

École Polytechnique

1<sup>ère</sup> Division

1920 - 1921

# Cours de Physique

---

Professeur M. Jean Becquerel

---

Electricité et Magnétisme

Electro-optique

Electronique

Principe de Relativité

---

# Introduction

Au cours des vingt cinq dernières années, des découvertes capitales ont conduit les physiciens à modifier profondément certaines idées admises autrefois, et l'on ne saurait conserver au jour d'hui, dans l'enseignement les points de vue souvent contradictoires, de la méthode classique.

Sans doute les faits expérimentaux anciennement établis restent exacts et constituent toujours les bases de la physique, mais leurs interprétations ne sont plus les mêmes qu'autrefois, et dans les théories modernes, l'édifice des lois naturelles a gagné en harmonie et en simplicité.

Depuis Newton, on avait pensé que tous les phénomènes physiques étaient régis par les lois de la mécanique rationnelle, et qu'un phénomène ne pouvait être complètement expliqué qu'après avoir été ramené à ces lois; celles-ci étaient en effet, considérées comme l'expression rigoureuse de la vérité.

Cependant l'insuffisance de la mécanique classique s'est peu à peu révélée, lorsqu'on s'est efforcé en vain d'en tirer une explication complète des phénomènes électriques et optiques; bien plus un conflit radical entre l'expérience et la théorie s'est manifesté<sup>(1)</sup> lorsque Michelson a tenté de mettre en évidence, par des phénomènes optiques, le "mouvement absolu" de la terre.

Faut-il en conclure qu'il existe deux sortes de phénomènes distincts: les phénomènes électromagnétiques et les phénomènes mécaniques?  
Ce serait une erreur profonde: le fait fondamental

---

(1) Voir le cours de 1<sup>re</sup> année, p. 364.

que nous nous proposons d'établir est le suivant:

il y a identité entre les lois des phénomènes électromagnétiques et les lois des phénomènes dits mécaniques.

mais la mécanique classique n'est qu'une première approximation, d'ailleurs presque toujours suffisante.

La mécanique newtonienne a perdu sa suprématie; ce sont les lois de l'électromagnétisme qui régissent tous les phénomènes et dominent toute la science; elles conduisent à une mécanique nouvelle. Serons-nous donc conduits à un bouleversement total des principes de la mécanique?

non pas: le principe de la conservation de l'énergie, le principe de la conservation de la quantité de mouvement resteront intacts: bien mieux, ils nous apparaîtront comme plus solidement établis et, comme ayant une portée plus haute, à la condition de généraliser la loi d'inertie et de l'étendre à l'énergie elle-même.

On trouve au début de la plupart des ouvrages que l'inertie est une propriété fondamentale "de la matière", propriété irréductible à un phénomène plus primitif.

D'autre part, dans l'exposé de l'induction électromagnétique, on fait remarquer — quand on n'oublie pas de le faire — que la loi de l'induction est "comparable" à la loi d'inertie; comparable n'est pas le mot juste: c'est l'identification absolue qu'il faut proclamer, et alors l'inertie n'est plus seulement une propriété de la matière: on peut en rendre compte à partir des lois expérimentales de l'électromagnétisme. Le développement de ce point de vue

conduit d'accord avec l'expérience, à établir que l'inertie est une propriété de l'énergie. (1)  
 L'énergie a de la masse et du poids; la masse d'un corps mesure, non pas une quantité déterminée de matière, mais la quantité totale d'énergie de ce corps; cette masse change si l'énergie interne du corps varie, et elle est fonction de la vitesse du corps par rapport à l'observateur: c'est ici que la mécanique classique est profondément modifiée.

Dans un système isolé, dont les diverses parties échangent entre elles de l'énergie, les masses individuelles des portions de matière ne se conservent pas, mais la masse de l'énergie totale reste constante: le principe de la conservation de la masse vient se confondre avec le principe de la conservation de l'énergie.

Le cours sera divisé de la façon suivante:  
 Dans une première partie, que nous pourrions appeler "électricité énergétique", nous exposerons les lois classiques suivant les idées de Maxwell et conformément à une méthode d'enseignement due à M. E. Carvallo (2), nous plaçant à un point de vue absolument général, indépendant de toute hypothèse sur le mécanisme des phénomènes, nous ferons l'exposé des lois expérimentales et nous en donnerons la traduction en langage mathématique. Notre but sera de montrer la conservation de l'énergie et d'établir l'identité des phénomènes électriques et des phénomènes mécaniques. Nous considérerons comme fondamentale la distinction, trop souvent négligée, entre les forces appliquées (force électromotrice d'une

---

(2) E. Carvallo. L'Électricité déduite de l'expérience et ramenée au principe des travaux virtuels. Naud (1902); librairie Gauthier Villars; et leçons d'électricité (1904) Bergeret éditeur

(1) Nous avons déjà vu que pour sauvegarder le principe de la conservation de la quantité de mouvement, on est conduit à considérer l'énergie rayonnante comme un véhicule de quantité de mouvement (1<sup>re</sup> année p. 635)

pile ou d'un moteur) et les forces d'inertie (action d'un champ magnétique sur un courant, force électromotrice d'induction); nous montrerons que l'énergie d'un champ électrostatique est une énergie potentielle, et que l'énergie d'un champ magnétique est une énergie cinétique, fait capital qu'on oublie généralement.

Nous verrons qu'un système de circuits parcourus par des courants est assimilable à un système à liaisons auquel s'applique le principe des travaux virtuels (1) et nous établirons, d'après Maxwell, que les équations différentielles qui déterminent les mouvements de l'électricité dans les circuits et les mouvements des circuits eux-mêmes sous l'action des forces électromagnétiques d'inertie peuvent être mises sous la forme des équations de Lagrange.

L'identification des lois expérimentales de l'électricité avec les lois de la mécanique sera ainsi mise en évidence et jusque là, il ne surgira aucune difficulté.

Après l'étude de la théorie électromagnétique de la lumière nous aborderons la deuxième partie du cours qui sera consacrée aux découvertes récentes et à la théorie électronique. L'existence de l'atome d'électricité ou électron, constituant universel de la matière, étant solidement établie par l'expérience (rayons cathodiques, radio-activité) nous pourrions donner une explication concrète des phénomènes précédemment examinés au point de vue purement énergétique. L'identification des phénomènes électriques avec les phénomènes mécaniques nous paraîtra de plus en plus claire, bien qu'un désaccord se soit manifesté entre la dynamique classique et la dynamique électromagnétique: l'expérience prouve que la masse de l'électron est fonction de sa vitesse, pratiquement constante aux faibles vitesses, elle augmente à mesure que la vitesse s'approche de la vitesse de la lumière: l'inertie électromagnétique n'obéit donc pas à la loi de la constance de la masse admise dans la mécanique newtonienne.

La troisième partie du cours sera l'exposé du principe de relativité. Le désaccord qui vient d'être

---

(1) E. Corvallo loc. cit.

signale se présentera, sous un aspect différent, dans l'optique des corps en mouvement. Nous verrons alors que la raison profonde de l'insuffisance de la mécanique rationnelle, pour expliquer les phénomènes électromagnétiques et optiques, réside non pas dans l'existence de deux catégories distinctes de phénomènes obéissant à des lois différentes, mais dans le fait que la mécanique classique admet, à tort, des actions instantanées à distance, alors que l'électromagnétisme admet, en conformité avec l'expérience, des actions de proche en proche avec une vitesse de propagation finie qui est la vitesse de la lumière. (1)

Il résulte de là que les conceptions de l'espace et du temps auxquelles nous sommes habitués sont inexactes, et qu'elles doivent être radicalement modifiées, conformément aux lois expérimentales de l'électromagnétisme.

Nous terminerons ces leçons par la théorie de la gravitation d'Einstein, et la conception d'un univers non euclidien, formé par l'union de l'espace et du temps.

---

(1) Il est bien entendu que la mécanique classique garde toute sa valeur dans la pratique, les vitesses des corps étant très petites par rapport à la vitesse de la lumière.

# Livre 1

## Electricité énergétique

### Chapitre 1

#### Preliminaires

#### Notions de calcul vectoriel

#### Theoremes generaux

### §1 Les vecteurs et leurs flux.

#### 1 Vecteurs et cycles. Leur correspondance.

Les grandeurs qu'on rencontre en Physique peuvent se diviser en scalaires ou grandeurs non dirigées (susceptibles ou non de signe) et vecteurs ou grandeurs dirigées, qu'on represente par un segment de droite defini en longueur, direction, et sens.

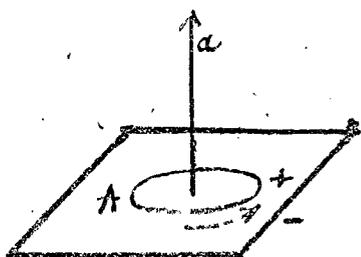
La longueur, la direction et le sens d'un segment OM sont determinés quand on donne ses projections

$$OP = \alpha \quad PQ = \beta \quad QM = \gamma$$

sur 3 axes rectangulaires.

Un vecteur peut se rapporter à un point déterminé de l'espace, il possède alors un point d'application (exemple: vitesse d'un point); si le point d'application peut être choisi arbitrairement sur une droite déterminée le vecteur est dit localisé sur une droite (force agissant sur un solide invariable), enfin un vecteur est libre lorsque son point d'application peut être choisi en un point quelconque de l'espace (vitesse de translation d'un système invariable).

Comme une longueur dirigée représente un vecteur, une aire dirigée définit un cycle. Considérons le périmètre d'une surface plane  $A$ ; ce périmètre avec son sens est le circuit du cycle. Le cycle est doué de grandeur (grandeur de son aire), de direction (orientation de son plan par rapport aux axes de coordonnées) et de sens (sens du déplacement dans lequel on parcourt le circuit).



**Règle du tire-bouchon.** — Mais, pour définir le sens du parcours, il faut convenir d'une position de l'observateur ou encore relier un sens de rotation et un sens de translation. Voici les conventions admises: pour enfoncer un tire-bouchon dans un bouchon, on tourne le manche "à droite"; on convient de donner le même signe au déplacement de la pointe du tire-bouchon et à la rotation correspondante. Autrement dit, la translation sur un axe et la rotation autour de cet axe sont considérées comme de même signe lorsqu'elles correspondent aux mouvements simultanés de translation et de rotation d'une vis "à droite".

Cette convention nous conduit à adopter, pour les sens des axes du trièdre de référence, la convention des astronomes. (1)

Nous considérons comme positives les translations suivant les  $x$ , les  $y$ , les  $z$  croissants.

(1) Convention adoptée par Maxwell. On remarquera que la disposition des axes  $Ox$  et  $Oy$  est la même qu'en géométrie plane et en trigonométrie; on évite ainsi l'incohérence des deux conventions contraires qui sont adoptées souvent pour la géométrie plane et la géométrie dans l'espace.

Nous considérons comme positive une rotation autour de  $Ox$ , qui amène  $Oy$  sur  $Oz$ , une rotation autour de  $Oy$  qui amène  $Oz$  sur  $Ox$ , et une rotation autour de  $Oz$  qui amène  $Ox$  sur  $Oy$ ;  $Ox, Oy, Oz$  étant les moitiés positives des axes des coordonnées.

Les axes sont alors disposés comme l'indique la première figure.

On donne aussi un signe aux faces d'un cycle, de manière à les distinguer l'une de l'autre: un tire-bouchon dont l'axe est normal à la surface et qui tourne dans le sens du circuit pénètre dans la surface par la face  $-$  et sort par la face  $+$ . Par exemple, sur la première figure, le sens de rotation étant de  $Ox$  vers  $Oy$ , la face positive de la surface  $xoy$  est la face tournée vers  $Oz$ .

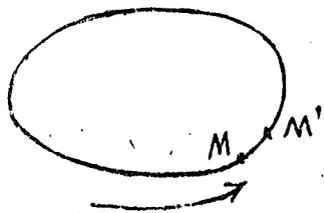
Un observateur debout sur la face positive d'un cycle voit le circuit décrit dans le sens direct.)

### Règle du bonhomme d'Ampère

Imaginons un observateur couché sur le circuit de manière qu'un mobile parcourant ce circuit dans le sens de la circulation entre par les pieds et sorte par la tête; si l'observateur tient la surface entre ses mains, il a la face positive à sa gauche.

Un cycle est ainsi entièrement défini par sa grandeur, sa direction et son sens, si l'on fait abstraction de la forme du contour et de la position du cycle dans son plan ou dans un plan parallèle au premier. Les cycles jouissent donc des propriétés des couples de forces et peuvent les représenter.

Cette identification des cycles avec les couples permet de définir un cycle dont le circuit est une courbe gauche.



En effet, chacun des éléments  $MM'$  du circuit représente, si on le veut, une force élémentaire. L'ensemble des forces  $MM'$  se réduit à un couple puisque, le contour étant fermé, la résultante de translation est nulle. Le couple résultant de ces forces est, à un facteur numérique près, dépendant des unités choisies, le cycle défini par le circuit gauche.

## Vecteurs polaires et vecteurs axiaux. -

Au cycle  $A$  (2<sup>ème</sup> figure) nous pouvons faire correspondre un vecteur  $a$  ayant même mesure que  $A$ , perpendiculaire au plan de  $A$  et ayant le même signe, c'est-à-dire ayant un sens tel que pour un observateur placé les pieds vers l'origine de  $a$ , la tête du côté de l'extrémité, le cycle  $A$  soit parcouru dans le sens direct. Nous avons entre les cycles et les vecteurs une correspondance identique à celle qu'on établit entre les couples de forces et leurs axes.

Nous sommes ainsi conduits à distinguer deux sortes de vecteurs :

- 1<sup>o</sup> les vecteurs polaires (déplacement, vitesse, force etc...) qui sont analogues à des rayons vecteurs issus d'un point et que nous représenterons par une lettre surmontée d'une flèche rectiligne  $\rightarrow$ .
- 2<sup>o</sup> les vecteurs axiaux (rotation, vitesse angulaire, couple..) qui sont des segments représentant un cycle dans un plan qui leur est perpendiculaire; nous les noterons par une lettre surmontée d'une flèche  $\curvearrowright$  tournant dans le sens direct.

Remarque importante, - Les projections d'un vecteur polaire changent de signe si l'on renverse les axes de coordonnées, c'est-à-dire si l'on remplace les demi-droites  $ox, oy, oz$  par leurs prolongements. Au contraire les projections d'un vecteur axial conservent leur signe dans le renversement des axes de coordonnées.

Addition des vecteurs. - L'addition géométrique des vecteurs se fait suivant la règle de composition des forces (vecteurs polaires) ou des couples (vecteurs axiaux). Nous écrirons :

$$\text{vecteurs polaires} \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

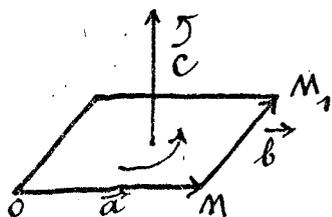
$$\text{vecteurs axiaux} \quad \curvearrowright c = \curvearrowright a + \curvearrowright b$$

## 2 - Multiplication des vecteurs -

On distingue deux espèces de produits de vecteurs :

le produit vectoriel et le produit scalaire.

1<sup>o</sup> Produit vectoriel. -



Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  deux vecteurs;  $\vec{c}$  on appelle produit vectoriel le vecteur  $\vec{c}$  correspondant du cycle obtenu en portant le vecteur  $MM_1 = \vec{b}$  à la suite du vecteur  $OM = \vec{a}$ , terminant le parallélogramme et parcourant le cycle dans le sens  $OMM_1$ .

On voit que la valeur numérique ou module  $|\vec{c}|$  de  $\vec{c}$  est égale à l'aire du parallélogramme :

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Nous emploierons la notation: (1)

$$(1) \quad \vec{c} = [\vec{a} \vec{b}] \quad (\text{entre crochets})$$

L'opération n'est pas commutative, car le sens du cycle est inversé quand on intervertit l'ordre des vecteurs; on a donc :

$$(2) \quad [\vec{a} \vec{b}] = -[\vec{b} \vec{a}]$$

Soient  $a_x, a_y, a_z$ ;  $b_x, b_y, b_z$ ;  $c_x, c_y, c_z$  les composantes des vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  suivant les axes de coordonnées. On établit en géométrie analytique les expressions des projections, sur les trois plans coordonnés, du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ ; ce sont les projections du vecteur  $\vec{c}$  sur les axes; ces expressions sont les suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases}$$

$c_x, c_y, c_z$  sont les nombres qui mesurent les projections du vecteur  $\vec{c}$ , ce ne sont pas les vecteurs-projections; pour représenter ceux-ci au moyen des nombres  $c_x, c_y, c_z$ , nous considérons sur les axes les vecteurs unités  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Nous avons alors:

(1) Les notations varient suivant les auteurs: on écrit souvent  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  (Burali-Forti et Marcolongo)

$$(4) \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} = (a_y b_z - a_x b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

La multiplication est distributive. On a, en effet, d'après (3):

$$\begin{aligned} \left[ \vec{a} (\vec{b} + \vec{c}) \right]_x &= a_y (\vec{b} + \vec{c})_z - a_z (\vec{b} + \vec{c})_y \\ &= a_y (b_z + c_z) - a_z (b_y + c_y) \\ &= a_y b_z - a_z b_y + a_y c_z - a_z c_y = \left[ \vec{a} \vec{b} \right]_x + \left[ \vec{a} \vec{c} \right]_x \end{aligned}$$

et comme la direction de l'axe des x est arbitraire :

$$(5) \quad \left[ \vec{a} (\vec{b} + \vec{c}) \right] = \left[ \vec{a} \vec{b} \right] + \left[ \vec{a} \vec{c} \right]$$

On a encore:

$$(6) \quad \left[ (\vec{a} + \vec{b}) (\vec{c} + \vec{d}) \right] = \left[ \vec{a} \vec{c} \right] + \left[ \vec{a} \vec{d} \right] + \left[ \vec{b} \vec{c} \right] + \left[ \vec{b} \vec{d} \right]$$

Exemple de produit vectoriel. — La formule (1)

représente le moment d'une force  $F$  par rapport à l'origine des coordonnées.

Soient, en effet,  $x, y, z$  les coordonnées du point d'application  $M$  d'une force  $X, Y, Z$ ; les composantes du moment sont:

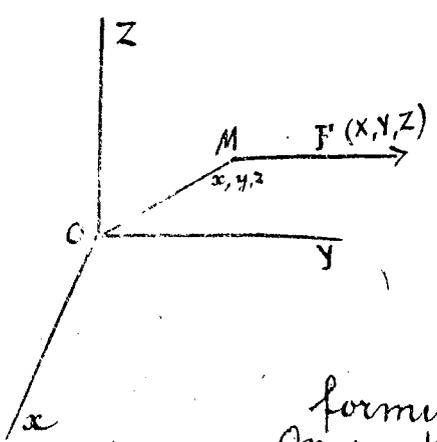
$$\begin{cases} c_x = yZ - zY \\ c_y = zX - xZ \\ c_z = xY - yX \end{cases}$$

formules identiques aux formules (3).

On peut donc écrire:

$$\text{Moment} = \left[ \text{vect. } \vec{OM} \quad \text{vect. } \vec{F} \right]$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs polaires (cas que nous avons envisagé) est un vecteur axial. Il en est de même du produit vectoriel de deux vecteurs axiaux, au contraire le produit vectoriel



d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial est un vecteur polaire.

2° Produit scalaire. — Si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont deux vecteurs de même origine, on appelle produit scalaire de ces vecteurs le produit de leurs modules par le cosinus de l'angle qu'ils déterminent. Soit  $\mathcal{C}$  ce produit :

$$\mathcal{C} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

nous écrirons <sup>(1)</sup> :

$$(7) \quad \mathcal{C} = (\vec{a} \vec{b}) \quad (\text{entre parenthèses})$$

D'après sa définition, cette opération est commutative :

$$(8) \quad (\vec{a} \vec{b}) = (\vec{b} \vec{a})$$

On voit aisément qu'elle est distributive :

$$(9) \quad (\vec{a} (\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \dots)) = (\vec{a} \vec{b}) + (\vec{a} \vec{c}) + (\vec{a} \vec{d}) + \dots$$

en appliquant le théorème des projections au polygone des vecteurs  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  projeté sur la direction de  $\vec{a}$ .

On a encore :

$$(\vec{a} \vec{b}) = ((a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}))$$

$$\text{ou } (10) \quad (\vec{a} \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\text{car l'on a } (\vec{i} \vec{j}) = (\vec{j} \vec{k}) = (\vec{k} \vec{i}) = 0$$

$$\text{et } (\vec{i} \vec{i}) = (\vec{j} \vec{j}) = (\vec{k} \vec{k}) = 1$$

Exemple de produit scalaire. — Si l'un des vecteurs représente une force et l'autre un déplacement, le produit scalaire  $\mathcal{C}$  est le travail de la force pour le déplacement.

3° Nous considérerons encore deux produits, l'un scalaire, l'autre vectoriel, dont les expressions sont souvent utiles dans le calcul vectoriel.

Produit scalaire d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial.

Soient  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  trois vecteurs polaires ; le produit scalaire :

$$(1) \text{ autre notation } \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{Burali-Forti et Marcolongo})$$

$$\left( \vec{c} [\vec{a} \vec{b}] \right)$$

a pour grandeur le volume du parallélépipède construit avec le parallélogramme  $[\vec{a} \vec{b}]$  et le vecteur  $\vec{c}$ , c'est à dire construit sur les trois vecteurs. Ce scalaire a le signe des cosinus formé par le vecteur polaire  $\vec{c}$  et le vecteur axial  $[\vec{a} \vec{b}]$ .  
On voit aisément que :

$$\left( \vec{c} [\vec{a} \vec{b}] \right) = \left( \vec{a} [\vec{b} \vec{c}] \right) = \left( \vec{b} [\vec{c} \vec{a}] \right) = - \left( \vec{c} [\vec{b} \vec{a}] \right) = - \left( \vec{a} [\vec{c} \vec{b}] \right) = - \left( \vec{b} [\vec{a} \vec{c}] \right)$$

Il résulte de la formule (10) que :

$$\left( \vec{c} [\vec{a} \vec{b}] \right) = c_x [\vec{a} \vec{b}]_x + c_y [\vec{a} \vec{b}]_y + c_z [\vec{a} \vec{b}]_z$$

D'où, en utilisant les formules (3), l'expression du produit sous la forme du déterminant des trois vecteurs :

$$(11) \quad \left( \vec{c} [\vec{a} \vec{b}] \right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Produit vectoriel d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial.  
Nous considérons maintenant le vecteur  $\vec{d}$  :

$$\vec{d} = \left[ \vec{a} [\vec{b} \vec{c}] \right]$$

Ce vecteur  $\vec{d}$  est normal au vecteur axial  $[\vec{b} \vec{c}]$  qui lui-même est normal au plan des vecteurs  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$ ; le vecteur  $\vec{d}$  est donc situé dans le plan  $\vec{b}, \vec{c}$  et, de plus, il est normal à  $\vec{a}$ . En appliquant deux fois la première formule (3), on obtient :

$$\begin{aligned} d_x &= a_y (b_z c_y - b_y c_z) - a_z (b_z c_x - b_x c_z) \\ &= b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \end{aligned}$$

ou, d'après (10)

$$d_x = \left[ \vec{a} [\vec{b} \vec{c}] \right]_x = b_x (\vec{a} \vec{c}) - c_x (\vec{a} \vec{b})$$

Comme l'axe des coordonnées  $x$  est arbitraire, on a :

$$(12) \quad \vec{d} = \left[ \vec{a} [\vec{b} \vec{c}] \right] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b})$$

c'est à dire que ce vecteur est la différence géométrique des deux vecteurs  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  multipliés respectivement par les scalaires  $(\vec{a} \cdot \vec{c})$  et  $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

### 3 - Dérivée d'un produit de deux vecteurs -

Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  deux vecteurs fonctions d'une variable  $t$ .

1°) Dérivée du produit vectoriel.

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \lim_{\Delta t} \frac{[(\vec{a} + \Delta \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \Delta \vec{b})] - [\vec{a} \cdot \vec{b}]}{\Delta t}$$

ou, d'après la formule 6, et en passant à la limite:

$$(13) \quad \frac{d}{dt} [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \left[ \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \right] + \left[ \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} \right]$$

2°) Dérivée du produit scalaire

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \lim_{\Delta t} \frac{((\vec{a} + \Delta \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \Delta \vec{b})) - (\vec{a} \cdot \vec{b})}{\Delta t}$$

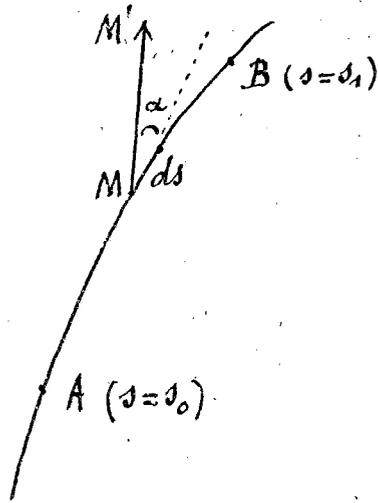
Effectuant l'opération au numérateur et passant à la limite il vient:

$$(14) \quad \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \left( \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \right) + \left( \vec{b} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \right)$$

### 4 - Circulation d'un vecteur -

Une opération fondamentale est souvent effectuée lorsqu'un vecteur est défini en tout point d'une portion d'espace, c'est-à-dire forme un champ: c'est l'intégration du vecteur le long d'une courbe tracée dans le champ. Cette intégration s'appelle circulation du vecteur; la circulation prend le nom de travail lorsque le vecteur est une force (!)

(!) On emploie souvent le mot travail dans le cas d'un vecteur quelconque; il est préférable d'employer le mot circulation et de réserver le terme travail pour le cas des forces mécaniques.



Soient une courbe sur laquelle un sens de déplacement est déterminé,  $\overrightarrow{MM'}$  le vecteur au point M de la courbe,  $ds$  l'arc élémentaire de courbe, ayant pour sens le sens du déplacement,  $\alpha$  l'angle de  $\overrightarrow{MM'}$  et de  $ds$ ,  $\mathcal{C}$  la circulation, on a par définition :

$$d\mathcal{C} = \overrightarrow{MM'} ds \cos \alpha$$

c'est-à-dire

$$d\mathcal{C} = (\overrightarrow{MM'} \overrightarrow{ds})$$

et

$$(15) \quad \mathcal{C}_A^B = \int_{s_0}^{s_1} (\overrightarrow{MM'} \overrightarrow{ds})$$

ou encore, d'après (10) :

$$(16) \quad \mathcal{C}_A^B = \int_{s_0}^{s_1} a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

$a_x, a_y, a_z$  étant les projections du vecteur

et

$$(15) \quad \mathcal{C}_s^B = \int_{s_0}^{s_1} (\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{ds})$$

ou encore d'après (10)

$$(16) \quad \mathcal{C}_s^B = \int_{s_0}^{s_1} a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

$a_x, a_y, a_z$  étant les projections du vecteur.

## 5. Champs de scalaires et de vecteurs.

Un espace en tous les points duquel est défini un scalaire ou un vecteur est un champ scalaire ou un champ vectoriel. Par exemple, l'espace dans lequel sont distribuées des masses matérielles, entre lesquelles s'exercent des forces de gravitation, représente un champ scalaire du potentiel de gravitation et un champ vectoriel de l'intensité du champ.

**Fonction potentielle et gradient.** — Soit  $\psi$  une fonction scalaire de la position du point  $x, y, z$  de l'espace, nous l'appellerons fonction potentielle, et nous dirons que le vecteur

$$(17) \quad \overrightarrow{h} = - \left( i \frac{\partial \psi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial y} + k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

a un potentiel  $\psi$ . Le vecteur  $\overrightarrow{h}$  est le gradient<sup>(1)</sup> du scalaire  $\psi$ , il a pour composantes :

$$h_x = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad h_y = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad h_z = - \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Dans un champ de force, le gradient  $\overrightarrow{h}$  représente l'intensité du champ, comme nous le verrons bientôt.

(1) De nombreux auteurs prennent pour définir le gradient le vecteur au signe opposé. Nous avons adopté la convention de Maxwell (Unité d'électricité et de magnétisme trad. française (1885) T. I p. 15 et suivantes)

Opérateur grad. - On peut considérer

$$\vec{h} = - \left( \vec{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

comme le produit de l'opérateur symbolique

$$\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

par la fonction  $-\psi$ .

Nous représenterons cet opérateur par la notation  $\nabla$  et nous écrirons :

$$\vec{h} = \text{grad.} \psi = -\nabla \psi$$

Surfaces de niveau. - Les surfaces  $\psi = C^{\text{te}}$  sont appelées surfaces de niveau et jouissent des propriétés suivantes :

1°/ Le vecteur gradient, en un point quelconque, est normal à la surface de niveau passant par ce point.

En effet, les cosinus directeurs de la normale à la surface sont proportionnels aux composantes du vecteur. Nous écrivons :

$$(18) \quad \vec{h} = - \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

Le gradient représente à la fois la grandeur et la direction de la chute la plus rapide de  $\psi$ .<sup>(1)</sup>

Signes du vecteur.<sup>(2)</sup> - Ses lignes en tous les points desquelles le gradient est dirigé suivant la tangente sont, d'après ce qui vient, d'être dit, normales aux surfaces de niveau qu'elles rencontrent.

2°/ La circulation du gradient, le long d'une courbe tracée sur une surface de niveau, est nulle, puisque le vecteur est normal au déplacement.

(1) Lord Kelvin a appelé vecteur lamellaire un vecteur qui est le gradient d'un scalaire ; on peut, en effet, décomposer le champ en lamelles au moyen de surfaces de niveau, correspondantes à une chute constante de la valeur du scalaire.

(2) Signes de force dans un champ de gravitation, dans un champ électrique et dans un champ magnétique.

3°/ La circulation du gradient, le long d'une courbe, ne dépend pas de la forme de la courbe, elle dépend seulement de la position, de l'origine et de l'extrémité.

Soit en effet  $\mathcal{C}$  l'intégrale ou circulation de  $\vec{h}$ , on a:

$$d\mathcal{C} = (\vec{h} \cdot \vec{ds}) = -d\psi$$

$$(19) \quad \mathcal{C}_A^B = \psi_A - \psi_B$$

Les circulations de plusieurs vecteurs suivant une même ligne s'ajoutant algébriquement, il résulte de l'équation (19) que si un vecteur est la résultante de plusieurs vecteurs (champs superposés) dérivant chacun d'un potentiel, il admet pour potentiel la somme algébrique des potentiels des vecteurs agissant isolément.

Dans le cas où un vecteur est défini en chaque point de l'espace, mais n'admet pas de potentiel, l'intégrale du vecteur du point A au point B dépend de la courbe suivie entre ces deux points.

## 6 - Flux d'un vecteur.

Dans un champ vectoriel, prenons un élément de surface  $dS$ ; et soit  $\vec{h}$  le vecteur au centre de cet élément. On appelle flux du vecteur (1) à travers  $dS$  la quantité scalaire:

$$d\varphi = |\vec{h}| dS \cos(\vec{h}, \vec{n})$$

dans laquelle  $(\vec{h}, \vec{n})$  représente l'angle du vecteur  $\vec{h}$  avec un vecteur  $\vec{n}$  normal à l'élément  $dS$ .

Le signe du flux dépend du sens choisi pour le vecteur  $\vec{n}$  sur la normale.

En notation vectorielle, nous pouvons écrire,  $\vec{n}$  étant

---

(1) Flux de force dans un champ de forces.

pris de longueur égale à 1 :

$$(20) \quad d\varphi = (\vec{h} \cdot \vec{n}) dS$$

Supposons l'espace partagé en deux régions par une surface fermée quelconque  $S$  ; nous serons généralement conduits à considérer dans ce cas l'une des régions (celle qui ne s'étend pas à l'infini, par exemple) comme intérieure à  $S$  et l'autre comme extérieure, et nous supposerons alors que  $\vec{n}$  est tracé dans cette dernière. Nous dirons que le vecteur  $\vec{n}$  est orienté suivant la normale extérieure à  $S$  ; l'expression précédente sera la valeur du flux sortant par l'élément  $dS$ . Le flux total sortant de  $S$  sera donné par l'intégrale :

$$(21) \quad \varphi = \iint (\vec{h} \cdot \vec{n}) dS$$

L'intégrale étant étendue à la surface  $S$ .

Pour une surface non fermée, il faut adopter une face positive, du côté de laquelle est tracée la normale.

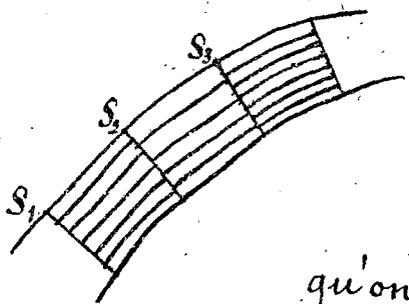
La notion de flux est évidente si l'on prend pour vecteur la vitesse d'un liquide s'écoulant à travers une surface ; dans ce cas le flux du vecteur est le débit, c'est à dire le volume au liquide qui passe dans l'unité de temps à travers la surface. La généralisation pour un vecteur quelconque se comprend aisément.

## 7. Représentation schématique de l'intensité d'un champ vectoriel.

Tube de vecteur. — Par chacun des points

d'un contour fermé  $S$ , menons une ligne du vecteur, nous obtenons une surface généralement en forme de canal ou de tube.

Subdivisons un tube de vecteur de faible section en petits tronçons consécutifs par des cloisons normales  $S_1, S_2, S_3$ .



Entre  $S_1$  et  $S_2$  traçons des traits parallèles à la direction du tube ( $\vec{h}$ ) et en nombre égal à la valeur

$$Q_1 = h_1 S_1 \text{ du flux à travers } S_1.$$

Puis, opérons de même sur le tronçon suivant ( $S_2$  jouant le rôle de  $S_1$ ) et ainsi de suite. Répétons la même opération sur tous les tubes

qu'on peut tracer dans le champ : nous remplissons l'espace de petits traits de vecteur dont le rôle est analogue à celui des hachures employées pour le figuré du terrain sur les cartes. On sait qu'un rapprochement de ces dernières correspond à une pente plus grande du sol ; de même l'accroissement de la chute de potentiel - si le vecteur a un potentiel - sera indiqué par le rapprochement des traits de vecteur.

Pour trouver la valeur de  $h$  en un point, il suffira de compter le nombre des traits qui rencontrent l'unité de surface menée normalement à leur direction sur le point considéré. On pourrait, en principe, construire de cette manière une sorte de modèle dont la seule inspection donnerait une idée complète du champ.

Ce mode représentatif qui est applicable à un champ quelconque se simplifie lorsque le flux demeure invariable le long de chaque tube de vecteur (écoulement d'un fluide incompressible dans un tube).

Le nombre des traits tracés dans chaque cellule élémentaire est alors constant et on peut placer les traits bout à bout de manière à constituer des lignes de vecteur continues.

## § 2. Théorèmes généraux concernant les flux -

### 8 - 1<sup>er</sup> théorème de Gauss -

Le flux sortant d'une surface fermée peut

s'exprimer par l'intégrale de la divergence du vecteur étendue à tout le volume compris à l'intérieur de la surface.

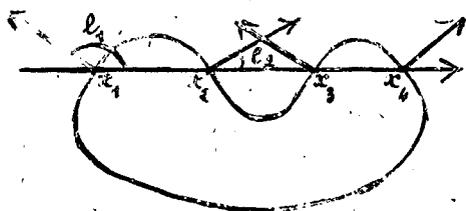
L'expression du flux sortant d'une surface fermée (n° 6 form. 21)

$$\varphi = \iint (\vec{h} \vec{n}) dS$$

peut se mettre sous une autre forme. Soient  $l, m, n$  les cosinus directeurs de la normale extérieure, on a :

$$(22) \quad \varphi = \iint (\vec{h} \vec{n}) dS = \iint (lh_x + mh_y + nh_z) dS = \iint (h_x dy dz + h_y dz dx + h_z dx dy)$$

Il faut tenir compte de la convention de signe : pour cela, considérons une droite parallèle à l'axe des  $x$ , définie par des valeurs données de  $y$  et de  $z$ , la surface étant fermée, un mobile parcourant la droite de  $x = -\infty$  à  $x = +\infty$  rencontre un nombre pair de fois la surface, pénétrant en  $x_1$ , dans l'espace qu'elle limite, sortant en  $x_2$ , rentrant en  $x_3$ , etc.... Si  $h_{x_1}, h_{x_2}, h_{x_3}$



sont les valeurs de  $h_x$  en ces points, on a :

$$(23) \quad \iint h_x dy dz = \iint [(h_{x_2} - h_{x_1}) + (h_{x_4} - h_{x_3}) + \dots + (h_{x_{2n}} - h_{x_{2n-1}})] dy dz$$

Si  $h_x$  est une quantité continue et n'a pas de valeurs infinies entre  $x_1$  et  $x_2$ , on a :

$$(24) \quad h_{x_2} - h_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dh_x}{dx} dx$$

L'intégration s'étendant de  $x_1$  à  $x_2$ , c'est à dire le long du premier segment de  $x$  compris à l'intérieur de la surface fermée. Tenant compte de tous les segments compris à l'intérieur de la surface, nous trouvons :

$$(25) \quad \iint h_x dy dz = \iiint \frac{dh_x}{dx} dx dy dz$$

L'intégrale double étant limitée à la surface fermée et l'intégrale triple étant au contraire étendue à tout le volume compris à l'intérieur de cette surface. Donc si  $h_x, h_y, h_z$  sont continus et finis à l'intérieur, le flux sortant est:

$$(26) \quad \iint_{\text{surf.}} (\vec{h} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{\text{vol.}} \left( \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ce qui est l'expression du théorème de Gauss.

On peut encore établir cette expression en décomposant l'espace intérieur en parallélépipèdes élémentaires dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Les coordonnées de A étant  $x, y, z$  le flux sortant par la face ABCD est:

$$-h_x dy dz$$

le flux sortant par la face EFGH est:

$$\left( h_x + \frac{\partial h_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

de sorte que le flux traversant l'ensemble des deux faces dans la direction OX est:

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} dx dy dz$$

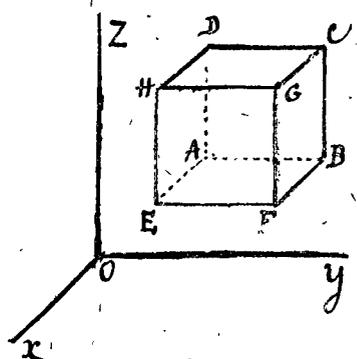
et le flux élémentaire sortant du parallélépipède a pour valeur:

$$(27) \quad \left( \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

En remarquant que les flux à travers les faces contigües des parallélépipèdes, en lesquels le volume est décomposé, sont deux à deux égaux et de signe contraire, on voit que l'intégrale de (27) représente bien le flux à travers la surface S.

Discontinuité de  $\vec{h}$  à l'intérieur de la surface fermée (1) Supposons maintenant que sur une certaine surface à l'intérieur de la surface fermée  $h_x, h_y, h_z$  sautent brusque.

(1) Maxwell traité d'élect. et de magn. trad. franç. t. 1. p. 22.



ment de  $h_x, h_y, h_z$  à  $h'_x, h'_y, h'_z$ .

Si cette discontinuité se présente entre  $x_1$  et  $x_2$ , par exemple, la valeur de  $h_{x_2} - h_{x_1}$  sera :

$$(28) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h_x}{\partial x} dx + (h'_x - h_x)$$

où l'on ne doit considérer sous le signe  $\int$  que les valeurs finies de la dérivée de  $h_x$ .

L'intégrale de la surface fermée sera :

$$(29) \quad \iint (\vec{h} \vec{n}) dS = \iiint \left( \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ + \iint (h'_x - h_x) dy dz + \iint (h'_y - h_y) dz dx + \iint (h'_z - h_z) dx dy$$

ou bien, si  $l', m', n'$  sont les cosinus directeurs de la normale à la surface de discontinuité, et  $dS'$  un élément de cette surface :

$$(30) \quad \iint (\vec{h} \vec{n}) dS = \iiint \left( \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ + \iint (l'(h'_x - h_x) + m'(h'_y - h_y) + n'(h'_z - h_z)) dS'$$

l'intégration devant être étendue, dans le dernier terme, à toute la surface de discontinuité.

Divergence d'un vecteur. — La quantité scalaire :

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

porte le nom de divergence du vecteur  $\vec{h}$  ; on la désigne par :

$$\text{Div } \vec{h}$$

ou encore par

$$\nabla \vec{h}$$

car on peut remarquer que, l'application de l'opérateur symbolique  $\nabla$  au vecteur  $\vec{h}$ , faite conformément à la règle du produit scalaire de deux vecteurs donne précisément la divergence :

du produit scalaire de deux vecteurs donne précisément la divergence :

$$\begin{aligned}\nabla \vec{h} &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i} h_x + \vec{j} h_y + \vec{k} h_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} h_x + \frac{\partial}{\partial y} h_y + \frac{\partial}{\partial z} h_z = \text{div } \vec{h}\end{aligned}$$

On dit encore que

$$\text{Div } \vec{h} = \nabla \vec{h}$$

est le dérivé de  $\vec{h}$ .

Avec la notation Div. le théorème de Gauss s'écrit :

$$(31) \quad \iint (\vec{h} \vec{n}) dS = \iiint \text{Div } \vec{h} \cdot dV$$

Cas d'un potentiel . — Si le vecteur dérive

d'un potentiel  $\psi$ , comme  $\vec{h} = -\nabla \psi$ , on a :

$$\text{Div } \vec{h} = \nabla \vec{h} = -\nabla^2 \psi$$

et effectivement

$$\nabla \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

représente bien l'opérateur habituellement désigné par  $\Delta$  et appelé laplacien.

Dans le cas où  $\vec{h}$  dérive d'un potentiel  $\psi$ , le théorème de Gauss peut s'écrire encore :

$$(32) \quad \iint (\vec{h} \vec{n}) dS = -\iiint \Delta \psi \cdot dV$$

g. Condition solénoïdale .

Distribution solénoïdale .

Si en tous les points où  $h_x, h_y, h_z$  sont continus, l'on a :

$$(33) \quad \text{Div } \vec{h} = 0$$

et si sur chacune des surfaces où ils sont discontinus (n° 8) l'on a :

$$(34) \quad l'h'_x + m'h'_y + n'h'_z = l'h_x + m'h_y + n'h_z$$

l'intégrale sur une surface fermée quelconque est nulle et l'on dit que la distribution du vecteur est solénoïdale.

Maxwell a désigné l'équation (33) sous le nom de condition solénoïdale générale et l'équation (34) sous le nom de condition solénoïdale à la surface.

Tubes de vecteur. — Dans le cas où  $h_x, h_y, h_z$

sont continus et où pour tous les points intérieurs à une surface  $S$ , la condition solénoïdale générale est satisfaite, le flux se conserve.

Le flux à travers les parois d'un tube de vecteur étant nul, la condition de divergence nulle exprime que, dans une distribution solénoïdale, le flux à travers une section quelconque (plane ou gauche) d'un tube de vecteur est constant (cas envisagé à la fin du n° 7) et que tout l'espace intérieur à la surface  $S$  peut être divisé en tubes de cette nature.

Le flux à travers une surface finie  $S$  limitée par une courbe fermée  $L$  est égal au nombre des tubes qui passent à l'intérieur de la courbe fermée  $L$  : il ne dépend donc que de la forme de la courbe  $L$  et non de la forme de la surface à l'intérieur de la limite  $L$ .

Si  $\vec{h}$  représente la vitesse d'un fluide qui s'écoule, la condition solénoïdale, ou condition de conservation du flux, exprime l'incompressibilité.

## 10 - Théorème de Green.<sup>(1)</sup>

Le théorème de Gauss peut s'écrire (formule 31) :

$$\iint (\vec{h} \cdot \vec{n}) dS = \iiint \nabla \cdot \vec{h} dv$$

D'autre part, on trouve facilement que si  $a$  est une fonction scalaire et  $\vec{b}$  une fonction vectorielle des coordonnées :

(1) D'après le cours de M. le Lt Colonel Lafay.

$$\nabla a \vec{b} = a \nabla \vec{b} + (\vec{b} \nabla a)$$

Par suite, en appliquant la formule de Gauss, dans laquelle on remplace  $\vec{h}$  par  $a\vec{b}$ :

$$\iint (\vec{n} a \vec{b}) dS = \iiint a \nabla \vec{b} dv + \iiint (\vec{b} \nabla a) dv$$

$f_1$  et  $f_2$  étant deux fonctions scalaires des coordonnées, on peut poser:

$$\text{et l'on obtient: } a = f_1, \quad \vec{b} = \nabla f_2$$

$$(35) \quad \iint (\vec{n} f_1 \nabla f_2) dS = \iiint f_1 \nabla \nabla f_2 dv + \iiint (\nabla f_1 \nabla f_2) dv$$

qui est l'expression la plus générale du théorème de Green.

## 11. Théorème de Stokes — Vecteur tourbillon.

Le théorème de Green se rapporte à la transformation d'une intégrale de surface en intégrale de volume.

Le théorème de Stokes va exprimer la transformation d'une intégrale de ligne en intégrale de surface.

### Théorème de Stokes. — La circulation

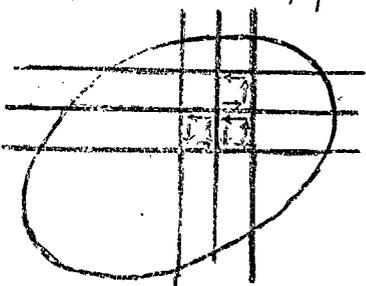
d'un vecteur le long d'une courbe fermée est égale au flux d'un autre vecteur, appelé vecteur tourbillon, à travers une surface quelconque limitée par le contour de la courbe.

Supposons d'abord une courbe plane  $C$  et prenons le plan de cette courbe pour plan des  $x, y$ . La circulation du vecteur  $\vec{a}$  le long de cette courbe se réduit à :

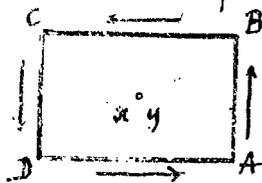
$$\int (a_x dx + a_y dy)$$

ou  $a_x$  et  $a_y$  sont supposés des fonctions continues et uniformes des coordonnées  $x$  et  $y$ . Nous allons transformer cette intégrale en une intégrale de surface.

Nous pouvons décomposer la surface intérieure à la courbe  $C$  en aires élémentaires par des lignes parallèles aux axes, puis parcourir successivement dans le sens direct chacun des contours de ces aires, chacune des portions de droite séparant deux aires contiguës est parcourue dans deux sens opposés suivant qu'elle est considérée comme appartenant à l'un ou à l'autre des contours. Par conséquent, si l'on appli-



que l'intégrale à tous les contours de toutes les aires élémentaires, les termes relatifs aux trajets intérieurs disparaissent, il ne reste que l'intégrale suivant le contour de la courbe  $C$ .



Considérons maintenant un élément de surface  $ABCD$  rectangulaire dont les côtés sont  $dx$  et  $dy$ . Si  $a_x$  et  $a_y$  sont les composantes du vecteur au centre  $x, y$  de l'élément, la composante parallèle à  $Oy$  est

$a_y + \frac{1}{2} \frac{\partial a_y}{\partial x} dx$  sur le côté  $AB$  et la circulation est

$(a_y + \frac{1}{2} \frac{\partial a_y}{\partial x} dx) dy$ ; sur le côté opposé  $CD$  où le mouve-

ment a lieu dans le sens des  $y$  décroissants, la circulation est

$-(a_y - \frac{1}{2} \frac{\partial a_y}{\partial x} dx) dy$  de sorte que la somme des circulations sur les côtés parallèles à  $Oy$  est:

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} dx dy$$

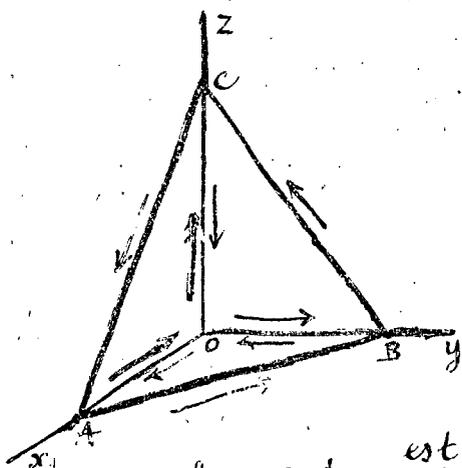
Sur les 2 autres côtés  $DA$  et  $BC$ , la somme des circulations est:

$$-\frac{\partial a_x}{\partial y} dx dy$$

Le but proposé est donc atteint, car on a, en intégrant le long de tous les contours

$$\int (a_x dx + a_y dy) = \iint \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Effectuons une transformation du même genre (1) dans le cas où l'intégrale est prise le long d'un contour



triangulaire ABC dont les sommets sont situés sur les axes de coordonnées (la position des axes peut être prise arbitrairement). Nous pouvons obtenir la valeur de l'intégrale en prenant successivement pour contours d'intégration OBC, OCA, OAB

et additionnant les trois résultats obtenus, puisqu'en opérant

ainsi chacune des droites OB, OC, OA est prise deux fois en sens inversés et que les côtés du triangle sont parcourus dans le sens direct ABC. Nous avons donc :

$$\int_{ABC} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \int_{OBC} (a_y dy + a_z dz) + \int_{OCA} (a_z dz + a_x dx) + \int_{OAB} (a_x dx + a_y dy)$$

ou en transformant en intégrales de surface les intégrales de ligne du second membre pour lesquelles le contour d'intégration est dans un des plans de coordonnées :

$$(36) \int_{ABC} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \iint_{OBC} \left( \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dy dz + \iint_{OCA} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dz dx + \iint_{OAB} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Supposons le tétraèdre infiniment petit, soient  $dS$  l'aire du triangle ABC,  $l, m, n$  les cosinus directeurs de la normale au plan de ce triangle. Les projections du triangle sur les plans de coordonnées sont :

$$OBC = l dS \quad OCA = m dS \quad OAB = n dS$$

Les intégrales du second membre de l'égalité (36) devant être étendues à l'une de ces surfaces infiniment petites, les quantités placées sous le signe d'intégration conservent très

(1) Henri Poincaré - Électricité et optique - 1901 p. 107

sensiblement la même valeur et peuvent être placées en dehors du signe d'intégration, nous avons donc, pour le triangle infiniment petit

$$\int_{ABC} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \left[ l \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + m \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + n \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \right] dS$$

Si maintenant nous prenons l'intégrale curviligne le long d'une courbe quelconque  $C$  limitant une surface finie quelconque, nous pouvons toujours décomposer la surface en éléments triangulaires infiniment petits et obtenir l'intégrale curviligne en faisant la somme des intégrales prises le long des contours triangulaires limitant ces éléments. Nous avons alors pour l'intégrale curviligne prise le long du contour  $C$

$$(37) \int_{\text{contour } C} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \iint_{\text{surf. } C} (l\xi + m\eta + n\zeta) dS$$

en posant :

$$(38) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \eta = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \zeta = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{cases}$$

### Vecteur tourbillon.<sup>(1)</sup> — Les équations (38)

définissent les composantes d'un vecteur  $\vec{b}$  qu'on nomme le vecteur tourbillon du vecteur  $\vec{a}$ . Les composantes de ce nouveau vecteur gardant leur signe par inversion des axes lorsque  $\vec{a}$  est un vecteur polaire, on voit que le tourbillon d'un vecteur polaire est un vecteur axial (et inversement).

On écrit<sup>(2)</sup>

$$(39) \quad \vec{b} = \text{curl. } \vec{a} \quad \text{ou} \quad \vec{b} = \text{rot. } \vec{a} \quad (\text{rotationnel})$$

(2) Curl signifie boucle. On emploie aussi la notation  $\text{vort. } \vec{a}$  (vortex, tourbillon)

(1) On verra dans le cours de mécanique que, pour un fluide en mouvement dont la vitesse est  $\vec{a}$ , les composantes du vecteur tourbillon sont le double des composantes de la rotation instantanée.

En notation vectorielle, le théorème de Stokes s'écrit :

$$(40) \quad \int_{\text{contour}} (\vec{a} \cdot d\vec{s}) = \iint_{\text{surface}} (\text{curl} \vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Il est évident que si le vecteur  $\vec{a}$  dérive d'une fonction scalaire continue et uniforme, le tourbillon est nul.  $\xi = \eta = \zeta = 0$  est précisément la condition d'intégrabilité.

On voit immédiatement que :

$$(41) \quad \text{Div} \cdot \text{curl} \vec{a} = 0$$

Le vecteur tourbillon forme un champ solénoïdal. Son flux est conservatif ; ce flux est le même à travers n'importe quelle surface limitée à un contour fermé, ce qu'exprime d'ailleurs le théorème de Stokes.

Bemarque. — Le curl d'un vecteur arbitraire

$\vec{a}$ , dont les composantes sont des fonctions continues des coordonnées, est complètement déterminé.

Mais la réciproque n'est pas vraie : on ne peut pas prendre arbitrairement le vecteur  $\xi, \eta, \zeta$  car son flux doit être conservatif ( $\text{div} = 0$ ), de plus si cette condition est remplie, un vecteur dont il est le curl n'est déterminé qu'à une fonction arbitraire près ; en effet les vecteurs :

$$a_x, a_y, a_z, \text{ et } a_x - \frac{\partial U}{\partial x}, a_y - \frac{\partial U}{\partial y}, a_z - \frac{\partial U}{\partial z}$$

$U$  étant une fonction continue quelconque, satisfait sous deux aux équations (38).

### § 3. Champs newtoniens.

#### Théorèmes généraux.

#### 12. Champ de force. Intensité du champ.

Lorsqu'en chaque point d'une région de l'espace et sous certaines conditions il s'exerce une force sur une portion de matière, on dit qu'il y a champ de force.

Par exemple, autour de la terre, il existe 6 champs de force: le champ de la pesanteur, le champ de la force centrifuge due à la rotation de la Terre, le champ de gravitation de la Lune et celui du Soleil (auxquels sont dues les marées), un champ électrique et un champ magnétique.

Parmi les champs de force il en est deux qui sont créés par des agents agissant en raison inverse du carré de la distance. Ces agents sont: la matière et plus généralement l'énergie, qui créent un champ de gravitation, et les charges électriques, qui produisent un champ électrostatique. Ces champs, régis par la loi que Newton a établie pour la gravitation, se nomment champs newtoniens.

On range habituellement le champ magnétique dans la même catégorie, sous prétexte que les actions entre pôles d'aimants s'exercent suivant la même loi. Il y a cependant une différence profonde de nature entre un corps électrisé et un aimant, entre un champ électrostatique et un champ magnétique.

Une expérience bien simple met ce fait en évidence. Dans un champ électrique un corps électrisé subit un effort de translation, il est soumis à une force. Dans un champ magnétique uniforme (champ terrestre par exemple), un corps aimanté s'oriente, sans translation; il est soumis, non pas à une force, mais à un couple. (1)

On sépare des charges électriques de signes contraires, on a pu isoler l'électron, ou atome d'électricité négative; on peut donc parler de charges électriques libres, agissant suivant la loi newtonienne.

Il en est tout autrement pour le magnétisme: les morceaux si petits qu'ils soient, d'un aimant coupé sont toujours des aimants soumis à un couple dans un champ magnétique uniforme.

Il n'y a nulle part de magnétisme libre; le pôle magnétique isolé n'est qu'un artifice de calcul; c'est une fiction qui ne correspond à aucune réalité. Il ne peut donc être question d'agents magnétiques agissant suivant la loi de Newton.

(1) On constate le fait en plaçant un aimant sur un flotteur en liège sous l'action du champ terrestre.

On appelle intensité en un point d'un champ de force la force qui s'exercerait sur la masse unité de l'agent sur lequel le champ peut agir, si cette masse était concentrée au point considéré.

Il faut d'ailleurs remarquer que l'introduction d'une masse déformerait le champ. On peut dire que l'intensité est

$$\vec{h} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{m}$$

quand la quantité d'agent  $m$  tend vers zéro en même temps que les dimensions du corps qui la supporte.

Le vecteur intensité du champ est en général appelé force (force électrique, force magnétique), dénomination consacrée, mais fâcheuse car ce n'est pas une force.

Par exemple, entre deux masses matérielles distantes de  $r$  s'exerce une force  $F = f \frac{m m' }{r^2}$ . L'intensité du champ produit par la masse  $m$  est  $f \frac{m}{r^2}$  à la distance  $r$ .

La différence de nature entre un champ électrique et un champ magnétique sera mise en évidence par le fait suivant que nous établirons plus tard : l'intensité d'un champ électrique est un vecteur polaire, et l'intensité d'un champ magnétique est un vecteur axial. Au point de vue mécanique, le champ électrostatique est comparable au champ de gravitation, alors que le champ magnétique, exerçant sur une charge en mouvement une action normale au déplacement, est comparable à un champ de force centrifuge.

## 13 - Potentiel d'un champ newtonien - Potentiel d'une masse ponctuelle. -

Soit  $m$  la quantité de l'agent, ou masse de l'agent supposée concentrée en un point. Cette masse est une masse matérielle dans le cas de la gravitation, une charge électrostatique dans le cas d'un champ électrostatique.

L'intensité du champ à la distance  $r$  de la masse ponctuelle est :

$$(42) \quad \vec{h} = f \frac{m}{r^2} \quad (1)$$

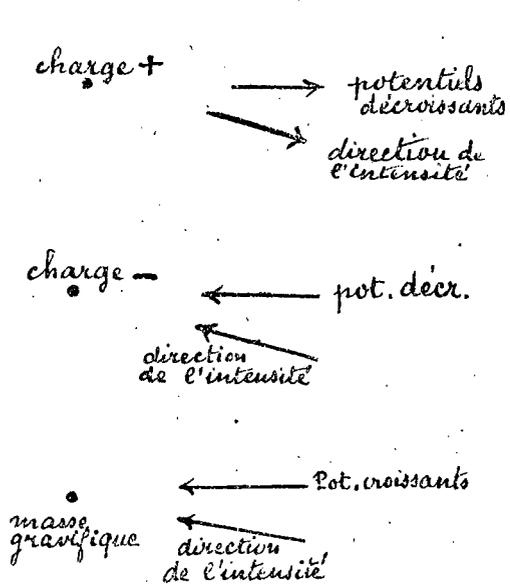
---

(1) voir notice (1) page 33.

Dans le cas d'un champ électrostatique, les masses ou charges de même signe se repoussent, contrairement à ce qui a lieu dans le cas de la gravitation où les forces sont toujours attractives. L'intensité du champ électrostatique est, par convention, la force qui s'exercerait sur l'unité de masse positive.

Le vecteur intensité dérive d'un potentiel :

$$(43) \quad \psi = f \frac{m}{r} + c^{te} \quad \text{car} \quad \vec{h} = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$



Pour les actions électrostatiques, si  $m$  est une masse positive le champ est centrifuge, si  $m$  est négative le champ est centripète. L'intensité est toujours dirigée dans le sens du décroissement du potentiel, dont le signe correspond ainsi à celui de l'énergie potentielle qui décroît toujours quand les corps se meuvent dans la direction où la force agit sur eux. Pour la gravitation, au contraire, l'intensité en un point est dirigée dans le sens de l'accroissement du potentiel.

Cas général. - Le potentiel

en un point est :

$$(44) \quad \psi = \sum f \frac{m}{r}$$

ou, si les masses sont réparties, les unes en volume avec une

(1) Pour un champ de gravitation,  $f$  est la constante de la gravitation. Pour un champ électrostatique  $f$  est l'inverse du coefficient que nous appellerons pouvoir inducteur spécifique ou constante diélectrique, qui dépend du milieu, c'est un coefficient numérique sans dimensions (égal à 1 dans le vide). D'après cela la force s'exerçant entre deux masses  $m$  et  $m'$   $f \frac{mm'}{r^2}$ , et  $f$  étant, par convention, un nombre, la charge électrostatique a pour dimensions

$$\left[ F^{1/2} L \right] \quad \text{c'est à dire} \quad \left[ M^{1/2} L^{3/2} T^{-1} \right]$$

densité  $\rho$ , les autres en surface avec une densité superficielle  $\sigma$

$$(45) \quad \Psi = \iiint f \frac{\rho dv}{r} + \iint f \frac{\sigma dS}{r} + C$$

Dans le cas d'un champ de force, l'équation (19) (n° 5)

$$C_A^B = \Psi_A - \Psi_B$$

représente la circulation de l'intensité du point A au point B. Pour le champ électrique c'est le travail qu'il faudrait dépenser pour amener l'unité de masse positive de B en A. On a:

$$\Psi_A - \Psi_B = \sum f \frac{m}{r_A} - \sum f \frac{m}{r_B}$$

Si le point B est infiniment éloigné des charges qui produisent le champ, le terme  $\sum f \frac{m}{r_B}$  est nul; on voit que:

$\sum f \frac{m}{r_A}$  représente le travail qu'il faudrait dépenser pour amener l'unité de charge positive de l'infini au point A. Dans le champ de gravitation c'est le travail à dépenser pour éloigner à l'infini l'unité de masse.

## 14 - 2<sup>ème</sup> Théorème de Gauss.

Dans un champ newtonien, le flux total qui sort d'une surface fermée est égal à

$4\pi f \sum m + 2\pi f \sum m'$   
La somme  $\sum m$  s'étendant à tous les centres d'action situés à l'intérieur de la surface et la somme  $\sum m'$  à tous les centres situés sur la surface.

Remarquons d'abord que si un champ est la résultante de plusieurs autres, c'est à dire si  $\vec{h} = \vec{h}' + \vec{h}'' + \dots$

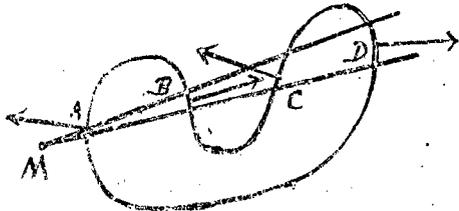
Le flux du champ  $\vec{h}$  à travers une surface quelconque est la somme des flux des champs composants  $\vec{h}', \vec{h}'', \dots$  à travers la même surface.

En effet, la formation du produit scalaire de deux vecteurs étant une opération commutative et distributive ( $n=2$ ), on a :

$$(\vec{h} \cdot \vec{n}) dS = ((\vec{h}' + \vec{h}'' + \dots) \cdot \vec{n}) dS = (\vec{h}' \cdot \vec{n}) dS + (\vec{h}'' \cdot \vec{n}) dS + \dots$$

Or un champ newtonien peut être considéré comme la somme des champs créés par chacun de ses unités à l'action prise isolément, il nous suffira donc de montrer que le flux total d'un centre d'action isolé est nul, égal à  $4\pi fm$  ou égal à  $2\pi fm$  suivant que ce centre est extérieur à la surface, intérieur à la surface, ou situé sur la surface fermée.

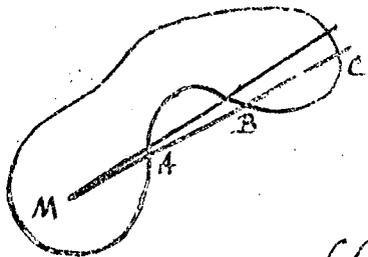
1° Point extérieur. Le tube de force élémentaire est un cône d'angle solide  $d\omega$  qui coupe la surface en un nombre pair de points, et l'on voit qu'en A et B, en C et D le flux a la même valeur absolue



$$f \frac{m}{r^2} dS \cos(\vec{r}, \vec{n}) = f m d\omega$$

mais prise avec des signes contraires, ce flux est donc nul.

2° Point intérieur. Les points A, B, C sont en nombre impair et la somme algébrique des flux en ces points est égale à  $f m d\omega$  puisqu'ils se détruisent deux à deux sauf le dernier qui est nécessairement sortant.



En intégrant, on a :

$$\iint_S (\vec{h} \cdot \vec{n}) dS = f m \iint_S d\omega = 4\pi f m$$

par suite  
(46)

$$\iint_S (\vec{h} \cdot \vec{n}) dS = \iint_S ((\vec{h}' + \vec{h}'' + \dots) \cdot \vec{n}) dS = 4\pi f \Sigma m$$

3° Point sur la surface.  $\iint d\omega = 2\pi$  de sorte que :

$$(47) \quad \iint_S (\vec{h} \cdot \vec{n}) dS = 2\pi f \Sigma m$$

Le théorème est donc démontré sous la condition toutefois que  $f$  soit constant, c'est à dire que le milieu soit homogène.

Dans le cas d'un champ de gravitation, les masses matérielles étant toujours positives et les forces étant toujours attractives, les signes des flux doivent être changés et l'on a:

$$\iint (\vec{h} \vec{n}) dS = -4\pi f \Sigma m - 2\pi f \Sigma m'$$

## 15. Equations de Poisson et de Laplace.

Soit  $dv$  un élément de volume contenant une masse  $dm = \rho dv$  ( $\rho$  densité) de l'agent producteur du champ; le 1<sup>er</sup> théorème de Gauss (n° 8 formule 32), appliqué à cet élément, s'écrit:

$$\text{flux sortant} = -\Delta \Psi dv \quad (\Delta \text{ opérateur } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

L'application du 2<sup>e</sup> théorème de Gauss (formule 46) donne:

$$\text{flux sortant} = 4\pi f \rho dv$$

On a donc:

$$(48) \quad \Delta \Psi = -4\pi f \rho$$

et pour le cas de la gravitation, le signe devant être changé

$$(49) \quad \Delta \Psi = 4\pi f \rho$$

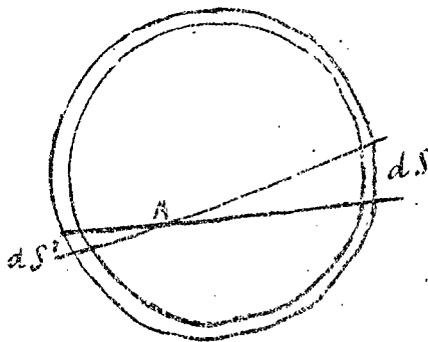
$f$  étant la constante de la gravitation et  $\rho$  la densité de la matière. C'est l'équation de Poisson. Laplace avait, antérieurement, considéré le cas où il n'y a pas de masse agissante. On a alors, dans un élément de volume où il n'y a pas d'agent libre:

$$(50) \quad \rho = 0 \quad \Delta \psi = 0$$

Le fluide est alors conservatif. Dans un tube de force, ne contenant pas de masse, tout se passe comme pour un tube rempli d'un liquide incompressible.

Champ uniforme. — Il résulte de là que dans tout espace où ne se trouvent pas de masses agissantes, la force est constante si elle a une direction constante. Les tubes de force sont en effet des cylindres, la section droite étant constante et le flux étant constant, la force est constante. Les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles. Un tel champ est appelé champ uniforme.

## 16. Une couche sphérique homogène n'exerce aucune action sur un point intérieur.



Considérons deux cônes d'angle solide  $d\omega$ , opposés par le sommet  $A$ , ils découpent sur la sphère deux éléments de surface  $dS$ ,  $dS'$  qui, faisant tous deux le même angle avec l'axe du cône, sont proportionnels aux carrés de leurs distances  $r$ ,  $r'$  au point  $A$ .

Les actions exercées en  $A$ , par ces deux éléments de surface sont égales et opposées, et s'équilibrent.

Nous pouvons donc décomposer la surface sphérique en groupes de deux éléments dont les effets se détruisent. L'action totale en  $A$  est nulle.

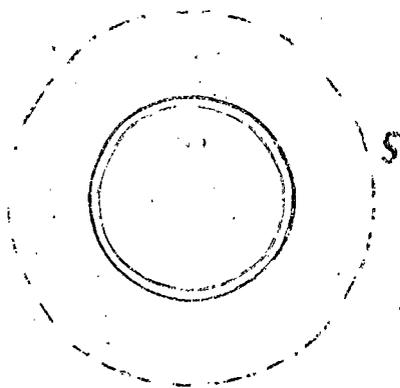
Le potentiel est, par suite constant à l'intérieur de la couche sphérique.

La conclusion s'étend au cas d'une série de couches

concentriques agissent sur un point intérieur.

## 17. Action d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur.

Cette action est la même que si toute la masse était concentrée au centre de la sphère.



Considérons une surface sphérique  $S$  de rayon  $r$  extérieure à la couche. Cette surface est une surface équipotentielle. L'application du 2<sup>e</sup> théorème de Gauss (n° 14) donne, le flux étant  $4\pi r^2 h$

$$4\pi r^2 h = 4\pi f \Sigma m$$

$$h = f \frac{\Sigma m}{r^2}$$

Le théorème s'applique évidemment à une série de couches de densités uniformes, et par conséquent à une sphère dans laquelle la densité n'est fonction que de la distance au centre.

## 18. Action d'une sphère homogène sur un point intérieur.

La sphère peut être divisée en deux parties séparées par une sphère concentrique passant par le point considéré.

L'action de la partie externe est nulle (n° 16); l'action de la partie interne est égale à celle d'une masse égale condensée au centre. En appelant  $r$  la distance du point au centre, on a:

$$h = \frac{4}{3} \pi f \rho r$$

# Chapitre II <sup>(1)</sup>

## Le courant électrique

### § 1. généralités sur les installations électriques. <sup>(2)</sup>

#### 19. comparaison, au point de vue énergétique des installations électriques et des installations mécaniques.

Toute installation électrique se compose d'un générateur, d'une transmission formée de fils conducteurs, et d'un récepteur dans lequel on utilise la part d'énergie qui n'a pas été absorbée dans la transmission.

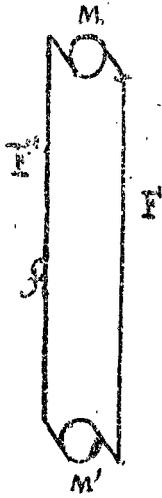
Supposons par exemple qu'on prenne pour générateur une machine  $M$  dite magnéto-électrique et pour récepteur une machine semblable  $M'$ , la transmission étant un double fil  $FF'$  qui présente une partie fine  $f$ .

$f$ . Si l'on fait tourner la machine  $M$ , elle entraîne  $M'$ ; immobilisons  $M'$ , nous constatons que le fil fin  $f$  rougit.

---

(1) La notion juste du champ magnétique ne pouvant s'acquiescer que par l'étude de l'énergie cinétique des courants, dont un champ magnétique est toujours la manifestation, nous commencerons par l'électrodynamique, contrairement à l'habitude d'après laquelle on place au début des cours d'électricité, l'électrostatique et le magnétisme des aimants.

(2) E. Carvallo      Leçons d'électricité - (1904)  
Béranger éditeur.



Il y a donc propagation d'énergie dans les fils, et l'énergie fournie par le générateur se divise en deux parts: l'une qui est consommée par le récepteur, l'autre qui est transformée en chaleur dans les fils de transmission. Quand la première part est supprimée, par immobilisation de la réceptrice, toute l'énergie se transforme en chaleur, conformément au principe de l'équivalence.

on voit qu'il se produit, dans un fil conducteur, une dégradation de l'énergie absolument comparable à celle qui résulte des frottements dans une transmission mécanique. Dans les installations électriques, comme dans les installations mécaniques, de l'énergie est fournie, une partie de cette énergie se dégrade, et le reste est utilisable dans le récepteur.

### Rendements.

Le rendement d'une installation industrielle, mécanique ou électrique, est l'énergie qui utilise le récepteur par unité d'énergie développée dans le générateur. On peut le diviser en trois rendements partiels.

Le rendement du générateur, ou énergie disponible sur la transmission par unité développée dans le générateur.

Le rendement de la transmission, ou énergie cédée au récepteur par unité que la transmission reçoit du générateur.

Le rendement du récepteur, ou énergie utile fournie par unité reçue de la transmission.

## 20. Générateurs et récepteurs.

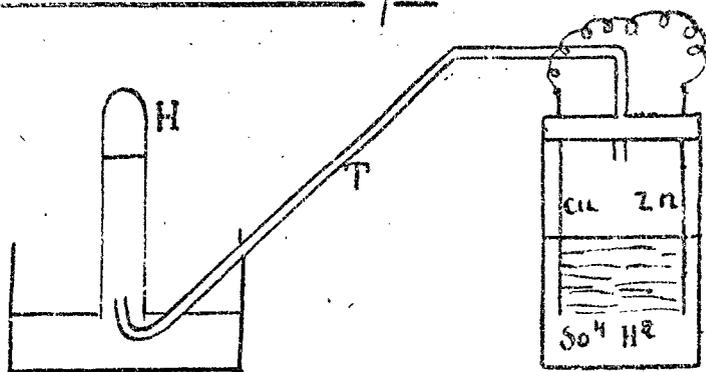
Les générateurs peuvent être divisés en trois classes, selon la forme d'énergie qu'on prend comme source d'énergie électrique.

1) Les générateurs qui empruntent leur énergie au

travail mécanique; ce sont les machines basées sur l'induction électromagnétique et les machines basées sur l'induction électrostatique (ces dernières sont inutilisables dans l'industrie).

2°) Les générateurs qui transforment de l'énergie thermique en énergie électrique. Ce sont les piles thermo-électriques qui fonctionnent par une chute de chaleur.

3°) Les générateurs qui empruntent de l'énergie aux phénomènes chimiques (comme les moteurs à combustion). Ce sont les piles. Ces générateurs vont nous donner immédiatement deux notions fondamentales: celle du déplacement électrochimique et celle de la force électromotrice.



considérons, par exemple, une pile formée d'une lame de cuivre (platiné pour éviter l'altération du métal) et d'une lame de zinc plongeant dans de l'eau acidulée d'acide sulfurique. Ces deux

lames sont réunies par un fil conducteur dans lequel passe un courant électrique. Si un tube réducteur T traverse le bouchon fermant le vase et aboutit à une éprouvette, nous recueillons de l'hydrogène libéré dans la réaction:



réaction exothermique dégageant environ 18000 cub. gc. par gramme d'hydrogène déplacé.

nous constatons deux faits:

1°) La production du courant et le déplacement de l'hydrogène sont deux phénomènes connexes: d'où la notion de déplacement électrochimique.

2°) Une partie de l'énergie libérée dans la réaction chimique, au lieu de rester dans la pile, va échauffer le fil conducteur et produirait du travail si les bornes de la pile étaient reliées à un récepteur. Il y a donc de l'énergie motrice disponible sur le circuit; l'énergie disponible par unité de déplacement donne la notion de force électromotrice.

Il est évident que la puissance fournie par la pile est

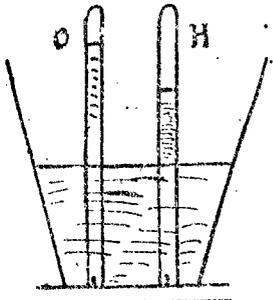
en raison du déplacement par unité de temps, c'est à dire de la vitesse du déplacement, et en raison de la force électromotrice.

Récepteurs. — comme les générateurs les récepteurs peuvent être divisés en trois classes.

1°) Les récepteurs d'énergie mécanique basés sur les forces électromagnétiques.

2°) Les récepteurs calorifiques dans lesquels toute l'énergie est transformée en chaleur (lampes, réchauds etc.)

3°) Les récepteurs chimiques, dans lesquels le courant produit une réaction chimique. Exemple:



Le voltamètre où l'eau est décomposée; cet appareil est formé d'un vase de verre dans lequel pénètrent deux fils de platine qu'on couvre de deux éprouvettes renversées et pleines d'eau; l'hydrogène et l'oxygène sont recueillis et mesurés dans ces éprouvettes

### Réversibilité de certains

récepteurs. — On peut récupérer sous forme mécanique une partie de l'énergie fournie au voltamètre - D'abord les gaz séparés contiennent de l'énergie à l'état potentiel car on pourrait utiliser leur combustion; d'autre part si l'on supprime la pile et si l'on réunit par un fil les bornes du voltamètre, les gaz se recombinent et donnent un nouveau courant; le voltamètre fonctionne comme générateur: cette réversibilité est le principe de la pile à gaz de Grove; c'est aussi le principe des accumulateurs.

Les machines basées sur l'induction électromagnétique sont également réversibles; elles peuvent fonctionner comme génératrices ou comme réceptrices.

La dégradation de l'énergie rend toujours incomplète la réversibilité des générateurs et récepteurs. ainsi, dans toute installation électrique, on fournit

de l'énergie mécanique ou thermique ou chimique; le générateur transforme une partie de cette énergie en énergie électrique qui se transmet par des fils conducteurs et est reçue dans le récepteur où on l'utilise sous forme d'énergie mécanique (machines), calorifique (lampes), ou chimique (électrolyse); une portion de l'énergie disponible sur la transmission est dégradée dans le transport.

Nous allons montrer maintenant que lorsque le régime est établi et que les circuits sont fixes, l'énergie fournie par le générateur se retrouve intégralement sur le circuit même.

## § 2. Régime constant dans un circuit fixe. Loi de l'équivalence <sup>(1)</sup>

### 21. — Conservation de l'énergie le long du circuit. Expériences de Favre.

D'après ce qui précède, le courant électrique est un transport d'énergie. La première question qui se pose est de savoir s'il y a, ou non, des pertes d'énergie, des fuites, en dehors du circuit.

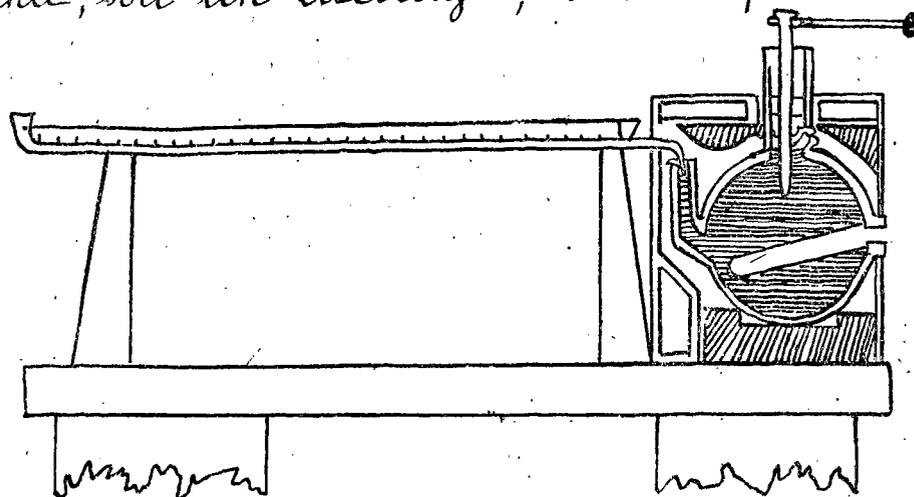
L'expérience prouve que, sous la condition que le régime soit constant et que les circuits soient fixes, l'énergie du générateur se retrouve intégralement sur le circuit <sup>(2)</sup>. C'est la loi de l'équivalence le long du circuit, découverte par Joule et par de la Rive, et directement établie par les expériences de Favre que nous allons exposer.

Le générateur était une pile formée d'une lame

(2) Nous verrons plus tard qu'il n'en est plus de même quand les courants sont variables, ou quand les circuits sont mobiles.

(1) D'après les leçons d'électricité de M. E. Carrallo.

de zinc amalgamé et d'une lame de cuivre platiné plongeant dans un tube rempli d'eau acidulée par de l'acide sulfurique (pile de Volta transformée).  
Le récepteur était, soit un fil fin appelé résistance, soit un électrolyte, soit un petit moteur.



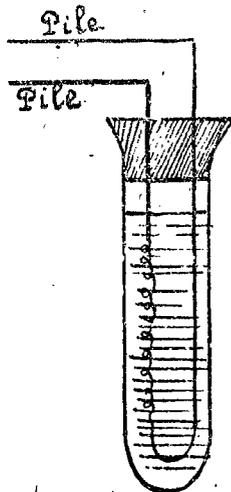
La chaleur développée dans le circuit était mesurée dans le calorimètre à mercure dont Favre avait fait usage dans des recherches antérieures avec Silbermann. Ce calorimètre est un gros thermomètre à mercure dont le réservoir en fer présente deux mouffles dans l'une desquelles on place la pile et dans l'autre le récepteur. Le mercure s'avance dans le tube thermométrique à mesure que la température s'élève. On gradue l'appareil en calories par des expériences préliminaires où l'on introduit, dans les mouffles, de l'eau à diverses températures connues.

Toutes les déterminations ont été ramenées à un même déplacement électrochimique, le déplacement de 1 gramme d'hydrogène; à cet effet, on a recueilli l'hydrogène dégagé dans la pile.

Favre mesura, pour 1 gr. d'hydrogène dégagé:

- 1°) La quantité de chaleur  $Q$  recueillie à la fois dans la pile et le récepteur plongés tous deux dans le calorimètre
- 2°) La chaleur  $Q_1$  recueillie dans la pile seule, le récepteur restant hors du calorimètre.
- 3°) Sans le cas du récepteur mécanique, le travail produit par le petit moteur.

1°) Récepteur thermique. — Le fil fin, ou résistance, formant récepteur était soudé à deux gros fils à l'intérieur d'une éprouvette remplie d'eau; les gros fils étaient reliés aux pôles de la pile. Le fil fin s'échauffait seul d'une façon sensible.



Opérant avec des résistances formées de fils de même diamètre et de longueur variable  $l$ , l'auteur a obtenu les résultats résumés dans le tableau suivant:

$l$ (centimètres)	$t$ minutes	$i = \frac{1}{3}$	$Q$	$Q_1$	$Q_2 = Q - Q_1$
0	2	0,5	18137	18137	0
2,5	5	0,2	18092	13127	4965
5,0	7	0,143	18247	11690	6557
10,0	10,5	0,097	18185	10439	7746
20	18,5	0,055	18022	8992	9030
moyenne			18136		
chaleur de combinaison			18124	(sans circuit)	
différence			12		
valeur relative de l'écart $\frac{12}{1800} < \frac{1}{1000}$					

La seconde colonne donne les durées  $t$  du dégagement de 100 centimètres cubes d'hydrogène. La troisième indique la vitesse du déplacement de l'hydrogène (1).

Quand la longueur du fil fin augmente, la quantité de chaleur  $Q_1$  dégagée par la pile seule diminue, mais la quantité totale de chaleur  $Q$  recueillie dans la pile et la résistance reste constante, elle est égale à la chaleur de combinaison.

La chaleur développée par la réaction chimique se retrouve donc intégralement le long du circuit.

(1) Nous verrons un peu plus loin que cette vitesse mesure l'intensité du courant.

2°) Récepteur chimique. — Si, à la résistance métallique, on substitue un électrolyte, la quantité totale de chaleur versée dans le calorimètre est moindre, et la différence entre la quantité de chaleur obtenue dans les expériences précédentes est égale à la chaleur absorbée par la décomposition chimique effectuée par le courant. Il y a donc conservation de l'énergie.

3°) Récepteur mécanique. — Ce récepteur était une machine magnéto-électrique assez petite pour pouvoir être introduite dans le calorimètre (capacité du calorimètre, 5 litres; logement du moteur 18 cm de profondeur sur 12 cm de côté à l'ouverture).

Dans cette série d'expériences le générateur était formé de cinq piles.

Cinq expériences ont été faites:

1°) Mesure de la chaleur dégagée par la réaction chimique, sans courant.

2°) Evaluation de la chaleur dégagée par le courant dans le fil qui joint le générateur au récepteur. Cette chaleur a été trouvée négligeable.

3°) Mesure de la chaleur dégagée dans la pile et dans le moteur immobilisé; ce moteur se comporte alors comme une résistance ordinaire.

4°) Mesure de la chaleur dégagée, le récepteur tournant "à vide".

5°) Mesure de la chaleur et d'un travail effectué par le moteur. Ce travail a été trouvé égal à 131.24 Kilogrammètres, équivalent à 305 cal. gr.

Le tableau suivant réunit les résultats. (1)

---

(1). Dans la série d'expériences avec le récepteur thermique, Favre a donné, pour la chaleur de combustion correspondant à 1 gr d'hydrogène, 18136 cal. Ici il donne 18640; la cause est probablement due au changement de calorimètre et aux erreurs de graduation.

	Équivalent calorifique du travail	chaleurs dégagées		total
		dans le récepteur	dans la pile	
		calories	calories	calories
I. Pile sans circuit, sans courant.		0	18682	18682
II. Courant dans les fils de jonction de la pile au moteur.		0	18674	18674
III. Courant dans le moteur maintenu immobile.		2219	16448	18667
IV. Moteur tournant sans exécuter de travail utile.		4769	13888	18657
				18670
V. Le moteur exécute le travail.	305	2947	15427	18649
			Moyenne	

Les écarts relatifs à une même série, dans toutes les expériences de Favre, sont inférieures au millième. La conservation de l'énergie le long du circuit est vérifiée dans les limites des erreurs expérimentales.

## 22 Rendement de la pile (1)

Dans les expériences faites avec la résistance (premier tableau), le rendement de la pile est  $\frac{Q_2}{Q}$ , proportionnel à  $Q_2$  puisque  $Q$  est constant. Les chiffres montrent que le rendement augmente à mesure que la vitesse du déplacement électrochimique diminue. Pour trouver la loi qui relie le rendement et la vitesse du déplacement (intensité), portons  $i = \frac{1}{t}$  en abscisses et  $Q_2$  en ordonnées. Si l'on excepte la première expérience, tous les points

(1) Le rendement de la ligne est sensiblement 1 (expérience 2). Celui du récepteur est nul dans les expériences III et IV. Dans l'expérience V, le moteur fournit un travail équivalent à 305 cal; il reçoit de la ligne un total d'énergie, évalué en calories, égal à  $305 + 2947 = 3252$ ; son rendement est donc  $\frac{305}{3252} = 0,09$ ; rendement détestable, mais cela n'a aucune importance pour le fait à établir, qui est la conservation de l'énergie.

sont sur une droite AB, dont l'équation s'écrit:

$$(51) \quad Q_2 = E - \lambda i$$

en posant  $E = OB = 10,6$  grandes calories

et  $\lambda = \frac{OB}{OA} = 28$

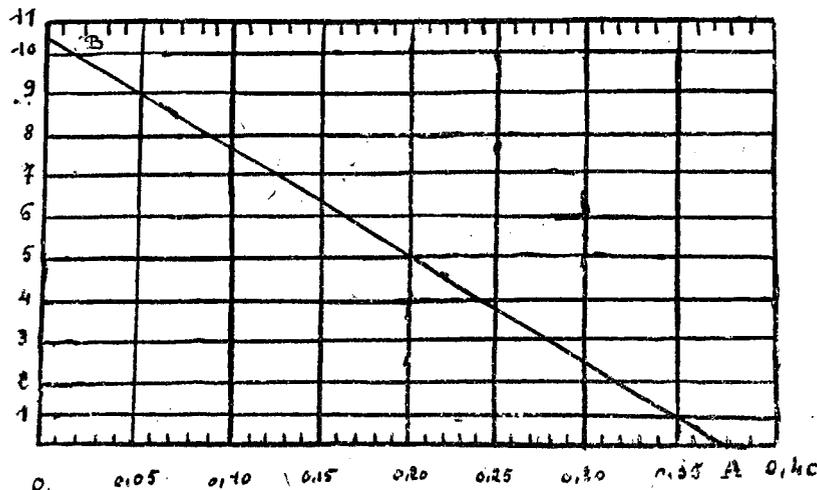
Le rendement de la pile est donc fonction linéaire du déplacement électrochimique.

## 23 ~ Énergie chimique et énergie voltaïque.

Le maximum de  $Q_2$  est atteint pour  $i = 0$  c'est  $E$ . On voit donc que l'énergie chimique  $Q$  contient deux parties: l'une d'elles  $Q_0 = Q - E$  est toujours immobilisée dans la pile; l'autre  $E$  est disponible le long du circuit, on l'appelle énergie voltaïque.

Il est vrai qu'une partie  $\lambda i$  de cette énergie  $E$  est encore immobilisée dans la pile et par conséquent inutilisable dans le circuit, mais on peut théoriquement la rendre aussi petite qu'on veut.

Favre a constaté que  $E$  et  $\lambda$  varient avec la concentration de l'acide, avec l'organisation de la pile et l'état de ses éléments. Le travail de la pile altérant ses matériaux



(voir chapitre suivant) rend les grandeurs  $E$  et  $\lambda$  variables avec le temps.

