conséquent $2ax^2 - yx^2 = y^3$. On voit facilement par cette équation, que la courbe dont il s'agit est la cissoïde des anciens; que le cercle dont elle dépend a pour centre le point A, et pour rayon AH. (49).

PROBLÊME XXXV.

Si une droite ED, d'une longueur connue, et soutendant un angle donné EAD, se meut dans cet angle de manière que ses extrémités D et E touchent sans cesse les côtés AD et AE de l'angle; on demande de déterminer l'espèce de courbe FCG que décrit le point C de la droite DE pendant ce mouvement.

(*Pl.* IV, *Fig.* 6). Du point donné C menez à EA la parallèle CB; et faites $AB = x$, $BC = y$, $CE = a$, $CD = b$; et à cause des triangles semblables DCB, DEA, on a, $EC : AB :: CD : DB$, c'est-à-dire, $a : x :: b : BD = \frac{bx}{a}$. Qu'on abaisse ensuite la perpendiculaire CH, et à cause de l'angle donné DAE ou DBC, on connaîtra le rapport des côtés du triangle rectangle BCH. Soit donc $BC : BH :: a : e$, d'où $BH = \frac{ey}{a}$. Et en retranchant BH de BD, le reste est $DH = \frac{bx - ey}{a}$. Maintenant, dans le triangle rectangle BCH, on a, $\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{CH}^2$, ou bien.......... $y^2 - \frac{e^2y^2}{a^2} = \overline{CH}^2$. De même dans le triangle rectangle CHD, on a, $\overline{CD}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{HD}^2$, ou bien, $b^2 - y^2 + \frac{e^2y^2}{a^2} = \overline{DH}^2 = \ldots$ $\left(\frac{bx - ey}{a}\right)^2 = \frac{b^2x^2 - 2bexy + e^2y^2}{a^2}$, et en réduisant........... $y^2 = \frac{2be}{a^2} \cdot yx + \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$; et comme dans cette équation les inconnues sont seulement de deux dimensions, il est évident que la courbe ne peut être qu'une section conique. Si on dégage la valeur de y, on a, $y = \frac{bex \pm b\sqrt{ex^2 - a^2x^2 + a^4}}{a^2}$. On voit que le coëfficient de x^2 sous le radical est $e^2 - a^2$, et comme on a, $a : e :: BC : BH$, et que BC est nécessairement plus grande que BH, puisqu'elle est hypothénuse d'un triangle rectangle dont BH est un côté, il s'en suit que a est plus grand que e, et que par conséquent $e^2 - a^2$ est une quantité négative; donc la courbe est une ellipse. (50).

PROBLÊME XXXVI.

Si une équerre EBD se meut de manière qu'une de ses jambes EB ne cesse pas d'être la soutendante de l'angle droit EAB, tandis que l'extrémité D de l'autre jambe BD décrit une courbe FDG, on demande de déterminer cette courbe.

(*Pl.* IV, *Fig.* 7). Du point D abaissez la perpendiculaire DC sur le côté AC; et ayant fait $AC = x$, $DC = y$, $EB = a$, et $BD = b$, vous aurez, à cause du triangle BDC rectangle en C, $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DC}^2 = b^2 - y^2$. Donc $BC = \sqrt{b^2 - y^2}$, et...... $AB = x - \sqrt{b^2 - y^2}$. En outre, à cause des triangles rectangles semblables BEA, DBC, on a, $BD : DC :: BE : AB$, ou bien, $b : y :: a : x - \sqrt{b^2 - y^2}$. Donc, $bx - b\sqrt{b^2 - y^2} = ay$, ou bien, $bx - ay = b\sqrt{b^2 - y^2}$, et en élevant chaque membre au quarré, et réduisant, $y^2 = \frac{2abxy + b^4 - b^2x^2}{a^2 + b^2}$, et en résolvant cette dernière équation, on a enfin, $y = \frac{abx \pm b^2\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{a^2 + b^2}$. Par où l'on voit que la courbe est encore une ellipse. (*).

(*) J'ai déjà indiqué dans la note 50e sur le problême précédent les

(*Pl.* IV,

(*Pl.* IV, *Fig.* 8). On vient de voir comment se détermine la nature de la courbe lorsque EBD et EAB sont droits. Mais si ces angles sont d'une grandeur quelconque, pourvu qu'ils soient égaux, voici comment il faut procéder. Abaissez, comme auparavant, sur AC la perpendiculaire DC, et menez DH de manière qu'elle fasse un angle DHA égal à l'angle HAE, c'est-à-dire obtus. Et continuant à appeler EB, a; BD, b; AH, x; faites $HD = y$. Et à cause des triangles semblables EAB, BHD, vous aurez, $BD : DH :: BE : AB$, ou, $b : y :: a : AB = \frac{ay}{b}$; retranchez AB de AH, et le reste sera, $BH = x - \frac{ay}{b}$. Maintenant, comme tous les angles sont connus dans le triangle DHC,

---

caractères auxquels on reconnaît qu'une équation du second degré appartient à l'ellipse. En général une équation du second degré à deux variables x et y représentant toujours l'une quelconque des sections coniques, si vous voulez savoir à laquelle elle appartient, examinez si le quarré du coëfficient du terme xy moins le quadruple du produit des coëfficiens des deux quarrés x^2 et y^2, donne un résultat égal à zéro, ou à une quantité négative, ou à une quantité positive; dans le premier cas, l'équation appartient à une parabole; dans le second, à une ellipse; dans le troisième, à une hyperbole. Consultez là-dessus l'application de l'Algèbre à la Géométrie de Bezout, ou celle du Cn Bossut, *ou l'exposition d'une méthode de construire les équations indéterminées du second degré*, du Cn Prony (je cite les Ouvrages qui me paraissent les meilleurs et les plus répandus). Ainsi, pour savoir à quelle section appartient l'équation.............. $y^2 = \frac{2abxy + b^4 - b^2x^2}{a^2 + b^2}$, je l'écris sous cette forme...................... $(a^2 + b^2)y^2 - 2ab.xy + b^2x^2 - b^4 = 0$, et je fais $(2ab)^2 - 4b^2(a^2 + b^2)$, ce qui donne $4a^2b^2 - 4a^2b^2 - 4b^4$, quantité qui se réduit à $-4b^4$, donc l'équation appartient à l'ellipse.

le rapport des côtés est aussi connu. Supposez donc que HD est à HC dans une raison connue quelconque, par exemple, comme b est à e, et à cause de $DH = y$, vous aurez, $HC = \frac{ey}{b}$, et..... $HB \times HC = \frac{exy}{b} - \frac{aey^2}{b^2}$. Ensuite, par la 12^e prop. du deuxième liv. des Elémens, le triangle BHD donne, $\overline{BD}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{DH}^2 + 2BH \times HC$, ou bien, $b^2 = x^2 - \frac{2axy}{b} + \frac{a^2y^2}{b^2} + y^2 + \frac{2exy}{b} - \frac{2aey^2}{b^2}$, et en tirant de cette équation la valeur de x, il vient, $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{e^2y^2 - b^2y^2 + b^4}}{b}$, et comme b est plus grand que e, $e^2 - b^2$ est une quantité négative; il est donc évident que la courbe est encore une ellipse.

PROBLÊME XXXVII.

Les droites PD et BD dont la raison est donnée, étant menées, comme on voudra, dans l'angle connu PAB, avec la condition que BD soit toujours parallèle à AP, et que PD se termine toujours au point P donné de position sur la droite AP; on demande de trouver le lieu du point D, intersection des deux droites.

(*Pl.* IV, *Fig.* 9). Menez CD parallèlement à AB, et DE perpendiculairement à AP; ensuite faites $AP = a$, $CP = x$, et $CD = y$; soit de plus le rapport de BD à DP, comme celui de d à e, et vous aurez, AC ou $BD = a - x$, et $PD = \frac{ea - ex}{d}$. Soit en outre, à cause de l'angle donné DCE, le rapport de CD à CE, comme celui de d à f, ce qui donnera, $CE = \frac{fy}{d}$, d'où

$EP = x - \frac{fy}{d}$. Et comme les angles en E sont droits...... $\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{DP}^2 - \overline{EP}^2$. Ou en mettant les valeurs analytiques, $y^2 - \frac{f^2y^2}{d^2} = \frac{e^2a^2 - 2ae^2x + e^2x^2}{d^2} - x^2 + \frac{2fxy}{d} - \frac{f^2y^2}{d^2}$. Et en effaçant de part et d'autre, $-\frac{f^2y^2}{d^2}$, et ordonnant, il vient, $y^2 = \frac{2fxy}{d} + \frac{e^2a^2 - 2e^2ax + e^2x^2 - d^2x^2}{d^2}$, et en résolvant l'équation pour avoir la valeur de y, $y = \frac{fx \pm \sqrt{e^2a^2 - 2e^2ax \left.\begin{matrix} +e^2 \\ -d^2 \\ +f^2 \end{matrix}\right\} x^2}}{d}$.
Or comme dans l'avant-dernière équation les inconnues x et y ne s'élèvent pas au-delà de deux dimensions, il s'en suit que le lieu du point D est à une section conique, et que cette section est une hyperbole, ou une ellipse, ou une parabole, selon que $e^2 - d^2 + f^2$, coëfficient de x^2 dans la dernière équation, est plus grand ou plus petit que zéro, ou lui est égal.

PROBLÊME XXXVIII.

Si les deux droites VE et VC données de position, sont coupées d'une manière quelconque en C et en E, par une droite PE tournant sur le point P donné de position, et si la portion interceptée CE de cette droite est coupée en deux parties CD et DE en raison donnée ; on demande de trouver le lieu du point D.

(*Pl.* V, *Fig.* 1). Tirez VP, et parallèlement à cette droite menez DA et EB, qui rencontreront VC en A et en B. Faites $VP = a$, $VA = x$ et $AD = y$, et comme le rapport de CD à DE est donné, il s'en suit que le rapport de CD à CE est aussi connu, et par conséquent celui de DA à EB. Soit donc ce rapport comme celui de d à e, et on aura, $EB = \frac{ey}{d}$. En outre, comme l'angle EVB est donné, la raison de EB à VB l'est aussi. Soit cette raison comme celle de e à f, et on aura, $VB = \frac{fy}{d}$. Enfin, à cause des triangles semblables CEB, CDA, CPV, on a cette suite de rapports égaux, $EB : CB :: DA : CA :: VP : VC$; et en ajoutant, $EB + VP : CB + VC :: DA + VP : CA + VC$, c'est-à-dire, $\frac{ey}{d} + a : \frac{fy}{d} :: y + a : x$; et en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura, $exy + adx = fy^2 + fay$. Equation où les quantités inconnues x et y ne s'élèvent qu'à deux dimensions. Il s'en suit donc que la courbe VD, dans laquelle se trouve le point D, est une section conique; et c'est une hyperbole, parce que l'une des deux indéfinies x n'est que d'une dimension, et que dans le terme exy elle se trouve multipliée par l'autre indéfinie y (*).

(*) On voit par ce qui a été dit dans la note qui est au bas de la page 184, que l'équation $exy + adx = fy^2 + fay$, appartient à l'hyperbole. En effet, écrivons-la ainsi : $fy^2 - exy + fay - adx = 0$. Comme x^2 ne se trouve pas dans cette équation, il est censé multiplié par zéro ; la formule, pour reconnaître le caractère de la courbe, devient donc, $e^2 - 4f \times 0$, qui se réduit à e^2, quantité toujours positive : donc la section est une hyperbole.

PROBLÊME XXXIX.

Si de deux points donnés de position A et B, on mène à un troisième point quelconque C deux droites AC, BC qui soient entre elles dans un rapport quelconque, on demande de trouver le lieu du point de concours C.

(*Pl.* V, *Fig.* 2). Joignez les points A et B, et sur la droite AB, abaissez la perpendiculaire CD; faites $AB = a$, $DC = y$ et $AD = x$, vous aurez $AC = \sqrt{x^2 + y^2}$; $BD = a - x$, et..... $BC = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$. Maintenant, le rapport de AC à BC étant donné, supposons qu'il soit comme celui de d à e; la proportion étant faite, et ensuite le produit des extrêmes et celui des moyens, nous aurons, $e\sqrt{x^2 + y^2} = d\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2}$, ce qui donne en résolvant, $y = \sqrt{\frac{d^2 a^2 - 2 d^2 a x}{e^2 - d^2} - x^2}$, équation où l'on voit que x^2 est négative, et n'a de coëfficient que l'unité, et comme de plus l'angle ADC est droit, il s'en suit que la courbe où sont les lieux du point C est un cercle; et si l'on prend sur la droite AB les points E et F, de manière qu'on ait la proportion $d : e :: AE : BE :: AF : BF$, la droite EF sera le diamètre du cercle (51).

Il est facile de voir par la converse de ce théorême, que si l'on prolonge jusqu'à l'infini le diamètre EF d'un cercle quelconque, et que sur ce diamètre ainsi prolongé, on prenne deux points A et B tels, qu'on ait toujours $AE : AF :: BE : BF$, et que de ces deux points on mène à un même point C de la circonférence du cercle les droites AC, BC, elles seront dans le même rapport que AE et BE.

PROBLÈME XL.

Si un point lumineux A envoie des rayons vers une surface plane réfringente CD, on demande de trouver le rayon AC, dont le réfracté CB, irait frapper le point B.

(*Pl.* V, *Fig.* 3). Du point lumineux menez une perpendiculaire AD sur la surface réfringente : cette perpendiculaire étant prolongée de part et d'autre, rencontrera en E le rayon réfracté BC, et en F la perpendiculaire abaissée du point B. Tirez BC, et faites $AD = a$, $DB = b$, $DC = x$ et $BF = c$; supposez de plus le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, ou ce qui est la même chose, du sinus de l'angle CAD, au sinus de l'angle CED, comme $d : e$; mais EC et AC sont aussi dans le même rapport; et de plus, AC étant égal à $\sqrt{a^2 + x^2}$, il en résulte que $EC = \frac{d}{e}\sqrt{a^2 + x^2}$. Outre cela, $ED = \sqrt{\overline{EC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{\frac{d^2 a^2 + d^2 x^2}{e^2} - x^2}$; et........ $DF = \sqrt{b^2 - c^2}$; par conséquent, $EF = \sqrt{b^2 - c^2} + \sqrt{\frac{d^2 a^2 + d^2 x^2}{e^2} - x^2}$. Enfin à cause des triangles semblables ECD, EBF, on a, $ED : DC :: EF : FB$, et en substituant à la place de ces quantités leurs valeurs analytiques, et faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on a,
$c\sqrt{\frac{d^2 a^2 + d^2 x^2}{e^2} - x^2} = x\sqrt{b^2 - c^2} + x\sqrt{\frac{d^2 a^2 + d^2 x^2}{e^2} - x^2}$, ou bien $(c - x)\sqrt{\frac{d^2 a^2 + d^2 x^2}{e^2} - x^2} = x\sqrt{b^2 - c^2}$, et en quarrant

chaque membre et ordonnant..................................

$$x^4 - 2cx^3 + \frac{\left.\begin{matrix} d^2c^2 \\ +d^2a^2 \\ -e^2b^2 \end{matrix}\right\} x^2 - 2d^2a^2cx + d^2a^2c^2}{d^2 - e^2} = 0 \ (*).$$

PROBLÊME XLI.

Trouver le lieu du sommet D d'un triangle dont la base AB est donnée, et dont les deux angles DAB, DBA sur cette base, ont une différence donnée.

(*Pl.* V, *Fig.* 4). Lorsque l'angle du sommet est donné, ou ce qui est la même chose, lorsque la somme des deux angles sur la base est donnée, Euclide a démontré (liv. III, prop. 29) que l'angle du sommet était dans une circonférence de cercle. Nous demandons ici, de trouver le lieu de l'angle du sommet, lorsque la différence des angles sur la base est donnée. Soit l'angle DBA plus grand que l'angle DAB, et soit l'angle ABF leur différence; la droite BF rencontrant AD en F. De plus, du point D soient abaissées sur BF et AB les perpendiculaires DE et DC; cette dernière rencontrera BF en un point G. Je fais $AB = a$, $AC = x$, $CD = y$, ainsi j'aurai $BC = a - x$. Actuellement dans le triangle BCG tous les angles étant connus, on a le rapport des côtés BC et CG; soit ce rapport comme celui de d à a, et il viendra $CG = \frac{a^2 - ax}{d}$. De DC ou y retranchez CG, le reste sera $DC - CG$ ou.....

(*) Le lecteur trouvera au dernier chapitre de cet Ouvrage une méthode générale de construire les équations du troisième et du quatrième degrés; il pourra aussi consulter le supplément qui se trouve à la fin des notes.

$DG = \frac{dy - a^2 + ax}{d}$. En outre, à cause des triangles semblables BGC, DGE, on a, $BG : BC :: DG : DE$. Or, dans le triangle BGC, on a, $a : d :: GC : BC$. Donc $a^2 : d^2 :: \overline{GC}^2 : \overline{BC}^2$, et en composant, $a^2 + d^2 : d^2 :: \overline{BG}^2 : \overline{BC}^2$, et en tirant les racines, $\sqrt{a^2 + d^2} : d :: BG : BC :: DG : DE$. Donc $DE = \frac{d \,.\, DG}{\sqrt{a^2 + d^2}}$, ou en mettant pour DG sa valeur trouvée plus haut, on a:..... $DE = \frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}$. D'un autre côté, comme l'angle ABF est la différence des angles BAD et ABD, et que par conséquent, BAD et FBD sont égaux, il en résulte que les triangles rectangles DCA, DBE sont semblables, et leurs côtés proportionnels. Donc $DA : DC :: DB : DE$; mais $DC = y$, $DA = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{DC}^2} = \ldots\ldots$ $\sqrt{x^2 + y^2}$, $DB = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}$, et nous avons trouvé plus haut que la valeur de DE était......... $\frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}$; ainsi notre proportion devient.................... $\sqrt{x^2 + y^2} : y :: \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2} : \frac{dy - a^2 + ax}{\sqrt{a^2 + d^2}}$, et en faisant le produit des extrêmes, et celui des moyens, et quarrant chaque membre de l'équation, on aura, $a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 + y^4 =$

$$\frac{d^2x^2y^2 + d^2y^4 - 2a^2dx^2y - 2a^2dy^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4x^2 + a^4y^2 - 2a^3x^3 - 2a^3xy^2 + a^2x^4 + a^2x^2y^2}{a^2 + d^2}.$$

Multipliez chaque membre par $a^2 + d^2$, ordonnez les produits selon les puissances de x, et il viendra..........................

$$x^4 \begin{matrix} -2a \\ +\frac{2dy}{a} \end{matrix} \left\{ x^3 \begin{matrix} -2dy \\ +a^2 \end{matrix} \left\{ x^2 \begin{matrix} +\frac{2dy^3}{a} \\ +\frac{2d^2y^2}{a} \end{matrix} \right\} x \begin{matrix} -d^2y^2 \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{matrix} \right. \right. = 0.$$ Cette équation

est

est divisible par $x^2 - ax \begin{array}{l} + dy \\ + y^2 \end{array} = 0$, et donne pour quotient...

$x^2 \begin{array}{l} - a \\ + \frac{2dy}{a} \end{array} \Big\{ x \begin{array}{l} - y^2 \\ - dy \end{array} = 0$. Ainsi nous avons trouvé pour la solution de ce problême deux équations : la première, $x^2 - ax \begin{array}{l} + dy \\ + y^2 \end{array} = 0$, nous fait voir que le lieu du point D est dans la circonférence d'un cercle, lorsque l'angle DBF est situé d'une autre manière qu'il ne l'est dans notre figure. Par exemple, lorsque l'angle ABF, au lieu d'être comme dans le problême, égal à la différence des angles sur la base, est égal à leur somme. Il est clair que dans ce cas l'angle D est donné (52). La deuxième équation $x^2 \begin{array}{l} - a \\ + \frac{2dy}{a} \end{array} \Big\{ x \begin{array}{l} - y^2 \\ - dy \end{array} = 0$ appartient à l'hyperbole. C'est l'équation qui a lieu dans le cas de notre Figure ; c'est-à-dire, que dans le cas où l'angle FBD est situé comme nous l'avons supposé, et que l'angle ABF est la différence des angles sur la base, le lieu du point D est dans une hyperbole. Et voici de quelle manière on déterminera cette courbe : coupez AB en deux parties égales en P, menez PQ de manière qu'elle fasse un angle BPQ égal à la moitié de l'angle ABF; par le point P, menez PR perpendiculairement à PQ, et les deux droites PQ et PR seront les asymptotes, et le point B un des points de l'hyperbole (53). De-là on tire ce théorême :

Si dans une hyperbole rectangulaire on mène un diamètre quelconque AB, et que des extrémités de ce diamètre on tire à deux points quelconques D et H de la courbe, des droites AD, BD;

AH, BH, ces droites formeront, aux extrémités du diamètre, des angles DAH, DBH égaux.

Le même d'une manière plus courte.

J'ai donné, dans le problême XXIV, une règle sur la manière de choisir les termes les plus propres à commencer le calcul, toutes les fois qu'il y a ambigüité. Par exemple, dans le problême actuel la différence des angles sur la base n'est pas une condition assez distincte. En effet, je l'ai retranchée du plus grand, mais je pouvais également l'ajouter au plus petit, en menant par le point A une droite parallèlement à BF. Cette différence se comporte donc de la même manière à l'égard des deux angles. Je ne l'emploierai donc ni par addition, ni par soustraction; mais prenant sa moitié, je l'ajouterai à l'un et la retrancherai de l'autre. Ensuite, comme on trouve encore ambigüité en prenant pour abscisse soit BC, soit AC, je n'emploierai ni l'une ni l'autre; mais coupant BA en deux parties égales en P, je prendrai pour abscisse PC; ou plutôt menant MPQ (*Pl.* V, *Fig.* 5) qui fera de part et d'autre les angles APQ, BPM égaux chacun à la moitié de la différence des angles sur la base, cette droite MPQ fera de plus, avec les droites DA, DM, les angles DQP, DMP égaux. (54). Je mène sur MQ les perpendiculaires AR, BN, DO. Je prends DO pour l'ordonnée, et PO pour l'abscisse. Je fais donc $PO = x$, $DO = y$, AR ou $BN = b$, et PR ou $PN = c$, et à cause des triangles semblables BNM, DOM, on aura, $BN : DO :: MN : MO$. Et en retranchant, $DO - BN(y - b) : DO(y) :: MO - MN$ ou...... $ON(c - x) : MO = \frac{cy - xy}{y - b}$. De même, à cause des triangles semblables ARQ, DOQ, on a, $AR : DO :: RQ : QO$, et en ajoutant, $DO + AR\ (y + b) : DO\ (y) :: QO + QR\ (OR$ ou $x + c) : QO = \frac{cy + xy}{y + b}$. Enfin, à cause des angles égaux DMQ, DQM, on a, $MO = QO$, et par conséquent, $\frac{cy - xy}{y - b} = \frac{cy + xy}{y + b}$; divisant tout par y, et multipliant par les dénominateurs, il viendra, $cy + cb - xy - bx = cy - cb + xy - bx$. Ou bien, $cb = xy$, équation très-connue de l'hyperbole rapportée aux asymptotes.