En résumé deux faits fondamentaux sont acquis:

1<sup>o</sup>) L'énergie chimique de la pile se retrouve intégralement dans le circuit avec ou sans transformation.

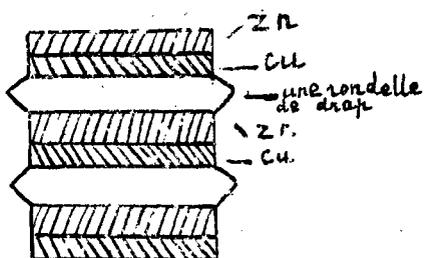
2<sup>o</sup>) une partie est immobilisée dans la pile. Une autre partie est utilisable sur le circuit extérieur.

## §3. Déplacements électrochimiques. Loi de Faraday

### 24 ~ Piles et électrolytes. ~

Nous allons étudier les générateurs et récepteurs chimiques au point de vue des déplacements chimiques dont ils sont le siège. La loi de Faraday, qui régit ces déplacements, nous conduira à la notion de l'intensité d'un courant.

Piles. — Les générateurs chimiques utilisent des réactions exothermiques. Ils sont formés, en principe, de deux lames de métaux différents, une des extrémités de chaque lame plongeant dans un liquide; l'un au moins des deux métaux participe à la réaction.



La première pile est due à Volta: des disques de zinc et des disques de cuivre, soudés par couples, étaient empilés (1). Les couples étaient séparés par des rondelles de drap imbibé d'une solution saline, chaque rondelle

étant en contact avec le zinc d'un des couples et le cuivre de l'autre couple. Volta, ayant reconnu que la pile perdait de son énergie à mesure que les rondelles

(1) D'où le nom de pile.

se détachent transformez l'appareil, et composez chaque couple d'une lame de zinc et d'une lame de cuivre plongeant dans de l'eau acidulée contenue dans un vase. Une modification de cette pile (zinc amalgamé et cuivre platiné) a servi à Faraday dans les expériences précédemment décrites. (1)

Dans une pile, les extrémités libres des lames ou des fils soudés aux lames métalliques plongeant dans le liquide se nomment les pôles de la pile, ou de l'élément. On appelle batterie un ensemble d'éléments ajoutés sur un circuit.

Récepteurs chimiques. — Les récepteurs sont tous constitués de la même manière : un sel, ou un acide dans lequel l'hydrogène joue le rôle de métal, est amené à l'état liquide, soit par dissolution, soit par fusion. Dans le sel plongent les extrémités de deux conducteurs reliés aux pôles d'une pile ou d'une batterie. Le métal est déplacé de sa combinaison par l'énergie venue du générateur. La réaction est électrochimique.

On appelle électrolyse ce phénomène de déplacement. L'électrolyte est le sel ou l'acide décomposé par le courant. Les électrodes sont les bouts de fil dans l'électrolyte. Enfin on désigne par ions les produits du dédoublement — réel comme nous le verrons plus tard — de l'électrolyte en deux parties (2). Les deux ions se déplacent en sens inverses pour se porter sur les électrodes.

Nous avons déjà parlé du premier phénomène d'électrolyse, découvert par Carlisle et Nicholson : c'est l'électrolyse de l'eau acidulée.

Les réactions sont les suivantes :

(1) Nous parlerons plus loin des causes d'affaiblissement de la pile de Volta et nous indiquerons comment on a réalisé les piles à courant constant.

(2) Nous verrons que ce dédoublement précède dans un sel dissous. Dans une solution de NaCl, il y a des ions Na et des ions chlorurés. Le courant les transporte sur les électrodes.

## Réactions

Principale	$\text{SO}_4\text{H}^2 = \overleftarrow{\text{SO}_4} + \overrightarrow{\text{H}^2}$	endothermique
Secondaire	$\text{SO}_4 + \text{H}^2\text{O} = \text{O} + \text{SO}_4\text{H}^2$	exothermique
Résultante	$\text{H}^2\text{O} = \overleftarrow{\text{O}} + \overrightarrow{\text{H}^2}$	endothermique; 69 cal

Si la pile est une pile de Volta, l'hydrogène se porte à l'électrode reliée au pôle zinc de la pile. Nous avons dit que le phénomène est réversible, le voltamètre pouvant servir de pile.

Comme autres exemples de décompositions, nous pouvons citer les chlorures, bromures iodures. Le métal se rend toujours sur l'électrode où se transporterait l'hydrogène dans un voltamètre placé sur le même circuit.

## 25 - Loi de Faraday -

On énonce souvent cette loi en plusieurs parties. On peut cependant en donner un énoncé unique qui met bien en lumière sa véritable signification.

Sur un même circuit contenant des générateurs et des récepteurs chimiques, ou sur divers circuits donnant dans le même temps le même déplacement d'hydrogène dans un voltamètre, le nombre de valences rompues ou établies est le même dans tous les appareils. (1)

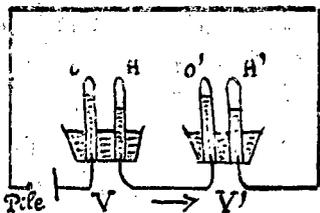
Voyons comment cette loi a été établie.

### 1°) actions chimiques dans le récepteur. —

Sur le circuit d'un premier voltamètre  $V$ , Faraday a placé un second voltamètre  $V'$ ; il a constaté que dans les deux appareils l'hydrogène se porte dans le même

(1) E. Carvallo, leçons d'électricité p. 34.

Il est juste de donner à cette loi le nom de Faraday; on doit cependant dire que, sous la forme qui vient d'être prononcée, la loi résulte non seulement des travaux de Faraday, mais aussi des expériences de Matteucci, Edmond Becquerel et Daniell.



sens, et que la même quantité d'hydrogène se dégage dans le même temps. C'est la forme la plus simple de la loi.

Faraday a varié les conditions du second voltamètre: forme, nature des électrodes, position (sur le circuit extérieur d'une batterie ou entre les éléments de la batterie); il a changé aussi la concentration de l'acide, la nature de l'acide en dissolution dans l'eau; il a même remplacé l'acide par de la potasse ou de la soude. Toujours la même quantité d'hydrogène a été déplacée dans les deux voltamètres V et V'.

La loi s'applique-t-elle seulement au déplacement de l'hydrogène? évidemment non, car le déplacement de l'oxygène dans le voltamètre est corrélatif de celui de l'hydrogène, l'oxygène et l'hydrogène étant en proportions définies par les lois de la chimie.

La loi de Faraday s'étend à tous les électrolytes. La question de sens est facile à résoudre: dans tous les appareils le métal se déplace dans le même sens que l'hydrogène du voltamètre.

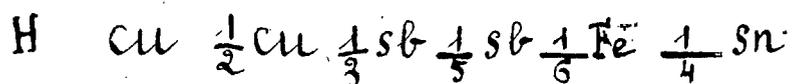
La question de grandeur du déplacement est plus compliquée:

Faraday étudia l'électrolyse de sels fondus: le protochlorure d'étain, le chlorure de plomb, le litharge, le borate de plomb. Il reconnut que lorsque 1 gramme d'hydrogène était mis en liberté dans le voltamètre, il y avait 59 grammes d'étain et 101 grammes de plomb déplacés dans les électrolytes; ces nombres sont très voisins des équivalents chimiques 59 et 103 de l'étain et du plomb.

Matteuci étendit cette observation à divers sels neutres, soit fondus soit en dissolution. Daniell montra que pour les sels alcalins en dissolution, la quantité d'hydrogène dégagée est équivalente à la quantité de métal alcalin qui a été mis en liberté et s'est oxydé aux dépens de l'eau.

Mais, lorsqu'on électrolyse des sels dont la constitution est plus complexe, la loi primitive de Faraday, d'après laquelle des quantités chimiquement équivalentes du métal se déplaceraient dans un même circuit, doit être

modifiée. La rectification est due à Edmond Becquerel<sup>(1)</sup>.  
 des expériences faites sur les chlorures  $\text{HCl}$ ,  $\text{Cu}^2\text{Cl}^2$ ,  $\text{CuCl}^2$ ,  
 $\text{SbCl}^3$ ,  $\text{SbCl}^5$ ,  $\text{Fe}^2\text{Cl}^6$ ,  $\text{SnCl}^4$  ont montré que pour un  
 même courant (c'est à dire sur un même circuit,  
 ou sur des circuits déplaçant dans le même temps  
 la même quantité d'hydrogène) des quantités égales de  
 chlore sont déplacées, en sens inverse de l'hydrogène  
 au voltamètre. Il en résulte que pour les sels en question  
 le même courant déplace simultanément des quantités



d'hydrogène ou de métal.

De plus, l'hydrogène déplacé de  $\text{HCl}$  est en quantité  
 égale à l'hydrogène déplacé de  $\text{H}^2\text{O}$ .

Interprétons ces résultats dans la théorie atomique.  
 L'expérience prouve qu'un même courant donne toujours  
 la même quantité de chlore; le chlore étant monovalent,  
 un atome  $\text{Cl}$  est libéré par rupture d'une valence; il  
 y a donc, dans tous les chlorures, un même nombre de  
 valences rompues pendant le même temps.

D'autre part, puisque les quantités d'hydrogène  
 obtenues avec  $\text{HCl}$  et  $\text{H}^2\text{O}$  sont égales, c'est que 2 molécules  
 $\text{H-Cl}$  sont décomposées en même temps qu'une molécule  
 $\text{H-O-H}$ ; il y a donc 2 valences rompues en même temps  
 dans  $\text{HCl}$  et dans  $\text{H}^2\text{O}$ .

Plus généralement, pour tous les ions monovalents, les  
 poids des éléments libérés sont dans le rapport de leurs poids  
 atomiques: des nombres égaux d'atomes sont donc libérés en  
 même temps, ce qui revient à dire que les nombres de  
 valences rompues sont les mêmes.

Si les ions ne sont pas monovalents, c'est encore la loi  
 des valences rompues qui règle les quantités de matière  
 déplacées par l'électrolyse. Voici un exemple: dans le  
 sulfate de cuivre  $\text{SO}^4\text{Cu}$  (cas de la galvanoplastie),  
 la libération du cuivre bivalent, correspond à la  
 rupture de 2 valences; on trouve qu'un atome  $\text{Cu} = 63.5$   
 est déplacé en même temps que 2  $\text{H} = 2$  d'hydrogène du  
 voltamètre. Prenons maintenant le bichlorure de cuivre.

(1) annales de ch. et de Phys. 3 série T. XI p. 162 et 257 (1844)

$\text{Cu}^2 \text{Cl}^2$  et plaçons le dans le même circuit que  $\text{SO}^4 \text{Cu}$ : la libération du chlore de  $\text{Cl}-\text{Cu}-\text{Cl}$  exige la rupture de 2 valences, et alors la quantité de cuivre déplacé est deux fois plus grande que pour le sulfate de cuivre, c'est  $2 \text{Cu} = 127 \text{ gr.}$

Ainsi suivant le sel soumis à l'électrolyse, un même courant peut déplacer des quantités différentes d'un même métal, si celui-ci est bivalent ou polyvalent; le résultat dépend de la constitution chimique c'est à dire des liens engagés dans la combinaison du métal avec un autre élément ou avec un radical.

On a appelé équivalent électrochimique d'un élément le quotient de son poids atomique par sa valence. On énonce parfois en termes plus ou moins variés la loi suivante: "lorsque différents électrolytes sont traversés par la même quantité d'électricité, les poids des éléments déposés aux électrodes sont proportionnels aux équivalents électrochimiques de ces éléments". Cet énoncé prête à la critique; la loi est bien valable pour les corps monovalents, mais peut ne plus l'être pour les corps bivalents ou polyvalents (à moins d'admettre que ceux-ci ont des valences différentes suivant le genre de sels qu'ils forment); nous venons, en effet, de voir que dans un même circuit, pour 1 gr d'hydrogène du voltamètre il se dépose l'équivalent électrochimique  $\frac{63,5}{2}$  du cuivre dans le cas de l'élec.

trolyse de  $\text{SO}^4 \text{Cu}$  et le double  $63,5$  dans le cas de  $\text{Cu}^2 \text{Cl}^2$ .

Nous avons examiné le cas des sels monobasiques. Pour les sels polybasiques et pour les mélanges de divers sels dans un même appareil électrolytique, les phénomènes qui régissent les proportions des divers ions libérés aux électrodes sont plus complexes, mais c'est toujours la loi des valences rompues qui s'applique: pendant un même temps, dans chaque appareil, le nombre total des valences rompues est le même que dans un voltamètre à eau placé sur le même circuit.

2°) actions chimiques dans la pile. — L'extension de la loi précédente à la pile elle-même a été donnée par

Muttenzi et développée par Daniell.

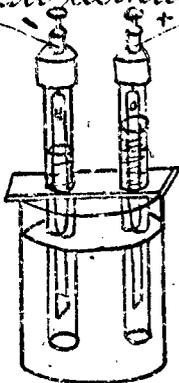
Le courant qui traverse les électrolytes traverse également la pile: dans la pile de Volta, l'hydrogène se dégage sur le pôle cuivre, il est déplacé dans le même sens du circuit que l'hydrogène d'un voltamètre. On place sur le circuit.

Lorsqu'on emploie du zinc pur ou amalgamé, le zinc ne se dissout pas dans l'acide tant que le circuit n'est pas fermé, c'est à dire tant que le courant ne peut pas s'établir. Quand on ferme le circuit, on trouve que pour 1 gramme d'hydrogène apparaissant dans un voltamètre, il se dégage également 1 gramme d'hydrogène sur le pôle cuivre de la pile ou de chaque élément de pile et qu'il se dissout 32,5 de zinc à l'autre pôle:  $32,5 = \frac{65,2}{2}$  est précisément l'équivalent électrochimique du zinc<sup>2</sup> bivalent.

Nous verrons qu'on peut substituer d'autres combinaisons de métaux et de sels à la combinaison inventée par Volta; si l'on dispose à la suite les uns des autres plusieurs de ces éléments, on reconnaît qu'après le passage du courant l'action chimique a été la même dans chacun d'eux et est équivalente à l'action chimique dans chacun des électrolytes traversés par le même courant.

La pile fonctionne donc comme un voltamètre.

Un cas important est celui du récepteur réversible, pouvant servir de pile; nous avons déjà dit que le voltamètre à eau acidulée constitue une pile quand on réunit ses électrodes par un fil conducteur, et que l'eau se reforme. C'est ainsi que Grove (1839) a construit la pile à gaz formée de lames de platine plongées mi-partie dans l'oxygène ou dans l'hydrogène, mi-partie dans l'eau acidulée. Chaque lame est enveloppée d'une cloche qui contient le gaz: la pile ainsi constituée n'est autre qu'un voltamètre dans lequel on a recueilli les gaz de la décomposition de l'eau, mais on peut également préparer séparément de l'oxygène et de l'hydrogène par tel procédé qu'on voudra, les introduire dans les cloches contenant les lames de platine, et l'on obtient.



un couple qui donne un courant tant que les gaz n'ont pas disparu. L'hydrogène joue le rôle d'un métal qui s'oxyde. Pendant que la pile fonctionne, on voit l'oxygène et l'hydrogène diminuer de volume dans la proportion de 2 vol. H pour 1 vol. O.

Il est évident qu'un seul couple à gaz ne peut décomposer l'eau d'un voltamètre, car le voltamètre formerait aussitôt une pile à gaz équilibrant la première; mais en associant en série plusieurs couples à gaz on peut décomposer l'eau. On constate alors qu'il disparaît dans chaque couple de la batterie autant d'hydrogène et d'oxygène qu'il en apparaît dans le voltamètre.

Ce résultat est conforme à l'énoncé que nous avons donné de la loi de Faraday, et comme dans la pile à gaz, ce sont des valences qui s'établissent nous avons eu raison de dire, dans l'énoncé, que "sur un même circuit le nombre de valences rompues ou établies est le même dans tous les appareils".

Remarque. — Nous avons dit que le zinc pur n'est pas attaqué par l'eau acidulée; il suffit de le toucher avec une tige de cuivre pour voir aussitôt des bulles d'hydrogène se dégager sur le cuivre. Avec le zinc du commerce les impuretés jouent le même rôle que la tige de cuivre de l'expérience précédente; la réaction a lieu parce que, ces impuretés constituent avec le zinc de petits éléments de pile donnant lieu à des courants locaux. Davy a observé que le zinc du commerce, lorsqu'il est amalgamé, ne se dissout pas dans l'eau acidulée et jouit des propriétés du zinc pur; il ne s'attaque dans l'eau acidulée que lorsqu'il est en contact avec un autre métal moins attaqué tel que le cuivre ou le platine.

## 26 — Déplacement électrique et intensité du courant —

La loi de Faraday montre avec évidence qu'un courant est caractérisé par le nombre de valences rompues (ou établies) à un instant donné, (pendant le temps  $dt$ ) dans la pile

ou dans un électrolyte quelconque placé sur le circuit. Nous sommes donc conduits à prendre pour mesure de l'intensité du courant une quantité proportionnelle au nombre de valences rompues par unité de temps.

Nous appellerons déplacement électrique pendant un temps  $t$ , ou quantité d'électricité une quantité

$$(52) \quad q = \epsilon N$$

proportionnelle au nombre  $N$  de valences rompues pendant le temps  $t$  ou, ce qui est la même chose, au nombre  $N$  d'atomes d'hydrogène qui seraient libérés dans un voltamètre s'il y en avait un sur le circuit.

La quantité  $\epsilon$  est une quantité constante dont les dimensions seront celles qu'il conviendra d'attribuer à un déplacement électrique et dont la valeur dépendra du choix de l'unité. Voyons quel choix on peut faire.

Nous avons déjà appelé déplacement de l'hydrogène la masse d'hydrogène libérée dans le voltamètre. On pourrait identifier le déplacement d'hydrogène et le déplacement électrique et prendre pour unité de déplacement l'unité des chimistes  $H = 1^{\text{gr}}$ . Dans ce système l'unité d'intensité serait celle qui déplacerait  $1^{\text{gr}}$  d'hydrogène par seconde; plus exactement dans le cas des courants variables, l'intensité à l'instant  $t$  serait égale à la vitesse de déplacement de l'hydrogène  $i = \frac{dH}{dt}$ .

Cette mesure de l'intensité  $\frac{dH}{dt}$  serait analogue à la mesure de la vitesse d'un arbre de machine par le compteur de tours (on compte le nombre de tours par seconde). Mais une telle méthode a l'inconvénient de ne donner pratiquement qu'une vitesse moyenne, non pas la vitesse à un instant précis.

En plus du défaut de ne donner dans les mesures qu'une vitesse moyenne, la définition de l'intensité par la vitesse de déplacement de l'hydrogène présente un autre grave inconvénient: le courant produit dans l'espace environnant, un champ de force magnétique; la définition précédente ne se prête pas aisément à l'expression de l'action d'un courant sur un autre courant ou sur un aimant; aussi le congrès de 1881 a-t-il décidé de définir l'intensité par des considérations électromagnétiques.

Nous exposerons plus loin les phénomènes qui nous conduiront à la définition de l'intensité électromagnétique. Pour le moment il nous suffit d'indiquer les résultats auxquels nous serons conduits :

1<sup>o</sup>) l'intensité électromagnétique  $i$  est proportionnelle à la vitesse du déplacement matériel dans l'électrolyse, et le déplacement électrique (ou quantité d'électricité)  $q$  est proportionnel au nombre de valences rompues pendant le temps  $t$  dans un électrolyte ; il s'exprime donc bien par la formule (52)  $q = en$ . C'est un fait expérimental.

2<sup>o</sup>) l'intensité électromagnétique  $i$  a pour dimensions la racine carrée d'une force mécanique  $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$  dans le système C.G.S. et le déplacement électrique a pour dimensions  $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$  ; telles sont les dimensions de  $e$  dans la formule (52) puisque  $n$  est un nombre. L'ampère est l'unité pratique d'intensité : C'est  $\frac{1}{10}$  d'unité C.G.S.

Le coulomb est l'unité pratique de déplacement électrique ou de quantité d'électricité. C'est le déplacement dû à un ampère pendant une seconde (un ampère débite un coulomb par seconde). L'unité C.G.S. de déplacement est le déca-coulomb. Le coulomb correspond à un dégagement d'hydrogène de 0,0001036 (environ 0,1 cm<sup>3</sup>) ou à un dépôt d'argent de 0,001118 gr.

Enfin l'ampère-heure est la quantité débitée par 1 ampère en une heure ; il vaut 3600 coulombs.

L'intensité d'un courant se mesure par les galvanomètres et ampèremètres basés sur la déviation d'une aiguille aimantée dans le champ magnétique produit par le courant. Pour en revenir à la comparaison faite plus haut, ces appareils sont comparables au tachymètre, qui permet de mesurer la vitesse d'un arbre de machine par la déviation de deux boules s'écartant de la verticale d'autant plus que la vitesse de rotation est plus grande. La comparaison est très bonne car nous verrons que le champ magnétique est comparable à un champ de force centrifuge (1)

(1) voir note (1) de la page suivante.

Sens du courant. — Nous venons de parler de la grandeur du déplacement électrique; il faut lui donner un sens: par convention le sens du déplacement ou du courant est celui du métal dans les piles et électrolytes.

On appelle alors:

Pôle positif, celui où va le courant dans la pile.

Pôle négatif, celui d'où vient le courant dans la pile.

Cathode, l'électrode vers laquelle va le courant dans l'électrolyte (elle est reliée au pôle négatif de la pile)

anode, l'électrode d'où vient le courant dans l'électrolyte

Cathion, l'ion qui se porte à la cathode

anion, l'ion qui se porte à l'anode.

Ainsi le courant va du pôle + au pôle - de la pile dans le circuit extérieur et du pôle - au pôle + à l'intérieur de la pile; l'hydrogène (ou le métal) se dépose sur le pôle + dans la pile et sur la cathode (-) dans un appareil électrolytique.

## 27 ~ Un circuit formé de générateurs et récepteurs chimiques est un système à liaisons complètes.

D'une façon générale, on appelle coordonnées d'un système toutes les grandeurs variables nécessaires pour faire connaître et suffisantes pour définir son état; leur nombre est le degré de

---

(1) Cette comparaison fait comprendre pourquoi, contrairement à l'habitude, nous sommes partis des lois de l'électrolyse, et non des lois de l'électromagnétisme, pour donner la notion de l'intensité d'un courant. Procéder d'une façon inverse, ce serait opérer comme si l'on donnait la première notion de vitesse de rotation, non par le nombre de tours en une seconde, mais par l'écartement des boules d'un tachymètre. Ce serait une méthode détournée et illogique.

de liberté. Si ce nombre est 1 (comme dans le treuil par exemple où l'unique coordonnée est l'angle dont a tourné la manivelle) le système est à liaisons complètes

La loi de Faraday montre qu'un circuit à générateurs et récepteurs chimiques est un système à liaisons complètes. Il n'y a qu'une coordonnée, le déplacement électrique; la grandeur et le sens du déplacement étant donnés, on peut calculer la quantité de zinc dissoute dans la pile, la quantité d'eau décomposée au voltamètre etc....

Il n'en est pas de même pour un système comportant un générateur et un récepteur mécanique, car leurs déplacements sont indépendants entre eux et indépendants du déplacement de l'hydrogène dans les voltamètres, qu'on peut mettre sur la ligne. Ici il y a 3 coordonnées, les 2 angles dont on a fait tourner les manivelles des machines et la quantité d'hydrogène déplacée dans chaque voltamètre; le degré de liberté du système est égal à 3.

## 28 ~ L'atome d'électricité ~

Une conséquence capitale de la loi de Faraday est la suivante: La matière étant discontinue, il résulte de la loi de Faraday que l'électricité a une structure discontinue.<sup>(1)</sup>

Nous venons d'exprimer le déplacement électrique ou quantité d'électricité par l'équation:

$$q = e n$$

$n$  étant le nombre de valences rompues et  $e$  une quantité constante. On voit que,  $n$  étant un nombre nécessairement entier,  $q$  varie par quanta, chaque quantum

(1) Il appartient à Helmholtz d'avoir vu cette conséquence: "Lorsque nous considérons les atomes des éléments chimiques, nous sommes obligés de conclure que l'électricité, aussi bien positive que négative, est divisible en quanta élémentaires, qui se comportent comme des atomes d'électricité. Chaque ion doit, tant qu'il se meut dans un liquide, rester uni à un équivalent électrique pour chacune de ses valences."

Vorträge und Reden, Bd. II, S 272 1881 (Faraday-Vorlesung).

étant égal à  $e$ ;  $e$  est la quantité d'électricité que chaque valence rompue (ou établie) met en jeu, c'est l'atome d'électricité.

Un ion électrolytique est un atome ou un groupement d'atomes de matière résultant de la rupture d'une ou de plusieurs valences et transportant un nombre de quantités élémentaires d'électricité égal au nombre des valences rompues. Nous disons qu'un cathion (hydrogène, métal) transporte une quantité d'électricité ou charge électromagnétique (1) positive et qu'un anion transporte une charge négative.

Valeur de la charge élémentaire. — Calculons

d'abord la charge transportée par l'équivalent électrochimique d'un élément. Nous avons dit qu'un coulomb libère 0,001118 g<sup>r</sup> d'argent (2); en adoptant 107,92 pour le poids atomique de l'argent, un atome-gramme d'argent est libéré par une quantité d'électricité.

$$(53) \quad Q = \frac{107,92}{1,118} 10^3 = 96500 \text{ coulombs ou } 9650 \text{ unités C.G.S.}$$

C'est la charge électromagnétique transportée par 1 g<sup>r</sup> d'hydrogène dans l'électrolyse, et plus généralement par un équivalent électrochimique.

Un atome-gramme contenant un nombre d'atomes égal au nombre d'Avogadro  $N = 6,8 \cdot 10^{23}$ , l'atome d'électricité  $e$  est.

$$(54) \quad e = \frac{Q}{N} = \frac{9650}{6,8} 10^{-23} = 1,4 \cdot 10^{-20} \text{ unité C.G.S.}$$

L'existence de l'atome d'électricité a pour conséquence qu'on ne doit pas, en toute rigueur, considérer une quantité d'électricité comme une grandeur susceptible de variations continues, mais pratiquement on peut appliquer les règles du

(1) Charge électromagnétique puisque les dimensions et unités sont définies ici dans le système basé sur les actions électromagnétiques et non sur les attractions et répulsions électrostatiques.

(2) Le voltamètre à azotate d'argent est celui qui donne les mesures les plus précises, de l'ordre du millièbre; il est adopté comme étalon des déplacements électrochimiques.

calcul différentiel, vu l'extrême petitesse de la charge élémentaire

## § 2. Forces électromotrices et forces contre-électromotrices.

### 29. Définition de la force électromotrice (1)

En mécanique, il existe entre l'énergie  $W$ , le déplacement  $\delta$  d'un corps, et la force  $F$ , cause du déplacement, la relation:

$$W = F \delta$$

Trois grandeurs correspondantes s'imposent de la même façon en électricité. Nous avons montré qu'un courant est un transport d'énergie; nous avons défini le déplacement électrique  $q$ ; posons maintenant:

$$(55) \quad W = E q$$

$E$  se nomme la force électromotrice; ce terme implique une généralisation du mot force, de même que dans le terme "déplacement électrique" le sens du mot déplacement a été généralisé. Le terme "force électromotrice" veut dire que  $E = \frac{W}{q}$  est la cause du déplacement électrique  $q$ . (2)

La force électromotrice  $E$  d'un générateur (ou récepteur) est le quotient (positif ou négatif) obtenu en divisant par le déplacement électrique  $q$  l'énergie correspondante  $W$  fournie par le générateur au circuit (ou reçue du circuit)

(1) D'après le cours d'électricité de M. E. Carvallo.

(2) L'idée de force électromotrice est suggérée par les observations les plus simples. Il est évident que la batterie d'accumulateurs qui alimente l'éclairage d'un établissement est plus forte qu'une batterie de 3 piles faisant marcher une sonnerie; que la batterie de 3 piles est plus forte qu'une de ses piles incapable, à elle seule, d'actionner la sonnerie. Les trois piles étant d'égale force, nous avons l'intuition que si aucun phénomène perturbateur ne les fait s'influencer les unes les autres, la batterie doit avoir une force trois fois plus grande qu'une de ses piles.

par le récepteur)<sup>(1)</sup>

Les forces des récepteurs, étant de sens contraire à celles des générateurs puisque les récepteurs absorbent l'énergie fournie par les générateurs, sont dites contre-électromotrices.

Sans cette définition énergétique de la force élec-  
tromotrice, l'énergie occupe la première place, ce qui est rationnel car l'énergie est l'invariant fondamental des phénomènes naturels. L'étude des forces électromotrices est ramenée à des mesures d'énergie, notamment à des mesures calorimétriques, et l'on peut remplacer le mot "force" par le mot "énergie", "par unité de déplacement" étant sous-entendu.

### Unité de force électromotrice. Dimensions.

L'unité pratique de force électromotrice se nomme le volt; elle développe 1 joule par coulomb.

L'unité C.G.S. est évidemment la force électromotrice qui développe 1 erg par unité C.G.S. de déplacement électrique, c'est à dire par décacoulomb, soit par coulomb  $10^{-1}$  erg ou  $10^{-8}$  joule. L'unité C.G.S. vaut donc  $10^{-8}$  volt.

Un volt représente à peu près la force électromotrice d'un élément de Volta.

N'ayant pour dimensions  $L^2 M T^{-2}$ , et  $q$  pour dimensions  $L^{1/2} M^{1/2}$ , les dimensions de  $E$  sont  $L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$  dans le système C.G.S.

## 30 ~ Loi de Joule. Force contre-électromotrice d'une résistance ~

Un récepteur thermique transforme en énergie calorifique une partie de l'énergie fournie par le générateur; le quotient obtenu en divisant l'énergie calorifique par le déplacement électrique est la force contre-électromotrice du récepteur thermique, d'après la définition même de la force électromotrice.

La loi de l'échauffement d'un conducteur homogène a

(1) Nous supposons, comme précédemment, le régime permanent.

été donnée par Joule (1841)<sup>(1)</sup>; nous ne parlerons pas des observations antérieures qui n'ont qu'un intérêt historique.

Loi de Joule. — L'énergie calorifique  $W$  dégagée par un courant dans un fil donné est proportionnelle au carré  $i^2$  de l'intensité, à la durée  $t$  du courant, et à un facteur  $r$  caractéristique du fil et appelé résistance.

$$(56) \quad W = r i^2 t$$

Joule mesurait la chaleur dégagée par le fil dans un calorimètre à eau, et l'intensité par la boussole de Pouillet (que nous étudierons plus tard).  
Voici la première série du mémoire de Joule:

$i$ observé	$i^2$	$r i^2$	$W$ observé	Écarts	
				absolus $\Delta$	relatifs $\frac{\Delta}{W}$
0,177	0,031	0,06	0,08	+ 0,02	0,25
0,902	0,814	1,63	1,56	- 0,07	0,04
0,418	0,175	0,35	0,36	+ 0,01	0,03
1,019	1,04	2,08	2,11	+ 0,03	0,01
0,236	0,056	0,11	0,10	- 0,01	0,10
0,340	0,115	0,23	0,21	- 0,02	0,10
Somme	2,21		4,42		

$r$  calculé =  $\frac{W}{i^2} = \frac{4,42}{2,21} = 2$

Les écarts sont forts, ils dépassent le dixième.

Les expériences de Lenz ont confirmé la loi de Joule. Pour étudier l'échauffement des fils métalliques, Lenz filon-geait dans un calorimètre une spirale résistante réunie à deux gros conducteurs dont la résistance et l'échauffement étaient négligeables. L'intensité du courant était mesurée soit avec une boussole de Pouillet, soit avec un voltamètre.

Edmond Becquerel<sup>(2)</sup> étendit la loi de Joule aux conduc-teurs liquides. Il expérimenta sur des colonnes capillaires de

(1) Joule Phil. Mag. 19. p. 274. 1841. — Arch. de l'électricité. Genève. T. II. p. 54.

(2) Annales de Ch. et de Physique 3<sup>e</sup> Serie T. IX. p. 21. 1843.

liquide terminées par deux vases plus larges où plongeaient deux électrodes. Afin d'éviter l'influence des phénomènes calorifiques qui accompagnent la décomposition du liquide au voisinage des électrodes, la colonne capillaire était seule immergée dans le calorimètre.

Force contre-électromotrice. — Divisons par  $q = it$  les deux membres de la formule (56) de Joule, le premier membre devient  $\frac{u}{i}$ , c'est la force contre-électromotrice. La formule de Joule est donc équivalente à :

$$(57) \quad E = r i$$

Ainsi, un conducteur parcouru par un courant oppose aux forces électromotrices des générateurs une force contre-électromotrice égale au produit de sa résistance par l'intensité du courant.

C'est la loi d'Ohm, qui a été d'ailleurs découverte indépendamment de la loi de Joule. Nous reviendrons bientôt sur cette loi. Pour le moment, nous voulons simplement exprimer la force contre-électromotrice.

### 31 ~ addition des forces contre- électromotrices ~

Plaçons bout à bout des fils de résistances  $r_1, r_2, r_3, \dots$  ils reçoivent les quantités de chaleur :

$$(58) \quad u_1 = r_1 i^2 t \quad u_2 = r_2 i^2 t \quad u_3 = r_3 i^2 t \dots \dots \dots$$

et comme l'on a :

$$(59) \quad u = u_1 + u_2 + u_3 + \dots = (r_1 + r_2 + r_3 + \dots) i^2 t$$

on voit que la résistance de l'ensemble est :

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + \dots \dots \dots$$

Les forces contre-électromotrices des fils et de leur ensemble s'obtiennent en divisant par  $it = q$  les deux membres des formules (58) et (59), ce qui donne :

$$E_1 = r_1 i \quad E_2 = r_2 i \quad E_3 = r_3 i \dots \dots \dots$$

et  $E = (r_1 + r_2 + r_3 + \dots) i$   
 Il en résulte:  $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$   
 (60)

La résistance d'un conducteur est donc égale à la somme des résistances de ses parties; sa force contre-électromotrice est la somme des forces de ses parties. Divers fils de même substance, ayant même diamètre, ont des résistances proportionnelles à leurs longueurs.

## 32 ~ Rendement de la pile Loi de Pouillet (1)

Pouillet a opposé à une pile (élément Daniell) diverses résistances  $r$  et mesuré les intensités correspondantes  $i$ ; les valeurs des forces contre-électromotrices  $r i$  en résultent. Elles mesureraient, si  $r$  était évalué en valeur absolue l'énergie utilisable dans le circuit par unité de déplacement électrique (n° 29).

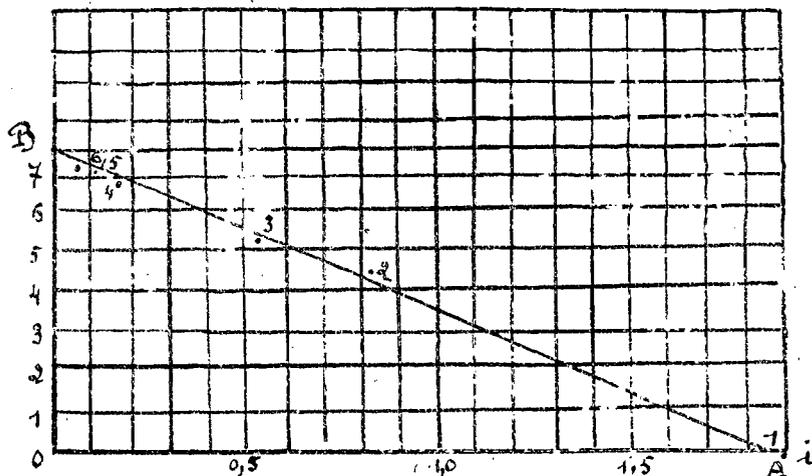
Voici les résultats d'une série de Pouillet, les résistances étant exprimées en unités arbitraires (chiffres proportionnels aux longueurs des fils de cuivre employés)

$r$	$i$	$r i$
0	1,580	0
5	0,849	4,50
10	0,543	5,43
40	0,172	6,88
70	0,105	7,35
100	0,074	7,40

Si l'on porte en abscisses les valeurs de  $i$  et en ordonnées les valeurs  $y = r i$  on retrouve la loi linéaire que nous avons indiquée comme conséquence des expériences

(1) Relire le n° 29. Il faut noter qu'en les unités  $r$  sont pas les mêmes qu'au n° 22. Dans les expériences de Faraday nous avons appelé  $E$  l'énergie eus. à la disposition du circuit par gramme d'hydrogène libéré. Maintenant,  $E$  représentera l'énergie par coulomb.

de Favre. (1)



L'énergie disponible sur le circuit extérieur est fonction linéaire de l'intensité du courant.

Comme au n° 22 posons:  $OB = E \quad \frac{OB}{OA} = \lambda$

L'équation de la droite AB représentant les expériences s'écrit:

$$(61) \quad y = E - \lambda i \quad \text{avec } y = ri$$

$y = ri$  tend vers la limite  $E$  quand  $r$  augmente et que  $i$  tend vers zéro. Les rendements à considérer sont les suivants ( $E$  et  $y$  étant alors mesurés en valeurs absolues et non plus en unités arbitraires).

Rendement électrique  $\frac{y}{E}$

Rendement chimique  $\frac{E}{\rho}$  ( $\rho$  énergie chimique par coulomb)

Rendement industriel  $\frac{y}{\rho} = \frac{y}{E} \times \frac{E}{\rho}$

### 33 ~ Force électromotrice et résistance intérieure d'une pile ~

(1) Ces expériences de Pouillet (1837) sont antérieures à celles de Favre (1854).

Voici comment Pouillet a interprété sa loi:

1<sup>o</sup>) la force électromotrice est  $E$ .  
 2<sup>o</sup>) la résistance intérieure est  $\lambda = \frac{E}{i_0}$ ,  $i_0$  étant l'intensité du courant pour une résistance extérieure nulle  $r=0$ .

3<sup>o</sup>) La force électromotrice de la pile équilibre la somme des forces contre-électromotrices dues aux résistances extérieures et intérieures.

L'équation (61) s'écrit en effet:

$$(62) \quad E - (r + \lambda) i = 0$$

Ce qui exprime l'équilibre entre la force électromotrice  $E$  et les forces contre-électromotrices  $ri$  et  $\lambda i$  dues aux résistances  $r$  et  $\lambda$ .

Dans le langage énergétique on peut dire:

1<sup>o</sup>) L'énergie chimique transformée en énergie électrique par coulomb débité est  $E$ . C'est l'énergie voltaïque.

2<sup>o</sup>) Cette énergie se partage entre la résistance extérieure  $r$  et la résistance intérieure  $\lambda$ , proportionnellement à ces résistances.

Pouillet a étendu sa démonstration expérimentale au cas où plusieurs piles sont sur le circuit.

Les deux grandeurs  $E$  et  $\lambda$  mises en évidence par Pouillet étaient d'autant plus cachées que leur invariance complète est impossible à obtenir. La variabilité de  $E$  et de  $\lambda$  est d'autant plus grande que l'intensité du courant est plus grande, à cause de l'échauffement et de l'altération des matériaux de la pile par la réaction chimique corrélatrice de la production du courant. La pile Daniell employée par Pouillet est remarquable par la constance relative de sa force électromotrice (1,08 volts).

Ayant défini, par l'observation du courant électrique et par des considérations basées sur la loi générale de la conservation de l'énergie, le déplacement électrique et la force électromotrice, nous sommes maintenant en mesure d'appréhender les phénomènes complexes qui se passent dans la pile.

Mais, avant d'aborder cette étude, nous conformant à l'idée directrice de ce cours qui est de montrer que les mêmes lois sont applicables à la fois à la mécanique et à la physique,<sup>(1)</sup>

(1) quitte à modifier quand il le faudra la mécanique classique.

nous établirions, d'après M. E. Carvallo, que la loi de Pouillet n'est que l'application de la loi des travaux virtuels au circuit de la pile et nous indiquerons la méthode générale d'application du théorème des travaux virtuels aux phénomènes physiques.

### 34. ~ Interprétations mécaniques. généralité de l'idée de force et de la loi des travaux virtuels d'après Galilée, Bernouilli et Maxwell.

L'observation du courant électrique nous a révélé deux<sup>(1)</sup> grandeurs, le déplacement électrique et la force électromotrice. Nous les avons rattachés respectivement au déplacement et à la force purement mécanique. En électricité comme en mécanique, le produit du déplacement par la force donne l'énergie.

La loi de l'équivalence, précisée par Farve, montre que le travail des forces électromotrices est nul. Il y a plus, la somme algébrique des forces électromotrices étant nulle (loi de Pouillet), leur travail est nul, non seulement pour le déplacement électrique qui se produit, mais pour tout déplacement qu'on pourrait imaginer, notamment quand une pile et un électrolyte se font équilibre (Exemple pile de Grove et voltamètre à eau) et qu'il n'y a par suite aucun déplacement réel. C'est le théorème des travaux virtuels appliqué à cette machine à liaisons complètes que forme le circuit électrique.

L'application des mots déplacement et force aux phénomènes électrochimiques est-elle légitime? Leur usage et l'adaptation de la loi des travaux virtuels ne consacrent-ils pas l'illusion d'une analogie seulement formelle? Au contraire, tout cela est légitimé par les phénomènes imposés par eux. Cette idée se trouve dans Maxwell<sup>(2)</sup>.

(1) Extrait du cours d'électricité de M. Carvallo. p. 48 et suiv.

(2) Électr. t. II chap. VI.

Il y a plus, on peut la faire remonter à trois siècles, deux siècles avant les découvertes de Galvani et de Volta.

Le germe en est dû à Galilée (les mécaniques).

Pour Galilée, le moment d'une puissance appliquée à une machine est la tendance de cette puissance au déplacement de la machine, tendance que mesure le travail fourni par unité de déplacement de la machine, c'est la force, si le déplacement est une translation, le moment des forces par rapport à l'axe pour une rotation, la pression pour un déplacement de fluide comme dans la presse hydraulique.

La signification du mot moment a été malheureusement restreinte, depuis, au moment des forces par rapport à un axe, sans doute par des maîtres scrupuleux qui ont craint de mettre sous un même mot des grandeurs hétérogènes comme la force, le moment, la pression. La protestation de Lagrange (1) a été impuissante à combattre cette diminution de la pensée de Galilée, pensée qu'il faut au contraire rendre universelle, car elle embrasse, non seulement la mécanique, mais l'ensemble des phénomènes naturels, pourvu que le mot déplacement soit entendu dans son sens le plus large (ensemble des changements des coordonnées, quelles qu'elles soient d'un système quelconque).

Ce que Galilée appelle moment, Maxwell l'appelle force. Cela justifie le nom de force électromotrice. Mais il était légitime de faire remonter à Galilée la généralisation de la force qui contient la force électromotrice.

La loi des travaux virtuels est aussi due à Galilée. Il l'a découverte pour les machines à liaisons complètes seulement. Deux siècles plus tard, Jean Bernoulli l'a étendue aux systèmes dont le degré de liberté, c'est à dire le nombre de coordonnées indépendantes, est supérieur à l'unité. Il convient d'attribuer à la loi la généralité que comportent le déplacement et la force. Ainsi comprise, la loi des travaux virtuels est la loi même de la conservation de l'énergie. Seulement, au lieu d'être limitée aux déplacements réels, comme elle l'est effectivement sous la forme classique, elle est étendue ici aux déplacements virtuels. Nous verrons bientôt l'application de la loi des travaux virtuels aux systèmes électriques dont le degré de liberté est supérieur à

(1) Mécanique analytique, 1<sup>re</sup> partie, Sect 1, n° 16

l'unité. Il est certain que la loi des travaux virtuels embrasse tous les phénomènes naturels, tout aspect multiple de la loi générale de l'énergie considérée habituellement sous une seule face.

Le déplacement et la force étant généralisés, la loi des travaux virtuels appliquée à ces grandeurs conduit à la méthode suivante.

### 35. Méthode générale des travaux virtuels pour l'étude des phénomènes naturels

1°) Par une observation attentive, on recherche d'abord le degré de liberté du système dont on s'occupe, c'est à dire le nombre  $N$  des coordonnées dont il dépend;

2°) Cette observation conduira le chercheur perspicace à un choix de coordonnées bien approprié au système;

3°) On crée des expériences dans lesquelles une seule coordonnée est variable, les  $(N-1)$  autres restant fixes, et l'on mesure l'énergie mise en jeu par le déplacement de la coordonnée variable.

Les déplacements et les forces sont désormais connus.

4°) On restitue alors au système son degré de liberté  $N$  et l'on applique la loi générale des travaux virtuels. On a les  $N$  équations nécessaires et suffisantes pour déterminer son déplacement en fonction du temps.

5°) On vérifie par l'expérience que les équations tirées de la loi sont conformes à la réalité des faits. On a ainsi apporté une preuve de plus à la loi des travaux virtuels.

Cette méthode est la généralisation de celle que suivent habituellement les physiciens: ils invoquent la loi de la conservation de l'énergie, mais seulement pour le déplacement réel qui se produit. Ainsi restreinte, elle est insuffisante, puisqu'elle donne une seule équation des phénomènes, alors qu'il y en a plusieurs à trouver.

Quiconque l'applique ainsi rencontre les difficultés que rencontrerait un mécanicien en possession du théorème de la force vive, mais ignorant le théorème des travaux

virtuels

## § 5. actions chimiques des courants.

### 36 ~ Réactions secondaires dans l'électrolyse. ~

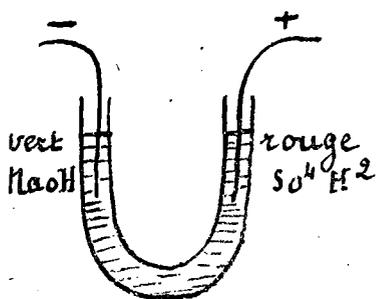
Les phénomènes qui se produisent dans l'électrolyse ne présentent pas toujours la simplicité de ceux dont nous avons précédemment parlé, la décomposition de la molécule de l'électrolyte en ses deux parties, cation et anion, étant le plus souvent masquée par des réactions secondaires conformes aux lois de la chimie.

Voici quelques exemples.

Si l'on électrolyse une solution de soude ( $\text{NaOH} + n\text{H}_2\text{O}$ ) le sodium libéré sur la cathode s'y trouve en contact avec de l'eau qui est décomposée avec formation de soude et dégagement d'hydrogène; de son côté l'anion oxyhydrile  $\text{OH}$  donne à l'anode de l'oxygène et de l'eau.

Il y a bien lieu de penser qu'une libération réelle de sodium s'effectue à la cathode, puisque lorsque l'on constitue cette dernière par du mercure, comme l'a fait Davy, il y a production d'amalgame de sodium qui ne saurait prendre naissance par simple contact avec la solution de soude.

Dans les mêmes conditions, la décomposition d'un sel d'ammonium donne lieu au produit d'apparence butyreux que les chimistes considèrent comme l'amalgame du radical  $\text{AZH}_4$ .



avec un sel de soude, le sulfate neutre, par exemple, ( $\text{SO}_4 \text{Na}^2 + n \cdot \text{H}_2\text{O}$ ) les mêmes phénomènes se produisent à la cathode où la présence de la soude peut être révélée à l'aide de teinture de violette qui devient verte. Quant à l'anion  $\text{SO}_4$ , il donne à l'anode de l'oxygène et un excès

d'acide sulfurique qui rougit la même teinture.  
 Une solution d'acide sulfurique ( $SO_4H^2 + nH^2O$ ) donne de l'hydrogène à la cathode tandis qu'à l'anode  $SO_4$  se constitue de l'acide sulfurique en dégageant de l'hydrogène.

Dans l'électrolyse de l'acide azotique, l'hydrogène qui devrait se dégager à la cathode décompose l'acide et l'on observe un dégagement d'acide hypozotique.

Le radical métallique ou l'hydrogène mis en liberté peuvent déterminer des réductions; c'est ce qui a lieu dans l'électrolyse d'un sel ferrique qui s'accompagne généralement de la production autour de la cathode d'une certaine quantité de sel ferreux correspondant. Inversement, une dissolution de sel ferreux peut donner naissance à un sel ferrique sous l'influence de l'oxygène libéré à l'anode.

Les réactions secondaires peuvent avoir lieu non seulement entre l'électrolyte et les produits de sa décomposition, mais aussi entre ces produits et les substances qui constituent les électrodes; la production des amalgames en est un exemple.

Électrode soluble. — Un autre exemple est la disposition appelée électrode soluble, employée dans la galvanoplastie.

Lorsqu'on électrolyse une dissolution de sulfate de cuivre, et que l'anode est une lame de cuivre, l'acide sulfurique rendu libre à l'anode attaque celle-ci et reforme du sulfate, tandis que du cuivre se dépose sur la cathode. On n'observe pas de dégagement de gaz, et le phénomène se borne à un transport de métal de l'anode à la cathode. C'est un déplacement du cuivre sans travail, la seule énergie consommée est celle qui chauffe la cuve.

Théoriquement la quantité de cuivre dissoute à l'anode devant être égale à la quantité de cuivre déposée à la cathode et la liqueur devrait conserver toujours la même concentration. Il en est ainsi lorsque le courant est peu intense, et lorsque la surface de l'électrode soluble est grande; mais si le courant est intense et si l'anode est petite, l'acide, qui n'a pas eu le temps de se combiner au cuivre, se diffuse

dans le liquide; celui-ci revient acide et le poids du cuivre dissous est inférieur au poids du cuivre déposé.

Cette perturbation est presque nulle avec l'argent et si on constate que les deux poids d'argent dissous et déposé sont égaux à moins d'un millième de leur valeur. On emploie souvent la disposition suivante: un creuset d'argent, préalablement pesé sert de cathode; on y plonge une lame d'argent, également pesée, qui forme anode soluble. Pour empêcher les fragments de cette lame de se détacher et de se mêler au dépôt d'argent sur les parois du creuset, on entoure cette lame d'un petit sac de mousseline. Lorsque le courant, dont on a mesuré l'intensité, a passé pendant un temps déterminé (1) on prise séparément le creuset et la lame positive. C'est ainsi par l'électrolyse de l'azotate d'argent, qu'on a pu déterminer la quantité d'argent déplacée par un coulomb (n° 26), et par suite la charge transportée par un équivalent électrochimique (n° 28).

Lorsqu'on veut apprécier numériquement les résultats de la décomposition électrolytique, il importe de se prémunir contre diverses causes d'erreur. Les électrodes en platine ne se dissolvent pas, en général, excepté s'il se dégage du chlore, mais le platine peut absorber soit l'hydrogène soit l'oxygène. En outre l'hydrogène et l'oxygène ne se dégagent pas en totalité; une portion se dissout dans le liquide, se diffuse, et les gaz dissous se recombinaison.

On réduit beaucoup ces effets en opérant à une température qui ne soit pas trop basse, pour éviter la formation d'eau oxygénée; en diminuant beaucoup la surface des électrodes qu'on peut réduire presque à un point; en entourant les gaz à mesure qu'ils se produisent de manière à éviter leur dissolution, leur diffusion et leur recombinaison.

L'usage d'électrodes en platine platiné évite l'absorption des gaz. On les obtient en effectuant sur le platine ordinaire un dépôt électrolytique de platine pulvérulent qui se présente sous l'aspect d'une couche noyâtre.

On emploie aussi pour aciduler l'eau l'acide phosphorique.

(1) On emploie une pile à force électromotrice aussi constante que possible (élément Latimer-Clark ou Weston).

rique de préférence à l'acide sulfurique, pour éviter la formation d'acide persulfurique.

### 37. ~ Dégagement d'électricité dans les actions chimiques. Expériences de A.-C. Becquerel. ~

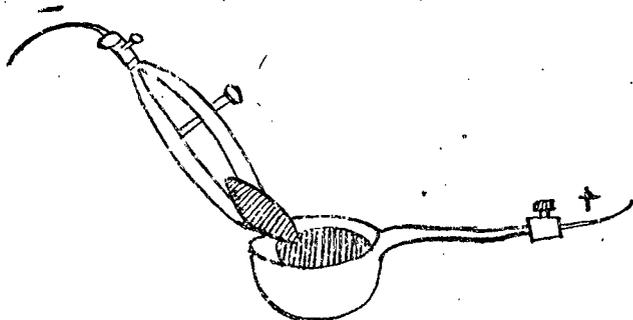
Bien antérieurement aux expériences que nous venons de citer sur les phénomènes électro-chimiques, avant même les découvertes de Galvani et de Volta, on avait observé un dégagement d'électricité dans certaines actions chimiques. Lavoisier et Laplace (1781) avaient chargé un condensateur (1) en le mettant en communication avec un vase où l'on faisait agir de l'acide sulfurique sur de la craie ou sur du fer.

Le fait du dégagement de l'électricité accompagnant les réactions chimiques fut mis en évidence par de nombreuses expériences de A.-C. Becquerel (2) qui formula les lois suivantes:

Quand deux corps se combinent, les substances qui jouent le rôle de base s'électrisent négativement, tandis que celles qui jouent le rôle d'acide s'électrisent positivement.

Dans les décompositions, les manifestations électriques sont inverses, les corps qui jouent le rôle de base emportent l'électricité positive, et ceux qui jouent le rôle d'acide emportent l'électricité négative.

Voici quelques exemples:



On adapte à l'un des bouts du fil d'un galvanomètre une cuiller en platine contenant de l'acide nitrique et l'on attache à l'autre bout une pince, également en platine, à laquelle on fixe un morceau de potasse humide.

(1) Les condensateurs seront étudiés en électrostatique.

(2) Ann. de Ch. et de Phys. 2<sup>e</sup> série t. 23. p. 244, 259; t. 24 p. 192; t. 26. p. 176 (1824); t. 27. p. 5; t. 28. p. 16 (1825); t. 34. p. 152 (1827); t. 35. p. 113.

Si l'on plonge la potasse dans l'acide, on observe un courant intense; l'acide forme le pôle + de la pile, la potasse le pôle -.

Dans un vase de verre, on dispose deux fils (ou deux lames) d'or plongeant dans de l'acide nitrique, ces deux fils étant en relation avec les deux extrémités du fil d'un galvanomètre. Dans ces conditions, il ne se produit pas de courant. Si l'on verse maintenant une goutte d'azote chlorhydrique près d'un des fils, l'eau régale formée attaque ce fil et un courant se produit. Le fil attaqué forme le pôle - de la pile.

Lorsque les substances capables de réagir l'une sur l'autre sont en dissolution, les effets se produisent dans le même sens, comme si les substances réagissaient directement.

Si l'on prend deux lames de platine bien nettoyées, mises en relation avec les extrémités du fil d'un galvanomètre, et qu'après avoir plongé l'une dans une dissolution de potasse et l'autre dans un acide, on vienne à les plonger tous deux dans un vase plein d'eau, on observe un courant. La lame humectée de potasse forme le pôle -.

### 38. ~ Polarisation des électrodes. Courants secondaires Réversibilité des récepteurs chimiques. ~

Les observations qui précèdent ont conduit à l'explication d'un fait observé avec la pile de Volta, la polarisation des électrodes.

Lorsque deux fils de platine en communication ou les deux pôles d'une pile plongent dans une solution saline, et au bout de quelques instants, on interrompt cette communication en détachant les fils des extrémités de la pile, et si l'on met leurs bouts libres en communication avec le fil d'un galvanomètre, on observe un courant en sens inverse du premier. Les bouts de fil se comportent donc pendant quelques instants comme les deux pôles d'une pile.

On a exprimé ce fait en disant que les fils sont polarisés. Le courant fourni par la polarisation des électrodes s'appelle courant secondaire.

Ritter (1803) mit en évidence le courant secondaire en faisant passer le courant d'une pile de Volta dans une colonne formée de disques d'un seul métal (or ou cuivre) séparés par des rondelles de carton imbibées d'eau salée.

Il forma ainsi une pile secondaire, qui pouvait donner pendant quelques instants un courant de sens contraire au courant qui avait traversé la colonne.

L'explication de ce phénomène se déduit directement des expériences exposées précédemment: le courant de la pile de Volta décompose l'électrolyte, et dépose les produits de cette décomposition sur les fils ou lames qui servent d'électrodes. Ces matières, en se recombinaut, donnent un courant de sens contraire au sens du courant qui a provoqué leur décomposition.

Ainsi, la polarisation est due à la présence de dépôts (qui peuvent être gazeux) sur les lames ayant servi d'électrodes dans un appareil électrolytique. Ces deux lames constituent alors les pôles d'une pile secondaire.

Nous verrons plus loin le parti qu'on a tiré de ces piles qui sont les plus employées aujourd'hui (accumulateurs). Ce sont, en somme, des piles dont les matières chimiques ont été formées sur place par un courant.

La réversibilité des récepteurs chimiques, que précédemment nous avons seulement constatée comme fait expérimental (n:20), se trouve ainsi expliquée.

## 39. ~ Causes d'affaiblissement de la pile de Volta. ~

Les phénomènes de polarisation, avant d'être utilisés comme ils le sont aujourd'hui, se sont révélés par leurs effets nuisibles sur le fonctionnement des piles. On observe, avec la pile de Volta, que le courant diminue d'abord rapidement, puis de plus en plus lentement, de manière à ne plus avoir, au bout de quelques temps, qu'une très faible intensité. Cet effet se produit quelle que soit la forme donnée au couple de Volta, dans les piles à auge, et dans les piles de Wollaston, où le cuivre était replié autour du zinc, de manière à présenter une plus grande

surface.

Par le passage du courant, la pile se polarise elle-même, de manière à faire naître sur les lames de cuivre et de zinc des dépôts qui produisent une force électromotrice de sens opposé au sens de la force électromotrice de la pile, et diminuent le courant presque jusqu'à l'annuler.

Ayant reconnu que le dépôt d'hydrogène au pôle positif de la pile est une cause d'affaiblissement du courant (augmentation de la résistance intérieure), Smée avait remplacé le cuivre par du platine platiné. Cette disposition ne débruit pas la polarisation par l'hydrogène, mais elle la rend sensiblement constante.

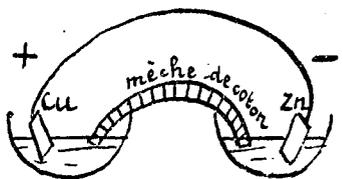
Une cause plus grave tend à arrêter le fonctionnement de la pile de Volta: le zinc, en se dissolvant dans l'eau acidulée, forme du sulfate de zinc, qui est électrolyse d'acide sulfurique se dégage sur le zinc et le dissout, mais du zinc se dépose sur le pôle cuivre, de sorte qu'au bout de quelque temps, le couple zinc-cuivre tend à être remplacé par deux lames de zinc qui ne donneraient aucun courant si elles étaient identiques.

Pour obtenir un courant constant, il fallait donc s'opposer à ces phénomènes de polarisation.

## 40. ~ Piles à courant constant (A.C. Becquerel). ~

La solution fut découverte par A.C. Becquerel qui construisit les premières piles à courant constant (1829) (1).

Ses expériences préliminaires ont été faites en disposant l'une à côté de l'autre deux capsules, la première contenant une dissolution d'un sel de cuivre, la seconde une dissolution de sulfate de zinc; dans la première on plonge une lame de cuivre, dans la seconde une lame de zinc; les capsules communiquent par une mèche



(1) Mémoire sur l'électro-chimie et l'emploi de l'électricité pour opérer les combinaisons. Ann. de ch. et de phys. 2<sup>e</sup> série t. XLV. p. 5. (23 février 1829).

de coton, ou d'amiante, qui s'imbibent des liquides.

Si l'on réunit les deux lames par un fil conducteur, on observe un courant; le cuivre est le pôle + de la pile.

L'électrolyse du sel de cuivre donne un dépôt de cuivre sur la lame de cuivre. L'ion cuivre rendu libre à l'autre pôle, c'est à dire dans la mèche, y dissout le zinc provenant de la décomposition du sulfate de zinc de l'autre capsule. L'ion  $SO_4^{2-}$  libéré par l'électrolyse du sulfate de zinc dissout une nouvelle quantité de zinc de la lame, de sorte que le sulfate de zinc se reforme.

En définitive, du zinc se dissout au pôle -; du cuivre se dépose sur la lame de cuivre au pôle +. Il n'y a plus de polarisation. Le sulfate de zinc reste saturé, mais la dissolution de sel de cuivre s'appauvrit. (1)

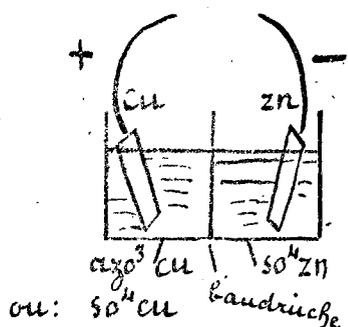
Piles de Becquerel. (2) — La disposition qui précède étant trop résistante. Les piles ont été formées de la manière

(1) Si le sel de cuivre est de l'azotate de cuivre, il se forme de l'azotate de zinc en même temps que le sulfate de zinc se renouvelle. Si le sel de cuivre est du sulfate, pour une molécule  $SO_4^{2-}Zn$  détruite par électrolyse, il s'en forme deux: l'une due à l'attaque du zinc à la cathode, l'autre due à la rencontre, à la séparation des deux sulfates, de l'ion  $Zn$  et de l'ion  $SO_4^{2-}$  provenant de l'électrolyse de ce sel. Le sulfate de  $Zn$  augmente donc par le passage du courant et si la solution est primitivement saturée, il se dépose en cristaux. Au contraire, si elle n'est que saturée de cuivre, elle conduit le sulfate de cuivre.

(2) Voici en quels termes a été exposé le principe des piles à courant constant.

“ Je dois faire observer que la pile porte avec elle la cause des diminutions  
 “ qu'éprouve continuellement l'intensité du courant électrique; car, dès l'instant qu'elle  
 “ fonctionne, il s'opère des décompositions et transports de substances qui polarisent les p.  
 “ ques de manière à produire des courants en sens inverse du premier, l'art consiste donc  
 “ à dissoudre les dépôts, à mesure qu'ils se forment, avec des liquides convenablement  
 “ placés. On y parvient à l'aide du procédé que j'ai décrit. ....  
 “ Une pile construite suivant les principes que je viens de faire connaître, c'est-à-  
 “ dire dans laquelle chaque métal plonge dans une case particulière qui renferme un  
 “ liquide convenable, cette pile, dis-je, réunit toutes les conditions les plus favorables, puis-  
 “ qu'on évite les causes qui peuvent nuire aux effets électriques; mais elle est d'une  
 “ exécution difficile en raison de l'introduction des diaphragmes en boudin de,  
 “ qui cependant résistent longtemps à l'action des acides quand ils sont étendus  
 “ d'eau. ”

suivante. Un vase de verre était divisé en deux cases par un



un diaphragme en baudruche; d'un côté on versait une dissolution saturée de nitrate ou de sulfate de cuivre, et de l'autre une dissolution saturée de sulfate de zinc. Une lame de cuivre plongeait dans le sel de cuivre, une lame de zinc dans le sel de zinc. Le courant de ces piles est sensiblement constant tant que la dissolution du sel de cuivre contient

suffisamment de ce sel. On la maintient d'ailleurs saturée.

Les premières piles ainsi construites portèrent le nom de piles cloisonnées.

En 1835, A.-C. Becquerel construisit une pile ayant une force électromotrice beaucoup plus considérable, et dans laquelle le dégagement d'électricité est dû à la réaction de deux liquides, l'acide azotique et une solution de potasse; il n'y a qu'un métal, le platine, qui sert de conducteur. Cette pile a reçu diverses formes: l'une d'elles consiste à renfermer l'acide azotique dans un flacon, et à plonger dans le flacon, un large tube fermé à sa partie inférieure par un tampon poreux de liège, retenu par un morceau de baudruche.

Dans chaque liquide plonge une lame de platine. Cette pile ne se polarise pas.<sup>(1)</sup> Elle fut employée à diverses applications électrochimiques.

Daniell indiqua ensuite (1836) une forme de pile qui est une application directe des principes que nous venons d'exposer. La disposition de cette pile réalisait, non comme principe, mais comme construction, une amélioration sur les piles cloisonnées employées depuis 1829; aussi l'usage s'en répandit, il sous le nom de pile de Daniell.

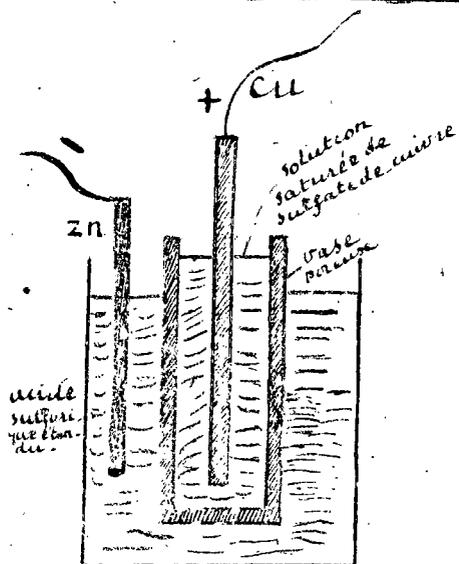
Les modifications apportées à la pile cloisonnée de A.-C. Becquerel sont les suivantes:

Emploi de sulfate de cuivre (au lieu d'azotate); remplacement du sulfate de zinc par de l'acide sulfurique étendu; remplacement de la baudruche par un diaphragme en verre; emploi d'un siphon permettant à la dissolution

(1) L'acide est le pôle +, la potasse le pôle -. L'eau est décomposée, l'hydrogène réduit l'acide azotique et il se dégage au pôle + de l'acide hypozotique. L'oxygène se dégage sur la lame plongeant dans la potasse. Cette pile a été appelée chaîne simple à oxygène.

du sulfate de zinc formé de s'écouler, à mesure qu'elle est remplacée par de l'eau acidulée.

### Piles actuelles.



Ces formes primitives ne sont plus employées. La pile à sulfate de cuivre actuelle se compose de deux vases; le vase extérieur contient de l'acide sulfurique étendu, où plonge le zinc; le vase intérieur en porcelaine détrempée contient une dissolution de sulfate de cuivre où plonge une tige de cuivre qui constitue le pôle positif.

Ce type de pile a été varié de toutes les manières; on a remplacé le zinc par le cadmium, le cuivre par le mercure... etc...

Grove, pour éviter le dépôt du métal sur le pôle positif, constitua ce dernier d'une lame de platine entourée d'acide

azotique. La dissolution du zinc dans l'acide sulfurique du vase extérieur produit un dégagement d'hydrogène et ce gaz se dissout dans l'acide azotique.

Bunsen rendit cette pile plus économique en substituant au platine une tige de charbon de cornue.

La décomposition de l'acide azotique produit un dégagement de vapeurs nitreuses; on peut éviter cet inconvénient en employant de l'acide chromique ou de bichromate de potasse.

La pile au bichromate de potasse n'est pas aussi constante que la pile de Bunsen qui est elle-même moins constante que la pile à sulfate de cuivre. L'une des principales causes de l'affaiblissement du courant étant la polarisation par l'hydrogène, on a cherché à absorber ce gaz au pôle positif, par des matières solides. Parmi les diverses dispositions proposées, on doit citer une pile fréquemment employée, l'élément débranché. Sans cette pile, la dépolarisation est obtenue par du peroxyde de manganèse, qui est placé dans un vase poreux et entoure le charbon formant le pôle positif; l'autre pôle est formé d'un cylindre de zinc plongeant dans une solution de chlorhydrate d'ammoniaque.

Dans les piles Leclanché construites actuellement, on a supprimé le vase poreux et le charbon positif est entouré d'un mélange de bioxyde de manganèse, de bisulfate de potasse et de gomme laque, comprimé à chaud par une presse hydraulique. Ces piles, dites piles sèches, peuvent faire un long service lorsqu'on ne leur demande qu'un faible courant et qu'on ne les met en circuit que pendant des intervalles de temps assez courts, car elles se polarisent d'une manière très sensible, puis se dépolarisent d'elles-mêmes par le repos.

Certaines piles à dépolarisant ne sont pas employées pour débiter un courant constant, mais pour réaliser des étalons de force électromotrice. Une des plus répandues est connue sous le nom de Latimer-Clark.

Cet élément est constitué par du mercure pur placé au fond d'un vase recouvert par une pâte formée par un mélange de sulfate mercurique et de sulfate de zinc neutre; dans cette pâte trempe un bâton de zinc pur auquel est soudé un fil de platine, c'est le pôle négatif de la pile. Le pôle positif est constitué par un autre fil de platine qui, convenablement protégé par une gaine de verre, est mis en contact par son extrémité avec le mercure.

La force électromotrice d'un Latimer-Clark à 13°,8 centigr. est 1 volt,434. Cette force électromotrice varie avec la température et le coefficient de variation n'est pas absolument le même pour tous les éléments; il convient de la déterminer pour chacun d'eux.

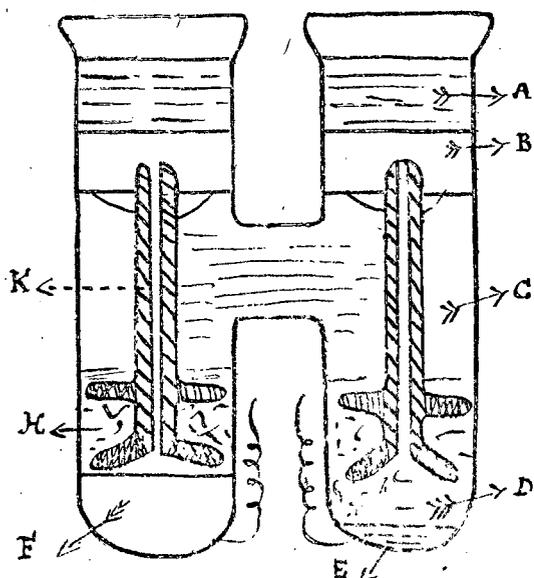
Dans une expérience de ce genre Lord Rayleigh a trouvé:

$$E_{\theta} = E_{15^{\circ}} \left[ 1 - 0,00077(\theta - 15) \right]$$

En substituant dans la pile précédente le cadmium (sulfate et métal) au zinc, on obtient une très bonne pile étalon connue sous le nom d'élément Weston, dont la force électromotrice est, à 20°, égale à 1,0183 ± 0,0005. La valeur de cette force électromotrice à la température  $\theta$  est donnée par la formule:

$$E_{\theta} = E_{20} \left[ 1 - 38 \cdot 10^{-6}(\theta - 20) - 65 \cdot 10^{-2}(\theta - 20)^2 \right]$$

La figure et la légende qui l'accompagne donnent une idée de la disposition des divers organes de cet étalon.



Elements de la Weston (European company)

A. Bouchon de liège	E. mercure
B. Paraffine	F. amalgame de cadmium
C. Solution de sulfate de cadmium	H. amiante
D. Sulfate Mercurieux	K. Porcelaine

## 41. Piles secondaires. Accumulateurs.<sup>(1)</sup>

Nous avons vu qu'un récepteur chimique réversible constitue pendant un certain temps, une pile dite pile secondaire (n° 38).

Nous avons déjà parlé (n° 25) de la pile à gaz de Grove.

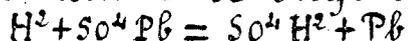
Gaston Planté (1860) réalisa des piles secondaires très énergiques en électrolysant de l'eau acidulée à 25% d'acide sulfurique avec des électrodes constituées par deux lames de plomb séparées par un linge et enroulées en spirale.

On attribue au début les propriétés des piles secondaires de Planté à l'occlusion des gaz H et O dans les lames

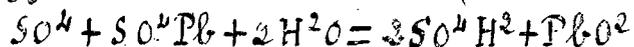
(1) Cours de M. de L<sup>e</sup>. col. Lafay.

de plomb; les recherches faites sur cette question ont conduit à admettre que le plomb immergé dans la solution sulfurique se couvre de sulfate de plomb.

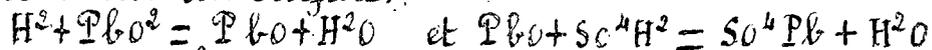
Pendant l'électrolyse (période de charge), le cation  $H^+$  a pour effet de réduire le sulfate suivant la réaction:



tandis que l'anion  $SO_4$  produit de l'acide sulfurique et du peroxyde  $PbO_2$



au moment de l'utilisation de la pile (période de décharge), le passage du courant inverse amène de l'hydrogène sur le peroxyde  $PbO_2$  qui se trouve réduit à l'état de protoxyde; ce dernier s'unit à l'acide sulfurique pour redonner du sulfate:



Quant à la plaque désulfatée, elle se recouvre de sulfate sous l'action de l'anion  $SO_4$ .

L'industrie utilise, sous le nom d'accumulateurs, des piles secondaires de Planté plus ou moins perfectionnées, formées de lames de plomb entrecroisées qui, dans l'opération de la "charge" jouent respectivement le rôle de cathode et d'anode.

Les accumulateurs se "forment" par l'usage, c'est à dire deviennent d'autant plus aptes à emmagasiner de l'électricité, qu'ils ont été chargés et déchargés un plus grand nombre de fois. Cela résulte du fait que les oxydations et les réductions successives du plomb lui fait acquérir une structure spongieuse et qu'une masse de métal de plus en plus grande intervient dans la réaction. Cette transformation du plomb augmente la capacité de l'accumulateur; on désigne sous ce nom la quantité d'électricité qu'il peut fournir lorsqu'on le décharge immédiatement après l'avoir chargé.

On construit actuellement des accumulateurs dont la capacité est environ 65 ampères-heures par kilogramme d'électrodes utilisés dans l'électrolyse; cette capacité est notablement plus faible si on la rapporte au poids total de l'appareil qui comprend les parties non utilisées des électrodes, le liquide, les isolants, le bac... etc. 100 kgs d'accumulateurs ne permettent pas d'emmagasiner plus de 280 ampères-heures. Comme la force électromotrice moyenne d'un accumulateur est environ 1,9 volt, il en résulte la nécessité de déplacer un matériel

pesant 100 Kgs. pour transporter une énergie de 530 watts. heure<sup>(1)</sup> environ.

## 42. ~ Force électromotrice minimum nécessaire pour produire une électrolyse déterminée. ~

Lorsqu'une pile et un électrolyte sont dans le même circuit, il est nécessaire, pour que l'électrolyse ait lieu, que la force électromotrice  $E$  de la pile soit supérieure à la force électromotrice  $E'$  de polarisation dans l'électrolyte; ou, en d'autres termes, que la chaleur Voltaïque de la pile soit supérieure à la chaleur absorbée par la décomposition de l'électrolyte.

Cependant, lorsque les électrodes sont attaquées, la chaleur de la réaction intervient dans la chaleur totale; la force électromotrice nécessaire pour produire l'électrolyse est alors moindre. Par exemple: l'électrolyse du sulfate de potasse entre une lame de platine et une lame de cuivre à l'anode, donne de la potasse à la cathode et du sulfate de cuivre à l'anode; l'anode se dissout et la chaleur ou la force électromotrice correspondante s'ajoute à celle de la pile. Il faut donc pour produire l'électrolyse du sulfate de potasse avec électrodes platine et cuivre une pile d'une force électromotrice moindre que si la décomposition avait lieu entre deux lames de platine, l'anode en platine étant inattaquable par l'acide sulfurique.

On peut séparer par électrolyse les métaux dans un mélange de plusieurs électrolytes, en choisissant convenablement la force électromotrice de la pile primaire.

Supposons, pour donner un exemple, que nous ayons un mélange d'un sel de cadmium et d'un sel de zinc, et des électrodes en platine. Si c'est du zinc qui

---

(1) Le Watt, unité pratique de puissance, est la puissance d'un moteur qui développe un joule par seconde. C'est  $\frac{1}{736}$  de cheval-vapeur.

se dépose sur la cathode, nous aurons le voltamètre polarisé une force électromotrice  $E_1$ , plus grande que si c'est du cadmium, qui donnera une force  $E_2 < E_1$ . Si donc on choisit la pile primaire de façon que sa force électromotrice  $E$  soit comprise entre  $E_1$  et  $E_2$ , le cadmium seul pourra se déposer. D'ailleurs, si un peu de zinc se déposait en même temps que le cadmium sur la cathode, il se formerait une pile locale dont le zinc serait l'anode; le zinc serait donc immédiatement attaqué et dissous. La cathode ne se couvrira que de cadmium, qui pourra être ainsi complètement extrait.

Dans le cas de l'électrode soluble, la force électromotrice de la pile peut être aussi faible qu'on le veut: par exemple, dans l'électrolyse du sulfate de cuivre avec une anode en cuivre, la chaleur absorbée par la décomposition du sulfate se retrouve dans la chaleur dégagée par la dissolution de l'anode et l'expérience prouve que le courant donné par un couple thermo. électrique, quelque faible qu'il soit, suffit pour provoquer un dépôt de cuivre à la cathode: Aussi l'électrode soluble est-elle employée en Galvanoplastie.

On prépare dans l'industrie du cuivre pur en électrolysant ainsi du sulfate de cuivre. L'anode est formée de cuivre impur qui peut contenir du fer, de l'argent et de l'or. Si la force électromotrice est faible, le fer qui se dissout n'est pas précipité; l'argent et l'or ne sont pas dissous et tombent au fond du vase; le dépôt formé sur la cathode est du cuivre pur.

---

# Chapitre III.

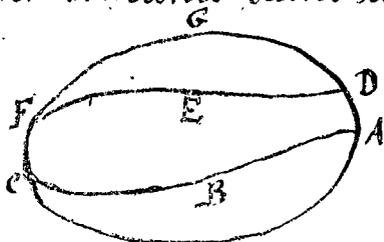
## Distribution des courants et des forces électromotrices<sup>(1)</sup>

### §1 Théorèmes de Kirchhoff.<sup>(2)</sup>

#### 43. Problème de la distribution des courants dans un réseau de conducteurs.

Dans un circuit unique, lorsqu'on connaît la force électromotrice totale (somme algébrique des forces électromotrices et contre-électromotrices dues aux générateurs et récepteurs) et la résistance totale (somme des résistances des diverses portions du circuit (n° 31)), l'intensité  $i$  se calcule par l'équation  $E - Ri = 0$  (n° 31).

Kirchhoff a résolu le problème de la distribution des courants dans un réseau de conducteurs.



Nous appellerons branches les portions des conducteurs, telles que AD, ABC, DFF', DGF, etc. ... comprises entre deux bifurcations. Les données sont les forces électromotrices totales  $E_1, E_2$ , etc... appliquées sur chaque branche, et les résistances  $r_1, r_2$ , etc... de chacune des branches. Les inconnues sont les intensités  $i_1, i_2$ , etc... dans les diverses branches.

(1) intensités ne peuvent pas être quelconques; certaines

(1) C. Carvallo, leçons d'électricité.

(2) Il s'agit toujours, pour le moment, de courants constants, le régime étant établi.

liaisons existent entre elles de sorte que le nombre des inconnues distinctes est inférieur au nombre des branches du réseau.

Nous ne suivrons pas la méthode de Kirchhoff. Cherchant toujours l'assimilation des phénomènes mécaniques et des phénomènes électriques, nous appliquerons la méthode généralisée des travaux virtuels (n° 35).

1° Nous déterminerons le degré de liberté du système, c'est à dire le nombre de coordonnées dont il dépend et nous choisirons ces coordonnées.

2° Nous écrirons, par la loi des travaux virtuels, les équations d'équilibre des forces du système.

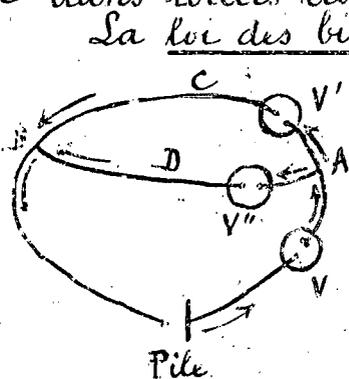
Ces équations détermineront les intensités, c'est à dire les déplacements électriques en fonction du temps, comme les équations de la dynamique déterminent les déplacements des corps en fonction du temps.

Le degré de liberté résulte d'une extension de la loi de Faraday constituant le 1<sup>er</sup> théorème de Kirchhoff.

Les équations des travaux virtuels représentent une loi expérimentale dite deuxième théorème de Kirchhoff.

#### 44 - Extension de la loi de Faraday - Premier théorème de Kirchhoff.

La loi de Faraday (n° 24) exprime que dans un circuit unipolaire, la quantité d'électricité débitée  $q$  est la même dans toutes les parties du circuit.



La loi des bifurcations est une première extension de cette loi. Sur le circuit d'une pile P Faraday (1) a disposé une bifurcation ACB, ADB, et il a placé trois voltammètres, le premier sur le circuit principal, les deux autres sur chacune des branches de la bifurcation.

Le déplacement  $q$  dans le premier voltamètre est égal à la somme  $q' + q''$  des déplacements dans les deux autres.

$$q = q' + q''$$

(1) Experimental researches 1933

Cette équation s'écrit :

$$(63) \quad q + q_1 + q_2 = 0$$

en appelant  $q_1$  et  $q_2$  les quantités  $-q'$  et  $-q''$ . Or  $q$ ,  $q_1$  et  $q_2$  sont les valeurs algébriques des déplacements électriques sur les trois fils qui aboutissent en A, ces déplacements étant comptés positivement quand ils sont dirigés vers A. La loi de la bifurcation s'énonce donc ainsi :

La somme algébrique des déplacements sur les fils qui aboutissent à un noeud d'une dérivation est nulle.

L'énoncé est général : on peut placer sur les trois fils qui aboutissent en A des forces électromotrices telles que les courants aient n'importe quel sens sur ces trois fils, la loi se vérifie. La loi est exacte encore quel que soit le nombre des fils qui aboutissent au même point.

Elle s'applique aussi en un point quelconque d'un conducteur, car s'il n'y a pas de dérivation en ce point, la somme algébrique des déplacements sur les deux parties du fil est nulle (loi de Faraday). Si maintenant on considère les déplacements par unité de temps, on a les intensités.

La loi généralisée s'énonce alors ainsi :

La somme algébrique des intensités des courants qui aboutissent à un point quelconque d'un réseau de conducteurs filiformes est nulle.

Sous cette forme c'est l'énoncé de Kirchhoff. (1) La loi a été établie expérimentalement par lui-même et par Pouillet (2) pour le cas simple d'une bifurcation. Pouillet a confirmé l'expérience de Faraday et a mesuré en outre que la quantité de hydrogène mise en liberté par un courant, pendant un temps  $t$ , est proportionnelle à  $it$ ,  $i$  étant l'intensité électromagnétique, mesurée avec une boussole (boussole des tangentes de Pouillet).

Le premier théorème de Kirchhoff constitue la loi fondamentale de liaison qui caractérise les phénomènes électriques, liaison analogue à celle des fluides incompressibles et que, pour cette raison on peut appeler liaison d'incompressibilité.

(1) Pogg. ann. 1847.

(2) Comptes rendus de l'Ac. des Sc. 1837.

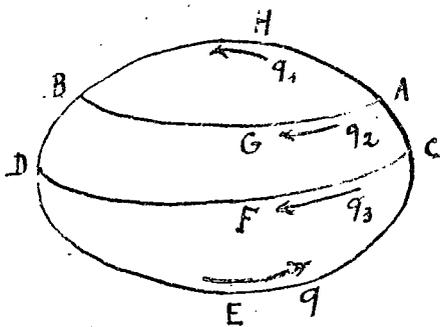
Maxwell a compris que cette loi est plus générale encore et peut être étendue aux conducteurs non filiformes d'abord, puis aux corps isolants (diélectriques) grâce à la conception générale du courant de déplacement ainsi que nous le verrons plus tard.

La loi d'incompressibilité est la base fondamentale de la théorie de l'électricité.

## 45. Degré de liberté du réseau. Choix des coordonnées.

La solution du problème découle du théorème suivant, conséquence de la loi de liaison.

L'établissement d'un pont dans un réseau conducteur quelconque introduit un degré de liberté dans le système.



Considérons d'abord un circuit unifilaire AHBEA; son degré de liberté est 1, car la seule coordonnée variable est le déplacement électrique  $q$  du circuit.

Prenons deux points A et B sur ce circuit, on peut le décomposer en deux parties AHB, BEA et prendre deux coordonnées  $q$  et  $q_1$  relatives à ces deux parties, mais ces coordonnées ne sont pas indépendantes; elles sont liées par la loi de Faraday appliquée à chacun des points A et B. En ces deux points, on a la même relation:

$$(64) \quad q + q_1 = 0$$

Établissons maintenant le pont AGB; nous avons une coordonnée de plus, le déplacement  $q_2$  dans ce pont; mais il n'y a aucune équation de liaison en plus, puisque les lois de Faraday sont déjà exprimées par l'équation (64); il faut seulement ajouter un terme à l'équation de liaison et écrire:

$$q + q_1 + q_2 = 0$$

L'établissement du pont a donc porté de 1 à 2 le degré de liberté, l'augmentant ainsi d'une unité.

Le fait est général : ajoutons un pont CFD, nous introduisons une coordonnée de plus  $q_3$ , et l'équation de liaison devient

$$q + q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

Le degré de liberté est devenu égal à 3, chaque pont ajoutant une unité au degré de liberté.

Nous allons maintenant envisager la question sous un aspect plus simple. La loi de liaison nous permet de considérer les déplacements  $q_1, q_2, q_3$  sur les branches AHB, AGB, CFD comme des déplacements sur les contours fermés AHBEA, AGBEA, CFDEC ces déplacements s'ajoutent sur la branche DEC commune aux trois circuits.

Nous sommes ainsi conduits au choix des coordonnées.

Dans un réseau nous choisissons un contour fermé. Sur ce contour nous pouvons donner arbitrairement un déplacement électrique  $q$  : c'est une première coordonnée du système. Par la pensée, nous coupons une branche du premier contour, nous supprimons la possibilité du déplacement  $q$ , et par là nous diminuons d'une unité le degré de liberté du système.

Nous traitons le nouveau réseau comme le premier, nous avons une deuxième coordonnée  $q_2$ , et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'ayant coupé une dernière branche, il reste un circuit unifilaire. La dernière coordonnée est le déplacement sur ce dernier circuit.

Le déplacement résultant sur une branche quelconque est la somme algébrique des déplacements obtenus dans chacun des circuits qui la comprennent.

Par exemple, dans le cas de la bifurcation simple AB (CD supprimé sur la figure), nous prenons comme première coordonnée le déplacement  $q_1$  sur le circuit AHBEA; nous coupons la branche AHB, reste le circuit AGBEA; la deuxième coordonnée est le déplacement  $q_2$  sur ce circuit.

Sur la branche BEA le déplacement est la somme  $q_1 + q_2$ .

Cette méthode, due à M. E. Carvallo<sup>1</sup> donne un choix de coordonnées différent de celui de Kirchhoff, qui avait pris le déplacement électrique sur chaque branche. Le choix de Kirchhoff était naturel, mais il conduit à un nombre surabondant de coordonnées, et exige par

conséquent qu'on écrive les équations des liaisons qui existent entre elles, ce qui donne lieu à des calculs compliqués. Nous avons ici, au contraire, un nombre de coordonnées indépendantes égal au degré de liberté.

Il y a plus, ce choix s'impose pour l'application du théorème des travaux virtuels, parce que ces déplacements compatibles avec la liaison d'incompressibilité ne peuvent avoir lieu que suivant des contours fermés.

## 46. Deuxième théorème de Kirchhoff. Equilibre des forces électromotrices sur tout contour fermé.

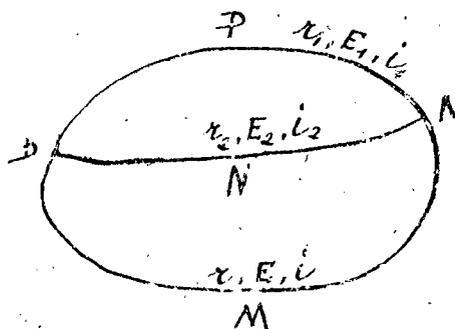
Soit  $\delta q$  un déplacement suivant un des contours envisagés précédemment; nous écrivons que le travail virtuel correspondant des forces est nul en écrivant l'équilibre des forces électromotrices:

$$(65) \quad \sum (E - ri) = 0$$

C'est le deuxième théorème de Kirchhoff.

La somme algébrique des forces électromotrices (dus aux générateurs, aux récepteurs et à l'effet Joule) qu'on rencontre sur tout contour fermé et un réseau est nulle.

Cette loi a été établie dans des cas simples par Pouillet et par Kirchhoff. Dans sa généralité elle résulte avec certitude de l'ensemble des travaux faits en vertu de la loi de conservation de l'énergie, car elle conduit toujours à des résultats exacts. L'extension du théorème des travaux virtuels à des forces et déplacements ne sont pas des déplacements mécaniques, est donc consacrée par l'expérience.



Appliquons les théorèmes de Kirchhoff au cas d'un réseau. Nous avons dans ce cas des inconnues principales, les coordonnées  $q$  dont les déplacements virtuels  $\delta q$  sont des travaux virtuels  $\delta W$  des déplacements

c'est à dire les intensités  $i$ .

Les données et les inconnues sont les suivantes :

Branches	APB	ANB	AMB	
Forces électromotrices	$E_1$	$E_2$	$E$	} données
Résistances	$r_1$	$r_2$	$r$	
Intensités	$i_1$	$i_2$	$i$	inconnues

Prenons APBMA comme premier circuit (c'est donnée  $E_1$  et inconnue principale  $i_1$ ). Dans la branche BMA, l'intensité résultante est  $i_1 + i_2$ . L'équation des travaux virtuels (2<sup>ème</sup> théorème de Kirchhoff) est :

$$E_1 + E = r_1 i_1 + r (i_1 + i_2)$$

Nous coupons maintenant la branche APB, il reste le circuit ANBMA; l'équation des travaux virtuels s'écrit :

$$E_2 + E = r_2 i_2 + r (i_1 + i_2)$$

De ces deux équations on peut tirer  $i_1$  et  $i_2$ ; quant à la troisième intensité, elle est donnée par l'équation de liaison (1<sup>er</sup> théorème de Kirchhoff) :

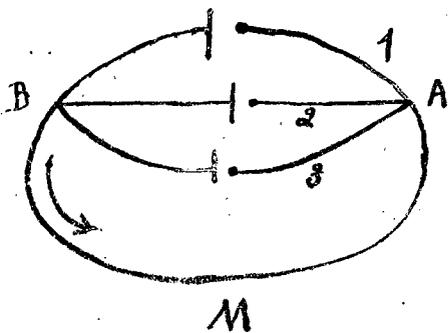
$$i = i_1 + i_2$$

Souvent des remarques particulières simplifient les calculs, comme nous allons le voir dans une application importante.

#### 47 - Accouplement des piles d'une batterie, en série et en surface.

Quand des piles sont sur un même fil, elles sont dites en série ou en tension : leurs forces électromotrices et leurs résistances s'ajoutent.

Quand elles sont sur les branches 1, 2, 3, ..., n de n dérivations prises sur le circuit principal BMA, elles sont dites en surface. Une condition qu'il faut réaliser, est de mettre



sur les  $n$  branches des forces électromotrices égales; autrement le deuxième théorème de Kirchhoff donnerait, par exemple dans le circuit  $A1B2A$ , un courant qui représenterait de l'énergie perdue pour le circuit extérieur.

Soit  $E$  la force électromotrice commune des  $n$  branches; soit  $\Lambda$  leur résistance que nous supposons aussi commune, parce qu'elle se réduit sensiblement à la résistance intérieure de la pile (ou des  $p$  piles) de l'une des branches.

Par raison de symétrie l'intensité est la même dans les  $p$  branches. D'après le 1<sup>er</sup> théorème de Kirchhoff, elle est égale à  $\frac{1}{n}$  de l'intensité  $i$  du circuit principal  $BMA$ , qui est la seule inconnue.

Cette inconnue unique est déterminée par le 2<sup>e</sup> théorème de Kirchhoff appliqué à l'un quelconque des circuits  $A1BMA$ ,  $A2BMA$  etc.... On a :

$$E - \Lambda \frac{i}{n} - ri = 0$$

$$(66) \quad i = \frac{nE}{nr + \Lambda} = \frac{E}{r + \frac{\Lambda}{n}}$$

$r$  étant la résistance du circuit principal.

S'il y a, en série dans chaque branche,  $p$  piles de force électromotrice  $e$  et de résistance  $\lambda$ , on a :

$$E = pe \quad \Lambda = p\lambda$$

et la formule (66) devient :

$$(67) \quad i = \frac{npe}{nr + p\lambda} = \frac{pe}{r + \frac{p}{n}\lambda}$$

L'intensité est la même que si le circuit était unifié et possédait une pile de force électromotrice  $pe$  et de résistance  $p \frac{\lambda}{n}$ .

La force électromotrice de la batterie à  $n$  branches égale celle d'une de ses branches. Sa résistance égale  $\frac{1}{n}$  de la résistance de chaque branche.

## Distribution d'un nombre $N$ d'éléments en série

et en surface. — Cherchons la distribution à réaliser pour avoir le maximum de  $i$ , la résistance extérieure  $r$  étant donnée.

Posons  $N = n \mu$ ,  $n$  étant le nombre des branches que nous disposerons en dérivation, et  $\mu$  le nombre d'éléments que nous placerons en série dans chaque branche. Le dénominateur de  $i$ , dans la formule (67)

$$nr + \frac{N}{n} \lambda$$

est minimum pour  $r = \frac{N\lambda}{n^2}$ ,  $n = \sqrt{\frac{N\lambda}{r}}$

D'où l'on déduit :

$$ni = \frac{N\lambda}{n} = \mu \lambda$$

ou encore

$$\frac{\mu}{n} \lambda = r$$

La résistance intérieure  $\frac{\mu}{n} \lambda$  égale la résistance extérieure. C'est la condition dont il faut se rapprocher le plus pour avoir le maximum d'intensité.

## §2. Etude des résistances.

### 48. Unité — Boîtes de résistances.

La résistance est définie par la loi de Joule

$$W = ri^2 t$$

L'unité pratique de résistance est donc celle qui reçoit un joule par seconde d'un courant de un ampère. On l'appelle Ohm.

L'ohm théorique est égal à  $10^9$  unités C.G.S, puisque le joule =  $10^7$  et l'ampère =  $10^{-7}$  C.G.S.

On s'est proposé de réaliser un étalon ayant cette

résistance et l'on a cherché quelle longueur il faudrait donner à une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section, à la température de  $0^{\circ}$ , pour que la résistance de cette colonne fut  $10^9$  unités C. G. S. En 1866 Joule donna pour cette longueur le nombre  $1^m 0623$  et les déterminations plus récentes s'écartent peu de  $1^m 0625$ . Quatre étalons ont été construits au bureau international des poids et mesures.

On a adopté l'ohm international, qui est, par définition, la résistance à  $0^{\circ}$  d'une colonne de mercure de  $106^{\text{cm}} 300$ , de section uniforme, et contenant  $14^{\text{g}} 4521$ . L'ohm est ainsi fixé, et par conséquent détaché du système C. G. S, bien que restant très voisin de l'unité théorique. (1)

Mesurer une résistance, c'est la comparer à l'ohm.

**Rhéostats.** — Pour comparer une résistance à une autre, il est commode d'avoir à sa disposition des résistances qu'on puisse faire varier à volonté.

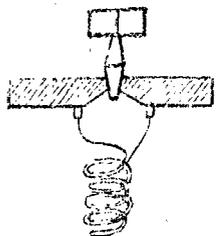
On appelle rhéostat une disposition qui permet d'introduire dans un circuit un fil dont on peut faire varier la longueur. Le plus simple des rhéostats consiste en un fil rectiligne tendu, dont une extrémité est en communication avec un des bouts du circuit parcouru par le courant, et sur lequel vient s'appuyer l'autre bout P du circuit. Si l'on déplace le point P, on introduit dans le circuit celle résistance qu'on veut, inférieure à la résistance du fil compris entre les bornes M et N. Le contact en P peut être établi de diverses manières, soit au moyen d'une goutte de mercure, soit par une pression convenable des deux fils l'un sur l'autre avec une pince de matière non conductrice.

**Boîtes de résistances.** — On se sert couramment de boîtes au moyen desquelles on peut intercaler dans un circuit des résistances graduées en ohms.

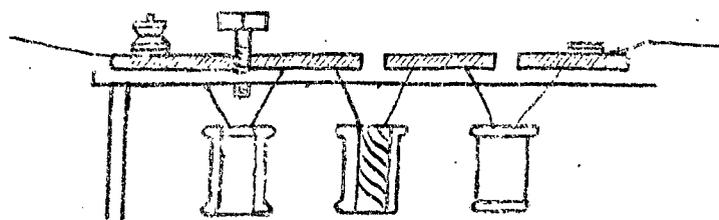
Une boîte de résistances se compose d'une série de bobines

(1) Nous reviendrons plus loin sur les unités du système pratique.

sur lesquelles sont enroulés des fils dont la résistance a été soigneusement déterminée par le constructeur. Sur chaque bobine le fil, replié en son milieu M est enroulé en double,



pour éviter les effets d'induction. Les fils de ces bobines communiquent deux à deux avec des blocs de cuivre placés à la partie supérieure de la boîte, qui ne communiquent pas entre eux, mais qu'on peut mettre en court-circuit en enfonçant une cheville de cui-



vre dans des trous ménagés à cet effet. Lorsque toutes les chevilles sont en place, la résistance des blocs étant négligeable, aucun courant ne passe dans les bobines; le courant passe

alors par les blocs de cuivre et les chevilles, mais si l'on vient à retirer l'une des chevilles, on intercale la bobine dans le circuit.

Devant le logement de chaque cheville est inscrit un chiffre indiquant la résistance de la bobine correspondante.

Les résistances sont étalonnées en ohms, en sous-multiples et multiples de l'ohm, comme dans les séries de poids; les bobines permettent d'intercaler des résistances allant jusqu'à plusieurs milliers d'ohms.

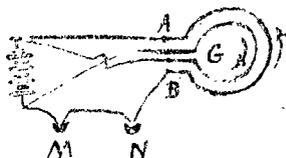
Il existe diverses variantes du dispositif qui vient d'être décrit.

## 49 - Comparaison des résistances - Galvanomètre de A. C. Becquerel<sup>(1)</sup>

Dans le galvanomètre différentiel, le cadre de l'appareil porte deux fils aussi identiques que possible enroulés côte à côte. En faisant passer dans chacun d'eux des courants de sens contraires, l'aiguille aimantée se trouve soumise à la différence

(1) Galvanomètre différentiel. Ann. de Ch. et de Phys. t. 32 p. 420 (1825)

de leurs actions électromagnétiques individuelles et demeure au repos lorsque leurs intensités sont égales.



A. C. Becquerel réunissait, comme l'indique la figure, les pôles d'une même pile P aux bornes du galvanomètre différentiel, qui est représenté schématiquement en G, de manière à constituer deux circuits antagonistes. Sur l'un d'eux il intercalait successivement en MN des fils de natures et de sections différentes de manière à maintenir au zéro l'aiguille de l'instrument.

Par cette méthode, qui mettait à l'abri des erreurs pouvant provenir de la variabilité de la pile, puisque la comparaison était indépendante des variations du courant, Becquerel constata que

- “ la substance étant la même, pour obtenir la même conductibilité dans deux fils, il fallait que leurs poids fussent proportionnels aux carrés de leurs longueurs, ou, ce qui revient au même, que les longueurs fussent dans le rapport des sections des fils.” (1)

Il fut conduit à définir avec précision et à évaluer “ les pouvoirs conducteurs relatifs ” des métaux en les considérant comme proportionnels aux longueurs des fils qui, sous le même diamètre, donnent la même conductibilité.

La méthode différentielle a été appliquée plus tard par Pouillet. ( voir n° 54 )

## 50. Méthode du pont de Wheatstone.

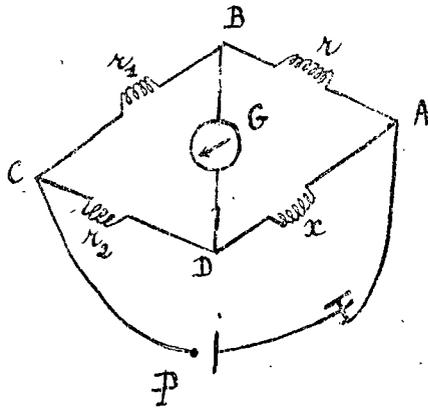
La méthode la plus employée pour la comparaison des résistances est celle du pont de Wheatstone (1843).

Soit le quadrilatère ABCD dont les côtés ont pour résistances respectivement  $r, r_1, r_2, x$ . Sur la diagonale AC est une pile P; sur la diagonale BD un galvanomètre G.

Quelle relation faut-il établir entre ces résistances pour qu'il ne passe aucun courant dans le galvanomètre ?

(1) Antérieurement (1821) Davy avait établi que “ le pouvoir conducteur d'une même longueur de fil est proportionnel à sa masse ”. Il avait remarqué aussi que la conductibilité des métaux diminue quand leur température s'élève.

Si le galvanomètre demeure au zéro, la même intensité  $i_1$  règne dans les branches AB, BC, et la même intensité  $i_2$  règne dans les branches AD, DC. (1<sup>er</sup> th. de Kirchhoff). Dès lors, le deuxième théorème de Kirchhoff donne, pour les deux contours ABGDA, BCDGB, respectivement,



$$r i_1 = x i_2$$

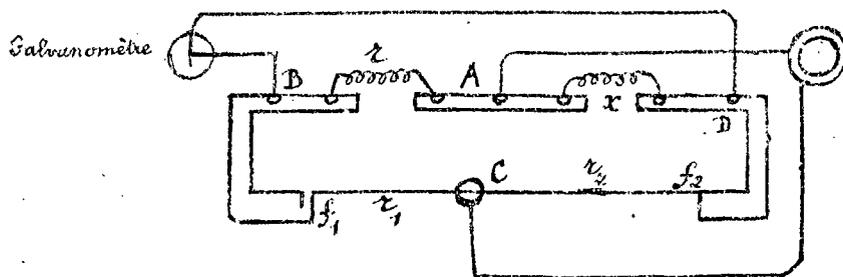
$$r_1 i_1 = r_2 i_2$$

D'où (69)  $x = r \frac{r_2}{r_1}$

Cette équation donne  $x$  quand on connaît  $r$  et le rapport des deux autres résistances. (1) L'avantage principal de la méthode, est qu'on peut disposer du rapport  $\frac{r_2}{r_1}$  et n'avoir à réaliser que des résistances modérées  $r$ , même pour mesurer de grandes résistances. La méthode différentielle, au contraire, exigeait la réalisation d'une résistance équivalente à la résistance à mesurer.

Les boîtes de résistance sont généralement disposées de façon à se prêter à la formation de trois branches d'un pont de Wheatstone, la quatrième branche étant formée par la résistance à mesurer.

L'une des dispositions les plus pratiques est celle du pont à corde.



Les sommets BA D du quadrilatère sont fixes; le sommet C est mobile sur un fil,  $f_1$ ,  $f_2$  bien calibré, (1<sup>m</sup> de longueur environ) placé au-dessus d'une échelle

divisée. On déplace C jusqu'à ce que le galvanomètre demeure au zéro.

(1) On pourrait démontrer que cette relation nécessaire est suffisante pour que le galvanomètre reste au repos.

$$x = r \cdot \frac{f_2 C}{f_1 C}$$

les résistances des deux parties du fil étant proportionnelles à leurs longueurs.

Résistance d'un électrolyte. Comme la polarisation des électrodes donnerait lieu à une force électromotrice dans la branche AD, on évite la polarisation en remplaçant la pile par un petit alternateur faisant passer dans l'électrolyte des courants rapidement alternés. Comme le galvanomètre serait insensible aux courants alternatifs, on le remplace par un téléphone dont le son s'éteint quand l'équilibre est établi (Kohlrausch, 1880).<sup>(1)</sup>

## 51. Résistance intérieure d'une pile. Résistance d'un galvanomètre - Méthodes dites du faux zéro.<sup>(2)</sup>

Il résulte de la forme linéaire des équations de Kirchhoff que si, dans un réseau de conducteurs, un système de forces électromotrices ( $E$ ) produit un système ( $i$ ) d'intensités, et un système ( $E'$ ), de forces électromotrices, un autre système ( $i'$ ), le système ( $E + E'$ ) résultant de la superposition des deux précédents donnera le système des intensités ( $i + i'$ ).

Dans le cas d'un pont de Wheatstone, supposons que la diagonale AC soit seule le siège d'une force électromotrice  $E'$ ; l'autre diagonale sera en général traversée par un courant d'intensité  $i'$ . Si l'on place, du contraire, exclusivement des forces électromotrices ( $E$ ) sur les bras du pont, BD supportera un courant  $i$ .

À l'action simultanée de ( $E$ ) et de  $E'$  correspondra donc le courant  $i + i'$  qui sera indépendant de  $E'$  si le pont est

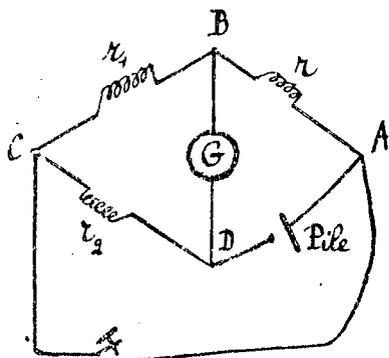
(1) Le son ne s'éteindrait pas si les branches du pont avaient de la self-induction et de la capacité; le dispositif qui convient est celui du pont à corde.

Edmond Becquerel (1846) a employé la méthode différentielle en faisant en sorte que les mêmes forces électromotrices de polarisation se produisent à la fois dans les deux circuits du galvanomètre différentiel.

(2) Cours de M. le Lt Colonel Lafay.

équilibré, car dans ce cas on a  $i' = 0$  quelle que soit la valeur de  $E'$ .

Pour reconnaître s'il existe entre les bras la relation caractéristique de l'équilibre (form. 69), il suffira donc de faire varier d'une manière arbitraire la force électromotrice intercalée dans la diagonale AC et de constater que la déviation du galvanomètre demeure invariable.



Pour cela on réalise la diagonale AC à l'aide d'un simple fil interrompu par une clef; fermer la clef correspond à faire  $E' = 0$ , et l'ouvrir revient à donner à  $E'$  une valeur égale et contraire à la force électromotrice qui existe entre A et C, puisqu'aucun courant ne peut passer dans la diagonale AC.

Pour ces deux positions de la clef, la déviation du galvanomètre doit rester la même.

On obtiendra, à l'aide de ce dispositif la résistance intérieure  $\lambda = r \frac{r_2}{r_1}$  d'une pile en intercalant celle-ci à la place de  $x$ , et en réglant les autres bras constitués par des résistances ordinaires jusqu'à ce que l'invariabilité du galvanomètre soit obtenue.

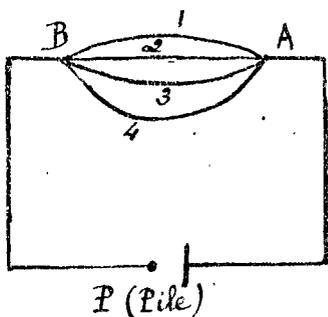
On peut aussi mesurer la résistance d'un galvanomètre en le plaçant sur l'un des bras du pont et en intercalant une simple clef sur la diagonale BD.

En effet lorsque le pont est équilibré, il n'y a pas de courant suivant BD; la fermeture ou l'ouverture de la clef ne modifie donc pas la répartition des intensités sur les bras du pont et la déviation du galvanomètre mis à la place de  $x$  reste invariable; ce fait peut donc être pris comme criterium et permet de s'assurer que le pont est équilibré. La résistance du galvanomètre est alors donnée par la formule (69).

Les deux procédés de mesure que nous venons d'indiquer sont connus sous le nom de méthodes du faux zéro; le premier est dû à Mance, le second à Lord Kelvin.

## 52. Résistances en dérivation. Conductance <sup>(1)</sup>

Quand des fils sont bout à bout, on dit qu'ils sont en tension ou en série, leurs résistances s'ajoutent (n° 31).  
Les fils peuvent être, au contraire, en dérivation ou en surface, comme le représente la figure. Dans ce cas,



il est commode de considérer les inverses  $c = \frac{1}{r}$  des résistances des fils, ce sont les conductances. L'unité pratique de conductance (mho) est la conductance de l'ohm. Nous allons établir deux propriétés des conductances.  
Quand des fils sont en dérivation

- 1° l'intensité du courant principal se partage proportionnellement aux conductances.
- 2° la conductance résultante est égale à la somme des conductances des branches du récepteur.

Le problème à résoudre est celui-ci :

Connaissant l'intensité  $i$  dans le circuit principal, calculer les intensités  $i_1, i_2, \dots, i_n$  dans chacune des  $n$  branches de la dérivation.

Le premier théorème de Kirchhoff donne :

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

Le deuxième théorème appliqué aux circuits  $A1B2A$ ,  $A1B3A$ , ...,  $A1BnA$ , donne :

$$\frac{i_1}{c_1} - \frac{i_2}{c_2} = 0 \quad \frac{i_1}{c_1} - \frac{i_3}{c_3} = 0 \quad \frac{i_1}{c_1} - \frac{i_n}{c_n} = 0 \quad \left( \sum (E - ri) = 0 \right)$$

Les équations précédentes sont réunies dans le groupe :

$$(70) \quad \frac{i_1}{c_1} = \frac{i_2}{c_2} = \dots = \frac{i_n}{c_n} = \frac{i}{\sum c}$$

(1) E. Carvallo, cours d'électricité.

Le problème est résolu, puisqu'on a  $i_1, i_2, \dots, i_n$  en fonction de  $c_1, c_2, \dots, c_n$  et de  $i$ .

Pour avoir la conductance d'ensemble de la dérivation, nous devons revenir à la loi de Joule qui a été la base de notre définition des résistances, et par suite des conductances.

Pour un déplacement  $q = it$  sur le circuit principal AFB, l'énergie calorifique reçue dans la branche A1B est  $\frac{i_1^2 t}{c_1}$ ; par coulomb du circuit principal l'énergie reçue est:

$$\frac{1}{it} \frac{i_1^2 t}{c_1} = \frac{i_1^2}{c_1 i}$$

soit, en remplaçant  $i_1$  par sa valeur tirée des formules (70):

$$\frac{i_1^2}{c_1 i} = \frac{c_1 i}{(\Sigma c)^2}$$

L'énergie absorbée (par coulomb du circuit principal) par l'ensemble des  $n$  fils est donc:

$$\frac{c_1 i}{(\Sigma c)^2} + \frac{c_2 i}{(\Sigma c)^2} + \dots + \frac{c_n i}{(\Sigma c)^2} = \frac{i}{\Sigma c}$$

D'après la définition de la résistance (n° 30), la résistance de l'ensemble des  $n$  dérivation est:

$$(71) \quad r = \frac{1}{\Sigma c}$$

et sa conductance est  $\Sigma c$ . C'est la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

Shuntage des galvanomètres. — Lorsqu'un courant trop fort passe dans un galvanomètre il fait sortir l'aiguille de la graduation et peut même l'endommager. On évite le Shunt ou voie de garage, qui dérive le gros du courant.

Soient  $c_1$  la conductance du galvanomètre et  $c_2$  celle du Shunt; l'intensité dans le galvanomètre est (formules 70):

$$i_1 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} i$$

Un galvanomètre est généralement accompagné d'une

Boite de Shunts où l'on trouve trois fils dont les conductances  $C$  ont pour valeurs respectives  $9C$ ,  $99C$ ,  $999C$ . Il en résulte pour  $i$ , les valeurs  $\frac{i}{10}$ ,  $\frac{i}{100}$ ,  $\frac{i}{1000}$  multipliant, suivant le Shunt employé, les indications du galvanomètre par 10, 100, 1000.

### 53. Lois d'Ohm.

Si des fils sont en tension leurs résistances s'ajoutent; s'ils sont en dérivation ce sont les conductances qui s'ajoutent. Il en résulte que la conductance d'un fil est proportionnelle à sa section  $S$  et inversement proportionnelle à sa longueur  $l$ . Elle a donc pour expression:

$$(72) \quad \frac{1}{r} = c = \gamma \frac{S}{l}$$

où  $\gamma$  est un coefficient spécifique de la matière conductrice, appelé conductibilité spécifique ou conductivité.

Son inverse:

$$(73) \quad r = \frac{1}{\gamma} = r \frac{S}{l}$$

est la résistivité de la substance.

Portons la valeur de  $C$  dans la formule de l'intensité:

$$i = \frac{E}{r} = c E$$

on a:

$$(74) \quad i = \gamma \frac{S}{l} E$$

C'est l'expression des lois d'Ohm:

L'intensité du courant dans un fil est proportionnelle à la force électromotrice, à la section du fil et inversement proportionnelle à la longueur du fil.

Les formules (72) et (74) se présentent à nous comme des conséquences de la loi de Joule combinée avec les théorèmes de Kirchhoff, c'est à dire avec la loi de liaison de Faraday et la loi des travaux virtuels. Mais ce n'est pas ainsi que ces formules ont été établies.

Ohm a d'abord découvert les lois résumées dans la

formule (74) à l'aide de piles thermo-électriques sans résistance sensible. Il l'a ensuite expliquée par une hypothèse dont nous dirons quelques mots plus loin.

Pouillet a retrouvé ces lois par des expériences plus précises que celles de Ohm.

## 54 - Expériences de Pouillet.

- non  
exigé

Pouillet <sup>(1)</sup> en 1828, sans avoir eu connaissance des travaux de Ohm, entreprit d'établir par expérience les lois du dégagement de l'électricité par les piles.

Dans un mémoire publié en 1831 il donna les lois des courants fournis par les piles thermo-électriques, et en 1837 il étudia les courants des piles à liquide. Nous avons déjà parlé de ce dernier travail (n° 32).

C'est au cours de ces recherches qu'il fit usage, pour la mesure des intensités, de la boussole des sinus et imagina la boussole des tangentes.

Pouillet reconnut tout d'abord la difficulté qu'introduisait dans les mesures la résistance considérable intérieure des piles à liquides, et employa des piles thermo-électriques. L'élément dont il s'est servi est composé d'un gros cylindre de bismuth en forme d'U renversé, aux extrémités duquel sont soudés deux fils de cuivre gros et courts. Chacune des soudures est enfermée dans un tube de verre qui plonge dans un vase. L'un des vases est maintenu à 0° par de la glace, l'autre à 100°. Les deux fils de cuivre sont les pôles de cette pile; le courant va de la soudure chaude à la soudure froide en passant par le conducteur.

### Influence de la longueur du fil conducteur. —

On réunit les deux pôles d'un couple thermo-électrique par un fil de longueur  $l_1$ , puis on réunit les deux pôles d'un autre couple identique, par un fil de même section que le premier, mais de longueur  $l_2$ . Le rapport des intensités est obtenu par un galvanomètre différentiel: on enroule sur un même cadre un nombre  $n_1$  de tours du

(1) Pouillet, traité de Physique t. I 2<sup>e</sup> partie p. 155 1<sup>re</sup> édition 1828.

premier fil et, en sens contraire, un nombre de tours du second fil  $n_2$  tel qu'il n'y ait pas d'action sur l'aiguille du galvanomètre. On reconnaît que les nombres  $n_1$  et  $n_2$  sont proportionnels à  $l_1$  et  $l_2$ . Or les actions exercées sur l'aiguille aimantée sont proportionnelles à  $n_1 l_1$  et  $n_2 l_2$ ; comme ces actions se font équilibre les intensités sont inversement proportionnelles aux nombre de tours sur le cadre et par suite aux longueurs des fils.

Influence de la section. — Pouillet composa des faisceaux de fils identiques entre eux; il réunit les pôles de l'une des piles par deux ou trois fils semblables à celui qui était monté sur l'autre pile, et reconnut qu'il fallait faire deux ou trois fois plus de tours du fil simple que du fil double ou du fil triple pour équilibrer les actions du même courant. L'intensité est donc proportionnelle à la section.

Enfin, si l'on groupe en série  $n$  couples, le courant produit dans un même fil est proportionnel à  $n$ .

En mesurant les intensités des courants produits par la même pile dans des fils divers, Pouillet calcula la longueur d'un fil de cuivre de 1<sup>mm</sup> de diamètre dont la résistance serait équivalente à la résistance de chacun des fils étudiés. Il trouva cette longueur proportionnelle à  $\frac{l}{K S}$ ,  $K$  étant un facteur qui caractérise la conductibilité des divers fils, par rapport au cuivre.

Il établit l'addition des résistances placées en série et l'addition des inverses des résistances pour les conducteurs en dérivation.

Enfin, en 1837, Pouillet étendit la vérification de ces lois aux courants fournis par les piles à courant constant de A-C Becquerel et mit en évidence la résistance intérieure des piles.

## 55 - Résistivité des différents corps -

La résistivité étant le produit d'une résistance par une longueur, on l'estime en microhms-centimètres pour les bons conducteurs comme les métaux. Le microhm vaut  $10^{-6}$  ohm.

Le tableau suivant indique la résistivité de quelques

métaux et alliages à 0° centigr.

Métaux ou alliages	Résistivité en microhms x Cm à 0°c.	Coefficient d'augmentation de résistance par degré ctg. aux environs de 15°c.
Argent recuit	1,468	0,00400
Cuivre - d° -	1,561	0,00428
Or - d° -	2,197	0,00377
Aluminium - d° -	2,665	0,00425
Fer - d° -	9,065	0,00625
Platine - d° -	10,950	0,00353
Nichel - d° -	12,323	0,00622
Plomb - d° -	20,380	0,00411
Maillechort (60 Cu, 25 Zn, 15 Ni)	29,982	0,000273
Platine argent (33 Pt, 67 Ag)	31,582	0,000243
Platinide (maillechort légèrement additionné de tungstène)	41,731	0,000310
Manganine (84 Cu, 12 Mn, 4 Ni)	46,678	0,0000

En raison de sa faible résistance, le cuivre est le meilleur des conducteurs industriels

On utilise, au contraire, la grande résistance du plomb pour fabriquer avec ce métal, allié à l'étain, des coupe-circuits facilement fusibles.

Les moindres traces d'impureté peuvent entraîner des variations notables dans la résistance d'un métal industriel.

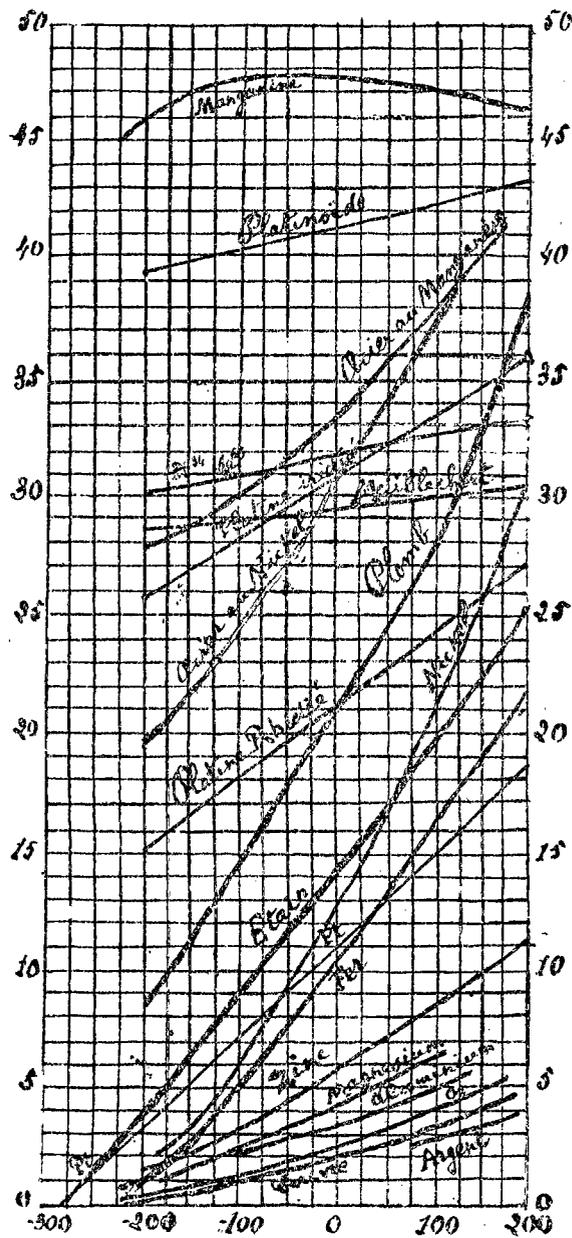
Dans le cas des métaux, la résistance varie généralement dans le même sens que la température.

Les expériences de MM. Dewar et Fleming ont montré que la résistance des métaux purs tend vers zéro quand la température s'abaisse; M. Kamerlingh-Onnes a établi que certains métaux ont une résistance nulle à la température de liquéfaction de l'hélium: ce sont les supraconducteurs.<sup>(1)</sup>

La résistance des alliages éprouve sous l'effet des

(1) Nous reviendrons sur cette question dans l'exposé de la théorie électronique.

changements de température des variations qui sont presque toujours notablement plus faibles que celles subies dans les mêmes conditions par celui des métaux constitutants qui est le meilleur conducteur. À l'instar de ce qui a lieu pour les métaux purs, les valeurs prises par ces résistivités, lorsque la température devient très basse, ne paraissent pas obéir à une loi simple.



La figure ci-contre permet de se faire une idée de ces variations; les températures y sont indiquées, non en degrés centigrades mais en degrés du thermomètre en platine dont nous donnons le principe dans le numéro suivant. Par définition même de l'échelle des températures en degrés du thermomètre en platine, la courbe relative au platine est une ligne droite.

On a préparé des alliages tels que que la manganine (84 Cu, 12 Mn, 4 Ni) et le constantan (0,60 Cu, 0,40 Ni) dont les variations thermiques de résistance sont pratiquement nulles pour des températures voisines de la température ambiante normale.

Pour certains corps la résistance diminue quand la température

s'élève. Les liquides, le charbon des cornues, les filaments de charbon des lampes à incandescence, les bâtonnets de magnésie des lampes Nernst (1) etc. .... sont dans ce cas.

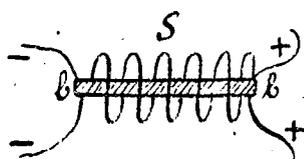
On doit à divers physiciens (en particulier à M. Lussana) des expériences qui donnent une idée de la manière dont varie la résistivité des métaux lorsqu'on les soumet à des pressions élevées. Entre 0 et 3000 atmosphères, la résistivité varie en sens inverse de la pression, mais de moins en moins rapidement à mesure que celle dernière devient plus élevée. Les alliages sont beaucoup moins influencés que les métaux purs.

## 56. Thermomètre basé sur la variation de résistivité du platine.

Ce thermomètre est d'un emploi avantageux pour l'évaluation des températures très basses.

Il est constitué par un fil de platine d'environ  $0^{\text{mm}}_{015}$  de diamètre et d'un mètre de long, ce qui correspond à une résistance de 5 ohms environ. Ce fil est enroulé autour d'un tube de verre, et ses extrémités sont soudées à des fils de platine plus épais ( $0^{\text{mm}}_{07}$ ) destinés à établir les connexions; le tout est introduit dans l'enceinte dont on veut évaluer la température.

(1) La lampe Nernst se compose essentiellement d'un bâtonnet de magnésie b recouvert d'oxyde de rhodium et placé entre deux fils de platine qui amènent le courant. Le tout est placé dans le voisinage d'un conducteur auxiliaire



de forme sinusoïdale. Lorsqu'on donne accès au courant, ce dernier passe d'abord dans le conducteur S qui rougit et chauffe par rayonnement le bâtonnet b.

Lorsque ce dernier est, par suite de l'échauffement, devenu assez conducteur, le courant le traverse en portant à l'incandescence la magnésie rhodée qui produit une vive lumière. A ce moment un dispositif spécial placé dans le socle de la lampe coupe le courant qui circulait dans la spirale excitatrice S.

non  
exigé

On peut constituer une échelle des températures données par ce thermomètre absolument analogue à celle du thermomètre ordinaire. Soit  $R$  la résistance de la spirale de platine à une température  $\vartheta$  arbitraire, soient  $r_0$  et  $r_{100}$  les résistances correspondant à  $0^\circ$  et à  $100^\circ$  de l'échelle normale;  $\vartheta$  est numériquement définie par:

$$\vartheta = 100 \frac{r - r_0}{r_{100} - r_0}$$

Callendar qui a comparé très soigneusement cette échelle à celle du thermomètre à air a trouvé qu'avec une grande approximation on peut poser:

$$\vartheta - \vartheta' = \alpha \left( \frac{\vartheta^2}{10.000} - \frac{\vartheta'}{100} \right)$$

$\alpha$  étant une constante qui dépend du fil employé, mais qui a, à très peu près, la valeur 1,57 lorsqu'on fait usage du platine pur.

## 57. Conduction dans les fils composés. Densité de courant.

Preions un fil composé, par exemple, d'une lame de fer de section  $S_1$  avec couverture en cuivre de section  $S_2$ . Soient  $C_1$  et  $C_2$  les conductibilités spécifiques de ces métaux. Leurs conductances par unité de longueur sont  $C_1 S_1$  et  $C_2 S_2$ . La loi des bifurcations donne pour les intensités partielles  $i_1, i_2$  qui correspondent à une force contre-électromotrice  $E$  par unité de longueur:

$$(75) \quad E = \frac{i_1}{C_1 S_1} = \frac{i_2}{C_2 S_2} = \frac{i_1 + i_2}{C_1 S_1 + C_2 S_2}$$

Ces formules permettent d'énoncer la loi suivante: La conductance totale, pour la surface  $S_1 + S_2$ , par unité de longueur, est  $C_1 S_1 + C_2 S_2$ , soit par unité de surface la conductibilité spécifique moyenne:

$$C = \frac{C_1 S_1 + C_2 S_2}{S_1 + S_2}$$

Les formules (75) introduisent les quantités

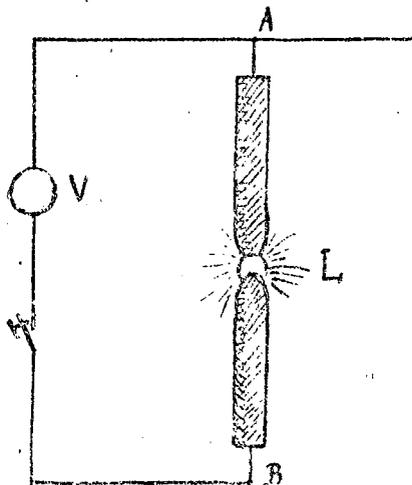
$U_1 = \frac{i_1}{S_1}$ ,  $U_2 = \frac{i_2}{S_2}$ , ce sont les intensités de courant par unité de surface ou densités de courant. Elles sont proportionnelles aux conductivités  $C_1$  et  $C_2$ , d'après les équations (75) qui s'écrivent :

$$U_1 = C_1 E \quad U_2 = C_2 E$$

La densité de courant a une grande importance industrielle parce que c'est d'elle que dépendent l'échauffement des fils et les accidents qui peuvent en résulter.

## 58. - Voltmètre.

Un galvanomètre à très grande résistance constitue un voltmètre. Prenons un exemple : soit une lampe à arc  $L$ , cherchons à mesurer la force contre-électromotrice  $E$  du récepteur que constitue cette lampe. Mettons le voltmètre  $V$  en dérivation sur les bornes  $A$  et  $B$  de  $L$ . l'appareil ayant une très grande résistance ne reçoit qu'une faible partie  $i$  du courant principal  $I$ , de sorte que la force contre-



électromotrice du récepteur  $AB$  n'est pas sensiblement changée par la bifurcation ; elle reste pratiquement égale à  $E$ . Le second théorème de Kirchhoff appliqué au contour  $AVBLA$  donne

$$E - R i = 0$$

$R$  étant une constante de l'appareil,  $E$  est proportionnel à l'intensité  $i$  que mesure l'appareil. Dès lors le voltmètre peut être gradué, non en ampères ( $i$ ) mais en volts ( $Ri$ ) et la lecture fait connaître directe-

ment  $E$ . (1)

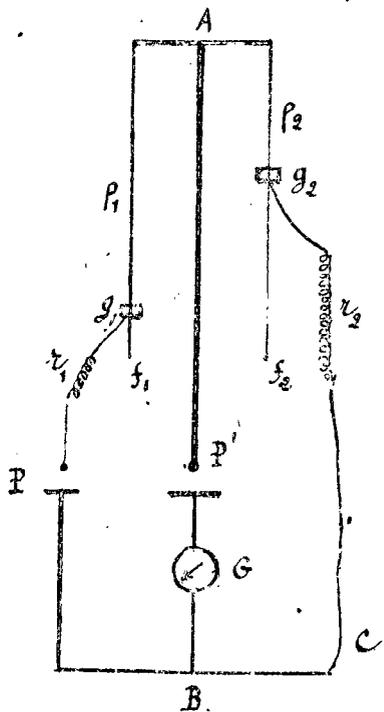
(1) La puissance consommée par la lampe est  $E I$ . Elle est exprimée en watts si  $I$  est exprimé en ampères et  $E$  en volts.

Remarquons que, dans cet exemple,  $E$  représente une force électromotrice d'une autre nature que celle des piles ou électrolytes. C'est une résistance passive (comparable à une force de frottement); elle est égale au produit de la résistance électrique de la lampe par l'intensité du courant.

Nous verrons bientôt que la force contre-électromotrice  $E$  peut être appelée "différence de potentiel" entre les points  $A$  et  $B$ .

Le voltmètre permet évidemment une mesure directe de la force électromotrice d'un générateur quelconque ou de la force contre-électromotrice d'un récepteur. Nous allons indiquer maintenant une méthode de comparaison des forces électromotrices de deux piles.

## 59. Méthode de compensation de Poggendorf.



Une pile  $P$  de force électromotrice  $E$  est dans un circuit fermé  $APBCA$  contenant deux résistances  $r_1$  et  $r_2$ . Entre deux points  $A$  et  $B$  de ce circuit, jetons un pont  $AB$ , les deux résistances étant de part et d'autre de ce pont. Sur  $AB$ , nous plaçons un galvanomètre  $G$  et une pile  $P'$  de force électromotrice  $E' < E$ , en opposition avec  $P$  dans le circuit  $ABP'A$ .

Comment faut-il régler les résistances  $r_1$  et  $r_2$  pour que le galvanomètre reste au zéro?

Si le courant est nul dans le pont  $AB$ , tout le courant passe dans le circuit  $APBCA$ . L'énergie de  $P$  s'y partage proportionnellement aux résistances, de sorte que  $\frac{r_2 E}{r_1 + r_2}$

est la force contre-électromotrice de  $r_2$ ; elle est équilibrée par la force électromotrice  $E'$  dans le circuit  $ABP'A$ .

On a donc :

$$(76) \quad E' = \frac{r_2 E}{r_1 + r_2}$$

relation qui donne l'une des forces électromotrices  $E$  ou  $E'$  quand on connaît l'autre, pourvu qu'on connaisse aussi  $r_1$  et  $r_2$ .

Rhéocorde. - Pour éviter la détermination de ces résistances, surtout celle de  $r_1$  qui comprend la résistance intérieure de la pile  $P$  on emploie le rhéocorde de Pouillet. C'est un T en gros cuivre portant deux fils verticaux en platine  $f_1$  et  $f_2$  sur lesquels glissent des godets à mercure  $g_1$  et  $g_2$ . Chacun d'eux est formé d'un petit tube fermé aux deux extrémités par des couches que traverse le fil. On peut ainsi, aux résistances inconnues  $r_1$  et  $r_2$  qui ont fourni un premier état d'équilibre, ajouter des résistances variables  $\rho_1$  et  $\rho_2$  qui ramènent le galvanomètre au zéro. On aura donc :

$$(77) \quad \frac{E'}{E} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_2 + \rho_2}{r_1 + \rho_1 + r_2 + \rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

les valeurs des résistances  $\rho_1$  et  $\rho_2$  n'ont pas à être mesurées, car on les remplace par les longueurs de fils, lues sur des échelles divisées.

On doit remarquer que le couple le plus faible  $E'$  ne travaille pas ; il ne se modifie donc pas pendant l'expérience.

## 60 - Potentiomètre -

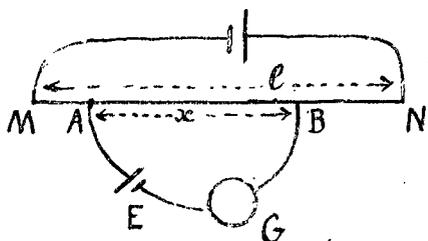
Si, à l'aide d'une force électromotrice convenable, on produit un courant d'intensité constante  $i$  dans un fil homogène  $MN$  de longueur  $l$ , la force contre-électromotrice de la résistance comprise entre deux points  $A$  et  $B$  de ce fil, distants de  $x$ , sera donnée en fonction de la force contre-électromotrice de  $l$  par l'équation :

$$(78) \quad E_x = \frac{x}{l} E_l$$

Ce dispositif, appelé potentiomètre, s'emploie pour comparer

les forces électromotrices.

En effet, si nous branchons en A et B un circuit contenant une force électromotrice E et un galvanomètre G, nous pourrions, en donnant une longueur convenable à x, compenser exactement  $E_x$  par E et ramener le galvanomètre au zéro.



En répétant la même opération sur un autre élément E' nous au-

rons :

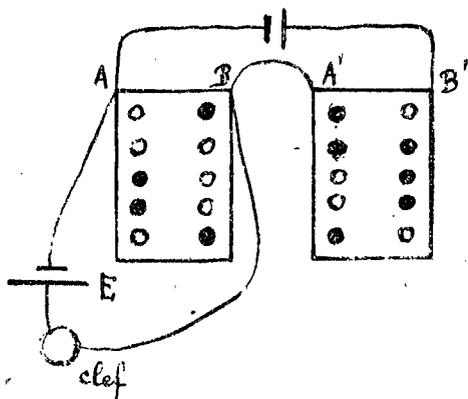
$$\frac{E}{E'} = \frac{x}{x'}$$

x et x' étant les longueurs lues sur le potentiomètre dans les deux opérations.

L'emploi du potentiomètre constitué par un simple fil présente, comme le rhéocorde, l'inconvénient d'être peu précis.

M. Bouty fait varier la force contre-électromotrice à l'aide d'un dispositif plus précis obtenu en juxtaposant deux boîtes de résistances identiques qu'on éunit en série dans le circuit d'une pile.

On enlève toutes les chevilles de l'une des boîtes, et avec les chevilles qui restent, on bouche les trous des deux boîtes en prenant soin que tous les trous libres de l'une correspondent à des trous chevillés de l'autre.



Dans ces conditions la résistance traversée par le courant est constante et égale à la résistance totale d'une boîte (10.000 ohms). Lorsqu'on enlève une cheville de la boîte R pour la porter dans la même position sur R', la résistance, et par suite, la force contre-électromotrice entre A et B, augmentent. On peut ainsi faire varier par dix-millièmes cette

force contre-électromotrice depuis zéro jusqu'à la force électromotrice de la pile.

Voici les valeurs, en volts, des forces électromotrices de quelques éléments :

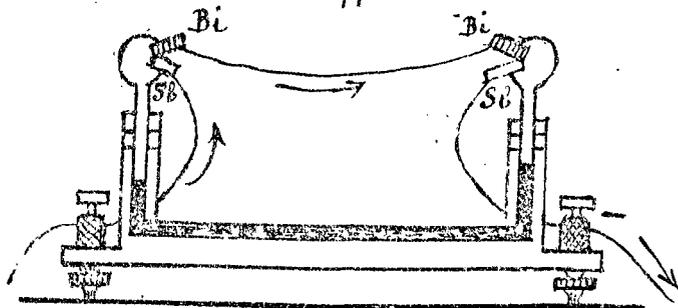
1 liquide	{	Volta	1,00	(avant polarisation)	Daniell	1,07	}	2 liquides
		Leclanché	1,47		Bunsen	1,87		
		Poggendorf	1,08		Latimer Clark	1,44		

## § 3 - Forces électromotrices de contact. Phénomènes thermo-électriques.

### 61 - Phénomène de Peltier. <sup>(1)</sup>

Peltier a découvert que lorsqu'un courant traverse un conducteur formé d'une lame de cuivre et d'une lame de bismuth, soudées bout à bout, l'échauffement est irrégulier et qu'il se produit à la soudure même, soit un échauffement plus considérable, soit un abaissement de température, suivant le sens du courant.

Ce phénomène est général; il se produit toujours, avec plus ou moins d'intensité, au contact de deux conducteurs différents.



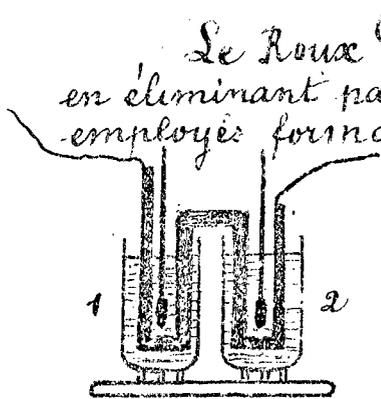
On peut mettre en évidence l'effet Peltier en enfermant simplement dans les boules d'un thermomètre différentiel de Leslie deux petits couples semblables bismuth-antimoine, opposés l'un à l'autre, dans lesquels

on fait passer un même courant. Si les deux couples s'échauffaient régulièrement en suivant la loi de Joule, l'index du thermomètre resterait fixe. On constate au contraire que la soudure dans laquelle le courant va du bismuth à l'antimoine se refroidit alors que l'autre soudure s'échauffe.

Bien entendu l'effet Joule implique le phénomène.

(1) Ann. de Ch. et de Phys. 2<sup>e</sup> série. T. LVI p. 371 (1824)

Dans l'exposé qui fait l'objet de ce paragraphe nous ne suivrons pas l'ordre historique des découvertes, habituellement adopté, mais l'ordre qui nous paraît le plus logique pour la compréhension des phénomènes.



Le Roux <sup>(1)</sup> a étudié quantitativement l'effet Peltier en éliminant par soustraction l'effet Joule. Les métaux employés formaient une sorte de fer à cheval aux extrémités duquel étaient soudées deux lames de cuivre. Chaque soudure plongeait dans un calorimètre. Les résistances  $r$  et  $r'$ , très faibles des deux parties plongées, étaient aussi peu différentes que possible. On faisait alors passer un courant d'intensité connue  $i$ . Soient  $t$  la durée de l'expérience,  $W$  l'énergie calorifique absorbée ou dégagée à chaque soudure, l'un des calorimètres mesurait

$$W_1 = ri^2t + W$$

et l'autre

$$W_2 = r'i^2t - W$$

On changeait le sens du courant et l'on avait

$$W'_1 = ri^2t - W$$

$$W'_2 = r'i^2t + W$$

$$\text{D'où} \quad 2W = W_1 - W'_1 = W'_2 - W_2$$

Le Roux a trouvé que l'énergie calorifique  $W$  est :

- 1° indépendante de l'étendue de la soudure.
- 2° proportionnelle à la quantité  $q = it$  d'électricité qui l'a traversée.

Nous posons donc  $W = \pi q$   $W$  étant la chaleur absorbée.

Le coefficient  $\pi$  de l'effet Peltier dépendant uniquement de la nature des métaux qui constituent le couple, et de la température.

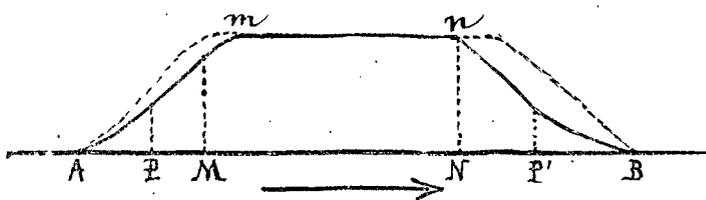
L'hétérogénéité d'un métal (trempe, écrouissage, etc... variables d'un point à l'autre d'une même barre) donne un effet Peltier notable. Pour éliminer ces influences perturbatrices, Le Roux recommençait les

(1) Ann. de Ch. et Phys. 4<sup>ème</sup> série T. X. p. 201 (1866)

expériences après retournement des barres.

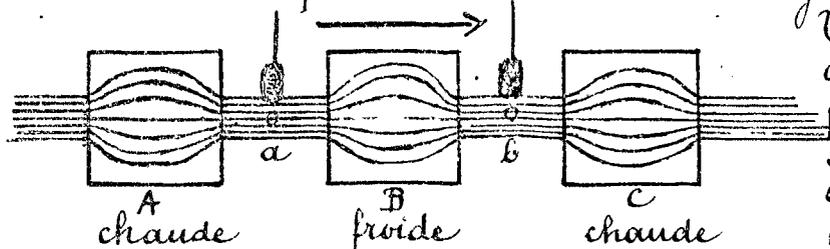
## 62. Phénomène de Thomson. <sup>(1)</sup>

W. Thomson (Lord Kelvin), guidé par des considérations thermodynamiques, devinait que le passage d'un courant dans un conducteur homogène dont toutes les parties ne sont pas à la même température donne lieu à un dégagement calorifique particulier.



Soit un conducteur métallique AB chauffé en son milieu sur une certaine longueur MN et refroidi à partir des points A et B.

La distribution des températures stationnaires est figurée par une courbe symétrique  $A m n B$ . Le passage d'un courant dans le conducteur semblerait a priori devoir l'échauffer d'une manière symétrique indépendante du sens du courant; l'expérience prouve qu'au contraire la distribution des températures cesse d'être symétrique.



Voici l'expérience de W. Thomson. Un paquet de fils isolés serrés par des noeuds en a et b s'épanouit dans trois cuves ABC,

les deux extrêmes renfermant de l'eau chaude et la cuve intermédiaire de l'eau froide; des thermomètres placés en a et b indiquent la température des fils, et par suite de la symétrie de la disposition, leurs indications sont voisines lorsque le régime stationnaire est atteint.

Si l'on fait passer un courant dans le sens AC, il est dirigé, en a, de la partie chaude vers la partie froide, et en b, de la partie froide vers la partie chaude. On observe, dans ces conditions, des différences de températures entre a et b qui changent de sens avec le sens du courant; dans le fer, sur chaque élément de circuit,

(1) W. Thomson, Ann. de Ch. et de Phys. 3<sup>e</sup> série t. LIV, p. 105 (1856).

il se dégage plus de chaleur que ne l'indique la loi de Joule, quand le courant va des parties froides aux parties chaudes; le transport est négatif.

Dans le cuivre, au contraire, le transport est positif; le courant véhicule de la chaleur à partir de la source chaude, du froid à partir de la source froide.

L'effet Thomson a été étudié par Le Roux, dont les expériences ont établi que l'effet est proportionnel à l'intensité du courant.

On peut considérer deux tranches voisines d'un même métal, dont les températures sont  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ , comme deux corps très peu différents et en contact, qui, lors du passage du courant  $i$ , sont le siège d'un effet Peltier infinitésimal. Nous pouvons admettre qu'entre les deux tranches il disparaît une quantité de chaleur proportionnelle à  $q = it$  et à un coefficient de Peltier  $d\pi$

$$(79) \quad d\pi = H d\theta$$

$H$  étant positif, lorsqu'il y a absorption de chaleur si le courant est dirigé dans le sens des températures croissantes.

La grandeur  $H$  est une certaine fonction de la température, caractéristique de la matière constitutive du conducteur.

Thomson l'a appelée chaleur spécifique d'électricité: c'est en effet  $\frac{dW}{d\theta}$  pour  $q = 1$

L'énergie absorbée par cet effet entre deux sections aux températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est:

$$(80) \quad W = it \int_{\theta_1}^{\theta_2} H d\theta$$

## 63. Force électromotrice de contact.

### Lois de Volta.

Nous allons interpréter les effets Peltier et Thomson. Quelle est la signification des grandeurs  $\pi$  et  $H$  ?

La soudure qui se reproduit dans l'effet Peltier, cède de

L'énergie au circuit ; elle sert de générateur ; celle qui s'échauffe sert de récepteur.

La soudure est donc le siège d'une force électromotrice égale au quotient  $\frac{W}{q}$  de l'énergie par le déplacement électrique, c'est à dire égale à  $\Pi$ . Le sens de cette force électromotrice de contact dans la soudure qui se refroidit est le sens du courant.

De même, dans l'effet Thomson, il se produit entre deux couches infiniment voisines une force électromotrice  $H d\theta$ . Une notation commode consiste à représenter par  $A|B$  la valeur algébrique de la force électromotrice de contact entre les métaux A et B, comptée de A vers B, de sorte que  $A|B = -B|A$ . Elle est positive si la surface de contact se refroidit lorsque le courant passe de A à B.

La force électromotrice de contact est, nous l'avons déjà dit, indépendante de l'intensité du courant qui traverse la soudure. On peut donc penser qu'elle a lieu même à la limite, pour  $i = 0$  ; c'est bien ce qui se produit et dès 1802, longtemps avant la découverte de Peltier, Volta avait constaté la "différence de tension électrique" de deux métaux en contact.

Nous n'avons pas encore étudié les phénomènes d'électricité statique, mais personne n'ignore les phénomènes élémentaires tels que l'électrisation par frottement, l'existence de charges de signes opposés.

Par exemple on touche avec un bâton de résine frotté au moyen d'une peau de chat un pendule isolé ; après le contact la résine repousse le pendule. Au contraire, le pendule électrisé par contact avec la résine est attiré par un bâton de verre qui a été frotté avec du drap. On dit que le verre a une charge positive, la résine une charge négative. Deux corps chargés d'électricités de même nom se repoussent ; deux corps chargés d'électricités de noms contraires s'attirent.

Ajoutons que les signes que nous avons attribués aux déplacements électriques ou quantités d'électricité (n° 28) ainsi qu'aux pôles d'une pile sont en accord avec les signes donnés aux charges en électrostatique. Si, par exemple, on met le pôle négatif d'une pile en communication avec le sol par un fil conducteur, le pôle positif

possède les propriétés des corps chargés "d'électricité vitreuse" c'est à dire chargés positivement comme le verre frotté.

Volta a découvert que lorsque deux métaux sont mis au contact l'un de l'autre, ils se chargent, l'un d'électricité positive, l'autre d'électricité négative.

Parmi les expériences réalisées par Volta citons la suivante : on prend deux disques formés de métaux différents et supportés par des manches isolants, on les applique l'un contre l'autre, puis on les sépare. On constate, en les approchant d'un électroscope, que l'un a pris une charge positive, l'autre une charge négative.

Volta disait qu'il se produit, entre deux métaux au contact, une "différence de tension électrique", on dit aujourd'hui "différence de potentiel", et, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, la différence de potentiel est ce que nous avons appelé jusqu'à présent "force électromotrice".

Les lois établies par Volta sont les suivantes :

1°/ Loi de la force électromotrice de contact . -

Il se produit au contact de deux métaux une force électromotrice qui dépend uniquement de la nature de ces métaux et de la température. Cette force électromotrice est indépendante de leurs dimensions, de leur forme, de l'étendue de leurs surfaces au contact et de la charge totale qu'on peut donner à l'ensemble du système métallique.

2°/ Loi de la chaîne . -

Lorsque deux métaux sont réunis par une chaîne métallique quelconque, dont tous les contacts sont à la même température, ils présentent la même différence de potentiel que s'ils étaient réunis directement, c'est à dire que, dans une chaîne, la somme algébrique des forces électromotrices de contact est égale à la force électromotrice de contact des deux métaux extrêmes :

$$A|B + B|C + \dots + K|L = A|L$$

$$D'ailleurs comme  $A|L = -L|A$$$

$$(81) \quad A/B + B/C + \dots + K/L + L/A = 0$$

D'où cet autre énoncé : La somme algébrique des forces électromotrices de contact d'une chaîne fermée à température uniforme est nulle, et dans une pareille chaîne il n'y a pas de courant. (1)

Cette loi exprime, en somme, l'impossibilité du mouvement perpétuel : elle était donc évidente a priori.

La loi de la chaîne montre qu'on peut, intercaler dans le circuit d'une pile tels appareils qu'on veut, résistance, galvanomètre ... etc, sans changer la force électromotrice du circuit. Pourvu que les contacts soient à la même température, c'est toujours la force électromotrice de la pile.

Mais pourquoi celle-ci n'est-elle pas nulle ? La loi de la chaîne semble l'exiger. S'appliquerait-elle seulement au contact des métaux, comme Volta le croyait d'ailleurs ? Non, elle s'applique aussi aux contacts des métaux avec les liquides et des liquides entre eux, mais seulement quand il n'y a pas réaction chimique.

Au contraire, lorsqu'il y a réaction, celle-ci, étant productrice d'énergie, trouble l'équilibre exprimé par la loi de la chaîne. Là est l'explication de la pile chimique ; elle a échappé à Volta qui plaçait toute la force électromotrice du circuit au contact des métaux.

Loi de Magnus. — L'effet Thomson nous a montré que deux parties d'un même métal se comportent comme des conducteurs différents si elles sont à des températures différentes. La loi de la chaîne doit donc s'appliquer à un métal homogène ; elle prend alors la forme que voici :

La force électromotrice entre deux points d'un même métal ne dépend que des températures de ces deux points et non des températures des points intermédiaires.

Cette loi se déduit du fait expérimental suivant découvert par Magnus : si les deux extrémités, à la même température, d'un métal homogène sont reliées

(1) A-C Becquerel Ann. de Ch. et de Phys. 1829.

aux bornes d'un galvanomètre, celui-ci ne décele aucun courant, quelles que soient les températures des divers points du métal.

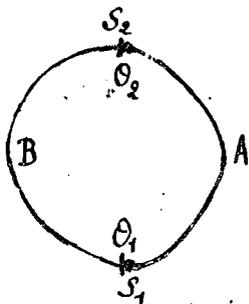
Les mesures de l'effet Peltier donnent les valeurs des forces électromotrices de contact entre les divers métaux. En électrostatique nous verrons d'autres méthodes de mesure de ces forces électromotrices.

Voici quelques résultats obtenus par Le Roux (effet Peltier)

Cuivre   antimoine	+	0,0565	volt
Cuivre   fer	+	0,0301	
Cuivre   cadmium	+	0,0053	
Cuivre   zinc	+	0,0045	
Cuivre   maillechort	-	0,0287	
Cuivre   bismuth	-	0,2229	

Les signes + ou - indiquent que la soudure se refroidit ou s'échauffe quand le courant va du cuivre à l'autre métal, conformément à la convention de signe indiquée plus haut.

## 64. Variation de la force électromotrice de contact avec la température. Courants thermo-électriques.



La force électromotrice de contact est fonction de la température.

Formons un circuit avec deux métaux A et B, puis portons les contacts  $S_1$  et  $S_2$  à deux températures différentes  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Les forces électromotrices de contact, en  $S_1$  et  $S_2$ , n'ayant plus la même grandeur,

ne s'équilibrent plus.

De même si l'on envisage l'effet Thomson entre  $S_1$  et  $S_2$  pour le métal A, il se produit une force électromotrice

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} H_A d\theta \quad \text{et, entre } S_2 \text{ et } S_1, \text{ pour le métal B, une force } \int_{\theta_2}^{\theta_1} H_B d\theta,$$

Les grandeurs  $H_A$  et  $H_B$  de l'effet Thomson à une même température  $\theta$  n'étant pas les mêmes pour les deux métaux, les forces électromotrices Thomson ne s'équilibrent pas.

On obtient donc, dans le cas général, une force électromotrice résultante non nulle, et le circuit est parcouru par un courant. Le couple est un générateur thermique dont la force motrice provient de la chute de température entre les deux contacts.

Si l'on abandonne le circuit à lui-même, en cessant de chauffer le contact  $S_1$  et de refroidir le contact  $S_2$ , il est bien certain que le courant doit tendre à s'annuler, puisqu'on ne fournit plus d'énergie.

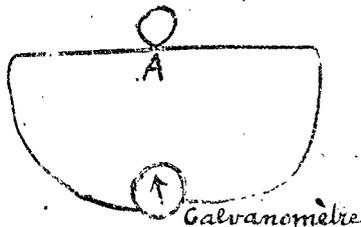
Le courant doit donc faire constamment passer de la chaleur de la soudure chaude à la soudure froide, c'est à dire que le sens du courant est tel qu'il détermine, par effet Peltier, un refroidissement de la soudure chaude et un réchauffement de la soudure froide. C'est bien ce qu'a observé Edmond Becquerel (1)

Pareillement, l'effet Thomson produit par le courant thermo-électrique lui-même, doit tendre à égaliser les températures.

Il résulte de là, que pour entretenir le courant, il est nécessaire, d'une part de fournir de la chaleur à la soudure chaude, d'autre part d'enlever de la chaleur à la soudure froide.

La découverte des phénomènes thermo-électriques est due à Seebeck (1821). Ce physicien forma un circuit fermé avec un barreau de bismuth et une lame de cuivre soudés l'un à l'autre, et reconnut qu'en chauffant une des soudures, le circuit est parcouru par un courant allant du bismuth au cuivre à travers cette soudure.

Peu de temps après (1823), A-C Becquerel a montré que si l'on met en contact deux parties d'un même métal à des températures différentes il se produit un courant. L'expérience peut être réalisée sous la forme suivante: On fait une boucle avec un fil de platine homogène de manière que deux parties du fil se touchent en A; il suffit de chauffer



(1) Ann. de Ch. et de Phys. 3<sup>e</sup> série t. XX. p. 53 (1847)

le fil d'un côté de la boucle pour obtenir un courant. La production de ce courant est liée à l'effet Thomson seul, tandis que la production du courant par échauffement de la soudure de deux métaux est liée à la fois à l'effet Peltier et à l'effet Thomson.

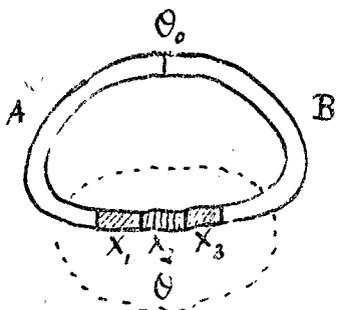
## 65. Lois de A-C Becquerel<sup>(1)</sup>

A-C Becquerel a établi expérimentalement les lois fondamentales des courants thermo-électriques.

1°/ Loi des températures successives. — Pour un couple donné, la force électromotrice obtenue en portant les soudures aux températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est la somme des forces électromotrices qu'on obtient en portant les soudures aux températures  $\theta_1$  et  $\theta$ , puis  $\theta$  et  $\theta_2$  ( $\theta_1 < \theta < \theta_2$ )

$$(82) \quad E_{\theta_1}^{\theta} + E_{\theta}^{\theta_2} = E_{\theta_1}^{\theta_2}$$

2°/ Loi des métaux intermédiaires. — Si deux métaux



A et B sont séparés dans un circuit par un ou plusieurs métaux intermédiaires maintenus à la même température  $\theta$ , la force électromotrice est la même que si les deux métaux étaient mis directement en contact et la soudure portée à la température  $\theta$ .

Cette loi est très importante.

Elle montre qu'en intercalant un gal-

vanomètre dans un circuit on n'introduit pas de force électromotrice.

De plus, quand on veut constituer un couple thermoélectrique, il n'est pas toujours possible de souder directement deux métaux; ou bien, si on peut le faire, on n'obtient pas le contact parfait sur toute la surface de raccord, ce qui augmente la résistance. La loi montre qu'on peut souder deux métaux avec un métal intermédiaire conve-

(1) A-C Becquerel. ann. de Phys. et de Ch. 2<sup>e</sup> série T. XXXI, p. 381 et T. XLII p. 355 (1826-1829)

naturellement choisi :

3°/ Loi des métaux successifs. — Si l'on forme trois éléments en associant deux à deux trois métaux différents A, B et C, on a :

$$(83) \quad E_{\theta_0}^{\theta} (A, B) + E_{\theta_0}^{\theta} (B, C) = E_{\theta_0}^{\theta} (A, C)$$

Cette loi est une conséquence de la loi des tensions de Volta. On a en effet (n° 64) :

$$(84) \quad E_{\theta_0}^{\theta} (A, C) = (A|C)_{\theta} - (A|C)_{\theta_0}$$

et d'après la loi de Volta, on a à une température quelconque :

$$A|C = A|B + B|C$$

Donc (84) s'écrit :

$$E_{\theta_0}^{\theta} (A, C) = (A|B)_{\theta} - (A|B)_{\theta_0} + (B|C)_{\theta} - (B|C)_{\theta_0} = E_{\theta_0}^{\theta} (A, B) + E_{\theta_0}^{\theta} (B, C)$$

On verrait aussi que les deux premières lois sont des conséquences de la loi de Volta et de la loi de Magnus.

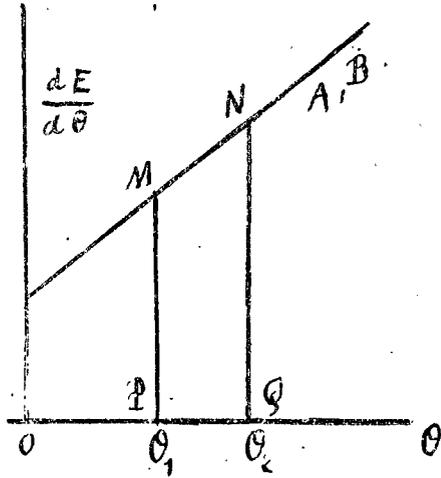
La loi des métaux successifs nous montre qu'il suffit d'étudier tous les couples formés par les divers métaux avec l'un d'entre eux pour pouvoir évaluer la force électromotrice produite par un couple constitué par deux métaux quelconques.

On a choisi comme métal fixe de comparaison le plomb, qui ne s'érode pas, et qui garde ses propriétés pour une même température, quelles que soient les températures par lesquelles il a passé, et qui ne présente pas d'effet Thomson.

## 66. Diagramme thermo-électrique de Tait.

Tait a représenté les propriétés d'un couple A B au moyen de courbes construites en portant en abscisses les températures, et telles que l'aire M N Q P comprise entre deux ordonnées  $\theta_1$  et  $\theta_2$  représente la force électromotrice

du couple, quand ses soudures sont aux températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .



$$\text{aire } MNQP = E_{\theta_1}^{\theta_2}(A, B)$$

La possibilité de ce mode représentatif résulte de la première loi de Becquerel, qui, appliquée à des différences de température infinitésimales, permet d'écrire :

$$E_{\theta_1}^{\theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{dE}{d\theta} d\theta$$

Le quotient  $\frac{dE}{d\theta} = P$  de la force électromotrice  $E_{\theta}^{\theta+d\theta} = dE$

par la différence  $d\theta$  a reçu le nom de pouvoir thermo-électrique.

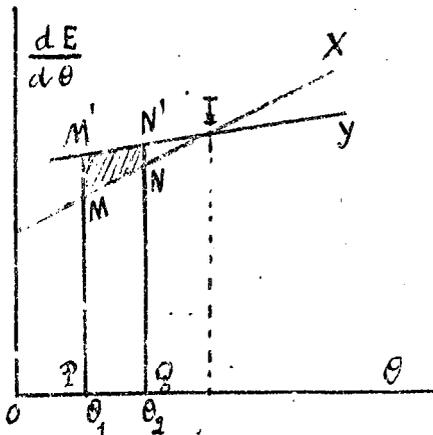
L'expérience montre que ces courbes se confondent pratiquement avec des droites. Le pouvoir thermo-électrique, qui n'est autre chose que l'ordonnée des courbes de l'ait, est donc fonction linéaire de  $\theta$ .

On appelle diagramme thermo-électrique l'ensemble des droites représentant le pouvoir thermo-électrique de tous les métaux rapportés au plomb. On en déduit la force électromotrice d'un couple quelconque.

Soit en effet X la droite relative à un métal X ; la force électromotrice du couple X, Pb quand les soudures sont aux températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est

$$E_{\theta_1}^{\theta_2}(X, Pb) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{dE}{d\theta} d\theta = \text{aire } MNQP$$

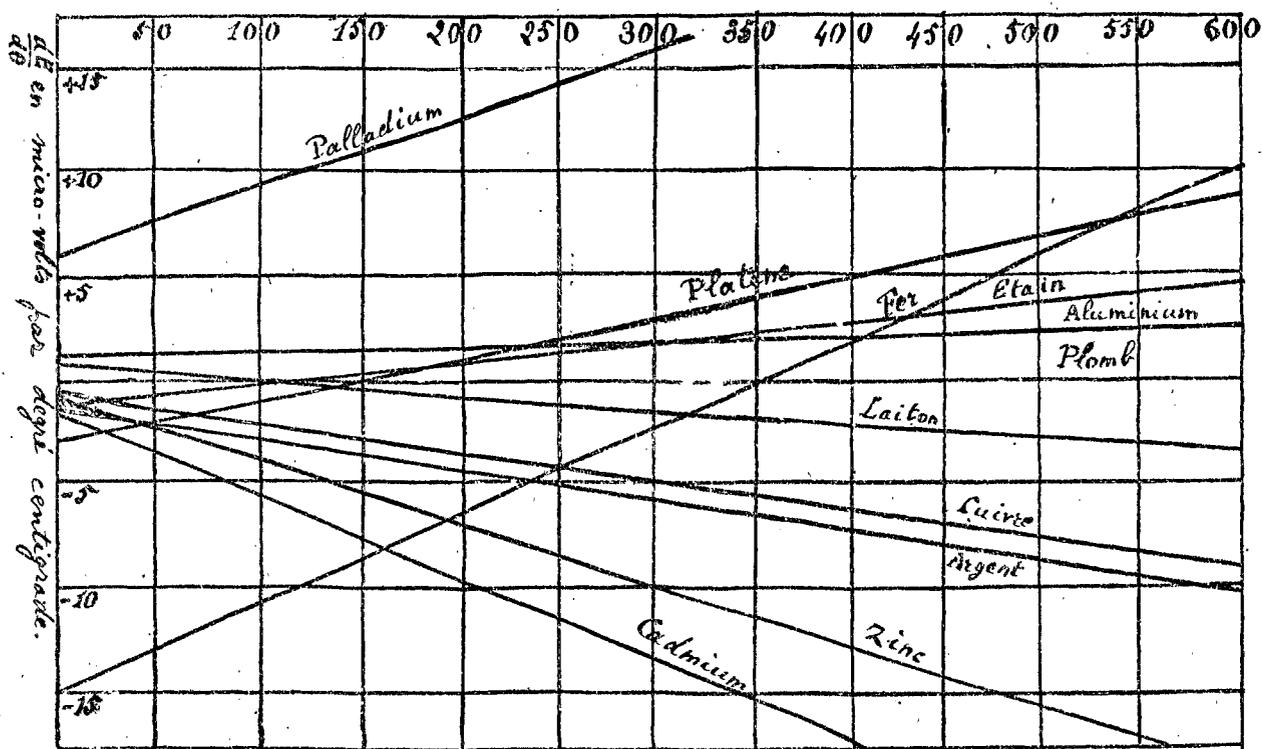
et la force électromotrice du couple X Y est :



$$E_{\theta_r}^{\theta_2}(x, y) = E_{\theta_r}^{\theta_2}(x, Pb) - E_{\theta_r}^{\theta_2}(y, Pb) = \text{aire } M'N'NM.$$

On voit sur la figure que la force électromotrice change de sens quand l'ordonnée de la température moyenne passe d'un côté à l'autre de l'ordonnée du point d'intersection I des droites correspondant aux deux métaux. Pour cette raison, le point I qui correspond à un pouvoir thermo-électrique nul s'appelle point d'inversion ou point neutre des deux métaux. La force électromotrice est nulle quand la température moyenne des deux soudures est la température du point d'inversion.

Le diagramme ci-dessous indique les résultats obtenus par Lait.



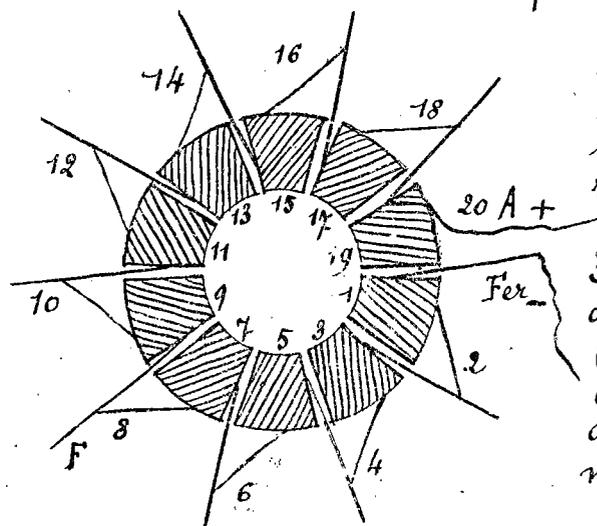
Températures en degrés centigrades

Le couple bismuth antimoine est celui qui donne la plus grande force électromotrice parmi les couples formés de métaux purs (ordre de 50 millivolts pour une différence de température de 100°); mais certains alliages permettent d'obtenir une force électromotrice de 5 à 8 fois plus grande.

## 67 - Piles thermo-électriques -

Les couples thermo-électriques présentent le grand avantage d'avoir une résistance intérieure négligeable. Les piles dont se servait Pouillet étaient, comme nous l'avons déjà dit, composées de bismuth et de cuivre.

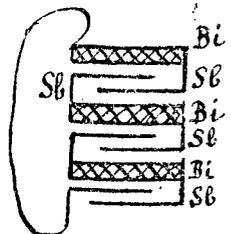
Pile Clamond (1874). — Cette pile est composée de fer et d'un alliage zinc-antimoine. Les soudures impaires sont disposées autour d'un



conduit central et chauffées par un brûleur Bunsen. Les soudures paires, placées à la surface de l'appareil, se refroidissent par rayonnement.

La force électromotrice de 30 couples en tension est égale à celle d'un couple Bunsen. Cet appareil, commode à cause de sa constance et de sa durée, a été utilisé en galvanoplastie.

Pile de Melloni. — Des éléments bismuth-antimoine sont réunis en tension, les soudures paires d'un côté, les soudures impaires de l'autre.



Le courant mesure la différence  $\theta_1 - \theta_2$  des températures des deux faces, car pour de faibles différences l'intensité est sensiblement proportionnelle à  $\theta_1 - \theta_2$ .

Cette pile a été utilisée pour la mesure de l'énergie rayonnante. On augmente alors la sensibilité en plaçant les soudures dans le vide. La raréfaction de l'air diminue la vitesse de refroidissement et les effets dans le vide extrême (pression  $0^{\text{mm}} 0001$ ) sont 6 à 7 fois supérieurs à ceux que donne le même couple dans l'air à la pression normale.

Couple Le Châtelier. — On emploie en métallurgie un couple dû à M. Le Châtelier, formé par deux fils en platine pur et platine rhodié ou iridié qui convient très bien pour l'évaluation des températures jusque vers  $1200^{\circ}$ .

On peut également employer ces couples pour la mesure des températures très basses ( $-200^{\circ}$ ). Le point neutre du couple platine - platine rhodié est très élevé et les indications sont très sensiblement proportionnelles aux températures.

Aiguille Becquerel. — Si l'une des soudures est en forme d'aiguille et l'on peut obtenir, par la méthode suivante, la température d'un point déterminé.

## 68. Thermomètre électrique de A.-C. Becquerel

La méthode de A.-C. Becquerel s'applique particulièrement à la détermination des températures voisines de la température ordinaire en des points d'un accès difficile, ou même à l'intérieur des tissus des êtres vivants. Le couple thermo-électrique est par exemple un couple fer-cuivre, ou fer-platine; l'une des soudures, en forme d'aiguille est placée au point dont on veut déterminer la température  $X$ .

Si l'autre soudure qui est, à la disposition de l'observateur n'est pas à la température  $X$ , un galvanomètre intercalé dans le circuit décele un courant.

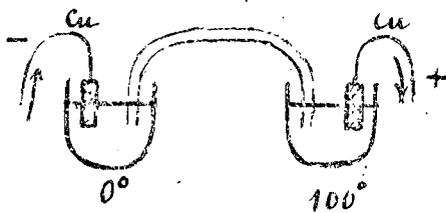
L'observateur réchauffe alors ou refroidit la seconde soudure de manière à annuler le courant, et la température qui indique à ce moment un thermomètre en contact avec la 2<sup>e</sup> soudure (la soudure et le thermomètre, étant par exemple, dans un bain de mercure) est précisément la température  $X$  qu'on veut déterminer. Il est, bien entendu nécessaire que les températures des soudures soient toutes deux soit inférieures, soit supérieures à la température neutre.

Avec un galvanomètre sensible, on peut avoir ainsi les températures au centième de degré. Cette méthode a été appliquée à des recherches physiologiques et, au Muséum d'Histoire Naturelle, à la détermination des

températures à diverses profondeurs sous le sol; elle a permis d'étudier la propagation de la chaleur sous le sol et de vérifier la théorie de Fourier (Henri Bequere)

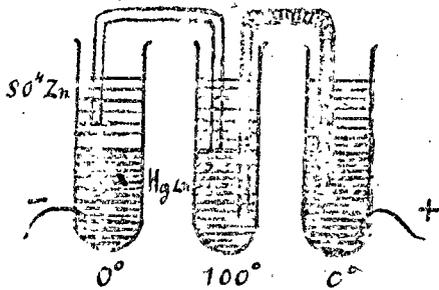
## 69. Phénomènes thermo-électriques au contact des liquides.

Des effets thermo-électriques intenses peuvent être obtenus au contact des liquides: soient, par exemple, deux vases contenant la même dissolution de sulfate de cuivre et communiquant par un siphon également rempli de la même dissolution. Si l'on plonge dans chacun d'eux une lame de cuivre pur, on n'observe aucun courant tant que la température est uniforme.



S'il n'en est pas ainsi, on constate l'existence d'un courant qui va du vase chaud au vase froid par le circuit extérieur. Entre  $0^\circ$  et  $100^\circ$  la force électromotrice entre le cuivre et le sulfate de cuivre est 0 volt 06 c'est à dire six fois plus grande que la force électromotrice du couple bismuth-antimoine.

On réalise également un couple énergique qui peut être employé comme étalon de force électromotrice par le contact d'un amalgame de zinc au  $\frac{1}{2000}$  et d'une dissolution saturée de sulfate de zinc.



Les connexions sont réalisées à l'aide de siphons comme l'indique la figure et la force électromotrice correspondant à  $(0^\circ - 100^\circ)$  est 0,1167 volt.

## 70 - Théorie thermodynamique des phénomènes thermo-électriques.

Considérons le système formé par un couple thermo-électrique entouré de sources de chaleur maintenant à des températures constantes les soudures malgré les effets Peltier, et les autres parties du circuit, malgré les effets Thomson et la chaleur de Joule.

Supposons que le circuit contenant ce couple soit fermé par un moteur électrique  $M$  tournant de façon à donner une force électromotrice  $-E$  opposée à celle du couple. On peut, en réglant la vitesse du moteur, donner à  $E$  la valeur qu'on désire, et la rendre à volonté soit inférieure soit supérieure à celle du couple thermo-électrique.

Dans le premier cas, la machine  $M$  produit du travail et consomme une portion  $Eq$  de l'énergie du courant, en désignant par  $q$  la quantité d'électricité qui a parcouru le circuit pendant le temps considéré. Dans le second cas, le courant a le sens commandé par la machine  $M$  qui fonctionne comme génératrice et fournit une énergie  $Eq$ ; dans ce cas, les échanges de chaleur avec les sources, dus aux effets Peltier et Thomson, sont changés de signe puisque le courant est inversé, mais il n'en est pas de même de la chaleur de Joule, que les sources doivent toujours enlever pour maintenir la température constante; l'effet Joule est essentiellement irréversible.

L'effet Joule d'une part, les frottements de la machine  $M$  d'autre part, empêchent donc les transformations du système considéré d'être parfaitement réversibles au sens thermodynamique.

Mais on peut, pour les raisonnements, supposer un moteur idéal sans frottements, et on peut pour une intensité de courant infiniment petite, négliger l'effet Joule qui est un infiniment petit du second ordre ( $ri^2$ ), alors que les chaleurs Peltier et Thomson sont du premier ordre (proportionnelles à  $i$ ).

Ainsi en opposant au couple une machine sans frottements tournant à une vitesse telle que

sa force électromotrice  $-E$  soit infiniment voisine de celle du couple, on a un système réversible auquel on peut appliquer les principes de la thermodynamique.

1°/ Exprimons la conservation de l'énergie (principe de l'équivalence): le travail  $W$  fourni par le moteur est égal à l'énergie calorifique  $Q$  fournie au système par les sources qui maintiennent les températures constantes; on a donc:

$$(85) \quad Q = W = Eq = \pi_2 q - \pi_1 q + q \int_{T_1}^{T_2} H dT + q \int_{T_2}^{T_1} H' dT$$

en appelant  $\pi_2$  et  $\pi_1$  les forces électromotrices de Peltier pour les températures absolues  $T_2$  et  $T_1$  des soudures et supposant  $T_2 > T_1$ ,  $H$  et  $H'$  les coefficients de l'effet Thomson relatifs aux deux métaux pour la température absolue  $T$ .  
Après division par  $q$ , l'équation précédente devient:

$$(86) \quad E = \pi_2 - \pi_1 + \int_{T_1}^{T_2} (H - H') dT$$

et exprime l'équilibre des forces électromotrices,  $E$  étant (au signe près) aussi bien la force électromotrice du couple thermo-électrique que celle de la machine  $M$ , puisque les deux forces ne diffèrent que d'un infiniment petit.

2°/ Exprimons maintenant le principe de Carnot, sous la forme du théorème de Clausius.

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{puisque les transformations}$$

du système sont réversibles

$$(87) \quad \frac{\pi_2}{T_2} - \frac{\pi_1}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{H - H'}{T} dT = 0$$

Pour tirer de ces équations une relation utile, supposons que les températures  $T_1$  et  $T_2$  soient infiniment voisines et posons:

$$T_1 = T \quad T_2 = T + dT \quad \pi_2 - \pi_1 = d\pi \quad E = dE$$

$$\frac{\pi_2}{T_2} - \frac{\pi_1}{T_1} = d\left(\frac{\pi}{T}\right) \quad \text{Les équations (86) et (87) prennent}$$

la forme suivante :

$$(88) \quad \frac{d\pi}{dT} + H - H' = \frac{dE}{dT}$$

$$(89) \quad \frac{1}{dT} d\left(\frac{\pi}{T}\right) + \frac{H-H'}{T} = 0$$

et cette dernière équation s'écrit :

$$(90) \quad \frac{d\pi}{dT} - \frac{\pi}{T} + H - H' = 0$$

En retranchant membre à membre (90) de (88) il vient :

$$(91) \quad \frac{\pi}{T} = \frac{dE}{dT} \quad \text{ou} \quad \pi = TP$$

relation remarquable, établie par Lord Kelvin, donnant la valeur de la force électromotrice Peltier en fonction du pouvoir thermo-électrique  $P$  des deux métaux pour la température absolue  $T$ .

Cette relation a été vérifiée expérimentalement par MM. Bellati et Bouty. La vérification a une grande importance car elle montre que les principes fondamentaux de la Thermodynamique s'appliquent aux phénomènes électriques.

On voit aussi que l'effet Peltier s'annule et change de signe avec  $\frac{dE}{dT}$  c'est à dire au point neutre ; ce fait a été vérifié par Le Roux.

En portant dans la relation (89) la valeur de  $\pi$  donnée par (91), on obtient :

$$(92) \quad H - H' = -T \frac{d^2E}{dT^2} = -T \frac{dP}{dT}$$

L'expérience montrant que le pouvoir thermo-électrique  $P$  est une fonction linéaire de la température,  $\frac{dP}{dT}$  est une constante, et par conséquent la différence des coefficients de l'effet Thomson pour une même température est proportionnelle à la température absolue.

Remarquons que si l'effet Thomson n'existait pas, on aurait d'après (90)  $\frac{\pi}{T} = \frac{d\pi}{dT}$ ,  $\pi$  serait proportionnel à  $T$ ; la force électromotrice d'un couple serait proportionnelle à la différence des températures des soudures. C'est l'imexactitude de cette conclusion qui a conduit Sir W. Thomson à découvrir la force  $HdT$ .

La simple inspection du diagramme de Lat donne la force électromotrice Peltier pour un couple (A, Pb) : il suffit de multiplier l'ordonnée par la température absolue correspondante.