Il eût été même facile de déterminer le lieu du point D sans aucun calcul algébrique. En effet nous avons trouvé plus haut $DO - BN : ON :: DO : MO\ (OQ) :: DO + AR : OR$. C'est-à-dire, $DO - BN : DO + BN :: ON : OR$. Et en ajoutant, et retranchant les termes de chaque rapport.................... $DO : BN :: \frac{ON + OR}{2}\ (NP) : \frac{OR - ON}{2}\ (OP)$. D'où l'on tire, $DO \times OP = BN \times NP$. (55).

PROBLÊME XLII.

Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base est donnée, et dont les deux angles sur cette base sont tels, que l'un est plus grand que le double de l'autre, d'un angle donné.

(*Pl.* V, *Fig.* 5). Soient, ABD ce triangle, AB sa base coupée en deux parties égales au point P, APQ ou BPM le tiers de l'angle donné, c'est-à-dire le tiers de l'angle qui est égal à l'excès de DBA sur le double de DAB; et l'angle DMQ sera double de DQM. (56). Menez à MQ les perpendiculaires AR, BN, DO;

coupez en deux parties égales l'angle DMQ, par la droite MS qui rencontrera DO en S, et les triangles rectangles DOQ, SOM seront semblables; ainsi vous aurez, $OQ : OM :: DO : OS$. Et en soustrayant, $OQ - OM : OM :: DO - OS : OS :: DS : OS :: DM : OM$. (57). Donc $OQ - OM : OM :: DM : OM$, donc $OQ - OM = DM$. Actuellement, faites $PO = x$, $OD = y$, AR ou $BN = b$, et PR ou $PN = c$, et vous aurez, comme dans le problême précédent, $OM = \frac{cy - xy}{y - b}$, et $OQ = \frac{cy + xy}{y + b}$. Par conséquent, $OQ - OM = \frac{-2bcy + 2xy^2}{y^2 - b^2}$. D'un autre côté, $\overline{DO}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{DM}^2$, ou bien, $y^2 + \frac{c^2y^2 - 2cxy^2 + x^2y^2}{y^2 - 2by + b^2} = \ldots\ldots$ $\frac{4b^2c^2y^2 - 8bcxy^3 + 4x^2y^4}{y^4 - 2b^2y^2 + b^4}$. (*). Et en réduisant et ordonnant, par rapport à y, on aura, $y^4 * \left.\begin{matrix} + c^2 \\ - 2b^2 \\ - 2cx \\ - 3x^2 \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} + 2bx^2 \\ + 4bcx \\ + 2bc^2 \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} + b^4 \\ - 3b^2c^2 \\ - 2b^2cx \\ + b^2x^2 \end{matrix} = 0$. Et en divisant toute l'équation par $y - b$, elle deviendra, ...

$$y^3 + by^2 \left.\begin{matrix} - b^2 \\ + c^2 \\ - 2cx \\ - 3x^2 \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} - b^3 \\ + 3bc^2 \\ + 2bcx \\ - bx^2 \end{matrix} = 0.$$

Ainsi le point D est à une courbe de trois dimensions, qui devient cependant une hyperbole, lorsque

---

(*) Le premier membre de cette équation provient de la substitution des valeurs analytiques dans l'équat. $\overline{DO}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{DM}^2$. Quant au second membre, nous avons vu plus haut que $OQ - OM = DM$. Donc .... $(OQ - OM)^2 = \left(\frac{-2bcy + 2xy^2}{y^2 - b^2}\right)^2 = \overline{DM}^2$, et c'est-là le second membre de l'équation.

l'angle BPM est nul, c'est-à-dire lorsque l'un des deux angles sur la base DBA, par exemple, est simplement double de l'autre DAB. (58). Car alors BN ou b s'évanouit, et l'équation se réduit à $y^2 = 3x^2 + 2cx - c^2$.

De la construction de cette équation, on déduit le théorême suivant.

(*Pl.* V, *Fig.* 6). Si on prend C pour centre, et pour asymptotes les droites CS, CT, qui forment un angle SCT de 120°, et qu'on décrive une hyperbole DV dont les demi-axes soient CV, CA; qu'on prolonge CV jusqu'en B, de manière que $VB = VC$; et que des points A et B on tire les droites BD, AD qui aillent concourir en un point D quelconque de l'hyperbole, on aura l'angle $BAD = \frac{1}{2} ABD$; et $BAD = \frac{1}{3} ADE$. C'est-à-dire que BAD égale le tiers de l'angle formé par AD, et par le prolongement de BD. Ce résultat n'a lieu que pour les points D de l'hyperbole qui passe par le point V; car si des points A et B on mène à l'hyperbole conjuguée qui passe par A, les droites Bd, Ad, alors des deux angles extérieurs au triangle sur la base, celui qui est en B est double de celui qui est en A (59).

PROBLÊME XLIII.

Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et touche une droite donnée de position.

(*Pl.* V, *Fig.* 7). Soient A et B les points donnés, et EF la droite donnée de position. On demande de faire passer un cercle ABE par ces points, et qui touche en même temps la droite EF. Joignez A et B par une droite AB que vous couperez en deux parties égales au point D; par ce point élevez sur AB la perpendiculaire DF, qui rencontrera la droite EF en un point F, et le centre du cercle se trouvera sur quelque point de DF, supposons qu'il soit en C. Joignez C et B par une droite; du point C abaissez sur FE la perpendiculaire CE, et E sera le point de tangence de la droite EF et du cercle, et les droites CB, CE seront égales entre elles, comme étant chacune un rayon du cercle cherché. Maintenant les points A, B, D et F étant donnés ou connus, faites $DB = a$, $DF = b$; et pour déterminer le centre du cercle, cherchez DC que vous appellerez x. Dans le triangle CDB, à cause de l'angle droit en D, vous aurez, $\sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{CD}^2}$, ou $\sqrt{a^2 + x^2} = CB$. De plus, $DF - DC$, ou $b - x = CF$. Et dans le triangle rectangle CFE, tous les angles étant connus, le rapport des côtés CF et CE est aussi connu. Soit ce rapport celui de d à e, on aura, $CE = \frac{e}{d} \times CF$, ou $CE = \frac{be - ex}{d}$. Et en égalant entre elles les droites CB et CE, comme étant chacune le rayon du cercle cherché, il viendra l'équation $\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{be - ex}{d}$. Quarrant chaque membre, et multipliant par d^2, on aura, $a^2 d^2 + d^2 x^2 = b^2 e^2 - 2 b e^2 x + e^2 x^2$, ou, en résolvant cette équation,........ $x = \frac{-be^2 + d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2}$. (60). On connaît donc la longueur de DC, et par conséquent le centre C; ainsi, que du point C, et avec une ouverture de compas égale à CB, on décrive un cercle, il passera par les points A et B, et touchera la droite FE.

PROBLÊME XLIV.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux droites données de position.

(*Pl.* V, *Fig.* 8). Soient, A le point donné, EF, FG les deux droites données de position, et AEG le cercle cherché qui touche les deux droites, et passe par le point donné A. Partagez par la moitié l'angle EFG, par la droite FC; le centre du cercle se trouvera sur cette droite. Soit le point C ce centre, duquel vous abaisserez sur EF et FG les perpendiculaires CE, CG, et les points E et G seront les points de contingence. Actuellement comme les triangles CEF, CGF ont leurs angles en E et en G droits, et que leurs angles en F sont chacun la moitié de l'angle total EFG, il s'en suit que tous les angles de ces deux triangles sont connus, et par conséquent aussi le rapport des côtés CF et CE ou CG. Soit ce rapport, celui de d à e. Alors, si pour déterminer le centre du cercle, on fait $CF = x$, on aura, CE, ou $CG = \frac{ex}{d}$. En outre, du point A menez sur la droite FC la perpendiculaire AH; et puisque le point A est donné, les droites AH et FH seront aussi données. Appelez respectivement ces deux droites a et b; et de FH, ou b, si vous retranchez FC, ou x, il restera $CH = b - x$; et si au quarré de ce reste $b^2 - 2bx + x^2$, vous ajoutez le quarré de AH, ou a^2, vous aurez, par la quarante-septième proposition du premier livre des Élémens, $\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$, ou $a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \overline{AC}^2$, puisque par hypothèse l'angle AHC est droit. Egalez maintenant entre elles les valeurs des deux rayons AC et CG, ou les quarrés de ces mêmes valeurs, et vous aurez l'équation, $a^2 + b^2 - 2bx + x^2 = \frac{e^2 x^2}{d^2}$. Retranchez de part et d'autre x^2, et changez tous les signes, il viendra, $-a^2 - b^2 + 2bx = x^2 - \frac{e^2 x^2}{d^2}$. Multipliez tout par d^2, ensuite divisez tout par $d^2 - e^2$, et vous obtiendrez, $x^2 - \frac{2bd^2 x}{d^2 - e^2} = - \frac{d^2(a^2 + b^2)}{d^2 - e^2}$, et en résolvant..... $x = \frac{bd^2 - d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2}$. On connaît donc maintenant la longueur de FC, et par conséquent la position du point C qui est le centre du cercle cherché. Si on retranche la valeur de x, ou FC de b, ou HF, il restera, $HC = \frac{-e^2 b + d\sqrt{b^2 e^2 + a^2 e^2 - a^2 d^2}}{d^2 - e^2}$. Equation absolument la même que celle que nous avons trouvée dans le problême précédent pour déterminer la longueur de DC.

PROBLÊME XLV.

Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et touche un autre cercle donné de position.

(*Pl.* VI, *Fig.* 1). Soient A, B, les deux points donnés; EK le cercle donné de grandeur et de position; F son centre; AEB le cercle cherché, passant par les points A et B, et touchant l'autre cercle; et enfin C le centre du cercle cherché. Ayant tiré par les points A et B une droite indéfinie, des centres C et F abaissez sur cette droite les perpendiculaires CD, FG; ensuite unissez les centres par une droite CF qui passera par le point de contact E des deux cercles. Tirez encore FH parallèlement à DG, et qui rencontrera

CD

CD en H. Toutes ces constructions étant faites, appelez AD, ou DB, a; DG, ou HF, b; FG, c; et EF (rayon du cercle donné) d; faites aussi $DC = x$, et vous aurez $CH = CD - FG = x - c$, et $\overline{CF}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{FH}^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2$; et $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = x^2 + a^2$. Ainsi CB, ou $CE = \sqrt{x^2 + a^2}$. A CE ajoutez EF, et vous aurez, $CF = d + \sqrt{x^2 + a^2}$, dont le quarré est......... $d^2 + 2d\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 + x^2$. Égalez cette valeur de $\overline{CF}^2$ à celle qui a déja été trouvée, c'est-à-dire à $x^2 - 2cx + c^2 + b^2$, et ôtant x^2 qui se trouve dans les deux membres, le reste sera, $d^2 + a^2 + 2d\sqrt{x^2 + a^2} = c^2 + b^2 - 2cx$. Transportez dans le second membre, avec un signe contraire, $a^2 + d^2$, et l'équation deviendra, $2d\sqrt{a^2 + x^2} = c^2 + b^2 - a^2 - d^2 - 2cx$. Faites, pour abréger, $c^2 + b^2 - d^2 - a^2 = 2g^2$, et l'équation sera réduite à......... $2d\sqrt{a^2 + x^2} = 2g^2 - 2cx$, ou, en divisant tout par 2, à.... $d\sqrt{a^2 + x^2} = g^2 - cx$, ce qui donne, en quarrant chaque membre, $d^2a^2 + d^2x^2 = g^4 - 2g^2cx + c^2x^2$. Cette équation étant résolue, donne, $x = \frac{-g^2c + \sqrt{g^4d^2 - d^4a^2 + d^2a^2c^2}}{d^2 - c^2}$.

Connaissant x, ou DC de cette manière, coupez la droite AB en deux parties égales au point D, et par ce point élevez sur AB une perpendiculaire $DC = \frac{-g^2c + d\sqrt{g^4 - a^2d^2 + a^2c^2}}{d^2 - c^2}$; ensuite du centre C, avec la distance CA ou CB, décrivez le cercle ABE, il touchera le cercle EK, et passera par les points A et B. C. Q. F. T.

PROBLÈME XLVI.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, touche un cercle donné, et une droite donnée de position.

(*Pl.* VI, *Fig.* 2). Soient, le cercle cherché BD, son centre C, le point par lequel il doit passer B, la droite qu'il doit toucher AD, le point de contact avec cette droite D, le cercle qu'il doit toucher GEM, le centre de ce dernier cercle F, et le point de contact des deux cercles E. Joignez par des droites les points C, B; C, D; C, F; la droite CD sera perpendiculaire à AD, et CF coupera les deux cercles au point de contact E. Prolongez CD jusqu'en Q, de manière à avoir $DQ = EF$; par le point Q menez à AD la parallèle QN. Enfin des points B et F abaissez sur AD et QN les perpendiculaires BA, FN, et du point C abaissez sur AB et FN les perpendiculaires CK, CL. Les lignes BC, CD et AK étant égales, on a aussi, $BK = BA - AK = BA - BC$; Ainsi $\overline{BK}^2 = \overline{BA}^2 - 2BA \times BC + \overline{BC}^2$. Si l'on retranche $\overline{BK}^2$, ou sa valeur, de $\overline{BC}^2$, il est clair que le reste sera la valeur de $\overline{CK}^2$, par conséquent, $\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2$, ou $\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2 + 2BA \times BC - \overline{BC}^2 = \overline{CK}^2$, ou bien, $2BA \times BC - \overline{BA}^2 = \overline{CK}^2$. On trouvera de la même manière que $FN \times (2FC - FN) = \overline{CL}^2$. De la première de ces deux équations on tire, $2BC = \frac{\overline{CK}^2}{AB} + AB$, et de la seconde, $2FC = \frac{\overline{CL}^2}{FN} + FN$. Ainsi appelant AB, a; CK, y; FN, b; KL, c;

et CL, $c - y$, nos deux équations deviendront respectivement, $2BC = \frac{y^2}{a} + a$, ou $BC = \frac{y^2}{2a} + \frac{1}{2}a$, et $FC = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b$. De FC si on retranche BC, le reste sera, $FE = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$. Maintenant qu'on appelle G, H et M les points où FN coupe la droite AD prolongée et le cercle GEM; que l'on prolonge HG de manière que $HR = AB$, alors (à cause de $HN = DQ = EF = GF$) on a, $HN = GF$, et en ajoutant à chaque membre FH, on aura, $FN = GH$. Ainsi $AB - FN = HR - GH = GR$; et $AB - FN + 2EF = a - b + 2EF = RM$, et $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + EF = \frac{1}{2}RM$. Or nous avons trouvé plus haut, $EF = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} + \frac{1}{2}b - \frac{y^2}{2a} - \frac{1}{2}a$; substituons pour EF sa valeur dans l'équation précédente, elle deviendra $\frac{1}{2}RM = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{2b} - \frac{y^2}{2a}$. Appelez RM, d, et vous aurez.......... $d = \frac{c^2 - 2cy + y^2}{b} - \frac{y^2}{a}$. Multipliez tout par a et b, et il viendra, $abd = ac^2 - 2acy + ay^2 - by^2$; que vous écrirez ainsi, $(a - b)y^2 - 2acy = abd - ac^2$, qui devient, en divisant tout par $a - b$, $y^2 - \frac{2acy}{a - b} = \frac{abd - ac^2}{a - b}$. Cette équation étant résolue, donne, $y = \frac{ac}{a - b} \pm \frac{\sqrt{a^2bd - ab^2d + abc^2}}{a - b}$. Si, pour abréger, on fait, $c : b :: d : e$, et $a - b : a :: c : f$, on aura, $y^2 = fe - fc + 2fy$, ou $y = f \pm \sqrt{f^2 + fe - fc}$. y, ou KC, ou AD étant connu, portez de A vers D une quantité $AD = f \pm \sqrt{f^2 + fe - fc}$; au point D élevez la perpendiculaire $DC = BC = \frac{\overline{CK}^2}{2AB} + \frac{1}{2}AB$, et du point C, comme centre, avec CB ou CD, comme rayon, décrivez le cercle BDE, il passera par le point donné B, touchera la droite AD en D, et le cercle GEM en E. C. Q. F. T.

A l'aide de ce problême, il serait facile d'en résoudre un autre où il s'agirait de décrire un cercle qui touchât deux autres cercles donnés, et une droite donnée de position (*Pl.* VI, *Fig.* 3).

En effet, soient les deux cercles donnés RT, SV; leurs centres B, F; et la droite donnée de position PQ. Du centre F, et d'un rayon égal à $FS - BR$, décrivez le cercle EM. Du point B menez à la droite PQ la perpendiculaire PB que vous prolongerez vers A, de manière à avoir $PA = BK$. Par le point A menez AH parallèlement à PQ. Maintenant décrivez, par le problême précédent, un cercle qui, passant par le point B, touche la droite AH, et le cercle EM. Soit C le centre du cercle que nous venons de décrire; tirez la droite BC qui rencontrera TR en R, et du même centre C avec un rayon égal à CR, décrivez le cercle RS, il touchera les cercles RT, SV et la droite PQ, comme il est évident par la construction.

PROBLÊME XLVII.

Décrire un cercle qui passe par un point donné, et touche deux autres cercles donnés de grandeur et de position.

(*Pl.* VI, *Fig.* 4). Soient, le point donné A; les deux cercles donnés de grandeur et de position TIV, RHS; C et B leurs centres; AIH le cercle cherché; D son centre; et enfin I et H les points de contact des trois cercles. Unissez par des droites les points A, B; A, C; A, D; et D, B. La droite AB prolongée coupera le cercle RHS, en R et en S, et la droite AC prolongée coupera le cercle TIV en T et en V. Du point D abaissez sur AB la perpendiculaire DE; et du même point sur AC la perpendiculaire

DF, qui rencontrera en G la droite AB. Menez aussi du point C sur AB la perpendiculaire CK. Le triangle ADB donne $\overline{AD}^2 - \overline{DB}^2 + \overline{AB}^2 = 2AE \cdot AB$ (par la 13^e prop. du 2^e. liv. des Élém.). Mais $DB = AD + BR$, par conséquent, $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + 2AD \times BR + \overline{BR}^2$. Substituez cette valeur de $\overline{DB}^2$ dans l'équation précédente, et vous aurez $\overline{AB}^2 - 2AD \cdot BR - \overline{BR}^2 = 2AE \cdot AB$. Mais $\overline{AB}^2 - \overline{BR}^2 = (AB + BR) \times (AB - BR) = AR \times AS$. Donc $AR \cdot AS - 2AD \cdot BR = 2AE \cdot AB$. Et............ $\frac{AR \cdot AS - 2AE \cdot AB}{BR} = 2AD$.

Par un semblable raisonnement, on tirera du triangle ADC une seconde valeur de $2AD$, et on aura, $2AD = \frac{AT \cdot AV - 2AC \cdot AF}{TC}$. Par conséquent, $\frac{AR \cdot AS - 2AB \cdot AE}{BR} = \frac{AT \cdot AV - 2AC \cdot AF}{TC}$; et encore, $\frac{2AC \cdot AF}{TC} = \frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{AR \cdot AS}{BR} + \frac{2AB \cdot AE}{BR}$; et enfin, $AF = \frac{CT}{2AC}\left(\frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{AR \cdot AS}{BR} + \frac{2AB \cdot AE}{BR}\right)$. Or comme on a la proportion $AK : AC :: AF : AG$, on aura aussi, $AG = \frac{CT}{2AK}\left(\frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{AR \cdot AS}{BR} + \frac{2AB \cdot AE}{BR}\right)$. Si on retranche maintenant AG, ou sa valeur de AE, ou ce qui est la même chose, de $\frac{AE \cdot 2AK}{CT} \times \frac{CT}{2AK}$, le reste sera............. $GE = \frac{CT}{2AK}\left(\frac{AE \cdot 2AK}{CT} + \frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{2AB \cdot AE}{BR}\right)$. Et comme on a la proportion $CK : AK :: GE : DE$, on aura, $DE = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AE \cdot 2AK}{CT} + \frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} + \frac{2AB \cdot AE}{BR}\right)$. Sur la droite AB prenez une partie AP que vous déterminerez par cette proportion, $BR : CT :: AB : AP$, d'où vous tirerez....

$\frac{2AP \cdot AE}{CT} = \frac{2AB \cdot AE}{BR}$. Or, $\frac{2AP \cdot AE}{CT} = \frac{(2AK + 2KP) \cdot AE}{CT}$; donc $\frac{2PK \cdot AE}{CT} = \frac{2AB \cdot AE}{BR} - \frac{2AK \cdot AE}{CT}$, ou bien, ... $-\frac{2PK \cdot AE}{CT} = \frac{2AK \cdot AE}{CT} - \frac{2AB \cdot AE}{BR}$. Le premier membre de cette équation étant substitué à la place du second dans l'expression de la valeur de DE, on aura ....

$DE = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} - \frac{2PK \cdot AE}{CT}\right)$. Sur AB, et par le point A, élevez une perpendiculaire, dont la valeur soit, $AQ = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC}\right)$. Sur cette perpendiculaire prenez $QO = \frac{PK \cdot AE}{CK}$, et vous aurez $AO = DE$. Unissez par des droites, les points O, D; D, Q; et C, P; et les triangles DOQ, CKP seront semblables; car ils ont chacun un angle droit, et les côtés autour de cet angle, proportionnels, puisqu'on a fait $QO = \frac{PK \cdot AE}{CK}$, ce qui donne la proportion $CK : PK :: AE$ ou $DO : QO$. Donc les angles OQD, KPC sont égaux, par conséquent, QD a une direction perpendiculaire à PC. Si on mène donc à CP la parallèle AN, la rencontre de cette droite avec QD au point N, y formera un angle droit ANQ, et les triangles AQN, PCK seront semblables. On aura donc $PC : CK :: AQ : AN$. Et à cause de $AQ = \frac{CT}{2CK}\left(\frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC}\right)$, on aura...