Le même diagramme donne aussi immédiatement le coefficient Thomson ou chaleur spécifique d'électricité d'un métal quelconque. En effet, ce coefficient étant nul pour le plomb, il faut faire  $H' = 0$  dans la formule (92);  $H$  est alors produit du coefficient angulaire, change de signe, de la droite de Lat, par la température absolue.

## 71 - Application des principes de la thermodynamique aux piles réversibles. (1)

L'effet Peltier et l'effet Thomson sont des phénomènes généraux qui se produisent dans un circuit quelconque. L'effet Peltier se manifeste, dans le circuit d'une pile, à toutes les surfaces de contact.

D'une façon générale, si une source d'énergie entretient un courant dans un circuit, et dépense la quantité d'énergie  $W$  pour entretenir pendant une seconde le courant d'intensité  $i$ , on a pendant le temps  $dt$ :

$$(93) \quad W dt = Ri^2 dt - \sum \pi i dt$$

en réunissant dans un même terme  $\sum \pi i dt$  l'énergie absorbée par les effets Peltier aux différents contacts et par les effets Thomson.

Pour le circuit d'une pile cette équation exprime

(1) Helmholtz, Journal de Physique 2<sup>e</sup> série t III p. 396. (1884)

que la chaleur totale dégagée dans le circuit (second membre) est égale à l'énergie due aux réactions chimiques qui entretiennent le courant, fait qui a été expérimentalement vérifié par Favre (n° 21).

Soit  $E$ , la force électromotrice de la pile, on a  $E = Ri$  et l'équation précédente s'écrit :

$$(94) \quad E = W + \sum \pi$$

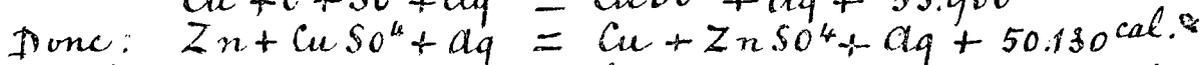
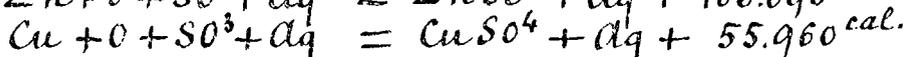
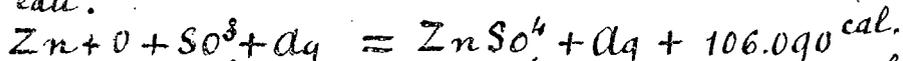
La force électromotrice doit donc, dans le cas général, différer de la valeur  $W$  qu'on peut calculer à partir des données de la thermochimie. (1)

Favre avait constaté avec la pile de Volta (n° 21) qu'une partie de l'énergie chimique se dégage en pure perte, en ce sens qu'on la retrouve en chaleur dans la pile; le reste seulement forme l'énergie voltaïque. Il en est ainsi dans les piles non réversibles.

Dans les piles réversibles, c'est à dire telles que le passage d'une même quantité d'électricité dans un sens ou dans l'autre détermine des réactions rigoureusement inverses, le terme  $\sum \pi$  est tantôt positif et tantôt négatif, de sorte que la force électromotrice est tantôt supérieure, tantôt inférieure à  $W$ .

(1) Voici un exemple de calcul de  $W$ . (Pile de Daniell).

La thermochimie donne pour la formation des sulfates de Zn et de Cu, à partir de Zn, Cu, O et  $SO^3$  en présence d'une assez grande quantité d'eau :



La précipitation d'un atome bivalent de Cu par un atome bivalent Zn dégageant 50.130 cal., chaque valence rompue dans la pile correspond à la consommation d'une énergie chimique de 25.065 cal.

D'autre part la rupture d'une valence correspond à la circulation de 96.500 coulombs et une petite calorie vaut 4.183 joules, on a par suite

$$W = \frac{4.183}{96.500} \times 25.065 = 10^{-6} \times 43,34 \times 25065 = 1,086 \text{ volts}$$

L'expérience donne  $E = 1,096$  à  $0^\circ$ ; la différence  $E - W = \sum \pi$

Ce terme  $\Sigma \pi$  a été mis par Helmholtz sous une forme remarquable, dans le cas où le phénomène électrochimique est réversible.

Formule d'Helmholtz — Considérons deux éléments de pile  $P_1$  et  $P_2$  semblables et réversibles. Associons les en opposition l'un à l'autre, le premier étant maintenu à la température absolue  $T_1$  par une source chaude et le second à la température  $T_2$  par une source froide. Imaginons dans le circuit une machine électromagnétique sans frottements qui pourra, à volonté, produire ou absorber du travail. L'ensemble des deux piles étant considéré comme générateur et la machine comme récepteur, le travail produit pour chaque quantité d'électricité  $it = 1$  est  $E_1 - E_2$ ; d'autre part la source chaude doit fournir  $\Sigma \pi$  à la pile chaude  $P_1$  pour maintenir sa température égale à  $T_1$ . Les énergies chimiques mises en jeu dans les deux piles étant égales et opposées, nous avons affaire ici à une machine thermique réversible fonctionnant entre les températures  $T_1$  et  $T_2$ .

Le rendement  $\frac{E_1 - E_2}{\Sigma \pi_1}$  de cette machine doit donc être égal au rendement  $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$  du cycle de Carnot.

Supposons une différence de température infiniment petite et posons

$$T_2 = T \quad T_1 - T_2 = dT \quad E_1 - E_2 = dE \quad \Sigma \pi_1 = \Sigma \pi$$

On a :

$$\frac{dE}{\Sigma \pi} = \frac{dT}{T}$$

ou (95)  $\Sigma \pi = T \frac{dE}{dT}$

et (96)  $E = W + T \frac{dE}{dT}$  (formule d'Helmholtz)

On voit que, suivant que la force électromotrice (ou différence de potentiel aux bornes en circuit ouvert) croît ou décroît avec la température, la force électromotrice d'une pile réversible est supérieure ou inférieure à celle

qu'on calculerait d'après la chaleur dégagée par la réaction chimique.

La formule d'Helmholtz a été vérifiée par divers expérimentateurs et en particulier par M. Jahn<sup>(1)</sup>.  
Voici quelques uns des résultats obtenus.

Nature de l'élément	$\frac{dE}{dT}$ en volts par degré	$\Sigma \pi 10^{-8}$	$W 10^{-8}$	$E_c$ (en volts) à la température de 0°	
				Calculée	Observée
$\left. \begin{array}{l} \text{Cu. Cu SO}_4 + 100 \text{ H}_2\text{O} \text{ ---} \\ \text{Zn. Zn SO}_4 + 100 \text{ H}_2\text{O} \text{ ---} \end{array} \right\}$ (Daniell)	+0,000034	+0,0093	1,0882	1,0975	1,0962
$\left. \begin{array}{l} \text{Ag. Ag. Cl} \text{ ---} \\ \text{Zn. Zn. Cl}^2 + 25 \text{ H}_2\text{O} \text{ ---} \end{array} \right\}$	-0,000202	-0,0552	1,0239	0,9687	0,9740
$\left. \begin{array}{l} \text{Ag. Ag}^2 (\text{Az O}_3)^2 + 100 \text{ H}_2\text{O} \\ \text{Cu. Cu}^2 (\text{Az O}_3)^2 + 100 \text{ H}_2\text{O} \end{array} \right\}$	-0,000708	-0,1937	0,6524	0,4587	0,4580

Pour l'élément Daniell, les forces de contact n'ont pas d'influence bien sensible, mais l'effet est considérable sur le dernier élément.

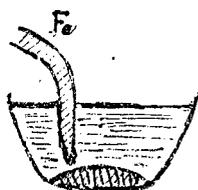
## 72 - Phénomènes électro-capillaires. Electromètre de M. Lippmann<sup>(2)</sup>

non,  
exige

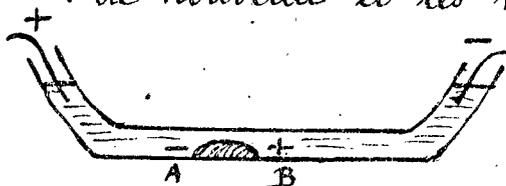
Lorsqu'une électrode est formée par du mercure, la polarisation a pour effet de l'oxyder lorsqu'elle est anode ou de réduire l'oxyde dans le cas contraire. Il en résulte des variations de la tension superficielle et des phénomènes électro-capillaires intéressants.

Pour montrer la diminution de la tension superficielle

- (1) Journal de Physique 2<sup>ème</sup> série t. VI p. 575 (1886)
- (2) Extrait du cours de M. le Lt Colonel Lafay.

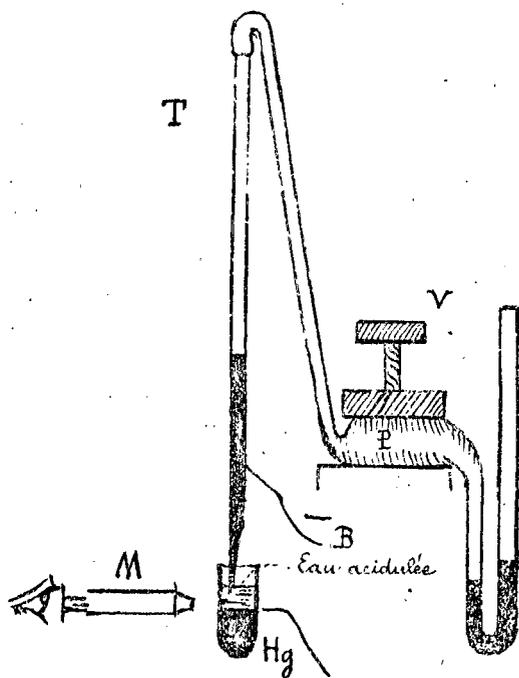


du mercure oxydé, on peut réaliser l'expérience suivante : on place au fond d'une capsule une large goutte de mercure et on la recouvre avec de l'eau acidulée par un peu de bichromate de potasse ; le mercure s'oxyde et s'étale. Si l'on a fixé dans le voisinage de cette goutte une tige de fer, l'étalement de la goutte a pour effet de la mettre en contact avec le fer, et ces deux métaux constituent un couple qui électrolyse l'eau de la solution ; le fer s'oxyde et l'hydrogène se porte sur le mercure et le réduit en rendant à la tension superficielle sa valeur normale ; la goutte se contracte et le contact avec le fer se trouvant momentanément rompu, le phénomène initial se reproduit ; le mercure s'affaisse de nouveau et les mêmes effets recommencent.



On explique de la même manière une expérience de Daniell consistant dans la translation dans le sens du courant d'une goutte de mercure placée dans un tube rempli d'eau acidulée ; en effet, le côté A de la goutte joue le rôle de cathode et la tension superficielle y est plus grande qu'à l'extrémité B qui fait fonction d'anode et s'oxyde.

M. Lippmann a observé que la tension superficielle varie en fonction de la polarisation ; il en résulte que du mercure placé dans un tube capillaire éprouvera des déplacements plus ou moins grands ; en observant cet effet avec un microscope, on peut relier ces déplacements aux forces électromotrices entre les électrodes A et B et réaliser un électromètre.



Il est préférable, comme le fait M. Lippmann, d'employer cet instrument en ramenant le mercure toujours à la même position ; on mesure alors la pression supplémen-

taire, qu'il faut exercer pour cela sur la colonne de mercure suspendue dans le tube. Cette pression est obtenue à l'aide d'une poire en caoutchouc P qui contient de l'air et est reliée au tube T et à un manomètre m.

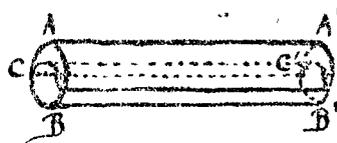
Cet appareil sert principalement pour l'évaluation de différences de potentiel très faibles; car il est d'une extrême sensibilité: il donne couramment le  $\frac{1}{10.000}$  de volt.

## § 4. Extension des théorèmes de Kirchhoff.

### 93. Vecteur courant. Extension du 1<sup>er</sup> théorème.

Dans ce qui précède, les théorèmes de Kirchhoff s'appliquent à un réseau de conducteurs filiformes. Nous allons étendre ces lois aux conducteurs à trois dimensions (1); pour cela il faut généraliser les notions relatives aux courants d'une part et aux forces électromotrices d'autre part.

Nous supposons toujours les courants constants.



Considérons un conducteur cylindrique parcouru par un courant d'intensité  $i$ ; ce courant est un débit d'électricité  $i = \frac{dq}{dt}$  dans lequel toutes les parties  $d\tau$  de la section droite sont également intéressées. Partageons, en effet, la section droite AB en deux parties, AC et BC, par une courbe C quelconque, puis coupons une certaine longueur AA' du fil par la surface cylindrique CC', ayant pour directrice la courbe C, et pour génératrices des parallèles à la direction AA' du fil. D'après les lois d'Ohm, établies expérimentalement par Pouillet, les conductibilités des

(1) Nous ne parlerons que des conducteurs isotropes.

portions AC et BC sur une même longueur AA' sont proportionnelles aux surfaces AC et BC. Les courants qui les traversent sont donc proportionnels aux surfaces, comme des débits fluides. Nous pouvons dès lors appliquer aux courants électriques les notions des courants fluides.

Dans un fluide, la quantité de matière  $dm$  qui traverse l'élément  $d\sigma$  de section droite d'un tube de courant, pendant le temps  $dt$  avec la vitesse  $v$  est :

$$(97) \quad dm = \rho v d\sigma dt \quad (\rho \text{ densité})$$

Soit de même  $dq = di dt$  la quantité d'électricité qui traverse l'élément  $d\sigma$  de section droite ; nous pouvons écrire :

$$(98) \quad dq = di dt = u d\sigma dt$$

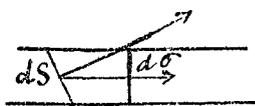
Exactement comme la vitesse  $v$  d'un fluide, la densité de courant

$$u = \frac{di}{d\sigma}$$

est un vecteur, car le courant a une direction, celle du fil, et un sens.

Le rapprochement des formules (98) et (97) montre que  $\vec{u}$  joue le même rôle que le produit  $\rho \vec{v}$  dans un fluide.

Le vecteur  $\vec{u}$  qui en chaque point a pour grandeur la densité du courant et pour direction celle du courant est le vecteur courant ou brièvement "le courant".



Prenons maintenant une section oblique, et soient  $dS$  et  $d\sigma$  les éléments superficiels découpés par un même tube de courant sur cette section oblique et sur la section droite, on a :

$$(99) \quad d\sigma = dS \cos(\vec{u}, \vec{n}) \quad \text{et} \quad di = (\vec{u}, \vec{n}) dS$$

L'intensité  $di$  est le flux élémentaire du courant qui traverse l'élément superficiel  $dS$ , et au travers d'une surface  $S$  on a :

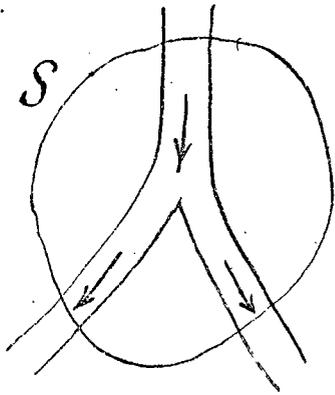
$$(100) \quad i = \iint_{\text{surf } S} (\vec{u}, \vec{n}) dS$$

formule applicable à une surface quelconque dans un conducteur de forme quelconque. A travers une section quelconque d'un conducteur le flux total du courant est constant — c'est la loi de Faraday — ; le vecteur



courant a, bien entendu, une grandeur et une direction variables d'un point à l'autre si le conducteur n'est pas cylindrique.

Nous pouvons maintenant généraliser le 1<sup>er</sup> théorème de Kirchhoff qui ne contient que la notion de courant.



Considérons la portion d'un réseau de conducteur contenue à l'intérieur d'une surface fermée quelconque  $S$  ; soient  $i_1, \dots, i_p$  les intensités dans les  $p$  branches qui traversent cette surface. A travers les sections  $S_1, \dots, S_p$  de ces branches par la surface  $S$ , nous avons :

$$i_1 = \iint_{S_1} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d.S = \varphi_1 \dots \dots i_p = \iint_{S_p} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d.S = \varphi_p$$

Le 1<sup>er</sup> théorème de Kirchhoff,  $\sum i = 0$  devient :

$$(101) \quad \phi = \sum \varphi = 0$$

Si la surface  $S$  est toute entière à l'intérieur d'un des conducteurs du réseau le résultat est le même : on le voit en décomposant le conducteur en tubes de courant, c'est à dire en tubes du vecteur  $\vec{u}$  ; chaque tube sort de la surface autant de fois qu'il y pénètre ; le flux étant conservatif dans chaque tube de courant, le flux entrant est égal au flux sortant, c'est-à-dire que le flux total sortant est nul.

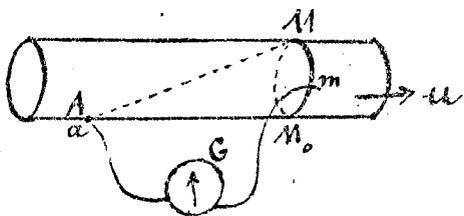
La généralisation du premier théorème de Kirchhoff s'énonce :

Le flux total du courant à travers une surface fermée quelconque tracée dans un réseau conducteur est nulle.

## 74 - Potentiel. - Vecteur force électrique.

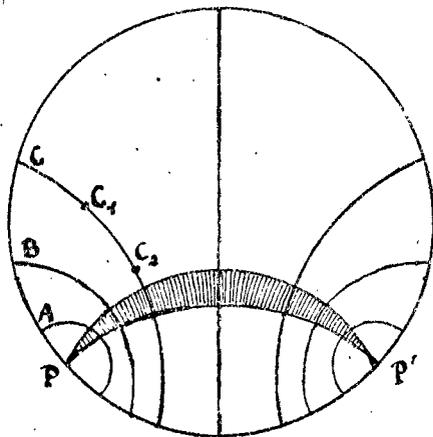
Nous allons établir, comme résultat expérimental, que l'effet Joule dans un conducteur détermine un champ de scalaire. Ce scalaire, appelé potentiel, a pour gradient un nouveau vecteur, la force électrique.

Exploration d'un circuit à l'aide d'un voltmètre. - Soit un conducteur cylindrique. Voici comment Kirchhoff a exploré le



circuit: un galvanomètre G sensible sert de Voltmètre (1) non pas comme instrument absolu mais comme instrument de comparaison.

Aux deux bornes du galvanomètre, on fixe deux fils dont les extrémités a et m sont libres; on place a en un point quelconque du conducteur étudié, puis on déplace m sur le conducteur. On trouve que le lieu des points M où l'on peut placer m de façon que la déviation du galvanomètre soit la même est la section droite MM<sub>0</sub> du conducteur cylindrique.



Lignes de niveau  
et tube de courant

La même méthode donne les lignes correspondant à une force électromotrice constante sur un conducteur de forme quelconque. Pour fixer les idées, prenons, comme l'a fait Kirchhoff, un disque circulaire homogène où le courant arrive et sort par deux points P et P' de la circonférence. Fixons le fil a du galvanomètre en un point quelconque et explorons le disque avec le fil m; les points pour lesquels la déviation du galvanomètre est

(1) On peut aussi employer un électromètre. Nous avons parlé de celui de M. Lippmann. Nous étudierons les autres électromètres en électrostatique.

La même forment des lignes telles que A, ou B, ou C représentées sur la figure: ces lignes sont indépendantes de la position de l'extrémité du fil  $a$  sur le disque. Si maintenant au lieu de fixer  $a$ , on déplace à la fois  $a$  sur l'une A de ces lignes et  $m$  sur une autre C de ces lignes, on constate que la déviation du galvanomètre reste constante, mais est d'autant plus grande que l'écart entre les deux lignes A et C est plus considérable.

Lorsque les fils  $a$  et  $m$  touchent le disque en deux points d'une même ligne, en  $C_1$  et  $C_2$  par exemple, le galvanomètre n'accuse plus aucun courant.

Les lignes A, B, C... se prolongent sur la tranche du disque et sur l'autre face où elles forment des lignes A', B', C'... Il est évident qu'à l'intérieur du disque, entre les lignes C et C', par exemple, qui se correspondent sur les deux faces, il existe une surface dont tous les points jouissent de la même propriété que les points de C et de C', c'est-à-dire sont tels que si l'on pouvait y placer l'extrémité  $m$  du fil, on aurait la même déviation du galvanomètre que pour les points de C et de C'.

Dans un disque mince, ces surfaces qui coupent les faces du disque suivant AA', BB', CC'... sont sensiblement normales aux faces du disque.

Ces résultats prouvent que le courant, dans le disque, est normal aux surfaces AA', BB', CC'... En effet entre deux points pris sur l'une quelconque de ces surfaces, (les points  $C_1$  et  $C_2$  par exemple, pris sur la ligne C) il n'y a aucun courant, car autrement en plaçant  $a$  en  $C_1$  et  $m$  en  $C_2$  une partie du courant serait dérivée dans le galvanomètre qui ne resterait pas au zéro: considérons alors un tube limité, d'une part par les faces du disque, d'autre part par deux surfaces infiniment voisines de la surface CC', par la pensée isolons ce tube: il n'y passe aucun courant, donc le flux du vecteur courant est nul, et par suite ce vecteur est normal aux surfaces que nous venons d'envisager.

Ces surfaces correspondant chacune à une valeur déterminée de la force électromotrice qui s'exerce entre un quelconque de leurs points et un autre point du disque sont donc des surfaces de niveau d'un scalaire  $\psi$ , dont la différence des valeurs en deux points est précisé

ment la force électromotrice. Ce scalaire, qui n'est défini qu'à une constante près, est le potentiel.

Le courant  $\vec{u}$  qui en tout point est normal à la surface de niveau ou surface équipotentielle passant par ce point est-il le gradient du scalaire  $\psi$ ?

Evidemment non, car pour une force électromotrice déterminée  $E$  entre  $P$  et  $P'$  les lignes équipotentielles  $A, B, C, \dots$  ne dépendent que de la forme du conducteur et non de sa nature, alors que le vecteur  $\vec{u}$  est proportionnel à la conductivité  $\gamma$  de la substance du disque. Ce n'est donc pas le vecteur  $\vec{u}$  qu'il faut considérer maintenant, mais le vecteur

$$\vec{h} = \frac{1}{\gamma} \vec{u}$$

que nous appellerons force électrique.

### Force électrique et potentiel dans un conducteur

homogène à température uniforme. — Pour préciser la définition du vecteur force électrique, considérons un élément cylindrique parallèle au courant, de longueur  $ds$  et de section droite  $d\sigma$ . Cet élément est parcouru par un courant d'intensité  $di$

$$di = u d\sigma$$

il offre une résistance  $r$

$$r = \frac{1}{\gamma} \frac{ds}{d\sigma}$$

Supposons, afin de n'avoir pas à faire intervenir pour le moment l'effet Thomson, que la température du conducteur soit maintenue uniforme. La force électromotrice  $dE = r di$  a pour valeur

$$dE = r di = \frac{u}{\gamma} ds$$

mais l'élément  $ds$  a été pris dans la direction même du vecteur  $\vec{u}$ . Quelle expression doit-on prendre si  $ds$  est oblique à  $\vec{u}$ ? au lieu du courant  $u$  il faut prendre la composante  $u \cos(\vec{u}, \vec{ds})$  du courant suivant une parallèle à  $ds$  et écrire :

$$(102) \quad dE = r di = \frac{u}{\gamma} ds \cos(\vec{u}, \vec{ds}) = (\vec{h} \vec{ds})$$

$\vec{h}$  étant le vecteur  $\frac{1}{\gamma} \vec{u}$ .

Pour justifier le nom de "force électrique" donné à ce vecteur, reportons nous à la définition de la force électromotrice (n° ). Soit  $q$  une quantité d'électricité ou charge électrique positive qui parcourt l'élément considéré dans le sens du courant (n° ), la chaleur de Joule développée est :

$$dw = dE \cdot q = (\vec{h} \vec{ds}) q = (\vec{h} q \cdot \vec{ds})$$

La chaleur de Joule nous apparaît donc comme égale au travail mécanique, produit de l'élément de longueur  $ds$  par la projection de la force mécanique  $hq$  sur la direction de ce déplacement  $ds$ . Le vecteur  $hq$  en un point est donc la force mécanique qui s'exercerait sur la charge  $q$  d'électricité positive supposée concentrée au point considéré.

Il y a donc, dans un conducteur parcouru par un courant constant, un champ statique, et la force électrique  $\vec{h}$  (1) (action qui s'exercerait en chaque point sur la charge positive unité) est l'intensité de ce champ.

La transformation intégrale du travail de la force électrique en chaleur de Joule montre bien que cette force est équilibrée par une résistance passive absolument comparable à un frottement.

Revenons à la formule (102). Entre deux points  $A$  et  $B$  traçons une courbe quelconque et intégrons  $\vec{h}$  le long de cette courbe :

$$(103) \quad E_A^B = \psi_A - \psi_B = \int_A^B (\vec{h} \vec{ds})$$

La force électromotrice totale d'un point A à un point B est égale à la circulation du vecteur force électrique le long

(1) La force électrique est mesurée ici en unités électromagnétiques, en volts par centimètre. En électrostatique elle sera mesurée avec d'autres unités.

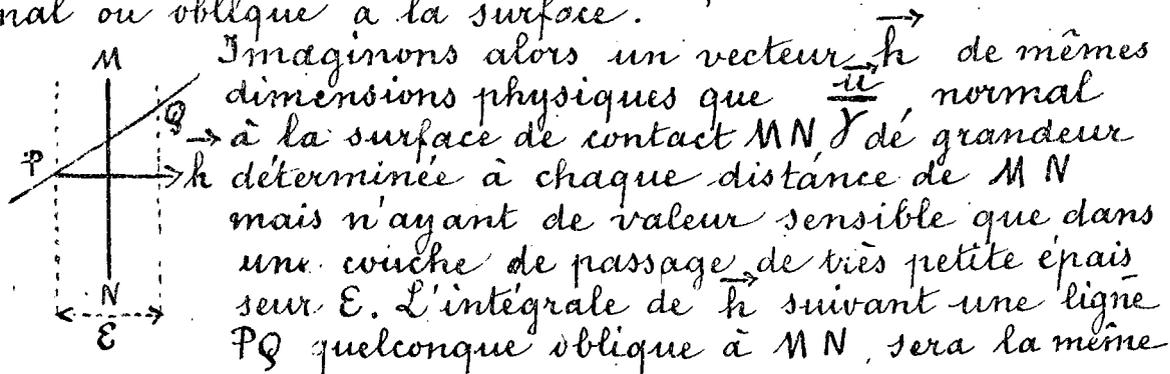
d'une courbe quelconque tracée entre les deux points.

Il résulte de là (n° 5) que la force électrique est le gradient du potentiel  $\Psi$  dont la variation, entre deux points, est égale à la force électromotrice.

La force contre-électromotrice de Joule est la circulation de  $\vec{h}$  prise, en sens contraire du courant, ou la circulation de  $-\vec{h}$  dans le sens du courant.

## 75 - Force électromotrice de l'effet Peltier et de l'effet Thomson -

La force électromotrice de contact a un sens invariable, contrairement à celle de l'effet Joule qui est toujours résistante (contraire au courant). D'autre part, il suffit que le courant traverse la surface de séparation des conducteurs pour que cette force électromotrice se manifeste avec une grandeur constante, que le courant soit normal ou oblique à la surface.



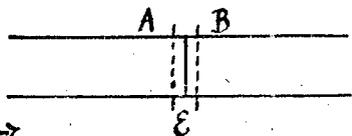
$$(104) \quad \pi = - \int_P^Q (\vec{h} \cdot d\vec{s})$$

quel que soit le chemin suivi à travers la couche de passage pourvu qu'on la traverse toute entière. Cette intégrale jouit de toutes les propriétés de la force électromotrice correspondant à l'effet Peltier.

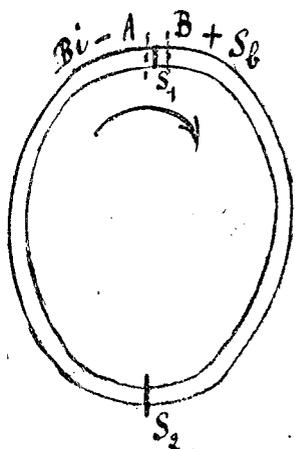
Le vecteur  $\vec{h}$  ainsi défini est une force électrique comme celle dont nous avons montré l'existence dans l'intérieur d'un conducteur.

Il nous faut donner la raison pour laquelle nous avons affecté l'intégrale du signe  $-$ . Admettons une couche de passage  $E$  entre le conducteur  $A$  et le conducteur  $B$ .

revient à admettre, dans le passage de A à B, la continuité du potentiel, et que la variation du potentiel est égale à la force électromotrice de contact. Il convient donc de donner à la force électrique  $\vec{h}$  le sens des potentiels décroissants, comme dans un conducteur homogène.



$\vec{h}$  le sens des potentiels décroissants, comme dans un conducteur homogène.



Prenons un exemple: soit un couple thermo-électrique bismuth-antimoine, pour lequel AB est la couche de passage au contact chauffé  $S_1$ . D'après le sens du courant, qui va de B en A dans le circuit extérieur (et du bismuth à l'antimoine à travers la soudure chaude),  $\Psi_B > \Psi_A$ ; d'autre part nous devons affecter du signe + la force de Peltier  $\pi_A^B = \text{Bi} | \text{Sb}$ ,

l'effet Peltier refroidissant S, quand le courant passe du bismuth à l'antimoine à travers cette soudure. (1) On a donc en grandeur et en signe :

$$\pi_A^B = \text{Bi} | \text{Sb} = \Psi_B - \Psi_A$$

et pour que, comme dans un conducteur homogène, la circulation du vecteur  $\vec{h}$  soit égale à  $\Psi_A - \Psi_B$ , il faut bien écrire :

$$\pi_A^B = -(\Psi_A - \Psi_B) = - \int_A^B (\vec{h} \cdot d\vec{s})$$

(1) Voici la raison de cette convention de signe. Puisque le bismuth est le pôle négatif et l'antimoine le pôle positif, c'est qu'il existe dans la couche de passage une force qui pousse l'électricité positive de A vers B, sinon l'antimoine ne serait pas chargé positivement. Nous en verrons l'origine dans la théorie électronique. C'est cette force qui est la force électromotrice: l'équilibre existe quand la différence de potentiel  $\Psi_B - \Psi_A$  qui pousse l'électricité de B vers A est numériquement égale à la force électromotrice qui pousse l'électricité de A vers B.

$\Psi_B - \Psi_A$  mesure donc la force électromotrice de A vers B.

La force électrique due à l'effet Thomson se définit exactement de même et l'on a

$$(105) \quad d\pi = Hd\theta = -(\vec{h} \vec{ds})$$

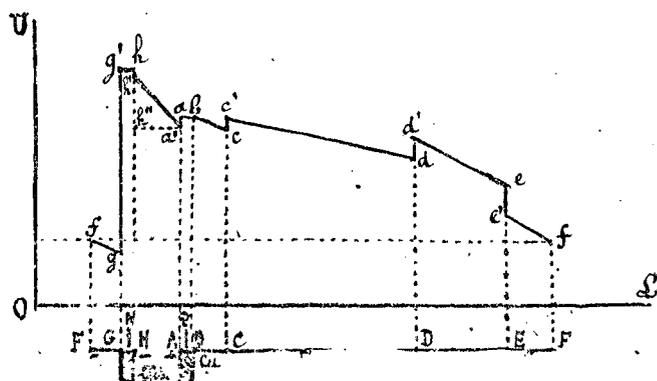
## 76 - Extension du 2<sup>ème</sup> théorème de Kirchhoff -

Prenons dans un conducteur, homogène ou non, un contour fermé quelconque. Nous pouvons imaginer un déplacement électrique virtuel  $dq$  dans un tube conducteur infiniment étroit le long de ce contour; ce déplacement dans un tube fermé est compatible avec la liaison d'incompressibilité. Le théorème des travaux virtuels s'exprime par l'équilibre des forces électromotrices et des forces contre-électromotrices de Joule le long du contour; par conséquent:

$$(106) \quad \int (\vec{h} \vec{ds}) = 0$$

Le 2<sup>ème</sup> théorème de Kirchhoff, généralisé, s'énonce ainsi:  
Sur tout contour fermé tracé dans un conducteur, la circulation de la force électrique est nulle.

Exemple de la variation du potentiel le long d'un circuit. — Supposons un élément de Volta



dont l'électrode cuivre AB est soudée à un fil de cuivre BC, suivi d'un fil de fer CD, d'un fil de nickel DE et enfin d'un fil de cuivre qui aboutit à l'électrode zinc GH.

Selon le mode représentatif de Ohm, développons rectilignement les diverses parties du circuit le long d'une droite Ol

des segments proportionnels à leurs longueurs. nous parlons en

ordonnées les valeurs du potentiel aux points correspondants du courant; nous pouvons donner une valeur arbitraire au potentiel d'un des points du circuit; les valeurs du potentiel aux autres points sont alors déterminées.

Les différences de potentiel en deux points d'un même fil peuvent être mesurées avec un voltmètre ou un électromètre et les différences de potentiel au contact des surfaces par l'effet Peltier. (1)

La chute linéaire du potentiel (loi d'Ohm) le long de chacun des conducteurs est représentée par l'inclinaison plus ou moins grande des segments  $ab$ ,  $bc$ ,  $c'd$ ,  $d'e$ ,  $e'g$ ,  $g'h$ ,  $h'a'$ . Les forces électromotrices de contact donnent des segments pratiquement verticaux  $cc'$ ,  $dd'$ , etc. ....

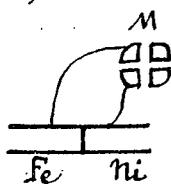
La force électromotrice de la pile est la somme des projections verticales des segments inclinés.

La circulation de la force électrique, dans le sens du courant, est positive le long de tous les conducteurs, sauf dans les couches de passage où elle est, selon les surfaces en contact, tantôt positive, tantôt négative; par exemple de  $g$  en  $g'$  elle a une grande valeur négative, le sens du parcours étant contraire au sens de la force électrique. Conformément au 2<sup>ème</sup> théorème de Kirchhoff la somme des circulations est nulle si tout le circuit est parcouru.

### 77. - Chaleur dégagée dans un volume.

Décomposons le volume en tubes de courant infiniment

(1)



Une mesure électrométrique ordinaire ne pourrait révéler les forces électromotrices de contact. Supposons, pour fixer les idées, qu'on réunisse les deux paires de quadrants d'un électromètre Kelvin à deux points situés immédiatement de part et d'autre du contact  $Fe$   $Ni$ ; désignons par  $M$  le métal qui a servi à fabriquer les quadrants; l'appareil n'indiquera aucune différence de potentiel, car :

$$M|Fe + Fe|Ni + Ni|M = M|M = 0$$

Mis en communication avec deux points du circuit dont la distance n'est plus négligeable, l'électromètre indiquera seulement la somme des chutes de potentiels qui se produisent dans chacun des segments de la chaîne intercalée entre ces points.

déliés. Prenons un point  $A$  intérieur au volume et considérons autour de  $A$  un tronçon, de longueur  $ds$ , du tube contenant  $A$ . Soient  $d\sigma$  la section droite du tronçon de tube et  $\vec{u}$  le courant en  $A$ .

La chaleur dégagée, pendant l'unité de temps, dans le volume élémentaire  $dv = ds d\sigma$  est :

$$dw = r (di)^2$$

Or on a :

$$r = \frac{1}{\gamma} \frac{ds}{d\sigma}$$

$$di = u d\sigma$$

Par suite

$$dw = \frac{1}{\gamma} u^2 ds d\sigma = \frac{1}{\gamma} u^2 dv$$

$$(107) \quad W = \iiint \frac{1}{\gamma} u^2 dv$$

L'intégrale étant étendue au volume considéré. La formule est applicable aux conducteurs non homogènes ( $\gamma$  variable avec la position du point considéré).

### 78 - Analogie entre les lois de la conductibilité électrique et les lois de la conductibilité calorifique.

Dans un conducteur cylindrique parcouru par un courant, la chute de potentiel entre deux sections droites  $A$  et  $B$  distantes de  $l$  est :

$$(108) \quad \Psi_A - \Psi_B = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S} i = \frac{l}{\gamma} u$$

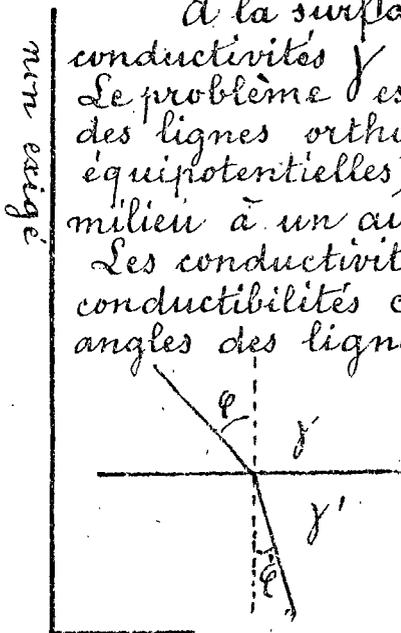
Cette formule est identique à celle que Fourier a découverte pour la conduction de la chaleur à travers un mur, d'épaisseur  $l$  dont les deux faces sont maintenues aux températures  $\Psi_A$  et  $\Psi_B$  ; dans ce cas  $\gamma$  représente la conductibilité calorifique et  $u$  le flux de chaleur par unité de temps et par unité de surface (cours de 1<sup>ère</sup> année n° 367).

Ainsi, la conduction électrique est régie par les

mêmes lois que la conduction calorifique. C'est en admettant ce fait comme hypothèse que Ohm a découvert les lois qui portent son nom.

### Réfraction des lignes de courant. —

à la surface de séparation de deux milieux de conductivités  $\gamma$  et  $\gamma'$  les lignes de courant se réfractent. Le problème est identique à celui de la réfraction des lignes orthogonales aux surfaces isothermes (surfaces équipotentielles) dans la propagation de la chaleur d'un milieu à un autre (voir cours de 1<sup>ère</sup> année n° 378). Les conductivités  $\gamma$  et  $\gamma'$  jouent le même rôle que les conductibilités calorifiques  $K$  et  $K'$ . Si  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont les angles des lignes de courant avec la normale à la surface de séparation, on a :



$$(109) \quad \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

### 79. — Expression analytique des lois de Kirchhoff. —

L'application des théorèmes généraux établis au début des cours donne immédiatement l'expression des lois de Kirchhoff.

Première loi. — Le flux du courant à travers une surface fermée est nul. Le flux est conservatif, la condition solénoïdale générale est donc satisfaite (n° 9) et l'on a en tout point :

$$(110) \quad \operatorname{Div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

L'équation correspondante en hydrodynamique.

$$(111) \quad \frac{\partial (pV_x)}{\partial x} + \frac{\partial (pV_y)}{\partial y} + \frac{\partial (pV_z)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

densité  $\rho$  vitesse  $v$

est appelée équation de continuité. Elle énonce ce fait qu'une substance matérielle ne peut partir d'un point de l'espace et arriver à un autre sans traverser l'espace intermédiaire; il faut qu'elle suive un chemin continu, de sorte que, si l'on trace une surface fermée qui comprénne un des points et soit extérieure à l'autre, la substance matérielle ne peut passer d'un point à l'autre sans traverser la surface.

L'équation s'applique à toute espèce de matière, solide ou fluide, animée d'un mouvement continu ou discontinu pourvu que l'existence des parties de cette matière soit continue. Si quelque chose, autre que de la matière, est soumis à la condition de la continuité de son existence dans le temps et dans l'espace, cette condition est aussi exprimée par l'équation (111): c'est le cas de l'électricité.

Les équations (110) et (111) sont identiques si nous faisons  $\rho = C \frac{e}{v}$ , c'est-à-dire si nous assimilons l'électricité à une substance homogène et incompressible.

Nous voyons, une fois de plus, que la première loi de Kirchhoff est une liaison d'incompressibilité.

Deuxième loi. — La circulation de la force électrique est nulle le long de tout contour fermé.

L'application du théorème de Stokes (n° 11) donne:

$$(112) \quad \text{Curl} \cdot \vec{h} = 0$$

ce qui est d'ailleurs simplement la condition d'intégrabilité de la fonction  $h$ , cette condition est remplie puisque  $h$  dérive de la fonction  $\psi$ .

Il est essentiel de noter que l'équation (112) n'est valable que dans le cas du régime constant, c'est à dire quand il n'y a pas de forces d'inertie. Cette équation sera complétée plus tard dans le cas des courants variables, et étendue au cas des "courants de déplacement" dans les diélectriques (isolants).

L'extension de la deuxième loi a conduit Maxwell à la théorie électromagnétique de la lumière.

# Chapitre IV

## Electromagnétisme.

Jusqu'à présent, nous nous sommes occupés seulement des phénomènes qui se passent à l'intérieur de conducteurs fixes parcourus par des courants constants. Nous avons vu que sous ces conditions, toute l'énergie fournie par les générateurs de courant se retrouve intégralement dans l'ensemble des circuits: aucune énergie n'est donc mise en jeu à l'extérieur, une fois le régime établi. Mais en est-il de même pendant la période d'établissement ou de rupture d'un courant, ou quand les circuits se déplacent? Pendant le temps très court où un courant s'établit, ne se produirait-il pas, dans l'espace environnant, une modification des propriétés de cet espace, une extériorisation d'énergie qui subsisterait jusqu'à la rupture du courant?

C'est bien ce qui a lieu. L'établissement d'un courant crée, non seulement dans le conducteur, mais aussi en dehors du conducteur un champ d'énergie, appelé champ magnétique, qui agit lui-même sur les conducteurs parcourus par un courant et sur les aimants. Le champ magnétique reste invariable tant que les courants sont constants et les circuits fixes; il disparaît à la rupture des courants.

Trois problèmes se posent. Ils interviennent dans toutes les applications.

1°) Quelle est la loi qui régit l'action d'un champ magnétique sur chaque élément de conducteur placé dans le champ.

2°) Quelle est, en chaque point, l'intensité du champ magnétique créé par un élément de courant.

3°) Quelle est le travail des forces agissant sur un circuit, lorsque tout le circuit et toutes les actions mécaniques interviennent en bloc.

Le premier problème est résolu par une loi fondamen

tale qui est la base de l'électromagnétisme.

## § 1. - Loi fondamentale de l'électromagnétisme.

### 80. - Le champ magnétique.

Identité de nature du champ produit par un aimant et du champ produit par un courant.

Aimants. - Il est à peine besoin de rappeler les propriétés bien connues des aimants.

L'attraction de la limaille de fer par un barreau aimanté est particulièrement développée dans le voisinage des extrémités, dans deux régions appelées pôles.

Un barreau aimanté suspendu par son centre de gravité s'oriente de lui-même, ce qu'on exprime en disant que la Terre est entourée d'un champ magnétique. Les extrémités du barreau qui se tournent l'une du côté Nord, l'autre du côté Sud s'appellent pôle nord et pôle sud ou lames.

Lorsque deux aimants sont mis en présence, les pôles de même nom se repoussent et les pôles de noms différents s'attirent.

### Découverte d'Ørsted - Règle d'Ampère. - Ørsted

(1820) remarqua, au cours d'une conférence faite à ses élèves, qu'un fil traversé par un courant exerçait une action directrice sur une boussole placée dans son voisinage.

L'espace environnant un courant a donc acquis une propriété comparable à celle de l'espace qui entoure un aimant.

Ampère a donné la règle suivante: l'aiguille aimantée tend à se mettre en croix avec le fil parcouru par un courant, le pôle nord étant dévié vers la gauche d'un observateur qu'on suppose étendu sur le fil, les pieds du côté d'où vient le courant et la face tournée vers l'aiguille.

## Principe des galvanomètres. — sans l'expérience

d'Ørsted, l'aiguille ne se met pas complètement en croix avec le courant parcequ'elle est soumise à l'action directrice du champ terrestre. Si, comme l'a fait Ampère, on oriente une aiguille bien équilibrée de manière que son axe de rotation soit parallèle à ce champ, l'action du champ terrestre se trouve annulée, par la réaction des appuis et l'aiguille peut rester en équilibre dans un azimuth quelconque; on dit qu'elle est astatique.

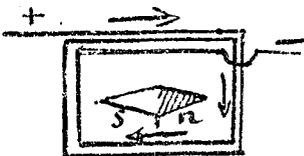
Une telle aiguille se place toujours rigoureusement à angle droit des courants rectilignes qu'on fait agir sur elle.

Ampère eut immédiatement l'idée de faire servir l'action antagoniste du champ terrestre à l'appréciation de "l'intensité" des courants, qu'on ne savait pas encore mesurer. À cet effet, il tendait horizontalement dans la direction du méridien magnétique une partie du fil traversé par le courant et plaçait en-dessus ou en-dessous une boussole ordinaire; la déviation de l'aiguille était d'autant plus grande que le courant était "plus énergique".

Le dispositif, auquel il donna le nom de galvanomètre, lui servit pour montrer que la pile elle-même exerce dans son voisinage une action identique à celle d'un conducteur qui serait traversé par un courant dirigé du pôle négatif de la pile au pôle positif.

Ampère appela l'attention sur le fait que les phénomènes électromagnétiques et électrochimiques dépendent essentiellement de l'existence du courant; l'état de "tension" électrique plus ou moins grand des conducteurs ne saurait les provoquer; ils n'apparaissent qu'au moment où la fermeture du circuit permet la production du déplacement électrique.

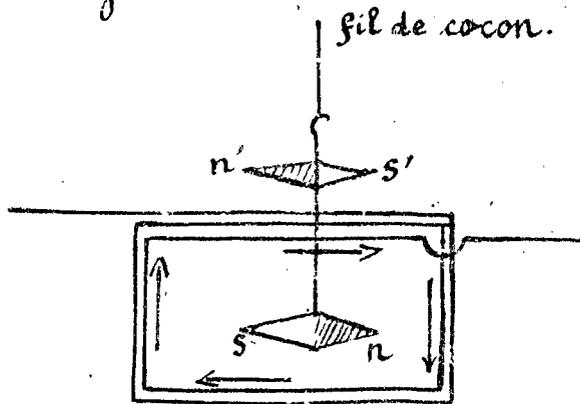
## Multiplicateur de Schweigger. — À l'époque



même où Ampère exécutait ces premières expériences (1820), Schweigger eut l'idée d'enrouler le fil, convenablement isolé avec de la soie, autour d'un cadre au centre duquel était suspendue l'aiguille aimantée. L'effet Ørsted se trouvait ainsi

multiplié proportionnellement au nombre de tours de l'enroulement. La règle d'Ampère montre, en effet, que toutes les parties du circuit ainsi constitué exercent sur l'aiguille des actions de même sens.

**Galvanomètre de Nobili.** — La déviation de l'aiguille est augmentée si l'on atténue l'action du magnétisme terrestre. Nobili employa deux aiguilles identiques dirigées en sens inverses et montées sur un même axe rigide. La première NS est placée au centre du cadre de Schweigger, la seconde N'S' est située à l'extérieur et dans le voisinage immédiat de la partie supérieure de l'enroulement.



Dans ces conditions, le système des deux aiguilles est pratiquement astatique et ne se trouve soumis qu'à l'action du couple de torsion du fil qui sert à le supporter; On voit d'ailleurs, par la règle d'Ampère, que l'aiguille supérieure, bien qu'inversement placée, tend à prendre un mouvement de même sens que l'aiguille intérieure, parce que ce sont les parties les plus voisines du circuit qui exercent une action prépondérante sur elle. Le galvanomètre ainsi perfectionné révèle des courants extrêmement faibles.

Lorsqu'on répète l'expérience galvanométrique d'Ampère en maintenant identiques tous les éléments dont elle peut dépendre, sauf l'intensité d'aimantation de l'aiguille (c'est à dire en employant des aiguilles de dimensions identiques, mais plus ou moins aimantées), on constate que la déviation de l'aiguille est toujours la même. Il en est encore ainsi lorsqu'on ajoute à l'action terrestre et à l'action du courant l'action produite par un aimant.

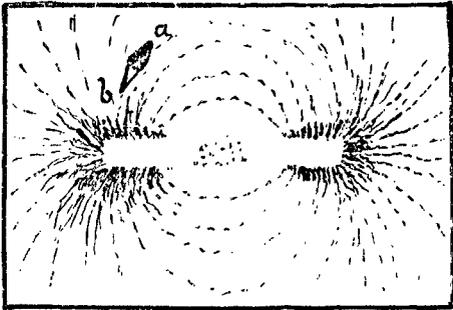
Les actions exercées sur une aiguille aimantée, par un courant, par le magnétisme terrestre, et par un aimant varient donc proportionnellement quand on change d'aiguille, toutes les autres conditions de l'expérience restant

identiques.

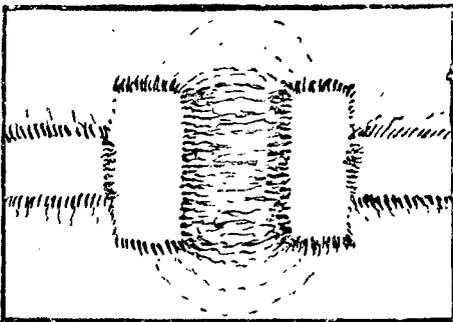
Il résulte de là qu'au point de vue de l'action sur l'aiguille aimantée, le champ d'un courant agit comme s'il était de même nature que celui d'un aimant.

Réserveons provisoirement au champ d'un aimant le mot "champ magnétique" et appelons "champ électromagnétique" celui qui est dû à un courant. Nous allons montrer que l'identité des deux champs se manifeste dans toutes leurs actions.

Aimantation par influence - Fantômes magnétiques. — Chacun connaît les fantômes magnétiques obtenus en saupoudrant de la limaille



de fer sur un carton posé sur un aimant. Les figures ci-contre montrent deux exemples. Les lignes de limaille donnent une idée d'ensemble du champ magnétique, car elles dessinent les lignes de force: une petite boussole a b très courte s'oriente suivant ces lignes.



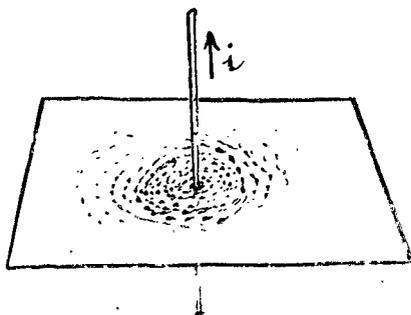
L'une des figures montre le champ entre deux larges pièces de fer doux placées contre les extrémités d'un aimant recourbé. Les lignes sont droites, la force est constante et le champ est uniforme (n.° 15). Une boussole qu'on fait osciller dans cette région a la même période d'oscillation en tous les points.

La production de ces spectres ou fantômes magnétiques résulte de l'aimantation du fer par influence dans le champ magné-

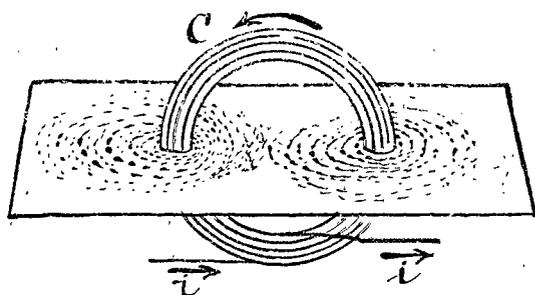
tique.

Crago (1820) a découvert que le champ d'un courant donne naissance aux mêmes effets d'aimantation par influence; l'expérience des fantômes montre la disposition des lignes de force du champ électromagnétique.

Lançons un courant intense dans un gros fil.



de cuivre rectiligne et vertical qui traverse un carton horizontal saupoudré de limaille de fer; nous verrons cette limaille s'agglomérer en filaments circulaires concentriques au fil et d'autant moins denses qu'ils en sont plus éloignés.

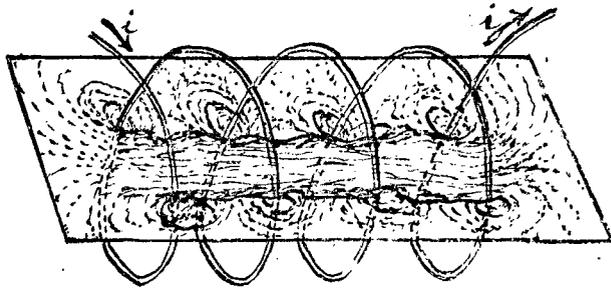


Disposons un carton convenablement découpé de manière à le faire coïncider avec le plan diamétral d'un cadre multiplicateur circulaire dont la tranche est verticale; les filaments de limaille s'y disposeront comme l'indique la figure. Les lignes de force ressemblent à des cercles qui,

dans le voisinage du cadre sont à peu près concentriques à l'axe du faisceau des fils, puis deviennent de plus en plus excentriques à mesure que leurs rayons grandissent.

Au centre du cadre ces courbes se confondent avec l'axe de figure de l'anneau, et la répartition de la limaille en lignes parallèles et de même densité montre que dans cette région le champ est sensiblement uniforme.

La même expérience peut être exécutée en faisant parcourir au courant une hélice ou tout autre circuit.



Sans le cas d'un fil enroulé en hélice autour d'un cylindre, constituant le dispositif appelé solénoïde, l'expérience présente un intérêt particulier. On constate en effet qu'à

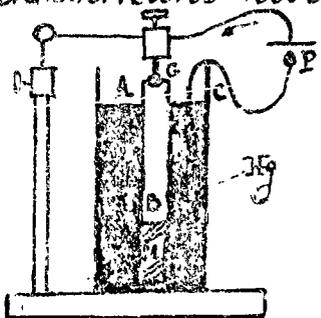
l'extérieur du solénoïde les lignes de force ont la même disposition que les lignes de force d'un champ magnétique au voisinage d'un barreau cylindrique aimanté.

Le champ est sensiblement uniforme dans l'intérieur du solénoïde. Si l'on y place du fer, il s'aimante et l'on a un électro-aimant.

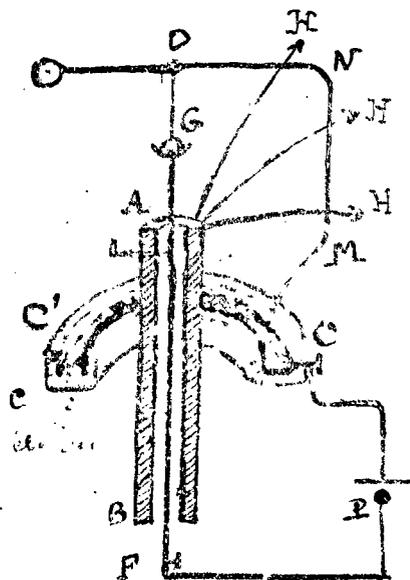
## Action d'un champ magnétique sur un courant. — Equilibre entre l'action et la réaction. —

qu'un courant agit sur un aimant, inversement un aimant agit sur un courant.

Ces actions réciproques peuvent être mises en évidence par les dispositifs d'Amperé et de Jamin. Soit AB un aimant lesté d'une masse M en platine et portant



à sa partie supérieure une goutte de mercure G. Il plonge dans du mercure Hg et sert de conducteur, le reste du circuit étant la partie fixe GPC. Quand on fait passer le courant de la pile P, l'aimant AB tourne sur lui-même autour de son axe. Cette expérience est connue sous le nom de rotation de l'aimant d'Amperé.



Inversement rendons l'aimant fixe et le circuit mobile, en employant le dispositif de Jamin (perfectionnement d'un dispositif dû à Faraday). FG est un axe fixe, AB un aimant qui peut être déplacé le long de cet axe; CMND une partie du circuit mobile autour de FG, GFPC est la partie fixe du circuit de la pile P; CC' une cuvette annulaire remplie de mercure, G une goutte de mercure. Le mercure forme des contacts glissants qui permettent à la partie GDMNC de tourner.

On constate que pour un même sens du courant la partie mobile tourne, en sens inverse du sens dans lequel tournait l'aimant mobile d'Amperé.

Si dans l'un ou l'autre des dispositifs on attache ensemble l'aimant et la partie de courant entre lesquels s'exercent des actions réciproques, l'ensemble demeure au

Plus généralement l'on attache ensemble les

demeure au repos quelle que soit sa mobilité. En d'autres termes, si l'on partage le système en

deux parties A et B, l'action de A sur B et la réaction de B sur A se font équilibrer sur le système (A, B) de forme invariable. C'est la loi de l'équilibre de l'action et de la réaction. Les forces ne tendent qu'au mouvement relatif des pièces magnétiques et des conducteurs en présence.

Action du champ électromagnétique d'un courant sur un courant. — Nous avons établi:

1° que le champ électromagnétique d'un courant agit sur un aimant, que réciproquement le champ magnétique d'un aimant agit sur un courant, et qu'il y a équilibre entre l'action et la réaction.

2° que les deux champs produisent l'aimantation du fer par influence.

Il est donc bien probable qu'il faut identifier les deux champs, mais pour le prouver, il reste à montrer que le champ électromagnétique agit sur un courant, comme le champ magnétique.

Si, dans l'expérience d'ampère et dans celle de Jamin, on remplace l'aimant par un solénoïde parcouru par un courant; on obtient les mêmes effets de rotation.

Enfin toutes les expériences d'attraction et de répulsion entre aimants, réalisées par Gauss, ont été répétées par Weber avec des solénoïdes. L'action réciproque de deux solénoïdes varie avec la distance et la direction relative des bobines suivant les mêmes lois que si l'on remplaçait ces bobines par deux aimants uniformes dont les axes magnétiques seraient parallèles à ceux des bobines.

Nous avons déjà dit que la disposition des lignes de force du champ électromagnétique d'un solénoïde est identique à celle des lignes du champ produit par un barreau cylindrique aimanté.

Il résulte de l'ensemble de ces faits qu'il y a identité absolue entre le "champ magnétique" et le "champ électromagnétique" nous les désignerons par le nom unique de champ magnétique.

Nous verrons d'ailleurs plus tard qu'on explique les propriétés magnétiques par l'existence de courants particuliers formés par des électrons en mouvement, de sorte qu'un champ magnétique est toujours dû à des courants. On comprend alors pourquoi les morceaux d'un aimant coupé

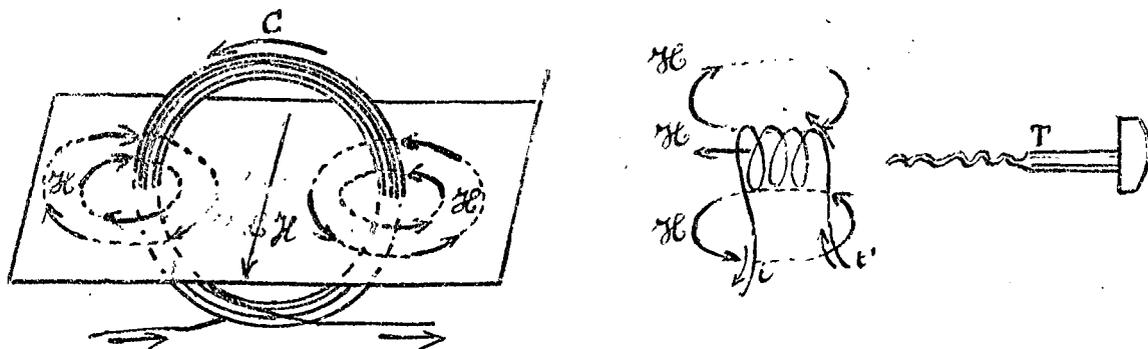
forment autant de nouveaux aimants. Comme nous l'avons déjà dit il n'y a pas de "fluides magnétiques" et il est impossible d'isoler une "masse magnétique" comme on isole une charge électrique.

### Vecteur force magnétique. — Le champ ma.

gnétique est caractérisé en chaque point par une direction et une intensité; il est donc représenté par un vecteur  $H$  qu'on appelle force magnétique. Nous préciserons la définition de l'intensité en apprenant à la mesurer par un de ses effets. La direction est donnée par les lignes de force tracées par la limaille de fer; c'est la direction que prendrait en chaque point une aiguille aimantée infiniment petite; on convient de prendre pour sens le sens  $0 \rightarrow N$ ,  $0$  étant le centre de l'aiguille et  $N$  le pôle nord de la boussole orientée dans le champ.

D'après la règle d'Ampère, on voit que la force magnétique produite par un courant est dirigée vers la gauche du bonhomme d'Ampère; en d'autres termes les lignes de force du courant rectiligne ont pour axe positif la direction et le sens du courant. Pour le courant circulaire, la ligne de force centrale est dirigée suivant l'axe du cycle formé par le courant.

Pour le solénoïde la règle est la même, mais on peut y substituer, si l'on préfère, la règle du tire-bouchon



Plaçons un tire-bouchon suivant l'axe du solénoïde et tournons-le dans le sens du courant: le sens dans lequel il avance est celui du champ. La règle est réciproque: en vissant le tire-bouchon tangemment à un circuit de manière à le faire avancer dans le sens du

du courant, la rotation qu'on lui imprime indique le sens des lignes de force avoisinantes.

Nous verrons que la force magnétique est un vecteur axial.

## 81. Loi fondamentale. Action d'un champ magnétique sur un élément de courant.

Un élément de conducteur de longueur  $ds$ , parcouru par un courant  $i$ , et placé dans un champ magnétique  $H$ , subit l'action d'une force mécanique  $dF$  qui est normale au plan formé par l'élément  $ds$  et la force magnétique  $H$ , qui est dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère, et qui a pour grandeur l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{ds}$  et  $\vec{H}$ .

On a donc en notations cartésiennes,  $\alpha$  étant l'angle de la force magnétique et de l'élément de courant:

$$(113) \quad dF = H i ds \sin \alpha$$

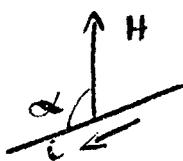
Le tout l'énoncé de la loi se résume dans la formule

$$(114) \quad \vec{dF} = [i \vec{ds} \vec{H}]$$

(1) On voit la commodité de la notation vectorielle qui indique à la fois la grandeur, la direction et le sens de la force  $dF$ .

À première vue,  $H$  paraît bien être un vecteur axial. En effet, la force  $d\vec{F}$  est un vecteur polaire, et par suite l'un des deux vecteurs dont  $d\vec{F}$  est le produit est un vecteur polaire et l'autre un vecteur axial (voir n°2).

Il est naturel de considérer  $i ds$  comme vecteur polaire et alors  $H$  comme vecteur axial. Cependant ce n'est qu'une hypothèse car ce n'est pas le vecteur polaire  $\vec{ds}$  qui intervient, mais le vecteur  $i ds$ ;  $i$  est un scalaire (flux) et la question est de savoir si ce scalaire est 1<sup>er</sup> ou de 2<sup>ème</sup> espèce, c'est-à-dire ne change pas ou au contraire change de signe avec le sens de rotation (voir la suite à la note 1 de la page suivante)



car  $d\vec{F}$  est le produit vectoriel des vecteurs  $i\vec{ds}$  et  $\vec{H}$ , pris dans cet ordre, étant donné le sens de la force  $d\vec{F}$ ; en les prenant dans l'ordre inverse, on a aussi:

$$d\vec{F} = - \left[ \vec{H} \ i\vec{ds} \right]$$

Sur la figure le fil AB et la force magnétique étant dans le plan du papier, AB est poussé au dessous de ce plan.

Cette loi est en général désignée sous le nom de loi de Biot et Savart. On peut la déduire d'une formule que Laplace a établie comme conséquence des expériences de Biot et Savart sur l'action qu'exercent un courant rectiligne et un courant angulaire sur une boussole. Mais la formule de Laplace a le grave inconvénient de faire intervenir explicitement la notion artificielle de "pôle d'aimant", dont il est préférable d'user le moins possible. Nous suivons donc une autre voie, abandonnant la méthode classique, et, avec M. E. Carvallo<sup>(2)</sup>, nous établirons la loi fondamentale directement par l'expérience, en pesant simplement à l'aide d'une balance la force qui agit sur un courant.

Des larges armatures planes A et B d'un électro-aimant donnent un champ horizontal uniforme  $\vec{H}$ , suivant la normale  $Oy$  aux armatures (voir n° 80). On y dispose un fil horizontal DE, de longueur  $l$ , dont les extrémités recourbées vers le bas reçoivent le courant  $i$  par des godets à mercure. Le fil DE est fixé en son milieu O par une tige verticale OM au fléau MN d'une balance. Le fléau

(1) des axes; si  $i$  devait être considéré comme changeant de signe,  $i\vec{ds}$  serait un vecteur axial et  $\vec{H}$  un vecteur polaire.

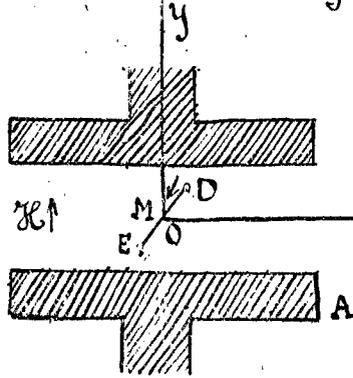
En d'autres termes la question est de savoir si le vecteur courant  $\vec{u}$  est un vecteur polaire, comme nous l'avons admis, ou un vecteur axial, ou encore si le vecteur force électrique  $\vec{h}$  est polaire ou axial. Soit  $q$  une charge électrique dans le champ  $\vec{h}$ , la force  $\vec{h}q$  qui s'exerce sur  $q$  est un vecteur polaire, mais on ne sait pas a priori si  $q$  est un scalaire de 1<sup>re</sup> ou 2<sup>ème</sup> espèce; dans la seconde alternative,  $\vec{h}$  serait un vecteur axial, et également, et  $\vec{H}$  serait un vecteur polaire.

C'est l'expérience qui oblige à considérer  $\vec{h}$  comme vecteur polaire et  $\vec{H}$  comme vecteur axial. Nous en donnerons plus loin les raisons.

(2) E. Carvallo, leçons d'électricité.

dirigé suivant  $Ox$ , repose sur le couteau  $C$  parallèle à  $Oy$ . L'extrémité  $N$  du fléau porte un plateau qui reçoit des poids  $p$ , de façon à équilibrer le moment de l'action électromagnétique par rapport au couteau.

Si l'on change le point d'attache  $M$  sur le bras du



fléau, l'expérience montre que les poids sont proportionnels aux longueurs du bras de levier  $CM$ .

Il faut en conclure que le fil  $DE$  est soumis à une force verticale suivant la verticale  $OM$ . Avec les sens du champ et du courant indiqués sur la figure, on

constate que la force est dirigée vers le bas.

On pourrait en outre admettre l'existence de forces ayant un moment nul par rapport à  $C$ , savoir: une force parallèle à  $C$ , un couple d'axe perpendiculaire à  $C$ . Mais si l'on fait tourner la balance de  $50^\circ$  autour de la verticale  $OM$ , de façon à amener le fléau de  $Ox$  en  $Oy$ , on constate que la pesée donne le même résultat. Il faut en conclure qu'il n'y a ni force horizontale ni couple d'axe horizontal. On voit aussi qu'il n'y a pas de couple à axe vertical, en suspendant le conducteur  $DE$  par un fil et en constatant que les forces électromagnétiques ne le font pas tourner.

Voici des chiffres obtenus pour le bras de levier  $CM$  et les poids correspondants avec un courant de  $9,5$  ampères dans l'électro-aimant et dans le fil  $DE$ , de longueur  $l = 2,3$  cm.

bras de levier $CM$	poids
$30,05$	$592,15$
$15,15$	$292,62$
rapport $1,98$	$1,97$

L'égalité des rapports est vérifiée au degré d'approximation des expériences.

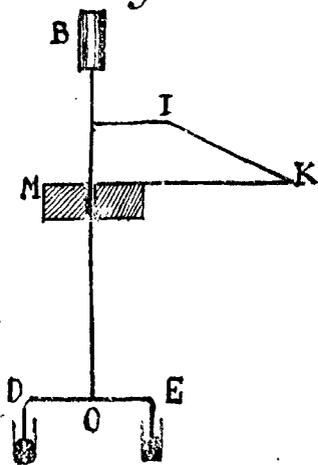
Ainsi les actions électromagnétiques sur l'élément  $DE$  se réduisent à une force  $F$  appliquée au milieu  $O$  de  $DE$ , perpendiculaire au champ magnétique  $H$  et à l'élément  $DE$ , et orientée

suivant l'axe du cycle  $[DE \ H]$ .

On constate alors les lois suivantes :

1<sup>o</sup>) Proportionnalité de la force à la longueur du fil. -  
 2<sup>o</sup>) Proportionnalité à l'intensité du courant. - Comme nous n'avons pas encore défini l'intensité électromagnétique, et que précisément nous nous servirions de la loi de Biot et Savart pour mesurer l'intensité, nous devons nous reporter à la définition naturelle qui est la vitesse du déplacement électrochimique. Il suffit de placer sur le circuit un voltamètre à azotate d'argent pour constater que la force électrodynamique est proportionnelle à l'intensité du courant.

3<sup>o</sup>) Proportionnalité au sinus de l'obliquité. - On fait tourner  $DE$  autour de la verticale de suspension  $OM$ . On mesure les angles  $\alpha$  avec un goniomètre formé d'un demi-cercle divisé horizontal  $MK$ , sur l'axe duquel tourne la tige verticale



$OMB$  munie du conducteur  $DE$ , d'un index  $I$  mobile sur le cercle divisé et d'un bouton de manœuvre  $B$ .

On constate que la force  $F$  est nulle quand  $DE$  est parallèle à  $Oy$ , et est maximum quand  $DE$  est perpendiculaire à  $Oy$ ; la force prend des valeurs égales pour des positions symétriques par rapport à celle du maximum, et l'on constate la pro-

portionnalité à  $\sin \alpha$ .

Le tableau suivant indique, dans la 2<sup>e</sup>me ligne, les poids observés pour diverses valeurs de  $\alpha$  (corrigés de l'effet magnétique du champ sur la pièce  $DEOMB$ , qui était égale à  $-0,1$  gr. en l'absence de tout courant dans  $DE$ ); dans la troisième ligne sont inscrites les valeurs calculées par la formule  $F = A \sin \alpha$ , en adoptant pour  $A$  le poids maximum, ( $3,07$  gr.) observé pour  $\alpha = 90^\circ$ .

angle $\alpha$	$90^\circ$	$70^\circ$	$50^\circ$	$30^\circ$	$10^\circ$	$0^\circ$
poids observés	3,07 gr.	2,90	2,36	1,52	0,50	0,00
$F = A \sin \alpha$	3,07	2,89	2,35	1,53	0,53	0,00

L'accord entre les nombres observés et calculés est satisfaisant.

La force  $F$ , que nous appellerons force électrodynamique, que est donc proportionnelle à l'intensité du courant, à la longueur du conducteur, et au sinus de l'obliquité  $\alpha$ , on peut donc écrire

$$(115) \quad F = H i l \sin \alpha$$

Le facteur de proportionnalité  $H$  est caractéristique du champ magnétique, il est donc naturel de le prendre pour mesurer l'intensité de la force magnétique. Les dimensions de  $H$  et l'unité de force magnétique dépendront des dimensions de  $i$  et de l'unité d'intensité de courant, qu'il faudra d'abord définir.

Il est évident que dans un champ non uniforme et pour un courant non rectiligne la formule (115) est encore valable, à condition de l'appliquer à chaque élément infinitésimal  $ds$ . La loi exprimée par la formule (114) est donc établie.

La formule (114) peut être mise sous une autre forme en considérant un élément de volume  $dv$  d'un tube de courant; on a en effet pour chaque tronçon de tube élémentaire:

$$(116) \quad \vec{dF} = \left[ \vec{u} \int H \right] ds ds = \left[ \vec{u} \int H \right] dv$$

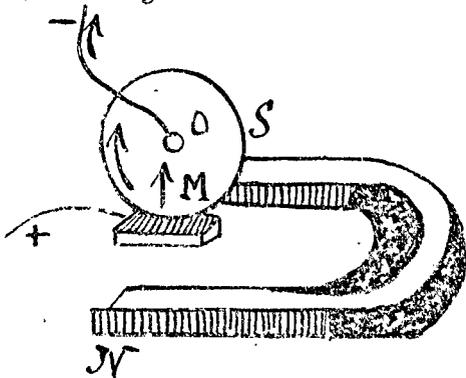
82. ~ L'action électrodynamique sur la matière du conducteur est une action indirecte. ~

La question se pose de savoir si l'action électrodynamique s'exerce sur la matière même du conducteur, ou sur les quantités d'électricité dont le déplacement produit le courant.

Le déplacement de la partie mobile d'un circuit (n° 80) ne permet pas de résoudre la question, puisque les quantités d'électricité ne peuvent sortir du fil et qu'une

action sur ces quantités d'électricité entrainerait le fil lui-même. Il faut donc réaliser une expérience dans laquelle les quantités d'électricité sont libres de se déplacer dans le conducteur, sans que la substance même soit nécessairement obligée de suivre leur mouvement. Ce résultat est obtenu avec le disque de Faraday.

Disque de Faraday. (1) Un disque effleure le mercure, placé en M auquel aboutit un des fils d'une pile. L'autre fil touche l'axe de la roue: le courant parcourt donc le rayon vertical MO.



Cette roue est placée entre les deux pôles d'un aimant en forme de fer à cheval qui crée dans la région où passe le courant un champ dont les lignes de force vont de N vers S, à peu près normalement au disque. Les forces élémentaires

tendront toutes à faire tourner le disque dans le sens indiqué par la flèche et c'est effectivement ce qu'on observe.

On voit que les actions électrodynamiques se traduisent par une action sur la substance même du conducteur. À première vue, on serait donc porté à croire qu'elles s'exercent directement sur la matière (atomes et molécules); il n'en est rien cependant: l'action est indirecte.

Pour comprendre le phénomène, il nous faut anticiper sur les questions qui seront développées dans l'exposé de la théorie électromagnétique.

Nous montrerons que le courant est dû à un déplacement d'ensemble, dans le sens opposé à celui de la force électrique, de particules libres chargées d'électricité négative<sup>(2)</sup> (électrons). Le courant observé est la résultante des courants individuels formés par les déplacements des électrons. C'est sur les électrons que les forces électrodynamiques agissent directement, mais ces actions se transmettent à la matière

(1) Quand le disque est remplacé par une roue dentée, dont les dents seules viennent toucher le mercure, le dispositif porte le nom de roue de Barlow. Mais les dents ne servent à rien.

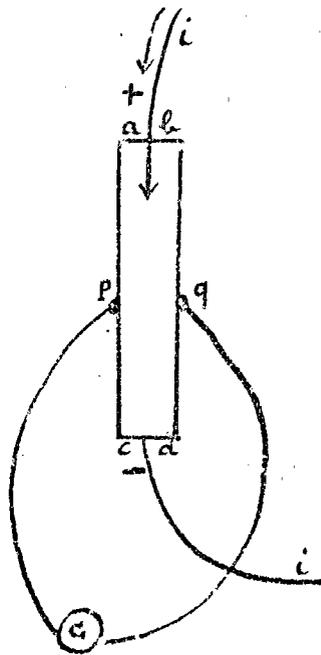
(2) C'est parce que la charge est négative que le mouvement a lieu en sens opposé du sens de la force électrique, qui est dirigée dans le sens des potentiels décroissants.

du conducteur par les chocs continus des électrons contre les molécules.

Si cette interprétation est exacte, les forces électrodynamiques doivent tendre, en moyenne, malgré les chocs subis par les particules électrisées, à donner à celles-ci un déplacement d'ensemble par rapport au conducteur, dans une direction normale au courant et au champ. On doit donc, en plus de l'action transmise à la matière, observer une déviation des lignes de courant. C'est le phénomène découvert par Hall (1879).

### 83. ~ Phénomène de Hall. ~

À travers une plaque métallique rectangulaire, faisons passer un courant dont l'entrée se fait par  $ab$  et la sortie par  $cd$ . Sur les deux autres côtés, cherchons



deux points  $p$  et  $q$ , où le potentiel ait la même valeur, de sorte qu'il ne se produise aucun courant dérivé quand on relie ces points par un fil conducteur.

On constate qu'un courant permanent passe dans ce fil dérivé lorsqu'on produit un champ magnétique normal à la plaque. Le courant reste constant tant que l'intensité du courant principal et que l'intensité du champ ne varient pas.

Le champ magnétique a dévié les lignes équipotentielles. Au champ électrique du courant s'est superposé un champ électri-

que transversal. La différence de potentiel entre  $p$  et  $q$  change de sens avec le sens du courant et le sens du champ magnétique.

On appelle coefficient de Hall  $R$  le quotient de la force électrique  $h$  du champ transversal par le produit de la force magnétique  $H$  et de la densité  $u$  du courant.

On écrit donc:

$$(117) \quad R = \frac{h'}{H u}$$

ou, en appelant  $l$  la largeur  $pq$  de la plaque et  $d$  son épaisseur:

$$(118) \quad R = \frac{h' l d}{H u l d} = \frac{\psi d}{H i}$$

$\psi$  étant la différence de potentiel mesurée entre  $p$  et  $q$ , et  $i$  l'intensité du courant principal.

Si maintenant on fait tourner la force magnétique  $H$ , dans le plan normal à  $pq$ , on constate que la différence de potentiel entre  $p$  et  $q$  diminue et varie proportionnellement à  $\sin(H, u)$ , on peut donc écrire la formule vectorielle:

$$(119) \quad \vec{h}' = R \left[ \vec{H} \vec{u} \right]$$

Le coefficient de Hall  $R$  dépend du métal; il est pour la plupart des métaux de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-4}$ , ce qui avec des lames de  $1^{\text{mm}}$  d'épaisseur, traversées par un courant de 10 ampères et placées dans un champ assez intense de 10000 gauss, donne seulement une différence de potentiel transversale de l'ordre du microvolt. Mais pour le bismuth, le tellure, l'antimoine et pour les métaux magnétiques  $R$  est bien plus grand: il atteint 100 dans le bismuth à très basse température.

En première approximation et pour une température constante  $R$  est à peu près constant pour un certain nombre de métaux, mais cela est inexact pour d'autres. Pour tous, la différence de potentiel transversale  $\psi$  est proportionnelle à  $i$ ; mais elle peut n'être pas proportionnelle à  $H$ .

Si l'existence de l'effet Hall n'est pas surprenante, il n'en est pas de même des résultats expérimentaux obtenus. Le phénomène est extrêmement varié et compliqué; de tous les phénomènes qui se rattachent à la conductibilité, il est le plus réfractaire à toute théorie. Parmi les résultats inattendus, nous citerons les suivants:

L'effet Hall change de sens d'un métal à un autre.  
Bien plus, avec un même échantillon de bismuth

le changement de sens de la différence de potentiel transversale peut être obtenu par un accroissement suffisant du champ magnétique ou par un abaissement suffisant de la température. (1)

Dans le bismuth il y a superposition de deux effets qui suivent des lois différentes (2): l'un est proportionnel au champ ( $R$  constant à température constante); l'autre tend vers une valeur constante quand le champ augmente. Des traces de tellure ont une influence énorme sur la grandeur et le sens de ces deux effets.

Nous reviendrons plus tard sur l'effet Hall. Pour le moment, le simple fait que la différence de potentiel transversale change de signe par renversement du sens du courant et aussi par renversement du sens du champ magnétique va nous conduire à un résultat important relatif à la nature du champ électrique et à la nature du champ magnétique.

84. ~ La force électrique est un vecteur polaire et la force magnétique est un vecteur axial. ~

Il résulte de l'expression (114) (ainsi que nous l'avons déjà indiqué en note) que les vecteurs  $ids$  et  $H$  sont d'espèces différentes, car leur produit, qui est égal à une force, est un vecteur polaire (n° 2). Par suite, comme le vecteur densité de courant  $u$  est de même espèce que  $ids$ ,  $u$  et  $H$  sont d'espèces différentes.

D'autre par le phénomène de Hall, qui s'inverse avec le champ magnétique et le courant, nous a conduits à l'équation vectorielle (119), où  $h'$  et  $u$  sont des vecteurs de même espèce.

D'après (119), le vecteur force électrique  $h'$  est un vecteur de même espèce que le produit vectoriel  $[H u]$ ;  $H$  et  $u$  étant, comme nous venons de le dire, d'espèces différentes,  $h'$  est

(1) Jean Becquerel *comptes rendus de l'Ac. des sc.* 1912 et 1913.

(2) *id.* *id.*

nécessairement un vecteur polaire. Le vecteur  $\vec{u}$ , de même espèce qu'une force électrique est donc aussi un vecteur polaire et  $\vec{H}$ , qui est d'espèce différente est forcément un vecteur axial.  
Le champ magnétique possède la symétrie du cylindre tournant.

## 85. ~ La force électrodynamique est une force d'inertie. ~

Un fait remarquable est que la force électrodynamique qui s'exerce sur un élément de courant est normale au courant. Le fait évoque immédiatement l'idée de la force centrifuge composée qui est normale au déplacement d'un point matériel : la nature du champ magnétique, dont le vecteur est axial, comme une rotation, vient confirmer l'analogie. Précisons ces idées, indépendamment de toute hypothèse sur le mécanisme du courant.

La loi de Biot et Savart (form. 114) définit l'unité de force magnétique quand on a choisi l'unité d'intensité, mais elle nous laisse libres dans ce choix. Prenons donc, provisoirement, pour la question qui nous occupe, un système tel que  $i ds$  soit homogène à une quantité de mouvement, et posons :

$$\vec{i} ds = \vec{v} dm$$

On reconnaît alors, dans l'expression de la force électrodynamique :

$$d\vec{F} = \left[ \vec{i} ds \vec{H} \right] = dm \left[ \vec{v} \vec{H} \right]$$

l'expression de la force centrifuge composée

$$d\vec{F} = \mathcal{Q} dm \left[ \vec{v} \vec{\omega} \right]$$

où le vecteur  $\vec{\omega}$  représente la rotation d'entraînement et  $\vec{v}$  la vitesse relative. Il y a identification si l'on pose :  $\vec{H} = \mathcal{Q} \vec{\omega}$ .

Ainsi, un élément de courant  $i ds$  dans un champ magnétique  $\vec{H}$  se comporte comme un point matériel de masse mécanique  $dm$ , animé de la vitesse  $\vec{v} = \frac{i ds}{dm}$ , dans un milieu dont la rotation d'entraînement est  $\frac{\vec{H}}{\mathcal{Q}}$ .

La force électrodynamique présente donc le caractère

d'une force centrifuge composée, c'est à dire d'une force d'inertie.

De même que le gyroscope tend à placer son axe parallèlement à celui de la Terre, de même le solénoïde ou l'aimant s'oriente parallèlement au champ magnétique.

Il résulte de ce qui précède que l'espace où règne un champ magnétique possède le caractère d'un milieu en état de mouvement tourbillonnaire; l'énergie dont cet espace est le siège n'est donc pas une énergie potentielle, c'est une énergie cinétique.

Le caractère cinétique de l'énergie magnétique se manifeste dans tous les phénomènes électromagnétiques. Il importait d'insister sur ce fait, dès le début de l'électromagnétisme, afin de donner une notion juste de la nature du champ magnétique.

## §2. Mesure électromagnétique de l'intensité.<sup>(1)</sup>

Le courant produit un champ magnétique. Plus le courant est intense, plus la force magnétique est grande. Pouillet a établi que la force magnétique est proportionnelle à la vitesse du déplacement électrochimique: nous nous proposons de montrer comment cette loi conduit au choix de l'unité d'intensité du système dit électromagnétique.

Comme les champs des courants sont assez faibles, le réactif employé par Pouillet est, non pas une portion mobile de circuit parcouru par un courant, mais une aiguille aimantée beaucoup plus sensible. Il importe donc d'étudier d'abord la réaction de l'aiguille aimantée et de la comparer à celle des courants, étudiée au paragraphe précédent.

### §6. ~ Vecteur moment magnétique. ~

---

(1) d'après les leçons d'électricité de M. E. Carvallo.

Dans un champ magnétique uniforme, plaçons un circuit plan parcouru par un courant  $i$ . Ce circuit va être soumis à un couple qui tendra à orienter son plan normalement au champ magnétique. Ce résultat, qui peut d'ailleurs être établi par expérience, est une conséquence de la loi fondamentale de l'électromagnétisme.

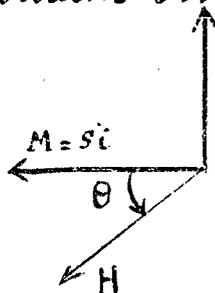
Supposons, pour fixer les idées sur un cas simple, que le circuit soit circulaire; soit  $\theta$  l'angle de l'axe du circuit et de la force magnétique  $H$ ; décomposons le vecteur  $H$  en deux composantes, l'une  $H \cos \theta$  normale au circuit, l'autre  $H \sin \theta$  parallèle au plan du circuit. Des forces électrodynamiques élémentaires dues à la composante  $H \cos \theta$  sont dans le plan du circuit; elles ont une résultante nulle car en deux points diamétralement opposés elles sont égales et contraires.

Un calcul simple montrerait que la composante  $H \sin \theta$  donne lieu à des forces électrodynamiques qui se réduisent à un couple directeur, qui tend à orienter l'axe du circuit parallèlement à  $H$  et dont le moment a pour expression:

$$(120) \quad K = Si. H \sin \theta$$

S'étant l'aire du circuit. Cette expression est d'ailleurs générale et s'applique à un circuit de forme quelconque, comme nous l'établirons plus loin.

De même qu'on a attaché au champ magnétique un vecteur  $H$  qui le caractérise, on peut attacher au circuit du courant  $i$  un vecteur  $M$ , qui a pour grandeur le produit



si, pour direction la normale au circuit, et dont le sens est vers la gauche de l'observateur d'Ampère, c'est à dire du côté de la face positive du circuit ( $n^o 1$ ). Ce vecteur est le moment magnétique.

Le moment du couple directeur est le pro-

duit vectoriel de  $M$  et de  $H$

$$(121) \quad K = [M \ H]$$

Un solénoïde formé de  $n$  spires peut être assimilé à  $n$

circuits circulaires juxtaposés. Chacune des spires obéissant à la même loi, il en est de même du solénoïde dont l'axe s'oriente parallèlement au champ magnétique: son moment magnétique est  $M = nsi$ .

Pour comparer deux champs magnétiques, il suffit de comparer les couples directeurs que ces champs exercent sur un même solénoïde parcouru par le même courant, mais on peut remplacer le solénoïde par un aimant, plus sensible.

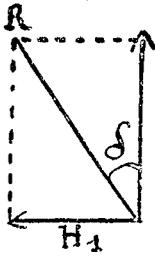
Un aimant est, en effet, soumis à un couple dans un champ uniforme, et ce couple peut être représenté par l'expression (121) qui définit le moment magnétique de l'aimant. Mais il faut, pour cela, que le vecteur qui agit sur l'aimant soit bien le même vecteur  $H$  qui agit sur un courant, c'est à dire le vecteur défini par l'équation (115): il en est bien ainsi à cause de l'identité des actions qui s'exercent sur un solénoïde et sur un aimant.

Si, avec la balance de torsion, où le couple de torsion d'un fil fait équilibre au couple qui s'exerce sur un solénoïde dans un champ magnétique, on mesure le rapport des deux couples dans deux champs différents, on obtient le rapport des intensités de ces deux champs; en répétant la même expérience avec un aimant au lieu d'un solénoïde, on trouve le même rapport. De plus, Weber, dans des expériences dont nous avons déjà parlé, a montré que lorsqu'on produit un champ magnétique non uniforme (avec un aimant ou un solénoïde), l'action exercée sur un petit aimant et l'action exercée sur un petit solénoïde varient, avec l'obliquité et avec la distance, suivant la même loi.

## 87. ~ Boussole des tangentes et boussole des sinus. (Pouillet) ~

La méthode de Pouillet, pour la comparaison de deux champs magnétiques, consiste à faire agir ces deux champs à la fois sur le même aimant.

Le champ résultant de deux champs magnétiques s'obtient en faisant la somme géométrique  $R$  de leurs forces magnétiques  $H$  et  $H_1$  (addition des vecteurs). La boussole se met en équilibre dans la direction  $R$ .