$AN = \frac{CT}{2PC}\left(\frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{CT}\right)$. Prolongez AN jusqu'en M, de manière que $AD = DM$, alors le cercle cherché passera par le point M. Un point M du cercle étant trouvé de cette manière, voici comment on parviendra, sans aucune analyse ultérieure, à la résolution du problême. Prenez sur AB une ligne AP dont vous déterminerez la longueur par cette proportion, $BR : CT :: AB : AP$, tirez la droite CP, menez à CP la parallèle AM, et faites, $AM : \frac{AR \cdot AS}{BR} - \frac{AT \cdot AV}{TC} :: CT : PC$; et par le moyen du problême XLV, faites passer par les points A et M le cercle $AIHM$, de manière qu'il touche un des cercles HRS, TIV, et il les touchera tous les deux. C. Q. F. T.

Par ce même problême on pourrait décrire un cercle qui en touchât trois autres donnés de grandeur et de position. Soient A, B, C les rayons des trois cercles donnés, D, E, F leurs centres; des centres E et F, avec des rayons respectivement égaux à $B \pm A$, $C \pm A$ décrivez deux cercles, et un troisième qui passe par le point D. Soit G le rayon de ce troisième cercle, et H son centre. Du point H avec un rayon égal à $G \pm A$, décrivez un quatrième cercle, et il touchera les trois autres, comme on le demandait.

PROBLÊME XLVIII.

Si aux deux extrémités d'un fil DAE, qui peut glisser autour d'un point fixe A, on attache deux poids D et E; que l'un des deux, par exemple E, ne puisse glisser que selon la ligne oblique BG; on demande le lieu du poids E, lorsque ces deux poids se font équilibre.

(*Pl.* VI, *Fig.* 5). Supposons que l'équilibre ait lieu. Par le point E, menez à AD la parallèle EF, et faites en sorte que EF soit à AE comme le poids E est au poids D; et des points A et F menez à la droite BG les perpendiculaires AB, FG; et comme vous avez par hypothèse $D : E :: AE : EF$, vous pourrez prendre à la place des poids, les lignes qui expriment leur rapport, c'est-à-dire AE à la place du poids D, et EF à la place du poids E. Il est évident que si le corps E était libre, son propre poids le ferait tomber vers F, mais qu'étant forcé par un obstacle quelconque de glisser suivant l'oblique EG, il s'avancera vers le point G. On voit encore que le même corps, par l'action directe que l'autre corps D exerce sur lui selon AE, devrait s'avancer vers le point A; mais nous avons dit que le corps E ne pouvait suivre d'autre route que la droite GEB, donc il sera entraîné par une force oblique vers le point B. Or comme nous avons supposé que les deux poids se faisaient équilibre, la force qui tire le poids E vers B doit être égale et directement opposée à celle qui le porte vers G. Ainsi BE doit être égale à EG. Actuellement nous avons par hypothèse le rapport de AE à EF, et à cause de l'angle connu FEG, nous avons aussi le rapport de FE à EG ou à BE (car $BE = FG$). On a donc le rapport de AE à BE, et la longueur de AB est aussi donnée; ainsi dans le triangle rectangle ABE tout est connu, et par conséquent le point E sera facilement déterminé. En effet, soit $AB = a$, $BE = x$, vous aurez, $AE = \sqrt{a^2 + x^2}$. Supposez de plus que $AE : BE :: d : e$, vous obtiendrez, $e\sqrt{a^2 + x^2} = dx$, et en quarrant chaque membre et transposant d'un même côté toutes les quantités affectées de x, il viendra, $a^2 e^2 = d^2 x^2 - e^2 x^2$, d'où l'on tire facilement...... $x = \frac{ae}{\sqrt{d^2 - e^2}}$. On connaît donc maintenant la longueur de BE qui détermine le lieu du poids E. C.Q.F.T. (61).

(*Pl.* VI, *Fig.* 6). Si chaque poids est obligé de descendre par une ligne oblique, voici de quelle manière on pourra faire le calcul. Soient CD et BE les obliques sur lesquelles les deux corps sont obligés

obligés de descendre. Du point fixe A, menez à ces obliques les perpendiculaires AC, AB, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elles rencontrent en G et en H les droites EG et DH, élevées de chacun des deux corps D et E perpendiculairement à l'horizon. Maintenant la force qui tend à faire descendre le corps E selon la verticale GE, ou ce qui revient au même, la gravité du corps E est à la force qui le fait descendre selon l'oblique BE, comme GE est à BE; et la force avec laquelle il tend à descendre selon la ligne oblique BE, et à la force avec laquelle il tend le fil AE comme BE est à AE. Ainsi la gravité du corps E est à la tension du fil AE comme GE est à AE. Par la même raison la gravité du corps D est à la tension du fil DA comme HD est à AD. Soit donc la longueur totale du fil $DA + AE = c$, soit la partie $AE = x$, l'autre partie DA sera $c - x$; et on aura d'abord, $\overline{AE}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BE}^2$, et $\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{DC}^2$. Soit de plus $AB = a$, et $AC = b$, d'où $BE = \sqrt{x^2 - a^2}$, et $CD = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}$. En outre, comme les triangles BEG, CDH sont donnés d'espèce, supposons que $BE : EG :: f : E$, et que $CD : DH :: f : g$, on aura, $EG = \frac{E}{f}\sqrt{x^2 - a^2}$, et $DH = \frac{g}{f}\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}$. Par conséquent, comme l'on a, $GE : AE ::$ le poids E : la tension AE, et $HD : AD ::$ le poids D : la tension AD, et que ces tensions sont égales, puisqu'il y a équilibre, on en conclura que........

$$\frac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{tension } AE = \text{tension } AD = \frac{Dc - Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 - b^2}}.$$

Et en réduisant cette équation, elle devient..................

$gx\sqrt{x^2-2cx+c^2-b^2}=(Dc-Dx)\sqrt{x^2-a^2}$, ou bien...

$$\left.\begin{matrix} g^2 \\ -D^2\end{matrix}\right\} x^4 \left.\begin{matrix}-2g^2c\\+2D^2c\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}+g^2c^2\\-g^2b^2\\-D^2c^2\\+D^2a^2\end{matrix}\right\} x^2 - 2D^2ca^2x + D^2c^2a^2 = 0.$$

Si l'on desire savoir dans quel cas le problême pourrait être construit avec le seul secours de la règle et du compas, il n'y a qu'à supposer que le poids D : au poids E :: $\frac{BE}{EG}$: $\frac{CD}{DH}$, alors on aura, $g=D$. Ainsi l'équation précédente se réduira à celle-ci, $\left.\begin{matrix} a^2 \\ -b^2\end{matrix}\right\} x^2-2a^2cx+a^2c^2=0$, ou bien, $x=\frac{ac}{a+b}$.

PROBLÊME XLIX.

Si au fil $DACBF$, qui peut glisser sur deux points fixes A et B, on suspend trois poids D, E et F; D et F aux extrémités du fil, et E à son milieu, qui est en C entre les deux points fixes; il s'agit, connaissant les poids et la situation des deux points fixes, de déterminer la position du point C, milieu du fil, lorsque tout le systême est en équilibre.

(*Pl.* VI, *Fig.* 7). D'abord on voit que la tension du fil AC égale la tension du fil AD, et que la tension du fil BC égale la tension du fil BF; par conséquent les tensions des fils AC, CB, CE sont proportionnelles aux poids D, F, E. Prenez dans le rapport des mêmes poids les parties des fils CG, CH, CI, et en unissant par des droites les trois points G, H, I, vous aurez le triangle GHI. Prolongez IC jusqu'à ce qu'elle rencontre GH en K, et vous aurez, $GK = KH$, et $CK = \frac{1}{2} CI$, par conséquent C sera le centre de gravité du triangle GHI. Car par le point C, menez à CE la perpendiculaire PQ, et des points G et H abaissez sur PQ les perpendiculaires GP, HQ; alors si la force avec laquelle le fil AC, en vertu du poids D, tire le point C vers A, est exprimée par GC, la force avec laquelle le même fil tirera le même point C vers P, sera exprimée par PC; et la force avec laquelle il le tire vers K, sera exprimée par GP. De même les forces par lesquelles le fil BC, en vertu du poids F, tire le point C vers les points B, Q, K, seront respectivement représentées par les lignes CH, CQ, QH; et la force avec laquelle le fil CE, en vertu du poids E, tire le point C vers E, sera exprimée par la ligne CI. Maintenant comme le point C est sollicité en même temps par plusieurs forces qui se font équilibre, il faut que la somme de celles avec lesquelles les fils AC, BC tendent à amener le point C vers K, soit égale et directement opposée à la force avec laquelle le fil CE le tire vers E, c'est-à-dire qu'il faut que $GP + HQ = CI$, et que la force avec laquelle le fil AC tire le point C vers P, soit égale et directement opposée à celle avec laquelle le fil BC le tire vers Q, et par conséquent $PC = CQ$. Ainsi les droites GP, HQ, CK étant parallèles, il s'en suit que $KG = KH$, et $CK = \ldots\ldots$ $\frac{GP + HQ}{2} = \frac{1}{2} CI$, ce qu'il fallait premièrement démontrer. Il ne nous reste plus qu'à déterminer le triangle GCH, dont les côtés GC, CH sont donnés, ainsi que la droite CK qui est menée du sommet C sur le milieu de la base. Pour cela, du point C j'abaisse sur la base GH la perpendiculaire CL, ce qui donne, $\frac{\overline{CG}^2 - \overline{CH}^2}{2GH} = KL = \frac{\overline{GC}^2 - \overline{CK}^2 - \overline{GK}^2}{2GK}$. Au lieu de $2GK$, écrivez GH, et effaçant le diviseur commun GH, et ordonnant, vous aurez..........

$2\overline{GK}^2 = \overline{GC}^2 - 2\overline{CK}^2 + \overline{CH}^2$, ou bien, $GK = \sqrt{\tfrac{1}{2}\overline{GC}^2 - \overline{CK}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{CH}^2}$.

GK et KH étant une fois connues, les angles GCK, KCH, ou leurs alternes DAC, FBC le seront aussi. Donc des points A et B si on mène les droites AC, BC de manière que AC fasse avec AD un angle égal à GCK, et que BC fasse avec BF un angle égal à KCH, ces deux droites AC, BC iront concourir en un point C, et ce point C sera celui qu'on cherchait.

Au reste, dans les questions de cette espèce, on n'a pas toujours besoin d'une opération algébrique particulière pour arriver à la solution; le plus souvent même la résolution d'une question suffit pour faire trouver celle d'une autre, comme on le verra dans l'exemple suivant.

(*Pl.* VI, *Fig.* 8). *Un fil $ACDB$ étant divisé en parties données AC, CD, DB; ses deux extrémités étant attachées à deux points fixes A et B donnés de position; et deux poids E et F étant suspendus aux points de division C et D, on demande, le poids F étant donné, ainsi que la position des points C et D, de déterminer la grandeur du poids E.*

De la solution du problême précédent, on peut facilement déduire celle-ci. Prolongez AC, BD jusqu'à ce qu'elles rencontrent en G et en H les lignes DF, CE; et le poids E sera au poids F comme DG est à CH.

On voit par-là, qu'il est facile de composer avec des fils seulement, une balance telle, qu'au moyen d'un poids donné F, on déterminera le poids d'un autre corps quelconque E.

PROBLÊME L.

Déterminer la profondeur d'un puits par le son d'une pierre qui en va frapper le fond.

Appelons x la profondeur du puits. Si la pierre, par son mouvement accéléré, parcourt un espace donné a dans un temps donné b, et que le son, par un mouvement uniforme, parcourre le même espace a dans un temps donné d, la pierre parcourra l'espace x, dans un temps exprimé par $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, et le son que cause la pierre en frappant le fond du puits, parcourra le même espace x dans un temps exprimé par $\frac{dx}{a}$. Car, dans la chûte des corps graves, les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps employés à les parcourir; ou ce qui revient au même, les temps sont comme les racines quarrées des espaces parcourus, c'est-à-dire, comme $\sqrt{x}$ et $\sqrt{a}$. Et dans la transmission du son, les espaces parcourus sont comme les temps employés à les parcourir. Or le temps de la chûte du corps jusqu'au fond du puits, étant exprimé par $b\sqrt{\frac{x}{a}}$, et le temps du retour du son, par $\frac{dx}{a}$, on voit que la somme de ces deux temps nous donne exactement le temps écoulé depuis le départ de la pierre, jusqu'à l'arrivée du son. Ce temps peut être connu par l'observation. Soit ce temps t, on aura $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$ et.... $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et en quarrant chaque membre........... $\frac{b^2 x}{a} = t^2 - \frac{2dtx}{a} + \frac{d^2x^2}{a^2}$. Cette équation étant résolue, donne $x = \frac{adt + \frac{1}{2}ab^2}{d^2} - \frac{ab}{2d^2}\sqrt{b^2 + 4dt}$.

PROBLÊME LI.

Un globe A est donné, ainsi que sa position par rapport à un mur DE ; on donne également la distance BD du centre du globe B au même mur. Le centre du globe A est sur la droite BD perpendiculaire au mur. On suppose que les deux corps sont sans pesanteur, et qu'ils se meuvent dans un milieu parfaitement libre ; enfin on suppose que le corps A, poussé d'un mouvement uniforme vers le point D, rencontre en son chemin le corps B qui est en repos ; que le corps B va frapper le mur, et, par un mouvement de réflexion, vient rechoquer le globe A au point C. On demande, d'après toutes ces données, de déterminer la masse du globe B.

(*Pl.* VII, *Fig.* 1re). Soit a la vîtesse du globe A avant le choc, on aura, par le problême XII, page 106, sa vîtesse après le choc, $= \frac{aA - aB}{A + B}$, et la vîtesse de B après le choc, sera $= \frac{2aA}{A+B}$. Ainsi la vîtesse du globe A sera à la vîtesse du globe B comme $A - B$ est à $2A$. Sur GD prenez $gD = GH =$ le diamètre du globe B. Et les vîtesses des deux globes seront entre elles comme GC est à $Gg + gC$; car lorsque le globe A aura frappé le globe B, le point G qui est sur la surface du globe B, se mouvra dans la ligne AD, et continuera sa route de G en g, où il arrivera au moment que sa face antérieure H atteindra le mur, alors, par un mouvement de réflexion, ce même point G parcourra l'espace gC. Ainsi le point G sera mu dans tout l'espace $Gg + gC$, pendant le temps que le point F du globe A parcourra l'espace GC, de manière que les deux globes se rencontreront de nouveau, et se choqueront encore au point C. Ainsi les intervalles BC, BD étant donnés, faites $BC = m$, $BD + DC = n$, et $BG = x$, vous aurez $GC = m + x$, et $Gg + gC = GD + DC - 2gD = BG + BD + DC - 2GH = x + n - 4x = n - 3x$. Nous avons trouvé ci-dessus, que la vîtesse de A était à celle de B comme $A - B$ est à $2A$, comme GC est à $Gg + gC$; ainsi $A - B : 2A :: m + x : n - 3x$. Enfin le globe A est au globe B comme le cube de AF est au cube de GB, c'est-à-dire dans le rapport des cubes de leurs rayons. Par conséquent, si vous faites $AF = s$, les deux globes seront entre eux $:: s^3 : x^3$. Donc on aura encore cette proportion, $s^3 - x^3$ $(A - B) : 2s^3$ $(2A) :: m + x : n - 3x$. Et en faisant le produit des extrêmes, et celui des moyens, on aura l'équation, $ns^3 - 3s^3x - nx^3 + 3x^4 = 2ms^3 + 2s^3x$. Et en réduisant, $3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{matrix} + s^3 n \\ - 2s^3 m \end{matrix} = 0$. En construisant cette équation, on trouvera x demi-diamètre du globe B; et x étant connue, le globe B lui-même sera connu. C. Q. F. T.

Remarquez bien au reste, que, si le point C eût été pris de l'autre côté par rapport au globe B, il aurait fallu changer, dans l'équation, le signe de la quantité $2m$, et l'écrire ainsi............

$$3x^4 - nx^3 - 5s^3x \begin{matrix} + s^3 n \\ + 2s^3 m \end{matrix} = 0.$$

Si le globe B était donné, et qu'on cherchât le globe A, toujours avec la même condition, que le globe B ayant été réfléchi par le mur, les deux corps se rencontreraient encore en C; le problême deviendrait alors plus facile. Car dans ce cas, x serait connu dans notre dernière équation, et la quantité inconnue serait s. Je réunirais donc dans un seul membre tous les termes affectés de s^3, et j'aurais $(5x - n + 2m)s^3 = 3x^4 - nx^3$, et enfin............ $s^3 = \frac{3x^4 - nx^3}{5x - n + 2m}$. Il suffit maintenant d'extraire une racine cubique pour connaître s.

Si les deux globes étaient connus, et qu'on cherchât le point C, où, après le premier choc et la réflexion du globe B par le mur, les deux globes devraient se choquer une seconde fois, on se rappellerait que nous avons trouvé plus haut cette proportion... $A - B : 2A :: GC : Gg + gC$, de laquelle on peut déduire celle-ci, $A - B + 2A : A - B :: GC + Gg + gC : GC$. Ou bien, $3A - B : A - B :: 2Gg : GC$, et le quatrième terme GC de cette proportion est la distance cherchée.

PROBLÊME LII.

Deux globes A et B sont joints par un léger fil PQ. Le globe B est suspendu au globe A; on abandonne celui-ci à l'action de la pesanteur selon la verticale PR; le globe B, parvenu au plan horizontal FG, est réfléchi en haut, et rencontre au point D le globe A qui continuait de tomber. On demande de quelle hauteur il faut que le globe A soit tombé pour produire l'effet énoncé, en supposant que l'on connaisse la longueur du fil PQ et la distance DF du point de rencontre des deux globes au plan horizontal GF.

(*Pl.* VII, *Fig.* 2). Soit la longueur du fil PQ, a. Sur la verticale $PQRF$, prenez, à compter du point F, la droite FE égale au diamètre QR du globe inférieur, afin qu'au moment où le point inférieur R du globe B touchera le point F, son point supérieur Q se trouve en E. Soit ED l'espace que parcourra en remontant le globe B, après avoir été réfléchi par le fond, avant de rencontrer au point D le globe supérieur A qui continuait à descendre. Ainsi la distance du point D au point F étant donnée, de même que EF qu'on a fait égale au diamètre du globe inférieur, il s'en suit que

DE,

DE, différence de ces deux lignes, est aussi donnée. Soit donc $DE = b$. Il est évident que $RF = QE =$ la hauteur dont le globe inférieur doit tomber avant d'arriver au plan horizontal. Appelons RF ou QE, x, puisque c'est une quantité inconnue. Une fois x connue, il suffira de lui ajouter EF et PQ, et on aura PF, hauteur d'où le globe supérieur A doit tomber pour produire l'effet demandé.

Comme nous avons fait $PQ = a$, et $QE = x$, nous aurons $PE = a + x$. De PE retranchons DE ou b, le reste sera, $PD = a + x - b$. Or le temps de la chûte du globe A est comme la racine quarrée de l'espace qu'il a parcouru en tombant, ou comme $\sqrt{a + x - b}$; et le temps de la chûte du globe B, est comme la racine quarrée de l'espace qu'il a parcouru, ou comme $\sqrt{x}$. Et le temps de l'ascension du même globe B est comme la différence de $\sqrt{x}$, et de la racine de l'espace qu'il aurait parcouru en tombant de Q en D. En effet, la différence de ces deux racines est comme le temps de la chûte de D en E. Or le temps de la chûte de D en E est égal au temps de l'ascension de E en D. Et cette différence des racines est $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. (*). Ainsi le temps de la chûte du globe B étant ajouté au temps de son ascension, donne.....

(*) Si le globe B remontait de E en Q, le temps de son ascension serait exprimé par $\sqrt{x}$, et s'il remontait de D en Q, par $\sqrt{DQ} = \sqrt{x - b}$. Donc, comme il ne remonte que de E en D, le temps de son ascension sera exprimé par $\sqrt{EQ} - \sqrt{DQ} = \sqrt{x} - \sqrt{x - b}$, et enfin le temps de sa chûte de Q en E, et de son ascension de E en D, sera exprimé par................. $\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$.

$2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$. Par conséquent comme ce temps est égal au temps de la chûte du globe supérieur, on a cette équation, $\sqrt{a+x-b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-b}$, ce qui nous donne, en quarrant chaque membre, $a+x-b = 5x-b-4\sqrt{x^2-bx}$. Ou bien, $4x-a = 4\sqrt{x^2-bx}$, et en quarrant de nouveau chaque membre, $16x^2-8ax+a^2 = 16x^2-16bx$, ou bien $a^2 = 8ax-16bx$, et en divisant tout par $8a-16b$, on a, $x = \frac{a^2}{8a-16b}$. Faites donc cette proportion, $8a-16b : a :: a : x$, et vous connaîtrez, x ou QE. C.Q.F.T.

Mais si QE était donné, et qu'on demandât seulement de déterminer la longueur du fil PQ ou a; il est clair que dans ce cas, x étant connue, et a inconnue, l'équation $a^2 = 8ax-16bx$ est du second degré; et qu'étant résolue selon les règles de l'algèbre, elle donne, $a = 4x - \sqrt{16x^2-16bx}$. Pour construire cette valeur de a, prenez QY moyenne proportionnelle entre QD et QE, et vous aurez $PQ = 4EY$. Car cette moyenne proportionnelle est $\sqrt{x(x-b)}$, ou $\sqrt{x^2-bx}$. Si vous retranchez sa valeur de QE ou x, le reste sera EY, dont le quadruple est $4x-4\sqrt{x^2-bx}$, valeur de a.

Si on donne QE ou x, et la longueur du fil PQ ou a, et qu'on cherche le point D, où le globe supérieur, en descendant, rencontre le globe inférieur qui remonte; le point E est connu par cette supposition; c'est donc sa distance DE ou b au point inconnu D

que l'on cherche. Or il est facile d'obtenir la valeur de b par l'équation $a^2 = 8ax - 16bx$, qui donne, $b = \frac{8ax - a^2}{16x}$. Faites donc la proportion $16x : 8x - a :: a : b$, et vous connaîtrez b ou DE.