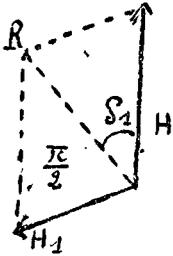


Si le vecteur  $H_1$  est perpendiculaire à  $H$ , l'angle  $\delta$  de  $R$  avec  $H$  fait connaître  $H_1$  par la formule

$$(122) \quad H_1 = H \operatorname{tg} \delta$$

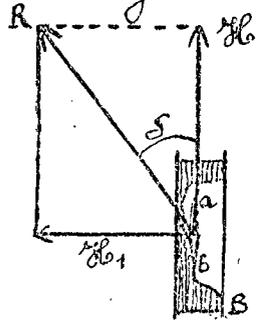
Si le vecteur  $H_1$  est perpendiculaire à  $R$ , on a :

$$(123) \quad H_1 = H \sin \delta_1$$

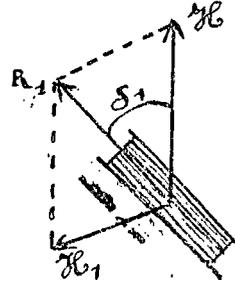


Ces deux relations sont utilisées dans la boussole de Pouillet.

La boussole de Pouillet (d'où dérivent tous les galvanomètres à aimant mobile), est constituée



Boussole des tangentes



Boussole des sinus

par une bobine circulaire (solénoïde très court) mobile autour d'un diamètre vertical, au centre de laquelle est suspendue une petite boussole  $a b$ .

L'aiguille  $a b$  s'oriente dans la direction du champ terrestre  $H_0$ . Le cadre étant orienté dans le méridien magnétique, l'aiguille est parallèle au plan du cadre. Lorsqu'un courant passe dans la bobine, le champ produit  $H_1$  est normal au champ terrestre  $H_0$ ; l'aiguille s'oriente suivant le champ résultant, et d'après (122) on a :

$$H_1 = H_0 \operatorname{tg} \delta.$$

La mesure de la déviation  $\delta$  fait donc connaître  $H_1$  en fonction du champ terrestre  $H_0$ . La boussole ainsi employée est dite boussole des tangentes.

Pouillet a formé le cadre d'un cercle très grand (1<sup>m</sup> de diamètre) et a suspendu au centre un aimant très petit. Dans ces conditions les extrémités de l'aiguille

restent à peu près à la même distance de chaque élément du cadre et les forces qui s'exercent sur l'aiguille sont pratiquement indépendantes de sa déviation. Deux courants  $i$  et  $i'$  donnent des déviations proportionnelles aux tangentes des déviations.

Au lieu de laisser le cadre en place, faisons-le tourner autour de la verticale de façon à poursuivre l'aiguille dans son déplacement, jusqu'à ramener le plan du cadre à être parallèle à l'aiguille. Soit  $\delta_1$  l'angle dont ont tourné le cadre et l'aiguille, on a (form 123):

$$H_1 = H \sin \delta_1.$$

La boussole ainsi employée est dite boussole des sinus. Bien entendu, cet emploi de la boussole n'est possible que pour  $H_1 < H$ .

Le but de ce dispositif est de conserver, dans toutes les expériences, la même position relative de l'aiguille et du cadre; il est alors inutile, pour la comparaison de deux courants  $i$  et  $i'$ , d'employer un cadre aussi grand que dans la boussole des tangentes car, même si l'aiguille n'est pas dans un champ uniforme, comme nous l'avons supposé en écrivant l'équation (123), les intensités  $i$  et  $i'$  sont proportionnelles aux sinus des déviations.

## 88. ~ Loi de Pouillet. ~<sup>(1)</sup>

Pour comparer l'intensité d'un courant (vitesse du déplacement électrochimique) au champ magnétique qu'il produit, Pouillet a placé sur le circuit d'une pile un voltamètre et une boussole des sinus. Il a mesuré, d'une part la déviation  $\delta_1$  de l'aiguille de la boussole, d'autre part le temps  $t$  nécessaire au dégagement de 2 cm<sup>3</sup> d'hydrogène.

Si  $\delta_1$  mesure le champ magnétique du courant<sup>(2)</sup> (la

(1) Comptes rendus 1837. Physique expérimentale 1844.

(2) Pour que le champ ainsi mesuré soit pratiquement égal au champ au centre de la bobine, il faut un cadre de grandes dimensions, comme dans la boussole des tangentes, mais de toutes façons, même si cette condition n'est pas réalisée, comme l'aiguille a toujours la même position par rapport au cadre, son  $\delta$  est proportionnel au champ.

composante horizontale  $H$  du champ terrestre étant prise pour unité);  $\frac{1}{t}$  mesure la vitesse du déplacement électrochimique. Le produit  $t \sin \delta_1$  est donc une mesure du rapport du champ produit par le courant au centre de la bobine à l'intensité du courant, définie comme vitesse du déplacement électrochimique. La constance de  $t \sin \delta_1$  a été vérifiée à un cinquantième près; Avec le voltamètre à azotate d'argent, on trouverait une constante meilleure.

La loi de Pouillet s'énonce donc ainsi: le champ magnétique au centre d'une bobine est proportionnel à la vitesse du déplacement électrochimique du courant qui traverse la bobine.

Constante Galvanométrique. — Quand on change le rayon  $R$  et la longueur  $L$  du fil de la boussole de Pouillet, le champ varie proportionnellement à  $L$  et à  $\frac{1}{R^2}$ . Pouillet ne s'est pas arrêté à ces lois parcequ'elles résulteraient des recherches antérieures, notamment de celles de Biot et Savart, mais il serait facile de les établir avec la boussole.

En résumé le champ magnétique du courant au centre de la bobine est donné par la formule:

$$(124) \quad H = K \frac{L}{R^2} i$$

Le coefficient  $G = \frac{L}{R^2}$  est la constante galvanométrique de la boussole. Quant au coefficient  $K$ , il ne dépend que des unités choisies pour mesurer les grandeurs  $H, i, L, R$  qui figurent dans la formule (124).

## 89. — Unité d'intensité C.G.S.

On choisit les unités de façon à réduire le coefficient  $K$  à l'unité de système qui en résulte, et qui a été adopté par le congrès international de 1881 est appelé système électromagnétique parceque, supprimant le facteur  $K$ , il donne à la force magnétique du courant son expression la plus simple.

Pour définir l'unité électromagnétique d'intensité, plaçons au centre et dans le plan de la bobine de Pouillet un élément conducteur  $l$  parcouru par le même

-courant  $i$  que la bobine ; la force électrodynamique qui s'exerce sur cet élément est :

$$(125) \quad F = ilH = \frac{lL}{R^2} i^2 \quad (\text{d'après 124, avec } K=1)$$

Cette formule donne la mesure électromagnétique C.G.S. de  $i$  si l'on évalue en dynes la force  $F$  et en centimètres les longueurs  $l, L, R$ .

$$(126) \quad i = \sqrt{\frac{R^2 F}{lL}} = \sqrt{\frac{(F/l)}{G}}$$

Pour avoir l'unité d'intensité, il suffit de faire, dans la deuxième expression  $\frac{F}{l} = 1$  et  $G = 1$ . L'unité est donc l'intensité du courant qui, passant dans une boussole de constante galvanométrique égale à 1, produit une poussée de 1 dyne par centimètre sur un courant de même intensité placé au centre et dans le plan de la boussole.

Pratiquement, il est avantageux de remplacer d'abord le fil explorateur  $l$  par une bobine afin de multiplier les effets, puis de donner à la bobine de Pouillet la forme d'un solénoïde moins aplati afin d'avoir un champ uniforme. Tel est le principe de l'électrodynamomètre que nous verrons plus loin, et dont le but est de mesurer l'intensité en valeur absolue par la pesée de la force électrodynamique que le courant produit entre les deux bobines.

Ayant défini l'unité C.G.S. d'intensité, nous obtenons l'unité de force magnétique par la formule de Biot et Savart; cette unité s'appelle Gauss : c'est l'intensité du champ magnétique qui exerce une poussée de 1 dyne par centimètre sur le conducteur d'un courant d'intensité 1 (10 ampères). (1)

Le tableau suivant résume les définitions et dimensions des grandeurs électromagnétiques qui nous ont servi jusqu'à présent.

(1) La composante horizontale  $H_h$  du champ terrestre, périodiquement variable en chaque lieu, et variable d'un lieu à un autre, est voisine de 0,2 gauss.

Formules de définition et dimensions des unités C. G. S.

$$\text{Intensité } i = \sqrt{\frac{F}{\ell}} \quad L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$$

(racine carrée d'une force)

$$\text{Quantité d'électricité ou charge électromagnétique } \left\{ \begin{array}{l} q = it \quad L^{1/2} M^{1/2} \end{array} \right.$$

$$\text{Force électromotrice ou différence de potentiel } \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{W}{it} \quad L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} \end{array} \right.$$

$$\text{Puissance } \quad Ei \quad L^2 M T^{-3}$$

$$\text{Résistance } \quad r = \frac{W}{i^2 t} = \frac{E}{i} \quad L T^{-2} \text{ (vitesse)}$$

$$\text{Force magnétique } H = \frac{F}{i\ell} \quad L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$$

$$\text{Moment magnétique } M = Si \quad L^{5/2} M^{1/2} T^{-1}$$

Unités pratiques théoriques du système C. G. S.

$$\text{ampère} = 10^{-1} \text{ un. C.G.S.}$$

$$\text{coulomb} = 10^{-1}$$

$$\text{Volt} = 10^8$$

$$\text{Watt} = \text{volt} \times \text{ampère} \text{ et Kilo-watt} = 10^3 \text{ watts.}$$

$$\text{ohm} = 10^9$$

$$\text{Gauss} = 1 \text{ un. C.G.S.}$$

Systeme international. — Comme, pratiquement, les étalons représentant les unités

théoriques ne peuvent être rigoureusement réalisés, on a fixé deux étalons fondamentaux des mesures électriques, qu'on a détachés ainsi du système théorique, dont ils restent d'ailleurs très voisins.

Nous avons déjà dit (n° 48) que l'ohm international est, par définition, la résistance à 0° d'une colonne de mercure de 106<sup>m</sup> 300, de section uniforme, contenant 149<sup>g</sup> 4521. Les boîtes de résistance sont graduées en ohms internationaux.

L'ampère international est, par définition, le courant invariable qui, passant à travers une solution aqueuse d'azotate d'argent, dépose 0<sup>gr</sup> 001800 par seconde.

Les autres unités pratiques dérivent des deux unités ainsi définies.

### §3. - Champ magnétique des courants.

#### 90. - Loi des courants sinués.

Giampère (1) a montré qu'un circuit formé d'une partie rectiligne et d'une partie sinuée très rapprochées ne donne pas de champ magnétique appréciable.

Il en est ainsi chaque fois que le circuit du courant forme un cycle sensiblement nul. Pour éviter toute action d'un courant sur l'aiguille aimantée, il suffit d'enrouler l'un autour de l'autre le fil d'aller et le fil de retour du courant.

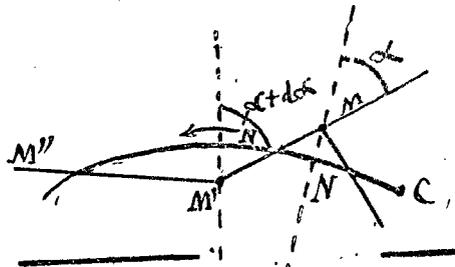
Ce cas particulier, joint à celui de la boussole de Pouillet, permet de résoudre le problème du champ d'un courant de forme quelconque.

#### 91. - Champ d'un courant. -

D'après la formule de la boussole (form. 124) le champ magnétique au centre d'une bobine circulaire est proportionnel à la longueur du fil :

Chaque élément  $ds$  du fil peut être considéré comme contribuant au champ pour une part  $dH = \frac{j ds}{r^2}$  (2)

La loi des courants sinués peut alors être interprétée ainsi : le fil



(1) Mémoires publiés par la société de Physique T. II. p. 23 et T. III p. 12.

(2) C'est là un artifice mathématique car un élément de courant n'existe jamais seul : il n'y a que des courants fermés. On pourrait ajouter au second membre une différentielle arbitraire assujettie à la condition de donner une somme géométrique nulle pour l'ensemble des éléments  $ds$  constituant le courant fermé.

d'aller et le fil de retour donnent deux champs égaux et de signes contraires; en d'autres termes le fil de retour pris dans le sens de l'aller, donne le même champ que le fil d'aller. Si l'on remplace le courant circulaire  $C$  par un courant sinuëux s'en écartant peu  $M M' M''$ , le champ sera le même. L'élément  $M M'$  entre donc dans la somme pour une part égale à celle de l'arc de cercle correspondant  $N N'$ . Designons alors par  $r$  la distance d'un point  $A$  quelconque à l'élément  $ds$ , par  $\alpha$  l'angle de l'élément  $ds$  et de la droite qui joint cet élément au point  $A$ , par  $d\alpha$  l'angle sous lequel l'élément  $ds$  est vu du point  $A$ ; nous avons, en notations cartésiennes:

$$(127) \quad dH = \frac{i ds \sin \alpha}{r^2} = \frac{i d\alpha}{r} \quad (\text{formule de Laplace})$$

La loi s'énonce donc ainsi (1): La part contributive de chaque élément  $ds$  du courant  $i$  dans le champ magnétique au point  $A$  situé à la distance  $r$  de cet élément, est un vecteur normal au point  $A$ ,  $ds$  et dirigé vers la gauche du bonhomme d'Ampère; sa grandeur s'obtient en mesurant par  $i$  le quotient  $\frac{d\alpha}{r}$  de l'angle sous lequel l'élément est vu du point, par la distance  $r$ .

Cette loi permet de calculer le champ magnétique d'un courant fermé comme résultant des divers éléments

(1) E. Carvallo, leçons d'électricité.

Cette loi a été découverte par Laplace sous une forme différente, faisant intervenir la notion fictive de "pôle magnétique". L'action d'un pôle de masse magnétique  $m$  sur un élément  $ids$  est:

$$dF = \frac{m i ds \sin \alpha}{r^2}$$

$\alpha$  étant l'angle de l'élément avec la droite qui le joint au pôle  $m$ .

On reconnaît la loi de Biot et Savart, car  $\frac{m}{r^2}$  est le champ magnétique produit par le pôle  $m$ , mais, sous cette forme l'expression de l'action d'un champ sur un courant ne présente qu'un intérêt historique, la notion de pôle n'intervenant jamais dans les applications.

Inversement, l'action d'un élément  $ids$  sur un pôle  $m$  sera égale à l'action exercée par  $m$  sur l'élément, mais de sens opposé. Si l'on fait  $m = 1$  dans la formule de Laplace,  $dF$  représente l'action exercée par l'élément  $ids$  sur une masse unité, c'est à dire le champ produit par l'élément de courant. On retrouve la formule (127). La formule de Laplace a été déduite par ce savant des expériences de Biot et Savart relatives à l'action d'un courant rectiligne sur un aimant. Comme nous avons suivi une marche différente, nous nous servirons de la formule (127) pour calculer le champ d'un courant rectiligne.

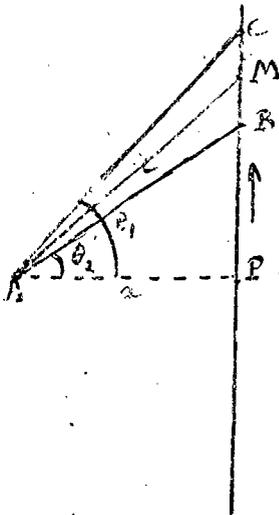
1<sup>re</sup> Division Physique 1920-21

46<sup>e</sup> feuille

du courant, les champs élémentaires s'ajoutant, non pas algébriquement, mais géométriquement. Un cas particulier important est celui du courant rectiligne étudié par Biot et Savart.

## 92 - Champ magnétique d'un courant rectiligne.

Cherchons quel est le champ magnétique produit au point A par le segment rectiligne BC. Soient AP la perpendiculaire abaissée de A sur la droite BC, à la distance AP,  $\theta$  l'angle MAP, M étant un point du segment BC.



Toutes les forces magnétiques élémentaires produites en A par les éléments de BC sont normales au plan abaissé et dirigées dans le même sens (au dessus du plan du papier) le champ produit par l'élément en M a pour expression:

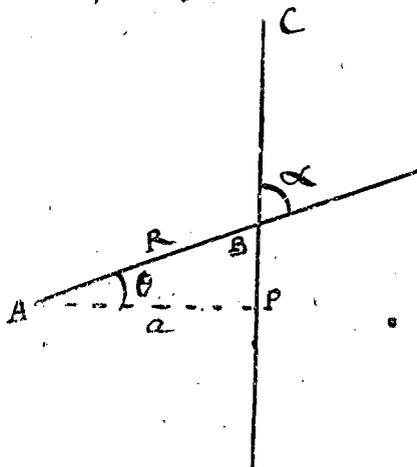
$$dH = \frac{id\theta}{r} = \frac{r \cos \theta dr}{a^2}$$

D'où :

(128)

$$H = \frac{i}{a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$\theta_1$  et  $\theta_2$  étant les angles  $\widehat{BAP}$  et  $\widehat{CAP}$ .



Supprimons le point C à l'infini, et soit  $\theta$  l'angle BAP, le champ produit par BC est, en désignant AB par R,

$$H = \frac{i}{a} (1 - \sin \theta) = \frac{i}{R} \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

Soit  $\alpha$  l'angle formé par AB et BC,  $\alpha$  est le complément de  $\theta$ .

$$H = \frac{i}{R} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Ou en remplaçant  $1 - \cos \alpha$  par  $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  et  $\sin \alpha$

$$H = \frac{i}{R} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

par  $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

(129)

Enfin pour un courant rectiligne indéfini on a:

$$(130) \quad H = \frac{2i}{a}$$

Comme l'avait montré l'expérience des fantômes magnétiques, les lignes de force magnétique sont des circonférences concentriques ayant pour axe le courant.

### 93. - Expériences de Biot et Savart.

Les formules (130) et (129) expriment des lois qui ont été trouvées expérimentalement par Biot et Savart. (1)

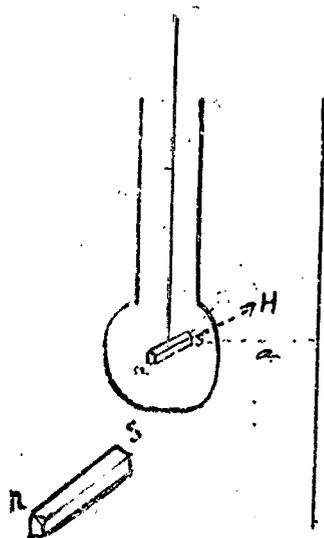
La méthode employée pour l'exploration du champ magnétique était celle des oscillations d'un petit barreau aimanté.

Les premières expériences ont porté sur l'action d'un courant rectiligne; un fil tendu verticalement et parcouru par un courant agissait sur un petit barreau aimanté très court, suspendu à un fil de soie à l'intérieur d'une cage en verre (pour le soustraire aux courants d'air).

L'action du courant pouvait être assimilée à celle d'un courant rectiligne indéfini.

Dans une première série de mesures, le barreau avait été rendu indifférent à l'action de la Terre, par l'action compensatrice d'un aimant.

On reconstruit que le barreau prenait une position d'équilibre stable dans une direction normale au plan passant par le courant et l'axe de suspension. La période d'oscillation, quand le barreau était légèrement écarté de sa position d'équilibre, était donnée par la formule du pendule:



$$T = \frac{1}{N} = 2\pi \sqrt{\frac{\sum m r^2}{M H}}$$

$\sum m r^2$  étant le moment d'inertie et  $M$  le moment magnétique du barreau. Les carrés des fréquences  $N$  à différentes distances étaient donc proportionnelles aux intensités

(1) Annuaire. ch. et de Physic. 2<sup>e</sup> série t. XV p. 222 (1820)

du champ magnétique.

Dans une autre série d'expériences Biot et Savart suspendirent l'aimant compensateur et disposèrent le courant ainsi que le fil de suspension dans un plan normal au méridien magnétique; dans ces conditions, le bureau avait toujours la même position d'équilibre, qu'il fût soumis à l'action seule du champ terrestre ou à l'action combinée de ce champ et de celui du courant.

Faisant osciller le barreau sous l'action du champ terrestre  $H$ , puis sous l'action de  $H$  augmenté successivement des champs  $H_1$  et  $H_2$  dus au courant placé aux distances  $a_1$  et  $a_2$ , on mesurait trois fréquences  $N, N_1, N_2$ , dont les carrés étaient proportionnels à  $H, H+H_1, H+H_2$ : On avait donc:

$$\frac{H}{N^2} = \frac{H+H_1}{N_1^2} = \frac{H+H_2}{N_2^2}$$

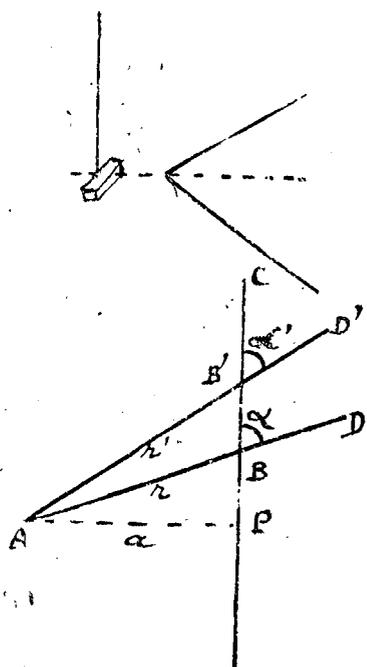
d'où

$$\frac{H_1}{N_1^2 - N^2} = \frac{H_2}{N_2^2 - N^2} \quad \text{et} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{N_1^2 - N^2}{N_2^2 - N^2}$$

L'expérience a montré que le dernier rapport était égal à  $\frac{a_2}{a_1}$

Ainsi, la force magnétique est inversement proportionnelle à la distance au fil conducteur du courant.

Enfin, Biot et Savart ont soumis l'aimant à l'action d'un courant angulaire dont la bissectrice passait par le



milieu du petit aimant. Si  $2\alpha$  est l'angle des deux portions de conducteur, et  $a$  la distance du sommet de l'angle à l'aimant, l'expérience prouve que la force magnétique est proportionnelle à  $\frac{1}{a}$  d'une part et à  $\text{tg} \frac{\alpha}{2}$  d'autre part, conformément à la formule (129).

Réciproquement, les résultats expérimentaux de Biot et Savart conduisent à la formule de Laplace (127), d'où l'on peut déduire la formule de la boussole (124) d'où résulte la définition de l'intensité électromagnétique.

En effet, soit un courant rectiligne; les expériences avec le courant angulai-

ce prouvent que la portion BC indéfinie dans un sens produit en A un champ inversement proportionnel à  $\frac{1}{AB}$  et proportionnel à  $\text{tg } \widehat{CBD}$ .

La part contributive d'une portion BB' sera la différence des forces magnétiques dues aux portions indéfinies BC, B'C. En posant  $AB = r$   $AB' = r'$   $\widehat{CBD} = \alpha$   $\widehat{CB'D'} = \alpha'$ , on aura:

$$H_{BB'} = K' \left( \frac{1}{r} \text{tg } \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{r'} \text{tg } \frac{\alpha'}{2} \right)$$

ou, comme  $r \sin \alpha = AP = a$

$$H_{BB'} = \frac{K'}{a} \left( \sin \alpha \text{tg } \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha' \text{tg } \frac{\alpha'}{2} \right) = \frac{2K'}{a} \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha'}{2} \right) = \frac{K'}{a} (\cos \alpha' - \cos \alpha)$$

Si BB' est infiniment petit

$$dH = \frac{K'}{a} d(-\cos \alpha) = \frac{K'}{a} \sin \alpha d\alpha = \frac{K'}{r} d\alpha = \frac{K' ds \sin \alpha}{r^2}$$

La formule de la boussole est alors:

$$H = \frac{K' L}{R^2}$$

Les expériences de Pouillet montrent que K' est proportionnel à la vitesse du déplacement électrochimique; on pose donc  $K' = i$ ; c'est la définition électromagnétique de l'intensité.

non exigé | Autre Définition de i <sup>(1)</sup>. — On définit souvent l'intensité d'une autre manière, qui a l'inconvénient d'introduire la notion de masse magnétique.

Supposons un courant vertical; plaçons un aimant sur un support capable de tourner librement autour d'un axe vertical coïncidant avec le fil. On trouve que, dans ces conditions, le courant est sans action pour imprimer à l'ensemble de l'appareil un mouvement de rotation autour de l'axe; donc l'action du courant vertical sur les deux pôles de l'aimant est telle que les moments des deux forces par rapport au courant pris comme axe sont égaux et contraires.

Soient m et -m les "masses magnétiques" des deux pôles,  $a_1$ ,  $a_2$  les distances de ces pôles au courant,  $H_1$ ,  $H_2$  les forces magnétiques, on a:

(1) Maxwell, traité d'électricité t. II p. 150

$$m H_1 a_1 = m H_2 a_2$$

ou

$$H a = c^2 = 2 i \text{ par définition de } i.$$

C'est la formule (130).

## 94. — Loi du flux de la force magnétique. —

Considérons un courant rectiligne. Les lignes de force sont des cercles ayant pour axe le courant; les tubes de force sont des anneaux, ils sont fermés sur eux-mêmes. A travers une surface quelconque fermée coupant un tube de force, le flux entrant est égal au flux sortant: le flux total est nul.

Ce résultat s'applique à la force magnétique due à un élément de courant et s'étend par suite à un courant quelconque: le flux dû à chaque élément de courant étant nul, le flux total de la force magnétique résultante des courants à travers toute surface fermée est nul.

La conservation du flux s'exprime encore en disant que le flux est le même à travers toutes les surfaces limitées par une même courbe fermée.

en tout point du champ on a donc:

$$(131) \quad \text{Div. } \vec{H} = 0 \quad (\text{condition solénoïdale générale})$$

Cette loi relative au champ des courants s'applique-t-elle au champ des aimants? La ressemblance du spectre magnétique d'un aimant avec celui d'un solénoïde montre qu'il doit en être ainsi pour les surfaces qui ne coupent pas l'aimant. On obtient une preuve plus complète en explorant le champ d'un aimant par la boussole, Weber ayant montré que pour des points éloignés le champ de l'aimant est le même que celui d'un solénoïde de même moment magnétique.

De l'étude des courants induits nous déduirons que la loi est tout à fait générale, à condition d'introduire un

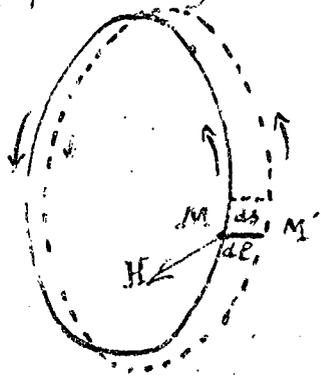
un nouveau vecteur  $B$  l'induction magnétique qui se confond avec le vecteur  $H$  dans les milieux non magnétiques: le remplacement de  $H$  par  $B$  fait disparaître la restriction faite plus haut dans le cas des aimants.

## §4. Travail et fonction des forces électrodynamiques.

### Fonction des forces magnétiques.

### §5. ~ Travail élémentaire des forces électrodynamiques. ~

Soit  $i ds$  un élément de courant,  $H$  la force magnétique au point  $M$  où se trouve l'élément. La force électrodynamique qui agit sur  $i ds$  est le produit vectoriel



$$d\vec{F} = [i ds \vec{H}] \quad (\text{loi fondamentale, n° 81})$$

Le travail de cette force pour le déplacement  $MM_1 = dl$  du point  $M$  est le produit scalaire:

$$d\mathcal{C} = (dl [i ds \vec{H}])$$

C'est le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs, (positif quand l'ordre de succession de  $dl$ ,  $i ds$ ,  $H$  correspond au mouvement d'une vis). Le produit peut s'écrire:

$$(132) \quad d\mathcal{C} = i (H [dl ds])$$

et sous cette forme on voit que c'est le produit de l'intensité par le flux de force magnétique coupé par l'élément  $ds$  dans le déplacement  $dl$ .

La puissance développée par la force électrodynamique est:

$$dP = \frac{dW}{dt} = \left( \frac{d\vec{l}}{dt} [\vec{i} d\vec{s} \cdot \vec{H}] \right)$$

est or  $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}$  vitesse de l'élément  $ds$ ; le produit  $i ds$  est égal au produit  $\vec{u} dV$  du vecteur courant par l'élément de volume  $dV$ ; la puissance développée sur l'élément  $dV$  est donc

$$(133) \quad dP = \left( \vec{v} [\vec{u} \cdot \vec{H}] \right) dV$$

et par unité de volume

$$(134) \quad \frac{dP}{dV} = \left( \vec{v} [\vec{u} \cdot \vec{H}] \right)$$

La puissance développée sur l'unité de volume par la force électrodynamique est, en chaque point, représentée par le parallélépipède construit sur les trois vecteurs vitesse, courant et force magnétique.

## 96. ~ Expression fondamentale du travail. Fonction des forces électrodynamiques. ~

Il résulte de l'expression du travail élémentaire que le travail total des forces électrodynamiques dans un déplacement quelconque du circuit, de  $C$  en  $C_1$ , est égal au produit de l'intensité du courant par le flux de force magnétique à travers l'aire balayée par le circuit dans son déplacement.

Puisque le flux est conservatif (n° 94), le flux à travers l'aire balayée par le circuit est égal au flux à travers le circuit  $C_1$  diminué du flux à travers le circuit  $C$ .<sup>(1)</sup>

(1) Nous appelons flux à travers le circuit la valeur constante (n° 94) du flux à travers une surface quelconque limitée par le circuit.

Le travail total a pour expression:

$$(135) \quad \mathcal{T} = i(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Le travail des forces électrodynamiques est égal au produit de l'intensité par l'accroissement du flux magnétique à travers le circuit.

Le produit de l'intensité du courant par le flux à travers le circuit est donc la fonction des forces électrodynamiques qui s'exercent sur le circuit.

Cette loi permet de résoudre, par application du théo. même des travaux virtuels, tel problème qu'on veut sur la statique ou la dynamique d'un circuit, de forme invariable ou déformable. (1)

l'unité de flux porte le nom de Maxwell. Un flux magnétique a pour dimensions  $L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$ .

## 97. ~ Méthode générale de calcul des forces électrodynamiques. ~

Vent on connaître la force  $X$  qui tend à déplacer le circuit  $C$  dans la direction  $Ox$ ? Il suffit de donner à  $C$  une translation virtuelle  $\delta x$ , d'où résultera un accroissement de flux  $\delta \varphi$ ; le produit  $i \delta \varphi$  mesure le travail  $X \delta x$ , et la force a pour expression

$$(136) \quad X = i \frac{\delta \varphi}{\delta x}$$

En particulier, si le champ magnétique est uniforme,  $\delta \varphi = 0$ , donc  $X = 0$ , ainsi:

Sur le circuit d'un courant placé dans un champ magnétique uniforme, la résultante de translation des forces électrodynamiques est nulle.

Vent on obtenir le moment  $K$  qui tend à faire tourner

(1) Les résultats à connaître et à utiliser se réduisent à deux: la "loi élémentaire" qui donne l'action exercée par le champ sur chaque élément du fil, et le théo. même sur le travail dans le déplacement du circuit, où toutes les actions mécaniques interviennent "en bloc". Dans toute application c'est l'une ou l'autre de ces lois (ou mieux encore toutes les deux) qu'il faut faire intervenir.

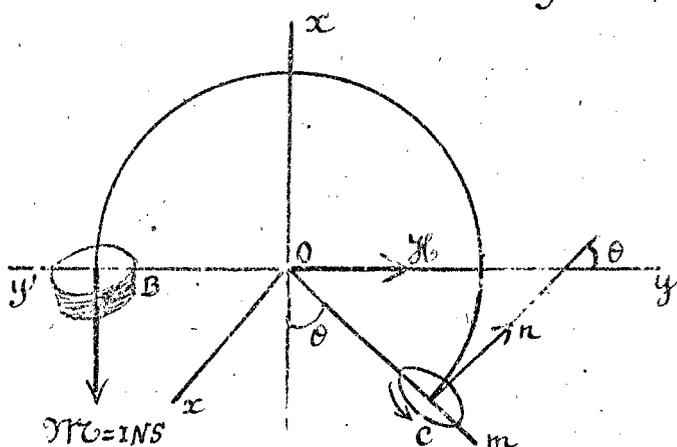
Rapport de M. l'examinateur Ch. Fabry janvier 1918.

C autour de  $Ox$ ? Imprimons au circuit, autour de  $Ox$ , une rotation qui augmente l'angle azimutal  $\theta$  de  $\delta\theta$ ; il en résulte l'accroissement de flux  $\delta\phi$ ; le travail est  $i\delta\phi$ ; on a donc:

$$(137) \quad K = i \frac{\delta\phi}{\delta\theta}$$

## 98. Application. Moment magnétique d'un circuit.

Soit  $C$  un circuit plan de forme quelconque et de surface  $S$ , dans le plan  $xom$ , mobile autour de  $Ox$  dans un champ uniforme dont la force  $H$  est dirigée suivant  $Oy$ . Soit  $n$  la normale à  $C$  du côté de la force positive de la surface  $S$ . Désignons par  $\theta$  l'angle  $(n, H)$ . Le flux du vecteur  $H$  à travers  $S$  est:



$$\phi = SH \cos \theta$$

d'où:

$$i d\phi = -iSH \sin \theta d\theta$$

Le moment des forces par rapport à  $Ox$  est donc:

$$K = i \frac{\delta\phi}{\delta\theta} = -iSH \sin \theta = iSH \sin(n, H)$$

$\mathcal{M} = iS$  est le moment magnétique, que nous représentons par un vecteur dirigé suivant la normale  $n$ . On a par conséquent:

$$\vec{K} = [\mathcal{M} \vec{H}]$$

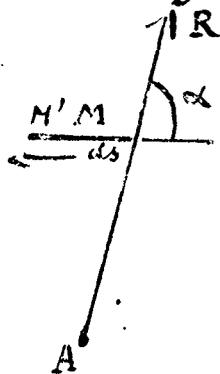
C'est le résultat annoncé au n° 86. Il s'applique à un circuit plan de forme quelconque.

Position d'équilibre. — Si un circuit est dans une position

telle que la fonction des forces  $i \cdot \varphi$  soit maximum, cette position correspond à un équilibre stable, car tout déplacement produisant une diminution de  $i \cdot \varphi$  donne un travail négatif; en d'autres termes, les forces électrodynamiques s'opposent au déplacement.

Dans l'exemple précédent, il y a équilibre stable pour  $\theta = 0$ . Il y a encore une position d'équilibre pour  $\theta = \pi$ , mais elle est instable.

## 99. - Fonction des forces magnétiques produites par un courant. Potentiel magnétique.



Le champ d'un élément de courant  $ids$  est donné par la formule (127) que nous avons établie au n°91:

$$(127) \quad dH = \frac{idss \sin \alpha}{r^2}$$

Ce champ est normal au plan  $AMM'$  et dirigé vers la gauche de l'observateur d'Ampère regardant le point  $A$  (vers l'avant du papier sur la figure ci-contre).

Définissons en  $M$  un vecteur  $\vec{R}$  de grandeur  $R = \frac{1}{r^2}$ , de direction et de sens  $AM$ . L'expression (127) s'écrit sous la forme vectorielle:

$$(138) \quad d\vec{H} = - \left[ \vec{ids} \vec{R} \right]$$

Comparons cette formule avec celle de Biot et Savart:

$$d\vec{F} \quad \left[ \vec{ids} \vec{H} \right]$$

qui exprime l'action d'un champ  $H$  sur le courant  $\vec{ids}$ . Nous voyons que  $dH$ , dans la formule (138), a une valeur égale, mais de signe contraire, à la valeur d' $F$  qui aurait la force électrodynamique qui s'exercerait sur l'élément  $MM'$  dans un champ magnétique d'intensité  $R$ .

La circulation, réelle ou virtuelle, du champ  $H$  du cou-

rant dans une translation du point A a donc la même expression que le travail, réel ou virtuel, de F pour une translation égale, mais opposée, du circuit dans un champ magnétique dont la force serait R; C'est à dire que la circulation de H et le travail de F dans le champ R ont même expression pour le même déplacement relatif de A et du circuit.

Le travail de F étant égal au produit de l'intensité,  $i$  par l'accroissement du flux de la force magnétique à travers le circuit quand on déplace celui-ci dans le champ, la circulation de la force magnétique produite par un circuit est égale à l'accroissement du flux de R à travers le circuit quand on déplace le point A.

Il y a donc une fonction des forces magnétiques

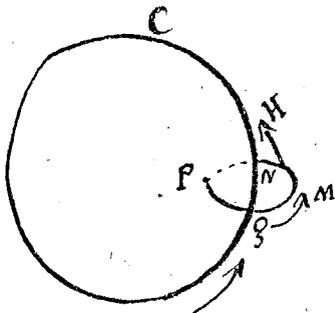
$$U = i \varphi$$

égale au produit de  $i$  par le flux du vecteur R. Comme  $R = \frac{1}{r^2}$ ,  $\varphi$  est égal à l'angle solide  $\Omega$  sous lequel le circuit est vu du point A, de sorte que:

$$(139) \quad U = i \Omega$$

La fonction des forces magnétiques produites par un circuit a pour valeur le produit de l'intensité du courant par l'angle solide sous lequel est vu le circuit.

L'angle solide est donné de signe de manière qu'à un accroissement de  $U$  corresponde un accroissement de  $\Omega$ , c'est à dire encore qu'à une circulation positive de H corresponde une augmentation de  $\Omega$ . Considérons, dans le plan du papier, le circuit C et une ligne de force MNPQ qui



coupe en M et P le plan du circuit; d'après la règle d'Ampère, la circulation de H est positive si la ligne de force est parcourue dans le sens MNPQ. Si nous considérons l'angle solide en M comme nul (on pourrait aussi le prendre égal à un multiple quelconque de  $4\pi$ ), il doit être positif sur l'arc MNP; on peut donc prendre

$\Omega$  positif et  $< 2\pi$  quand d'un point A on voit la face

negative du circuit  $C$ , c'est à dire quand l'observateur placé en  $A$  voit le circuit  $C$  décrit par le courant dans le sens des aiguilles d'une montre; dans le cas contraire,  $\Omega$  est négatif et inférieur en valeur absolue à  $2\pi$ , ou encore positif mais supérieur à  $2\pi$ .

Cu lieu de la fonction des forces, on considère souvent le potentiel magnétique  $\Psi_m = -U$  (1), mais le terme potentiel qui rappelle intentionnellement l'énergie potentielle est ici impropre, l'énergie magnétique ayant une nature cinétique.

## 100. ~ Pôles magnétiques - Inexistence des fluides magnétiques. ~

Dans ce qui précède, nous avons été amenés à considérer, autour d'un point  $A$ , un champ magnétique fictif dont la force aurait pour valeur  $R = \frac{1}{r^2}$ .

Mais  $\frac{1}{r^2}$  n'est pas homogène à un champ magnétique; il faut donc écrire  $R = \frac{m}{r^2}$  avec  $m = 1$ ,  $m$  étant non pas un nombre, mais une quantité positive ou négative qui aura pour dimensions  $L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$  et que nous appellerons masse magnétique; le champ considéré  $R = \frac{1}{r^2}$  sera le champ produit par un pôle magnétique unité placé en  $A$ .

L'élément de courant  $i ds$  exerçant sur le pôle unité une action égale à  $dH$  (formule 138), l'action exercée sur une masse magnétique  $m$  sera  $m dH$ , et d'une façon générale l'action exercée par un champ  $H$ , quelle que soit son origine, sur une masse  $m$  sera  $m H$  (homogène à une force mécanique).

Considérons alors le champ produit par une masse  $m$ ,  $H = \frac{m}{r^2}$  et dans ce champ plaçons une masse  $m'$  à la distance  $r$ , la force qui s'exercera entre les masses  $m$  et  $m'$  sera  $\frac{mm'}{r^2}$ . C'est la loi de Coulomb, qui avait attribué aux masses magnétiques une existence réelle.

Le champ étant newtonien, le théorème de Gauss (101) s'appliquerait et le flux magnétique à travers une surface fermée serait égal à  $4\pi \Sigma m$ ,  $\Sigma m$  étant la somme des

(1) On fait alors, pour  $\Omega$ , la convention de signe contraire, de manière que  $\Psi_m = i \Omega$

masses magnétiques enfermées à l'intérieur de la surface.

Mais l'hypothèse de Coulomb est inadmissible. En effet, pour caractériser quelque chose qui ressemble à un fluide, il faut évidemment que le signe de la masse  $m$  soit indépendant de la convention faite sur le sens de rotation des axes; il faut que  $m$  soit un scalaire de 2<sup>de</sup> espèce, ayant le signe + ou le signe -, mais gardant son signe par inversion du trièdre de référence.

Alors  $m\vec{k}$  est un vecteur polaire, puisque  $\vec{k}$  l'est. Or, après la formule (138) est nécessairement un vecteur polaire. Le vecteur polaire  $m\vec{k}$  représenterait un vecteur axial champ magnétique, ce qui est absurde.

## 101. ~ Circulation de la force magnétique le long d'un contour fermé. ~

Soit un circuit  $C$  parcouru par un courant  $i$  et produisant un champ magnétique  $H$ .

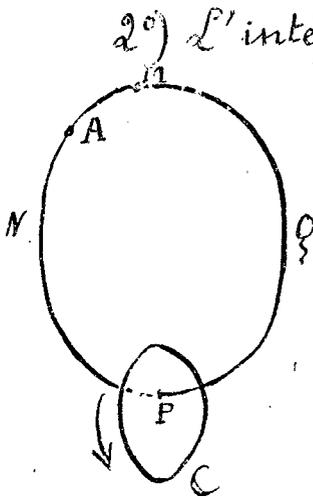
Nous remarquons d'abord que les lignes de force magnétiques forment des cycles fermés, et que par suite l'intégrale de la force magnétique le long d'une ligne de force ne peut pas être nulle; il en résulte évidemment que la fonction des forces magnétiques n'a pas une valeur unique en chaque point. D'ailleurs l'expression (139)  $V = i\Omega$  montre que  $V$  peut prendre une infinité de valeurs en progression arithmétique de raison  $4\pi i$ , puisque l'angle solide  $\Omega$  n'est défini qu'à un multiple de  $4\pi$  près.

Le fait n'a aucune importance quand on veut simplement déduire de  $V$  l'expression du champ, car la quantité arbitraire  $4\pi ni$  disparaît par dérivation. Il n'en est plus de même lorsqu'on évalue l'intégrale  $\int_C (H \cdot d\vec{s})$ , et il convient alors de suivre de près les variations de  $\Omega$ .

Supposons d'abord, pour plus de simplicité, qu'il s'agisse d'un circuit plan. Deux cas sont à considérer.

1<sup>o</sup>) L'intégration est faite le long d'un contour fermé qui ne coupe pas l'aire limitée par le circuit  $C$ .

L'angle solide revient, au bout du trajet, à la valeur initiale: la circulation de  $H$  est nulle.



2°) L'intégration est faite le long d'un contour fermé

$MNPQM$  qui coupe l'axe limitée par  $C$ .

La circulation est alors égale à  $4\pi i$ .  
Soit, en effet,  $M$  le point où le contour rencontre le plan du circuit  $C$ , à l'extérieur de ce circuit;  $P$  le point de rencontre à l'intérieur de  $C$ . Quand le point mobile  $A$  est en  $M$ , il voit le circuit  $C$  par la tranche, c'est à dire sous un angle solide nul.

L'angle solide augmente quand le point  $A$  parcourt l'arc  $MNP$ .

La valeur est  $2\pi$  quand  $A$  arrive en  $P$ ; puis  $\Omega$  augmente toujours quand  $A$  parcourt  $PQM$ , et prend la valeur de la sphère entière  $4\pi$  quand  $A$  revient à son point de départ  $M$ .

$$(140) \quad \int_L (\vec{H} \cdot d\vec{s}) = 4\pi i$$

Lorsque le circuit n'est pas plan, les résultats sont encore les mêmes. Si le contour n'enlace pas le circuit, la circulation est nulle, mais si le contour et le circuit sont enlacés, c'est à dire sont disposés comme deux anneaux consécutifs d'une chaîne, l'intégrale est  $4\pi i$ ; on le voit en considérant une sphère de rayon  $\perp$  dont le centre est en  $A$  et parcourt le contour; au cours du trajet, la surface totale de la sphère se trouve balayée par la perspective du circuit  $C$ .

Supposons maintenant plusieurs circuits parcourus par des courants  $i_1, i_2, \dots$ . L'équation (140) s'applique au champ magnétique de chacun des courants qui sont enlacés par le contour, et comme le champ total est la résultante des champs partiels, on a:

$$(141) \quad \int (\vec{H} \cdot d\vec{s}) = 4\pi \sum i$$

$\sum i$  étant la somme des intensités des courants dont les circuits sont enlacés par le contour.

Nous pouvons donner de cette loi une expression plus générale:

L'intégrale ou circulation de la force magnétique d'un ensemble de courants le long d'un contour fermé est égale au

flux du vecteur courant à travers ce contour, multiplié par  
 $\frac{4\pi}{c}$ .

En effet, si un des circuits et le contour ne sont pas enlacés, une surface limitée au contour ne coupe pas le circuit, ou le coupe un nombre de fois pair de fois. Si le circuit et le contour sont enlacés, le circuit traverse un nombre impair de fois une surface limitée au contour, et le flux du courant est égal à l'intensité. On a donc:

$$(142) \int_C (\vec{H} \cdot d\vec{s}) = 4\pi \iint_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

Appliquons maintenant le théorème de Stokes. L'intégrale de  $\vec{H}$  le long d'un contour fermé est égale au flux du vecteur tourbillon de  $\vec{H}$  à travers une surface limitée au contour. La loi (142) se traduit par l'équation locale, c'est à dire applicable en chaque point:

$$(143) \text{Curl. } \vec{H} = 4\pi \vec{u}$$

C'est l'une des équations fondamentales de Maxwell: étendue au régime variable et aux courants de déplacement, elle joue un rôle capital dans la théorie électromagnétique de la lumière.

L'équation (143) montre que les lignes du vecteur courant sont les lignes de tourbillon du champ magnétique. En tout point où le courant est nul, le tourbillon de  $\vec{H}$  est nul, et le champ dérive d'une fonction des forces.

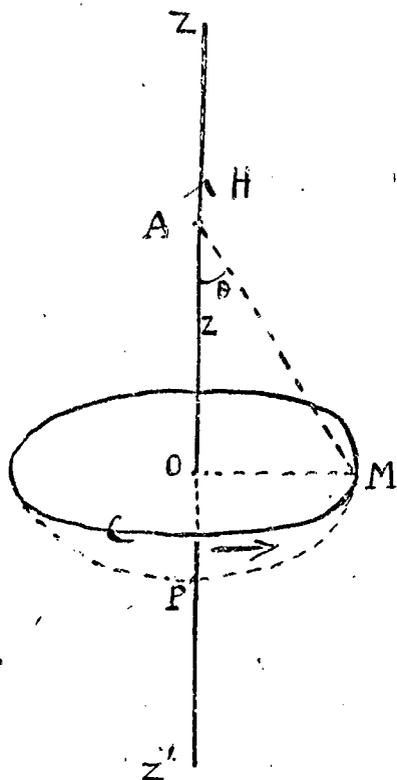
Cette fonction des forces n'est uniforme que si l'on s'astreint à parcourir des contours qui n'enlacent aucun courant. Si on lève cette restriction, la fonction des forces est multiforme.

Enfin, dans l'intérieur des conducteurs, il n'y a pas de fonction des forces magnétiques, puisque  $\text{Curl } \vec{H}$  n'est pas nul, c'est à dire que la condition d'intégrabilité n'est pas satisfaite.

## § 5 Applications. Circuit circulaire et solénoïde.

102. Fonction des forces et champ d'un circuit circulaire le long de son axe.

Soit un circuit circulaire  $C$  parcouru par un courant  $i$  dans le sens de la flèche. Cherchons la fonction des forces en un point  $A$  de l'axe  $Z'Z$ ; posons  $OA = Z$  (positif vers le haut).



L'angle solide sous lequel le circuit est vu de  $A$  est égal à  $2\pi$  quand  $A$  est au centre  $O$  du circuit; il doit être, d'après la convention de signe, positif et  $< 2\pi$  quand, du point  $A$ , on voit la face négative du circuit (face à la droite de l'observateur d'Ampère regardant  $O$ ), c'est à dire quand  $Z$  est négatif; il est nul pour  $Z = +\infty$ .  
Nous ferons donc varier  $\Omega$  de  $0$  à  $4\pi$  quand  $Z$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Prenons  $A$  sur la partie positive de  $OZ$ . L'angle solide  $\Omega$  a pour valeur  $4\pi$  moins l'aire de la calotte sphérique découpée par le circuit  $C$  sur la sphère de rayon  $R = AM$ , pourvu qu'on prenne  $R$  pour unité de longueur. Calculons l'aire de la calotte sphérique: elle a pour mesure le produit de sa hauteur  $OP$  par la circonférence de grand cercle  $2\pi R$ .

$$S = 2\pi R \cdot OP$$

Soit  $\theta$  l'angle  $AZ', AM$  ( $\angle \frac{\pi}{2}$  pour  $Z > 0$ ;  $> \frac{\pi}{2}$  pour  $Z < 0$ )

$$OP = AP - AO = R(1 - \cos \theta)$$

$$S = 2\pi R^2(1 - \cos \theta)$$

d'où (144)  $\Omega = 4\pi - \frac{S}{R^2} = 2\pi(1 + \cos \theta)$

et (145)  $U = i\Omega = 2\pi i(1 + \cos \theta)$

Champ magnétique. — La force magnétique est évidemment dirigée suivant l'axe  $ZZ'$ , par raison de symétrie

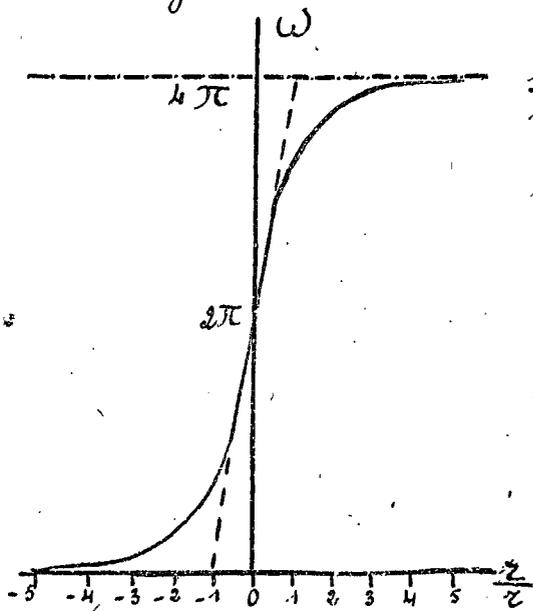
On peut la calculer soit par la formule de Laplace, en évaluant le champ produit par chaque élément de courant, soit au moyen de  $U$ .

Employons cette seconde méthode:

$$H = i \frac{d\Omega}{dz}$$

$r$  désignant le rayon du circuit, on a:

$$\Omega = 2\pi(1 + \cos \theta) = 2\pi \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$



(146)  $H = 2\pi i \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi i \frac{r^2}{R^3}$

Clu centre  $O$  du circuit, la force magnétique est  $\frac{2\pi i}{R^3}$ .  
Indiquons l'ordre de grandeur composante horizontale<sup>z</sup> du champ terrestre par un exemple numérique:  $i = 10$  amp = 1 unité C.G.S.  $r = 10$  cm  $H = 0,63$  Gauss, soit environ 3 fois la composante<sup>(1)</sup>  
La figure ci-contre donne la variation de  $\Omega$  en fonction de  $\frac{z}{r}$ .

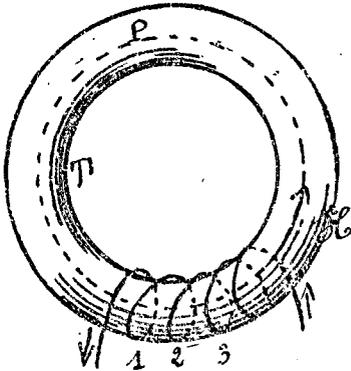
### 103. Solénoïdes fermés. Règle des ampères.

tours.

Considérons un solénoïde fermé en forme de tore

(1) suite horizontale du champ terrestre.

(sur la figure quelques spires seulement ont été représentées).



Soit  $H$  la force magnétique sur le parallèle  $P$  de longueur  $l$ .

Appliquons le théorème sur la circulation de  $H$  (formule 140).

La circulation de  $H$  suivant le parallèle  $P$  est  $Hl$ ; en suivant ce parallèle, on a fait le tour de chacune des  $N$  spires du fil, on a donc:

$$Hl = 4\pi Ni$$

(141)

$$H = 4\pi \frac{N}{l} i = 4\pi N_1 i \text{ (un. C.G.S.)}$$

$N_1$  étant le nombre de spires par centimètre.

Si le courant est mesuré en ampères, l'ampère étant 10 un. C. G. S., on a :

(141 bis)

$$H_{\text{gauss}} = \frac{4\pi}{10} N_1 i \text{ amp.}$$

$N_1 i$  s'appelle nombre d'ampères-tours par centimètre.

Exemple numérique:  $N_1 = 10$   $i = 1$  ampère  $H = 12,5$  gauss.

## 104 ~ Solénoïde ouvert ~

Si la longueur du solénoïde est grande par rapport au diamètre de ses spires, on peut, dans la partie centrale, négliger l'influence des extrémités et appliquer la formule (141). Si l'influence des bouts n'est pas négligeable, la valeur de  $H$  est moindre:

(148)

$$H = 4\pi N_1 i (1 - \epsilon)$$

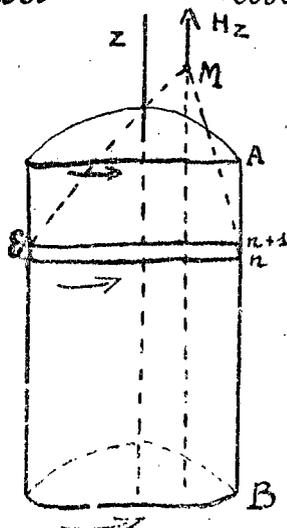
Le calcul du champ d'un solénoïde en un point de l'axe, ou plus généralement de la composante parallèle à l'axe, peut se faire de la façon suivante:

Nous remarquons d'abord que si le fil revient suivant une génératrice du cylindre, le solénoïde est équivalent à une série de courants circulaires égaux, ayant même axe, et équidistants.

En effet, d'après la loi des courants sinusoïdaux, une spire hélicoïdale  $a b c$  est équivalente à une spire



circulaire suivie d'une portion rectiligne a c.



(1)

L'ensemble des portions rectilignes a c forme un courant rectiligne, de la longueur du solénoïde, et son effet est exactement détruit par l'effet du courant de retour.

La composante parallèle à l'axe du champ produit par des courants en un point M est  $i \frac{d\Omega}{dz}$ .

Soient  $\Omega_n$  la valeur de l'angle solide pour le  $n^{\text{ième}}$  circuit compté à partir de B, et  $\epsilon$  la distance très petite de deux circuits consécutifs; on a très sensiblement:

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n - \epsilon \frac{d\Omega}{dz}$$

La composante, parallèle à l'axe du solénoïde, du champ dû au  $n^{\text{ième}}$  circuit est donc:

$$\frac{i}{\epsilon} (\Omega_n - \Omega_{n+1})$$

et la composante du champ dû au solénoïde entier est:

$$(149) \quad H_z = \frac{i}{\epsilon} (\Omega_B - \Omega_A)$$

$\Omega_A$  et  $\Omega_B$  étant les angles solides sous lesquels on voit du point M les deux cercles extrêmes de la bobine (angles solides  $> 2\pi$  sur la figure 1.)

Si le point M est sur l'axe, le champ est dirigé suivant l'axe et a pour valeur

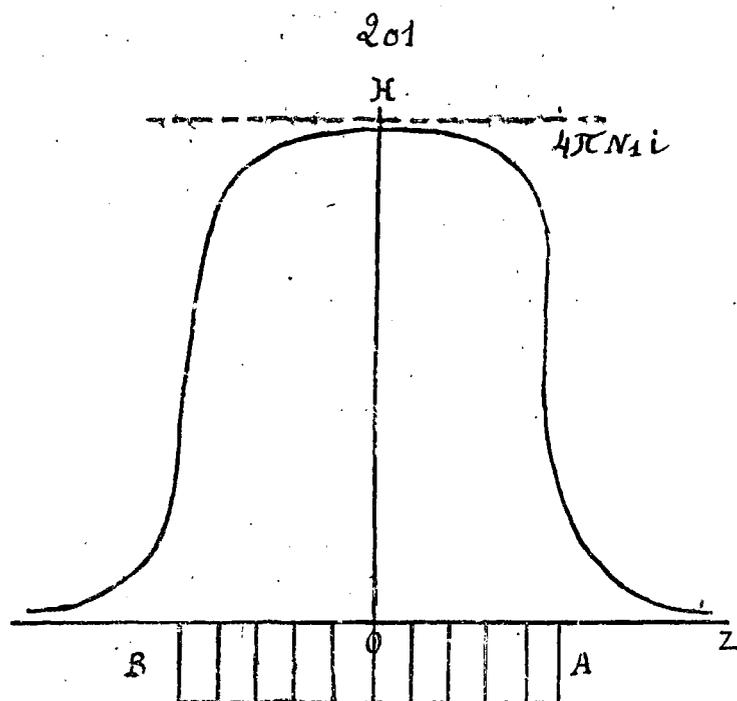
(fig. 2):

$$(150) \quad H = \frac{2\pi i}{\epsilon} (\cos \beta - \cos \alpha) = 2\pi N_1 i (\cos \beta - \cos \alpha)$$

Le terme correctif  $(1 - \epsilon)$  de la formule (148) est donc égal à  $(\cos \beta - \cos \alpha)$ .

La figure (3) <sup>(1)</sup> représente la variation du champ le long de l'axe.

(1) Voir la figure à la page suivante.

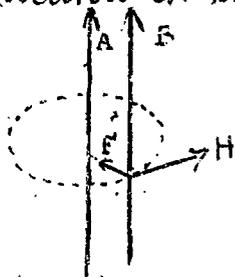


## § 6. Action des courants sur les courants. ~

### 105 - Généralités et exemples -

Les lois précédemment établies, qui déterminent le champ magnétique d'un courant, l'action d'un champ magnétique sur un courant, et le travail des forces électrodynamiques dans le déplacement d'un circuit, permettent de prévoir l'action d'un courant sur un autre courant.

Courants parallèles - Le champ magnétique créé par l'un des courants A ou B est représenté par un ensemble de lignes de forces circulaires; il agit sur l'autre courant. On voit immédiatement que chaque élément de chacun des courants est sollicité par une force dirigée suivant la normale commune aux deux fils.



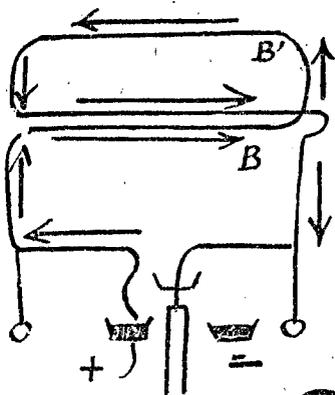
Deux courants parallèles et de même sens s'attirent.

Deux courants parallèles et de sens opposés

se repoussent.

Nous avons précédemment parlé de la rotation d'un équipage mobile dans le champ d'un solénoïde et des expériences de Weber relatives à l'action d'un solénoïde sur un autre solénoïde.

Équipages astatiques — Pour étudier l'action mutuelle des courants, il est quelques fois utile de se mettre à l'abri de l'effet dû au champ terrestre. On réalise un équipage astatique en constituant deux boucles B et B' ayant des surfaces égales et parcourues par le même courant en des sens opposés. Deux moments magnétiques sont égaux et de signes contraires.



## 106. ~ Coefficient d'induction mutuel. le et coefficient de Self induction ~

Soient deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  parcourus par des courants  $i_1$  et  $i_2$ ; appelons  $\varphi_1$  le flux à travers  $C_1$  de la force magnétique due à  $i_2$ . La fonction des forces électrodynamiques qui s'exercent sur  $C_1$  est (n° 96):

$$U = i_1 \varphi_1$$

Or  $\varphi_1$  est proportionnel à  $i_2$  et peut s'écrire  $M i_2$ ; donc:

$$(151) \quad U = M i_1 i_2$$

L'action de  $C_1$  sur  $C_2$  étant égale à l'action de  $C_2$  sur  $C_1$ , la fonction des forces électrodynamiques a encore pour expression.

$$(152) \quad U = i_2 \varphi_2$$

$\varphi_2$  étant le flux à travers  $C_2$  de la force magnétique due à  $i_1$ .

La comparaison des formules (151) et (152) donne:

$$\varphi_2 = M i_1$$

Ainsi, le même coefficient  $M$  entre dans les flux  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ; ce coefficient est appelé coefficient d'induction mutuelle des circuits  $C_1$  et  $C_2$ .

Le flux émis par le circuit  $C_1$ , parcouru par le courant unité, à travers le contour géométrique  $C_2$ , est égal au flux émis par le circuit unité  $C_2$ , à travers le contour géométrique  $C_1$ . Ces flux égaux sont représentés par  $M$ , qui dépend seulement de la forme et de la position relative des deux circuits.

Expression du travail — Les intensités  $i_1$  et  $i_2$  des courants étant supposées maintenant constantes, pour un déplacement relatif des circuits, tel que  $M$  passe de  $M_1$  à  $M_2$ , effectué dans des conditions telles qu'on puisse à tout instant considérer le régime permanent comme établi, le travail des forces électrodynamiques est:

$$(153) \quad \mathcal{L} = i_1 i_2 (M_2 - M_1)$$

De sorte que  $M i_1 i_2$  représente, sous les conditions énoncées, le travail des forces électrodynamiques dans le déplacement d'un des circuits depuis l'infini jusqu'à sa position actuelle, travail qui a évidemment la même expression quelque soit ce lui des deux circuits qu'on déplace, pour aboutir à la même position relative de  $C_1$  et  $C_2$ .

Le flux émis par un courant  $C$  traverse le contour géométrique au circuit; la valeur de ce flux pour  $i = 1$  est le coefficient de self-induction  $L$  du circuit.

$$(154) \quad \varphi = L i$$

$L$  ne dépend que de la forme du circuit.

Dans le système C.G.S., les dimensions de  $M$  et de  $L$  sont celles d'une longueur. <sup>à l'unité pratique</sup> est le henry, est égale à  $10^9$  un. C.G.S.

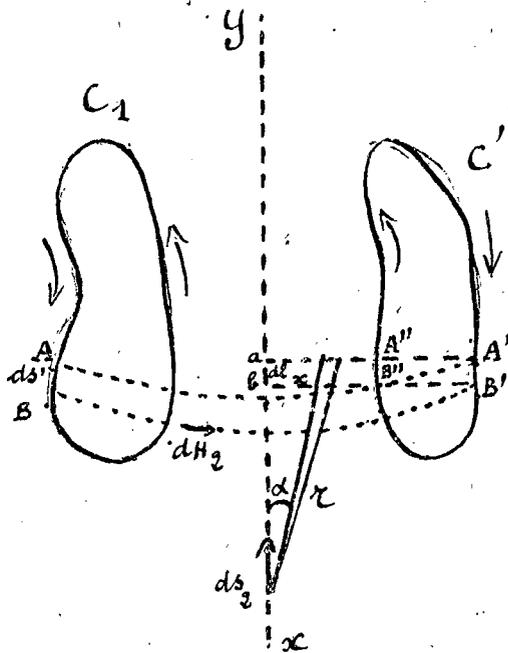
non exigé |

10% ~ Formule de Neumann. (1)

Pour évaluer le flux  $M$  émis à travers un circuit  $C_1$

par un courant unité  $C_2$ , calculons d'abord la partie  $dM$  de ce flux due au champ élémentaire  $dH_2$  produit par un élément  $ds_2$  de  $C_2$ .

Le champ  $dH_2$  étant de révolution autour d'un axe  $xy$  mené par  $ds_2$ , nous pouvons, sans changer le résultat de ce calcul, remplacer le contour  $C_1$ , qui a une forme quelconque, par une méridienne  $C'$  du tore obtenu en faisant tourner  $C_1$  autour de  $xy$ .



Considérons, dans le plan de la méridienne  $C'$ , le trapèze élémentaire  $abA'B'$  et un élément de surface  $dS$  découpé dans ce trapèze par des rayons passant par  $ds_2$  et inclinés de  $\alpha$  et  $\alpha+d\alpha$  sur  $xy$ .

Désignons par  $x$  la distance de  $dS$  à  $xy$  et par  $r_0$  celle de  $ds_2$  au segment  $ab = dl$  découpé sur cet axe par les plans des parallèles  $A_1A', B_1B'$  menés par les extrémités  $A_1$  et  $B_1$  de  $ds_1$ .

on a :

$$dS = dl dx; dH_2 = \frac{\sin \alpha ds_2}{r^2} = \frac{x ds_2}{r^3}$$

et

$$dS dH_2 = ds_2 dl \frac{x dx}{r^3} = ds_2 dl \frac{dx}{r^3}$$

Car la relation  $r^2 = r_0^2 + x^2$  entraîne  $x dx = r dr$ .  
Intégrant depuis  $r_0$  jusqu'à la valeur de  $r$  qui correspond à  $A'B'$  et par suite à  $A_1B_1$ , on obtient pour le flux à travers  $abA'B'$

$$dM = ds_2 dl \int_{r_0}^r \frac{dx}{r^3} = ds_2 dl \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) = ds_2 \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) ds_1 \cos(\alpha_1, \alpha_2)$$

Car la distance  $dl$  des plans  $A_1A'$  et  $B_1B'$  est égale à la projection de  $ds_1$  sur la direction de  $ds_2$ .

A'B' et B'A", on voit que les termes tels que  $\frac{ds_2 dl}{r_0}$  se détruisent deux à deux, et qu'il reste:

$$dM = ds_2 \int_{C_1} \frac{ds_1 \cos(ds_1, ds_2)}{r}$$

Le flux total  $M$  à travers  $C_1$  s'obtient en intégrant par rapport à  $ds_2$  tout le long du contour  $C_2$ .

$$(155) \quad M = \int_{C_2} ds_2 \int_{C_1} \frac{ds_1 \cos(ds_1, ds_2)}{r} = \iint_{C_1 C_2} \frac{\cos(ds_1, ds_2)}{r} ds_1 ds_2 = \iint_{C_1 C_2} \frac{(\vec{ds}_1, \vec{ds}_2)}{r}$$

$\vec{ds}_1, \vec{ds}_2$  étant deux éléments de longueur des contours  $C_1$  et  $C_2$ ,  $r$  la distance de ces éléments. Cette formule, établie par Neumann, est absolument symétrique. Elle ne peut naturellement s'appliquer qu'à des problèmes où les conducteurs peuvent être sans inconvénient assimilés à des fils de dimensions transversales négligeables.

Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on décompose les conducteurs considérés en tubes de courants élémentaires; soient  $di_1$  et  $di_2$  les intensités totales dans deux conducteurs, on a:

$$dU = di_1 di_2 M = di_1 di_2 \iint_{C_1 C_2} \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r}$$

Où  $di_1 = u_1 ds_1$  en tous les points du tube, et de même  $di_2 = u_2 ds_2$ ,  $u_1$  et  $u_2$  désignant les densités de courant.

$$dU = \iint_{C_1 C_2} \frac{u_1 u_2 ds_1 ds_2 \cos(ds_1, ds_2)}{r}$$

Etendant l'intégration à tous les tubes de courant et remarquant que  $\text{angle}(ds_1, ds_2) = \text{angle}(u_1, u_2)$

$$(156) \quad U = \iint \frac{u_1 u_2}{r} \cos(u_1, u_2) dv_1 dv_2 = \iint \frac{(\vec{u}_1 \vec{u}_2)}{r} dv_1 dv_2$$

$dv_1, dv_2$  désignant les éléments de volume dans chacun des conducteurs.

Coefficient de Self-induction — Ce coefficient peut être calculé en appliquant la formule générale de Heumann au cas limite où les deux contours  $C_1$  et  $C_2$  viennent se confondre en un seul.

Dans ce calcul, il n'est plus permis de considérer la section du fil comme négligeable; on doit décomposer le courant en filets élémentaires et évaluer l'induction mutuelle moyenne de ces filets deux à deux. Sans cette précaution, deux éléments  $ds, ds'$  qui occupent la même position dans l'espace correspondent à une valeur de  $r$  égale à zéro et l'intégrale prend une valeur infinie.

Il est souvent possible d'éviter ces difficultés dans l'évaluation des variations de la self-induction des circuits déformables qu'on rencontre dans la pratique. Ces circuits sont, en effet, presque toujours constitués par des parties rigides susceptibles de subir des déplacements relatifs. Dans ces conditions, les termes de l'intégrale de Heumann qui correspondent à une même fraction rigide du circuit demeurent invariables, et il suffit d'effectuer l'intégration en prenant les éléments  $ds, ds'$  sur chacune des parties mobiles; on se trouve alors placé dans les mêmes conditions que pour le calcul d'un coefficient d'induction mutuelle.

## 108 ~ Travail correspondant au déplacement et à la déformation de plusieurs circuits <sup>(1)</sup>

Considérons plusieurs courants  $C_1, C_2, \dots, C_n$  dont les in-

(1) Cours de M<sup>e</sup>. le d<sup>e</sup> Colonel Lafay.

tensités  $i_1, i_2, \dots, i_n$  sont maintenues constantes au cours des déplacements et des déformations qui les font passer de l'état initial à l'état final.

Le travail des forces électrodynamiques se compose du travail produit par les actions mutuelles de ces courants, augmenté du travail développé par l'action de chacun d'eux sur ses propres éléments.

Désignons par  $M_{ij}, M'_{ij}$  les valeurs initiales et finales du coefficient d'induction mutuelle de  $C_i$  et  $C_j$ ; leur déplacement relatif correspond au travail  $(M'_{ij} - M_{ij}) i_i i_j$  et nous poserons pour abréger l'écriture  $M'_{ij} - M_{ij} = \delta M_{ij}$ .

Le premier des travaux considérés ci-dessus est égal à la somme :

$$\begin{aligned} \delta M_{12} i_1 i_2 + \delta M_{13} i_1 i_3 + \dots + \delta M_{1n} i_1 i_n \\ + \delta M_{23} i_2 i_3 + \dots + \delta M_{2n} i_2 i_n \\ \dots \dots \dots \\ + \delta M_{n-1n} i_{n-1} i_n \end{aligned}$$

qui, puisque  $M_{ij} = M_{ji}$ , est elle-même égale à la moitié de

$$\begin{aligned} (\delta M_{12} i_2 + \delta M_{13} i_3 + \dots + \delta M_{1n} i_n) i_1 \\ + (\delta M_{21} i_1 + \delta M_{23} i_3 + \dots + \delta M_{2n} i_n) i_2 \\ + \dots \dots \dots \\ + (\delta M_{n1} i_1 + \delta M_{n2} i_2 + \dots + \delta M_{n,n-1} i_{n-1}) i_n \end{aligned}$$

Remarquant que chaque parenthèse représente la variation du flux  $\Phi_j$  écrit par tous les autres courants à travers celui dont l'intensité  $i_j$  est en facteur, le travail considéré peut s'exprimer par :

$$(15\%) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_j \delta \Phi_j i_j$$

Nous allons voir que le travail développé par l'action d'un courant  $C$  sur ses propres éléments est égal

par la formule (157) en désignant par  $\varphi_j$  le flux total émis à travers le courant  $C_j$  par tous les autres courants et par lui-même.

on a:

$$\varphi_j = L i_j + M_{j1} i_1 + M_{j2} i_2 + \dots$$

et pour une déformation infinitésimale

$$(158) \quad d\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum i_j (d\varphi_j)$$

La notation  $(d\varphi_j)$  désignant la variation infinitésimale de  $\varphi_j$  lorsqu'on suppose que les intensités des courants sont constantes.

## 109 - Travail de Self-induction

Démontrons la propriété sur laquelle nous venons de nous appuyer.

Les efforts supportés par les éléments d'un courant  $C$  sous l'action de son propre champ sont proportionnels au produit de l'intensité par le champ et par suite au carré de l'intensité. Le travail correspondant au déplacement de ces éléments est donc une expression de la forme  $\lambda i^2$  et le coefficient  $\lambda$  qui donne la valeur du travail pour  $i=1$  sera toujours fini, dans la réalité, parce que la longueur du circuit et ses déplacements sont limités et que, de plus sa section est différente de zéro.

Si l'on imagine qu'un courant fini, égal à 1 par exemple, circule dans un fil extrêmement fin, chaque élément de ce fil ayant une longueur considérable par rapport à ses dimensions transversales, développera dans son voisinage immédiat un champ analogue à celui que Biot et Savart ont constaté autour d'un fil rectiligne indéfini. La plus grande valeur de ce champ aura même ordre de grandeur que l'inverse du diamètre du fil.

Décomposons le courant  $C$  en un nombre très grand  $n^2$  de tubes de courant de même intensité  $\frac{i}{n^2}$ ; le travail électrodynamique se composera des travaux de self-induction.

$\sum \lambda \frac{i^2}{n^2}$  de ces  $n^2$  tubes augmenté des travaux produits par leurs actions mutuelles; il aura ce que nous avons vu du nombre précédent, on aura pour l'expression de ces

derniers:

$$\frac{1}{3} n^2 \delta \varphi \frac{i}{n^2} = \frac{1}{3} i \delta \varphi$$

$\varphi$  désignant la moyenne des flux émis à travers chacun de ces tubes par tous les autres.

Or, si  $n^2$  croît indéfiniment,  $\frac{i^2}{n^4} \sum X$  tend vers zéro, parce que  $\sum X$  ne devient infiniment grand que de l'ordre de  $n^3$ ; cette somme comprend, en effet,  $n^2$  termes qui peuvent croître eux-mêmes comme l'inverse des dimensions linéaires des tubes, c'est à dire comme  $n$ .

À la limite, nous obtenons pour l'expression du travail de self-induction:

$$(159) \quad \mathcal{C} = \frac{1}{3} i \delta \varphi$$

et ce flux moyen, divisé par  $i$ , nous donnera précisément la self-induction  $L$  du circuit, de sorte que:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{3} i^2 \delta L$$

## 110. ~ Self d'un circuit filiforme bien calibré. ~

non exigé

La self  $L$  d'un circuit de longueur  $l$ , constitué par un fil cylindrique bien calibré de rayon  $R$  très faible est, d'après ce que nous venons de voir, égale à la moyenne des flux embrassés par les divers tubes de courant infinitésimaux en lesquels on peut supposer le courant total décomposé.

Désignons par  $L_0$  le flux à travers une surface  $S$  ap. puyée sur le contour axial du courant. Considérons une section droite quelconque du fil et cherchons la valeur du flux embrassé par un tube de courant passant par l'élément superficiel  $rd\theta dr$  situé en  $A$  dans cette section à la distance  $OA = r$  de l'axe  $O$ .

Ce flux est égal à  $L_0$  diminué du flux émis à travers la surface engendrée par le segment  $OA$  lorsqu'on lui fait décrire tout le contour du circuit.

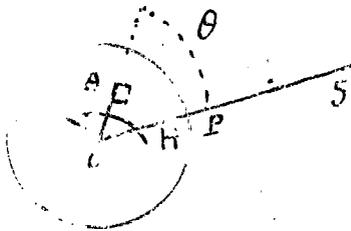
En raison de la petitesse du rayon du fil, on peut admettre

que la force magnétique  $y$  est sensiblement distribuée comme pour l'intérieur d'un fil rectiligne indéfini.

Dans ces conditions, l'intensité de courant total étant supposée égale à l'unité, celle du courant à l'intérieur d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $x$  inférieur à  $R$  sera  $\frac{x^2}{R^2}$ ; de plus, la valeur de  $H$  le long de ce cercle sera donnée par l'équation:

$$2\pi x H = 4\pi \frac{x^2}{R^2} \quad \text{d'où} \quad H = \frac{2x}{R^2} \quad (1)$$

et pour le flux  $d\phi$  à travers un élément de surface de longueur  $dl$  balayé par le segment  $OA$ .



$$d\phi = dl \int_0^x H dx = \frac{2dl}{R^2} \int_0^x x dx = \frac{x^2}{R^2} dl$$

et, en intégrant, pour tout le circuit

$$\psi = \frac{2^2 l}{R^2}$$

Or, si la section totale est subdivisée en un nombre immense  $N$  de tubes de courants égaux l'élément  $rd\theta$  en contiendra  $N \frac{r d\theta}{2\pi R}$  et la moyenne cherchée sera:

$$\frac{1}{N} \int_0^{2\pi} \int_0^R \psi N \frac{r d\theta}{2\pi R} = \frac{l}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta = \frac{1}{2} l$$

d'où pour la self cherchée:

$$L = L_0 = \frac{1}{2} l$$

On peut remarquer que  $L_0$  est égal au coefficient d'induction mutuelle  $M$ , calculable par la formule de Neumann du contour axial  $O$  et un contour  $P$  tracé sur la surface du fil, augmenté du flux à travers la surface engendrée par  $OP$ . Ce dernier s'obtient en faisant  $x = R$  dans l'expression de  $\phi$  établie plus haut. On a donc:

$$L_0 = M + l \quad \text{et} \quad L = M + \frac{l}{2}$$

(1) Dans un milieu magnétique il faudrait remplacer  $H$  par l'induction  $\vec{L} = \mu H$ , que nous désignons plus loin.

# §7 Galvanomètres et élec- trodynamomètres. ~

## 111. ~ Mesure des déviations. ~

Nous avons vu que pour l'invention du galvanomètre a suivi de près l'expérience d'Æsted. Nous avons parlé du multiplicateur de Schweigger, et du galvanomètre à système statique de Nobili. Nous avons étudié la boussole des sinus et la boussole des tangentes de Pouillet.

Comme il est toujours possible de ramener, à l'aide d'un shunt, la comparaison des courants intenses à celle d'autres courants d'intensité aussi faible qu'on veut, la mesure des petites intensités est le but principal de la galvanométrie.

En général les déviations  $\delta$  observées sont assez faibles pour que la relation  $i = f(\delta)$ , qui correspond à un galvanomètre quelconque, se réduise pratiquement aux premiers termes de son développement en série.

$$i = f(\delta_0) + f'(\delta_0) (\delta - \delta_0)$$

En choisissant comme origine la déviation  $\delta_0$  qui correspond à l'absence de courant, cette relation se réduit à

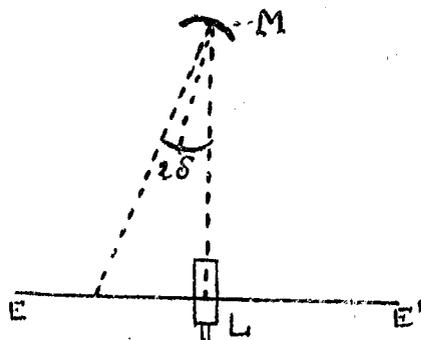
$$i = f'(\delta_0) \delta$$

dans laquelle  $f'(\delta_0)$  représente une constante instrumentale. La comparaison de deux intensités revient donc à celle de deux angles très petits, ou, ce qui est équivalent, à celle des tangentes de ces angles; il convient donc de mesurer ces éléments avec une précision aussi grande que possible.

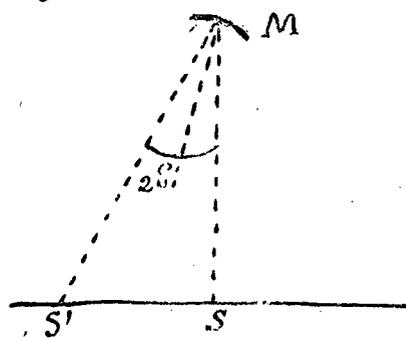
Le premier dispositif employé consiste à lire, à l'aide d'une lunette à réticule L, les divisions d'une échelle E E' dont on observe l'image réfléchiée par un miroir plan M lié au système mobile du galvanomètre (fig. 1).

Le deuxième dispositif (fig. 2) permet l'observation d'un

d' un index lumineux  $S'$  qui se déplace sur une échelle.



(Figure 1)



(Figure 2)

divisée et qu'on obtient en produisant, à l'aide d'un miroir concave convenable porté par le galvanomètre, l'image réelle d'une source lumineuse  $S$  placée à peu près dans le plan de l'échelle et dans son voisinage immédiat. Cet index lumineux est désigné sous le nom de "Spot".

On place généralement les instruments de manière que, lorsqu'il n'y a pas de courant, le plan normal au miroir  $M$  mené par l'axe de rotation du système mobile du galvanomètre soit un plan de symétrie pour toutes les parties de l'appareil.

Soient  $D$  la distance du miroir à l'échelle, évaluée en prenant comme unité une division de l'échelle,  $n$  et  $n_0$  les divisions lues lorsque le courant passe et lorsqu'il est supprimé, on a :

$$\lg 2\delta = \frac{n - n_0}{D} \text{ et très sensiblement } \delta = \frac{n - n_0}{2D}$$

## 112. ~ Galvanomètre normal. Expériences de Gauss. Galvanomètre de Helmholtz. ~

Nous venons d'examiner la manière dont on peut comparer les courants.

Pour obtenir leur valeur absolue, il faut employer un galvanomètre dit "normal", donnant l'intensité en unités absolues, ou employer un autre instrument basé par comparaison

avec un tel galvanomètre.

La boussole de Pouillet constitue un galvanomètre normal; on a en effet, en désignant par  $R$  le rayon de la boussole, et par  $N$  le nombre de tours de l'enroulement:

$$i = \frac{R}{2\pi N} H \operatorname{tg} \delta \quad (\text{boussole des tangentes})$$

ou

$$i = \frac{R}{2\pi N} H \sin \delta \quad (\text{boussole des sinus})$$

$H$  étant la composante horizontale du champ terrestre, que Gauss a mesurée directement en unités absolues.

La principale cause d'erreur qu'on rencontre dans la boussole des tangentes provient de ce que la longueur du petit barreau aimanté n'est pas absolument négligeable par rapport au rayon du cadre, et que par suite la tangente de la déviation cesse d'être pratiquement proportionnelle à l'intensité.

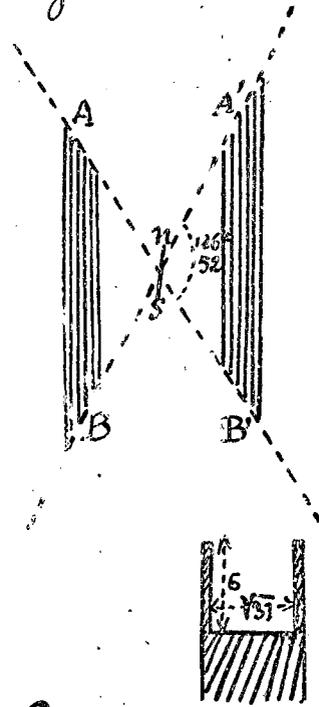
Exemple numérique: Soient  $H = 0,192$  gauss (Paris),  $R = 15$  cm,  $N = 100$ . Une déviation de  $45^\circ$  ( $\operatorname{tg} \delta = 1$ ) correspond à  $i = 0,00229$  C.G.S. =  $0,229$  ampère.

Gauguin a mis ce fait en évidence en comparant, par la méthode des sinus, des courants qui parcouraient un anneau au centre auquel était suspendu un petit barreau aimanté; les tangentes des déviations observées n'étaient pas dans le même rapport que les intensités fournies par la boussole des sinus. En plaçant le barreau en différents points de l'axe de révolution de l'anneau, Gauguin remarqua que la proportionnalité des intensités aux tangentes était pratiquement obtenue lorsque la distance de l'aiguille au plan de l'anneau était le quart du diamètre de ce dernier.

Cette remarque, confirmée par les calculs de Bravais, le conduisit à la construction d'un galvanomètre dans lequel les spires du fil étaient enroulées sur les deux nappes d'un cône dont l'aiguille occupait le sommet et dont l'ouverture  $\alpha = 126^\circ 52'$  satisfaisait à la relation  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$ .

La réalisation de deux cadres coniques  $AB, A'B'$  présente des difficultés pratiques dont on peut s'affranchir, comme l'a fait Helmholtz. Le calcul montre en effet qu'on obtient le même résultat en leur substituant deux cadres cylindriques dont les plans moyens sont à une distance de l'aiguille égale à la moitié de leur rayon et dont les gorges (fig. ci contre) en forme de rectangle ont une profondeur égale

à  $\frac{6}{\sqrt{31}}$  de leur largeur.



### 113. ~ Galvanomètres de Thomson, Pierre Weiss, André Broca. ~

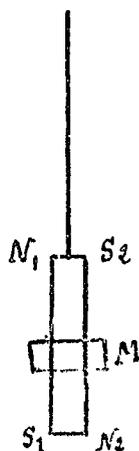
Wobili avait augmenté la sensibilité du galvanomètre par l'emploi d'un équipage astatique, mais il existe un autre moyen employé par W. G. Thomson (Lord Kelvin). Le procédé consiste à affaiblir le champ existant autour de l'aimant (en l'absence de courant) au moyen d'un aimant auxiliaire, placé au dessus de l'aiguille, et annulant presque la composante horizontale du champ terrestre.

On obtient de la sorte une résultante du champ terrestre et du champ de l'aimant à laquelle on peut donner telle valeur qu'on veut et aussi telle direction qu'on désire. Ce dernier point est important. Soit en effet un galvanomètre placé dans une situation commode pour l'observation par la méthode oblique; il faut que l'aiguille soit parallèle au plan des spires quand il ne passe aucun courant; c'est ce qu'on réalise avec l'aimant auxiliaire, qu'on fait tourner jusqu'à ce qu'on ait un champ résultant convenable.

On emploie d'ailleurs simultanément le procédé de

Mobile et celui de Thomson. Dans le galvanomètre de Thomson, on place l'aiguille supérieure, elle aussi, à l'intérieur d'un cadre multiplicateur parcouru par le même courant que celui du cadre inférieur, dans le sens tel, bien entendu, que les effets du courant s'ajoutent pour faire tourner l'équipage dans le même sens.

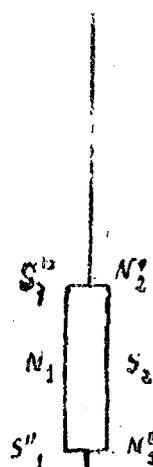
Ces instruments peuvent déceler un milliardième d'ampère et même moins.



Afin de mieux se rapprocher d'un astatisme parfait pour le système des aiguilles, M. Pierre Weiss a constitué l'équipage par deux aiguilles placées verticalement, les pôles de noms contraires étant en regard. Si la verticalité est parfaite, un champ uniforme donne sur chacune des aiguilles, prise isolément, un couple qui n'a pas de composante horizontale: ce système est donc parfaitement astatique même si les deux aiguilles n'ont pas exactement le même moment magnétique. Comme il équivaut à deux aimants

horizontaux  $N_1, S_2$  et  $S_1, N_2$ , les cadres multiplicateurs qui, comme dans le galvanomètre Thomson, entourent  $N_1, S_2$  et  $S_1, N_2$  agissent sur l'équipage pour le dévier.

L'équipage possède un moment d'inertie très faible, les aiguilles étant très fines, très près de l'axe de rotation et le moment  $M$  étant très petit et très léger. Il en résulte des oscillations qui, par leur extrême sensibilité, ne sont pas trop lentes.



M. Thomson a amélioré ce galvanomètre en employant des aiguilles à point central, c'est à dire présentant un pôle au milieu et deux autres pôles aux extrémités, ces derniers étant, bien entendu, de noms contraires à celui du milieu. Les pôles du milieu sont de noms contraires pour les deux aiguilles. Comme chacune d'elles est équivalente à deux aimants solidaires de moments magnétiques égaux, mais disposés en sens inverses, chaque aiguille est soumise à un couple de moment nul dans un champ uniforme, quelle que soit son orientation. Le système est donc parfaitement astatique quand toutes les aiguilles le sont.

pas rigoureusement verticales. L'ensemble des deux pôles au milieu, de noms contraires est équivalent à un petit aimant horizontal; c'est ce milieu des aiguilles qui est placé dans l'unique cadre multiplicateur.