Jusqu'ici j'ai supposé que les deux globes réunis par un fil sans pesanteur étaient abandonnés en même temps. Mais s'ils ne sont unis par aucun fil, et qu'on les laisse tomber à des instans différens, de manière que le globe supérieur A, par exemple, soit abandonné le premier, et tombe de l'espace PT avant qu'on abandonne le second globe, et qu'au moyen des distances données PT, QP et DE, on cherche à connaître la hauteur PF d'où a dû tomber le globe supérieur pour pouvoir être rencontré au point D par le globe inférieur; faites $PQ = a$, $DE = b$, $PT = c$, et $QE = x$, alors vous aurez, $PD = a + x - b$, comme ci-dessus. Et les temps pendant lesquels le globe supérieur parcourra, en tombant, les espaces PT et TD, seront comme $\sqrt{PT}$ et $\sqrt{PD} - \sqrt{PT}$, ou $\sqrt{c}$ et $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c}$; et le temps que le globe inférieur emploie, d'abord en tombant, et ensuite en remontant, pour parcourir la somme des espaces $QE + DE$, sera comme....... $2\sqrt{QE} - \sqrt{QD}$, ou bien, $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Maintenant, les temps que les globes emploient à décrire, l'un l'espace TD, l'autre la somme des espaces $QE + ED$, sont égaux par hypothèse. Donc $\sqrt{a + x - b} - \sqrt{c} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Et en quarrant chaque membre, $a + c - 2\sqrt{ca + cx - bc} = 4x - 4\sqrt{x^2 - bx}$. Faites $a + c = e$, et $a - b = f$, vous aurez, après les réductions.....

$4x - e + 2\sqrt{cf + cx} = 4\sqrt{x^2 - bx}$. Et en quarrant encore chaque membre, $e^2 - 8ex + 16x^2 + 4cf + 4cx + (16x - 4e)\sqrt{cf + cx} = 16x^2 - 16bx$. Effacez de part et d'autre $16x^2$, faites $e^2 + 4cf = m$, et $8e - 16b - 4c = n$, vous aurez, après les réductions convenables, $(16x - 4e)\sqrt{cf + cx} = nx - m$. Et en quarrant encore chaque membre, $256cfx^2 + 256cx^3 - 128cefx - 128cex^2 + 16ce^2f + 16ce^2x = n^2x^2 - 2mnx + m^2$. Cette équation étant ordonnée, devient, $256cx^3 \left.\begin{array}{l} + 256cf \\ - 128ce \\ - n^2 \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} - 128cef \\ + 16ce^2 \\ + 2mn \end{array}\right\} x \begin{array}{l} + 16ce^2f \\ - m^2 \end{array} = 0.$

En la construisant, on aura x ou QE, et si à QE on ajoute les distances données PQ et EF, ou QR, on aura la hauteur PF qu'il fallait trouver.

PROBLÊME LIII.

Si on a deux globes en repos ; que le globe A soit plus élevé que le globe B ; qu'on les fasse tomber à des instans différens, par exemple, que A ait déjà parcouru l'espace PT, au moment que B commence à tomber : on demande de déterminer les lieux α et β où se trouvent les deux globes, lorsque leur distance $\varpi\chi$ sera égale à une quantité donnée.

(*Pl.* VII, *Fig.* 3). Comme l'espace PT, et les distances PQ et $\varpi\chi$ sont donnés, faites $PT = a$, $PQ = b$, et $\varpi\chi = c$; et l'espace $P\varpi$ que le globe supérieur aura parcouru avant d'arriver au lieu cherché α, appelez-le x. Actuellement, les temps que le globe supérieur emploie à parcourir les espaces PT, $P\varpi$, $T\varpi$, ainsi que le temps que le globe inférieur emploie à parcourir $Q\chi$, sont entre eux respectivement comme $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT}$, et $\sqrt{Q\chi}$. Or, comme les deux globes emploient le même temps à parcourir les espaces $T\varpi$ et $Q\chi$, il s'ensuit que $\sqrt{P\varpi} - \sqrt{PT} = \sqrt{Q\chi}$. Nous avons fait $P\varpi = x$ et $PT = a$. Si à $P\varpi$ nous ajoutons $\varpi\chi$ ou c, et que de la somme nous retranchions PQ ou b, le reste sera $Q\chi = x + c - b$. Donc en substituant ces valeurs analytiques dans l'équation trouvée plus haut, elle deviendra $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \sqrt{x + c - b}$. Et en quarrant chaque membre, $x + a - 2\sqrt{ax} = x + c - b$. Et en effaçant x de part et d'autre, et transposant seule dans l'autre membre la quantité affectée du radical, il viendra $a + b - c = 2\sqrt{ax}$, et en quarrant de nouveau $(a + b - c)^2 = 4ax$. D'où $x = \frac{(a+b-c)^2}{4a}$, et par conséquent $4a : a + b - c :: a + b - c : x$. x ou $P\varpi$ étant trouvée, on a le lieu α où est arrivé en tombant le globe supérieur A. Et comme la distance $\varpi\chi$ qui doit se trouver dans cet instant entre les deux globes, est donnée, il s'en suit qu'on connaît aussi le lieu β du globe inférieur.

Si on cherche le point où le globe supérieur en tombant atteint le globe inférieur, il suffit, pour le trouver, de supposer que la distance $\varpi\chi$ des deux globes est nulle, et par conséquent d'effacer c dans l'équation $(a + b - c)^2 = 4ax$, ce qui la réduirait à $(a + b)^2 = 4ax$. D'où l'on tire la proportion $4a : a + b :: a + b : x$ ($P\varpi$), et le point ϖ est celui qu'on cherchait.

Réciproquement, si on donne le point ϖ ou χ, sur lequel le globe supérieur rencontre l'inférieur, et qu'on demande le lieu T où se trouve le point le plus bas P du globe supérieur, au moment que l'inférieur commence à tomber, il suffit de dégager a de l'équation $(a+b)^2 = 4ax$, ou $a^2 + 2ab + b^2 = 4ax$, et elle donne $a = 2x - b - 2\sqrt{x^2 - bx}$. Prenez donc une moyenne proportionnelle $V\varpi$ entre x et $x - b$, ou bien ce qui est la même chose, entre $P\varpi$ et $Q\varpi$, et vous aurez $V\varpi = \sqrt{x(x-b)} = \sqrt{x^2 - bx}$. Et si vous retranchez le double de cette quantité de $2x - b$, ou de $2P\varpi - PQ$, c'est-à-dire, de $2Q\varpi + PQ$, il restera.... $PQ - 2VQ$, ou bien $PV - VQ$, c'est-à-dire, PT.

Enfin le globe supérieur ayant choqué l'inférieur, et par leur action mutuelle, la vîtesse du supérieur étant retardée, et celle de l'inférieur accélérée, si l'on veut savoir à quel point de leur chûte les deux globes se trouveront éloignés l'un de l'autre, d'une distance donnée ; il faudra chercher d'abord le lieu où le globe supérieur choque l'inférieur ; ensuite, connaissant la grandeur des globes (sans quoi le problême serait insoluble) ainsi que leurs vîtesses au moment du choc, on déterminera (*au moyen du problême* XII, *page* 106) leurs vîtesses immédiatement après le choc ; après quoi il faudra chercher à quelle hauteur parviendraient les globes en vertu de ces vîtesses, si elles agissaient de bas en haut ; et on connaîtra par-là les espaces, que, dans des temps donnés, après la réflexion, les deux globes seront en état de parcourir en tombant. On connaîtra donc la différence des espaces parcourus. Et réciproquement, si on donnait la différence des espaces parcourus, on pourrait, par l'analyse, revenir aux espaces mêmes parcourus en tombant.

(*Pl.* VII, *Fig.* 4). Supposons, par exemple, que le globe supérieur atteigne l'inférieur au point ϖ, et qu'après la réflexion, la vîtesse du supérieur en descendant soit telle, qu'elle pourrait lui faire remonter l'espace ϖN; que la vîtesse de l'inférieur en descendant soit aussi telle, qu'elle serait capable de lui faire parcourir en remontant, l'espace ϖM. Actuellement, les temps que le globe A emploierait à parcourir de nouveau en descendant, les espaces $N\varpi$, NG, ces temps, dis-je, seront entre eux comme $\sqrt{N\varpi}$ est à $\sqrt{NG}$; et les temps que le globe B emploierait à parcourir une seconde fois, mais en descendant, les espaces $M\varpi$, MH, seraient entre eux, comme $\sqrt{M\varpi}$ est à $\sqrt{MH}$; ainsi le temps que le globe supérieur emploierait à parcourir l'espace ϖG, serait au temps que l'inférieur emploierait à parcourir l'espace ϖH, comme......... $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi}$ est à $\sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Supposez que ces temps soient égaux, et vous aurez $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$. Et comme d'ailleurs la distance GH est donnée, faites $\varpi G + GH = \varpi H$. Et au moyen de ces deux équations, vous arriverez à la résolution du problême. En effet, soit $M\varpi = a$, $N\varpi = b$, $GH = c$ et $\varpi G = x$, on aura pour la dernière équation $\varpi H = x + c$, et en ajoutant, de part et d'autre, $M\varpi$, il viendra..... $\varpi H + M\varpi$, ou $MH = a + c + x$. Et en ajoutant $N\varpi$ à ϖG, on aura, $NG = b + x$; et en substituant toutes ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles représentent, l'équation $\sqrt{NG} - \sqrt{N\varpi} = \sqrt{MH} - \sqrt{M\varpi}$, devient $\sqrt{b + x} - \sqrt{b} = \sqrt{a + c + x} - \sqrt{a}$. Mettez e pour $a + c$, et $\sqrt{f}$ pour $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, et l'équation sera réduite à $\sqrt{b+x} = \sqrt{e+x} - \sqrt{f}$, et en quarrant tout; $b+x=e+x+f-2\sqrt{ef+fx}$, ou bien $e+f-b=2\sqrt{ef+fx}$. Faites $g=e+f-b$, et en substituant, il viendra, $g=2\sqrt{ef+fx}$, ou en quarrant, $g^2=4ef+4fx$; d'où l'on tire, $x=\frac{g^2}{4f}-e$.

PROBLÊME LIV.

Si l'on a deux globes A et B, dont le supérieur A, tombant du point G, rencontre l'inférieur B au moment qu'il remonte, après avoir été réfléchi par le fond H; si ces deux globes, après s'être choqués, se séparent de nouveau, de manière que le globe supérieur remonte à sa première hauteur G, dans le même temps que l'inférieur est renvoyé contre le fond H; ensuite que le globe A retombant encore, tandis que le globe B remonte après avoir été réfléchi par le fond, ces deux globes se choquent une seconde fois au même lieu que la première, et qu'ils continuent ainsi à se choquer sans cesse et à retourner toujours au même point d'où ils étaient partis; il s'agit, connaissant la grandeur des deux globes, la position du fond, et celle du point G, d'où le globe supérieur est tombé, il s'agit, dis-je, de déterminer le lieu où les deux globes se choqueront.

(*Pl.* VII, *Fig.* 5). Soient, e le centre du globe A, et f celui du globe B; d le centre du lieu G, où le globe A est à sa plus grande hauteur; g le centre du globe B lorsqu'il touche le fond; a le demi-diamètre du globe A; b le demi-diamètre du globe B; c le point de contact des deux globes lorsqu'ils se choquent, et H le point de contact du globe inférieur et du fond. La vîtesse du globe A, lorsqu'il arrivera sur le globe B, sera celle qu'il aura acquise en tombant de la hauteur de, ainsi cette vîtesse sera comme $\sqrt{de}$. Il faut que le globe A conserve cette même vîtesse

après

après le choc, pour remonter au lieu *G* d'où il était parti. Et le globe *B* doit être repoussé vers le bas avec une vîtesse égale à celle qui le faisait monter, afin qu'il puisse retourner contre le fond dans un temps égal à celui qu'il avait mis à s'en éloigner. Et pour que ces deux cas arrivent, il faut que les quantités de mouvement soient égales. Or la quantité de mouvement des globes s'évalue en multipliant leur masse par leur vîtesse. Ainsi dans le cas présent, il faut que le produit de la masse du globe *A*, par sa vîtesse, soit égal au produit de la masse du globe *B* par la vîtesse du même *B*. D'où on voit que, si l'on divise le produit de la masse par la vîtesse du premier globe, par la masse du second, le quotient sera la vîtesse du second, tant avant qu'après la réflexion; ou si vous voulez, pour le moment où il va cesser de monter, et pour celui où il commence à descendre. Cette vîtesse sera donc comme $\frac{A\sqrt{de}}{B}$. Ou bien, les globes étant comme les cubes de leurs rayons, cette vîtesse sera représentée par $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Et le quarré de cette vîtesse de *B* est au quarré de la vîtesse de *A* immédiatement avant le choc, comme la hauteur à laquelle s'élèverait *B*, s'il n'était pas rencontré et arrêté par *A*, est à la hauteur *de*, d'où le globe *A* est descendu. C'est-à-dire qu'on a cette proportion, $\frac{A^2 de}{B^2} : de :: h : de$ (*) (*en appelant h la hauteur à laquelle s'élèverait B, s'il*

(*) Cette proportion n'est que la traduction analytique de ce théorême bien connu de mécanique : que dans la chûte des corps graves, les quarrés des vîtesses sont comme les espaces parcourus; ainsi le second terme de cette proportion qui devrait être le quarré de la vîtesse de *A* avant le choc, n'est que l'espace que le corps *A* a parcouru avant le choc. Mais l'un peut être mis au *n'était pas rencontré par A*) ou bien, en nous servant de la dernière expression de la vîtesse de B, $\frac{a^6 de}{b^6} : de :: h : de$ ou x (en appelant x le dernier terme de) ou bien, $a^6 : b^6 :: h : x$, ce qui donne, $h = \frac{a^6 x}{b^6}$. Telle est l'expression de la hauteur à laquelle s'élèverait B, s'il n'était pas arrêté dans son ascension. Supposons que cette hauteur soit fK. Ajoutez à fK la quantité fg, ou $dH - de - ef - gH$, ou $p - x$, en appelant p la quantité donnée $dH - ef - gH$, et x la quantité inconnue de, et vous aurez, $Kg = \frac{a^6}{b^6} x + p - x$. Actuellement si le globe B tombait réellement du point K jusqu'au fond, ou si son centre décrivait l'espace Kg (ce qu'il ferait sans la rencontre du globe A) la vîtesse de ce globe B serait exprimée par $\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$. Mais ce globe ne tombe en effet que du lieu Bcf jusqu'au fond, dans le même temps que le globe A s'élève du lieu Ace jusqu'au point d, ou qu'il descend du point d au lieu Ace. Or dans la chûte des corps graves, les accroissemens des vîtesses sont égaux quand le temps de la chûte est égal. Par conséquent le degré de vîtesse qu'acquiert le globe B en tombant vers le fond, est égal au degré de vîtesse qu'acquiert le globe A qui tombe dans le même temps de d en e; ou même encore, égal au degré de vîtesse que perd le globe A en remontant de e en d,

---

lieu de l'autre, d'après le théorême que nous venons de rapporter. Au reste, remarquez bien qu'on ne met au second terme l'espace parcouru par A, au lieu du quarré de sa vîtesse, que parce que le quatrième terme représente aussi un espace, sans quoi on comparerait ensemble des choses hétérogènes, ce qui serait absurde.

toujours dans le même temps. Ainsi, à la vîtesse qu'avait déja le globe B dans le lieu Bcf, ajoutez la vîtesse du globe A parvenu au lieu Ace, et la somme de ces deux vîtesses, qui est comme $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ou bien comme $\sqrt{x} + \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$, sera la vîtesse totale du globe B lorsqu'il frappe sur le fond. Or, $\sqrt{x} + \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}$ doit être égale à $\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$ (*). A la place de $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, écrivez $\frac{r}{s}$, et à la place de $\frac{a^6 - b^6}{b^6}$, écrivez $\frac{rt}{s^2}$, et l'équation deviendra, $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rtx}{s^2} + p}$. Et en quarrant chaque membre, $\frac{r^2 x}{s^2} = \frac{rtx}{s^2} + p$, équation que l'on peut ordonner ainsi, $\left(\frac{r^2}{s^2} - \frac{rt}{s^2}\right) x = p$; d'où l'on tire, $x = \frac{ps^2}{r^2 - rt}$. Cette équation aurait été plus simple, si au lieu de prendre $\frac{r}{s}$ pour $\frac{a^3 + b^3}{b^3}$, on eût pris $\frac{p}{s}$, car on aurait eu, $x = \frac{s^2}{p - t}$. D'où l'on voit que x ou ed se détermine en faisant cette proportion, $p - t : s :: s : x$ ou de. Maintenant si à de on

(*) Il est d'abord évident que le globe B en tombant du lieu Bcf jusqu'au fond, acquiert la même vîtesse que le globe A qui tombe dans le même temps de G en Ace, et cette vîtesse est représentée par $\sqrt{de}$. En outre, sans la rencontre de A, le globe B aurait encore parcouru l'espace h, ou $fK = \frac{a^6 de}{b^6}$, ce qui suppose une vîtesse $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Donc enfin la vîtesse totale de B est $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, ou bien $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$; mais, sans la rencontre de A, le globe B aurait réellement parcouru tout l'espace gK, ce qui suppose une vîtesse $\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$. Donc enfin.....................

$$\sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x} = \sqrt{x} + \frac{a^3\sqrt{x}}{b^3}.$$

ajoute ec, on aura dc, et par conséquent le point c, où les deux globes se choqueront mutuellement. C. Q. F. T.

PROBLÊME LV.

On a planté, dans un certain lieu de la terre, aux points A, B, C, trois piquets perpendiculaires au plan horizontal : le piquet qui est en A, a six pieds ; celui qui est en B, en a dix-huit, et celui qui est en C, huit ; la droite AB est de trente pieds. Il arrive qu'un certain jour de l'année l'extrémité de l'ombre du piquet A passe par les points B et C ; que l'extrémité de l'ombre du piquet B passe par A et C ; et que l'extrémité de l'ombre du piquet C passe par A. On demande la déclinaison du soleil, et l'élévation du pole, ou, ce qui est la même chose, le jour et le lieu où cela est arrivé.

(*Pl.* VII, *Fig.* 6). Puisque l'ombre de chaque piquet a décrit une section conique, qui est la section du cône lumineux, dont le sommet est placé au sommet même du piquet ; je supposerai que $BCDEF$ est la courbe de cette espèce (parabole, hyperbole ou ellipse) que l'ombre du piquet A, a décrite ce jour-là ; je supposerai de plus, que AD, AE, AF ont été les ombres du piquet A ; BC, BA celles du piquet B ; et CA celle du piquet C. Je supposerai encore que PAQ est la méridienne ou l'axe de la courbe, et que les perpendiculaires BM, CH, DK, EN et FL abaissées des différens points de la courbe sur PAQ, en sont les ordonnées. J'appellerai ces ordonnées, y, et les parties interceptées de l'axe, telles que AM, AH, AK, AN et AL, je les appellerai x. Je supposerai enfin que l'équation $a^2 \pm bx \pm cx^2 = y^2$ exprime la nature de la courbe, c'est-à-dire, la relation entre les x et les y. Et je regarderai comme connues, a^2, b, c (l'analyse les fera bientôt connaître). Je n'ai pris que de deux dimensions au plus les inconnues x et y, puisque l'équation est aux sections coniques. Je n'ai pas fait entrer dans l'équation les dimensions impaires de y, parce que les y ou ordonnées prennent immédiatement leur origine sur l'axe. Comme on ne sait pas encore si b et c doivent être pris positivement ou négativement, j'ai affecté les termes où ils se trouvent du signe ambigu $\pm$. J'ai donné le signe positif à a^2, parce que le piquet A portant son ombre de différens côtés, tels que C, F, B et E, il est évident qu'il doit être enveloppé de toutes parts, par la concavité de la courbe. Par conséquent, si on élève au point A une perpendiculaire $A\beta$, elle ira rencontrer quelque part en β, la courbe : ainsi elle sera l'ordonnée pour le point où $x = 0$; et comme elle rencontre toujours la courbe, elle sera toujours réelle; donc son quarré a^2 doit toujours être positif.

Il est donc constant que l'équation feinte $a^2 \pm bx \pm cx^2 = y^2$, ne contient aucun terme superflu, et que pourtant elle en contient autant qu'il est nécessaire pour exprimer tous les cas possibles du problême, soit qu'ils se rapportent à l'ellipse, à la parabole ou à l'hyperbole; et que, dans tous ces cas, nous serons en état d'assigner des valeurs réelles ou nulles pour les quantités a^2, b, c. L'analyse suivante va nous faire connaître quelles sont ces valeurs, et avec quels signes elles doivent être prises; et enfin quelle est la nature de la courbe.

Première partie analytique.

Comme les ombres sont dans le rapport de la longueur des piquets, on aura, $BC : AD :: AB : AE :: 18 : 6 :: 3 : 1$. Ensuite $CA : AF :: 8 : 6 :: 4 : 3$. Ainsi appelant AM, r; BM, s;

AH, t; et HC, $\pm v$: comme les triangles AMB, ANE sont semblables, ainsi que AHC et ALF, on aura, $AN = -\frac{r}{3}$, $NE = -\frac{s}{3}$, $AL = -\frac{3t}{4}$, et $LF = \mp \frac{3v}{4}$. J'ai donné à ces différentes quantités des signes contraires à ceux de AM, MB, AH, HC, parce que toutes étant rapportées au point A, il est clair que si je donne le signe $+$ aux lignes qui vont à droite de ce point, celles qui vont à gauche doivent avoir le signe $-$. Par la même raison, celles qui sont au-dessus de PAQ, telles que BM, étant affectées du signe $+$, celles qui sont au-dessous, telles que NE doivent avoir le signe $-$. Maintenant si on écrit respectivement ces valeurs à la place de x et de y dans l'équation feinte..... $a^2 \pm bx \pm c^2x^2 = y^2$, on aura,

En mettant r pour x et s pour y, $a^2 \pm br \pm cr^2 = s^2$.

En mettant $-\frac{r}{3}$ pour x et $-\frac{s}{3}$ pour y, on aura.......... $a^2 \mp \frac{br}{3} \pm \frac{1}{9}cr^2 = \frac{1}{9}s^2$.

En mettant t pour x et $\pm v$ pour y, on aura, $a^2 \pm bt \pm ct^2 = v^2$. Enfin, si nous mettons $-\frac{3}{4}t$ pour x et $\mp\frac{3}{4}v$ pour y, nous aurons, $a^2 \mp \frac{3}{4}bt \pm \frac{9}{16}ct^2 = \frac{9}{16}v^2$. Si, au moyen des deux premières équations, on élimine s^2, afin d'avoir la valeur de r, on trouvera, $r = \frac{2a^2}{\pm b}$; d'où il suit que b est nécessairement positif. Ensuite éliminant v^2 au moyen des troisième et quatrième équations, afin d'obtenir la valeur de t, il viendra, $t = \frac{a^2}{3b}$. Après quoi, mettant dans la première équation, au lieu de r sa valeur $\frac{2a^2}{b}$, et dans le troisième, au lieu de t sa valeur $\frac{a^2}{3b}$, l'une deviendra, $3a^2 \pm \frac{4a^4c}{b^2} = s^2$, et l'autre, $\frac{4}{3}a^2 \pm \frac{a^4c}{9b^2} = v^2$.

Ensuite menant du point B, $B\lambda$ perpendiculairement à CH, on aura la proportion $BC : AD :: 3 : 1 :: B\lambda : AK :: C\lambda : DK$. Et comme $B\lambda = AM - AH = r - t = \frac{5a^2}{3b}$, on aura, $AK = \frac{5a^2}{9b}$, ou plutôt $AK = -\frac{5a^2}{9b}$. On a aussi, $C\lambda = CH \pm BM = v \pm s = \sqrt{\frac{4a^2}{3} \pm \frac{a^4c}{9b^2}} \pm \sqrt{3a^2 \pm \frac{4a^4c}{b^2}}$. Donc à cause de $DK = \frac{1}{3}C\lambda$, on aura, $DK = \sqrt{\frac{4a^2}{27} \pm \frac{a^4c}{81b^2}} \pm \sqrt{\frac{a^2}{3} \pm \frac{4a^4c}{9b^2}}$. Ces quantités étant écrites dans l'équation, $a^2 + bx \pm cx^2 = y^2$, au lieu de AK et DK, ou de x et y, on aura, $\frac{4a^2}{9} \pm \frac{25a^4c}{81b^2} = \frac{13}{27}a^2 \pm \frac{37a^4c}{81b^2} \pm 2\sqrt{\frac{4a^2}{27} \pm \frac{a^4c}{81b^2}} \times \sqrt{\frac{a^2}{3} \pm \frac{4a^4c}{9b^2}}$. Et en réduisant, $-b^2 \mp 4a^2c = \pm 2\sqrt{36b^4 \pm 51a^2b^2c + 4a^4c^2}$. Quarrant de nouveau chaque membre et réduisant, on a........... $0 = 143b^4 \pm 196a^2b^2c$, ou bien $\pm c = -\frac{143b^2}{196a^2}$. D'où l'on voit que c doit être négatif, et que par conséquent, l'équation feinte, $a^2 \pm bx \pm cx^2 = y^2$ doit être de la forme $a^2 + bx - cx^2 = y^2$, et qu'ainsi la courbe qu'elle exprime est une ellipse. Voici de quelle manière on en trouvera le centre et les axes.

En supposant $y = 0$, comme cela arrive aux sommets P et Q, notre équation se réduit à $a^2 = cx^2 - bx$. Cette équation étant résolue donne, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a^2}{c}} = AQ$ ou AP. Ainsi prenant $AV = \frac{b}{2c}$, le point V sera le centre de l'ellipse, et VP ou $VQ = \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a^2}{c}}$, la moitié du grand axe. Maintenant, si on écrit AV ou sa valeur $\frac{b}{2c}$, au lieu de x, dans l'équation....

$a^2 + bx - cx^2 = y^2$, elle deviendra, $a^2 + \frac{b^2}{4c} = y^2$. Ainsi...
$a^2 + \frac{b^2}{4c} = \overline{VZ}^2$, quarré de la moitié du petit axe. Enfin si, dans les valeurs de AV, VQ, VZ déjà trouvées, on substitue au lieu de c sa valeur $\frac{143\,b^2}{196\,a^2}$, on aura, $AV = \frac{98\,a^2}{143\,b}$;........ $VQ = \frac{112\,a^2\sqrt{3}}{143\,b}$; et $VZ = \frac{8\,a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$.

Seconde partie analytique.

(*Pl.* VII, *Fig.* 7). Supposons que le piquet en A soit AR, et que RPQ soit le plan méridional, et $RPZQ$ le cône radieux dont le sommet est en R. Soit de plus TXZ un plan dont la commune section avec le plan horizontal soit VZ, et dont la commune section avec le plan méridional ou vertical soit TVX, et qu'on ait dirigé cette section TVX perpendiculairement à l'axe du monde; alors le plan TXZ sera lui-même perpendiculaire à l'axe du monde, et il coupera le cône dans la circonférence du cercle TZX, circonférence dont chaque point T, Z, X, sera également éloigné du sommet R du cône. Par conséquent si on mène à TVX une parallèle PS, on aura, $PR = RS$, à cause de $RX = RT$. On aura aussi, $SX = XQ$, à cause des lignes égales PV, VQ; d'où l'on conclut que RX ou $RZ = \frac{RS + RQ}{2} = \frac{RP + RQ}{2}$. Soit enfin tiré RV. Comme VZ est la commune section de deux plans perpendiculaires au plan PRQ, il s'en suit que VZ est elle-même perpendiculaire à ce plan, et que par conséquent le triangle RVZ est rectangle en V. Faisant donc $RA = d$, $AV = e$, VP ou $VQ = f$, et $VZ = g$, on aura, $AP = f - e$, et $RP = \ldots\ldots$

$\sqrt{f^2}$

$\sqrt{f^2 - 2ef + e^2 + d^2}$. Ensuite $AQ = f + e$, et $RQ = \ldots\ldots$ $\sqrt{f^2 + 2fe + e^2 + d^2}$. Par conséquent, $RZ = \frac{RP + RQ}{2} = \ldots$ $\frac{\sqrt{f^2 - 2fe + e^2 + d^2} + \sqrt{f^2 + 2fe + e^2 + d^2}}{2}$, dont le quarré .... $\frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2e^2f^2 + e^4 + 2d^2f^2 + 2d^2e^2 + d^4}$ est égal à $\overline{RV}^2 + \overline{VZ}^2 = \overline{RA}^2 + \overline{AV}^2 + \overline{VZ}^2$. Or, $\overline{RA}^2 + \overline{AV}^2 + \overline{VZ}^2 = d^2 + e^2 + g^2$. Donc $d^2 + e^2 + g^2 = \frac{d^2 + e^2 + f^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{f^4 - 2e^2f^2 + e^4 + 2d^2f^2 + 2d^2e^2 + d^4}$. Et en faisant la réduction, on a, $\sqrt{f^4 - 2e^2f^2 + e^4 + 2d^2f^2 + 2d^2e^2 + d^4} = d^2 + e^2 - f^2 + 2g^2$. Et en quarrant et ordonnant, $d^2f^2 = \ldots$ $d^2g^2 + e^2g^2 - f^2g^2 + g^4$, ou bien, $\frac{d^2f^2}{g^2} = d^2 + e^2 - f^2 + g^2$. Enfin si à la place de AR, d; de AV, e; de VZ, g; et de VQ, f, on met les valeurs de ces lignes, déja connues ou déterminées, et qui sont respectivement, 6; $\frac{98a^2}{143b}$, $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$, $\frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}$, notre dernière équation deviendra, $36 - \frac{196a^4}{143b^2} + \frac{192a^2}{143} = \frac{36 \times 14 \times 14a^2}{143b^2}$; et en réduisant, $\frac{49a^4 + 36 \times 49a^2}{48a^2 + 1287} = b^2$.

Dans la Figure 6, on a, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2$, c'est-à-dire, $r^2 + s^2 = \overline{33}^2$. Et nous avons trouvé, $r = \frac{2a^2}{b}$; et $s^2 = 3a^2 - \frac{4a^4c}{b^2}$. De $r = \frac{2a^2}{b}$, nous tirons $r^2 = \frac{4a^4}{b^2}$, et si nous substituons à la place de c sa valeur $\frac{143b^2}{196a^2}$, dans l'équation $s^2 = 3a^2 - \frac{4a^4c}{b^2}$; elle deviendra, $s^2 = \frac{4a^2}{49}$. Ensuite ces valeurs de r^2 et s^2, mises dans l'équation $r^2 + s^2 = \overline{33}^2$, la changent en celle-ci .... $\frac{4a^4}{b^2} + \frac{4a^2}{49} = \overline{33}^2$. Et en réduisant, on a encore, $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4a^2} = b^2$.

Égalant maintenant cette nouvelle valeur de b^2 à celle que nous avons trouvée plus haut, et divisant tout par 49, il nous viendra, $\frac{a^4 + 36a^2}{48a^2 + 1287} = \frac{4a^4}{53361 - 4a^2}$. Multipliant en sautoir les deux membres de cette équation, ordonnant et divisant par 49, il viendra, $4a^4 = 981a^2 + 39204$; équation dans laquelle a est l'inconnue qu'on cherche. Si on la résout par la méthode des équations du second degré, on trouvera, $a^2 = \frac{981 + \sqrt{1589625}}{8} = 280{,}2254144$. Nous avons trouvé plus haut, $\frac{4 \times 49a^4}{53361 - 4a^2} = b^2$, ou bien..... $\frac{14a^2}{\sqrt{53361 - 4a^2}} = b$. Si dans $AV = \frac{98a^2}{143b}$, nous substituons cette valeur de b, il viendra, $AV = \frac{7\sqrt{53361 - 4a^2}}{143}$. De même si nous substituons encore cette valeur de b dans VP, ou $VQ = \frac{112a^2\sqrt{3}}{143b}$, nous aurons, $\frac{8\sqrt{160083 - 12a^2}}{143} = VP$ ou VQ. Et encore, en mettant 280,2254144, au lieu de a^2 dans les valeurs de AV et de VP ou VQ, que nous venons de trouver, nous aurons, en réduisant tout en décimales, $AV = 11{,}188297$, et VP ou $VQ = 22{,}147085$. Par conséquent $AP\,(VP - AV) = 10{,}958788$, et $AQ\,(AV + VQ) = 33{,}335382$.

Enfin si l'on prend pour rayon 1 pied ou $\frac{1}{6}\,AR$, on aura, $\frac{1}{6}\,AQ$ ou 5,555897 pour la tangente de l'angle ARQ, qui se trouvera de 79°, 47', 48". Et $\frac{1}{6}\,AP$ ou 1,826465 tangente de l'angle ARP, nous fait connaître que cet angle est de 61°, 17', 57". La demi-somme de ces angles est de 70°, 32', 52", complément de la déclinaison du soleil; et leur demi-différence 9°, 14', 56" est le complément de la latitude du lieu. Ainsi la déclinaison du soleil était de 19°, 27', 8", et la latitude du lieu de 80°, 45', 4". C. Q. F. T.

PROBLÊME LVI.

Une comète traversant le ciel d'un mouvement uniforme et rectiligne ; il s'agit de déterminer, par quatre observations faites en différens temps, sa distance de la terre, et la loi de son mouvement d'après le système de Copernic.

(*Pl.* VII, *Fig.* 8). Si de chacun des points du ciel où se trouvait le centre de la comète, au temps de chacune des observations, on abaisse autant de perpendiculaires sur le plan de l'écliptique, et que A, B, C, D soient les points où ces quatre perpendiculaires rencontrent ce plan, menez par ces points la droite AD; cette droite et la ligne que décrit la comète par son mouvement, seront coupées en même raison par les quatre perpendiculaires, de manière qu'on aura $AB : AC ::$ le temps qui s'est écoulé entre la première et la seconde observations : au temps entre la première et la troisième. On a encore, $AB : AD ::$ le temps entre la première et la seconde observations : au temps entre la première et la quatrième. Ainsi les temps des observations nous donnent les rapports que les lignes AB, AC, AD ont entre elles.

Soient de plus, le lieu du soleil dans l'écliptique, S; l'arc de l'écliptique dans lequel se meut la terre, EH; les quatre différens lieux où se trouvait la terre au temps de chacune des quatre observations, E, F, G, H. Supposons, par exemple, qu'elle se trouvait en E au temps de la première, en F au temps de la seconde, en G au temps de la troisième, et en H au temps de la quatrième. Joignez AE, BF, CG, DH; prolongez les trois dernières jusqu'à ce qu'elles coupent la première AE; le point de section de BF avec AE

sera I; celui de CG sera K; celui de DH sera L. Et les angles AIB, ACK, ALD seront les différences des longitudes observées de la comète; AIB, par exemple, sera la différence des longitudes entre le premier et le second lieux de la comète; AKC la différence des longitudes entre le premier et le troisième lieux; et ALD la différence des longitudes entre le premier et le quatrième. Ainsi les angles AIB, AKC et ALD sont donnés par les observations.

Joignez par des droites les points S, E; S, F; E, F. Et comme les points S, E, F sont donnés, ainsi que l'angle ESF, l'angle SEF sera aussi donné. On connaît également l'angle SEA, car il est la différence de la longitude de la comète et du soleil au temps de la première observation; ainsi, en ajoutant son complément à deux droits, c'est-à-dire, l'angle SEI, à l'angle SEF, vous aurez l'angle IEF. Donc dans le triangle IEF, on a les angles et le côté EF, et par conséquent, le côté IE est aussi donné. Par un semblable raisonnement, on verra que les côtés KE et LE sont aussi donnés. Les quatre lignes AI, BI, CK, DL sont donc données de position; ainsi le problême proposé revient à celui-ci: quatre droites étant données de position, en trouver une cinquième, qui soit coupée par les quatre premières dans un rapport donné.

Ayant abaissé sur AE les perpendiculaires BM, CN, DO, à cause de l'angle donné AIB, on a le rapport de BM à MI. Ensuite BM est à CN dans le rapport de BA à CA; et à cause de l'angle donné CKN, on a le rapport de CN à KN, et par conséquent, celui de BM à KN, ainsi que celui de BM à $MI - KN$, ou ce qui est la même chose, de BM à $MN + IK$. Faites, $P : IK :: AB : BC :: MA : MN$; d'où $P + MA : IK + MN :: AB : BC$. C'est-à-dire que $P + MA$ et $IK + MN$

sont entre eux en raison donnée. Donc on a aussi la raison de BM à $P + MA$. Par un raisonnement semblable, si on prend $Q : IL :: AB : BD$, on aura aussi le rapport de BM à $Q + MA$, et par conséquent, celui de BM à la différence des deux quantités $B + MA$ et $Q + MA$ sera aussi donné. Or la différence de ces deux quantités, c'est-à-dire, $P - Q$ ou $Q - P$ est donnée, donc BM, est aussi donné; et BM étant donné, $P + MA$ et MI le sont également, ainsi que MA, ME, AE et l'angle EAB.

Ces quantités étant trouvées, élevez au point A une perpendiculaire au plan de l'écliptique, et qui soit à AE comme la tangente de la latitude de la comète, dans la première observation, est au rayon; et l'extrémité de cette perpendiculaire ainsi déterminée de longueur, sera le lieu du centre de la comète au temps de la première observation. Par conséquent on connaîtra la distance de la comète à la terre, au temps de cette première observation. Si on élève de la même manière au point B une perpendiculaire qui soit à BF comme la tangente de la latitude de la comète, dans la seconde observation, est au rayon, on aura le lieu du centre de la comète dans cette seconde observation. Et joignant le premier lieu du centre au second, on aura la route que suit la comète dans le ciel.

PROBLÊME LVII.

Si un angle donné CAD n'a que la faculté de tourner autour du point A donné de position ; que l'angle donné CBD n'ait aussi qu'un mouvement possible de rotation autour du point B donné de position ; et que les deux angles tournent en effet selon cette loi, en supposant de plus que les côtés AD, BD se coupent toujours dans une ligne droite EF donnée de position : il s'agit de déterminer la courbe que décrira la suite des intersections C des deux autres côtés AC, BC.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 1). Prolongez CA jusqu'en d, afin d'avoir $Ad = AD$; prolongez également CB jusqu'en δ, afin d'avoir $BD = B\delta$; faites l'angle Ade égal à l'angle ADE, et l'angle $B\delta f$ égal à l'angle BDF, et prolongez de part et d'autre la droite AB, jusqu'à ce qu'elle rencontre de en e, et δf en f; prolongez aussi ed jusqu'en G, afin d'avoir $dG = \delta f$. Et du point C menez CH parallèlement à ed, et CK parallèlement à δf. Et si l'on conçoit que les lignes eG, $f\delta$ demeurent immobiles, tandis que les angles CAD, CBD tournent selon la loi prescrite, autour des poles A et B, on aura toujours $dG = \delta f$, et le triangle CKH sera donné d'espèce. (62). Faites donc $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, et $CK = y$, il viendra, $BK : CK :: Bf : \delta f$. Donc $\delta f = \frac{cy}{x} = dG$. Retranchez cette quantité de Ge, le reste sera, $ed = b - \frac{cy}{x}$. Comme le triangle CHK est donné d'espèce, faites $CK : CH :: d : e$, et $CH : HK :: e : f$, et vous aurez, $CH = \frac{ey}{d}$, et $HK = \frac{fy}{d}$. Par conséquent $AH = m - x - \frac{fy}{d}$. On a de plus, $AH : HC :: Ae : ed$, c'est-à-dire.........

$m - x - \frac{fy}{d} : \frac{ey}{d} :: a : b - \frac{cy}{x}$. Ainsi, en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on aura.................

$$mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bfy}{d} + \frac{cfy^2}{dx} = \frac{aey}{d}.\ (63).$$

Multipliez tous les termes par dx, ensuite ordonnez, et il viendra.....

$$fcy^2 \left.\begin{matrix} +dc \\ -ae \\ -bf \end{matrix}\right\} yx - dcmy - bdx^2 + bdmx = 0.$$

D'où il suit que, les deux inconnues x et y ne s'élevant pas au-delà de deux dimensions, la courbe que décrit le point C est une section conique. Faites $\frac{ae + bf - dc}{c} = 2p$, et vous aurez.....................

$$y^2 = \frac{2p}{f} \cdot xy + \frac{dm}{f} \cdot y + \frac{bd}{fc} \cdot x^2 - \frac{bdm}{fc} \cdot x.$$

Et si l'on résout cette équation pour avoir la valeur de y, elle donnera.........

$$y = \frac{px}{f} + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{p^2x^2}{f^2} + \frac{bdx^2}{fc} + \frac{pdmx}{f^2} - \frac{bdmx}{fc} + \frac{d^2m^2}{4f^2}}.$$

D'où l'on conclut que la courbe est une hyperbole, si $\frac{bd}{fc}$ est positif, ou si, étant négatif, il est moins grand que $\frac{p^2}{f^2}$. Elle sera une parabole, si $\frac{bd}{fc}$ est négatif et égal à $\frac{p^2}{f^2}$; un cercle ou une ellipse, si $\frac{bd}{fc}$ est négatif, et plus grand que $\frac{p^2}{f^2}$. C. Q. F. T.

PROBLÊME LVIII.

Décrire une parabole qui passe par quatre points donnés.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 2). Soient ces quatre points A, B, C, D; joignez A et B, et coupez AB en deux parties égales au point E. Menez une droite quelconque EV que vous supposerez un diamètre de la parabole, et le point V, le sommet de ce diamètre. Joignez A et C, et par le point D menez à AB la parallèle DG qui rencontrera AC en G. Faites $AB = a$, $AC = b$, $AG = c$, et $GD = d$. Sur AC prenez une ligne AP d'une grandeur quelconque ; par le point P menez à AB la parallèle PQ, et supposez que le point Q appartient à la parabole. Faites $AP = x$, et $PQ = y$. Prenez ensuite une équation quelconque à la parabole, et qui exprime la relation qui existe entre AP et PQ. Soit cette équation $y = e + fx \pm \sqrt{g^2 + hx}$.

Actuellement supposez AP ou $x = 0$, le point P tombera en A, et PQ ou y aura deux valeurs, l'une zéro, et l'autre $- AB$. Faisons donc, dans l'équation que nous avons prise, $x = 0$, elle deviendra, $y = e \pm \sqrt{g^2}$, c'est-à-dire $y = e \pm g$. De ces deux valeurs, la plus grande est, $y = e + g$, et la plus petite est, $y = e - g = - AB = - a$. Or dans le cas de $x = 0$, nous avons vu qu'une valeur de y était aussi zéro. Donc on a, $0 = e + g$ (*) ; ce qui donne, $e = - g$. De la seconde équation, $e - g = - a$, on tire, en mettant pour e sa valeur $- g$, trouvée par la première équation, on tire, dis-je, $- 2g = - a$, ou $g = \frac{1}{2} a$. Ainsi, au lieu de l'équation que nous avons prise, nous aurons celle-ci ; $y = - \frac{1}{2} a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + hx}$.

Supposons encore que AP ou $x = AC$, de manière que le point P tombe en C, nous aurons de nouveau $PQ = 0$. Au lieu de x dans la dernière équation, écrivez AC ou b, et au lieu de y, 0, et elle deviendra, $0 = - \frac{1}{2} a + fb \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + bh}$. Ou bien..........

(*) Il est bien évident que, dans le cas de $x = 0$, la plus grande valeur de y est zéro, puisque son autre valeur est négative, et qu'une quantité négative est plus petite que zéro.

$\frac{1}{2} a -$

$\frac{1}{2}a - fb = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bh}$. Et en quarrant chaque membre..... $- afb + f^2b^2 = bh$, ou bien, $f^2b - fa = h$. Par conséquent, au lieu de l'équation supposée, nous aurons celle-ci...........
$y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bx - fax}$.

Supposons de nouveau que AP ou $x = AG$ ou c, nous aurons, PQ ou $y = -GD = -d$. Ecrivons donc, dans la dernière équation, c au lieu de x, et $-d$ au lieu de y, et elle deviendra, $-d = -\frac{1}{2}a + fc \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bc - fac}$. Ou bien...........
$\frac{1}{2}a - d - fc = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bc - fac}$, et en quarrant chaque membre et réduisant, $-ad + d^2 + 2dcf + c^2f^2 = f^2bc$. On voit que f étant l'inconnue, l'équation est du second degré. Si, pour abréger, on fait $b - c$ ou $GC = k$, et qu'on résolve l'équation, on trouvera, $f = \frac{d}{k} \pm \sqrt{\frac{d^2c + d^2k - adk}{ck^2}}$. f étant ainsi déterminée, l'équation $y = -\frac{1}{2}a + fx \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + f^2bx - fax}$, est entièrement déterminée, et par conséquent aussi la parabole dont elle exprime la nature.