Comme le système, rigoureusement astatique, n'aurait pas de direction fixe dans un champ uniforme, on fait agir sur les extrémités inférieures des aiguilles un minuscule aimant dont on règle la distance et la direction de manière à obtenir l'orientation de l'équipage dans la position convenable.

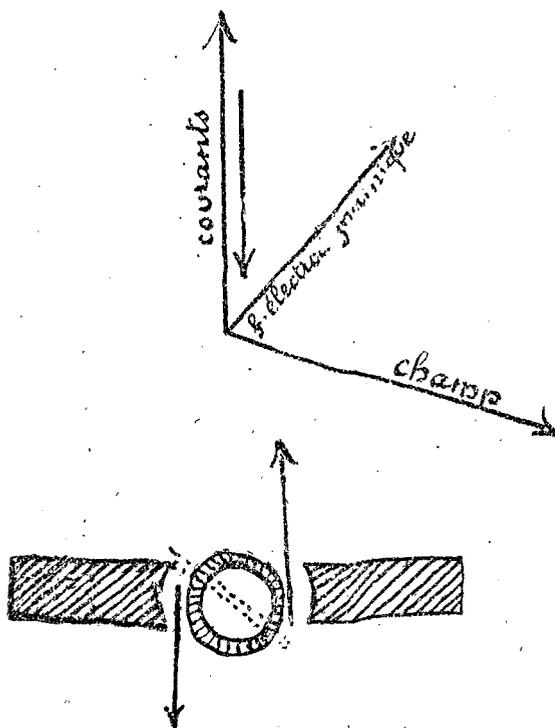
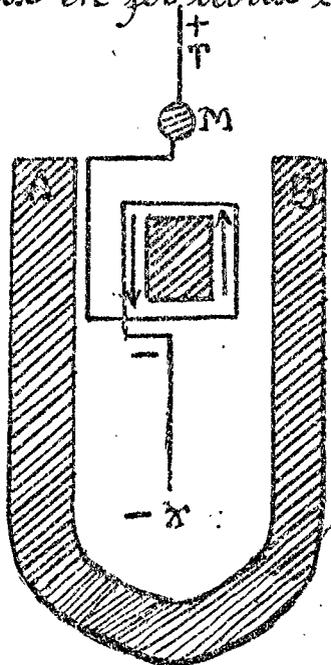
La réduction du moment d'inertie est extrême: les aiguilles sont des tubes très fins en acier enfilés dans des fils d'aluminium; le miroir n'a que quelques millimètres carrés de surface.

Ce galvanomètre est le plus sensible et le plus parfait de ceux qui sont fondés sur l'expérience d'Ørsted.

## 114. Galvanomètre Deprez-D'Arsonval.

Ce galvanomètre est fondé sur l'action qu'exerce un champ magnétique sur un circuit mobile.

Le champ magnétique est réalisé au moyen d'un gros aimant en fer à cheval qui entoure le cadre et d'un noyau creux en fer doux situé au milieu de ce cadre.



Le fer à cheval est creusé en forme de cylindre, de sorte que les lignes de force du champ convergent sensiblement vers l'axe de l'appareil. La distribution est pratiquement uniforme dans la région utilisée.

La torsion du fil de suspension est nulle lorsque le cadre est parallèle à la ligne des pôles.

Le courant pénètre par le fil de torsion T et sort par un fil X dont le couple de torsion s'ajoute à celui du fil supérieur.

En appelant S la surface du cadre, n le nombre de spires, C le moment du couple de torsion des fils de suspension pour l'unité d'angle, la déviation  $\theta$ , si elle est petite, est donnée par la formule.

$$C \theta = n S i H$$

La sensibilité est proportionnelle à la quantité  $\frac{n S H}{C}$  qui est appelée constante permanente du galvanomètre.

Un des avantages est que les oscillations du cadre s'éteignent presque immédiatement en circuit fermé, et même, si la résistance est faible, le galvanomètre est apériodique, c'est à dire que l'équipage mobile atteint sans oscillation sa position d'équilibre. Cet amortissement est dû aux courants d'induction auxquels donne naissance le déplacement du cadre dans le champ assez intense de l'aimant (quelques centaines de gauss).

## 115. ~ Construction d'un galvanomètre de sensibilité convenable. ~

on exige

On se donne le nombre N de tours et la résistance r d'un tour de fil du galvanomètre. Soient E la force électromotrice et R la résistance du circuit extérieur. On a:

$$i = \frac{E}{R + N r}$$

$$S = K \frac{N E}{R + N r}$$

Supposons  $R$  très petit, on a à la limite  $\delta = K \frac{E}{R}$ ; pour que la déviation soit appréciable il faut  $r$  très petit; on donc employer un gros fil.

Supposons  $R$  très grand  $\delta = K \frac{NE}{R}$ ; il faut un grand nombre de tours et par suite un fil fin.

Si le volume total du fil est déterminé  $V = N \rho S$ , on a:

$$\begin{array}{l} r = \frac{\rho l}{S} \\ V = N \rho S \end{array} \left\{ \begin{array}{l} l \text{ longueur d'une spire.} \\ S \text{ section du fil} \\ \rho \text{ résistivité.} \end{array} \right.$$

et 
$$\delta = K \frac{NE}{R + Nr} = KE \frac{NR}{R \left( \frac{R}{r} + N \right)}$$

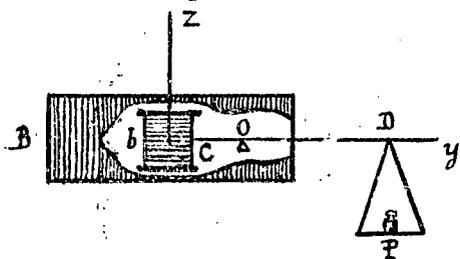
Comme  $\frac{NR}{r}$  est constant, le maximum de  $\delta$  a lieu pour  $N = \frac{R}{r}$ ; la résistance du galvanomètre doit être égale à la résistance extérieure.

Cette condition suppose essentiellement qu'on soit limité par le volume du fil. Si l'on ne s'impose aucune limite de ce côté, la condition n'a plus de raison d'être.

## 116. ~ Electrodynamomètre absolu de Pellat. ~

Dans les appareils appelés électrodynamomètres, on utilise l'action des courants sur les courants.

L'appareil de Pellat mesure l'intensité en valeur absolue



Un champ uniforme est obtenu dans un solénoïde d'axe horizontal  $Oy$ , formé d'une bobine  $B$  fixe, longue et grosse.

Au centre est une bobine  $b$  à axe vertical  $Z$ . Le même courant  $i$  passe dans les bobines  $B$  et  $b$ . Les forces électrodynamiques qui en résultent

- se réduisent à un couple ( $N^o 98$ ) dont l'axe est normal à  $y, z$ . Ce couple est mesuré par une balance dont le fléau  $DOC$ , mobile autour de  $O$ , porte la bobine  $b$  à son extrémité  $C$ . L'autre extrémité  $D$  porte un plateau  $P$  destiné à recevoir les poids.

dont le moment mesure le couple électrodynamique.

Le champ magnétique, dans la bobine B, a pour valeur

$$H = 4\pi N_1 (1-\epsilon) i$$

$N_1$  étant le nombre de spires par unité de longueur, et  $\epsilon$  un coefficient de correction qu'on sait calculer (n° 103). D'autre part, le moment magnétique de b est  $\mathcal{M} = NiS$

Le couple qui agit sur la balance a donc pour moment

$$K = NiS \cdot 4\pi N_1 (1-\epsilon) i = 4\pi i^2 S N N_1 (1-\epsilon)$$

il est mesuré par les poids mis dans la balance; on mesure donc  $i$  en unités électromagnétiques C. G. S.

Pour éliminer l'erreur introduite par le champ terrestre, on fait passer successivement le courant dans les deux sens à travers la bobine mobile.

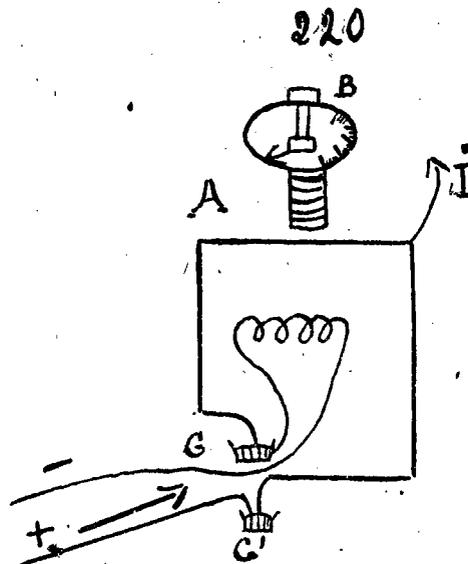
Cet appareil peut servir à graduer par comparaison les galvanomètres et ampérimètres. Il a été utilisé pour la mesure de l'équivalent électrochimique de l'argent  $\frac{m}{it}$ ,  $m$  étant la masse de l'argent déposé pendant le  $\frac{m}{it}$  temps  $t$  par le courant  $i$  mesuré avec l'électrodynamomètre absolu. C'est par cette méthode qu'a été trouvé le nombre 0,001118 gr. qui a été adopté comme étalon fondamental.

## 117. ~ Electrodynamomètre industriel de Siemens. ~

Cet appareil se compose d'un cadre mobile formé d'un seul fil dont les extrémités plongent dans deux godets G G' pleins de mercure qui servent de joints pour le passage du courant.

Le cadre se déplace et on le ramène à sa position initiale en agissant sur le bouton B jusqu'à ce que l'index I revienne au zéro de la graduation.

Une aiguille A permet d'évaluer l'angle de torsion qui correspond à ce retour et qui est proportionnel au couple sur le cadre. Le couple varie comme  $i^2$  et l'on a  $\alpha = Ai^2$ .



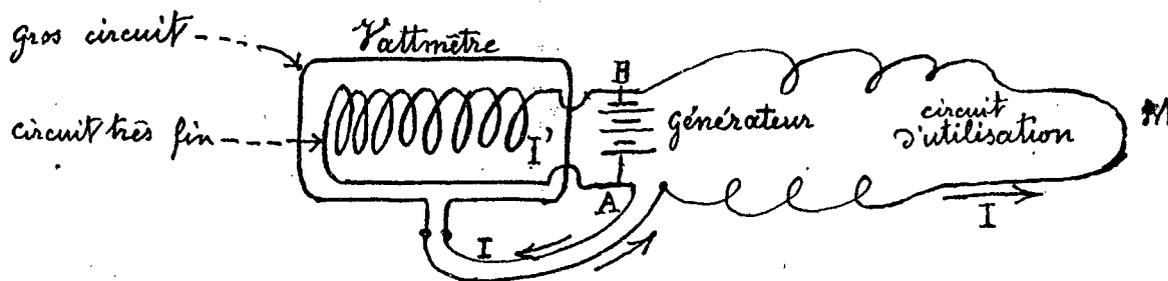
- L'électrodynamomètre présente l'avantage de donner  $i$  indépendamment du sens du courant.

## 118. ~ Wattmètres. ~

Tout électrodynamomètre comprend un circuit fixe et un circuit mobile; si les déplacements de ce dernier sont faibles, les variations correspondantes du coefficient d'induction mutuelle des deux parties sont négligeables et l'effet développé est proportionnel au produit  $i i'$  des intensités des deux circuits; il en est de même des petits déplacements qu'on rend appréciables en les amplifiant.

Imaginons que l'un des circuits constitué par un gros fil soit intercalé dans une canalisation électrique  $AMB$  traversée par un courant  $i$ , tandis que l'autre circuit avec un fil très fin et résistant sera au contraire branché sur deux points  $A$  et  $B$  de la même canalisation et sera traversé par un courant  $i'$  proportionnel à la différence  $\psi_A - \psi_B$  des potentiels en  $A$  et  $B$ .

Dans ces conditions, l'appareil indique à chaque instant, à un facteur constant près, la valeur  $i(\psi_A - \psi_B)$  de la puissance consommée sur la canalisation  $M$  entre les points  $A$  et  $B$ .



Les électrodynamomètres disposés pour l'évaluation de la puissance se nomment Wattmètres.

En relevant les indications à différentes époques et construisant la courbe en fonction du temps  $t$ , l'aire  $S = K \int_{t_0}^{t_1} (\Psi_A - \Psi_B) i dt$  représente l'énergie dépensée sur la ligne AMB entre les époques  $t_0$  et  $t_1$ , multipliée par la constante  $K$ . On évalue  $K$  en faisant fonctionner l'appareil avec un courant constant  $i$  mesuré au galvanomètre, sous une différence de potentiel évaluée à l'électromètre ou au voltmètre. Le Wattmètre peut être utilisé de cette manière comme compteur d'énergie.

Il faut donner aux deux circuits des résistances respectivement très faible et très grande pour que l'interposition de l'appareil ne modifie pas sensiblement le régime de la canalisation qu'on a à étudier.

## 119. ~ Ampèremètres et voltmètres. ~

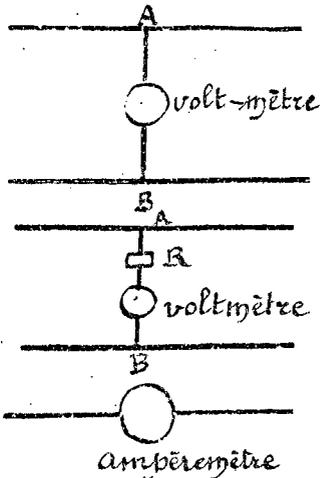
Les galvanomètres construits pour les usages industriels portent le nom d'ampèremètres. Ils sont à lecture directe, l'index de l'instrument se déplaçant sur un cadran gradué en ampères.

La graduation est faite par comparaison avec un galvanomètre servant d'étalon.

Citons comme exemple l'ampèremètre Deprez-Carpentier. Il est formé d'une bobine à l'intérieur de laquelle est placée une aiguille en fer doux orientée par un double aimant recourbé. Le courant traversant la bobine tend à dévier l'aiguille qui, sous l'action de deux couples contraires, prend une position d'équilibre marquée par l'index sur la graduation du cadran.

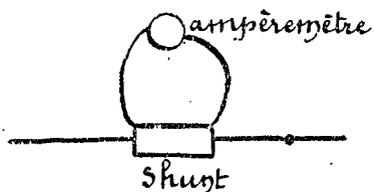
Dans d'autres appareils la partie mobile est une palette de fer doux attirée ou repoussée par une autre pièce de fer doux, le tout aimanté par le courant qui traverse la bobine; on arrive ainsi à avoir des forces assez grandes, condition essentielle à réaliser pour des instruments industriels dont la partie mobile est montée sur pivot; la force antagoniste est, en général, un ressort en spirale.

Les voltmètres sont des ampèremètres gradués en produits de l'intensité par la résistance de l'appareil, de sorte que la lecture donne directement la différence de potentiel (volts) aux bornes. On les monte en dérivation entre les points dont on veut mesurer la différence de potentiel.



La résistance des voltmètres doit toujours être grande (fil fin). S'il faut réduire leur sensibilité, on les met en série avec une résistance convenable.

Au contraire les ampèremètres, montés de manière à être traversés par le courant total à mesurer, sont à faible résistance (gros fil), de façon que la puissance dépensée (perte en volts et chaleur dégagée) y soit aussi petite que possible.



de métal.

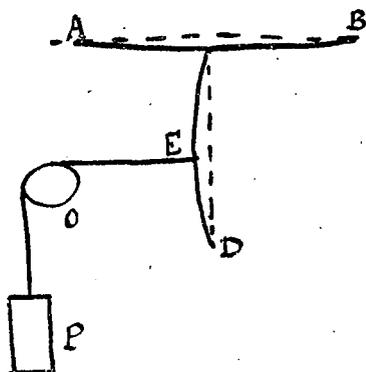
Pour les courants intenses, on monte autrement l'ampèremètre. On emploie un shunt. Dans la disposition ci-contre, l'ampèremètre est en général un voltmètre très sensible, un milli-voltmètre et le shunt est constitué par une simple bande

**Appareils calorimétriques.** — On mesure l'allongement d'un fil parcouru par le courant à mesurer, ou soumis à la différence de potentiel à mesurer.

La graduation de ces appareils est toujours empirique. Ils sont en général très stables, et les déplacements du zéro dus à la variation de la température ambiante peuvent être facilement corrigés.

Depuis Cardew, de nombreux dispositifs ont été imaginés pour mesurer les petits allongements. Un des plus intéressants est le suivant:

Le fil  $AB$ , fixé aux deux points  $A$  et  $B$ , est tiré en son milieu



par un fil  $CD$  fixé en  $D$ , lui-même tiré en son milieu  $E$  par un fil qui, passant sur une poulie  $O$ , est tendu par un poids  $P$ . On lit les rotations de la poulie.

## 120. ~ Impulsion magnétique produite pour un courant de courte durée galvanomètre balistique. ~

Lorsqu'un courant de très courte durée (décharge d'un condensateur, par exemple) passe dans un galvanomètre, l'aiguille est brusquement déviée de sa position d'équilibre; pendant un court instant, l'espace environnant est le siège d'un champ magnétique.

Pour étudier cette action, nous allons employer une aiguille réglée de telle manière que ses déviations  $\delta$  soient assez faibles pour que le couple qui tend à la ramener soit pratiquement proportionnel à  $\delta$ .

De plus, par l'addition de masses convenables, nous lui donnerons un moment d'inertie  $I$  assez considérable, pour que ses déplacements soient lents et puissent être négligés pendant un intervalle de temps certainement supérieur à la durée du courant.

Une telle aiguille placée dans un cadre multiplicateur constitue un galvanomètre balistique.

Les oscillations sont pendulaires, puisqu'on a:

$$I \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -c \delta$$

et la période est 
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}$$

L'aiguille étant au repos, faisons passer le courant de très courte durée; entre les époques très rapprochées  $t=0$  et  $t=t_1$ ,

elle n'éprouve pas de déplacement sensible, bien qu'elle soit soumise à un couple  $\mathcal{M}H$ ,  $H$  étant la composante du champ normale au plan déterminé par sa direction et son axe de rotation (1).

En intégrant l'équation différentielle du mouvement de  $\delta$  à  $t_1$ , on a :

$$I \int_0^{t_1} \frac{d^2\delta}{dt^2} dt = \mathcal{M} \int_0^{t_1} H dt - C \int_0^{t_1} \delta dt$$

Remarquant que pour  $t=0$ ,  $\frac{d\delta}{dt} = 0$  et que de  $t=0$  à  $t=t_1$   $\delta$  est négligeable, il vient :

$$I \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{t_1} = \mathcal{M} \int_0^{t_1} H dt$$

Au temps  $t_1$ , l'aiguille qui est dans une position extrêmement voisine de sa position d'équilibre, se trouve donc animée d'une vitesse  $\left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{t_1}$  proportionnelle à l'impulsion du couple électromagnétique, et l'on obtiendra la valeur de l'angle  $\delta_0$  qu'elle va décrire pour atteindre son écart maximum en écrivant que le travail :

$C \int_0^{\delta_0} \delta d\delta$  du couple antagoniste  $C\delta$  est égal à la force vive  $\frac{1}{2} I \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{t_1}^2$  :

$$C\delta_0^2 = I \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{t_1}^2$$

$$(160) \quad \delta_0 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_{t_1} = \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{IC}} \int_0^{t_1} H dt$$

(1) Nous supposons les dimensions de l'aiguille assez petites pour qu'on puisse admettre qu'à un instant quelconque, pendant la décharge, la valeur de  $H$  qui varie suivant une loi inconnue, est la même à ses deux pôles.

Faisons circuler dans le galvanomètre un courant constant  $i_0$  produisant la même déviation  $\delta_0$ ; le champ produit dans la région de l'aiguille peut, en principe, être calculé et a une expression de la forme  $Gi_0$ . L'équation d'équilibre

$$C \delta_0 = \mathcal{M} G i_0$$

Combinée avec (160), donne:

$$(161) \quad \int_0^{t_1} H dt = \frac{\sqrt{IC}}{\mathcal{M}} \delta_0 = \sqrt{\frac{I}{C}} G i_0 = \frac{T}{2\pi} G i_0$$

qui permet de déduire l'impulsion magnétique de l'observation de  $T$  et de  $i_0$  et du calcul ou de la détermination expérimentale de la constante galvanométrique  $G$ .

### Expression de l'impulsion magnétique en fonction de la quantité d'électricité transportée pour la décharge. —

Faisons les hypothèses suivantes:

A tout instant, pendant la décharge, le courant variable est le même en tous les points du circuit galvanométrique.

La formule (138) (n° 99, loi de Laplace) qui résulte d'expériences se rapportant uniquement à des courants permanents peut s'appliquer à chaque instant à un courant variable.

Dans ces conditions, la force magnétique à l'époque  $t$  doit être  $Gi$ ,  $G$  désignant l'intégrale

$$\int_L [\vec{R} \cdot d\vec{s}] \text{ étendue au circuit galvanométrique } L \text{ et l'on}$$

$$(162) \quad \int_0^{t_1} H dt = \int_0^{t_1} G i dt = G \int_0^{t_1} i dt = Gq$$

en étendant la relation  $q = it$  au cas du régime variable.

L'impulsion magnétique est égale au produit de la constante galvanométrique  $G$  par la quantité d'électricité

qui a traversé le circuit.

Il est bien évident que, dans l'état de régime variable, deux sections prises en des régions différentes du conducteur ne sont pas, au même instant, traversées par le même courant, car la propagation de  $n$  n'est pas instantanée; mais il est cependant certain qu'entre le début et la fin de la décharge, ou plus généralement entre deux états de régime permanent, deux sections quelconques sont traversées par la même quantité totale d'électricité. Il est par suite possible de s'affranchir de la première hypothèse en généralisant comme il suit, l'énoncé de la loi de Laplace (form. 127 n° 91 et 138 n° 99).  
L'existence, à l'époque  $t$  d'un courant  $i$  dans un élément filiforme  $ds$  entraîne dans un délai extrêmement court à une distance  $r$  de cet élément l'existence d'un champ élémentaire:

$$d\vec{H} = \left[ \vec{R} \ i \ ds \right]$$

$\vec{R}$  étant le vecteur  $\frac{1}{r^2}$  précédemment défini (n° 99).  
L'impulsion magnétique due à ce seul élément sera, au cours de la décharge totale:

$$\int_0^t d\vec{H} \ dt = \left[ \vec{R} \ ds \right] \int_0^t i \ dt = q \left[ \vec{R} \ ds \right]$$

et pour avoir l'impulsion totale due au circuit entier nous n'aurons plus qu'à intégrer par rapport à  $ds$ , ce qui nous conduit évidemment à la valeur  $Gq$  précédemment donnée.  
La concordance des résultats fournis par les calculs basés sur l'emploi de la formule de Laplace avec ceux que donne l'expérience permet uniquement de dire que cette formule reste applicable à un courant de très courte durée à condition d'y substituer au champ  $d\vec{H}$ , l'impulsion magnétique et à l'intensité  $i$  la quantité d'électricité  $q$  qui a traversé l'élément  $ds$  du conducteur. Elle ne peut plus nous permettre le calcul de  $H$  à un instant donné, non seulement parce que nous ignorons si elle est valable dans le cas d'un courant variable, mais encore parce que nous ne connaissons pas la loi suivant laquelle se distribuent à l'instant considéré les valeurs de  $i$  aux différents points du circuit.

De ce qui précède, il résulte que nous pouvons, dans les formules (151), remplacer l'impulsion magnétique par  $Gq$

$$\sqrt{\frac{IC}{\mu\tau}} \delta_0 = \int_0^{t_1} H dt = Gq = \frac{T}{2\pi} Gi_0$$

Donc (163)  $q = \frac{T}{2\pi} i_0 = \frac{\sqrt{IC}}{\mu\tau} \delta_0$

De sorte que la déviation maximum de l'aiguille mesure la quantité d'électricité  $q = \int i dt$ .

# Chapitre V.

## Induction électromagnétique.

### § 1. Courants induits - - 121 - Découverte de Faraday - Loi de Lenz -

L'induction électromagnétique a été découverte en 1831 par Faraday.

Depuis Newton, la mécanique et la physique s'étaient développées en admettant la possibilité d'actions directes et instantanées à distance (1) ; les lois de Coulomb en électrostatique et en magnétisme sont calquées sur la loi d'attraction newtonienne.

Faraday le premier, s'est posé en adversaire de l'idée des actions à distance, sinon en mécanique céleste, du moins en physique, et a considéré les influences électriques et magnétiques comme des actions de milieu transmises de proche en proche, le milieu réagissant lui-même sur les corps qui y sont plongés.

La loi fondamentale de l'électromagnétisme montre qu'un courant agit sur un aimant ou sur un autre courant, fait qui serait évidemment possible par action directe à distance ; mais s'il en était ainsi le champ magnétique n'aurait aucune réalité dans l'espace ; un circuit non parcouru par un courant ne subissant aucune action en présence d'aimants ou d'autres courants, il n'y aurait aucune raison de voir un effet se produire dans

---

(1). Jusqu'à ces dernières années, la mécanique a admis les actions instantanées à distance. Le renversement de la conception de Newton et l'adaptation des idées de Faraday à la mécanique est la base fondamentale de la mécanique nouvelle (théorie d'Einstein).

le déplacement de ce circuit. Au contraire, dans la théorie de Faraday un champ magnétique est une modification du milieu et implique la présence de "quelque chose" (nous verrons que c'est de l'énergie, localisée dans chaque élément de volume de l'espace; alors si un circuit conducteur non parcouru par un courant, est placé dans un champ magnétique, on peut s'attendre à voir un courant prendre naissance si l'on modifie le milieu en faisant varier le champ ou si l'on déplace le circuit. C'est bien ce que Faraday a constaté.

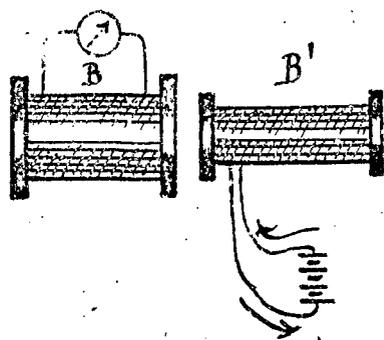
Toute variation du champ magnétique dans le voisinage d'un conducteur, y donne naissance à des courants momentanés appelés courants induits, dont la durée est la même que celle de la variation du champ magnétique qui provoque le phénomène. Le champ variable se nomme champ inducteur.

On peut mettre ce fait en évidence par diverses expériences qualitatives:

1<sup>o</sup>. Après avoir placé un galvanomètre  $G$  dans le circuit d'une bobine, approchons le pôle nord d'un aimant  $NS$  dirigé parallèlement à l'axe de la bobine, nous observons un courant qui cesse en même temps que le mouvement de l'aimant et qui se produit en sens inverse lorsqu'on éloigne l'aimant au lieu de l'approcher.

Les mêmes effets ont lieu quand on approche ou quand on éloigne la bobine, l'aimant restant fixe. C'est le déplacement relatif qui intervient.

Les effets sont intervertis en ce qui concerne le sens du courant observé dans chaque cas, si l'on permute les pôles de l'aimant.



2<sup>o</sup>. Si l'on remplace l'aimant par un solénoïde les résultats sont les mêmes; la permutation des pôles de l'aimant revient à changer le sens du courant dans le solénoïde inducteur.

3° Enfin les variations du champ magnétique peuvent être obtenues en substituant aux déplacements, des variations dans l'intensité du courant de B'. Les bobines B et B' étant placées comme l'indique la figure, on observe que tout courant qui commence ou qui augmente d'intensité dans B' induit dans B un courant dont le sens est inverse de celui qu'il a lui-même; c'est le contraire lorsque le courant décroît ou disparaît dans B.

Dans les expériences précédentes, si les déplacements ou si les variations du courant inducteur sont rapides, on peut mesurer la quantité d'électricité induite au moyen du galvanomètre

$$q = \int i dt$$

ballistique. C'est ce qu'ont fait Faraday, Massol et Félicé, Lenz.

- Les lois qu'on constate sont les suivantes :
- 1°/ L'aller et le retour de la bobine B' produisent des impulsions égales et de sens opposés sur le galvanomètre.
  - 2°/ L'impulsion est indépendante du chemin parcouru et de la vitesse du déplacement, pourvu que la position initiale et la position finale de B' soient conservées.
  - 3°/ Si l'induction est produite par un courant, l'impulsion est proportionnelle à l'intensité du courant inducteur, au nombre de tours de fil de la bobine inductrice, et au nombre de tours de la bobine induite.

En un mot la quantité d'électricité induite est proportionnelle à la variation du flux magnétique à travers la bobine induite.

- 4°/ L'impulsion est inversement proportionnelle à la résistance de la bobine induite.

**Loi de Lenz.** — Le physicien russe Lenz (1833) a énoncé une loi qui permet de prévoir le sens du courant induit lorsque les variations du champ sont dues à un déplacement.

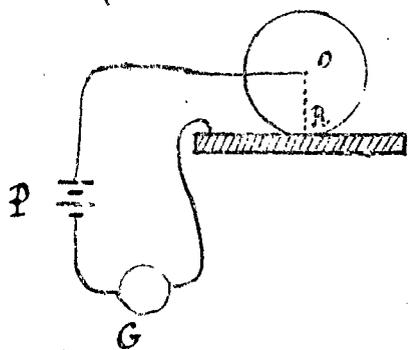
Le sens de ce courant est tel que les forces électrodynamiques résultant de son existence tendent

à s'opposer au déplacement relatif considéré.

Soit un disque de Faraday (n° 82) qui, placé dans un champ magnétique normal au plan du disque, se met en mouvement lorsqu'on y produit un courant à l'aide d'une pile.

Supprimons la pile en lui substituant une lame métallique et faisons tourner le disque à la main, dans le même sens que précédemment; nous obtenons dans le circuit un courant de sens contraire à celui qui produisait tout à l'heure le mouvement; le courant induit s'oppose donc au mouvement. C'est bien la loi de Lenz.

Mais, dans cette expérience, il y a une différence avec les expériences précédentes; il n'y a plus de variation du champ dans lequel est placé le circuit: on peut employer un champ constant et uniforme.



Quel est alors l'effet de la rotation? uniquement de couper le flux avec le rayon OR. Il est évident que le courant induit résulte du fait qu'une portion du circuit coupe les lignes de force magnétique. Le courant d'induction est donc produit par la

variation du flux à travers le circuit, et la loi de Lenz prend la forme suivante:

Le flux que le courant induit émet à travers le circuit qu'il parcourt est de signe contraire à la variation du flux émis à travers ce même circuit par le système inducteur.

## 122. - Loi de la force électromotrice induite par déplacement -

En faisant tourner la roue de Faraday avec une vitesse constante, on obtient un courant d'induction constant. Cherchons l'expression de la force électromotrice induite.

Faisons fonctionner la roue, non comme générateur, mais comme moteur, en plaçant une pile dans le circuit; elle tourne alors sous l'action des forces électrodynamiques.

(1) Règle des 3 doigts - quand le pouce, l'index et le médium de la main droite forment un trièdre trirectangle et que l'index a la direction du champ, le pouce celle du mouvement, le médium indique la direction du courant.

Soient  $i$  le courant,  $d\varphi$  le flux coupé par le rayon  $OR$  dans le temps  $dt$ .

Le travail de la force électrodynamique exercée sur le rayon,  $OR$  est  $d\mathcal{E} = i d\varphi$ ; cette énergie est empruntée à la pile, qui dépense ainsi en travail mécanique l'énergie  $i d\varphi$  pendant qu'elle débite  $i dt$  coulomb.

Le quotient

$$\frac{i d\varphi}{i dt} = \frac{d\varphi}{dt}$$

est la force contre-électromotrice du récepteur.

Si on la compte positivement dans le sens du courant  $i$ , c'est une force électromotrice négative; sa valeur algébrique  $E$  a donc pour expression:

$$(164) \quad E = - \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

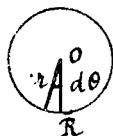
Cette expression est indépendante de l'intensité  $i$  du courant et de la force électromotrice de la pile, car elle ne fait intervenir que le mouvement du disque dans le champ magnétique; on conçoit donc que cette force électromotrice puisse exister même si le circuit ne contient aucun générateur; c'est la force électromotrice induite par déplacement. Nous verrons un peu plus loin que l'expression (164) est tout à fait générale.

Comme la roue de Faraday, les appareils à rotation continue dont nous avons parlé en électromagnétisme (Ampère, Jamin) peuvent être renversés et donner des courants induits continus, en supprimant la pile et faisant tourner la partie mobile.

Dans ces appareils la continuité du mouvement et du courant induit est due au contact glissant qui permet au courant de passer dans des parties toujours

(1) Exemple numérique pour indiquer l'ordre de grandeur: champ constant  $H = 5000$  gauss sur tout le rayon  $OR$ .

$$OR = r = 5 \text{ cm}$$



vitesse de rotation  $\frac{d\theta}{dt} = 10$  tours par seconde

$$E = - \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{H dS}{dt} = - \frac{H r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = - 7,8 \cdot 10^6 \text{ C.S.} = 0,078 \text{ volt.}$$

différentes de la matière. Mais un circuit formé par un simple fil ne le permet pas : un tel circuit ne peut donner lieu ni à des mouvements continus par la force électrodynamique, ni à un courant continu induit par déplacement. En effet, dans ce cas particulier le flux coupé par le circuit égale la variation du flux embrassé par lui ; si sa forme est invariable le flux dépend seulement de la position du circuit.

Les circuits filiformes sans contact glissant donnent lieu à des lois que nous allons étudier.

### 123. - Equation de l'énergie d'après Helmholtz<sup>(1)</sup>

Déplaçons, dans le champ d'un aimant, un circuit conducteur filiforme, ne contenant pas de pile. Un courant se manifeste dans le circuit pendant la durée du mouvement ; il n'y a de courant ni avant ni après.

Trois énergies sont en présence : le travail fourni par l'observateur, celui des forces électrodynamiques qui résistent au déplacement, et la chaleur de l'effet Joule. En outre il y a la force vive du conducteur et nous verrons que le courant possède une énergie propre analogue à la force vive ; mais ces deux énergies sont nulles quand le circuit, au repos, n'est plus parcouru par aucun courant.

Telles sont les énergies que l'expérience révèle. Si l'on admet que ce sont les seules, on peut appliquer au système d'une part le théorème de la force vive ; d'autre part le principe plus général de l'énergie. Éliminant le travail de l'observateur entre les deux équations obtenues, on trouve une relation entre la chaleur de Joule et le travail des forces électrodynamiques.

Le système de l'aimant et du conducteur part du repos et y revient. La force vive n'a pas changé ; donc la somme des travaux des forces appliquées au système

(1) E. Corvallo. L'électricité. collection scientia Naud. éditeur.

est nulle : ce sont le travail  $\mathcal{C}$  des forces électrodynamiques et le travail  $\mathcal{C}_1$  de l'observateur :

$$(165) \quad \mathcal{C} + \mathcal{C}_1 = 0$$

Laissons dissiper la chaleur de Joule ; le système revient à la température initiale, son énergie dès lors n'a pas changé. Donc la somme des énergies fournies au système est nulle. Ce sont le travail  $\mathcal{C}_1$  de l'observateur et la chaleur de Joule changée de signe  $-Q$ . Le travail des forces électrodynamiques n'entre pas en compte ici, puisque ces forces sont des forces intérieures qui s'exercent entre l'aimant et le circuit :

$$(166) \quad \mathcal{C}_1 - Q = 0$$

Éliminons  $\mathcal{C}_1$  entre (165) et (166), il vient :

$$(167) \quad \mathcal{C} + Q = 0$$

$$\text{Or } \mathcal{C} = \iint i d\varphi \quad Q = \int r i^2 dt$$

L'équation (167) s'écrit donc :

$$(168) \quad \iint i d\varphi + \int r i^2 dt = 0 \quad (\text{équation de}$$

Helmholtz) On voit que  $\iint i d\varphi$  est négatif ; c'est la loi de Lenz

Mais, de ce que les deux intégrales de l'équation sont égales, au signe près, rien n'autorise à conclure que les éléments correspondants des intégrales soient égaux, et en fait ils ne le sont pas parce que le courant  $i$  est doué d'inertie. Au début le travail de l'observateur est en partie dépensé à vaincre cette inertie et se trouve supérieur à la chaleur de Joule ; à la fin l'énergie emmagasinée se dépense en chaleur de Joule qui l'emporte à son tour sur le travail de l'observateur.

Cependant, si le régime est établi, comme dans la roue de Faraday, tous les éléments sont égaux et l'on a :

$$(169) \quad -i d\varphi = ri^2 dt \quad ; \quad -\frac{d\varphi}{dt} = ri$$

$i$  est constant puisque le régime est établi ;  $E = ri$  est une force électromotrice, d'après la formule de Ohm. Nous retrouvons la formule (164). Comme nous l'avons déjà dit, cette force électromotrice induite existe indépendamment du courant  $i$  ; on peut le démontrer au moyen d'une dynamo en circuit ouvert, en réunissant les pôles à un électromètre, ou, plus pratiquement, en lui opposant une batterie d'accumulateurs en circuit fermé. De plus, la force électromotrice induite est indépendante des autres forces électromotrices qui peuvent se trouver dans le même circuit.

L'expérience prouve que la loi :

$$(170) \quad E = -\frac{d\varphi}{dt}$$

établie dans un cas particulier est pourtant générale et donne, en régime variable, la force électromotrice induite à chaque instant, car l'application de cette formule conduit, dans tous les cas, à des résultats exacts.

## 124 - Flux d'induction et impulsion totale de la force électromotrice.

Soit un circuit passant de la position  $C_0$  à la position  $C_1$  ; désignons par  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  les valeurs du flux magnétique dans ces deux positions. A cause de son rôle dans les courants induits, ce flux est appelé flux d'induction.

L'impulsion totale de la force électromotrice pendant le déplacement est

$$\int_{t_0}^{t_1} E dt$$

d'après (170) elle est égale à la diminution du flux d'induction :

$$(171) \quad \int_{t_0}^{t_1} E dt = (\varphi_0 - \varphi_1)$$

Elle est indépendante du chemin suivi et du temps employé à le parcourir; elle dépend seulement des positions  $C_0$  et  $C_1$  et du champ magnétique supposé constant en chaque point.

Si maintenant le circuit est fixe et le champ variable, l'impulsion a encore la même expression. Ce fait résulte d'une expérience de Faraday: au lieu de retirer brusquement le circuit induit, on coupe le circuit inducteur; la disparition du courant entraîne la suppression du flux magnétique qui traversait le circuit induit. On observe au galvanomètre balistique une impulsion égale à celle qu'on avait obtenue en supprimant le flux par le déplacement du circuit induit.

On doit en conclure que la variation du champ magnétique produit dans un circuit fermé une impulsion égale à la diminution du flux magnétique embrassé par ce circuit.

## Inertie d'un courant. Self-induction.

Nous avons dit que l'inertie d'un courant s'oppose, pendant le régime variable, à l'égalité des éléments correspondants des intégrales de l'équation (168). Cette inertie provient de l'induction du courant sur lui-même.

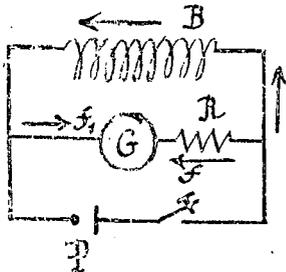
Soit  $L$  le coefficient de self-induction du circuit (n° 106), essentiellement positif d'après la règle du bonhomme d'Ampère et nos conventions de sens et de signe sur le flux d'induction magnétique. Pour l'intensité  $i$  le flux dû au courant lui-même est  $Li$ . Donc si l'on admet la généralité de la formule (170), la variation de  $i$  donne naissance à une force électromotrice  $-L \frac{di}{dt}$ . De signe contraire à  $\frac{di}{dt}$ , cette force s'oppose à l'établissement du courant et à son arrêt.

Rappelons-nous que  $i$  est la vitesse du déplacement électrochimique;  $\frac{di}{dt}$  est donc l'accélération. Ainsi la force de self-induction est proportionnelle à l'accélération, mais de signe contraire; il s'agit bien d'un phénomène d'inertie. Le coefficient d'inertie  $L$  est donc, à première vue, comparable à la masse d'un corps en translation. Mais il y a plus. Ce n'est

pas une simple comparaison, car il y a identité entre l'inertie mécanique et l'inertie électromagnétique.

Pour verrons plus tard que l'inertie de la matière peut être entièrement attribuée à l'inertie électromagnétique des particules électrisées qui la composent, les déplacements de ces particules constituant des courants.

Faraday a mis en évidence la self-induction par l'expérience suivante:



Sur le circuit d'une pile P munie d'un interrupteur I, on met en dérivation une bobine B douée d'une grande self-induction, puis une résistance R dénuée de self-induction (fil enroulé en double comme dans les boîtes de résistance) avec un galvanomètre G. À l'état de régime, les forces contre-électromotrices de Joule partagent le courant proportionnellement aux conductibilités des deux branches; quand on établit le courant, l'inertie oppose à son passage une force contre-électromotrice supplémentaire dans la bobine B, un supplément de courant  $f$  passe dans G. À la rupture du circuit par l'interrupteur I, le courant ne s'arrête pas brusquement dans B; l'inertie fait qu'il se prolonge et donne dans G un courant  $f_1$  de sens contraire à  $f$ .

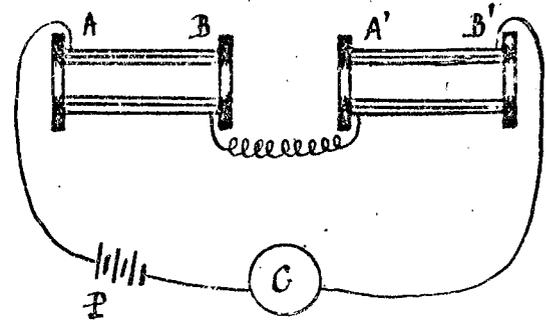
Pour observer ces deux courants très courts  $f$  et  $f_1$ , Faraday arrête l'équipage mobile de G par une cale disposée comme nous allons l'indiquer.

Pour observer  $f$ , la cale est placée de façon à empêcher l'équipage d'obéir au courant permanent de sens  $f$ . Elle le maintient au zéro. À la rupture du circuit, le courant  $f_1$  l'envoie dans le sens opposé à la cale. Pour observer le supplément de courant  $f$  à l'établissement du courant, on place la cale de façon à maintenir l'équipage dans sa position de régime et à l'empêcher de retomber au zéro. À la fermeture du circuit, le courant supplémentaire  $f$  lui donne une impulsion qui augmente un instant la déviation.

Le courant supplémentaire à la fermeture et à la rupture porte le nom d'extra-courant.

L'extra-courant de rupture se manifeste par une étincelle lorsqu'on coupe un circuit possédant une self-induc

tion suffisante.



L'induction d'un courant sur lui-même se produit encore par changement de forme du circuit. Considérons deux bobines intercalées dans le même circuit et parcourues par le même courant dans le même sens, et supposons ces

bobines assez voisines pour que leur action mutuelle ait une valeur appréciable. Si on les écarte brusquement, on constate une augmentation passagère du courant; de même en les rapprochant on provoque une diminution momentanée.

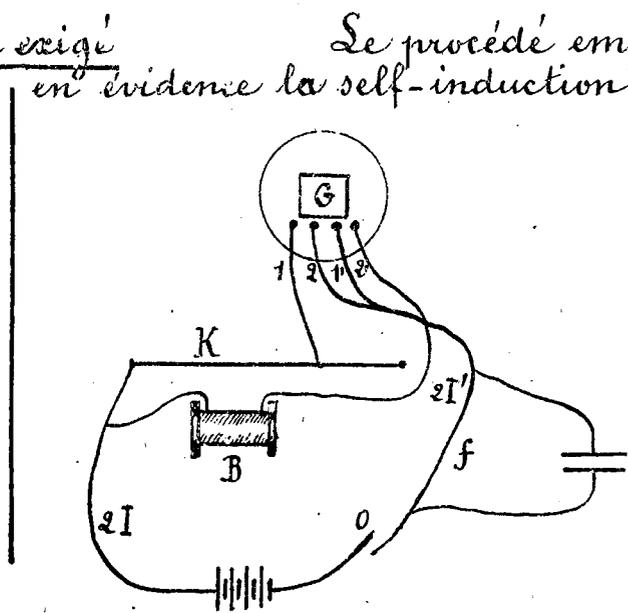
En plaçant dans les bobines des noyaux de fer doux, l'augmentation momentanée du courant est assez forte pour faire rougir un fil fin de platine intercalé dans le circuit.

Dans le cas de la déformation d'un circuit parcouru par un courant  $i$ , on a pour la valeur de la force électromotrice de self-induction :

$$(172) \quad - \frac{d\phi}{dt} = -i \frac{dL}{dt} - L \frac{di}{dt}$$

### 126. Expériences d'Edlund.

Non exigé  
en évidence



Le procédé employé par Faraday pour mettre en évidence la self-induction a été amélioré par Edlund.

Le courant d'une pile  $E$  se divise en deux directions, dont l'une contient une bobine  $B$ . Chacune de ces dérivation contient en outre l'un des circuits d'un galvanomètre différentiel, et dans un sens tel que les deux courants circulent en sens contraire et ne produisent aucune déviation.

de l'aiguille lorsque les courants sont égaux.

Lorsque le courant est fermé, on règle la résistance  $K$  de manière à ramener l'aiguille du galvanomètre au zéro; les résistances  $r$  et  $r'$  des deux dérivationes sont alors égales. Lorsque cet équilibre est obtenu pour le régime permanent, on ouvre le circuit en  $O$ . L'aiguille du galvanomètre est projetée, et l'arc d'impulsion mesure la quantité d'électricité mise en jeu par l'extra-courant.

Puis l'aiguille revient au zéro. Si l'on ferme le circuit on a une nouvelle déviation de l'aiguille, mais en sens contraire, et l'arc d'impulsion est, au signe près, égal au premier.

L'ensemble des deux dérivationes constitue un circuit fermé, et si  $i$  et  $i'$  sont les intensités dans les dérivationes,  $ri - r'i'$  est égal à la somme des forces électromotrices contenues dans les dérivationes. Quand on ferme le circuit en  $O$ , la force électromotrice  $X$ , due à l'extra-courant de fermeture dans la bobine, est donnée par le théorème de Kirchhoff, et est égale à :

$$X = ri - r'i' = r(i - i') \quad \text{car } r = r'$$

L'aiguille est du reste soumise à chaque instant à une action qui est la même que si le courant  $i - i'$  traversait un seul des enroulements du galvanomètre; l'impulsion de l'aiguille donnera donc :

$$\int (i - i') dt = \frac{1}{r} \int X dt$$

Soit  $\delta$  l'impulsion produite par le passage de l'unité d'électricité dans un seul des enroulements, et  $\Delta_1$  l'arc d'impulsion obtenu quand on ferme le circuit en  $O$ ; on aura :

$$\int (i - i') dt = \frac{1}{r} \int X dt = \frac{\Delta_1}{\delta}$$

Quand on ouvre le circuit on observe une impulsion de sens contraire; soit  $\Delta_2$  cette impulsion; il se produit une force électromotrice  $Y$  dans la bobine; la résistance du circuit

des deux dérivations est  $2r$ ; le courant  $i = \frac{Y}{2r}$  circule dans ce circuit fermé; mais il traverse chaque enroulement dans le même sens, de sorte que l'impulsion est double de ce qu'elle serait si la quantité  $\int i dt$  passait dans un seul enroulement et l'on a :

$$\frac{\Delta_2}{S} = 2 \int i dt = \frac{2}{2r} \int Y dt = \frac{1}{r} \int Y dt$$

Edlund a observé que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  étaient égaux et de sens contraire. On a donc :

$$\int X dt = \int Y dt$$

Et en outre si on mesure le courant initial d'intensité  $2I$ , qui est donné dans le circuit commun lorsque le régime permanent est établi et l'aiguille au repos, on trouve que  $\int X dt$  et  $\int Y dt$  sont proportionnels à  $I$ .

Si au lieu d'ouvrir et de fermer le circuit en 0 on fait varier  $I$  de  $I_1$  à  $I_0$  en introduisant des résistances,  $\int Y dt$  est proportionnel à  $I_1 - I_0$ .

La force électromotrice induite doit donc être à un instant quelconque proportionnelle à  $-\frac{di}{dt}$ ; le signe  $-$  indique qu'elle est de même sens que le courant quand celui-ci diminue. La force électromotrice est en outre proportionnelle à un coefficient qui dépend de la construction de la bobine, et elle a pour expression

$$-L \frac{di}{dt} \quad L \text{ est le coefficient de self-induction.}$$

La disposition d'Edlund se prête à la mesure de  $L$ ; il suffirait de connaître  $S$ , c'est-à-dire l'impulsion correspondant au passage de l'unité de quantité d'électricité. On prendra un condensateur de capacité égale à  $C$  et on le chargera en le mettant en communication avec deux points du circuit commun parcouru par le courant  $2I$ . Soit  $p$  la résistance entre ces deux points; la quantité d'électricité accumulée sur le condensateur sera  $2pIC$ ; et si l'on décharge ce condensateur ainsi chargé au travers d'un seul des circuits du galvanomètre, on aura une dérivation  $\Delta = \int X 2pIC$ .

On règle la résistance  $\rho$  de telle manière que  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$ . On aura donc :

$$\frac{1}{2} \int X dt = C \times 2 \rho I$$

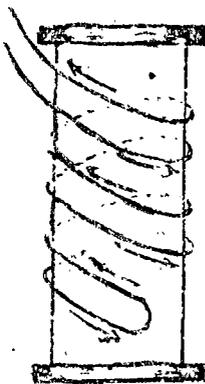
comme par définition :

$$\int X dt = LI$$

on en déduit

$$L = 2 \rho r C$$

Au lieu du galvanomètre différentiel on pourrait réaliser avec ce pont de Wheatstone une disposition mettant en évidence les forces électromotrices d'induction d'une bobine sur elle-même.



Dans ces expériences les résistances additionnelles doivent être telles qu'elles ne donnent plus d'effets sensibles d'induction sur elles-mêmes ou de self-induction.

Le résultat sera obtenu avec des fils rectilignes ou avec des bobines de résistances dont le fil est replié sur lui-même de façon à constituer deux circuits parallèles parcourus en sens contraire.

En remplaçant dans le dispositif d'Edlund la bobine  $B$  par deux bobines qu'on peut déplacer l'une par rapport à l'autre, l'impulsion subie par l'équilibre du galvanomètre, quand on rapproche ou qu'on écarte les bobines, permet de mesurer la force électromotrice totale induite :

$$\int E dt = \varphi_0 - \varphi_1 = (L_0 - L_1) I$$

$L_0$  et  $L_1$  étant les valeurs initiale et finale du coefficient de self-induction et  $I$  le courant qui parcourt les bobines.

## 127 - Equation du courant induit dans un circuit sans pile -

Le flux de l'induction magnétique à travers le circuit est la somme de deux termes :  $L \cdot i$  venant du courant lui-même et  $\varphi$  venant des autres causes du champ magnétique. Si le circuit n'est pas déformé, la force électromotrice d'induction est :  $-L \frac{di}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}$ .  
Appliquons la loi de Ohm :

$$(173) \quad L \frac{di}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} + ri = 0$$

d'où

$$r \int_{t_0}^{t_1} i dt = L(i_0 - i_1) + \varphi_0 - \varphi_1$$

Prenez pour  $t_0$  un instant antérieur au déplacement du circuit (ou à la variation du champ) et pour  $t_1$  un instant postérieur d'un temps suffisant pour que le courant ait pris fin ;  $i_0 = i_1 = 0$ . Il reste :

$$(174) \quad r \int_{t_0}^{t_1} i dt = \varphi_0 - \varphi_1$$

La quantité totale d'électricité induite dans un circuit est égale au quotient obtenu en divisant par sa résistance la diminution du flux d'induction qui le traverse.

Cette loi explique les résultats de Faraday (n° 121).

## 128 - Application à la mesure des champs magnétiques -

Soit à mesurer l'intensité d'un champ magnétique, par exemple le champ terrestre  $H$ . Prenez un circuit circulaire de surface  $S$  et de résistance  $r$  et orientons le normalement à  $H$ , puis opérons brusquement de

retournement du circuit de manière que le flux  $SH$  change, non de valeur absolue, mais de signe. La variation de flux est  $2SH$  et la quantité d'électricité induite est, d'après (173) :

$$(175) \quad q = \int i dt = \frac{2SH}{r}$$

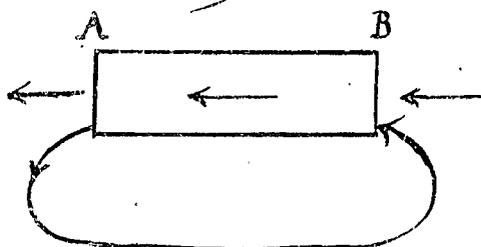
On mesure  $q$  au galvanomètre balistique. La formule donne  $H$ .

Le cerceau de Delezenne, destiné à cette mesure, est une bobine plate dont on opère le retournement. L'effet est multiplié par le nombre des spires.

Si le champ  $H$  est déjà connu par une méthode statique, la nouvelle mesure donne une vérification, et la concordance des deux mesures, est un contrôle de la théorie.

Si le champ magnétique est dû à un courant inducteur, on peut éviter de déplacer le circuit induit; il suffit de lancer le courant ou de le couper dans le circuit inducteur.

## 129. - Vecteur induction magnétique.

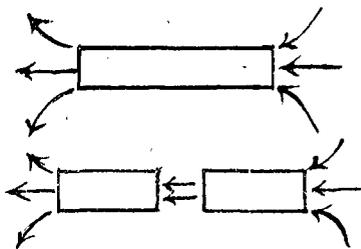


Dans un solénoïde  $AB$ , les lignes de force magnétique sont toutes fermées sur elles-mêmes. Si elles vont de  $A$  à  $B$  à l'extérieur, elles se continuent de  $B$  vers  $A$  à l'intérieur.

Remplaçons, à l'intérieur du solénoïde, l'air par du fer doux, nous obtenons un électro-aimant. Pour un même courant dans le fil, le champ à l'extérieur est considérablement augmenté, les lignes de forces étant toujours dirigées de  $A$  vers  $B$ : nous devons nous demander comment est dirigé le champ à l'intérieur.

Dans l'hypothèse de Coulomb, on imagine que le champ intérieur  $H$  est formé de deux parts: l'une  $H_1$ , due au solénoïde non armé de fer, l'autre  $H_2$ , due à l'aiman; non du fer qui présenterait une masse magnétique positive en  $A$ , une masse négative en  $B$ . Ses forces magnétiques seraient alors:  $H_1$  dirigées de  $B$  vers  $A$ ;  $H_2$  plus grande que  $H_1$  dirigées de  $A$  vers  $B$  de sorte que  $H = H_2 - H_1$  serait la

force résultante à l'intérieur; elle serait dirigée de A vers B offrant une discontinuité avec la force extérieure. Il en serait de même dans un aimant permanent.



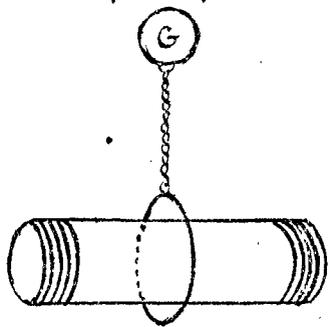
L'expérience de l'aimant brisé contredit ce résultat. Alors qu'une coupe pure au milieu de l'aimant devrait séparer les masses de signes opposés, on obtient au contraire deux aimants complets, et dans la coupure le champ est dirigé comme à l'intérieur du solénoïde qui serait équivalent à l'aimant pour les points extérieurs.

Nous avons d'ailleurs déjà donné les raisons pour lesquelles il faut rejeter l'hypothèse de Coulomb.

Le vecteur  $H$  défini plus haut, à l'intérieur du fer ne correspond à aucun fait expérimental et donne une idée fautive des phénomènes.

Il faut, avec Faraday, substituer à  $H$  un vecteur  $B$  défini par l'une des expériences qui a servi à définir la force magnétique dans l'air. Or, nous avons rencontré deux méthodes de mesure.

Dans la première méthode, on mesure l'effort exercé sur une boussole ou sur un courant placé à l'endroit où l'on cherche la force magnétique. Ici, nous ne pouvons pas placer un objet dans le fer.



La deuxième méthode vient d'être exposée au numéro précédent. Elle consiste à mesurer la quantité d'électricité induite par le champ à travers un circuit d'exploration.

Entourons le solénoïde d'un circuit de résistance  $r$  et faisons passer dans le fil du solénoïde

un courant  $I$ . À l'établissement ou à la rupture du courant  $I$  nous recueillons dans le circuit d'exploration une quantité d'électricité  $q$ ; le flux de la force magnétique est

$$\varphi = q r.$$

Plaçons un noyau de fer dans le solénoïde et faisons passer le même courant  $I$  que précédemment, nous recueill

lons dans le circuit induit une quantité d'électricité  $q'$  plus grande que  $q$  ; nous pouvons poser

De même qu'on avait, en l'absence de fer :

$$(176) \quad \varphi = \iint (\vec{H} \vec{n}) dS$$

nous pouvons écrire :

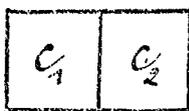
$$(177) \quad \varphi' = \iint (\vec{B} \vec{n}) dS$$

A cause de cette méthode de mesure par les courants induits, le vecteur  $B$  ainsi défini est appelé vecteur induction magnétique. Le champ magnétique  $H$ , de l'équation (176), est appelé force magnétisante ou champ magnétisant.

La méthode donne seulement une valeur moyenne de la composante normale de  $B$ . C'est d'ailleurs un renseignement suffisant dans la pratique.

Théoriquement on peut définir  $B$  en chaque point, en imaginant qu'on trace dans le fer un petit canal pour y loger un circuit d'exploration. La détermination de  $B$  pourrait être ainsi précisée autant qu'on le voudrait. Si le milieu à explorer est, non plus du fer, mais un milieu magnétique fluide, la détermination du vecteur  $B$  devient aussi facile que celle de  $H$  dans l'air.

La définition de l'induction magnétique  $B$  d'après Faraday est très satisfaisante parce qu'elle est basée sur l'expérience. Toutefois il faut reconnaître qu'elle implique une hypothèse ; elle admet la loi suivante :



Si un circuit  $C$  est composé par l'addition de deux circuits  $C_1$  et  $C_2$ , et si la création d'un champ magnétique produit dans  $C_1$  et  $C_2$  des impulsions électromotrices  $q_1 r_1$  et  $q_2 r_2$ , le même champ induira dans  $C$  la somme :

$$(178) \quad q r = q_1 r_1 + q_2 r_2$$

Cette loi est vraie pour le champ des courants en

l'absence de matières magnétiques. C'est une conséquence de la loi du flux de la force magnétique et de celle des courants induits. La première loi permet de définir le flux  $\varphi$  de la force magnétique à travers un circuit et entraîne  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ; la deuxième loi donne :

$$q_1 r_1 = -\Delta \varphi_1 \quad q_2 r_2 = -\Delta \varphi_2 \quad q r = -\Delta \varphi$$

d'où résulte l'égalité (178)

Cette loi s'applique-t-elle au cas où des corps magnétiques sont en présence des courants ? Il serait aisé d'en faire la vérification expérimentale dans un milieu magnétique fluide. Quoi qu'il en soit, elle résulte de la cohérence des résultats obtenus dans toutes ses applications.

## 1 - Perméabilité magnétique -

### Force magnétisante -

Le vecteur  $\vec{B}$  est identique au vecteur  $\vec{H}$  dans l'espace vide de matière, pratiquement aussi dans l'air.

Dans les milieux magnétiques, il remplace  $\vec{H}$  dans l'expression du flux magnétique et par suite aussi dans la loi fondamentale de Biot et Savart.

La fonction des forces électrodynamiques exercées sur un circuit électrique parcouru par un courant d'intensité 1 est égale au flux de l'induction magnétique à travers le circuit.

Pour un même courant excitateur, le flux d'induction dans une bobine armée de fer est plus grand que dans le solénoïde non armé. Ainsi, la même cause produit des effets plus grands dans le fer que dans l'air; le fer est plus perméable que l'air à l'induction magnétique.

Pour définir le rapport des perméabilités magnétiques de deux milieux  $M_1, M_2$ , imaginons un circuit placé d'abord dans le premier milieu, et donnant un flux d'induction  $\varphi_1$  à travers un circuit d'exploration dans ce milieu. Supposons que le milieu  $M_1$  soit remplacé par  $M_2$ ; le flux à travers le même circuit d'exploration et pour la même valeur du courant sera  $\varphi_2$ .

Le rapport des perméabilités  $\mu_1$  et  $\mu_2$  a pour mesure  $\frac{H_1}{H_2}$  ou  $\frac{B_1}{B_2}$ .

L'espace vide étant pris pour terme de comparaison  $\mu_1 = 1$  et  $B_1 = H_1$ .

La perméabilité rapportée au vide a donc pour mesure :

$$(179) \quad \mu = \frac{B}{H}$$

B mesure l'effet magnétique de l'excitation magnétique sur la matière étudiée; l'effet sur l'espace vide, qui est H, peut servir de mesure à l'excitation; c'est pour cette raison que le champ magnétique H est appelé force magnétisante ou champ magnétisant.

Généralement  $\mu$  est peu différent de 1. En particulier pour l'air la différence est inférieure à  $10^{-6}$  et l'induction B est pratiquement égale à la force magnétique H. Pour le fer  $\mu$  dépend de H. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

## § 2. Energie électrocinétique - <sup>(1)</sup>

### 131. Energie propre d'un courant -

Pour lancer une machine, il faut lui fournir un travail égal au travail des forces d'inertie. Ce travail est transformé en énergie cinétique  $\frac{1}{2} \sum m v^2$ .

De même, pour lancer un courant, il faut lui fournir une énergie égale au travail des forces électromotrices d'induction. Nous allons calculer cette énergie et montrer qu'elle constitue une énergie cinétique répandue dans le champ magnétique.

Passant au cas de plusieurs courants nous verrons que la force électrodynamique est, comme la force électromotrice d'induction, une force d'inertie. Nous avons d'ailleurs déjà vu qu'elle est comparable à la force

(1) E. Carvallo. Leçons d'électricité et L'électricité. collection scientia.

centrifuge composée.

Établissons le courant d'une pile dans un circuit de self  $L$ . L'intensité croît depuis zéro jusqu'à sa valeur définitive. A un instant quelconque de la période variable, la force électromotrice de self induction a pour valeur  $-L \frac{di}{dt}$ . Son travail, pour le déplacement électrique  $dq = idt$  est  $-L i di$ .

Le travail total, depuis le moment où le courant commence jusqu'au moment où il a la valeur  $i$  est  $-\frac{1}{2} Li^2$ .

Ce travail résistant est emprunté à la pile et diminue d'autant la chaleur de Joule. Lorsqu'on arrête le courant en retirant la pile du circuit  $\frac{di}{dt}$  devient négatif, la force électromotrice  $-L \frac{di}{dt}$  devient motrice et l'énergie  $T = +\frac{1}{2} Li^2$  est restituée en chaleur de Joule.  $T = +\frac{1}{2} Li^2$  est l'énergie propre du courant comme la force vive est l'énergie propre du volant d'une machine.

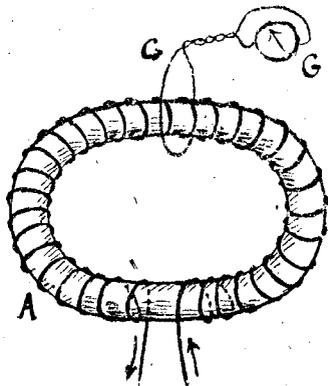
L'énergie  $T$  est corrélatrice du champ magnétique du courant, pour cette raison on l'appelle énergie du champ magnétique. Elle peut être calculée en fonction de ce champ.

Une première expression s'obtient en remplaçant  $Li$  par le flux d'induction  $\phi$

$$T = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} i \phi$$

Mais cette expression contient encore  $i$ ; on peut pousser le calcul plus loin.

Considérons le cas simple d'un solénoïde formé de  $N$  spires enroulées sur un tore en fer.



Le flux d'induction est  $\phi = NSB$ .  
L'expression de  $T$  s'écrit donc

$$(180) \quad T = \frac{1}{2} i \phi = \frac{1}{2} i NSB$$

D'autre part dans le solénoïde la force magnétique  $H$  due au courant a pour expression

$$H = \frac{4\pi i N}{l}$$

En tirant l'expression de  $i N$  de

cette formule pour la porter dans (180) ; nous trouvons :

$$(181) \quad T = \frac{1}{8\pi} S l B H$$

L'énergie par unité de volume est :

$$(182) \quad T_1 = \frac{1}{8\pi} B H$$

Nous verrons que ce résultat est général et que l'énergie d'un champ magnétique est :

$$(183) \quad T = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B} \mathbf{H}) dv$$

étendue à tous les éléments de volume du champ.

Dans le cas particulier que nous envisageons,  $H$  est sensiblement constant à l'intérieur du solénoïde ; il en est de même de  $\mu$  (fonction de  $H$  pour le fer) ; de sorte qu'en remplaçant  $B$  par  $\mu H$ , (182) s'écrit

$$T_1 = \frac{1}{8\pi} \mu H^2$$

S'il n'y avait pas de fer à l'intérieur du solénoïde on aurait

$$T_1 = \frac{1}{8\pi} H^2$$

Le coefficient de self  $L$  est  $\mu$  fois plus grand pour le solénoïde armé que pour le solénoïde non armé.

L'énergie du courant est bien comparable à la force vive puisqu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse  $i$  du déplacement électrique  $q$ . Pour compléter l'analogie, rappelons-nous que la force électromotrice d'induction est comparable à une force d'inertie et  $L$  comparable à une masse.

Ses formules précédentes montrent que l'énergie est emmagasinée dans le champ magnétique, comme l'énergie de force vive est emmagasinée dans le volant d'une machine ; pour rappeler son origine et sa nature, on l'appelle énergie électrocinétique du champ magnétique. (Maxwell).

## 132 - Energie électrocinétique d'un système de courants -

Considérons maintenant deux circuits  $C_1$  et  $C_2$ . La force électromotrice d'induction dans  $C_1$  se compose de deux parties, l'une  $-L_1 \frac{di_1}{dt}$  venant du courant lui-même, l'autre  $-M \frac{di_2}{dt}$  venant du courant  $i_2$ ; au total

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Le travail de cette force, pour le déplacement  $dq_1 = i_1 dt$  est :

$$-L_1 i_1 di_1 - M i_1 di_2$$

De même, dans  $C_2$ , le travail de la force électromotrice d'induction est :

$$-L_2 i_2 di_2 - M i_2 di_1$$

Le travail total, dans l'ensemble des deux circuits, depuis le moment où les courants commencent jusqu'au moment où ils ont atteint leur valeur définitive a pour valeur l'intégrale de la somme des deux expressions précédentes. L'énergie électrocinétique emmagasinée est ce travail changé de signe :

$$(184) \quad T = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$$

D'une façon générale, l'énergie électrocinétique d'un système de courants est :

$$(185) \quad T = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \dots + 2 M_{12} i_1 i_2 + 2 M_{13} i_1 i_3 + \dots \\ = \frac{1}{2} \sum L i^2 + \sum M_{ij} i_i i_j = \frac{1}{2} \sum i \varphi$$

fonction homogène et du second degré, forme quadratique des vitesses  $i = \frac{dq}{dt}$

Nous reportant au n° 108, nous voyons que l'expression de cette énergie est égale à la fonction des forces électrodynamiques qui s'exercent sur les deux circuits. Il en résulte

que les forces électrodynamiques doivent être assimilées à des forces d'inertie, comme les forces d'induction elles-mêmes.

### 133 - Courants en régime variable - Interprétations mécaniques -

Soit un circuit muni de piles et d'électrolytes, dont la force électromotrice résultante est  $E$ . Cette force est équilibrée par la force électromotrice de self induction  $-L \frac{di}{dt}$  et la force électromotrice de Joule  $-ri$ . L'équation du courant est donc :

$$(186) \quad E - L \frac{di}{dt} - ri = 0$$

ou, en prenant le déplacement  $q$  comme coordonnée du circuit :

$$(187) \quad E - L \frac{d^2q}{dt^2} - r \frac{dq}{dt} = 0$$

Le courant est supposé isolé de toute variation magnétique autre que celle qui vient du courant lui-même.

L'analogie de l'équation (187) avec celle d'une machine simple est évidente.  $E$  correspond aux forces appliquées (puissance et résistance);  $-L \frac{d^2q}{dt^2}$  à la force d'inertie ( $-m \frac{d^2x}{dt^2}$ );  $-r \frac{dq}{dt}$  aux forces de frottement ( $-f \frac{dx}{dt}$ )

Comme en mécanique, la puissance, la résistance, la force d'inertie et les résistances passives se font équilibre.

Comme en mécanique, on forme l'équation de l'énergie en multipliant les deux membres de (186) par le déplacement  $dq = idt$ .

$$(188) \quad E idt - d \frac{1}{2} Li^2 - ri^2 dt = 0$$

$$\text{ou} \quad E dq - d \frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - r \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 dt = 0$$

$Ei dt$  est l'excès de l'énergie fournie par les générateurs sur l'énergie utilisée dans les récepteurs;  $\frac{1}{2} Li^2$  est l'énergie électrocinétique (force vive);  $ri^2 dt$  est l'énergie transformée en chaleur.

Le travail de la puissance égale celui de la résistance augmenté de l'accroissement d'énergie cinétique et de l'énergie dépensée en chaleur par l'effet des résistances passives.

Il y a donc assimilation complète entre un circuit unique et une machine simple (à liaisons complètes) telle que le treuil.

Passons au cas de deux circuits.  
Les équations d'équilibre des forces électromotrices dans les deux circuits sont :

$$(189) \quad \begin{cases} E_1 - r_1 i_1 - \frac{d}{dt} [L_1 i_1 + M i_2] = 0 \\ E_2 - r_2 i_2 - \frac{d}{dt} [L_2 i_2 + M i_1] = 0 \end{cases}$$

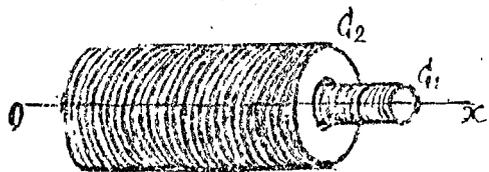
Ce sont les équations des travaux virtuels qui correspondent aux déplacements virtuels  $\delta q_1$ ,  $\delta q_2$ ,  $q_1$  et  $q_2$  étant les coordonnées.

Nous avons supposé les circuits fixes ; le degré de liberté est 2 et les deux équations (189) déterminent le problème.

En écrivant de même les équations relatives à un nombre quelconque de courants fixes en présence, on a autant d'équations que d'inconnues.

Si les circuits sont mobiles et de forme invariable, les coefficients d'induction mutuelle  $M$  sont des fonctions des coordonnées de position. Il faut ajouter aux équations des courants les termes qui viennent de la variation des  $M$ . D'autre part il faut écrire les équations du mouvement des circuits mobiles sous l'action des forces d'inertie, des forces électrodynamiques, et des forces appliquées d'origine purement mécanique.

On aura encore un système d'équations en nombre égal à celui des inconnues. Voici un exemple :



Supposons une bobine  $C_1$  mobile suivant l'axe  $Ox$  de la bobine  $C_2$ . La fonction des forces électrodynamiques qui s'exercent entre les deux bobines est :

$$U = M i_1 i_2$$

La force électrodynamique qui tend au déplacement  $\delta x$  suivant  $Ox$  est

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dM}{dx} i_1 i_2$$

Elle est équilibrée par la force  $F$  qu'on applique à  $C_1$  (avec la main par exemple) et par la force d'inertie  $-m \frac{dv}{dt}$ . L'équation des travaux virtuels qui correspond au déplacement  $\delta x$  est donc :

$$(190) \quad F + \frac{dM}{dx} i_1 i_2 - m \frac{dv}{dt} = 0$$

Le système des équations (189) et de cette dernière équation détermine la solution du problème. Si on multiplie ces équations respectivement par les déplacements correspondants  $dq_1, dq_2, dx$  on obtient l'équation de l'énergie. Dans cette équation de l'énergie, le travail, changé de signe des forces électromotrices d'induction et de la force d'inertie  $-m \frac{dv}{dt}$  forme le total de l'énergie cinétique.

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{énergie cinétique (mécanique)}} + \underbrace{\frac{1}{2} [L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2]}_{\text{énergie électrocinétique}}$$

### 134 - Les équations des courants mises sous la forme des équations de Lagrange -<sup>(1)</sup>

Rappel des équations de Lagrange - Dans l'expression du travail total des forces d'un système figure le travail des forces d'inertie qui présente souvent de grandes difficultés. En mécanique, le calcul direct de ce travail est souvent inextricable, et si l'électricité entre en jeu ce calcul devient impossible. Lagrange a fait une importante découverte en donnant ces formules qui permettent de calculer commodément le travail des forces

(1) D'après M. E. Casalle, L'électricité, collection scientia.

d'inertie dès qu'on connaît l'expression de la force vive en fonction des coordonnées du système et de leurs vitesses, sans qu'il soit nécessaire de connaître autre chose du mécanisme étudié. C'est justement le cas des courants dans les circuits filiformes.

Supposons que l'état d'un système soit fixé par des paramètres ou coordonnées  $q_1, q_2, \dots, q_k$  fonctions du temps. Soit  $Q_i$  la partie des forces appliquées qui produit le déplacement  $\delta q_i$ , le mot force étant employé dans son sens le plus général, c'est-à-dire que  $Q_i$  est le coefficient de  $\delta q_i$  dans l'expression du travail fourni au système dans la variation  $\delta q_i$ .

Soit  $T$  la force vive  $\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$ , forme quadratique des vitesses  $v_i$ . ( $q_i = \frac{dq_i}{dt}$ )

$$(191) \quad T = \frac{1}{2} \left[ \sum A_i q_i^2 + 2 \sum B_{ij} q_i q_j \right]$$

Les coefficients  $A$  et  $B$  étant des fonctions des  $q$ , qui peuvent se réduire à des constantes.

Les équations de Lagrange en normale égal à celui de paramètres  $q$ , ont pour type

$$(192) \quad Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

Pour pouvoir les écrire, il faut se rendre compte du nombre de paramètres indépendants  $q$  qui définissent l'état du système et les choisir de la façon la plus simple, connaître l'expression de l'énergie cinétique  $T$  en fonction de  $q$  et  $q'$ , et connaître les coefficients  $Q$ .

Les équations de Lagrange déterminent alors les  $q$  en fonction du temps. Le travail des forces d'inertie est égal à la diminution de la force vive.

Poursuivant l'assimilation des phénomènes électriques et des phénomènes mécaniques, nous allons montrer que les équations des courants peuvent se mettre sous la forme des équations de Lagrange.

Considérons deux circuits  $C_1$  et  $C_2$ , et supposons de plus comme au n° 133, que  $C_2$  soit mobile d'un mouvement de translation rectiligne.

Quelles sont les grandeurs à considérer pour écrire les

équations de Lagrange, admettant à priori, comme l'a fait Maxwell, qu'elles sont applicables aux phénomènes électriques?

Coordonnées q. — ce sont d'abord les coordonnées de courant  $q_1$  et  $q_2$ , puis la coordonnée de mobilité  $x$  du circuit  $C_1$ .  
Énergie cinétique T. — C'est la somme de l'énergie électrocinétique  $T_e$  et de la force vive  $T_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$  de la matière, de masse  $m$ , du circuit  $C_1$ .

$$T = \frac{1}{2} [m \dot{x}^2 + L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2 M i_1 i_2]$$

Dans cette expression, les intensités  $i_1$  et  $i_2$  sont précisément les vitesses  $q_1'$  et  $q_2'$  des coordonnées  $q_1$  et  $q_2$ .  $T$  est bien sous la forme  $(\dot{q}_1)$ ;  $L_1$  et  $L_2$  dépendent seulement de la forme des circuits; ce sont des constantes.  $M$  dépend en outre de leur position relative, il est fonction de  $x$ .

Une particularité a frappé Maxwell. L'expression de  $T$  contient bien des termes aux carrés des vitesses  $\dot{x}^2$ ,  $i_1^2$ ,  $i_2^2$ , puis le produit  $i_1 i_2$  des vitesses électriques. Pourquoi ne contiendrait-elle pas des termes en  $\dot{x} i_1$  et  $\dot{x} i_2$ ? Nous reviendrons sur cette question.

Forces appliquées Q. — Pour les déplacements électriques  $\delta q_1$  et  $\delta q_2$ , ces forces sont  $Q_1 = E_1 - r_1 i_1$ ,  $Q_2 = E_2 - r_2 i_2$ ;

pour le déplacement matériel  $\delta x$ , c'est la force  $F$  que la main de l'observateur, par exemple, applique au circuit  $C_1$  pour le déplacer. Quant aux forces électromotrices d'induction d'une part et aux forces électrodynamiques d'autre part, il ne faut pas les introduire dans les expressions des Q, car ce sont des forces d'inertie; les Q ne doivent contenir que les forces appliquées.

D'après ces données, on a pour les premiers membres des 3 équations de Lagrange :

$$Q = F \quad Q_1 = E_1 - r_1 i_1 \quad Q_2 = E_2 - r_2 i_2$$

Pour les seconds membres :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = m \dot{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dM}{dx} i_1 i_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1'} \right) = \frac{d}{dt} [L_1 i_1 + M i_2] \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{d}{dt} [M \dot{q}_1 + L_2 \dot{q}_2] \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

Les équations de Lagrange sont donc :

$$(193) \quad \begin{cases} F = m \ddot{x} - \frac{dM}{dx} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ E_1 - r_1 \dot{q}_1 = \frac{d}{dt} (L_1 \dot{q}_1 + M \dot{q}_2) \\ E_2 - r_2 \dot{q}_2 = \frac{d}{dt} (M \dot{q}_1 + L_2 \dot{q}_2) \end{cases}$$

Ce sont précisément les équations (189) et (190).  
L'équation de l'énergie s'en déduit en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par  $dx$ ,  $dq_1$ ,  $dq_2$  :

$$(194) \quad F dx + (E_1 - r_1 \dot{q}_1) dq_1 + (E_2 - r_2 \dot{q}_2) dq_2 = dT$$

Ainsi, les équations de Lagrange déterminent le mouvement du système, non seulement au point de vue purement mécanique, mais aussi au point de vue électrique en faisant connaître les coordonnées  $x$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  en fonction du temps. Elles sont bien d'accord avec l'expérience, puisqu'elles donnent la force électrodynamique et la force électromotrice induite révélées par l'expérience.

1°/ Force électrodynamique. — La première des équations (193) signifie qu'à la force appliquée  $F$  s'ajoutent deux forces qui lui font équilibre, la force d'inertie  $-m \ddot{x}$  et la force  $\frac{dM}{dx} \dot{q}_1 \dot{q}_2$ ; cette dernière est la dérivée par rapport à  $x$  de

$$T_e = \frac{1}{2} [L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2 + 2M \dot{q}_1 \dot{q}_2]$$

$T_e$  est la fonction des forces électrodynamiques;  $\frac{dM}{dx} \dot{q}_1 \dot{q}_2$  est la force électromotrice donnée par l'expérience.

2°/ Force électromotrice induite. — Prenons la seconde des équations (193); elle signifie qu'à la force électromotrice appliquée  $E_1 - r_1 \dot{q}_1$  s'ajoute une force électromotrice qui lui fait équilibre  $-\frac{d}{dt} (L_1 \dot{q}_1 + M \dot{q}_2)$ .

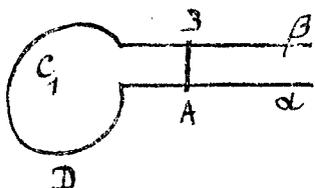
Or  $L_1 \dot{q}_1 + M \dot{q}_2$  est le flux d'induction magnétique à travers  $C_1$ ;  
 $-\frac{d}{dt} (L_1 \dot{q}_1 + M \dot{q}_2)$  est la dérivée changée de signe de ce flux.

C'est la force électromotrice induite vérifiée par expérience.

On peut dire encore que si l'on part de l'expression de l'énergie  $T$  d'un système de courants, déduite des lois de l'électromagnétisme, on trouve que les équations de Lagrange conduisent à l'existence de la force électromotrice d'induction, qui apparaît ainsi comme imposée par le principe de la conservation de l'énergie.

Inversement si l'on part des lois de l'induction, établies expérimentalement, on en déduit la force électrodynamique.

Cas des circuits filiformes déformables. — Considérons encore deux circuits  $C_1$  et  $C_2$ , et au lieu de supposer  $C_1$  mobile et de forme invariable, supposons-le constitué



par une partie  $D$  fixe et ouverte, prolongée par deux rails  $\alpha$  et  $\beta$  sur lesquels un pont  $AB$  se déplace par une translation parallèle aux rails,  $m$  et  $x$  représenteront la masse et la coordonnée du pont  $AB$ .

L'énergie cinétique est donnée par la même expression que précédemment.

La seule différence avec le cas précédent est que  $L_1$  est fonction de  $x$  de sorte que la première des équations (193) est remplacée par :

$$F = m x'' - \frac{1}{2} \left( \frac{dL_1}{dx} i_1^2 + 2 \frac{dM}{dx} i_1 i_2 \right)$$

les deux autres équations restant les mêmes.

### 135 - Recherches de Maxwell sur l'énergie cinétique des courants mobiles -

exigé

Nous avons indiqué, au numéro précédent, que l'énergie cinétique  $T$ , forme quadratique des vitesses, pourrait contenir les termes

$$A_1 x' i_1 + A_2 x' i_2 = T_{me}$$

aux produits d'une vitesse par une intensité. Nous admettrons que, comme le coefficient  $M$ , les coefficients  $A_1$ ,  $A_2$  peuvent dépendre de  $x$ , mais non pas de  $q_1$  et  $q_2$ .

Suivant Maxwell, supposons que  $T_{me}$  existe; il en résultera des forces d'inertie calculables par les formules de Lagrange. Si l'expérience prouve que ces forces n'existent pas, c'est que les  $A$  sont nuls, comme nous l'avons admis précédemment.

Les forces d'inertie qui viennent de la partie de l'énergie cinétique  $T_{me} = A_1 x' i_1 + A_2 x' i_2$  sont au nombre de trois, correspondantes aux trois déplacements  $\delta x$ ,  $\delta q_1$ ,  $\delta q_2$ ; ce sont au signe près :

$$(\delta x) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{me}}{\partial x'} \right) - \frac{\partial T_{me}}{\partial x} = \frac{d}{dt} (A_1 i_1 + A_2 i_2) - \frac{\partial}{\partial x} (A_1 x' i_1 + A_2 x' i_2)$$

$$(\delta q_1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{me}}{\partial q_1'} \right) = \frac{d}{dt} (A_1 x')$$

$$(\delta q_2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{me}}{\partial q_2'} \right) = \frac{d}{dt} (A_2 x')$$

La première est une force mécanique, force pondéro-motrice. Les deux autres sont des forces électromotrices.

Force électromotrice. — D'après son expression  $\frac{d}{dt} (A_1 x')$ , elle est indépendante des intensités et par suite du champ magnétique; elle ne dépend que du mouvement du conducteur. Or aucun phénomène d'induction n'a jamais été observé dans les conducteurs en mouvement en dehors de tout champ magnétique; il faut donc conclure à la non-existence des termes  $T_{me}$  dans l'expression de l'énergie.

Cette preuve expérimentale a une très grande valeur à cause de l'extrême sensibilité des galvanomètres.

Force pondéromotrice. — Bien que la preuve de la non-existence des termes  $A_1 x' i_1$  et  $A_2 x' i_2$  résulte de ce qui vient d'être dit, examinons cependant la force pondéromotrice. Elle contient deux parties :

$$F_1 = A_1 i_1 + A_2 i_2$$

$$F_2 = \left( \frac{dA_1}{dx} x' i_1 + \frac{dA_2}{dx} x' i_2 \right) - \left( \frac{dA_1}{dx} x' i_1 + \frac{dA_2}{dx} x' i_2 \right)$$

La deuxième partie se trouve nulle ici, mais cette circonstance particulière est due au fait qu'on a pris un système doué d'une seule coordonnée de mobilité  $x$ . S'il y en a

plus d'une, il reste des termes proportionnels à la fois aux vitesses  $v$  et aux intensités  $i$ . Pour les rendre sensibles, il faut employer à la fois de grandes vitesses et de grandes intensités. Leur caractère est qu'elles doivent changer de sens quand on change les sens des vitesses ou des intensités.

La première partie  $F_1$  donne des forces proportionnelles aux vitesses de variation des intensités; il faut donc les chercher à la fermeture et à l'ouverture des circuits. Elles doivent changer de signe quand on passe de l'une à l'autre de ces deux opérations. Maxwell a tenté deux expériences destinées à mettre en évidence respectivement  $F_1$  et  $F_2$ ; elles ont donné un résultat négatif. Elles sont d'ailleurs moins probantes que celles qui résultent de la recherche des forces électromotrices.

## § 3 - Les aimants. -

### 136. Constitution des aimants.

#### Vecteur aimantation.

Hypothèse d'Ampère. - L'identité de nature du champ des aimants et du champ des courants, d'une part; le fait que l'aimantation est une propriété particulière (aimant brisé), d'autre part, ont conduit Ampère à émettre l'hypothèse suivante qui a été développée par Weber: chaque particule aimantée est assimilable à un ensemble de petits courants stables de sorte que le moment magnétique résultant de cet ensemble n'est pas nul.

Mais, un aimant ne s'échauffe pas; il n'y a pas de chaleur de Joule. Il faut donc admettre que les courants particuliers ont une résistance nulle.

M. Langevin a précisé l'idée d'Ampère en montrant comment on peut l'interpréter dans la théorie électronique. Les électrons mobiles sur leurs orbites dans une molécule forment des courants de résistance nulle, qui possèdent chacun un moment magnétique. Le moment résultant de tous les courants d'une même molécule est nul pour la plupart des corps, mais il peut ne pas l'être: c'est le cas des

corps magnétiques, pour lesquels chaque molécule possède un moment magnétique.

Dans un milieu magnétique, considérons autour d'un point un volume  $\delta v$  très petit, mais assez grand pour contenir un nombre considérable de molécules. En l'absence de tout champ extérieur, les molécules magnétiques pouvant avoir toutes les orientations possibles, le moment résultant de l'ensemble est nul; si l'on produit un champ extérieur, les molécules s'orientent, puisqu'elles ont un moment magnétique, et le petit volume  $\delta v$  est aimanté.

Au champ extérieur se superpose le champ moléculaire; le champ total est le champ du vecteur induction (n° 129).

Lorsque l'orientation moléculaire disparaît avec le champ extérieur (fer doux), l'agitation thermique donnant aux molécules des orientations arbitraires, l'aimantation cesse. Mais l'orientation peut persister, et dans ce cas on a un aimant permanent.

L'aimant permanent théorique peut être défini: un système de courants particuliers rigidement liés les uns aux autres, incapables d'autres déplacements qu'un mouvement d'ensemble, et par conséquent de moment magnétique total invariable<sup>(1)</sup>. Dans la réalité cependant, les rotations individuelles des molécules, dues à l'agitation thermique, ne disparaissent pas, et empêchent les courants particuliers d'avoir une orientation fixe; il se produit donc un régime perpétuellement variable, mais les fluctuations nous échappent et nous pouvons considérer un moment magnétique moyen constant en grandeur et en direction.

Partant de cette conception, qui contient sans aucun doute une très grande part de vérité, nous pouvons établir les formules classiques de la théorie des aimants sans faire intervenir la fiction des fluides magnétiques.

Autour d'un point de l'aimant, considérons le petit volume  $\delta v$ , son moment magnétique  $\delta M$  est proportionnel à  $\delta v$ .

---

(1) à une très petite modification près, se produisant par effet d'induction sur les courants particuliers quand on crée un champ extérieur. C'est le diamagnétisme que nous étudierons plus tard.

le rapport  $I = \frac{\sum M}{\sum v}$

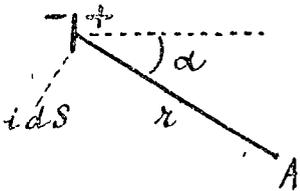
est l'aimantation, ou moment magnétique par unité de volume.