Voici de quelle manière on la construira. Du point C menez à BD la parallèle CH jusqu'à ce qu'elle rencontre DG en H; prenez une moyenne proportionnelle DK entre DG et DH; tirez la droite CK, et parallèlement à CK menez EI qui passe par le point E milieu de AB, et qui rencontre DG en I; prolongez ensuite IE jusqu'en V, de manière que vous ayez $EV : EI ::$ $\overline{EB}^2 : \overline{DI}^2 - \overline{EB}^2$, alors VE sera un diamètre de la parabole, V sera le sommet de ce diamètre, et $\frac{\overline{BE}^2}{VE}$ sera son paramètre. (64).

PROBLÊME LIX.

Décrire une section conique qui passe par cinq points donnés.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 3). Soient ces points A, B, C, D, E. Tirez AC, BE qui se couperont mutuellement en H. Menez à BE la parallèle DI, qui rencontrera AC au point I; ensuite à AC la parallèle EK, qui rencontrera en K, DI prolongée. Il faut prolonger aussi DI jusqu'en F, et EK jusqu'en G, afin d'avoir la proportion $AH \times HC : BH \times HE :: AI \times IC : FI \times ID :: EK \times KG : FK \times KD$. Et les points F et G appartiendront, comme on sait, à la section conique. Il faut cependant observer que si le point H tombe entre tous les points A, C, B, E, ou hors de tous ces points, le point I devra tomber entre tous les points A, C, D, F, ou bien entièrement au-dehors; et le point K entre tous les points D, F, E, G, ou entièrement au-dehors. (65). Mais si le point H tombe entre les deux points A, C, et hors des deux autres points B, E; ou entre les deux points B, E, et hors des deux autres A, C, le point I devra tomber entre deux quelconques des quatre points A, C, F, D, et hors des deux autres. De même le point K devra tomber entre deux quelconques des quatre points D, F, E, G, et hors de deux de ces mêmes quatre points. C'est ce qui arrivera en prenant IF, KG d'un côté ou de l'autre des points I et K, selon que l'exige le problême. Les points F et G étant déterminés, coupez AC et EG en deux parties égales, en N et en O, ainsi que BE et FD en L et en M. Tirez NO, LM qui se couperont mutuellement en R, et LM et NO seront les diamètres de la section conique; le point R en sera le centre, et BL et FM seront les ordonnées du diamètre LM. Prolongez LM de part et d'autre, si cela est nécessaire, jusqu'aux points P et Q, de manière que vous ayiez $\overline{BL}^2 : \overline{FM}^2 :: PL \times LQ : PM \times MQ$, et les points P et Q seront les sommets de la section conique, et PQ en sera le diamètre principal. Faites $PL \times LQ : \overline{LB}^2 :: PQ : T$, et T sera le paramètre. Ces deux lignes connues, la section est déterminée.

Il reste maintenant à montrer de quelle manière il faut prolonger de part et d'autre la droite LM jusqu'aux points P et Q, pour qu'on ait la proportion $\overline{BL}^2 : \overline{FM}^2 :: PL \times LQ : PM \times MQ$. D'abord $PL \times LQ = (PR - LR)(PR + LR)$, car $PL = PR - RL$, et $LQ = RQ + RL$, ou $PR + RL$. Enfin $(PR - RL)(PR + RL) = \overline{PR}^2 - \overline{RL}^2$. On a de même $PM \times MQ = (PR + RM)(PR - RM) = \overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Donc $\overline{BL}^2 : \overline{FM}^2 :: \overline{PR}^2 - \overline{RL}^2 : \overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Et en soustrayant, $\overline{BL}^2 - \overline{FM}^2 : \overline{FM}^2 :: \overline{RM}^2 - \overline{RL}^2 : \overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Par conséquent $\overline{BL}^2 - \overline{FM}^2$ et $\overline{FM}^2$ étant donnés, ainsi que $\overline{RM}^2 - \overline{RL}^2$, il s'en suit qu'on aura aussi, $\overline{PR}^2 - \overline{RM}^2$. Et si à cette dernière quantité vous ajoutez la quantité donnée $\overline{RM}^2$, la somme sera $\overline{PR}^2$. Donc l'on connaîtra le demi-diamètre $PR = QR$.

PROBLÊME LX.

Décrire une section conique qui passe par quatre points donnés, et qui, dans un de ces points, touche une ligne droite donnée de position.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 4). Soient les quatre points donnés A, B, C, D; et AE la droite donnée de position, que doit toucher la section conique au point A. Joignez deux quelconques des quatre points, D et C par exemple, et prolongez la droite DC, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre en E la ligne tangente. Par le point B, menez à DC la parallèle BF, qui rencontrera la ligne tangente en F. Ensuite par le point D, menez à AE une parallèle DI, qui rencontrera BF en I. Sur les droites BF, DI prolongées, s'il est nécessaire, prenez FG, HI d'une longueur telle, que vous ayez la proportion $\overline{AE}^2 : CE \times ED :: \overline{AF}^2 : BF \times FG :: DI \times IH : BI \times IG$, et les points G et H seront, comme on sait, à la section conique (66), pourvu que vous preniez FG, IH du côté convenable, par rapport aux points F et I, comme on l'a enseigné dans le problême précédent. Coupez en deux parties égales les droites BG, DC, DH en K, L, M; tirez KL, MA qui se couperont en O; et O sera le centre, A, le sommet, et MH l'ordonnée du demi-diamètre AO. Toutes ces choses étant connues, la section conique est déterminée.

PROBLÊME LXI.

Décrire une section conique qui passe par trois points donnés, et qui, dans deux de ces points, touche deux droites données de position.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 5). Soient ces points donnés A, B, C; les tangentes aux points A et B, AD et BD; enfin D l'intersection commune des deux tangentes. Coupez AB en deux parties égales au point E, tirez DE que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre en F la droite CF menée parallèlement à AB, vous aurez DF pour le diamètre de la courbe, et AE et CF seront les ordonnées à ce diamètre. Prolongez DF jusqu'en O, et sur DO prenez OV moyenne proportionnelle entre DO et EO. (*). Faites en même temps cette proportion, $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: VE \times (VO + OE) : VF \times (VO + OF)$. Le point V sera le sommet de la courbe, et le point O en sera le centre. Ces points connus, la figure est déterminée. Actuellement $VE = VO - OE$, et par conséquent $VE(VO + OE) = (VO - OE)(VO + OE) = \overline{VO}^2 - \overline{OE}^2$. En outre, comme VO est moyenne proportionnelle entre DO et

(*) Le lecteur doit bien voir que O étant le centre inconnu de la courbe, les lignes DO, VO, EO sont toutes inconnues; mais aussitôt que ce point O sera connu, ces trois lignes le seront aussi. Car l'équation à la soutangente pour l'ellipse et l'hyperbole (seules sections coniques qui aient un centre) étant $s = \frac{\frac{1}{4}a^2 - x^2}{x}$, on en tire pour l'ellipse $\frac{1}{4}a^2 = x(s + x)$, ou $\overline{VO}^2 = EO \times DO$. Donc toutes les opérations que Newton fait avec ces lignes, sont purement analytiques, jusqu'à ce que le centre O soit déterminé.

EO, on aura, $\overline{VO}^2 = DO \times EO$; par conséquent $\overline{VO}^2 - \overline{OE}^2 = DO \times OE - \overline{OE}^2 = OE(DO - OE) = OE \times DE$. Par le même raisonnement on trouvera, $VF(VO + OF) = \overline{VO}^2 - \overline{OF}^2 = DO \times OE - \overline{OF}^2$; par conséquent on a, $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: DE \times EO : DO \times OE - \overline{OF}^2$. De plus, $\overline{OF}^2 = \overline{EO}^2 - 2FE \times EO + \overline{FE}^2$. Ainsi, $DO \times OE - \overline{OF}^2 = DO \times OE - \overline{OE}^2 + 2FE \times EO - \overline{FE}^2 = DE \times EO + 2FE \times EO - \overline{FE}^2$, et alors $\overline{AE}^2 : \overline{CF}^2 :: DE \times EO : DE \times EO + 2FE \times EO - \overline{FE}^2 :: DE : DE + 2FE - \frac{\overline{FE}^2}{EO}$. Ainsi la quantité $DE + 2EF - \frac{\overline{FE}^2}{EO}$ est connue; retranchez-la de la quantité également connue $DE + 2FE$, et il restera, $\frac{\overline{FE}^2}{EO}$, quantité connue; appelez-la N, et vous aurez, $\frac{\overline{FE}^2}{N} = EO$. Ainsi vous connaîtrez EO, qui elle-même fera connaître VO, moyenne proportionnelle entre DO et EO.

C'est ainsi qu'au moyen de quelques théorêmes d'Apollonius, on résout, d'une manière assez expéditive, ces sortes de problêmes, qui peuvent l'être aussi sans autre secours que la seule algèbre. Par exemple, si on voulait résoudre ainsi celui des trois derniers problêmes, où il s'agit de faire passer une section conique par cinq points donnés, A, B, C, D, E (*Pl.* VIII, *Fig.* 6); joignez d'abord deux quelconques des cinq points, A et C; joignez-en après cela deux autres B et E, et les droites AC, BE se couperont en un point H. Menez parallèlement à BE la droite DI qui rencontrera AC en I; menez encore parallèlement BE une autre droite quelconque KL rencontrant AC en K, et la section conique en L.

Supposez que la section conique est donnée, afin que le point K étant connu, le point L le soit aussi, en faisant $AK = x$ et $KL = y$. Afin d'exprimer la relation qui existe entre les x et les y, prenez l'équation la plus générale des sections coniques, par exemple, $a + bx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0$, dans laquelle a, b, c, d, e marquent des quantités déterminées avec leurs signes, et x et y des quantités indéterminées. Maintenant, si nous pouvons trouver la valeur des quantités déterminées, nous aurons la section conique. Supposons donc que le point L tombe successivement en A, C, B, E, D, et voyons ce qui en résulte. D'abord, que L tombe en A, on aura, dans ce cas, AK et KL; c'est-à-dire, x et y égales à zéro, et tous les termes de l'équation s'évanouiront. Ainsi il faut effacer a de cette équation, qui deviendra, $bx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0$. Ensuite si L tombe en C, on aura, AK ou $x = AC$ et LK ou $y = 0$. Faites donc $AC = f$; et substituant f pour x, et 0 pour y, dans l'équation à la courbe, elle deviendra $bf + cf^2 = 0$, ou bien $b = -cf$. Et si on écrit encore $-cf$ pour b dans l'équation, elle se changera en $-cfx + cx^2 + dy + exy + y^2 = 0$. Ensuite, si le point L tombe sur le point B, on aura, AK ou $x = AH$ et KL ou $y = BH$. Faites $AH = g$, et $BH = h$, et écrivez g au lieu de x, et h au lieu de y dans l'équation, elle deviendra, $-cfg + cg^2 + dh + egh + h^2 = 0$. Si le point L tombe en E, on aura, $AK = AH$, ou $x = g$, et KL ou $y = HE$. Au lieu de HE, écrivez $-k$ (avec un signe négatif, parce que HE tombe de l'autre côté de AC) et en substituant g pour x et $-k$ pour y, la dernière équation devient, $-cfg + cg^2 - dk - egk + k^2 = 0$. Retranchez cette équation de la précédente, et il restera $dh + egh + h^2 + dk + egk - k^2 = 0$. Divisez ce reste par $h + k$, et le quotient sera $d + eg +$

des quatre points donnés A, on pourra plus facilement déterminer l'espèce de section en cette manière : ayant trouvé comme ci-dessus les équations $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$; $d = k - h - eg$, et $c = \frac{hk}{fg - g^2}$, imaginez que la tangente AF aille rencontrer la droite EH en F; ensuite que le point L se meuve sur le périmètre de la Figure CDE, jusqu'à ce qu'il vienne tomber au point A; la raison dernière de LK à AK sera celle de FH à AH, comme il est aisé de le voir en considérant la Figure. Faites $FH = p$, et dans le cas qui nous occupe, où on cherche la raison dernière de LK à AK, on aura, $p : g :: y : x$, ou $\frac{gy}{p} = x$. Donc à la place de x dans l'équation $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$, écrivez, $\frac{gy}{p}$, et il viendra, $\frac{cfgy}{p} = \frac{cg^2y^2}{p^2} + dy + \frac{egy^2}{p} + y^2$. Divisez tout par y, et elle sera réduite à, $\frac{cfg}{p} = \frac{cg^2y}{p^2} + d + \frac{egy}{p} + y$. Maintenant, comme on suppose que le point L tombe au point A, il s'en suit que KL ou y est infiniment petit ou nul; effacez donc les termes multipliés par y, et l'équation sera réduite à $\frac{cfg}{p} = d$. Faites donc $c = \frac{hk}{fg - g^2}$, ensuite $d = \frac{cfg}{p}$, et enfin $e = \frac{k - h - d}{g}$. Et c, e, d étant une fois trouvés, l'équation $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$, déterminera la section conique.

(*Pl.* VIII, *Fig.* 7). Si enfin on ne donne que trois points A, B, C, et la position de deux droites AT, CT qui touchent la section conique dans deux de ces points A et C, on obtiendra, comme ci-dessus, l'équation à une section conique, $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$. Ensuite si on suppose que l'ordonnée KL soit parallèle à la tangente AT, et que de plus cette ordonnée soit prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la courbe en un second point M, et qu'ensuite cette ligne LM, glissant parallèlement à elle-même, s'approche sans cesse de la tangente AT, jusqu'à ce qu'elle s'y confonde au point A; il est visible qu'à ce point la dernière raison de KL à KM sera une raison d'égalité; il suffit, pour s'en assurer, de regarder la Figure. Ainsi, dans ce cas, KL et KM étant égaux, c'est-à-dire les deux valeurs de y pour le point A, l'une positive, et l'autre négative, étant égales, il en résulte que dans l'équation $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$. les termes où y est d'une dimension impaire, tels que $dy + exy$ doivent s'évanouir par rapport au terme y^2, où y est d'une dimension paire; car autrement les deux valeurs de y, l'une positive, l'autre négative, ne pourraient pas être égales. De plus, AK ou x est infiniment moindre que LK ou y, et par conséquent le terme exy infiniment moindre que y^2; on peut donc le regarder comme nul par rapport à y^2. Mais le terme dy ne s'évanouirait pas, comme il est nécessaire, à moins que d ne soit infiniment petit, ou plutôt nul, car autrement dy serait infiniment plus grand que y^2. Nous supposerons donc $d = 0$, et nous effacerons dy; alors il ne restera que $cfx = cx^2 + exy + y^2$, équation à une section conique. Imaginons que les deux tangentes se coupent mutuellement en un point T, et que le point L s'avance vers le point C jusqu'à ce qu'il s'y confonde; la raison dernière de KL à KC sera celle de AT à AC. Nous avons appelé KL, y; AK, x; et AC, f; ainsi KC sera $f - x$. Faisons $AT = g$, et la raison dernière de y à $f - x$ sera celle de g à f. L'équation $cfx = cx^2 + exy + y^2$, peut s'écrire de cette manière, $cfx - cx^2 = exy + y^2$, ou bien $(f - x)cx =$

$h - k = o$, multipliez-le par h, et retranchez le produit $dh + egh + h^2 - hk = o$, de l'équation $-cfg + cg^2 + dh + egh + h^2 = o$, et le reste sera, $-cfg + cg^2 + hk = o$, d'où l'on tire........ $c = \frac{hk}{-g^2 + fg}$. Enfin si le point L tombe en D, on aura, AK ou $x = AI$ et KL ou $y = DI$. Ainsi écrivez au lieu de AI, m, et au lieu de DI, n, et substituez m pour x et n pour y dans l'équation $-efx + cx^2 + dy + exy + y^2 = o$, et elle deviendra.... $-cfm + cm^2 + dn + emn + n^2 = o$. Divisez cette dernière par n, et vous aurez, $\frac{-cfm + cm^2}{n} + d + em + n = o$. Retranchez-en $d + eg + h - k = o$, et vous aurez pour reste $\frac{-cfm + cm^2}{n} + em - eg + n - h + k = o$, ou bien $\frac{cm^2 - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$. Maintenant, à cause des points donnés A, B, C, D, E, les lignes AC, AH, AI, BH, EH, DI sont connues. Or ces lignes étant représentées respectivement par f, g, m, h, k, n, il s'en suit que ces dernières quantités sont aussi connues. Donc l'équation..... $c = \frac{hk}{fg - g^2}$ nous donne la valeur de c, et c étant connu, nous aurons la valeur de $eg - em$ par l'équation $\frac{cm^2 - cfm}{n} + n - h + k = eg - em$. Et la quantité $eg - em$ ou $e(g - m)$ étant connue, ainsi que le facteur $g - m$, l'autre facteur e est aussi connu. Tout cela étant trouvé, l'équation $d + eg + h - k = o$, ou bien $d = k - h - eg$, nous donnera la valeur de d. On connaît maintenant la valeur de toutes les quantités déterminées qui entrent dans l'équation $cfx = cx^2 + dy + exy + y^2$. Avec cette équation, l'on déterminera, par le moyen de la méthode de Descartes, l'espèce de section conique qui résout le problême.

Si on donne seulement quatre points A, B, C, E et la position d'une droite AF qui touche la section conique, et passe par un des

$y(ex+y)$, ce qui nous donne la proportion, $y : f - x :: cx : ex+y$. Par conséquent, $g : f :: cx : ex+y$. Mais lorsque le point L tombe au point C, $y = 0$. Donc $g : f :: cx : ex$, ou bien, en divisant le dernier rapport par x, $g : f :: c : e$. D'où l'on tire, $\frac{cf}{g} = e$. Donc si dans l'équation $cfx = cx^2 + exy + y^2$, on écrit $\frac{cf}{g}$ au lieu de e, elle deviendra, $cfx = cx^2 + \frac{cf}{g} . xy + y^2$, équation à une section conique. Enfin par le point donné B, par lequel doit passer la section conique, menez parallèlement à LK ou à AT la droite BH, qui rencontrera AC en H; et imaginez que LK s'approche de BH, jusqu'à ce qu'elle s'y confonde. Dans ce cas, $AH = x$, et $BH = y$. Faites la ligne donnée $AH = m$, et la ligne donnée $BH = n$; et au lieu de x et y, substituez respectivement m et n dans l'équation $cfx = cx^2 + \frac{cf}{g} . xy + y^2$, et elle deviendra, $cfm = cm^2 + \frac{cf}{g} . mn + n^2$, que vous pouvez écrire ainsi, $cfm - cm^2 - \frac{cf}{g} . mn = n^2$. Faites, $f - m - \frac{fn}{g} = s$, et vous aurez, $csm = n^2$. Divisez chaque membre par sm, et il viendra, $c = \frac{n^2}{sm}$. La quantité c étant connue, l'équation à une section conique $cfx = cx^2 + \frac{cf}{g} . xy + y^2$, est déterminée. Et ensuite, par la Méthode de Descartes, on trouvera à quelle section conique elle appartient, et l'on pourra la décrire.

Jusqu'ici j'ai résolu un grand nombre de problêmes de différentes espèces, parce que dans l'étude des sciences, les exemples sont bien plus utiles que les préceptes. Parmi ces problêmes, il en est quelques-uns que j'ai résolus sans le secours de l'algèbre; et j'ai voulu faire comprendre par-là qu'une question qui paraît difficile au premier coup-d'œil, n'a pourtant pas toujours besoin d'algèbre pour être résolue. Mais il est temps maintenant d'enseigner la méthode de résoudre les équations; car dès qu'un problême a été mis en équation, il faut savoir obtenir les valeurs des différentes racines de cette équation, puisque c'est d'elles que dépend la solution du problême.

FIN DU TOME PREMIER,

Fautes à corriger dans le Tome Premier.

Page 78, ligne 15, *afin d'en dégager*, lisez, *afin d'en éliminer.*

Page 144, ligne 20, au lieu de *par le double* qui se trouve dans quelques exemplaires, lisez, *par la moitié.*

Page 209, ligne 9, au lieu de *et à*, lisez, *est à.*

Page 227, ligne 6 de la Note, au lieu de $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{a^6 x}{b^6} + p - x}$, lisez, $\sqrt{x} + \frac{a^3 \sqrt{x}}{b^3}$.

Tome II.

Page 40, ligne dernière, effacez $-\frac{1}{2} p e$.

Page 155, ligne dernière, effacez ces mots comme inutiles, *et qui de plus leur est perpendiculaire.*

Page 210, ligne 4, au lieu de $n e$, mettez $n e^n$.

ÉDITIONS PRINCIPALES DES OUVRAGES DE NEWTON.

ISAACI NEWTON Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. *Londini*, *Streater*, 1687, *in*-4°.
Eadem : Editio secunda. *Cantabrigiæ*, 1713, *in*-4°.
Eadem : Editio auctior. *Amstelodami*, 1714 et 1723, *in*-4°.
Eadem : Editio adhuc auctior, et ab autore emendata. *Londini*, *in*-4°, 1726.
Eadem, cum Commentariis LE SEUR et JACQUIER. *Genevæ*, 3 v. *in*-4°, 1739.
Eadem, *Coloniæ Allobrogum*, 3 vol. *in*-4°. 1760.
Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones et Differentias, 1716, *in*-4°, traduit en François par BUFFON, en 1740, *in*-4°.
Ejusdem Optice, sive de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus et Coloribus Lucis Libri tres : Latinè reddidit SAMUEL CLARCKE. Accessêre Enumeratio Curvarum tertii Ordinis, et Tractatus de Quadraturâ Curvarum. *Londini*, *Smith et Walford*, 1706, *in*-4°. *cum Tabulis æneis.*
Eadem : Editio secunda auctior, omissis cæteris Tractatibus. *Londini*, 1719, *in*-4°. *cum Tabulis æneis.*
*Les Editions Angloises de l'*Optique *ont paru en* 1705 *et* 1718, *in*-8°.
Le même Traité d'Optique, traduit en François par COSTE. *Amsterdam*, *Humbert*, 1720, *in*-12, 2 *tom. fig.*
Le même Traité d'Optique, etc. traduit en François par BEAUZÉE, 1787, 2 vol. *in*-8°.
Le même, etc. nouvelle Edition. *Paris*, *Montalant*, 1722. *in*-4°. *fig.*
Ejusdem Arithmetica universalis; cui accedit HALLEIANA, Æquationum Radices arithmeticas inveniendi methodus. *Cantabr.* 1707, *in*-8°.
Eadem : Editio secunda. *Londini*, *Sam. Toocke*, 1722, *in*-8°.
Eadem, cum Commentariis ANTONII LECCHI, 3 v. *in*-8°. *Mediolani*, 1752.
Eadem, cum Commentariis CASTILLIONEI, *Amstelodami*, 1761, *in*-4°.
ISAACI NEWTON Opuscula Mathematica collecta a CASTILLONE. *Lausannæ* et *Genevæ*, 1744, 3 vol. *in*-4°.
Ejusdem Analysis Infinitorum a IONES; cum enumeratione Curvarum tertii Ordinis et Quadraturâ, etc. *Londini*, 1711, *in*-4°.
Ejusdem Tractatus de Quadraturâ Curvarum. *Parisiis*, *in*-4°. *Edition que fit faire Montmor.*
Bernardi *Vavenii* Geographia generalis, in quâ affectiones generales Telluris explicantur; aucta ab ISAACO NEWTON. *Cantabrig.* 1681, *in*-8°.
Abrégé de la Chronologie de Newton, avec les Observations de Freret. *Paris*, 1725, *in*-12.
Le même, traduit en François, par GRANET, 1728, *in*-4°.
Réponse de NEWTON aux *Observations de Freret*, etc. avec une Lettre de L'ABBÉ CONTI, *Paris*, 1726, *in*-12.
Il y a encore plusieurs Lettres de Newton insérées dans le *Commercium epistolicum* DE COLLINS, et dans le Recueil de DES MAIZEAUX.
PEMBERTON a donné en Anglois *les Élémens de sa Philosophie neutonienne*, *in*-4°, traduits en François, et imprimés à *Amsterdam*, 1755.
ISAACI NEWTON Opera quæ extant omnia, cum Commentariis SAMUEL HORSLEY. *Londini*, 1779, 5 vol. *in*-4°.

Pl. 1.

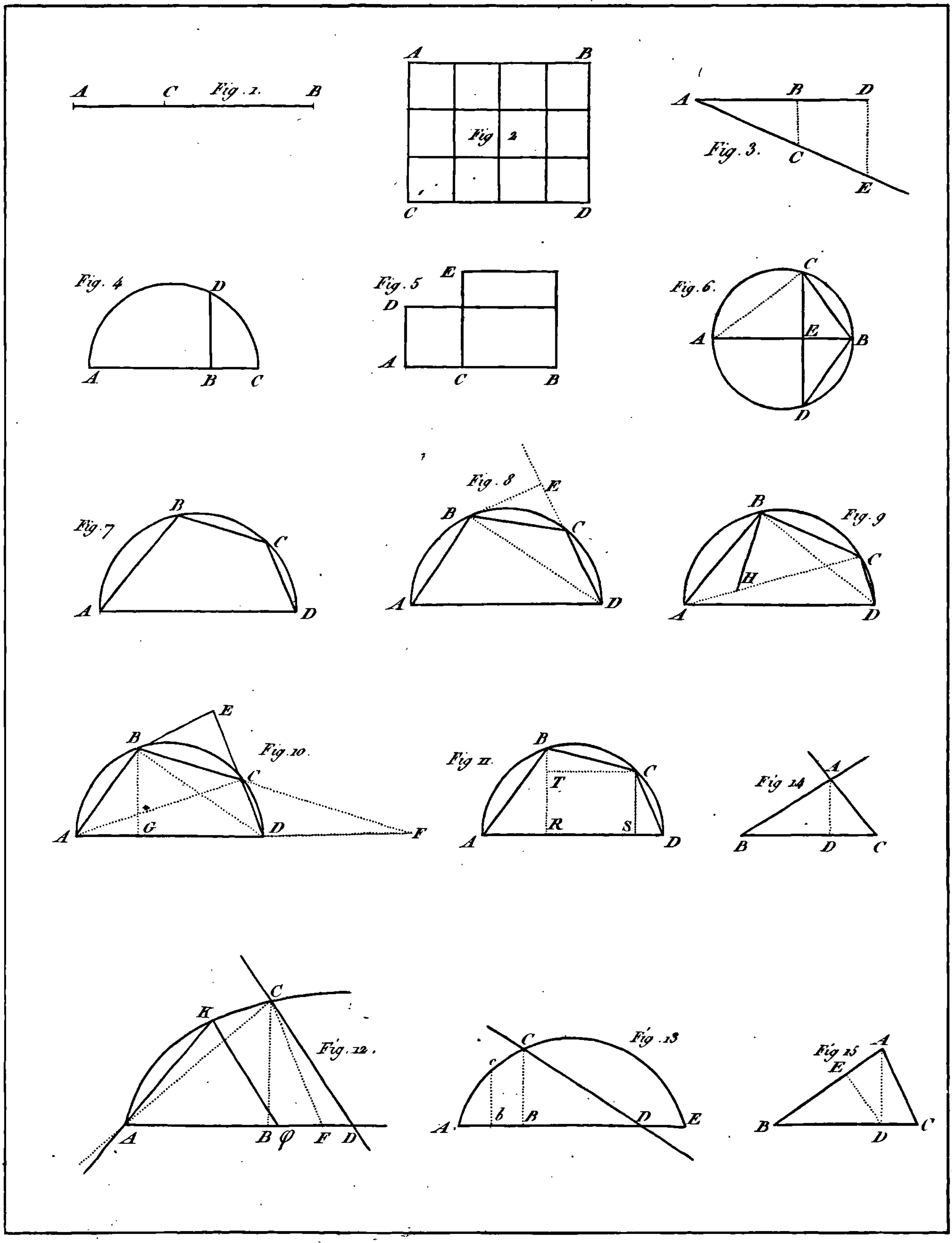


Fig. 1.
A C B
Fig 2
A B C D
Fig. 3.
A B D C E
Fig. 4
A B C D
Fig. 5
A C B D E
Fig. 6.
A B C D E
Fig 7
A B C D
Fig. 8
A B C D E
Fig 9
A B C D H
Fig. 10.
A B C D E F G
Fig 11.
A B C D T R S
Fig 14
A B C D
Fig. 12.
A B φ F D C K
Fig. 13
A b B c C D E
Fig 15
A B C D E

Pl. 2.

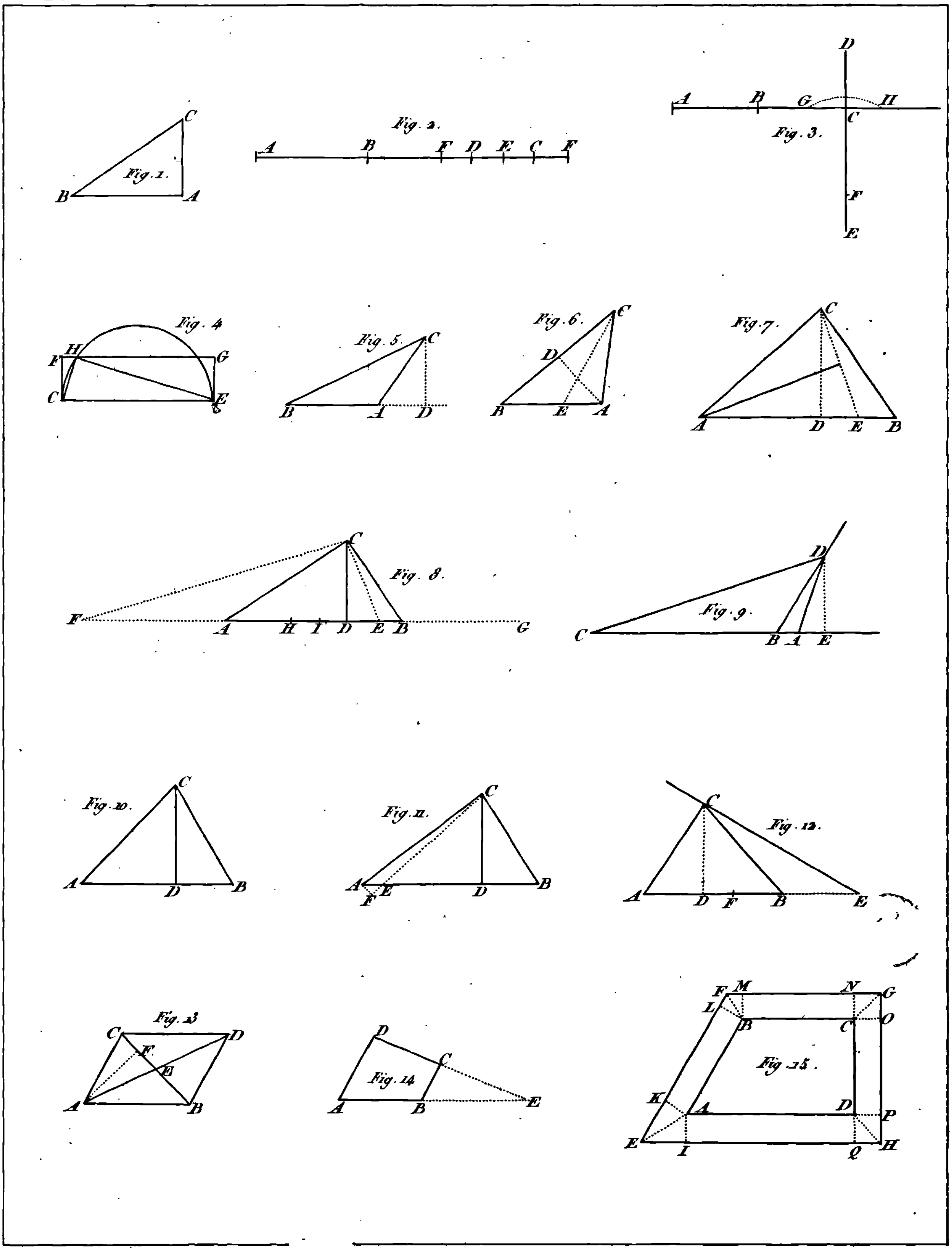


Fig. 1. C B A
Fig. 2. A B F D E C F
D A B G H C Fig. 3. F E
Fig. 4 H F G C E
Fig. 5. C B A D
Fig. 6. C D B E A
Fig. 7. C A D E B
C Fig. 8. F A H I D E B G
D Fig. 9. C B A E
Fig. 10. C A D B
Fig. 11. C A E F D B
C Fig. 12. A D F B E
Fig. 13 C F D E A B
D C Fig. 14. A B E
F M N G L B C O Fig. 15. K A D P E I Q H

Pl. 3.

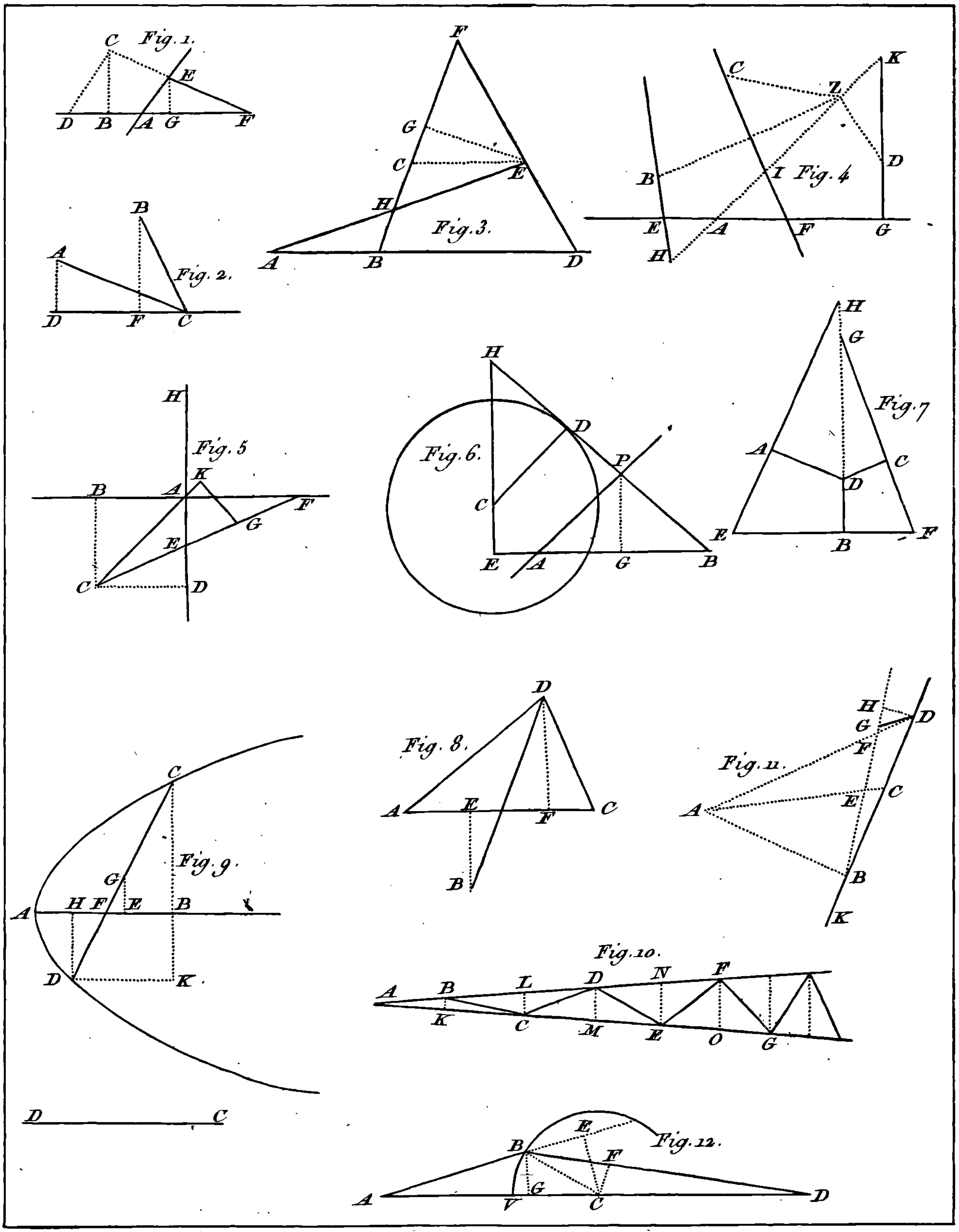
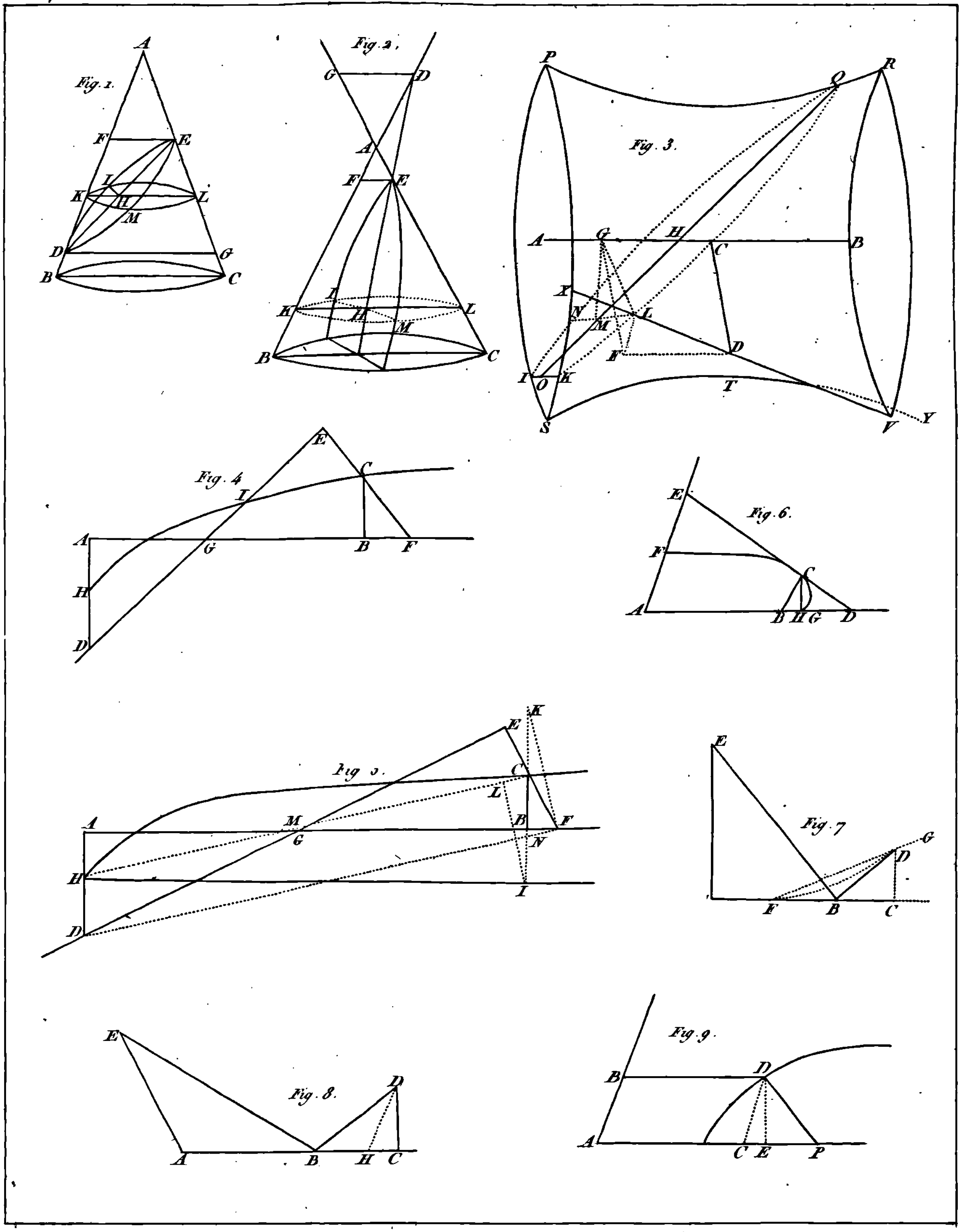


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

Pl. 4.



Pl. 5.

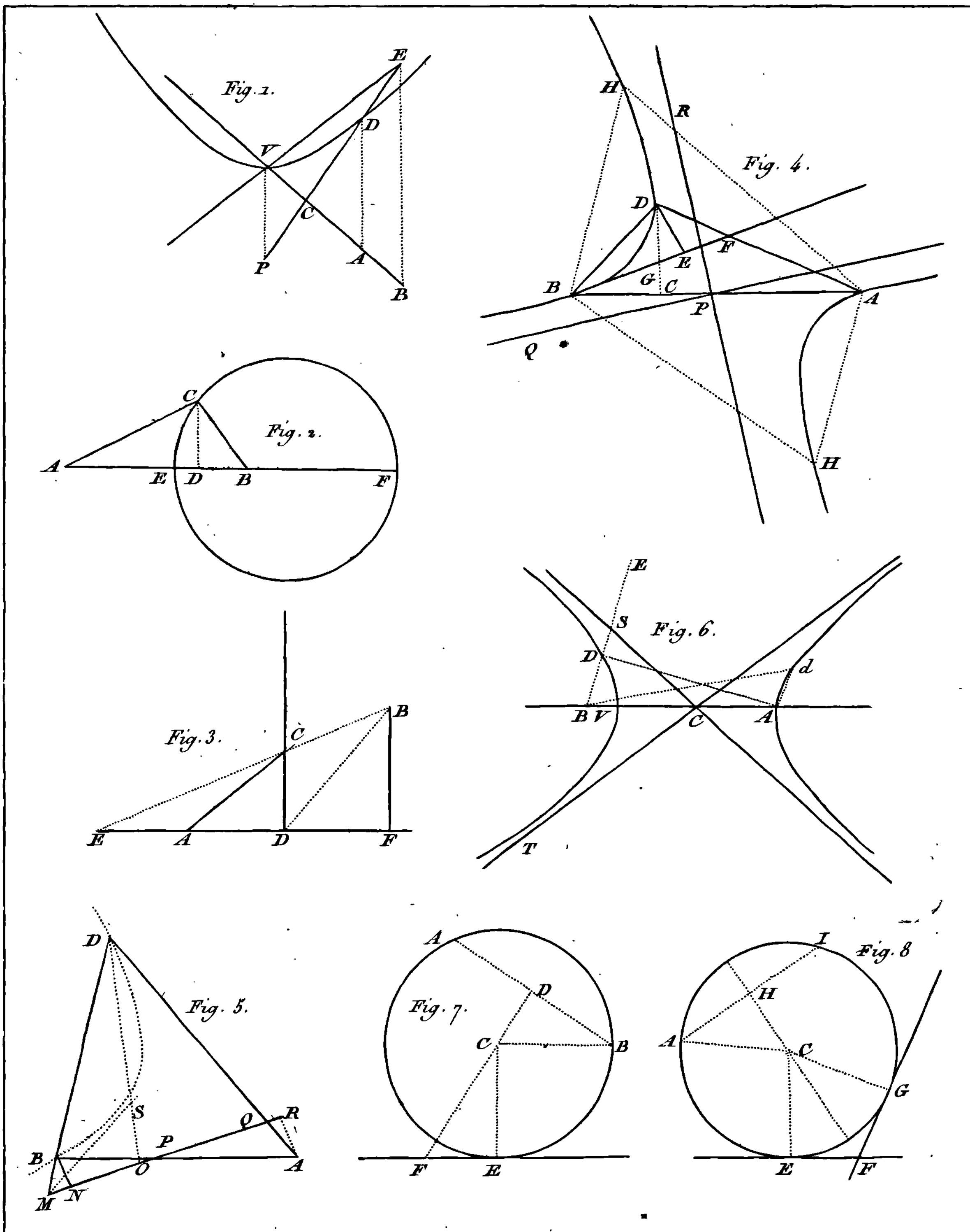


Fig. 1.
E D V C P A B
Fig. 2.
C A E D B F
Fig. 3.
C B E A D F
Fig. 4.
H R D F E G C B A P Q H
Fig. 5.
D S Q R P B O A M N
Fig. 6.
E S D d B V C A T
Fig. 7.
A D C B F E
Fig. 8
I H A C G E F

Pl. 6.