$V_4$  étant le nombre considérable de courants moléculaires dans un très petit volume, nous pouvons pratiquement remplacer la distribution discontinue par une distribution continue, prendre un volume  $dv$  infiniment petit et considérer le vecteur aimantation

$$\vec{I} = \frac{1}{dv} d\vec{M} \quad \text{comme défini en chaque point.}$$

### 137. Potentiel et champ d'un aimant infiniment petit.

Soit un courant particulière de surface  $dS$  et d'intensité  $i$ , appelons  $\alpha$  l'angle de l'axe de ce courant, tracé du côté de la face positive, avec la direction joignant le courant au point extérieur  $A$  situé à la distance  $r$  du courant. Cherchons le potentiel magnétique en  $A$ .



Le moment magnétique est  $dM = i dS$  ; en  $A$  la fonction des forces est  $i d\Omega$  ; le potentiel (1) (qu'on a l'habitude de considérer au lieu de la fonction des forces) est  $d\psi_M = -i d\Omega$ . Remplaçant  $i$  par  $\frac{dM}{dS}$ , on a :

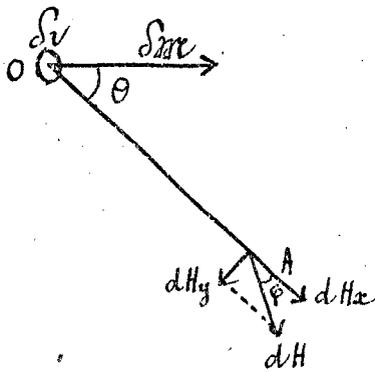
$$(195) \quad d\psi_M = -i d\Omega = -\frac{dM}{dS} d\Omega = \frac{dM}{r^2} \cos \alpha$$

(car  $d\Omega$  est négatif quand  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ )

Prenons maintenant autour d'un point  $O$  un petit volume  $\delta v$  contenant un grand nombre de courants particuliers;

---

(1) Répétons que le terme potentiel ne signifie pas que l'énergie est potentielle. L'énergie du champ magnétique d'un aimant est l'énergie électrocinétique des courants particuliers.



le potentiel en A dû à ce volume aimanté est la somme des potentiels dûs à chacun des courants particuliers (form. 195).  
On a donc :

$$\int \psi_M = \sum \frac{dM}{r^2} \cos \alpha = \frac{S_M}{r^2} \cos \theta$$

en considérant tous les points de  $S_V$  comme étant à la même dis-

tance  $r$  du point A, et appelant  $S_M$  le moment résultant et  $\theta$  l'angle de ce moment avec la direction OA.

Puisque nous pouvons pratiquement supposer une répartition continue du magnétisme, nous pouvons écrire, pour un élément de volume  $dv$  :

$$(196) \quad d\psi_M = \frac{dM}{r^2} \cos \theta = \frac{I dv}{r^2} \cos \theta$$

$I$  étant l'aimantation de l'élément de volume.

Cherchons les composantes  $dH_x$  et  $dH_y$  de la force magnétique suivant la direction OA et la direction perpendiculaire.

$$(197) \quad \begin{cases} dH_x = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{dM}{r^2} \cos \theta \right) = \frac{2 dM}{r^3} \cos \theta \\ dH_y = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{dM}{r^2} \cos \theta \right) = \frac{dM}{r^3} \sin \theta \end{cases}$$

L'angle  $\varphi$  formé par la ligne de force avec le rayon vecteur OA est donné par

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dH_y}{dH_x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$$

et la valeur de la force est :

$$(198) \quad dH = \sqrt{(dH_x)^2 + (dH_y)^2} = \frac{dM}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{dM}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

À une distance donnée  $r$ , la force dans la direction de l'axe magnétique de l'aimant est double de sa valeur dans la direction perpendiculaire. Elle est dans les deux cas parallèle à l'axe, mais les sens sont opposés.

On doit remarquer que la force varie très rapidement car elle est en raison inverse du cube de la distance.

### 138 - Potentiel d'un aimant quelconque.

Décomposons l'aimant en volumes élémentaires  $dv$ ; les potentiels s'ajoutent au point extérieur  $A$ ; on a donc:

$$(199) \quad \psi_m = \iiint \frac{I \cos \theta}{r^2} dv$$

Le théorème de Green (n°10) nous permet de transformer cette expression; dans la démonstration de ce théorème, nous avons démontré la formule:

$$\iint (\vec{n} \cdot \vec{a} b) dS = \iiint a \nabla b dv + \iiint (b \nabla a) dv$$

La démonstration de cette formule étant indépendante de la nature du vecteur  $b$ , nous avons pris ici un vecteur axial.

Posons  $\vec{b} = \vec{I}$  et  $a = \frac{1}{r}$  (scalaire), la formule s'écrit:

$$\iint \frac{(\vec{n} \cdot \vec{I})}{r} dS = \iiint \frac{1}{r} \text{Div. } \vec{I} dv + \iiint (\vec{I} \cdot \nabla \frac{1}{r}) dv$$

La seconde intégrale du second membre est précisément le potentiel. Par suite:

$$\psi_m = \iint \frac{(\vec{n} \cdot \vec{I})}{r} dS - \iiint \frac{1}{r} \text{Div. } \vec{I} dv$$

Posons maintenant:

$$(200) \quad \sigma = I \cos(n, I) \quad \text{et} \quad \rho = -\text{Div. } \vec{I}$$

$\sigma$  est la projection du vecteur  $I$  sur la normale extérieure à la surface. L'expression précédente devient:

$$(201) \quad \psi_m = \iint \frac{\sigma dS}{r} + \iiint \frac{\rho dv}{r}$$

La première intégrale étendue à toute la surface qui limite l'aimant, et la seconde étant étendue au volume.

$\sigma$  se nomme densité superficielle et  $\rho$  densité en volume. Ces termes dérivent de l'hypothèse des fluides magnétiques:

si en effet un fluide, agissant en raison inverse du carré de la distance, était répandu sur la surface avec une densité  $\sigma$ , et dans le volume avec une densité  $\rho$ , les deux intégrales représenteraient respectivement les potentiels dus au fluide superficiel et au fluide contenu dans le volume. Malgré l'inexistence des fluides, le champ  $H$  est newtonien, parce que l'équation (201) est identique à l'équation (45) du n° 13.

### 13g - Vecteur induction - Conservation du flux d'induction.

Le calcul qui précède donne le potentiel dont dérive le champ de force à l'extérieur d'un aimant, mais non à l'intérieur.

Nous pouvons cependant, par définition, considérer à l'intérieur un vecteur  $H$  dérivant d'un potentiel donné par l'expression (201).

Nous allons montrer que le champ de forces de l'aimant est le champ du vecteur induction :

$$(202) \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{I} \quad (\text{somme vectorielle ou géométrique})$$

qui se confond avec  $H$  à l'extérieur de l'aimant, où  $I = 0$

Établissons d'abord, qu'en tout point, extérieur ou intérieur à l'aimant,  $\text{Div. } \vec{B} = 0$ , c'est-à-dire que le flux de  $B$  est conservatif.

On a :

$$\text{Div. } \vec{B} = \text{Div. } \vec{H} + 4\pi \text{Div. } \vec{I}$$

Le champ  $H$  étant newtonien, on peut appliquer les équations de Poisson et de Laplace (n° 15).

En un point extérieur à l'aimant,  $I = 0$ ,  $\rho = 0$ , et l'on a :

$$\text{Div. } \vec{B} = \text{Div. } \vec{H} = 0 \quad (\text{équation de Laplace})$$

En un point intérieur :

$$\text{Div. } \vec{H} = -\Delta \psi_M = 4\pi \rho \quad (\text{équation de Poisson})$$

comme, par définition (200)

$$\rho = -\text{Div. } \vec{I}$$

on a :

$$\text{Div. } \vec{B} = \text{Div. } \vec{H} + 4\pi \text{Div. } \vec{I} = 4\pi \rho - 4\pi \rho = 0$$

Le flux de  $\vec{B}$  est donc conservatif.

Il est facile de voir que  $\vec{H}$  est la force qui s'exercerait dans une coupure infiniment étroite, pratiquée parallèlement à l'aimantation, et que l'induction  $\vec{B}$  est la force qui s'exercerait dans une coupure normale à  $\vec{I}$ .



Imaginons qu'une coupure infiniment étroite soit pratiquée dans l'aimant.

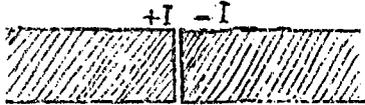
Un point de la coupure devient extérieur à l'aimant, et la force

qu'on y mesurerait dérive de  $\psi$  (formule 201); seulement, en pratiquant la coupure, on a créé sur les parois de cette coupure une densité superficielle  $\sigma = I \cos(\pi I)$  qu'il faut faire intervenir dans la formule (201), dont les autres termes ne sont qu'infiniment peu changés par la suppression d'une quantité infiniment petite de matière aimantée.



Si la coupure est faite parallèlement à  $\vec{I}$ , la densité superficielle sur les parois de la coupure est nulle, et l'expression de  $\psi$  n'est

pas changée. La force dans la coupure est donc le vecteur  $\vec{H}$ , celui qui intervient dans la formule (202).

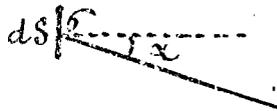


Si la coupure est normale à  $\vec{I}$ , il faut introduire sur une des parois une densité  $I$ , sur l'autre

paroi une densité  $-I$ . Par le fait, on constate l'apparition de deux pôles d'aimant, c'est l'expérience de l'aimant brisé. Dans l'expression de  $\psi$ , il faut donc ajouter les termes dus à ces densités superficielles.

Au vecteur  $\vec{H}$  calculé comme s'il n'y avait pas de coupure va s'ajouter la force due aux densités superficielles  $I$  et  $-I$ .

Soit un feuillet de surface  $dS$  possédant une densité superficielle  $\sigma$  agissant en raison inverse du carré de la distance; en un point  $A$ , la composante de la force normalement au feuillet



est :

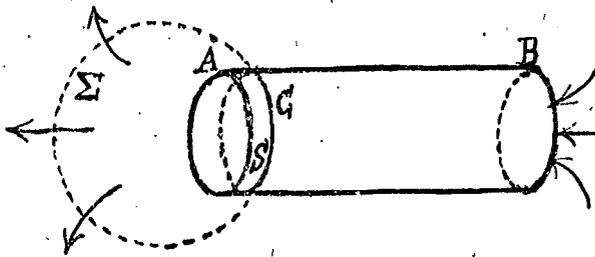
$$\frac{\sigma dS \cos \alpha}{r^2} = \sigma d\Omega$$

Si la surface  $S$  d'un feuillet est grande et la distance  $r$  petite,  $\iint d\Omega = 2\pi$  et la force, normale au feuillet, est  $2\pi\sigma$

Dans le cas de la coupure infiniment mince normale à l'aimantation, la force due aux densités  $I$  et  $-I$  est donc  $4\pi I$ . Au total, la force qu'on mesurerait dans la coupure est  $H + 4\pi I$ ; c'est bien l'induction  $\vec{B}$ .

Au n° 129, nous avons donné une définition expérimentale de l'induction magnétique, à l'aide des courants induits. Le vecteur  $\vec{B}$ , que nous venons de définir d'une autre manière, jouit des mêmes propriétés que celui que nous avons précédemment considéré.

Le flux de force magnétique à travers toute surface fermée est nul en l'absence de fer ou d'autres corps magnétiques (n° 94). Cette loi s'étend à l'induction magnétique, définie par les courants induits; elle est une conséquence de la méthode même de mesure qui sert à définir l'induction magnétique.



Considérons en effet le circuit d'exploration  $C$  entourant un solénoïde  $AB$  armé de fer. Outre la surface  $S$  de ce circuit, considérons une surface  $\Sigma$  quelconque menée par  $C$  et entourant l'extrémité  $A$  de l'électroaimant.

L'excitation de l'électroaimant produit dans le circuit  $C$  un déplacement électrique  $q$  qui mesure le flux de l'induction magnétique aussi bien à travers la surface  $S$  qu'à travers la surface  $\Sigma$ . Ces deux flux sont donc égaux; de plus, si l'un entre dans la surface fermée qui enveloppe  $A$ , l'autre en sort. Le flux entrant total est donc nul.

Ainsi 1° le flux de l'induction magnétique est conservatif, 2° le vecteur induction magnétique se confond avec le vecteur champ magnétique en dehors de la matière aimantée. Ce sont précisément les propriétés caractéristiques du vecteur  $\vec{B}$  défini par la formule (202). Supposons qu'un aimant permanent soit entouré d'un circuit d'exploration, et que l'aimantation disparaisse brusquement; la quantité d'électricité induite mesurerait le flux de  $\vec{B}$  (form. 202) à travers le circuit.

## 140 - Solénoïdes magnétiques -

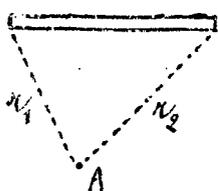
Un aimant dont les dimensions transversales sont très

petites est un solénoïde élémentaire, si l'aimantation  $I$  est partout tangente à la surface latérale, et si le flux d'aimantation tout le long du solénoïde est conservatif.

La densité en volume  $\rho = -\text{Div. } I$  est partout nulle; la densité superficielle est nulle pour les surfaces latérales. Il ne subsiste que l'action des surfaces terminales; on dit qu'il y a deux pôles sur les extrémités.

Le potentiel en un point extérieur  $A$  est, d'après (201)

$$(203) \quad \psi_M = \rho \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



$\rho$  étant le flux d'aimantation à l'intérieur,  $r_1$  et  $r_2$  les distances des extrémités au point considéré.

Si le solénoïde est fermé sur lui-même, son action extérieure est nulle.

On appelle aimant solénoïdal un aimant constitué par des solénoïdes élémentaires partant tous de la surface  $S$  de l'aimant et aboutissant tous à cette surface. Le vecteur  $I$  satisfait partout à la condition solénoïdale ( $\text{Div. } I = 0$ ).

On dit qu'il n'y a de magnétisme libre qu'à la surface; expression encore dérivée de l'hypothèse de Coulomb.

## 141 - Potentiel vecteur de l'induction magnétique -

non exige Le flux de  $\vec{B}$  est conservatif. On peut donc, d'après le théorème de Stokes, représenter le flux de  $\vec{B}$ , à travers une surface quelconque limitée à un contour  $C$ , par la circulation d'un vecteur  $\vec{G}$  le long du contour  $C$ . Le vecteur  $\vec{G}$  est tel que

$$\vec{B} = \text{curl. } \vec{G}$$

$\vec{G}$ , appelé potentiel vecteur, n'est défini qu'à une fonction près (n° 11).

Supposons qu'on donne en tous les points d'un aimant les composantes  $I_x, I_y, I_z$  de l'aimantation.

Soient  $O(x, y, z)$  un point de l'aimant,  $A(x', y', z')$  un point extérieur. En ce point l'induction  $\vec{B}$  est identique à  $\vec{H}$ .

Le potentiel  $\delta\psi$  créé au point A par l'élément de volume  $dv$  peut s'écrire :

$$\delta\psi_m = \left( I_x \frac{\partial p}{\partial x} + I_y \frac{\partial p}{\partial y} + I_z \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

en posant  $p = \frac{1}{z}$ .

Évaluons la composante  $dI_z$  de l'induction (ou de la force) due au volume  $dv$ . On a :

$$dI_z = - \frac{\partial \delta\psi_m}{\partial z'} = \frac{\partial \delta\psi_m}{\partial z} = I_x \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + I_y \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + I_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

$$\text{ou (204)} \quad dI_z = \frac{\partial}{\partial y} \left( I_y \frac{\partial p}{\partial z} - I_z \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( I_z \frac{\partial p}{\partial x} - I_x \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

en vertu de l'identité

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

Bien que  $I_x, I_y, I_z$  soient des fonctions de  $x, y, z$ , la dérivation par rapport à  $z$  ne porte pas sur ces composantes, parce qu'en réalité nous dérivons par rapport à  $z'$ , dont  $I$  n'est pas fonction, puis nous remplaçons la dérivée de  $p$  par rapport à  $z'$  par la dérivée par rapport à  $z$ , en changeant de signe

$$\left( \frac{\partial p}{\partial z'} = - \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

Nous pouvons écrire (204) en introduisant les dérivées par rapport à  $x', y', z'$ , égales et de signes contraires aux dérivées par rapport à  $x, y, z$ .

$$(205) \quad dI_z = - \frac{\partial}{\partial y'} \left( I_y \frac{\partial p}{\partial z} - I_z \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left( I_z \frac{\partial p}{\partial x} - I_x \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

nous avons deux expressions analogues pour  $dI_y$  et  $dI_x$ .

Il s'agit de trouver le flux de  $I$  à travers un contour dont les points ont pour coordonnées générales  $x', y', z'$ . Définissons un vecteur  $\vec{G}$  par la condition

$$\vec{I} = \text{Curl } \vec{G}$$

Il en résulte :

$$(206) \quad I_z = \frac{\partial G_y}{\partial x'} - \frac{\partial G_x}{\partial y'}$$

et deux relations analogues...

Comparant à (206), on voit que :

$$(207) \quad \begin{cases} G_x = \iiint (I_y \frac{\partial p}{\partial z} - I_z \frac{\partial p}{\partial y}) dv \\ G_y = \iiint (I_z \frac{\partial p}{\partial x} - I_x \frac{\partial p}{\partial z}) dv \\ G_z = \iiint (I_x \frac{\partial p}{\partial y} - I_y \frac{\partial p}{\partial x}) dv \end{cases}$$

Ces intégrations donnent la valeur du potentiel vecteur en un point  $A$  quelconque du circuit, sous forme d'une fonction des coordonnées  $x' y' z'$  de  $A$ . ( $p$  est l'inverse de la distance de  $A$  à l'élément de volume  $dv$ ).

L'application de ces formules permet de calculer le potentiel vecteur d'un aimant en forme de feuillet, ou, ce qui revient au même, d'un circuit parcouru par un courant, de trouver une expression de l'énergie d'un feuillet ou d'un courant placé dans un champ, et conduit à la formule de Neumann (que nous avons établie autrement au n° 107).

## 142. Aimantation induite. -

### Susceptibilité magnétique -

Nous avons déjà vu que le fer acquiert les propriétés des aimants quand on le place dans un champ magnétique. Il en est de même d'autres substances, en particulier du nickel et du cobalt.

Pour ces substances, l'aimantation ainsi induite se développe dans le sens des lignes de force du champ qui l'a fait naître. On les nomme substances magnétiques et on les distingue en substances paramagnétiques et substances ferro-magnétiques (Fe, Ni, Co).

Pour les premières le rapport  $K = \frac{I}{H}$  de l'aimantation au champ magnétisant, appelé susceptibilité magnétique, est petit, et reste constant quand on fait varier  $H$ .

Pour les secondes  $K$  croît avec  $H$ , passe par un maximum élevé (200 pour le fer), puis décroît et tend vers zéro; le corps est alors saturé,  $I$  restant constant lorsque  $H$  augmente (l'agitation thermique ne trouble plus d'une façon sensible l'orientation des courants particuliers).

Lorsque l'aimantation persiste après suppression du champ  $H$ , on a un aimant permanent.

Dans d'autres corps, au contraire, l'aimantation développée est dirigée en sens inverse de la force magnétique. Ce phénomène est le diamagnétisme dont la cause, que nous étudierons plus tard, est de nature essentiellement différente de celle du paramagnétisme. Nous verrons d'ailleurs que tous les corps doivent subir l'effet diamagnétique, mais dans les corps paramagnétiques, et à fortiori dans les corps ferromagnétiques, ce phénomène, toujours très faible, est masqué par l'orientation des courants particuliers.

**Relation entre la perméabilité magnétique et la susceptibilité.** — Sur toute la surface d'un tore en fer, enroulons un fil conducteur, et faisons passer un courant. Le champ magnétisant  $H$  produit par le courant est constant à l'intérieur du tore et a pour valeur  $H = \frac{4\pi Ni}{l}$ . Le fer s'aimante, et dans ce champ constant l'aimantation est uniforme; on a donc  $\rho = -\text{Div. } I = 0$  et aussi  $\sigma = 0$  car l'aimantation se développe parallèlement au champ  $H$ , c'est-à-dire parallèlement à la surface du tore. Donc l'induction  $B'$  due au fer seul se réduit à  $4\pi I$  (formule 202). L'induction totale  $B$  est la somme du champ dû au courant seul et du champ  $4\pi I$  dû au fer.

$$B = H + 4\pi I. \quad (1)$$

On a donc 
$$B = H \left(1 + 4\pi \frac{I}{H}\right) = H(1 + 4\pi K)$$

---

(1) Bien remarquer que le champ  $H$  de cette formule n'est pas le champ  $H$  qui figure dans la formule (202) et qui est nul dans le cas considéré puisque  $\rho = 0$  et  $\sigma = 0$ . Ici,  $H$  est le champ  $\frac{4\pi Ni}{l}$  dû au courant seul.

Comme on a, par définition de la perméabilité  $\mu$ ,  
 $B = \mu H$  (n° 130), on voit que :

$$(208) \quad \mu = 1 + 4\pi K$$

Réfraction des lignes d'induction. - Dans le passage d'un corps de perméabilité  $\mu_1$  à un corps de perméabilité  $\mu_2$ , les lignes d'induction se réfractent, comme les tubes de courant dans le passage d'un milieu à un autre. La loi est la même, la perméabilité remplaçant la conductivité.

$$\frac{\text{tg } d_1}{\mu_1} = \frac{\text{tg } d_2}{\mu_2}$$

### 143 - Energie électrocinétique des aimants permanents -

Le champ des aimants n'étant autre que le champ des courants particuliers, l'énergie de ce champ ne se distingue en rien de l'énergie électrocinétique d'un système de courants.

L'énergie d'un système de courants et d'aimants se compose de trois parties : la première vient des courants seuls, la deuxième vient de la combinaison des courants avec les aimants ; c'est la somme des produits des intensités des courants par les flux, issus des aimants, qui les traversent ; la troisième partie vient des aimants seuls : si ceux-ci sont permanents, les courants particuliers sont d'intensité constante.

Approche d'un circuit vers un aimant permanent. - Soient  $\varphi$  le flux d'induction dû à l'aimant à travers le circuit, et  $A$  l'énergie électrocinétique de l'aimant ;  $A$  est une constante, et  $\varphi$  dépend seulement d'une coordonnée de position  $x$ . L'énergie cinétique du système est :

$$(209) \quad T = \frac{1}{2} (m\dot{x}^2 + Li^2 + 2i\varphi + A)$$

( $m$  masse du circuit).

Désignons par  $E$  la force électromotrice de la pile et par  $F$  la force appliquée par l'observateur. Ses équations de Lagrange correspondantes à  $\delta x$  et  $\delta q$  s'écrivent :

$$\begin{array}{l} (\delta x) \\ (\delta q) \end{array} \quad (210) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = m x'' - i \frac{d\varphi}{dx} \\ E - ri = \frac{d}{dt} (Li + \varphi) \end{array} \right.$$

Elles déterminent les deux inconnues  $i$  et  $x$  en fonction du temps <sup>(1)</sup>. Ces équations sont bien vérifiées par l'expérience; la première donne la force électrodynamique, la seconde donne la force électromotrice d'induction.

Mais une difficulté se présente au sujet de l'énergie. Reprenons le calcul (n° 134) qui sert à passer des équations de Lagrange à celle de l'énergie: il faut multiplier la première par  $dx = x' dt$ , la seconde par  $dq = i dt$ . Nous obtenons :

$$F dx + (E - ri) dq = d \left[ \frac{1}{2} m x'^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right]$$

ce qui paraît contraire au principe de l'énergie, puisque nous trouvons que le travail des forces appliquées n'est pas égal à l'accroissement de l'énergie cinétique.

Voici l'erreur. Les équations (210) déterminent bien les deux inconnues du problème physique,  $x$  et  $q$ . Mais nous n'avons pas écrit toutes les équations du système mécanique; et nous ne saurions les écrire car il y a un nombre immense de courants particuliers ayant chacun une coordonnée  $q$ ; Donc le système (210) est incomplet au point de vue mécanique, et il n'a pas à satisfaire au principe de l'énergie.

Pour retrouver l'équation de l'énergie il faut faire entrer en ligne de compte les équations de l'aimant.

Nous allons le faire sous une forme très simplifiée, en assimilant l'aimant à un courant unique  $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$ . Ce courant fictif doit présenter les propriétés suivantes:

1° L'intensité  $i_1$  est constante puisque l'aimant est permanent.

2° La force électromotrice appliquée  $E_1$  varie de manière

(1) Sarrau, Comptes rendus de l'Ac. des Sc. t. CXXXIII p. 421 (1901). — E. Carvallo, l'Electricité.

à maintenir l'intensité constante.

3°/ La résistance  $r_1$  est nulle, car il n'y a pas de chaleur de Joule.

4°/ L'énergie de self induction  $L_1 i_1^2$  est constante; l'énergie d'induction mutuelle est  $i\varphi = M i_1$ ,  $M$  n'étant fonction que de  $x$ .

En résumé, le courant  $i_1$  possède les propriétés d'une machine parfaite, sans frottements, munie d'un régulateur idéal.

Dans ces conditions, les trois équations de Lagrange sont:

$$\begin{cases} (\delta x) & F = m'' - i_1 \frac{dM}{dx} \\ (\delta q) \quad (211) & E - r_1 i = \frac{d}{dt} (L i + M i_1) = L \frac{di}{dt} + i_1 \frac{dM}{dt} \\ (\delta q_1) & E_1 = \frac{d}{dt} (M i) \end{cases}$$

Multiplions les trois équations respectivement par  $dx = x' dt$ ,  $dq = i dt$ ,  $dq_1 = i_1 dt$ ; nous obtenons l'équation de l'énergie.

$$F dx + (E - r_1 i) dq + E_1 dq_1 = d \left[ \frac{1}{2} m x'^2 + \frac{1}{2} L i^2 + M i i_1 \right]$$

Elle signifie bien, cette fois, que le travail est égal à l'accroissement de l'énergie cinétique.

Mais le principe de l'énergie n'est vérifié que grâce à la force électromotrice  $E_1$ , dont la valeur est fournie par la troisième équation, dès qu'on connaît la valeur  $M = \frac{\varphi}{i_1}$ , donnée qui caractérise l'aimant. Cette force électromotrice est la force coercitive de l'aimant.

Si l'aimant n'est pas permanent,  $i_1$  n'est plus constant. L'aimantation de chaque particule varie à sa façon et il est impossible de remplacer l'aimant, même fictivement, par un courant unique. Le sujet n'a pas été abordé jusqu'ici. Quoiqu'il en soit, les équations (210) demeurent vraies; elles sont nécessaires, mais non suffisantes à déterminer le système qui dépend d'inconnues innombrables: il reste à établir les équations relatives aux coordon-

nées électriques correspondantes à l'aimantation des particules.

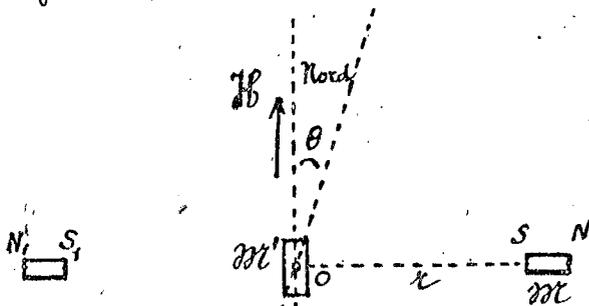
### 144 - Méthode de Gauss pour la détermination du moment magnétique d'un aimant et la mesure d'un champ constant et uniforme -

Soit un barreau de moment inconnu  $M$ . Suspendons le horizontalement dans un champ magnétique, le champ terrestre par exemple, par un fil dénué de réaction de torsion; il se met à osciller de part et d'autre de sa position d'équilibre et lorsque les angles d'écart sont faibles, le mouvement est pendulaire de période  $T$ . Soient  $H$  la composante horizontale du champ terrestre,  $I$  le moment d'inertie du barreau, on a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MH}}$$

Cette première expérience donne le produit  $MH$ .

Plaçons maintenant le barreau  $M$  sur la perpendiculaire élevée dans le plan horizontal à la méridienne magnétique qui passe par le centre  $O$  d'un petit aimant



auxiliaire de moment  $M'$ , suspendu à un fil sans torsion. La distance  $r$  des centres des aimants étant choisie de manière à pouvoir être considérée comme très grande par rapport à leurs dimensions, le champ  $\delta H$  produit par  $M'$  dans la région de  $M$  est très sensiblement uniforme, et par raison de symétrie

dirigé suivant  $ON$ , dans le même sens que le vecteur  $M$ .

275

Sa valeur est donnée par l'équation (197), no 137.

$$JH = \frac{2M}{r^3}$$

et par suite le barreau  $M$  s'incline d'un angle  $\theta$  tel que

$$\text{tg } \theta = \frac{2M}{JHr^3}$$

La mesure de cet angle et de la distance  $r$  donne  $\frac{M}{J}$ .

On double la valeur de la déviation en retournant  $H$  SN bout pour bout, et l'on répète la même expérience en plaçant cet aimant dans la position  $S_1 N_1$  symétrique de  $SN$  par rapport au méridien magnétique.

On détermine ainsi simultanément  $M$  et  $H$  en unités C.G.S. à Paris la valeur trouvée pour  $H$  est 0,1979 gauss<sup>(1)</sup>. L'inclinaison est  $64^\circ 33'$ , ce qui donne pour le champ terrestre la valeur

$$\frac{0,1974}{\cos. 64^\circ 33'} = 0,3648$$

## § 4 - Le circuit magnétique.

### 145 - Lois de l'induction magnétique.

1<sup>ère</sup> loi. - Le flux de l'induction magnétique à travers toute surface fermée est nul.

Cette loi a été établie, au n° 139.

2<sup>ème</sup> loi. - La circulation du vecteur  $B$  le long d'un contour fermé est égale au flux du "courant qui le traverse, multiplié par  $4\pi$ .

Dans la démonstration de la loi sur la circulation de la force magnétique (n° 101), il s'agissait du champ produit par des courants dans un milieu de perméabilité 1, c'est à dire dans le vide.

Si nous avons maintenant en présence des courants et des corps magnétiques, (aimants permanents ou temporaires), à la force magnétique  $H_1$  due aux courants, calculée dans

(1) Valeur au 1<sup>er</sup> Janvier 1914. Elle varie d'ailleurs très légèrement.

le vide, viennent s'ajouter la force magnétique  $H_2$  due à la matière aimantée, et le vecteur  $4\pi I$ . Le total forme l'induction  $B$ .

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{I} \quad \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

La loi de la circulation (n° 101) subsiste pour  $H_1$ ; quant au vecteur  $H_2$ , il dérive, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur des aimants, du potentiel  $\mu$  (n° 138) qui a une valeur unique en chaque point; donc sa circulation le long d'une courbe fermée, traversant ou non la matière aimantée, est nulle. Par suite la loi de la circulation s'applique à la résultante  $H$  des vecteurs  $H_1$  et  $H_2$ .

En un point quelconque, le rapport de l'aimantation à la force magnétique  $H$  est la susceptibilité  $K$ , et l'on a  $1 + 4\pi K = \mu$ ; c'est à dire qu'on a

$$\vec{B} = (1 + 4\pi K) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

La loi du n° 101 s'applique donc à  $\frac{\vec{B}}{\mu}$ .

Ainsi, tandis que dans l'expression  $\mu$  de la première loi c'est le vecteur  $B$  qui remplace le vecteur  $H$ , c'est le vecteur  $\frac{B}{\mu}$  qui remplace  $H$  dans l'extension de la deuxième loi.

Cette loi s'applique pour un contour tracé d'une façon arbitraire à travers des matières quelconques.

Il n'a pas été fait de mesures systématiques pour la vérifier dans sa généralité, mais les applications qu'on en a faites et la concordance des résultats calculés avec les résultats observés garantissent son exactitude.

## 146. - Analogie des circuits magnétiques avec les circuits électriques.

On peut décomposer l'espace, avec ou sans matière magnétique, en tubes d'induction fermés (1<sup>ère</sup> loi).

On les appelle circuits magnétiques, par analogie avec les circuits électriques qui, en régime permanent, forment des tubes de courants fermés.

La distribution des courants dans les conducteurs est réglée par les deux lois de Kirchhoff, généralisées.

- 1<sup>o</sup>/ Le flux du courant est conservatif.  
 2<sup>o</sup>/ L'intégrale de la force contre-électromotrice de Joule le long d'un circuit fermé est égale à la résultante des forces électromotrices appliquées au circuit.

L'analogie entre la 1<sup>ère</sup> loi de Kirchhoff et la 1<sup>ère</sup> loi de l'induction magnétique est évidente.

Ses deuxièmes lois expriment une relation de cause à effet, un équilibre de forces. Dans le circuit électrique, la cause est la force électromotrice; dans le circuit magnétique, la cause est le flux  $\phi$  du courant à travers le contour; elle a pour mesure:

$$(212) \quad F = 4\pi\phi$$

$F$  est appelé force magnétomotrice du circuit magnétique, par analogie avec la force électromotrice du circuit électrique.

Dans le circuit électrique l'effet est le courant  $u$ . Il oppose à la force électromotrice une force  $-\frac{u}{\gamma}$  par unité de longueur. Dans le circuit magnétique l'effet est l'induction  $B$ , elle oppose à la force magnétomotrice la force magnétique résistante  $-\frac{B}{\mu}$  par unité de longueur.

$$(213) \quad F = 4\pi\phi = \int \left( \frac{B}{\mu} \vec{ds} \right)$$

Ses grandeurs correspondantes des deux circuits sont indiquées dans le tableau suivant:

$u$ courant électrique	$B$ induction magnétique
$\gamma$ conductibilité	$\mu$ perméabilité
$-\frac{u}{\gamma}$ force contre-électromotrice de Joule	$-\frac{B}{\mu}$ force magnétique résistante
$E$ force électromotrice du circuit	$F$ force magnétomotrice du circuit

La réductivité est l'inverse  $\frac{1}{\mu}$  de la perméabilité, comme la résistivité est l'inverse  $\frac{1}{\gamma}$  de la conductibilité.

Considérons une portion de tube d'induction, de longueur  $l$ , de section uniforme  $S$ , traversé par le flux  $\phi$ ; la force magnétique résistante par unité de

278

longueur est  $\frac{B}{\mu}$  ; pour la longueur  $l$  c'est :

$$f = \frac{l}{\mu S} \rho$$

expression qui correspond exactement à celle de la force contre-électromotrice de Joule :

$$E = \frac{l}{\mu S} i$$

à la résistance  $R = \frac{l}{\mu S}$  correspond la réductance  $R = \frac{l}{\mu S}$ .

à la conductance  $\frac{\mu S}{l}$  correspond la perméance  $\frac{\mu S}{l}$ .

Unités C. G. S. — On appelle Oersted l'unité de réductance, Gilbert l'unité de force magnétomotrice. Comme la force contre-électromotrice de Joule,

$\int (-\frac{\vec{u}}{\gamma} d\vec{s})$ , la force magnétique résistante totale d'un circuit  $\int (-\frac{\vec{B}}{\mu} d\vec{s})$  est la somme des forces correspon-

dantes à ses éléments, l'élément  $ds$  entrant pour une part égale à  $-\frac{\vec{B}}{\mu} ds$ . Au contraire, la force magnétomotrice est définie en bloc sans qu'il soit possible de la répartir sur les éléments du circuit. En cela elle est analogue à la force électromotrice d'induction due à la variation du courant inducteur.

Exemples . — 1° Le cas le plus simple du circuit magnétique est celui d'un tore en fer uniformément entouré d'un solénoïde conducteur. Si  $l$  est la longueur de la circonférence moyenne,  $i$  le courant qui traverse le fil,  $N$  le nombre total de spires, on a :

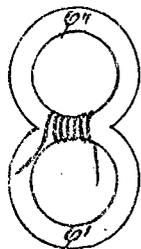
$$4\pi Ni = \frac{B}{\mu} l$$

2° Supposons maintenant un noyau fermé sur lui-même, composé de divers tronçons ayant des longueurs  $l, l', l''$ , des sections  $S, S', S''$  et des perméabilités  $\mu, \mu', \mu''$ , on aurait :

$$(214) \quad 4\pi Ni = \varphi \left( \frac{l}{\mu S} + \frac{l'}{\mu' S'} + \frac{l''}{\mu'' S''} \right)$$

3° On peut traiter les cas des bifurcations comme pour les courants.

Considérons un circuit magnétique divisé en deux parties. Le flux  $\varphi$  créé par une bobine renfermant  $N$  spires se bifurque en deux flux dérivés  $\varphi'$  et  $\varphi''$ . On a :  $\varphi = \varphi' + \varphi''$ .



Soient  $l$  la longueur de la branche commune,  $S$  sa section moyenne,  $\mu$  sa perméabilité. Soient  $l', S', \mu'$  ;  $l'', S'', \mu''$  les quantités correspondantes pour les branches dérivées ; la seconde loi donne :

$$4\pi Ni = \varphi \frac{l}{\mu S} + \varphi' \frac{l'}{\mu' S'}$$

$$4\pi Ni = \varphi \frac{l}{\mu S} + \varphi'' \frac{l''}{\mu'' S''}$$

Remarques. — Il y a des distinctions essentielles à faire entre le circuit électrique et le circuit magnétique. La résistance du premier est indépendante de  $i$ , tandis que la réluctance est fonction de  $\mu$  qui dépend non seulement du flux actuel, mais encore des flux antérieurs.

D'autre part, il n'y a pas de loi analogue à celle qui unit la quantité d'électricité au courant et au temps.

Enfin, par suite du magnétisme rémanent, il peut exister dans un circuit un flux magnétique sans force magnétomotrice ou même un flux opposé à celui de la force magnétomotrice.

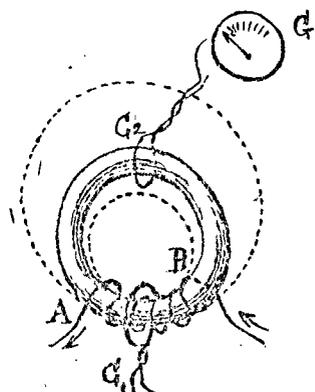
Il faut donc se garder de conclure de l'analogie de forme à une analogie de fait, et l'on doit considérer l'extension de la loi de Ohm au circuit magnétique comme un artifice destiné à faciliter les calculs.

## 147 Dispersion magnétique.

Le cas considéré dans le 3<sup>ème</sup> exemple du n° précédent est fictif, car nous avons supposé le milieu ambiant

impermeable aux lignes d'induction. Cela n'est pas exact.

Si l'on peut considérer l'air comme un isolant parfait pour le flux de courant électrique, il n'en est pas de même pour le flux magnétique. La perméabilité de l'air est petite devant celle du fer pour une faible induction magnétique, mais elle lui devient tout à fait comparable quand le fer est traversé par un flux intense. Il en résulte que, lorsque le fil n'entoure pas complètement le noyau de fer, une partie du flux est dérivée dans l'air. Il y a donc des fuites magnétiques qui augmentent avec le courant de la bobine par suite de l'affaiblissement graduel de la perméabilité du fer, alors que la perméabilité de l'air reste constante.



Supposons un noyau de fer en forme de tore entouré d'un solénoïde AB sur une fraction seulement de sa longueur. Déplaçons un circuit d'exploration C depuis le milieu  $C_1$  de AB, jusqu'au point diamétralement opposé  $C_2$ . Nous constatons que le flux d'induction, sensiblement constant sur AB, diminue de A jusqu'à  $C_2$  et de B jusqu'à  $C_2$ .

En outre, le spectre magnétique permet de constater que la partie du flux qui traversait  $C_1$ , et qui manque en  $C_2$ , se trouve dans l'air au voisinage de l'anneau. Une partie des tubes d'induction se ferme à travers l'air. Si l'on veut que la presque totalité du flux demeure dans le fer, il faut enfler la partie extérieure à AB, comme l'indiquent les traits pointillés de la figure.

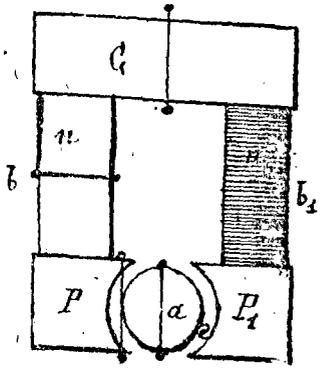
Le cas est analogue à celui d'un circuit électrique plongé dans un liquide ayant une certaine conductibilité. Il y a des fuites de courant par le liquide.

Pour réduire les fuites, les constructeurs doivent disposer les pièces de fer et étudier les enroulements de manière que, le fer étant supposé remplacé par de l'air, les lignes de force aient le plus possible la forme que doivent avoir les lignes d'induction dans le fer.

## 148 - Coefficients d'Hopkinson -

Considérons une dynamo représentée sur la

figure. Au point de vue magnétique elle comprend cinq parties : les noyaux  $n, n_1$ , autour desquels sont enroulés les bobines inductrices  $b, b_1$  ; la culasse  $C$  qui sert à conduire le flux émané des noyaux ; les pièces polaires  $p, p_1$  qui conduisent le même flux sur l'armature  $a$  ; l'armature  $a$  mobile autour de son axe et portant le circuit induit ; l'entrefer  $e$  espace qui sépare l'armature  $a$  des pièces polaires  $p, p_1$ .



On utilise le flux à travers l'armature  $a$ , par son action sur le circuit induit. Le rôle du fer, dans l'armature  $a$  et la culasse  $C$ , est double : d'une part il diminue la réluctance du circuit ; d'autre part il conduit le flux en condensant dans un même circuit l'effet des forces magnétomotrices des bobines  $b$  et  $b_1$ . Sans ces pièces de fer, le flux des bobines se fermerait dans

l'air en se dispersant, et la majeure partie serait perdue pour la machine. Pour réduire les fuites, il convient évidemment de diminuer l'entrefer  $e$  et aussi de donner à la culasse  $C$  une section supérieure à celle des noyaux  $n, n_1$ , de manière que le flux n'y soit pas sensiblement inférieur à celui qui traverse les noyaux.

Pour étudier la dispersion, on peut se contenter de mesurer un flux dans chacune des cinq parties du circuit, comme l'indique la figure.

Soient  $\varphi_a, \varphi_e, \varphi_p, \varphi_n, \varphi_c$  ces flux. Le flux à travers l'armature est le flux utile ; il est naturel de lui comparer les autres flux en considérant les rapports :

$$\frac{\varphi_e}{\varphi_a}, \frac{\varphi_p}{\varphi_a}, \frac{\varphi_n}{\varphi_a}, \frac{\varphi_c}{\varphi_a}$$

qui ont été introduits par les frères Hopkinson (1886). On les appelle coefficients d'Hopkinson et on les désigne par  $V$ . Pour une même machine, ils varient avec l'induction et par conséquent avec le courant inducteur, car  $\mu$  est fonction de  $H$ , mais pratiquement ils ont des valeurs grossièrement constantes. Dans le type envisagé (type Manchester), on peut adopter

$$V_e = V_p = 1 \quad V_n = V_c = 1,5$$

Force magnétomotrice nécessaire pour produire un flux utile exigé - La donnée du problème est  $\varphi_a$ . En outre le circuit est connu ( $l$ ,  $S$  et  $\nu$  pour chaque partie du circuit); enfin on connaît la courbe  $\mu = f(B)$  pour le fer employé. L'inconnue est la force magnétomotrice  $F$  qu'il faut appliquer aux noyaux pour produire  $\varphi_a$ .

Calculons la force magnétique résistante d'une partie quelconque du circuit. Dans la culasse par exemple, le flux est  $\varphi = \nu_c \varphi_a$ ; l'induction est  $B = \frac{\varphi}{S} = \frac{\nu_c \varphi_a}{S}$ . Connaissant  $B$ , on en déduit  $\mu = f(B)$ ; la force magnétique résistante le long de  $l$  est, en valeur absolue:

$$\frac{B}{\mu} l = \frac{l \nu_c \varphi_a}{\mu S}$$

Cette formule s'applique à toutes les parties du fer; pour l'entrefer  $\nu = 1$ .

La somme des forces résistantes équilibre la force magnétomotrice  $F$  à fournir:

$$F = \frac{B_a}{\mu_a} l_a + B_e l_e + \frac{B_p}{\mu_p} l_p + \frac{B_n}{\mu_n} l_n + \frac{B_c}{\mu_c} l_c$$

et le nombre d'ampères tours à fournir aux bobines  $b$ ,  $b_1$  est:

$$Ni = \frac{10}{4\pi} F \quad (10 \text{ parce que } 1 \text{ amp} = 10 \text{ unités C.G.S.})$$

Exemple numérique

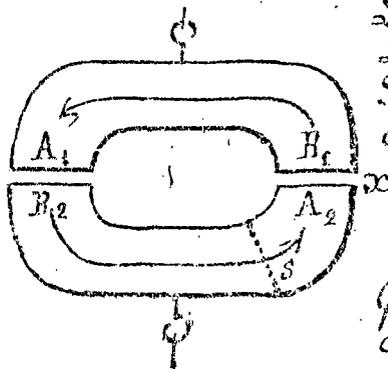
$$\varphi_a = 10^7 \text{ maxwell (C.G.S.)}$$

	$l$	$S$	$\nu$	$B = \frac{\Phi}{S}$	$\mu$	$\frac{B}{\mu}$	$\frac{B}{\mu} l$
	cm	cm <sup>2</sup>		gauss		gauss	maxwell
a	34	800	1	12.000	1.400	8,6	290
e	3	1600	1	6.000	1	6.000	18.000
n	90	980	1,5	15.000	500	30	2.700
c	60	1100	1,5	14.000	800	17	1.000
p	50	1300	1	8.000	2.400	3	150
						total $F =$	22.140

$Ni = 17.000$  ampères-tours  
Presque toute la force magnétique résistante vient de l'entrefer

### - 149 - Force portante d'un électro-aimant

Soit un électro-aimant  $A_1 B_1$  portant l'armature  $A_2 B_2$ ; et pour simplifier supposons que l'ensemble forme un circuit magnétique sans fuite et de section uniforme  $S$ .



Le flux à travers les  $N$  spires est  $\varphi = NBS$ .  
L'énergie électrocinétique est  $T = \frac{1}{2} i N \varphi$   
Soit  $x$  l'entrefer séparant l'électro-aimant de l'armature; la force portante est:

$$X = \frac{dT}{dx} = \frac{1}{2} i N \frac{d\varphi}{dx}$$

$\varphi$  se calcule par la deuxième loi du circuit. L'entrefer entre deux fois:

$$4\pi Ni = \varphi \left( \frac{l_1}{\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S} + \frac{2x}{S} \right) \quad (214, n^{\circ} 146)$$

$$D'où: \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{8\pi Ni}{S \left( \frac{l_1}{\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S} + \frac{2x}{S} \right)^2} = - \frac{2\varphi^2}{4\pi Ni S}$$

$$\text{et:} \quad X = - \frac{\varphi^2}{4\pi S} = - \frac{B^2 S}{4\pi} \quad (- \text{ signifie que la force est attractive})$$

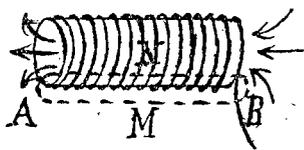
Pour chaque surface de contact, la force est  $-\frac{B^2 S}{8\pi}$   
Cette méthode s'applique aux attractions et répulsions entre les corps situés dans un champ magnétique.

Un système est en équilibre stable quand l'énergie électrocinétique totale  $T$  est maximum. Pour cette raison, les corps allongés se mettent dans la direction du champ s'ils sont magnétiques, en croix avec le champ s'ils sont diamagnétiques.

### - 150 - Mesure de la perméabilité du fer -

Un premier procédé consiste à employer un tore en fer, entouré d'un solénoïde, et à mesurer le

flux d'induction à travers un circuit d'exploration, cette méthode est incommode car elle exige la construction d'un tore. On peut approximativement remplacer le tore par un barreau allongé. Supposons un solénoïde de armé de fer, l'intégrale de la force magnétique le long de  $A M B N A$  se réduit sensiblement à la portion intérieure et l'on a



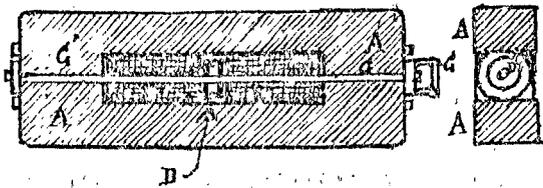
$$\frac{B}{\mu} l = F$$

L'inexactitude de la méthode est d'autant plus grande que la bobine est plus courte, l'équation devant être complétée par l'intégrale de la force magnétique le long de  $A M B$ . Sa valeur exacte de  $\frac{B}{\mu} l$  est alors :

$$\frac{B}{\mu} l = F - F_1$$

et  $F_1$  est ce qu'on appelle quelquefois la force démagnétisante. Dans les idées de Coulomb, elle serait attribuée à la force magnétique qui serait due aux masses  $+m$  et  $-m$  supposées placées en  $A$  et  $B$ .

La méthode d'Hopkinson pour la mesure de  $\mu$  est la méthode du solénoïde, modifiée de la façon suivante: Un barreau appelé épreuve est formé de deux tronçons  $C$  et  $C'$ ; il traverse une masse de fer  $A$ , deux bobines magnétisantes  $B, B'$ , et une petite bobine  $D$  reliée à un galvanomètre balistique.



Cette bobine  $D$  est sollicitée latéralement par un fil élastique, de sorte que si l'on écarte légèrement l'un de l'autre les deux tronçons  $C$  et  $C'$ , elle est tirée hors de l'appareil, ce qui permet la mesure du flux.

Le bloc de fer et le barreau constituent un circuit magnétique traversé par un flux produit par la force magnétomotrice  $4\pi Ni$  ( $N$  et  $i$ , nombre de spires et courant des bobines  $B, B'$ ).

Soient  $\Phi$  le flux,  $l$  la longueur de l'épreuve limitée par le vide du bloc  $A$ ,  $S$  la section de l'épreuve,  $\mu$  sa perméabilité. Sa réluctance du bloc de fer

étant, à cause de la grande section, négligeable par rapport à celle de l'éprouvette, on a sensiblement :

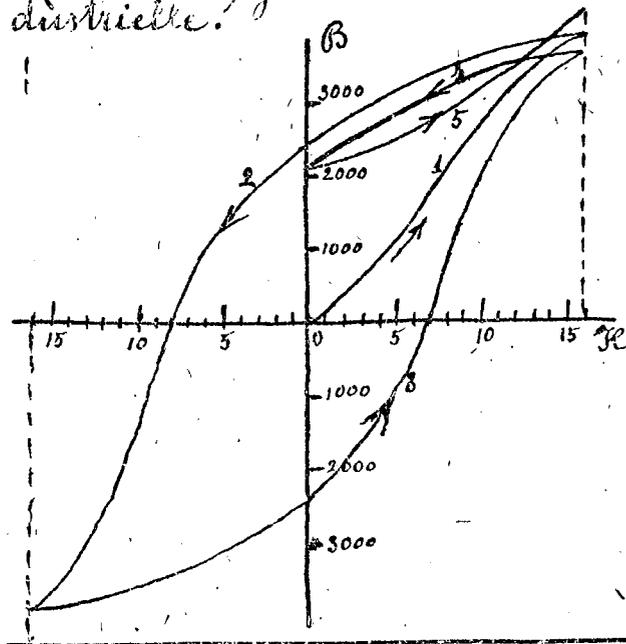
$$4\pi Ni = \frac{\Phi l}{\mu s}$$

D'où  $\mu$ ,  $\Phi$  étant mesuré par la bobine D. On peut donc, en faisant varier  $i$ , construire la courbe  $\mu = f(B)$ .

## §. 5 - Hystérésis<sup>(1)</sup>

### 151 - Courbe d'hystérésis -

Nous avons admis jusqu'à présent qu'à chaque valeur de la force magnétisante  $H$  correspond une valeur unique de l'induction  $B$ . Dans les corps peu magnétiques, il en est bien ainsi. Dans le fer, même très doux, ce n'est plus bien exact, car il reste des traces d'aimantation après rupture du courant d'excitation; s'il s'agit de fonte ou d'acier, ce n'est plus vrai du tout. L'aimantation d'un barreau est fonction, non seulement de la force magnétisante actuelle, mais aussi des états magnétiques antérieurs; cette empreinte conservée d'une cause antérieure s'appelle hystérésis (взрешив, "je retarde"). Elle a une grande importance industrielle.



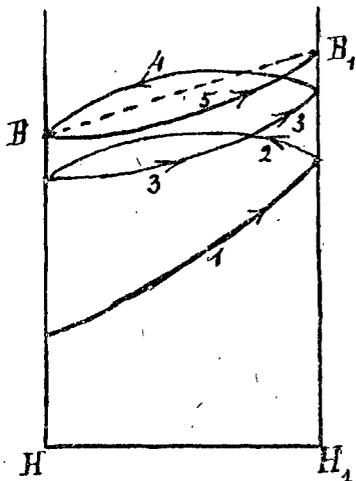
En mesurant la perméabilité d'un anneau de fonte, Ewing a obtenu pour représenter les valeurs corrélatives de  $H$  et de  $B$  le réseau de courbes de la figure ci-contre.

Partant de la fonte non aimantée  $B = 0$  pour  $H = 0$ , les courbes sont parcourues dans le sens des flèches et dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5.

**Cycle d'hystérésis -**  
Les appareils industriels

(1) E. Carvallo - leçons d'électricité.

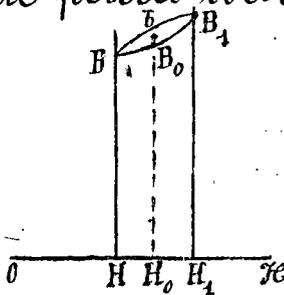
(dynamos, alternateurs, transformateurs) utilisent des courants périodiques. Leur action sur le fer, obéit à la loi suivante : si l'on fait osciller le champ magnétisant entre deux valeurs  $H$  et  $H_1$ , on obtient une courbe, 1, 2, 3, 4, 5, dont les dernières branches 4' et 5' tendent à se confondre avec un cycle fermé. (1)



sont descendantes.

Ce cycle limite est un cycle d'hystérésis. Il présente deux sommets  $B$  et  $B_1$  qui sont déterminés quand on donne à la fois  $H$  et  $H_1$ . En d'autres termes, les inductions  $B$  et  $B_1$  correspondantes sont fonctions de  $H$  et  $H_1$ . 1, 3, 5, sont dites ascendantes; 2, 4,

**Inductions limites** - Si l'intervalle  $H H_1$  de l'oscillation magnétique tend vers zéro, le cycle d'hystérésis  $B B_1$  diminue, prend l'aspect d'un bâtonnet  $b$ , puis se confond avec un point  $B_0$ . Ce phénomène se présente quand un barreau aimanté est abandonné dans le champ terrestre, car le champ subit de petites oscillations diurnes. L'induction de l'aimant tend vers la limite  $H_0 B_0$  correspondante à la valeur moyenne du champ magnétisant  $OH_0$ ; si l'aimant possède une induction supérieure à l'induction limite son induction diminue. Elle augmente dans le cas contraire.



Quand on change le champ magnétisant moyen  $OH_0$ , le point  $B_0$  décrit la courbe des inductions limites L.

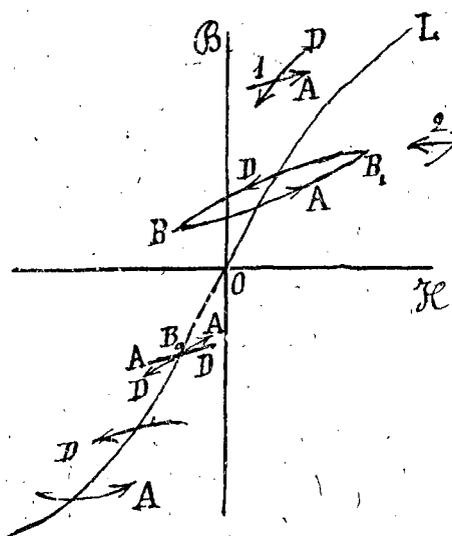
### Diagramme de l'induction

Si au réseau des courbes d'hystérésis on ajoute la courbe des inductions limites  $L$ , on a le diagramme de l'induction.

Cette courbe est symétrique par rapport à l'origine; sa partie inférieure tourne sa concavité vers

(1) Nous avons vu un phénomène analogue pour les déformations mécaniques. Cours de 1<sup>ère</sup> année - note de la page 240 -

287



le haut et sa partie supérieure est concave vers le bas.

Ses courbes ascendantes A traversent L, de gauche à droite, les courbes descendantes traversent L, de droite à gauche.

Les cycles d'hystérésis sont traversés par L, et présentent la disposition BAB, DB.

Par tout point du plan passent une courbe ascendante et une courbe descendante.

Elles présentent la disposition 1/ si le point est au-dessus de L,

la disposition 2/ si le point est au-dessous de L.

Ses deux courbes A et D partant d'un même point  $B_0$  de L, ont la même tangente, dont la direction est celle du bâtonnet limite définissant le point B.

## 152 - Énergie électrocinétique localisée dans le champ -

Soit un système de courants; son énergie électrocinétique est  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum i \varphi$  (n° 132, form. 185) quel que soit le milieu, homogène ou non, où se trouvent ces courants, que ce milieu soit magnétique ou non, qu'il possède ou non de l'hystérésis.

Nous allons donner une autre forme à l'expression de l'énergie. Considérons un tube d'induction infiniment mince, le flux

$B d\sigma = d\varphi$  est constant tout le long de ce tube.

D'autre part, ce tube infiniment mince constituant un circuit fermé sur lui-même, on a :

$$\int (\vec{H} d\vec{s}) = 4\pi \sum i$$

$\sum i$  étant la somme des courants traversés par le tube d'induction.

Multipliant membre à membre les deux expressions

précédentes, et étendant l'intégrale à tous les tubes d'induction, c'est-à-dire au champ tout entier, on a immédiatement :

$$\iiint (\vec{B} \cdot \vec{H}) dv = 4\pi \sum i \varphi = 8\pi T$$

D'où :

$$(215) \quad T = \frac{1}{8\pi} \iiint (\vec{B} \cdot \vec{H}) dv$$

Dans le cas où il n'y a pas d'hystérésis,  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  ont même direction. Si, de plus, la perméabilité est uniforme (ce qui implique qu'elle soit indépendante du champ), on a :

$$(216) \quad B = \mu H \quad T = \frac{\mu}{8\pi} \iiint H^2 dv$$

L'expression (215) montre qu'on peut considérer l'énergie comme localisée dans chaque élément de volume  $dv$  du champ, (même dans l'espace vide de matière).

Ses déplacements relatifs des circuits et leurs déformations, quand ils ne sont pas rigides, se font spontanément de manière que l'énergie du champ magnétique augmente.

Si cette énergie était potentielle, elle diminuerait ; on voit encore de cette façon que l'énergie est cinétique.

L'énergie  $T$  étant essentiellement positive, pour deux courants on a :

$$L i^2 + 2M i i' + L' i'^2 > 0$$

d'où

$$M^2 \leq L L'$$

### 153 - Energie dégradée par l'aimantation

Par l'aimantation d'un corps à hystérésis, une certaine quantité d'énergie est transformée en chaleur.

Supposons un solénoïde enroulé sur un tore de fil de fer fin. (1) L'équation du courant, pendant la période d'établissement, est :

(1) de manière à supprimer les courants induits dans le fer (courants de Foucault) qui donneraient un dégagement de chaleur par effet Joule.

$$E - r i - \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

Multiplions par le déplacement électrique  $i dt$  et intégrons :

$$\int E i dt = \int r i^2 dt + N S l \int i dB$$

$N$  étant le nombre de spires,  $S$  la section droite du tore,  $l$  sa longueur moyenne ;  $S l$  est le volume  $V$  du tore. D'autre part,  $H = 4\pi N i$  ; on a donc :

$$(217) \quad \int E i dt = \int r i^2 dt + \frac{V}{4\pi} \int H dB$$

Le premier membre représente l'énergie dépensée. Elle se retrouve dans l'effet Joule et dans l'énergie

$$W_1 = \frac{1}{4\pi} \int H dB$$

par unité de volume.

Dans le cas général, si  $B$  est variable d'un point à l'autre du circuit magnétique, l'énergie magnétique fournie est :

$$W = \iiint W_1 dv$$

étendue à tous les éléments de volume du champ.

D'autre part nous avons établi que l'énergie électrocinétique par unité de volume est :

$$(218) \quad T_1 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (\text{formule 215})$$

Si  $B$  et  $H$  sont parallèles, nous pouvons écrire :

$$T_1 = \frac{1}{8\pi} \int H dB + \frac{1}{8\pi} \int B dH$$

Dans le cas plus général, la différence entre l'énergie fournie et l'énergie emmagasinée :

$$(219) \quad Q = W_1 - T_1 = \frac{1}{8\pi} \int H dB - \frac{1}{8\pi} \int B dH$$

passé à l'état de chaleur.

Considérons alors un cycle d'hystérésis. Pour un cycle fermé la variation de l'énergie électrocinétique est nulle puisque

c'est une différentielle exacte. L'énergie dégradée en chaleur est donc représentée par l'énergie totale fournie dans l'opération :

$$(220) \quad Q = W_1 = \frac{1}{4\pi} \int H dB$$

Elle a pour mesure l'aire du cycle divisée par  $4\pi$ .  
L'énergie dégradée a plusieurs formes équivalentes. On a en effet :

$$B = H + 4\pi I$$

$$\text{D'où} \quad \int H dB = \int H dH + 4\pi \int H dI$$

Pour un cycle fermé la première intégrale du second membre est nulle :

$$(221) \quad Q = \int H dI = - \int I dH$$

$$\text{De même} \quad \int H dB = \int B dB - 4\pi \int I dB$$

et

$$(222) \quad Q = \int I dB$$

Les expressions (220), (221), (222) ne sont équivalentes que pour un cycle fermé.

### 154 - Formule de Steinmetz - Hystérésimètre.

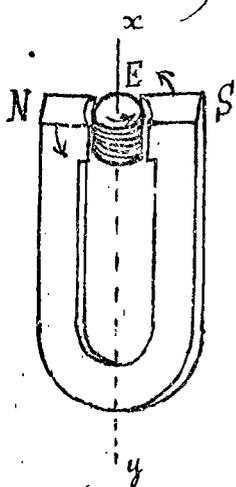
Pour une matière donnée, fonte ou fer, l'énergie dégradée  $Q$  est fonction du cycle d'hystérésis et celui-ci ne dépend que des limites  $H$  et  $H_1$  des oscillations du champ magnétique. A défaut d'une fonction exactement connue, Steinmetz a donné une formule empirique suffisante pour les besoins industriels. Aux variables  $H$  et  $H_1$ , Steinmetz substitue leurs fonctions  $B$  et  $B_1$  qui sont ici déterminées, puisqu'il s'agit des sommets d'un cycle d'hystérésis. L'énergie dissipée par unité de volume est :

$$Q = \eta (B_1 - B)^{1,6} \quad \text{C.G.S.}$$

$\eta$  étant un coefficient spécifique dont la valeur varie

entre 0,002 (fer très doux) et 0,025 (acier fondu trempé), pour les bonnes tôles employées dans l'industrie électrique  $\eta$  est voisin de 0,003.

La méthode que nous avons suivie est laborieuse, car il faut, pour chaque échantillon, tracer un cycle d'hystérésis par points, de l'aire de ce cycle déduire  $Q$ , de  $Q$  et de  $(B - B_1)$  déduire  $\eta$  par la formule de Steinmetz. Cela fait, la même formule donne l'énergie perdue pour tout autre cycle relatif au même échantillon. L'industrie exige un procédé plus rapide pour la mesure de  $\eta$ ; c'est le but des hystérésimètres.



On dispose des feuilles de tôle à essayer, de manière à former un paquet qu'on place dans un champ tournant obtenu à l'aide d'un aimant ou d'un électro-aimant animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe de symétrie  $xy$ .

L'échantillon  $E$  est disposé de manière à pouvoir tourner autour de ce même axe, et, à l'aide d'un fil de torsion ou d'un ressort, on fait agir sur lui un couple antagoniste  $C$  qui l'empêche d'être entraîné par la rotation de l'aimant. Le travail de l'action exercée sur  $E$  par l'aimant pendant un tour est donc  $2\pi C$  et représente l'énergie dissipée par le cycle d'hystérésis correspondant.

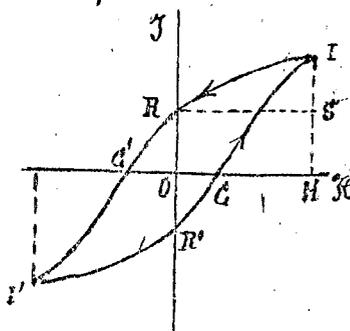
Chaque élément de l'échantillon se trouve bien soumis à un champ magnétisant qui varie périodiquement, mais l'induction n'est évidemment pas la même pour tous les éléments. On obtient donc un résultat moyen.

En donnant au profil des lames une forme appropriée, on peut, dans bien des cas, soumettre la substance à des variations magnétiques de même genre que celles qui doivent se produire dans l'appareil à construire.

## 155 - Diagramme de l'aimantation -

Au lieu du diagramme de  $B$ , on peut tracer celui de  $I$ . On obtient des courbes d'hystérésis jouissant des mêmes propriétés que les précédentes, sauf que toute ligne d'aimantation

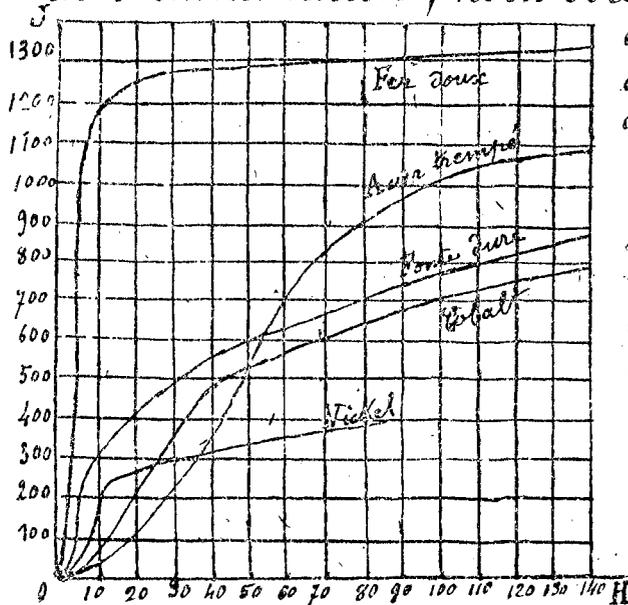
a une asymptote horizontale quand on la prolonge indéfiniment.  $I$  tend vers un maximum; c'est la saturation.



Il faut d'ailleurs remarquer que si  $I$  ne peut croître indéfiniment, il n'en est pas de même de  $B = H + 4\pi I$ ; la valeur de  $H$  est seulement limitée par l'impossibilité pratique de faire circuler des courants trop intenses dans les conducteurs.

Sur le cycle d'hystérésis  $CIR C'I'R'$  décrit entre  $\pm H$ , on adopte les dénominations suivantes:  $IH$  est l'aimantation induite maximum ou totale;  $OR$  est l'aimantation rémanente;  $SI = IH - OR$  est l'aimantation temporaire; enfin  $OC' = OC$  est le champ coercitif.

Si maintenant, au lieu des courbes des inductions limites (n° 151), nous considérons les courbes correspondantes de l'aimantation, nous obtenons les résultats figurés



ci-contre. Les courbes relatives au fer, à l'acier, à la fonte, au cobalt et au nickel ont même allure générale.

On peut y distinguer trois régions: La première correspond à de faibles valeurs de  $H$ ; l'aimantation y croît assez lentement. Dans la seconde région les courbes montent rapidement et présentent un point d'inflexion.

Enfin, quand  $H$  prend des valeurs élevées,  $I$  tend vers son maximum.

La susceptibilité  $K$  est le coefficient angulaire de la droite qui joint l'origine à un point variable sur la courbe. Elle tend vers zéro quand le champ devient intense, et en même temps  $\mu$  tend vers 1.

(1) Voici à titre d'exemple les valeurs correspondantes de  $H, B, \mu$  pour un échantillon de fer très doux.

$H$	2	5	12	52	105	300
$B$	5.000	10.000	13.000	16.000	17.000	19.000
$\mu$	2.500	2.000	1.083	308	161	63

Dans le voisinage du point d'inflexion la moindre variation de  $H$  entraîne un grand changement dans la valeur de  $I$ . On a utilisé cette propriété dans les électro-aimants dits polarisés : un aimant permanent amène le fer de l'électro à l'état d'aimantation qui correspond au point d'inflexion, de sorte que le moindre courant dans la bobine produit des variations notables dans l'action magnétique de l'appareil (récepteurs téléphoniques).

## - 156 - Influence de la température sur l'aimantation -

La perméabilité varie avec la température. Les corps très magnétiques perdent leurs propriétés à une certaine température pour les reprendre par refroidissement. Pour le fer et l'acier, cette température critique est comprise entre  $600^{\circ}$  et  $900^{\circ}$ .

Pour les très petites forces magnétiques, l'induction est plus grande à haute température qu'à basse température, à l'inverse de ce qui se passe pour les inductions élevées.

Curie a constaté, en plaçant le corps à étudier dans un champ intense et déterminant l'action directrice du champ sur le corps, que le fer présente trois températures de transformation magnétique vers  $750^{\circ}$ ,  $860^{\circ}$  et  $1280^{\circ}$ , correspondant à des modifications générales des propriétés du métal. C'est ainsi que le premier de ces points correspond à la température à laquelle un morceau de fer, chauffé vers  $900^{\circ}$  et refroidi lentement dégage une certaine quantité de chaleur, fait qu'on peut mettre en évidence en étudiant la courbe de refroidissement.

### Corps paramagnétiques et diamagnétiques -

Curie a établi que la susceptibilité des corps paramagnétiques est inversement proportionnelle à la température absolue, alors que la susceptibilité des corps diamagnétiques est indépendante de la température (sauf pour le bismuth et l'antimoine).

La susceptibilité des corps para et diamagnétiques est très faible. Curie a considéré le rapport de la susceptibilité à la densité; il l'a appelé coefficient d'aimantation spécifique. Voici quelques chiffres à titre d'exemples :

Paramagnétiques } Oxygène  $115 \times 10^{-6}$   
 temp.  $20^{\circ}\text{C}$ . } Sulfate ferreux  $83 \times 10^{-6}$   
 Palladium  $5,3 \times 10^{-6}$

Diamagnétiques } Phosphore ord.  $-0,92 \times 10^{-6}$  de  $19^{\circ}$  à  $71^{\circ}$   
 eau  $-0,79 \times 10^{-6}$  de  $15^{\circ}$  à  $189$   
 Bismuth solide  $-1,35 \times 10^{-6}$  à  $20^{\circ}$

La méthode employée par Curie consiste à déterminer la force avec laquelle tend à se déplacer une ampoule de verre dur ou de platine remplie du corps à étudier réduit en petits fragments. On démontre que la force est proportionnelle au produit de la susceptibilité par le taux de la variation de  $H^2$  dans la direction où le déplacement tend à se produire.

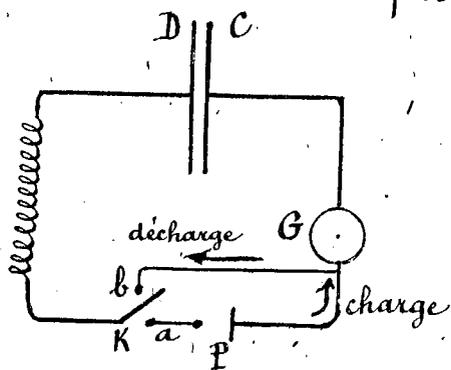
On mesure cette force par la balance de torsion.

## § 6 - Courants variables -

### Courants périodiques -

#### 157 - Charge et décharge d'un condensateur

Imaginons un circuit présentant une coupure CD formée de deux surfaces métalliques larges et très rapprochées.



Un commutateur K a b permet de mettre ces deux surfaces en communication avec les pôles d'une pile, ou de les relier directement entre elles. En G se trouve un galvanomètre balistique.

Le galvanomètre subit une impulsion au moment où le commutateur relie les surfaces aux pôles de la pile. Une nouvelle impulsion se produit, égale à la première, mais de sens opposé, quand on amène la clef de a en b.

Un courant peut donc se produire malgré la coupure CD; mais le régime variable seul est possible dans un tel circuit.

Le premier courant est le courant de charge, le second le courant de décharge; ils sont de très courte durée (ordre du centième de seconde).

Le système des surfaces C, D est appelé condensateur, parce qu'il condense puis restitue la charge comme un ressort bandé emmagasine l'énergie mécanique et la restitue quand il se détend. D et C sont les armatures du condensateur.

- Les lois de la charge et de la décharge sont très simples:
- 1° Les déplacements électriques à la charge et à la décharge sont égaux et de sens opposés
  - 2° Le déplacement électrique  $q$  est proportionnel à la force électromotrice de charge  $E$ .

$$(223) \quad q = CE$$

Le coefficient  $C$  caractérise le condensateur; c'est sa capacité. L'unité pratique de capacité est celle qui emmagasine un coulomb par volt; on l'appelle farad. Le farad est égal à  $10^{-9}$  unité C.G.S. Le microfarad est le millionième de farad ( $10^{-15}$  C.G.S.).

Pour mesurer une capacité, il suffit de connaître la force électromotrice  $E$  de la batterie de charge et de mesurer  $q$  avec un galvanomètre balistique taré.

Si le condensateur est formé de deux surfaces planes et parallèles  $S$  séparées par une lame isolante d'épaisseur  $e$ , en faisant varier  $S$  et  $e$ , on trouve expérimentalement que la capacité est proportionnelle à la surface  $S$  des armatures et inversement proportionnelle à l'épaisseur  $e$ .<sup>(1)</sup>

$$(224) \quad C = a \frac{S}{e}$$

$a$  étant un coefficient qui caractérise l'isolant et s'appelle capacité spécifique de l'isolant.

Voici un exemple indiquant l'ordre de grandeur des capacités. Deux plateaux de surface  $S = 1 \text{ dm}^2$  séparés par  $1 \text{ mm}$  d'ébonite, offrent une capacité  $C = 0,0002$  microfarad. Une force électromotrice de 50 Volts donne à

---

(1) Pour le moment nous considérons cette loi comme expérimentale. Nous la déduirons plus loin des formules de l'électrostatique.

cette capacité la charge  $q = CE = 0,01$  microcoulomb.

## 158 - Force électromotrice d'un condensateur.

### Equation du courant variable.

Le condensateur absorbe à la charge, de l'énergie qu'il restitue à la décharge. Il est donc le siège d'une force électromotrice. Le sens de cette force est le même dans les deux périodes : c'est le sens du courant de décharge, car pendant la charge, il oppose sa force électromotrice progressivement croissante à celle de la pile, jusqu'à ce que l'équilibre (eq. 223) soit établi. On peut comparer le phénomène à la tension du ressort d'un peson, qui augmente tant que la réaction du ressort n'équilibre pas le poids suspendu au peson.

La grandeur de la force contre-électromotrice du condensateur résulte de la loi de charge ; si  $q$  est, non plus la charge totale emmagasinée, mais la charge à l'instant  $t$ , la force contre-électromotrice est  $-\frac{q}{C}$ .  
 À chaque instant la résultante de toutes les forces électromotrices est nulle. Ces forces sont : 1°  $-\frac{q}{C}$  ; 2°  $E$  ; 3° la force contre-électromotrice de self-induction  $-L \frac{d^2q}{dt^2}$  ; 4° la force contre-électromotrice de Joule  $-r \frac{dq}{dt}$ .

On a donc :

$$(225) \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} - E = 0$$

Equation qui détermine  $q$  en fonction du temps quand la force électromotrice  $E$  est donnée, qu'elle soit constante ou variable elle-même avec le temps.

**Charge d'un condensateur.** - Supposons  $E$  constant. L'intégrale générale de l'équation sans le terme constant est :

$$q = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

et une solution particulière de l'équation complète est :

$$q = CE$$

L'intégrale de l'équation est donc :

$$(226) \quad q = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + CE$$

Les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant les racines de l'équation:

$$(227) \quad CL\alpha^2 + Cr\alpha + 1 = 0$$

D'où (228) 
$$\alpha = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

et les constantes  $A_1$  et  $A_2$  étant déterminées par les conditions initiales. Si à l'origine du temps le condensateur n'est pas chargé, et si l'on introduit brusquement la pile en fermant le circuit, on a pour  $t = 0$

$$q = 0 \quad i = \frac{dq}{dt} = 0$$

d'où: (229) 
$$A_1 + A_2 + CE = 0$$

(230) 
$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0$$

Deux cas sont à examiner :

1°/ Racines réelles.  $r^2C - 4L > 0$ . Les deux racines sont négatives;  $A_1$  et  $A_2$  sont de signes contraires en vertu de (230). La plus grande en valeur absolue des quantités  $A_1, A_2$  est négative d'après (229). Le déplacement  $q$  est apériodique et la différence de potentiel  $\frac{q}{C}$  entre les armatures tend progressivement vers sa valeur finale  $E$ .

2°/ Racines imaginaires  $r^2C - 4L < 0$ . Les racines de (227) sont:

$$-\beta \pm \omega \sqrt{-1} \quad \text{en posant } \beta = \frac{r}{2L}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}$$

$q$  peut alors se mettre sous la forme:

$$(231) \quad q = e^{-\beta t} (B \cos \omega t + B' \sin \omega t) CE$$

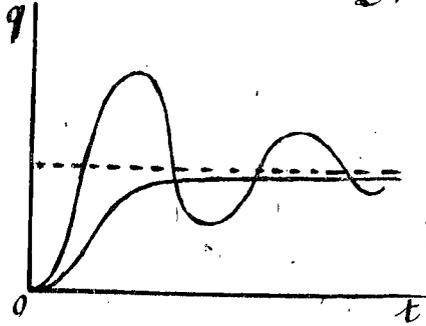
en remplaçant  $e^{+\omega\sqrt{-1}t}$  et  $e^{-\omega\sqrt{-1}t}$  par leurs expressions en  $\sin \omega t$  et  $\cos \omega t$ , et ne gardant que la partie réelle.

$q$  (ou la force contre-électromotrice  $-\frac{q}{C}$ ) est donc le produit d'un facteur décroissant avec le temps par une fonction périodique du temps. On a un mouvement périodique amorti. La période est:

$$(232) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}} = 2\pi \frac{LC}{\sqrt{LC - \frac{r^2C^2}{4}}}$$

Cette période dépend de la capacité, de la résistance et de la self.

L'amortissement  $\beta$  est indépendant de la capacité. Si, à l'origine, le condensateur n'est pas chargé, on a  $q = 0$  pour  $t = 0$ , c'est-à-dire, d'après (231)  $B = -CE$ . Alors pour  $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$  on a :



$$q = CE(1 + e^{-\beta \frac{\pi}{\omega}})$$

La valeur de la force contre-électromotrice sera donc, pour  $t = \frac{T}{2}$ , voisine de  $2E$ , si  $\beta$  est petit.

On peut donc avoir une surtension voisine du double de la force électromotrice de charge (propriété utilisée dans certaines installations de T.S.F.)

La figure ci-contre représente les deux modes de charge.

**Décharge d'un condensateur.** — La question se traite de la même manière en supprimant le terme  $E$  de l'équation (226) et en remarquant que pour  $t = 0$   $q = CE$  et  $i = \frac{dq}{dt} = 0$ . On a deux formes de décharge: la décharge aperiodique et la décharge oscillante amortie, dont la période est donnée par (232).

Ses conditions les plus favorables à la production des décharges oscillantes sont donc obtenues en choisissant des valeurs faibles pour la résistance du circuit, et pour la capacité, un coefficient de self très élevé. On a alors approximativement

$$(233) \quad T = 2\pi \sqrt{LC} \quad (\text{formule de Thomson})$$

Appliquons cette formule au cas d'une bouteille de Leyde dont le circuit est un fil dépourvu de spires, d'un mètre de longueur.

La self est environ  $10^3$  (C.G.S.)<sup>1</sup>, la capacité d'une bouteille ordinaire est de l'ordre de  $10^{-18}$ ;  $T$  est donc de l'ordre de  $\frac{1}{5.000.000}$  ième de seconde.

En supposant  $r = 1$  ohm, on trouve que l'amplitude oscillatoire est déjà réduite au dixième dès la 23<sup>ème</sup> période.

La décharge oscillante peut s'observer en regardant dans un miroir tournant l'image réfléchie de l'étincelle

de décharge. On voit une série d'images qui, pour une même vitesse du miroir, sont d'autant plus espacées que la capacité du condensateur est plus grande.

Feddersen a pu photographier des décharges dont la période a varié de  $\frac{1}{20.000}$  à  $\frac{1}{400.000}$  de seconde, sur les épreuves on constate que les traits brillants partent alternativement des deux électrodes.

M<sup>r</sup> Décombe a obtenu l'inscription photographique d'étincelles se succédant à  $\frac{1}{5.000.000}$  ième de seconde; le miroir faisant de 400 à 500 tours par seconde, le nombre d'étincelles successives capables d'impressionner la plaque atteignait 14.

Il est nécessaire d'observer que les courants très rapides ne se propagent pas dans les conducteurs comme les courants constants à cause de l'induction des filets, en lesquels on peut décomposer le conducteur; sur les filets voisins, la densité du courant devient plus forte à la périphérie que sur l'axe du conducteur. La résistance et la self sont accrues, dans des proportions qui dépendent de la période et de l'amortissement. Ces effets sont particulièrement marqués dans le cas d'oscillations rapides se produisant lorsque la capacité est faible.

## 15g - Application à la mesure des résistances très grandes -

Chargeons un condensateur de capacité connue  $C$ , avec une batterie d'accumulateurs de force électromotrice  $E$ ; il prend une charge  $q_0 = CE$ . Déchargeons le maintenant à travers la résistance  $r$  à mesurer, dont nous supposons la self négligeable. Si  $r$  est très grand, la décharge, aperiodique, est lente. L'équation (225) se réduit à:

$$r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{rC} dt$$

Posons  $rC = \theta$  ( $\theta$  est un temps), et intégrons cette équation:

$$\text{Log. } \frac{q}{q_0} = -\frac{t}{\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\theta} = -\frac{1}{t} \log \frac{q}{q_0}$$

de sorte que si l'on mesure (par un galvanomètre balistique)

la charge  $q$  au bout du temps  $t$ , on en déduit  $\theta$  et  $r = \frac{\theta}{c}$ . Pratiquement, le calcul se simplifie si la décharge est très lente. Par exemple si  $C = 1$  microfarad et si au bout d'une minute la perte de charge est  $\frac{1}{100}$ , le microfarad perd  $\frac{1}{6.000}$  de sa charge par seconde, d'où  $\theta = 6.000$  secondes et  $r = 6.000$  mégohms.

## 160 - Courant périodique - Circuit doué de self sans capacité -

Soit  $E = E_0 \sin(\omega t - \varphi)$  la force électromotrice appliquée à un circuit de résistance  $R$  et de self  $L$ . Prenons pour variable le courant  $i = \frac{dq}{dt}$ , la formule (225) devient :

$$(234) \quad L \frac{di}{dt} + ri = E_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

L'intégrale complète s'obtient en ajoutant à l'intégrale  $A e^{-\frac{r}{L}t}$  de l'équation sans second membre une intégrale particulière de la forme  $i_0 \sin(\omega t - \varphi_1)$  dans laquelle les coefficients  $i_0$  et  $\varphi_1$  se déterminent par identification ; on a :

$$i_0 [L \omega \cos \varphi_1 - r \sin \varphi_1] = -E_0 \sin \varphi$$

$$i_0 [L \omega \sin \varphi_1 - r \cos \varphi_1] = E_0 \cos \varphi$$

$$\text{d'où (235)} \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{L \omega}{r} ; \quad i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}}$$

et enfin :

$$(236) \quad i = A e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi_1)$$

Le terme exponentiel s'évanouit rapidement ; le second terme donne le régime permanent.

**Représentation géométrique.** - Pour composer les grandeurs périodiques de même espèce et de même période, on peut utiliser la règle de Fresnel (cours de 1<sup>re</sup> année n° 211, p. 370). Remarquons d'ailleurs que cette règle résulte immédiatement de l'application de la représentation géométrique

des imaginaires à l'équation :

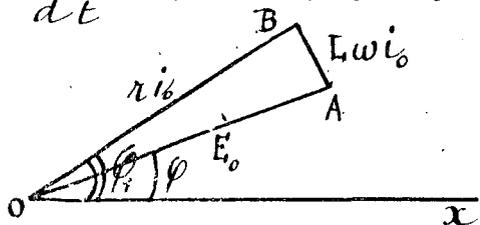
$$A e^{\sqrt{-1}(\omega t - \Phi)} = A_1 e^{\sqrt{-1}(\omega t - \varphi_1)} + A_2 e^{\sqrt{-1}(\omega t - \varphi_2)}$$

Nous représenterons donc une force électromotrice  $E = E_0 \sin(\omega t - \varphi)$  par un vecteur  $OA$  de longueur égale à  $E_0$ , faisant avec une droite  $OX$  l'angle  $\varphi$  dans le sens direct si  $\varphi$  est positif.

Considérons alors l'équation (234). Une fois le régime permanent atteint, le courant  $i$ , la force électromotrice d'induction et la force électromotrice de Joule seront des fonctions de même période que  $E$ .

$$\begin{aligned} \text{Posons } i &= i_0 \sin(\omega t - \varphi_1); \text{ on a } \frac{di}{dt} = \omega i_0 \cos(\omega t - \varphi_1) \\ &= \omega i_0 \sin(\omega t - \varphi_1 + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$\frac{di}{dt}$  est donc en avance de  $\frac{\pi}{2}$  sur  $i$ .



D'après cela on a entre les grandeurs  $E_0, i_0, r, L\omega, \varphi_1, \varphi$  les relations qu'on peut déduire du triangle rectangle  $OAB$ , (figure ci-contre). Ce sont précisément les relations (235).

Posons  $\bar{E} = E_0 e^{\sqrt{-1}(\omega t - \varphi)}$   $\bar{i} = i_0 e^{\sqrt{-1}(\omega t - \varphi_1)}$   
En appliquant la règle de multiplication des imaginaires, on a :

$$\bar{E} = \bar{i} (\bar{r} + L\omega\sqrt{-1})$$

Par conséquent, si nous convenons d'appeler force électromotrice imaginaire, intensité imaginaire et résistance imaginaire les trois grandeurs  $\bar{E}, \bar{i}, \bar{r} = r + L\omega\sqrt{-1}$ , nous avons l'équation :

$$(237) \quad \bar{E} = \bar{r} \bar{i}$$

de forme identique à celle des courants constants.

On traite de même le cas d'un circuit presque fermé dont les extrémités  $A$  et  $B$  sont supposées portées à des potentiels sinusoïdaux  $\psi_A = (\psi_A)_0 \sin(\omega t - \alpha)$ ;  $\psi_B = (\psi_B)_0 \sin(\omega t - \beta)$  de même période que  $E$ .

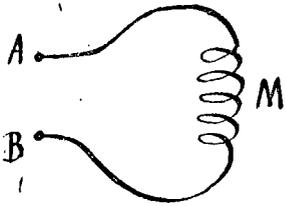
En introduisant les potentiels imaginaires

$$\bar{\psi}_A = (\psi_A)_0 e^{\sqrt{-1}(\omega t - \alpha)} ; \bar{\psi}_B = (\psi_B)_0 e^{\sqrt{-1}(\omega t - \beta)}$$

on trouve : (238)  $\overline{\Psi}_A - \overline{\Psi}_B = \overline{E} - r \overline{i}$

Il importe de remarquer que cette formule n'a de sens qu'à condition de savoir ce qu'on doit entendre par la self  $L$  du circuit.