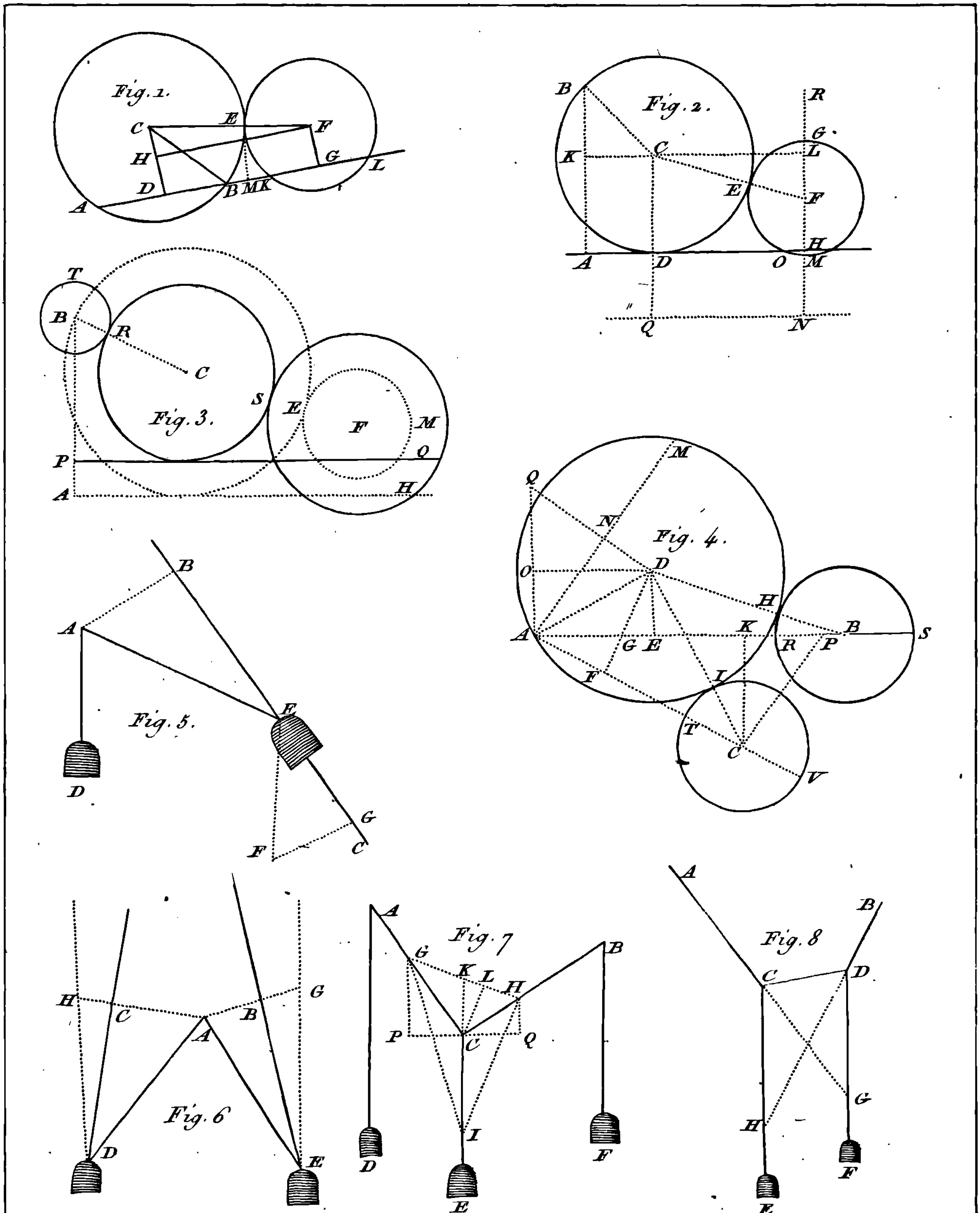


Fig. 1.
C E F H G L D B M K A
Fig. 2.
B R G K C L E F H A D O M Q N
Fig. 3.
T B R C S E F M Q P A H
Fig. 4.
M Q N D O H K B S A G E R P F I T C V
Fig. 5.
B A E D G F C
Fig. 6
H C A B G D E
Fig. 7
A G K L H B P C Q I D E F
Fig. 8
A B C D G H E F

Pl. 7.

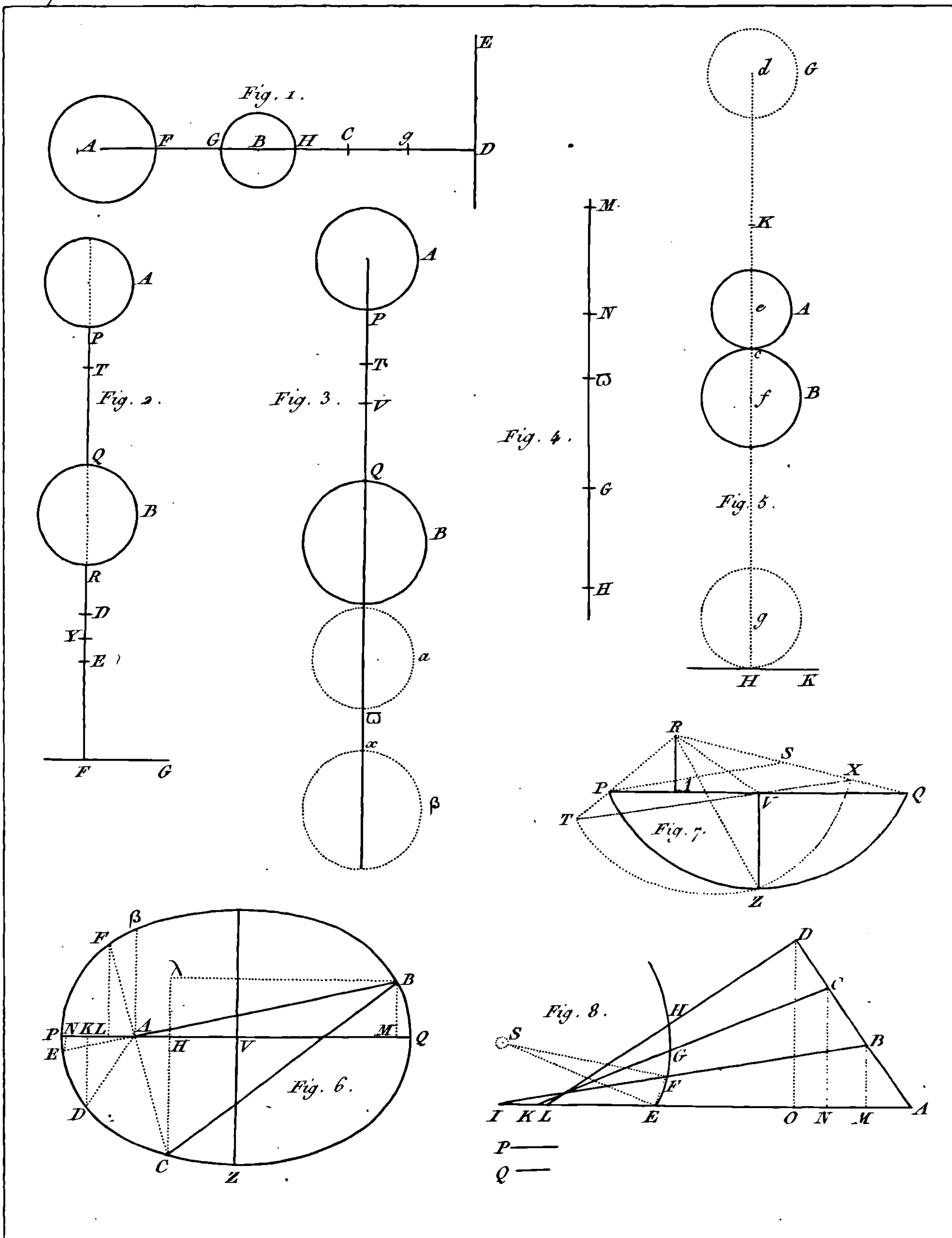


Fig. 1.
A F G B H C g D E
Fig. 2.
A P T Q B R D Y E F G
Fig. 3.
A P T V Q B a ϖ x β
Fig. 4.
M N ϖ G H
Fig. 5.
d G K e A c f B g H K
Fig. 6.
F β λ B P N K L A H V M Q E D C Z
Fig. 7.
R S X P L V Q T Z
Fig. 8.
D C H B S G F I K L E O N M A
P
Q

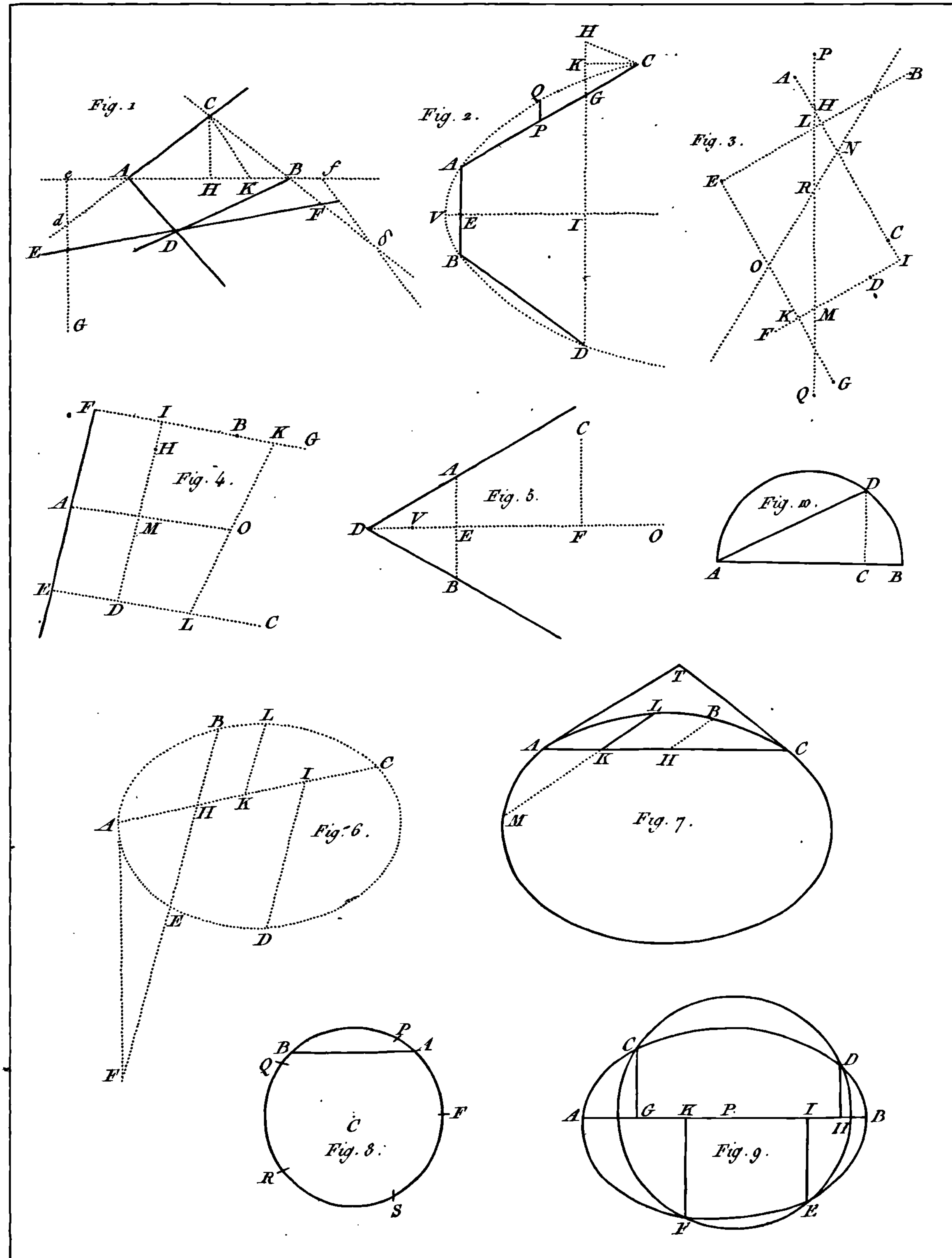
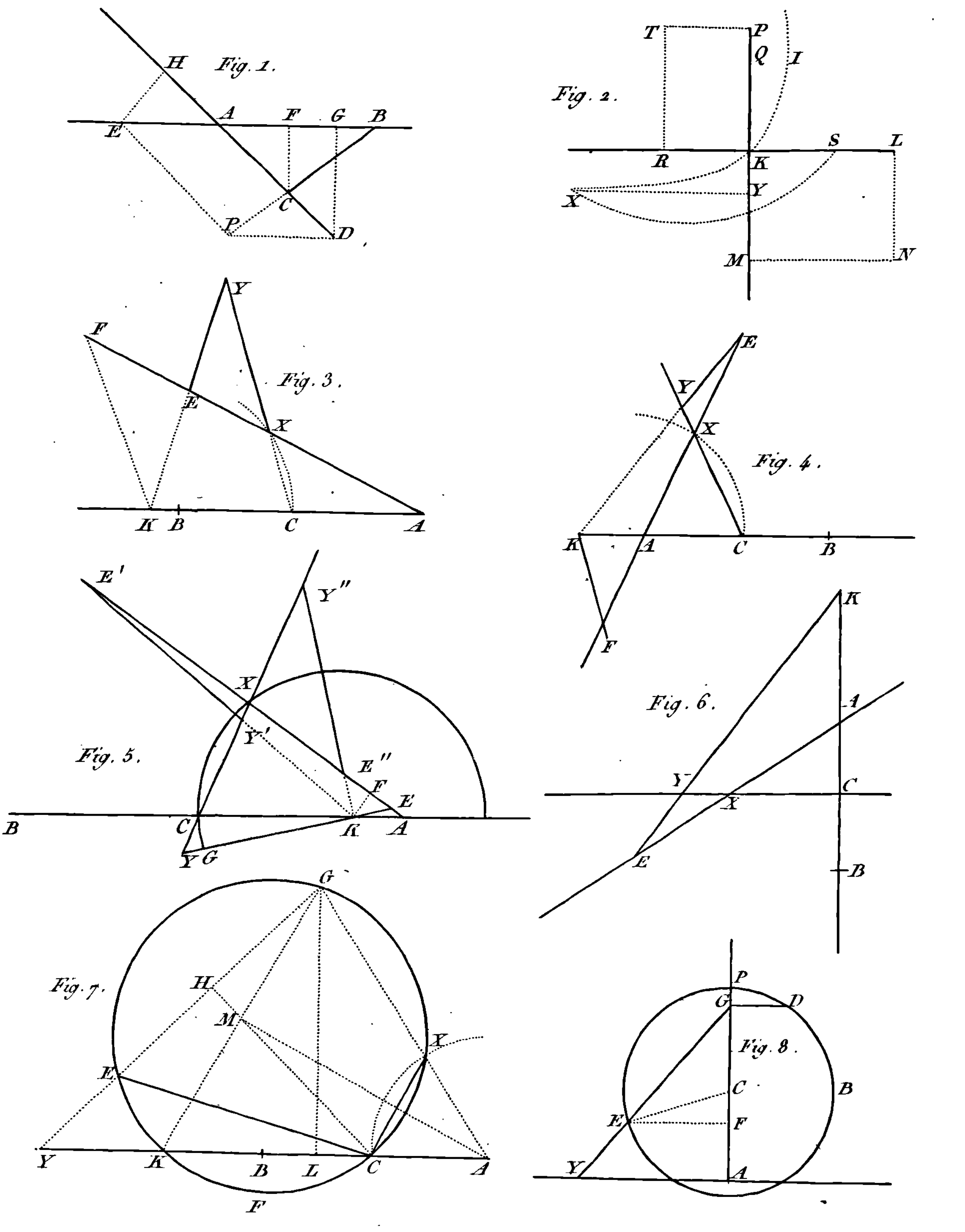
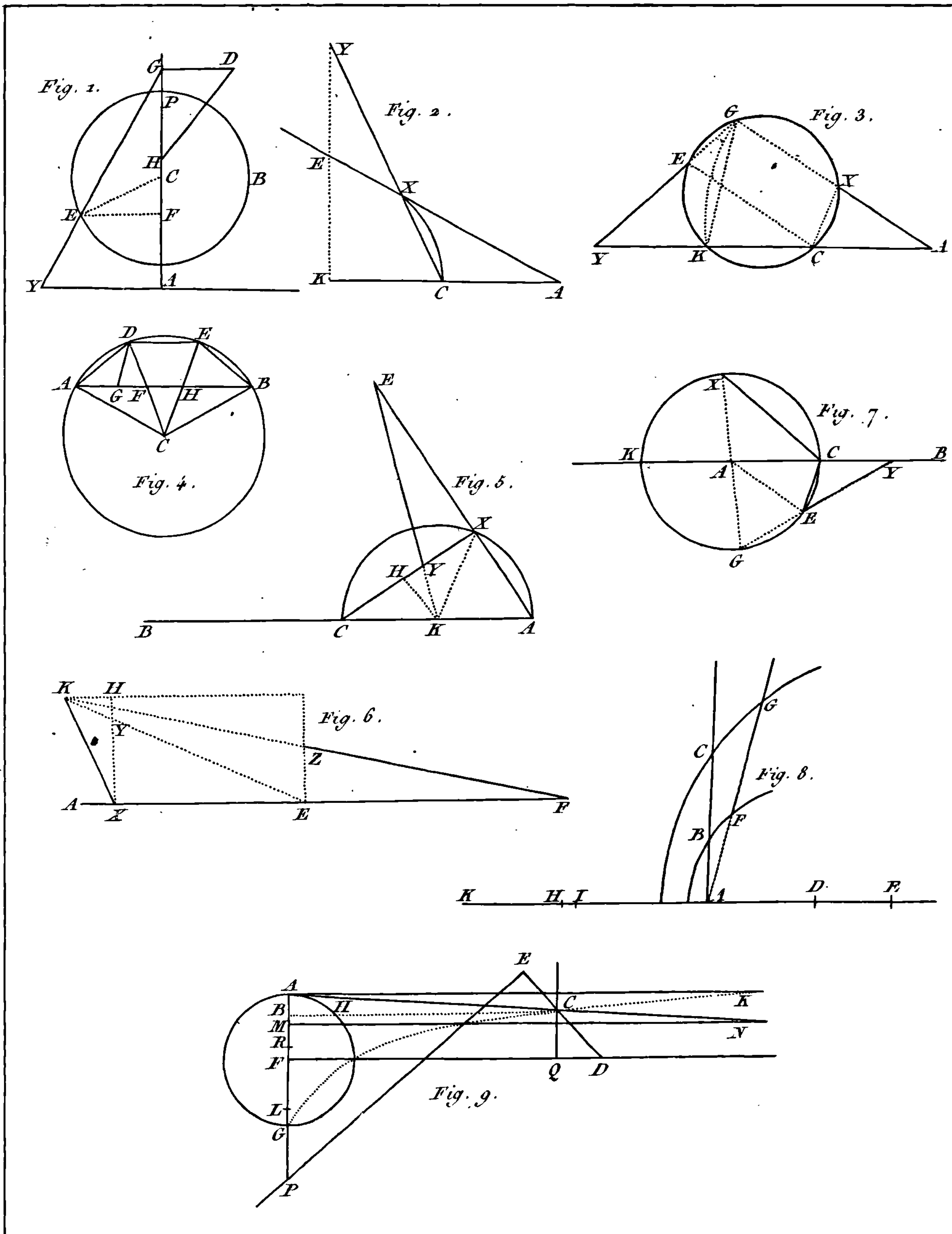


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 10.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Pl. 9.



Pl. 10.



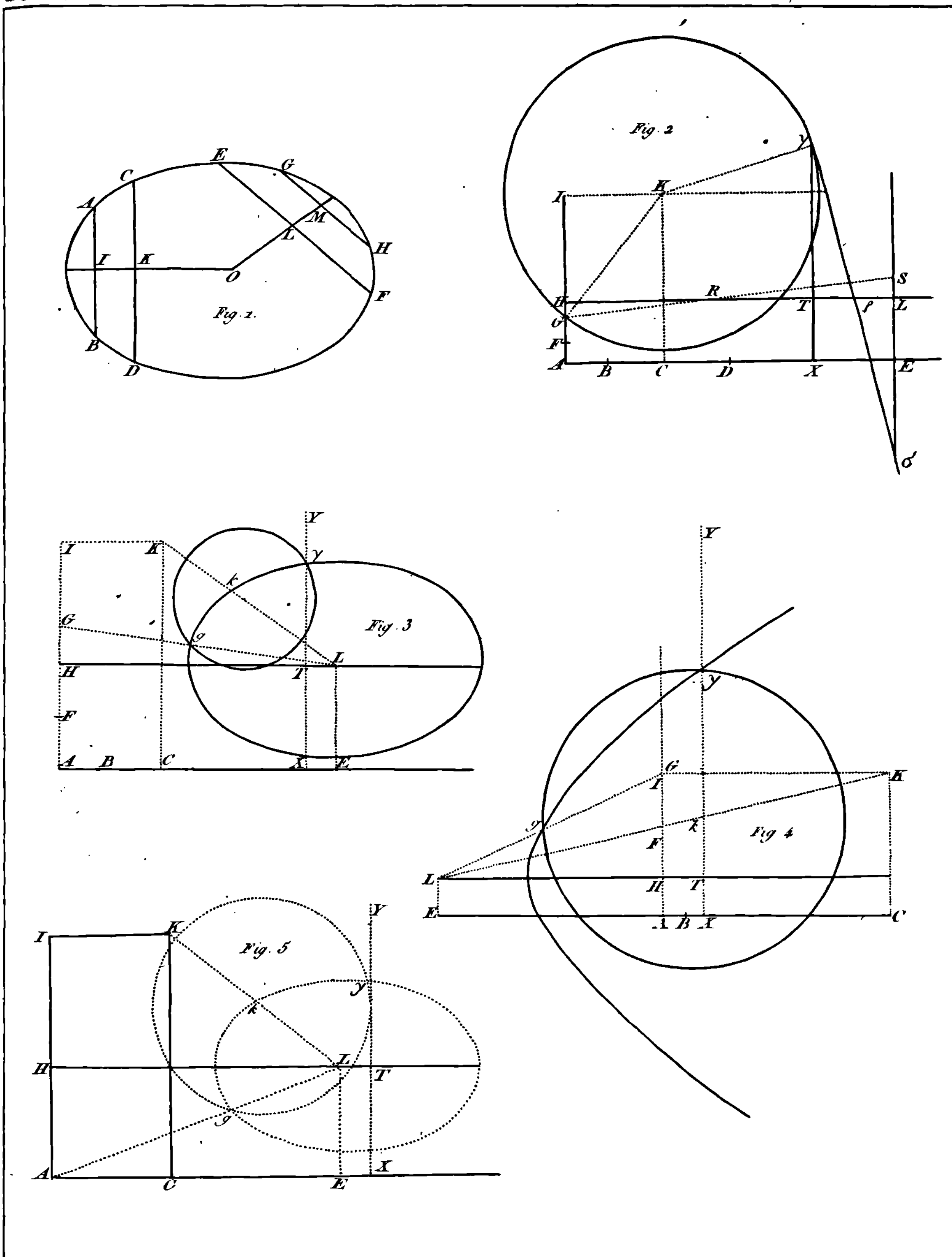


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig 4
Fig. 5