Il en est pratiquement ainsi lorsque les points A et B sont suffisamment voisins, car on peut alors admettre que la self induction du circuit fermé qu'on obtiendrait en joignant



BA représente le flux coupé par le circuit AMB, lorsque l'intensité du courant  $y$  varie d'une quantité égale à 1.  $E_0$  et  $i_0$  sont la force électromotrice maximum et l'intensité maximum;

(on les désigne souvent par  $E_{max}$  et  $i_{max}$ )

Le module de la résistance imaginaire  $r$  s'appelle l'impédance du circuit.  $r$  est la résistance ohmique et  $L\omega$  l'inductance.

Si la période est longue, la pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  est faible et l'impédance se réduit sensiblement à la résistance ohmique; au contraire si la fréquence est grande, l'effet de l'inductance prédomine et pour les très grandes fréquences, la résistance ohmique ne compte pour ainsi dire plus.

## 161 - Circuit doué de self et capacité -

Intercalons maintenant un condensateur dans le circuit. Il est facile de voir que la question se ramène à la précédente, en remarquant que la capacité  $C$  du condensateur équivaut à une self négative  $-\frac{1}{C\omega^2}$ .

En effet, l'équation (225) s'écrit :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

Quand le régime permanent est atteint,  $q$  est une fonction périodique de même période que  $E$ , et l'on a

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2q}{dt^2}$$

L'équation précédente s'écrit dor :

$$\left(L - \frac{1}{C\omega^2}\right) \frac{d^2q}{dt^2} + r \frac{dq}{dt} = E_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

ou : (239)  $(L - \frac{1}{C\omega^2}) \frac{di}{dt} + ri = E_0 \sin(\omega t - \varphi)$

Tout se passe donc comme si la self  $L$  était diminuée de  $\frac{1}{C\omega^2}$ .  
On a alors (form. 235) :

(240)  $i = \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \sin(\omega t - \varphi_1); \text{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r}$

On donne le nom de capacitance à  $\frac{1}{C\omega}$  et de réactance à  $(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ .  
Examinons comment varie l'intensité maximum  $i_0$  quand on fait varier la capacité.

Pour  $C = \infty$  tout se passe comme si le condensateur n'existait pas ;  $\varphi_1 - \varphi > 0$  et l'intensité est en retard sur la force électromotrice.

$C$  diminuant,  $i_0$  croît et passe par un maximum pour  $\frac{1}{C\omega^2} = L$  ; la self est alors détruite par la capacité (mais ce n'est exact que pour une période particulière telle que  $\omega = \sqrt{\frac{1}{CL}}$ ). La valeur de l'intensité maximum ne dépend plus que de  $r$ , et elle est égale à l'intensité qu'aurait un courant constant si la force constante  $E_0$  était appliquée au circuit.

Lorsque  $C$  continue à décroître,  $i_0$  décroît et le courant est maintenant en avance sur la force électromotrice.

La force contre-électromotrice du condensateur

$$-\frac{q}{C} = \frac{1}{C\omega^2} \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{C\omega^2} \frac{di}{dt}$$

est en quadrature avec le courant. Son maximum  $\frac{i_0}{C\omega}$  a lieu, lorsqu'on fait varier  $C$ , pour une valeur

$$C_1 = \frac{L}{r^2 + L^2\omega^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_1} = L\omega^2 + \frac{r^2}{L}$$

d'autant plus voisine de celle qui rend  $i_0$  maximum que  $\frac{r^2}{L}$  est plus petit.

**Résonance.** - La condition  $\omega = \sqrt{\frac{1}{CL}}$  (self détruite par la capacité) est la condition de résonance, car la période  $T$  de la force électromotrice est alors égale à  $2\pi\sqrt{CL}$  c'est-à-dire à la période des oscillations propres d'un circuit de capacité  $C$ , de self  $L$  et de résistance négligeable (formule 233 N° 158).

On conçoit que dans ces conditions, l'effet de la force électromotrice soit d'entretenir les oscillations spontanées d'une décharge et par suite de les amplifier, de même qu'un diapason amplifie les vibrations de sa caisse de résonance.

$$\text{On a alors } i_0 = \frac{e_0}{r} \quad \text{et} \quad -\left(\frac{q}{C}\right)_{\max} = \frac{i_0}{c\omega} = \frac{e_0}{c\omega r}$$

Le courant est en phase avec la force électromotrice. Quant à la force contre-électromotrice du condensateur, elle peut atteindre des valeurs très élevées. Donnons un exemple numérique:

Prenons  $E_0 = 100$  Volts,  $r = 0,5$  ohm,  $L = \frac{1}{400}$  henry, fréquence  $\frac{1}{T} = 1000$  (d'où  $\omega = 6.280$ ); la résonance a lieu pour  $C = 10$  microfarads.

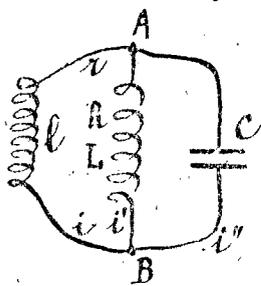
On a alors  $i_0 = 200$  amp. et la différence de potentiel maximum aux armatures du condensateur est  $\frac{200}{10^{-5} \times 6.280} = 3.200$  volts.

On voit combien les différences de potentiel peuvent devenir élevées lorsque la résonance a lieu. Cet effet, a été mis à profit en T. S. F.

## 162 - Self et capacité en parallèle -

non exigé

Soit un circuit A B dans lequel existe une force électromotrice  $E = E_0 \sin \omega t$ . Désignons par  $r$  et  $l$  la résistance et la self de la région B A, par  $R$  et  $L$  la résistance et la self de AB. Entre A et B, nous disposons un condensateur C, et nous supposons que la résistance et la self de la branche A C B soient négligeables.



Soit  $i, i', i''$  les intensités à un même instant  $t$ , dans les branches AB, ACB, ACB.

L'application des lois de Kirchhoff donne:

$$(241) \quad \begin{cases} i = i' + i'' \\ E = ri + l \frac{di}{dt} + Ri' + L \frac{di'}{dt} \\ E = ri + l \frac{di}{dt} - \frac{1}{c\omega^2} \frac{di''}{dt} \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad Ri' + L \frac{di'}{dt} = -\frac{1}{c\omega^2} \frac{di''}{dt} = \frac{1}{c\omega^2} \frac{di'}{dt} - \frac{1}{c\omega^2} \frac{di}{dt}$$

$$(242) \quad Ri' + \left(L - \frac{1}{c\omega^2}\right) \frac{di'}{dt} = -\frac{1}{c\omega^2} \frac{di}{dt}$$

Par élimination de  $i'$  entre (242) et la seconde des équations (241), on obtient  $i$ .

Le cas où la résonance a lieu pour le circuit ABC présente un intérêt tout particulier.

On a alors  $L - \frac{1}{c\omega^2} = 0$  et l'équation (242) se réduit à :

$$R i' = -L \frac{di}{dt} \quad \text{d'où} \quad R \frac{di'}{dt} = -\frac{1}{c\omega^2} \frac{d^2i}{dt^2} = \frac{1}{C} i$$

$$\text{et} \quad L \frac{di'}{dt} = \frac{L}{cR} i = \frac{L^2 \omega^2}{R} i$$

On a alors (2<sup>ème</sup> équation (241)) :

$$(243) \quad E = \left( r + \frac{L^2 \omega^2}{R} \right) i + (l - L) \frac{di}{dt}$$

Si la résistance  $R$  est très petite vis à vis de  $L^2 \omega^2$ , si, de plus,  $(l - L)$  est très petit, l'intensité  $i$  du courant dans AB est très faible.

Un semblable système constitue donc un "bouchon" pour les courants de fréquence  $\omega$ . On peut, par cet artifice, étouffer certaines harmoniques dans un courant complexe.

## 163 - Effet Joule -

L'effet Joule dans une portion du circuit de résistance  $r$  et de self  $L$ , parcourue par un courant alternatif est, pendant une période  $\tau$  :

$$W = \int_0^\tau r i^2 dt = r i_0^2 \int_0^\tau \sin^2(\omega t - \phi) dt = r i_0^2 \int_0^\tau \frac{1 - \cos^2(\omega t - \phi)}{2} dt = \tau \frac{r i_0^2}{2}$$

et comme  $i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}}$ , il vient :

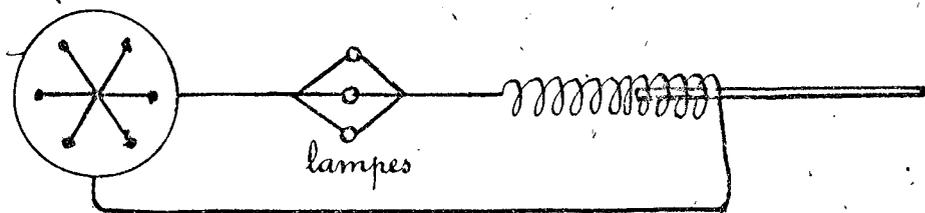
$$(244) \quad W = \frac{\tau r}{2} \frac{E_0^2}{r^2 + L^2 \omega^2}$$

La quantité de chaleur moyenne dégagée dans l'unité de temps est :

$$(245) \quad W' = \frac{W}{\tau} = \frac{r i_0^2}{2} = \frac{r}{2} \frac{E_0^2}{r^2 + L^2 \omega^2}$$

et nous voyons que, si la force électromotrice  $E_0$  reste fixe, l'échauffement est d'autant moindre que l'impédance est plus grande.

Ce résultat peut être vérifié par l'expérience suivante : on fait passer à travers un solénoïde le courant alternatif d'une machine industrielle servant à alimenter des lampes. Si l'on introduit progressivement dans le solénoïde



un barreau de fer doux, on voit l'éclat des lampes diminuer jusqu'à extinction.

La self  $L$  a augmenté et par suite  $L\omega$ , puisque la pulsation  $\omega$ , déterminée par la vitesse de rotation de la machine, est restée constante.

Ce phénomène est dû, non à une perte d'énergie, mais à un manque de transformation ; on empêche le courant de passer en produisant une force contre-électromotrice, et la machine n'a plus de travail à fournir.

## 164 Intensité efficace et force électromotrice efficace <sup>(1)</sup>

Evaluons la moyenne du carré de l'intensité pendant une période :

$$i_{\text{moy.}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{i_0^2}{2}$$

On appelle intensité efficace du courant alternatif la racine carrée de cette expression

$$(246) \quad i_{\text{eff.}} = \frac{i_{\text{max.}}}{\sqrt{2}}$$

$i_{\text{eff.}}$  est précisément la valeur du courant continu qui produirait dans une résistance  $r$  le même effet Joule que le courant alternatif considéré.

(1) D'après le cours de M<sup>r</sup> Le Lt-Col. Safay.

Il est évident que les galvanomètres basés sur l'expérience d'Oersted ou à cadre mobile dans un champ magnétique ne peuvent mesurer un courant alternatif dont l'intensité moyenne  $\frac{1}{T} \int i dt$  est nulle. Si dans ces appareils il se produit des  $^{\circ}$  déviations accidentelles, dues à des modifications du champ magnétique de l'instrument sous l'influence du courant alternatif, ces déviations n'ont aucun rapport de proportionnalité avec l'intensité.

Au contraire les électrodynamomètres permettent la mesure des courants alternatifs, car le couple de torsion est à chaque instant, proportionnel à  $i^2$ ; si donc la période d'oscillation du cadre mobile est longue par rapport à celle du courant étudié, la déviation subie est proportionnelle à  $i_{\text{moy}}^2$ . Le même appareil donnera donc  $i$  s'il s'agit d'un courant continu et  $i_{\text{eff}}$  s'il s'agit d'un courant alternatif, avec la même graduation dans les deux cas. Ses électrodynamomètres présentent toutefois l'inconvénient d'avoir une self qui n'est pas toujours négligeable.

Pour cette raison il est souvent préférable d'employer les appareils caloriques (N° 119)

On définit de même la différence de potentiel efficace entre deux points d'un circuit par la relation:

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{E_{\text{moy}}^2}$$

qui conduit à

$$(247) \quad E_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Si les deux points considérés sont réunis par un conducteur de grande résistance  $\rho$  sans self appréciable, l'intensité  $i$  du courant dérivé est, à tout instant, donnée par

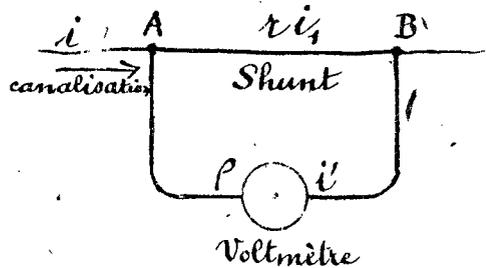
$$E = \rho i.$$

$$\text{D'où} \quad \sqrt{E_{\text{moy}}^2} = \rho \sqrt{i_{\text{moy}}^2}$$

$$(248) \quad E_{\text{eff}} = \rho i_{\text{eff}}$$

et l'on déduit  $E_{\text{eff}}$  de la mesure de  $i_{\text{eff}}$  dans ce conducteur.

C'est ce qu'on réalise pratiquement en dérivant le courant dans le fil très mince d'un appareil calorique qui joue alors le rôle de Voltmètre et peut naturellement être taré par comparaison en employant du courant continu.



Un voltmètre calorique peut d'ailleurs être transformé en ampèremètre par un shuntage peu résistissant.

Soit, à cet effet,  $r$  la résistance (sans self) du shunt. On a, en désignant par  $i_1$  l'intensité dans le shunt, et remarquant que la self d'un appareil calorique est généralement négligeable.

$$\psi_A - \psi_B = r i_1 = \rho i' = \frac{r\rho}{r+\rho} i$$

et par suite :

$$(\psi_A - \psi_B)_{\text{eff}} = \frac{r\rho}{r+\rho} i_{\text{eff}}$$

Il suffit donc de multiplier le nombre indiqué par l'instrument par  $\frac{r+\rho}{r\rho}$  pour avoir l'intensité efficace du courant total  $i$ .  $r\rho$  qui circule dans la canalisation.

On peut également mesurer une différence de potentiel efficace en employant l'électromètre à quadrants que nous étudierons en électrostatique.

## 165 - Puissance moyenne du courant alternatif -

L'énergie dépensée dans un conducteur pendant le temps  $dt$  est  $E \cdot i \cdot dt$ .

Choisisant convenablement l'origine des temps, nous pouvons écrire :

$$E = E_0 \sin \omega t ; \quad i = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

avec :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r} \quad (\text{formule 240, N}^\circ 161)$$

L'énergie moyenne dépensée pendant une période est la puissance moyenne.

$$W = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E i dt = \frac{E_0 i_0}{\tau} \int_0^\tau \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt = \frac{E_0 i_0}{\tau} \int_0^\tau \frac{\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)}{2} dt$$

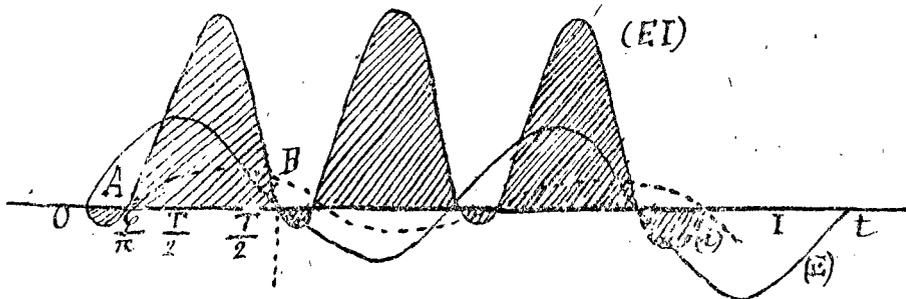
$$(249) \quad W = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \frac{i_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi = E_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \varphi$$

1<sup>re</sup> Division Physique 1920-21

78<sup>e</sup> feuille

On donne à la différence de phase  $\varphi$  le nom de facteur de puissance, et l'on voit que, pour augmenter la puissance il y a intérêt à diminuer  $\varphi$  le plus possible, c'est-à-dire à se rapprocher de la condition de résonance. (1)

Il est facile de se rendre compte de ce qui se produit en construisant le graphique de  $E$  et de  $i$ , et celui de la courbe dont l'aire élémentaire représente le produit  $E \cdot i \cdot dt$ .



Chaque demi-période se subdivise en deux parties :  $\frac{\varphi}{\pi} \frac{T}{2}$  et  $(1 - \frac{\varphi}{\pi}) \frac{T}{2}$  ; dans la première  $i$  et  $E$  sont de signes contraires et le système cède de l'énergie, tandis qu'il en reçoit pendant la

seconde.

Si  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  l'énergie échangée est nulle et le système est comparable à un ressort parfaitement élastique périodiquement bandé puis détendu.

C'est en particulier ce qui se produit dans l'expérience du N° 163. En augmentant la self, on augmente  $\varphi$ , et le circuit restitue à la machine une fraction de plus en plus grande de l'énergie qu'elle lui envoie, de sorte que les lampes s'éteignent.

Un électrodynamomètre, (de self aussi petite que possible), disposé en wattmètre, permet évidemment l'évaluation de la puissance moyenne, et l'on voit que, dans le cas des courants alternatifs, les indications (Watts) de cet appareil ne sont plus égales au produit des indications correspondantes de l'ampèremètre et du voltmètre.

Le quotient  $\frac{W_{\text{eff}}}{E_{\text{eff}} i_{\text{eff}}} = \cos \varphi$  mesure le facteur de puissance.

## 166 - Courant watté et courant déwatté -

La puissance  $E_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \varphi$  peut être considérée comme le produit du vecteur représentatif de  $E$  par la projection

(1) Bien remarquer que l'absence de condensateur dans un circuit équivaut, non pas à  $C = 0$ , mais à  $C = \infty$

sur sa direction du vecteur qui représente  $i$ .

L'intensité  $i$  peut être décomposée en deux composantes : l'une OD, parallèle à  $E$ , c'est-à-dire ayant même phase que  $E$ ; l'autre DB, normale à  $E$ .

La composante OD représente le courant watté, de la grandeur duquel dépend la mise en jeu d'un nombre plus ou moins considérable de Watts.

La composante DB qui ne correspond à aucun travail est le courant déwatté.

Il y a lieu de remarquer que si la puissance moyenne du courant déwatté est nulle, il n'en est pas de même de cette puissance à un instant quelconque. L'énergie correspondant au temps  $dt$  est, en effet :

$E_0 \sin \omega t i_0 \sin \phi \cos \omega t dt = E_0 i_0 \sin \phi \sin 2\omega t dt$   
Elle est alternativement positive et négative, tandis que l'énergie  $E_0 i_0 \cos \phi \sin^2 \omega t dt$  du courant watté a constamment le même signe.

Le courant déwatté correspond à un échange périodique d'énergie entre la source et le champ magnétique produit par le circuit.

La plus grande valeur de l'énergie échangée s'obtient en intégrant de 0 à  $\frac{\tau}{4}$  l'expression ci-dessous :

$$\int_0^{\frac{\tau}{4}} E_0 i_0 \sin \phi \sin 2\omega t dt = E_0 i_0 \sin \phi \left( \frac{-\cos 2\omega t}{2\omega} \right) \frac{\tau}{4} = \frac{E_0 i_0 \sin \phi}{2\omega}$$

et en remarquant que dans un circuit dénué de capacité  $E_0 \sin \phi = L \omega i_0$ , cette expression devient  $\frac{1}{2} L i_0^2$  qui représente bien l'énergie emmagasinée dans le circuit lorsqu'il est porté à son maximum d'aimantation.

Le courant watté correspond, au contraire, à l'énergie absorbée par l'effet Joule et par le travail extérieur.

## 167 - Courant alternatif non sinusoïdal -

Si au lieu d'avoir la forme sinusoïdale, les forces électromotrices mises en jeu dans un circuit sont des forces périodiques quelconques de même période  $\tau$ , on peut les développer en série de Fourier et calculer séparément les intensités qui correspondent aux termes sinusoïdaux de périodes  $\tau, \frac{\tau}{2}, \dots, \frac{\tau}{n}, \dots$  etc qui figurent dans ces développements ; la possibilité d'opérer de cette manière résulte

de ce que l'équation différentielle qui lie l'intensité  $i$  à la force électromotrice  $E$  est linéaire et à coefficients constants. L'intensité totale est la somme des intensités ainsi calculées, et s'exprime également en série de Fourier, avec la même période fondamentale  $\tau$ .

On a pour  $E$  et  $i$  des expressions de la forme :

$$(250) \quad \begin{cases} E = \sum_{n=1}^{n=\infty} E_n \sin(n\omega t - \varphi_n) \\ i = \sum_{n=1}^{n=\infty} i_n \sin(n\omega t - \chi_n) \end{cases}$$

Si nous considérons le cas d'un circuit unique de résistance ohmique  $r$  et de self  $L$ , l'impédance  $\sqrt{r^2 + L^2 n^2 \omega^2}$  est d'autant plus forte que l'ordre de l'harmonique est plus élevé. Il en résulte que la courbe représentative de  $i$  est plus voisine d'une sinusoïde que ne l'est la courbe des forces électromotrices.

On exprime ce fait en disant que la self étouffe les harmoniques élevées.

Le calcul de la puissance moyenne transmise  $W = \frac{1}{\tau} \int E i dt$  ne présente pas de difficultés. Dans le produit  $E i$ , les termes de même indice sont les seuls dont l'intégrale ne soit pas nulle, et l'on a par exemple,

$$\frac{1}{\tau} \int E_n i_n \sin(n\omega t - \varphi_n) \sin(n\omega t - \chi_n) dt = \frac{E_n}{\sqrt{2}} \frac{i_n}{\sqrt{2}} \cos(\chi_n - \varphi_n)$$

La puissance moyenne est la somme des puissances moyennes correspondant à chaque harmonique pris isolément.

Il est à remarquer que la différence de phase  $(\chi_n - \varphi_n)$  est d'autant plus grande que la réactance est plus forte, c'est-à-dire que l'ordre de l'harmonique est plus élevé. Il y a tout intérêt à éviter la production des harmoniques qui donnent une perte calorifique sans compensation appréciable.

Nous avons supposé qu'il n'y a pas de condensateur dans le circuit ( $C = \infty$ ). C'est le cas le plus fréquent dans les canalisations industrielles.

S'il y avait un condensateur, un harmonique pourrait avoir une action prépondérante au cas où sa période se trouverait voisine de la période de résonance.

# Chapitre VI

## Applications des phénomènes d'induction. <sup>(1)</sup>

### § 1. Machines à courant continu.

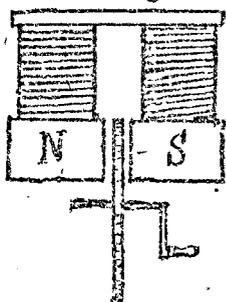
#### 168. ~ Courants de Foucault. ~

Avant d'aborder l'étude des machines il importe d'indiquer une cause de dégradation de l'énergie due aux courants induits.

Lorsqu'une variation de flux se produit dans une masse métallique, des courants induits se développent. Ces courants portent le nom de courants de Foucault.

Ces courants échauffent la masse (loi de Joule) et le conducteur subit des forces qui, conformément à la loi de Lenz s'opposent au mouvement ou à la variation du flux.

On peut mettre ces effets en évidence par exemple en faisant



tourner un disque de cuivre (disque de Foucault) entre les pôles d'un électro-aimant; on éprouve une résistance notable en même temps qu'on constate un échauffement du conducteur.

La chaleur  $Q$  dégagée dans un circuit pendant le temps  $dt$  est proportionnelle au quotient du carré de la force électromotrice

(1) D'après le cours de M. le Lt Colonel Lafay.

par la résistivité du métal car les relations  $Q = r i^2$  et  $E = r i$  conduisent à  $Q = \frac{E^2}{r}$ ; on aura donc dans le cas actuel :

$$dQ = A \frac{1}{r} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 dt$$

D'ailleurs dans l'expérience de Foucault et pour tous les dispositifs similaires  $\frac{dQ}{dt}$  est proportionnel à la vitesse de déplacement du conducteur dans le champ; la chaleur dégagée varie donc comme le carré de la vitesse de rotation des disques.

Soit  $C$  le couple de freinage qu'il faut vaincre pour entretenir une rotation de vitesse angulaire  $\omega$ ; en écrivant que le travail dépensé  $C \omega dt$  est transformé en chaleur, on obtient une équation de la forme:

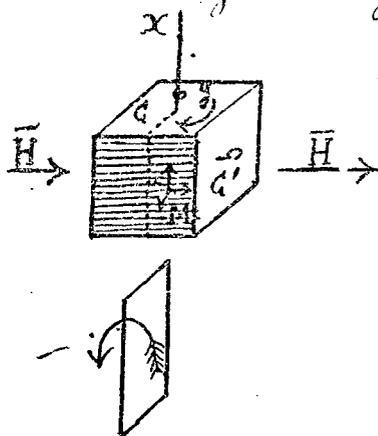
$$C \omega dt = B \omega^2 dt$$

Le couple  $C = B \omega$  est donc proportionnel à la vitesse de rotation.

Dans l'industrie, il importe d'éviter le plus possible les courants de Foucault; on y parvient généralement en subdivisant continuellement les corps conducteurs qui peuvent en être le siège.

Le principe des dispositions adoptées pour cela dérive d'une expérience de Faraday.

Considérons un cube de cuivre tournant autour d'un axe vertical  $x y$  dans un champ  $H$  que nous supposerons horizontal.



Un élément quelconque  $M$  dont la vitesse est  $\vec{v}$  est le siège d'une force électromotrice qui tend à produire un courant ayant même sens

que le vecteur produit  $[\vec{v} \ H]$ .

La masse du cube sera donc parcourue par des courants ascendants dans sa partie droite (cas de la figure) et descendants dans l'autre région.

Imaginons que ce cube soit constitué par un grand nombre de lames de cuivre horizontales superposées et séparées par un isolant, les forces électromotrices élémentaires ne pourront plus ajouter leurs effets et les courants induits disparaîtront presque

complètement.

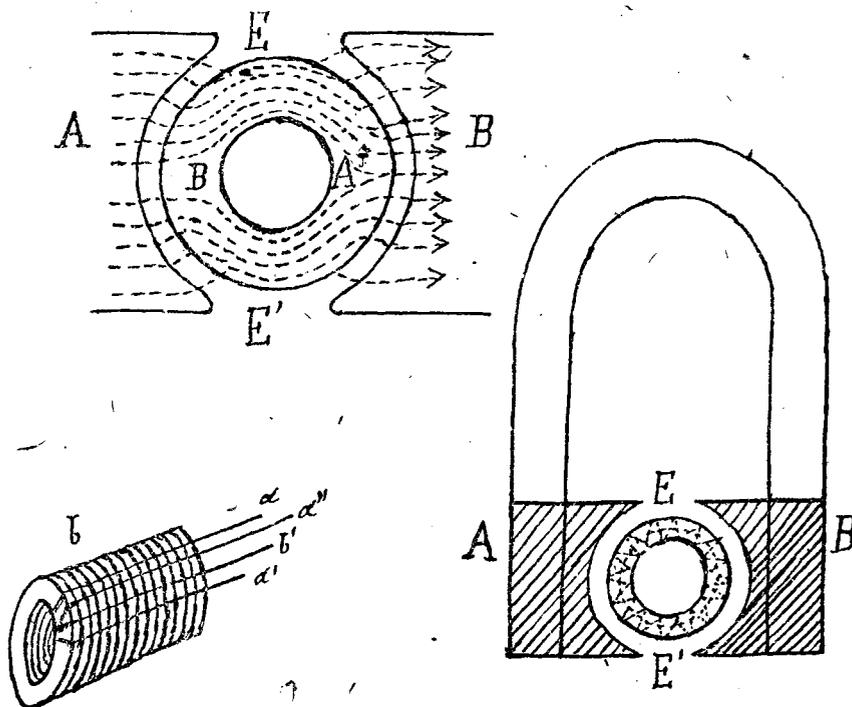
Il n'en serait plus de même si les cloisons étaient normales à  $M$ .

Si les courants de Foucault sont à éviter dans les machines industrielles à cause de la dégradation de l'énergie, ils sont, par contre, utilisés souvent pour amortir le mouvement d'organes mobiles.

## 169. ~ Machine magnéto-électrique de Gramme. ~

L'application industrielle la plus importante de la découverte de Faraday a été la réalisation de machines permettant d'utiliser le travail mécanique pour produire des courants et inversement.

On a d'abord recherché et obtenu le redressement des des deux courants inverses qui se produisent dans un circuit induit animé d'un mouvement périodique dans un champ inducteur fixe. On a réalisé ainsi des machines donnant un courant toujours de même sens.



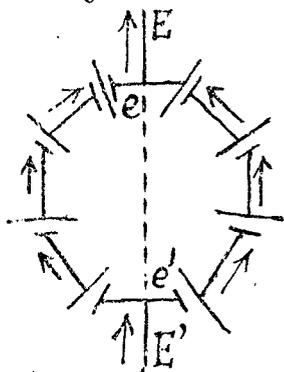
Dans la machine de Gramme, le champ est produit par un aimant en fer à cheval armé de pièces polaires qui présentent un évidement cylindrique.

À l'intérieur de cet espace se meut un anneau dont l'axe de rotation coïncide avec celui de la cavité cylindrique et qui porte les circuits induits. Il est constitué par la juxtaposition d'anneaux lamellaires (0<sup>m</sup>5) en tôle de fer doux, ou par un simple enroulement de fils de fer isolés de manière à éviter les courants de Foucault.

Cet anneau s'aimante par influence et sert de support au circuit magnétique de manière à concentrer le champ accessible dans l'entrefer annulaire qui le sépare des pièces polaires de l'aimant.

Dans cet entrefer les lignes de force sont sensiblement perpendiculaires aux génératrices du cylindre et convergent vers l'axe de l'anneau. Autour de l'anneau est enroulé le fil induit  $a b c d$ ,  $a' b' c' d'$  suivant une série de spires parallèles aux génératrices du cylindre et par suite perpendiculaires aux lignes de force du champ ainsi qu'au déplacement produit par la rotation de ce cylindre autour de son axe. Les extrémités de chaque spire sont à des potentiels différents; on réunit ces spires bout à bout de façon à les mettre en tension. Or, d'un côté à l'autre du plan médian  $E E'$  la force magnétique change de signe, et la force électromotrice induite change de sens.

Un circuit comprenant toutes les spires ne serait donc le siège d'aucun courant puisqu'il se trouverait un égal nombre de spires de chaque côté.



On place alors le circuit extérieur en dérivation sur le circuit extérieur en dérivation sur le circuit intérieur aux points  $e$  et  $e'$ .

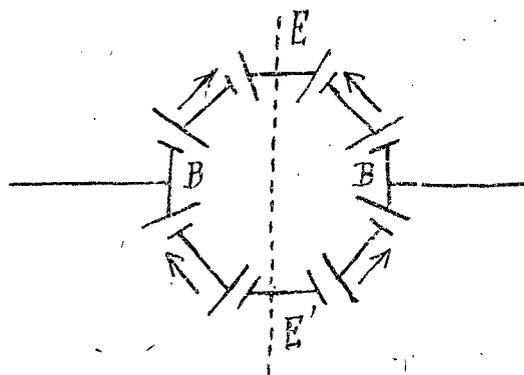
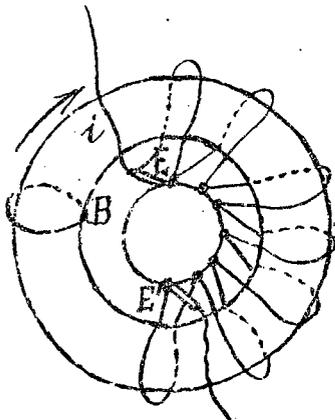
Les pôles opposés de deux spires consécutives sont réunis à une même touche en cuivre placée sur l'axe de rotation. Ces touches sont isolées entre elles et isolées de l'axe; elles constituent le collecteur: de cette manière, les forces électromotrices de chaque moitié de l'anneau s'ajoutent et il y a produc-

tion d'un courant allant de  $E'$  en  $E$  dans chacune de ces moitiés.

C'est en  $E'$  et en  $E$  qu'aboutissent les deux extrémités du circuit extérieur. Tout se passe comme si on accouplait en surface deux séries de piles montées elles-mêmes en tension.

Le courant est recueilli par deux balais conducteurs qui frottent sur la surface du cylindre collecteur formé par les touches de cuivre; le contact a toujours lieu aux deux points où la force électromotrice change de signe, c'est à dire dans une

position telle que toutes les forces électromotrices de toutes les spires s'ajoutent dans chaque moitié de l'anneau.



Si, en effet, on prenait les contacts sur le diamètre normal au diamètre  $E E'$ , on n'aurait aucun courant (fig. ci. contre). La force électromotrice induite dépend de la variation du flux. Soit  $\phi$  le flux total qui pénètre dans l'anneau de fer doux et qui s'y divise en deux branches égales.

En  $E'$ , une spire embrasse le flux  $\frac{\phi}{2}$  en B un flux nul et en  $E$  un flux  $-\frac{\phi}{2}$  qui a même valeur qu'en  $E'$  mais pénètre par la face opposée.

Si  $T$  est la durée d'un tour, autrement dit si  $N = \frac{1}{T}$  est le nombre de tours par  $T$  seconde, la variation de flux à travers cette spire sera  $\phi$  en  $\frac{1}{N}$  seconde et par

suite la force électromotrice moyenne sera  $2 \frac{\phi}{T} = 2 N \phi$ .  
Si  $n$  est le nombre total des spires et qu'il y en a  $\frac{n}{2}$  de chaque côté, la force électromotrice de la machine sera

$$E = \frac{n}{2} \cdot 2 N \phi = N n \phi \text{ (c.g.s.) ou } 10^{-8} N n \phi \text{ Volts.}$$

Soient  $R$  et  $r$  les résistances du circuit extérieur et du circuit formé par l'ensemble de toutes les spires, l'intensité est.

$$i = \frac{E}{R+r} = \frac{N n \phi}{R+r} \quad (1)$$

On a intérêt à augmenter  $\phi$ , ce qu'on obtient avec des aimants donnés en diminuant l'entrefer, mais alors l'espace où se meuvent les fils induits se rétrécit ce qui diminue le nombre de spires qu'on peut superposer. Il y a donc un maximum

(1) Remarque que le circuit intérieur est formé de deux branches ayant des conductances égales à  $\frac{1}{2R}$ .

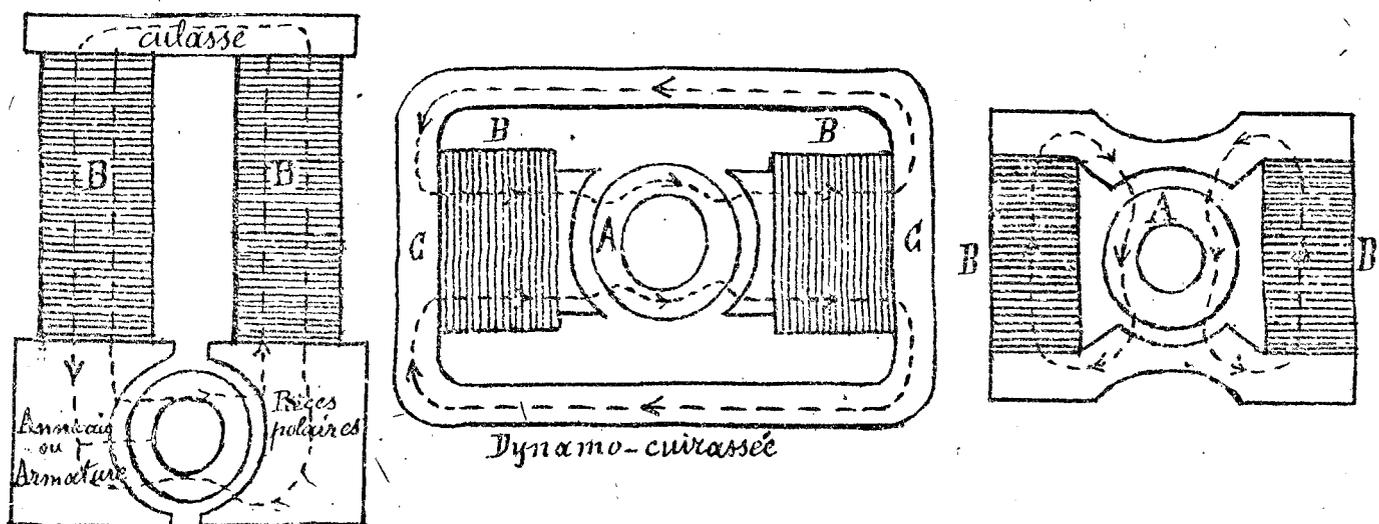
qu'on ne peut pas dépasser et que la pratique a rapidement indiqué.

Il est bien évident que  $E$  et  $i$  ne sont pas absolument constantes; elles subissent des variations périodiques dont la période est égale au temps qu'une touche du collecteur met à se substituer à sa voisine.

## 170. ~ Machines Dynamo-électriques. ~

Le champ des aimants permanents est faible (800 gauss). On leur a substitué des électro-aimants (4.000 à 5.000 g. dans l'entre-fer). Les machines sont alors appelées dynamos.

Le système inducteur est constitué par une carcasse en fer dans laquelle on provoque un flux en lançant un courant dans les bobines  $B$ .



Le circuit magnétique completé par l'anneau  $A$  (armature) traverse l'entrefer cylindrique dans lequel se déplace l'induit.

Le type représenté rappelle la forme d'un électro-aimant ordinaire; le second (type cuirassé) a l'avantage de placer les bobines inductrices  $B$  près de l'entrefer ce qui diminue les pertes de flux utile. Dans le troisième type les forces magnétomotrices des bobines  $B$  sont en parallèle au lieu

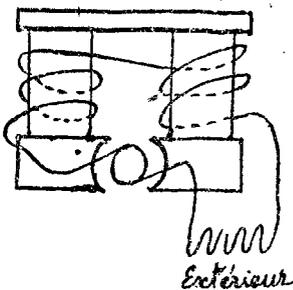
d'être en série.

Le courant des bobines B peut être emprunté à une batterie d'accumulateurs mais on peut employer un courant produit par la machine qui est alors auto-excitatrice.

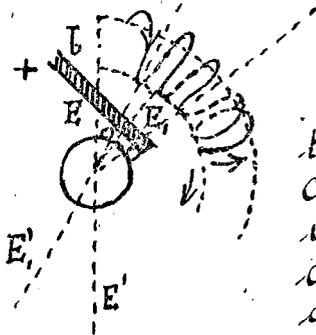
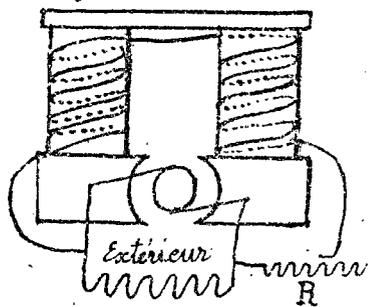
Au moment de la mise en marche, le magnétisme rémanent amorce la machine et le courant de plus en plus fort produit par la machine elle-même augmente progressivement le champ inducteur jusqu'à ce que l'état de régime soit atteint.

L'auto-excitation peut être obtenue de trois manières.

(1) Dynamo Série



(2) Dynamo Shunt



1°) Dynamo en série. - On fait circuler dans les bobines B la totalité du courant envoyé dans le circuit extérieur; le fil est gros et court de manière à supporter un courant intense sans échauffement exagéré

2°) Dynamo-shunt. L'enroulement des bobines B est en fil fin et long et on y fait passer un courant dérivé sur le circuit extérieur. Une résistance variable R sur le circuit inducteur permet de régler le fonctionnement.

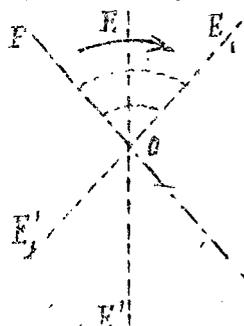
3°) Dynamo-compound. - Dans deux enroulements circulent respectivement un courant dérivé et un courant total.

Coilage des balais. — Si dans une machine débitant du courant on place les balais sur la verticale  $EE'$  (comme nous l'avons précédemment supposé), on constate la production de fortes étincelles qui ne tarderaient pas à détériorer le collecteur. La cause est la self des enroulements partiels respectivement compris entre deux touches consécutives du collecteur. En effet, lorsqu'un tel enroulement traverse la ligne  $EE'$  de commutation le courant dont il est le siège doit passer brusquement de  $i$  à  $-i$  puisque,  $i$  étant l'intensité du courant extérieur, les spires de l'induit situées de part et d'autre de  $EE'$  sont à tout instant traversées par des courants égaux et de sens

contraires.

Il faut donc permettre la dissipation de l'énergie  $\frac{1}{2} L i^2$  due à la self  $L$  de l'enroulement partiel considéré. On y parvient en employant des balais qui sont en contact simultanément avec deux touches consécutives du collecteur. De cette manière, chaque enroulement partiel est mis pendant un certain temps en court-circuit lors de son passage sur la ligne de commutation.

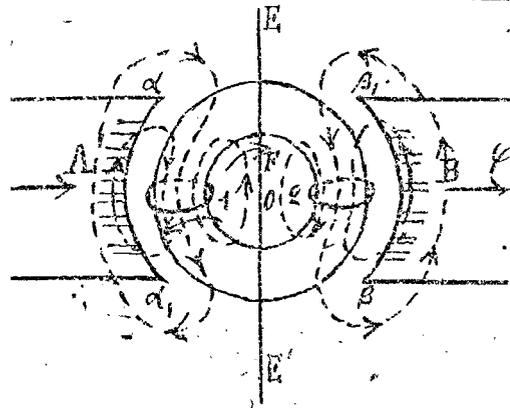
Mais il faut également éviter l'extra-courant de fermeture qui se produirait si les spires ramenées à l'état neutre étaient subitement introduites dans la partie du circuit. Pour cela on a été conduit à déplacer, à décaler la ligne de commutation dans le sens du mouvement de rotation et à l'amener en  $E'E$ . De cette manière, pendant le temps où les spires sont en court-circuit, elles sont déjà le siège d'une force électromotrice qui tend à y produire un courant de même sens que celui qui doit les parcourir un instant après.



L'angle  $E_1 O E$  est l'angle de calage. Il doit varier avec  $i$ ; aussi les balais sont-ils portés par des supports qui permettent de les déplacer en laissant leurs points de contacts à  $180^\circ$  l'un de l'autre. On règle pratiquement leur position de manière à avoir le crachement minimum.

Il y a évidemment avantage à diminuer l'angle de calage car si l'on considère l'angle compris entre  $E_1 O$  et la droite  $OF$  symétrique, le flux coupé par l'induit lorsqu'il parcourt l'arc  $FE_1$  est sans effet utile, puisqu'il développe de part et d'autre de  $EE'$  des forces opposées.

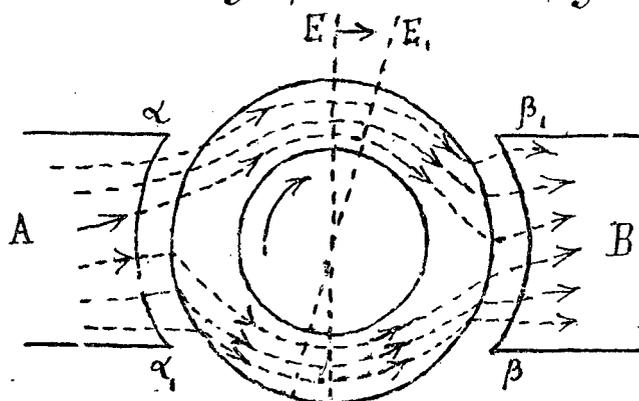
#### Distorsion du champ.



Un autre effet nuisible est dû à une déformation du champ qui résulte de la superposition de celui produit par le système inducteur et de celui qui est créé par le courant dans l'induit.

Occupons nous de ce dernier champ, et supposons, pour simplifier, la ligne de commutation verticale; il est facile de voir (figure) que si le flux inducteur a pour direction générale  $AB$  et

si l'anneau se meut dans le sens de la flèche  $F$ , toutes les spires à gauche de  $EE'$  seront traversées par des courants tels que (1) et donneront un champ dont l'allure générale est indiquée en pointillé. Les spires de droite produisent un champ qui est l'image du premier par rapport à  $EE'$ .



Le flux sera donc augmenté dans les régions  $\alpha$  et  $\beta$  et diminué en  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ ; cette déformation a pour effet de déplacer dans le sens du mouvement la direction pour laquelle le flux embrassé par la spire est maximum. L'existence de ce champ exigerait donc à elle seule le décalage de la ligne de commutation dans le sens du mouvement. Elle a aussi pour effet de diminuer la force électromotrice (résultat à prévoir d'après la loi générale de Lenz). On a donc tout intérêt à diminuer le champ produit par l'induit. Un procédé consiste à sectionner les pièces polaires A et B par des plans parallèles à l'axe de l'induit et au flux inducteur  $\varphi$ . Ces sections ne diminuent pas la perméabilité pour le flux utile  $\varphi$  et augmentent la réluctance rencontrée par le flux nuisible.

Cet effet nuisible appelé réaction d'induit, croît comme l'intensité du courant de l'induit et l'un des buts du compoundage est précisément d'augmenter en même temps l'intensité du champ inducteur utile, de manière à produire une sorte de compensation.

## 171. ~ Réversibilité des machines à courant continu. ~

Ces machines peuvent en général être employées à transformer l'énergie électrique en travail.

Le courant  $i$  produit par une génératrice quelconque engendre dans la réceptrice des actions électrodynamiques qui mettent l'anneau en mouvement. D'après la loi de Lenz il y a production d'une force électromotrice inverse

de celle qui donnerait naissance à un courant induit de même intensité si la machine fonctionnait comme génératrice.

Le courant étant inverse, il y a lieu de décaler les balais en sens contraire de celui de la marche.

La puissance a pour mesure  $Ei$ .

L'emploi de dynamos associées permet le transport de l'énergie. Soient  $E$  la force électromotrice de la génératrice,  $e$  celle (inverse) de la réceptrice,  $R$  et  $r$  leurs résistances,  $\rho$  la résistance extérieure, on a :

$$i = \frac{E - e}{R + r + \rho}$$

et la chaleur dégagée dans les conducteurs est :

$$(R + r + \rho) i^2 = (E - e) i$$

Soient  $T_m$  le travail moteur,  $T_r$  l'énergie récupérée dans la génératrice. Chacune des machines étant en régime permanent,  $i$  est constant. La force électromotrice développée est égale au flux total coupé dans l'unité de temps. Or le travail des forces électrodynamiques pendant le même temps s'obtient en multipliant ce même flux par  $i$ . On a donc :

$$T_m = Ei \quad ; \quad T_r = ei$$

$$T_m - T_r = (E - e) i = (R + r + \rho) i^2$$

Ce qui a disparu comme travail représente précisément la chaleur dégagée, ce qui était à prévoir d'après la loi de la conservation de l'énergie.

Le rendement.

$$\frac{T_r}{T_m} = \frac{e}{E} = \frac{E - i(R + r + \rho)}{E}$$

est d'autant meilleur, pour une même résistance totale que  $E$  est plus grand.

## {2 Alternateurs et transformateurs.

### 172. ~ Alternateurs. ~

On peut utiliser directement les courants périodiques qui sont le résultat immédiat des phénomènes d'induction. Les alternateurs utilisent presque tous le passage alternatif de pôles magnétiques inducteurs de noms contraires devant les bobines qui portent le circuit induit.

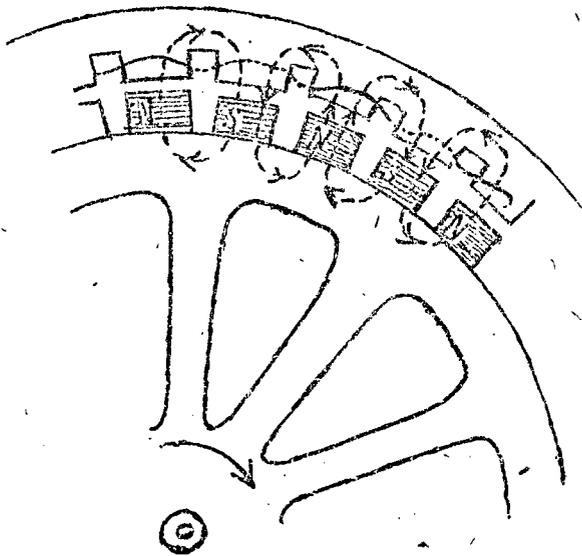
On emploie des électro-aimants entretenus par le courant continu produit soit par une batterie, soit par une dynamo auxiliaire.

Comme il est plus commode de transmettre un courant continu par des bagues placées sur l'axe de rotation d'une machine que d'employer des bagues analogues pour recueillir, à l'aide de balais, le courant alternatif produit, ce sont ordinairement les inducteurs qui sont mobiles.

Les machines ont la disposition de principe représentée ci-dessus, et le flux circule (lignes pointillées) à travers des masses de fer qui ne laissent entre elles que l'entrefer juste nécessaire pour permettre la rotation des inducteurs.

Le fil induit (un seul tour de fil est indiqué sur la figure) circule dans des encoches pratiquées dans la couronne fixe extérieure.

Pour éviter les courants de Foucault dans le fer de l'induit, il y a lieu de feuilletter ce dernier en le constituant par des tôles dont les faces juxtaposées sont normales à



l'axe de rotation.

L'intervalle de temps,  $T$  que met l'inducteur à prendre, par rapport à l'induit, deux positions successives identiques, représente la période de la force électromotrice d'induction  $E$ , et nous pouvons toujours représenter celle-ci par la somme des forces, sinusoïdales qu'on obtient en développant en série de Fourier la fonction périodique du temps qui lui correspond.

Nous avons d'ailleurs vu qu'il y a intérêt à réaliser des alternateurs donnant une force électromotrice simplement sinusoïdale.

## 173. ~ Transformateurs. ~

Un des avantages que présentent les courants alternatifs sur les courants continus résulte de la facilité avec laquelle on peut transformer un courant de haut voltage  $E$  et de faible intensité  $i$  en un courant de bas voltage  $E'$  et de grande intensité  $i'$  (ou inversement).

Lorsqu'il s'agit en effet, de transmettre électriquement de l'énergie à grande distance, il convient de réduire autant que possible les pertes par effet Joule qui produit une dégradation proportionnelle à  $r$  et à  $i^2$  eff.

La longueur de la ligne étant donnée,  $r$  varie comme l'inverse de la section des conducteurs et par suite comme l'inverse du poids et du prix du métal. (1)

Une réduction de moitié sur la valeur de  $i$  correspond à un prix de revient quatre fois plus faible. Il y a donc intérêt à obtenir des forces électromotrices très élevées qui permettent de réduire la valeur de  $i$  correspondant à une puissance transmise  $Ei$  déterminée.

Pour l'utilisation on transforme de nouveau le courant en courant de bas voltage.

---

(1) Ceci n'est vrai qu'approximativement. Nous avons dit que le courant alternatif se concentre à la surface du conducteur et on peut compenser du cuivre avec des conducteurs creux dans le cas de fréquences élevées. Lorsque la fréquence est faible la résistance ohmique est pratiquement égale à la résistance effective et les considérations actuelles sont exactes.

Les transformateurs se composent d'un circuit primaire et d'un circuit secondaire enroulés sur un même noyau en fer doux de manière à avoir un coefficient d'induction mutuel le aussi élevé que possible.

Un courant alternatif lancé dans le primaire produit un courant alternatif dans le secondaire si celui-ci est fermé.

Soient à un instant quelconque,  $E$  la différence de potentiel aux bornes du primaire,  $i$  l'intensité dans le primaire,  $\Phi$  le flux qui le traverse,  $r$  sa résistance; désignons par  $E'$ ,  $i'$ ,  $\Phi'$ ,  $r'$  les mêmes grandeurs pour le secondaire. on a:

$$(251) \quad r i = E - \frac{d\Phi}{dt}; \quad r' i' = E' - \frac{d\Phi'}{dt}$$

Or le flux est pratiquement entièrement contenu dans le noyau de fer qui constitue un circuit magnétique fermé (sans entrefer).  $N$  et  $N'$  désignant les nombres d'enroulement du primaire et du secondaire,  $R$  la réluctance du circuit magnétique, ce flux a pour valeur:

$$\Phi = \frac{1}{R} (4\pi N i + 4\pi N' i') = \frac{4\pi}{R} (N i + N' i')$$

Les valeurs de  $\Phi$  et  $\Phi'$  sont  $N\varphi$  et  $N'\varphi$ . Si, (ce qu'on réalise à peu près) la perte en chaleur de Joule dans le circuit est négligeable devant la puissance transmise ( $r i^2$  et  $r' i'^2$  très petits devant  $E i$ ), les équations (251) deviennent

$$0 = E - N \frac{d\varphi}{dt}; \quad 0 = E' - N' \frac{d\varphi}{dt}$$

d'où

$$(252) \quad \frac{E}{E'} = \frac{N}{N'}$$

Ce rapport se nomme rapport de transformation.

Portant l'expression de  $\varphi$  dans l'une quelconque des équations (251), il vient:

$$r i = E - N \frac{4\pi N}{R} \frac{di}{dt} - N \frac{4\pi N'}{R} \frac{di'}{dt}$$

$N \frac{4\pi N}{R} = \frac{4\pi N^2}{R}$  est précisément le flux émis à travers son propre circuit par un courant d'intensité 1 circulant dans le primaire: c'est le coefficient de self  $L_1$  du primaire. De même  $\frac{4\pi N N'}{R}$  est le coefficient d'induction mu.

Quelle  $M$  des deux circuits et  $\frac{4\pi N^2}{l}$  est la self  $L'$  du secondaire.

Dans le cas actuel, on a  $L L' = M^2$ , le fait résulte de ce que nous avons supposé qu'il n'y a pas de fuite magnétique, c'est à dire que tout le flux se produit dans le fer et traverse toutes les spires des deux enroulements. Cette condition n'est jamais rigoureusement remplie; en réalité le flux moyen  $\frac{M i}{N'}$  produit à travers une spire du secondaire par le courant  $i$  du primaire est moindre que le flux  $\frac{L i}{N}$  que ce courant produit à travers une de ses propres spires ( $\frac{L}{M} > \frac{M}{N'}$ ); le rapport entre ces deux flux est un coefficient analogue à un coefficient d'Hopkinson

Posons  $\frac{L}{M} \frac{N'}{N} = v$  ;  $\frac{L'}{M} \frac{N}{N'} = v'$

on a:

$$1 - \frac{M^2}{L L'} = 1 - \frac{1}{v v'} = \sigma$$

Le coefficient  $\sigma$  a reçu le nom de coefficient de dispersion.

La pratique a montré qu'on peut réaliser des transformateurs dans lesquels les puissances fournie  $E i$  et transformée  $E' i'$  sont assez voisines pour qu'on puisse écrire

$$E i = E' i' \quad \text{et par suite} \quad N i = N' i'$$

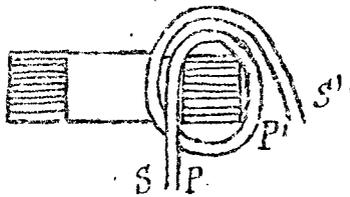
Les intensités sont donc sensiblement en raison inverse des nombres de tours.

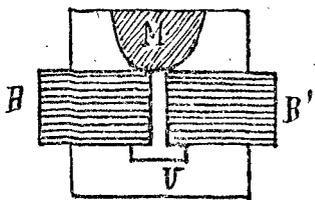
## 174. ~ Transformateurs industriels. ~

Les différences entre les divers types portent surtout sur la forme du noyau de fer. On a essayé depuis le simple noyau cylindrique jusqu'au tore creux

1°) Type à noyau. — Le circuit magnétique Ganz est constitué par un anneau formé d'un empilage de tôles. Les enroulements primaires  $PP'$  et secondaires  $SS'$  sont par couches alternées de manière à diminuer les fuites magnétiques; on conçoit en effet que le rapprochement des spires du second

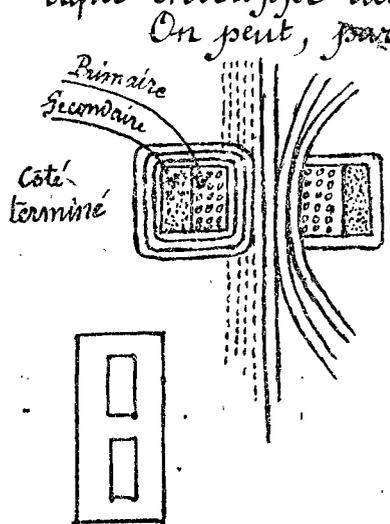
naire de celles du primaire permette d'utiliser aussi complètement que possible le flux produit par ce dernier.





L'enroulement, d'un fil sur un anneau fermé étant assez compliqué, on préfère dans certains appareils (Labour) placer des bobines B et B' sur les deux branches d'un Ven fer doux, qu'on ferme ensuite par l'introduction à force d'une masse de fer M.

2<sup>o</sup>) Type cuirassé. — Le circuit magnétique enveloppe des enroulements primaire et secondaire.



On peut, pour exemple, (Ferranti) exécuter les deux enroulements sur un paquet de tôles planes qu'on replie ensuite de chaque côté comme l'indique la partie gauche de la figure.

Dans d'autres transformateurs (Mordey) les tôles ont la forme représentée ci-contre et le fil est enroulé sur la branche médiane.

Reversibilité. — L'un des enroulements est à gros fil avec peu de spires, l'autre à fil fin et long. Suivant qu'on prend l'un ou l'autre pour primaire on élève ou on abaisse le voltage.

## 175. ~ Bobine d'induction. ~

Bien avant l'emploi des courants alternatifs Casson et Bréguet avait imaginé un appareil utilisant l'induction pour transformer en électricité à haute tension (voltage) l'électricité des piles.

L'appareil, perfectionné par Ruhmkorff, est la bobine d'induction; on peut l'assimiler à un transformateur dont le rapport de transformation serait considérable; mais tandis que les transformateurs ont pour but la transformation avec le moins de perte d'énergie possible, d'un courant sinusoïdal en un autre, la bobine est surtout utilisée pour l'obtention de différences de potentiel très élevées (du même ordre que celles des machines électrostatiques).

Le primaire est un solénoïde de gros fil de cuivre enroulé autour d'un faisceau cylindrique de fils de fer isolés par une couche de vernis.

Le secondaire comprend une série de bobines couplées en série, séparées les unes des autres par des cloisons isolantes. Le

fil est très fin ( $\frac{1}{2}$  de millimètre) et très long (150 à 200 Kilomètres par exemple) de manière à augmenter le nombre des enroulements sans trop éloigner les spires induites du noyau inducteur: une spire trop grande empiéterait en effet sur une trop grande partie du flux de retour qui est en sens inverse du flux du noyau.

Le cloisonnage évite les étincelles qui jailliraient entre des portions de fil présentant une grande différence de potentiel. La force électromotrice induite varie comme  $\frac{di}{dt}$ ,  $i$  étant l'intensité du primaire. On cherche à donner à  $\frac{di}{dt}$  la plus grande valeur possible.

L'intensité varie rapidement à la fermeture et à la rupture du circuit, surtout à la rupture qui donne une valeur de  $\frac{di}{dt}$  beaucoup plus élevée que celle de la fermeture (cette dernière ne peut dépasser  $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$   $L$  étant la self du primaire.

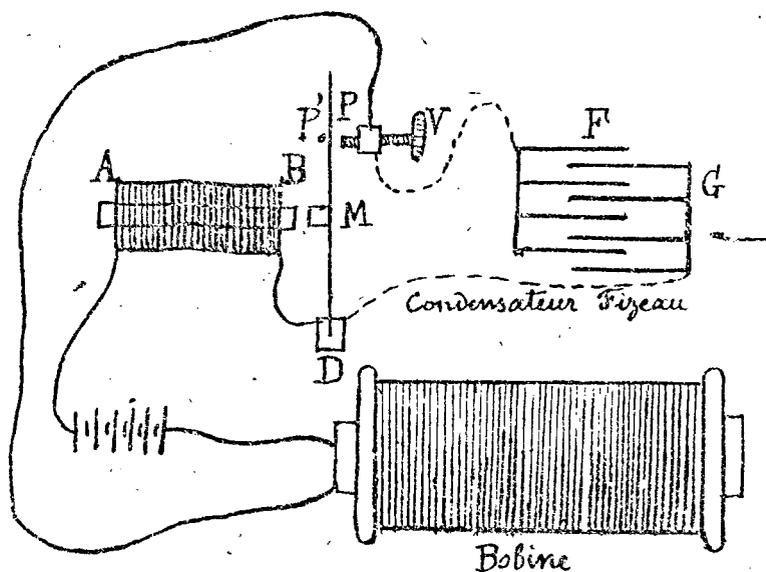
On utilise donc des interruptions du courant. Il se produit au point de rupture une étincelle d'extra-courant qui pendant un court instant permet la circulation de l'électricité; tout se passe comme si la résistance du circuit variait très rapidement de sa valeur actuelle jusqu'à une valeur infinie. Il y a intérêt à employer des interruptions permettant d'éloigner l'une de l'autre, avec une grande rapidité les parties métalliques du circuit entre lesquelles se produit la disjonction.

Nous ne décrivons pas les divers types d'interrupteurs. L'un des plus répandus est le trembleur, que chacun connaît; il

permet aisément plus de 100 interruptions par seconde.

### Condensateur

Fizeau. — La force électromotrice a été augmentée par le dispositif de Fizeau. Si un condensateur est intercalé entre les deux points  $P, P'$  où se produit la disjonction, l'étincelle d'extra-courant et considérablement



réduite, et la rupture du courant est plus rapide.

En effet les quantités d'électricité que la self tend à accumuler en P, et P' s'écoulent dans les armatures du condensateur; la différence de potentiel entre P et P' est donc abaissée et l'énergie dissipée sous forme d'étincelle de rupture diminue.

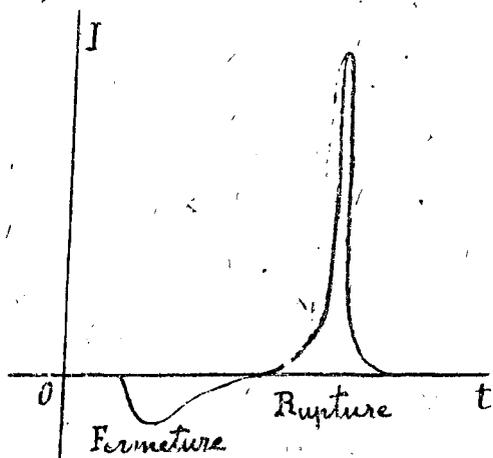
L'expérience montre bien que lorsque on intercale entre P et P' un condensateur de capacité variable, l'étincelle de rupture diminue à mesure qu'on augmente la capacité.

Mais d'autre part, si la capacité devient trop grande le courant continue à circuler dans le primaire pendant un temps appréciable car il doit fournir la quantité d'électricité nécessaire à la charge du condensateur, il en résulte que  $\frac{dI}{dt}$  n'a plus alors la grande valeur qu'il faut obtenir. On comprend donc qu'il y ait pour chaque mode d'interruption une capacité optimum et les constructeurs disposent leurs condensateurs de manière qu'on puisse faire varier la capacité.

Lord Rayleigh a montré que lorsque l'interruption est très brusque, comme cela a lieu quand on coupe le circuit à l'aide d'une balle de fusil, le condensateur devient nuisible.

Pour réduire davantage l'étincelle d'extra-courant on la fait jaillir dans un milieu isolant où la volatilisation des conducteurs métalliques est plus difficile que dans l'air. Foucault a le premier réalisé un interrupteur de cette nature, où la rupture se produit dans l'alcool entre une surface horizontale de mercure et une pointe de platine animée d'un rapide mouvement d'oscillation vertical.

Effet de la bobine. — Le circuit secondaire étant fermé les deux courants induits, l'un à la fermeture l'autre à la rupture du circuit inducteur passent alternativement et produisent des

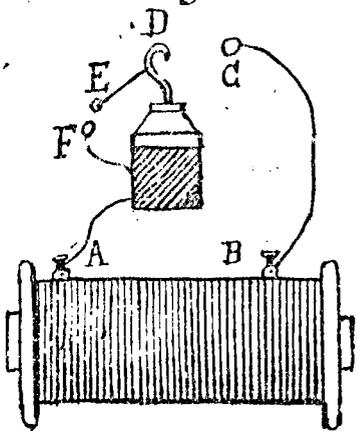


quantités d'électricité égales. La courbe représentative de l'intensité en fonction du temps dans le secondaire, est ainsi formée de deux boucles d'aires égales et de signes contraires, mais l'intensité du courant obtenu à la rupture atteint une valeur beaucoup plus grande que celle du courant de fermeture.

Si maintenant on coupe le secondaire, en y introduisant un éclateur, lorsque les boucles de l'éclateur sont très rapprochées les deux courants peuvent produire une étincelle; mais dès que la distance

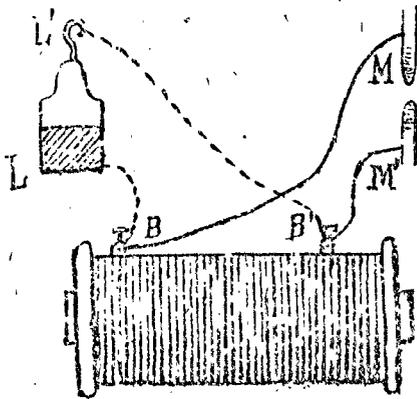
des boules devient suffisante, le courant de rupture seul donne lieu à une étincelle.

Les pôles A et B de la bobine peuvent ainsi jouer le même rôle que les pôles d'une machine électrostatique. On peut charger une batterie de bouteilles de Leyde en mettant la borne A en communication avec l'armature extérieure et la borne B avec la boule C située à une assez grande distance de la tige D communiquant avec l'armature interne D. De longues étincelles jaillissent entre C et D et la batterie se charge. Pour éviter une surcharge qui percerait le diélectrique, on dispose généralement deux boules E, F en communication respectivement avec l'armature interne et situées à une faible distance; la décharge de la batterie se fait automatiquement dès que la charge est suffisante.



Pour charger un condensateur d'une manière permanente, il convient d'employer un interrupteur qui ne soit pas trop rapide, sans quoi la fréquence des étincelles dans l'air qui environne la région CD aurait pour effet de rendre le gaz conducteur (ionisation) et une partie des charges acquises par les armatures de la bouteille se recombinerait à travers CD et le fil fin de la bobine.

Lorsque les pôles de la bobine sont réunis par des conducteurs aux armatures d'un condensateur, on obtient une étincelle beaucoup plus courte, mais beaucoup plus chaude que l'étincelle normale de la bobine. Il suffit pour cela d'unir les pôles B et B' à la fois aux armatures du condensateur et à des conducteurs M, M' assez rapprochés.



Cette étincelle, dite condensée, est utilisée en spectroscopie.

La production de l'étincelle condensée, est due au fait que les charges accumulées sur les armatures, L, L' éprouvent plus de facilité à se recombiner à travers le circuit L B M M' B' L', dont la self est négligeable, qu'à travers le long enroulement de la bobine qui a une self considérable.

## 176. ~ Courant de haute Fréquence. ~

Les courants de haute fréquence qu'on peut obtenir en utilisant la décharge d'un condensateur permettent de réaliser un certain nombre d'expériences caractérisées par ce fait que, ces oscillations étant extrêmement rapides, les effets d'induction deviennent considérables tandis que le rôle de la résistance ohmique est à peu près nul.

Si l'on fait passer la décharge oscillante d'un condensateur dans un circuit M. G. A. E. comprenant une partie bifurquée A formée, d'une part d'un gros arc métallique ABC, et d'autre part, d'un fil fin au milieu duquel est intercalée une petite lampe à incandescence, on constate que la self du circuit est suffisante pour maintenir entre A et C une différence de potentiel telle que la lampe s'allume (Elihu Thompson).

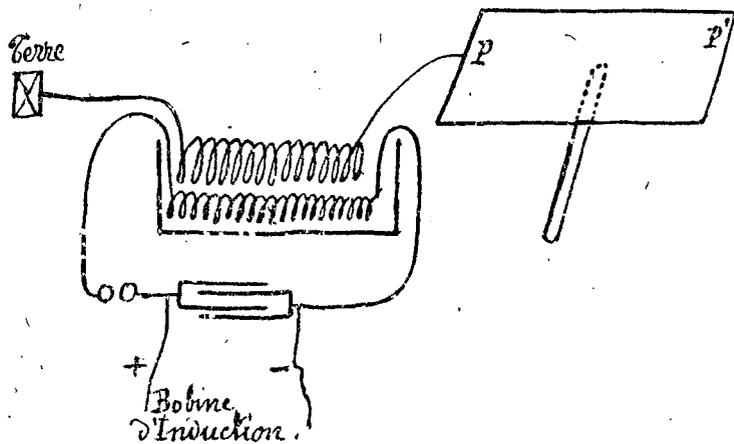
On peut également faire parcourir au courant de haute fréquence un solénoïde composé de quelques spires de gros fil; il suffit alors, pour produire l'allumage de la lampe, de l'intercaler dans une spire isolée unique S qui enveloppe ce solénoïde, ou qui même est simplement placée dans son voisinage, en S par exemple.

M. Tesla prenant ce solénoïde comme primaire d'un transformateur sans fer dont le secondaire est formé par une bobine de fil plus fin convenablement isolé (1) a pu obtenir des champs électriques oscillants extrêmement énergiques dans lesquels on peut produire l'illumination spontanée d'une tuile de Gassler.

Pour cela, on reunit, par exemple, l'un des pôles du secon-

(1) Un isolement convenable est obtenu en plongeant le transformateur tout entier dans de la valvoline.

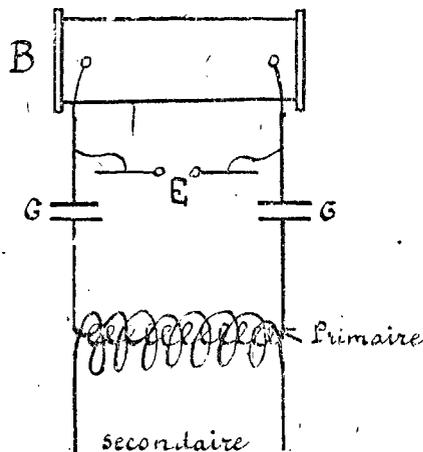
L'absence de noyau de fer doux dans ces transformateurs a pour but d'éviter que les coefficients de self et le coefficient d'induction mutuelle des deux enroulements ne prennent des valeurs exagérées incompatibles avec le passage d'un courant de haute fréquence.



daire au sol, tandis que l'autre extrémité est mise en communication avec une large plaque métallique P P'; le tube qu'on veut illuminer est placé entre cette plaque et le sol.

On peut encore employer le dispositif ci-contre lorsque les extrémités du secondaire sont réunies

aux branches d'un éclateur on constate de puissantes étincelles, mais ces décharges dont la période est de l'ordre du cent millionième de seconde (période de la décharge oscillante du condensateur), ne produisent plus de commotion physiologique - Elles ont même un emploi utile en médecine comme l'a montré M<sup>r</sup> d'Arsonval (d'Arsonvalisation).

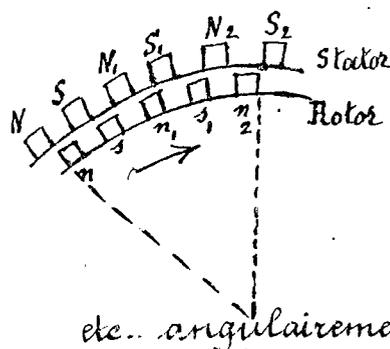


B bobine Ruhmköpfung  
G G condensateurs  
E éclateur

## §3 Courants polyphasés

177. ~ Utilisation des courants alternatifs pour la production d'énergie mécanique.  
Moteurs synchrones.

Les courants alternatifs peuvent être utilisés aussi aisément que les courants continus pour l'éclairage ou le chauffage, mais leur emploi est plus délicat quand il s'agit d'obtenir du travail mécanique. Il est théoriquement possible de faire tourner une dynamo en y lançant un courant alternatif puisque les champs développés dans l'inducteur et dans l'induit changent simultanément de sens, l'action électrodynamique sollicite les parties mobiles toujours dans le même sens et tend à provoquer la rotation. Cependant les moteurs basés sur ce principe ont un rendement défectueux.



on a été conduit à chercher d'autres solutions; l'une des premières a consisté à utiliser comme moteur un alternateur identique à celui qui produit le courant.

Le passage d'un courant dans le circuit fixe du stator d'un alternateur a pour effet de provoquer l'apparition de pôles nord et sud en des régions de sa circonférence  $N, S, N_1, S_1, N_2, S_2$ ; etc... angulairement équidistantes.

Lorsque ce courant est alternatif, les régions  $N, S$  permutent périodiquement en passant par une aimantation nulle; tout se passe comme si, au moment où le magnétisme s'annule, toute la couronne éprouvait subitement une rotation égale à l'angle  $\alpha$  qui sépare deux pôles, chaque pôle conservant dans ce mouvement fictif un magnétisme de signe invariable.

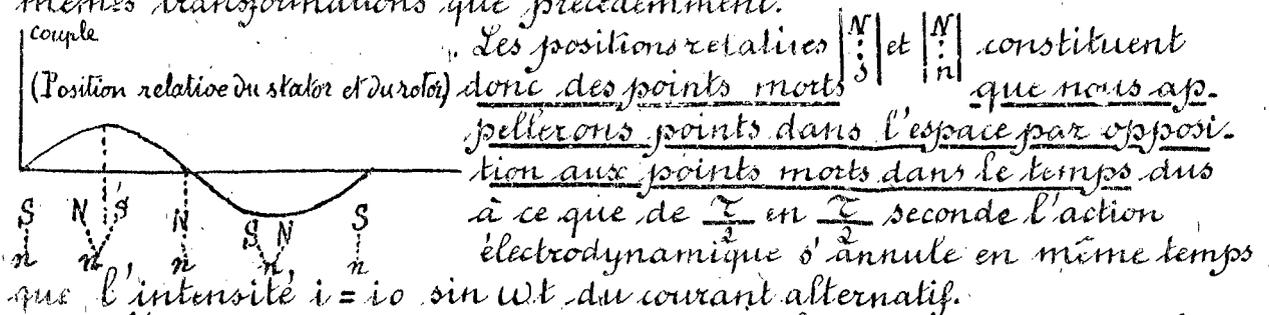
D'autre part, la partie mobile, ou rotor qui est alimentée par un courant continu présente sur sa circonférence des pôles, nord et sud,  $n, s, n_1, s_1$ , etc... etc... distants entre eux de l'angle  $\alpha$  et dont l'état magnétique est invariable.

Si à une certaine époque, les pôles  $N, S, N_1, S_1$ , etc...  $n, s, n_1, s_1$ , etc... occupent la situation relative indiquée sur la figure, il est évident que le rotor sera sollicité dans le sens de la flèche. Lorsque le temps  $\frac{T}{2}$  correspondant à une demi-période se sera écoulé, les pôles  $N$  seront devenus  $S$  et inversement, et si, pendant ce temps, le rotor a avancé de l'angle  $\alpha$ , la situation relative sera encore la même et le couple agissant ayant le même sens contribuera à entretenir le mouvement de la partie mobile, et à produire du travail.

La machine fonctionnera toutes les fois que le rotor avancera en moyenne d'un angle  $\alpha$  dans  $\frac{T}{2}$  seconde, c'est à dire fera le même nombre de tours que le rotor d'un alternateur identique employé comme générateur pour produire le courant utilisé. De là

le nom de  moteur synchrone  employé pour désigner ces machines.

Examinons les différentes positions relatives du rotor et du stator. Lorsque les pôles  $n$  et  $s$  ou  $n$  et  $N$  se font face, le couple agissant est évidemment nul par raison de symétrie; si ces pôles s'écartent angulairement, ce couple augmente pour passer par un maximum correspondant à l'angle  $\frac{\pi}{2}$  et diminue ensuite jusqu'à zéro quand  $n$  et  $N$ ,  $s$  et  $S$ , etc... sont vis à vis; le déplacement relatif continuant, le couple change de signe et subit en valeur absolue les mêmes transformations que précédemment.



Les positions relatives  $\left| \begin{smallmatrix} N \\ s \end{smallmatrix} \right|$  et  $\left| \begin{smallmatrix} N \\ n \end{smallmatrix} \right|$  constituent donc des  points morts  que nous appellerons  points dans l'espace par opposition aux points morts dans le temps  dus à ce que de  $\frac{T}{2}$  en  $\frac{T}{2}$  seconde l'action électrodynamique s'annule en même temps que l'intensité  $i = i_0 \sin \omega t$  du courant alternatif.

Nous verrons qu'on peut supprimer les points morts dans le temps. Occupons nous d'abord de l'influence des premiers.

## 178. ~ Décrochage des moteurs synchrones.

Supposons que la machine en marche ne travaille pas; le couple résistant appliqué au rotor étant faible, l'attraction des pôles  $n$  et  $s$  et la répulsion de  $N$  et  $n$  agissent concurremment pour amener et pour maintenir le rotor dans le voisinage de la

situation  $\left| \begin{smallmatrix} s \\ n \end{smallmatrix} \right|$ . Lorsque le couple résistant augmente, le rotor prend du retard par rapport au déplacement fictif des pôles du stator jusqu'à ce que le couple moyen agissant soit suffisant pour vaincre la résistance opposée; mais si cette dernière est trop considérable la position  $\left| \begin{smallmatrix} N \\ s \end{smallmatrix} \right|$  médiane se trouve franchie; le

couple agissant diminue, puis change de signe, le mouvement du rotor cesse d'être synchrone, les effets qu'exerce sur lui le stator sont alternativement égaux et de signes contraires et la machine s'arrête.

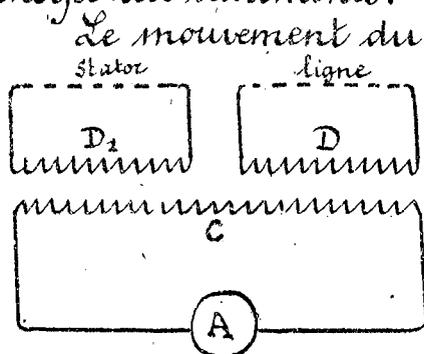
On dit qu'elle est décrochée; on voit qu'au moment de la mise en marche, le rotor étant au repos l'inertie est suffisante pour produire l'effet que nous venons de considérer.

comme résultat d'une augmentation du couple résistant et la machine ne fonctionne pas.

Pour la mise en marche, il est donc nécessaire d'accrocher le rotor, c'est à dire de lui communiquer une vitesse assez voisine de la vitesse de régime pour que le couple dû à l'action électrodynamique exercée par le courant alternatif qu'on va lancer dans le stator soit suffisant pour vaincre s'il y a lieu les effets de l'inertie et synchroniser le rotor.

Pour cette mise en mouvement, on se sert généralement de la dynamo auxiliaire dont le courant continu sert à produire le magnétisme constant  $n, s, n_1, s_1$ , etc.... de la périphérie du rotor.

Il faut alors savoir distinguer le moment où la vitesse du rotor est suffisante pour qu'on puisse y lancer utilement le courant alternatif fourni par la ligne. La solution est basée sur le principe des battements.



de même une dérivation  $D$  sur la ligne est le siège d'un courant :

$$i_1 = A_1 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T_1} - \varphi_1 \right)$$

de même une dérivation  $D$  sur la ligne est le siège d'un courant :

$$i = A \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right)$$

Employons ces deux dérivations pour induire un courant dans un même circuit  $G$ ; la force électromotrice induite sera la somme des forces électromotrices des périodes  $T_1$  et  $T$ , dues respectivement aux courants inducteurs  $D_1$  et  $D$ .

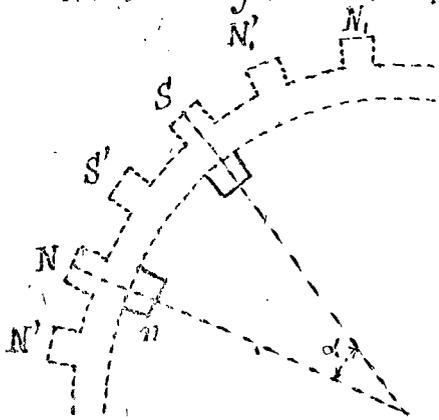
Lorsque par suite de la vitesse du rotor,  $T_1$  est suffisamment voisine de  $T$ , ces forces électromotrices se composent et donnent une force résultante qui passe lentement par des alternatives de maxima et de minima qu'on peut mettre en évidence en intercalant sur le circuit un ampèremètre ou un voltmètre thermique.

Pratiquement on emploie une lampe qui s'allume et s'éteint alternativement. Lorsque les alternances sont espacées

on est sur que les périodes  $T_1$  et  $T$  diffèrent peu et on profite de ce moment où la lampe est à son maximum d'éclat pour lancer le courant d'alimentation

## Fig. ~ Courants polyphasés - Moteurs à champ tournant. ~

Nous avons fait remarquer que de  $T$  en  $T$  seconde l'action du stator passait par zéro. On peut éviter qu'il en soit ainsi en faisant porter par cette partie de la machine deux enroulements identiques destinés à produire du magnétisme en des régions distantes de  $\frac{\pi}{2}$ .



Un  $\frac{1}{2}$  courant déterminé provoquera, par exemple, du magnétisme en  $N'SN_1S_1$  etc... quand on le lancera dans le premier circuit et en  $N'S'N_1'S_1$  etc... quand il passera dans le second.

Si, dans ces conditions, on fait passer dans chacun de ces enroulements des courants alternatifs de même période, mais présentant une différence de phase

$\varphi - \varphi' = \frac{\pi}{2}$ , l'action de l'un des circuits sera maximum quand l'autre passera par zéro et réciproquement. L'appareil ne présentera plus de point mort dans le temps. Ce système est dit diphase

On peut mettre sur le stator 3 enroulements identiques distants de  $\frac{\pi}{3}$  et y lancer des courants dont les phases diffèrent de  $\frac{2\pi}{3}$ , on a alors un système triphase etc...

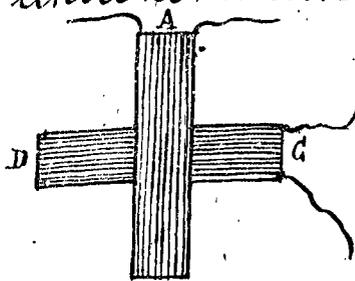
Pour produire ces courants polyphasés, il suffit évidemment d'employer comme générateur un alternateur qui porte 2, 3... etc... enroulements dans lesquels les pôles du rotor induisent des courants présentant entre eux les différences de phase voulues.

L'emploi des courants polyphasés donne plus de régularité dans le fonctionnement des moteurs, mais les difficultés de démarrage restent les mêmes et le travail demandé à la machine doit être assez constant pour ne pas provoquer sa désynchronisation.

En résumé les moteurs synchrones ne peuvent être employés utilement que pour effectuer un travail régulier. S'il

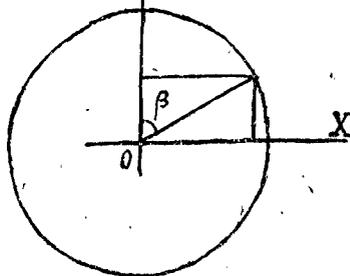
n'en est pas ainsi, il convient d'utiliser les courants polyphasés en employant les moteurs à champ tournant ou asynchrones (Despretz et Ferraris).

Champ tournant. — Imaginons deux cadres rectangulaires semblables disposés à angle droit et parcourus par deux courants alternatifs égaux différent d'un quart de période. Au centre commun des deux cadres se produit un champ résultant de la composition des champs dus à chaque cadre. L'intensité est représentée par une droite normale au plan du cadre est proportionnelle au courant; on a donc:



$X = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$        $Y = a \cos 2\pi \frac{t}{T}$

d'où:  $x^2 + y^2 = a^2$



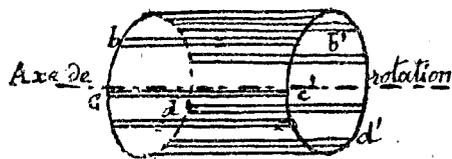
L'angle de cette résultante avec la composante  $y$  est:

$\text{tg } \beta = \frac{x}{y} = \text{tg } 2\pi \frac{t}{T}$  d'où  $\beta = 2\pi \frac{t}{T} = \omega t$

La résultante est donc constante en grandeur et animée d'un mouvement de rotation uniforme de période  $T$ .

Une simple plaque de cuivre posée sur un pivot prend dans ce champ un mouvement de rotation. Le couple moteur est dû à l'action du champ sur les courants de Foucault et conserve un sens constant tant que la vitesse de rotation du disque est inférieure à celle du champ.

Les moteurs asynchrones industriels comprennent un stator identique à celui des alternateurs; le rotor est constitué

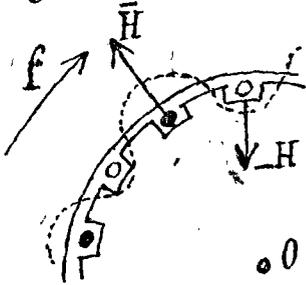


par une série de barres conductrices  $b, b', c, c', d, d'$ , parallèles à l'axe de rotation et dont les extrémités sont reliées par des bagues conductrices  $bcd, b'c'd'$ . Il porte le nom de cage d'écureuil. Le tout est naturellement

supporté par un noyau en fer feuilleté normalement à l'axe et présentant sur sa périphérie des rainures longitudinales dans lesquelles sont placées les barres de la cage.

L'action des courants polyphasés lancés dans le stator a pour effet de créer dans l'entrefer un champ tournant, ou

plus exactement glissant, dont la composante radiale est seule utile.



Si nous convenons de représenter la valeur de cette composante par des longueurs portées sur la normale à un cylindre moyen puis dans l'entrefer, nous obtiendrons une courbe sinusoidale qui, à un instant donné, aura par exemple la forme indiquée sur la figure; un instant après, cette courbe se sera dépla-

cée dans le sens indiqué par la flèche  $f$  avec une vitesse qui dépend de la période  $\tau$ .

Si la cage est animée d'une vitesse plus faible, chacune de ses barres sera le siège d'une force électromotrice d'induction égale au flux qu'elle coupe.

Dans le cas de la figure, on voit, par exemple, que les barres dont la section est noire seront traversées par un courant dirigé vers l'avant qui se fermera par l'intermédiaire des anneaux conducteurs  $bcd$ ,  $b'c'd'$  et des barres blanches  $o$  qui sont elles-mêmes le siège d'une force électromotrice dirigée vers l'arrière.

L'action électrodynamique est due en quelque sorte au glissement du rotor par rapport au champ mobile créé par le stator, elle sera considérable au moment du démarrage et tendra vers zéro si le rotor ayant peu de résistance à vaincre accélère son mouvement jusqu'à devenir sensiblement synchrone.

## 180. ~ Distribution des courants polyphasés. ~

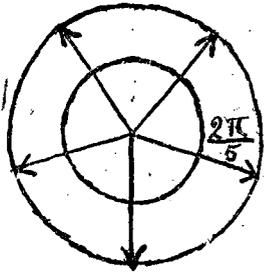
La transmission des courants polyphasés semble à priori devoir exiger un nombre considérable de fils de ligne.

Dans le cas des courants triphasés par exemple il semble nécessaire d'employer 6 fils, et plus généralement  $2n$  fils pour un courant  $n$ -phasé. Nous allons voir que  $n$  fils suffisent si  $n$  est impair.

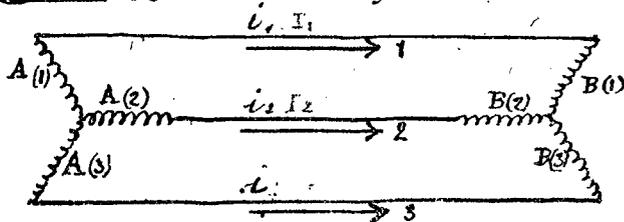
Nous conviendrons d'appeler courants  $n$ -phasés l'ensemble des courants présentant entre eux des phases croissant par  $n$ ième de circonférence; avec cette convention, les courants diphasés considérés précédemment devraient être appelés tétra-phasés, mais nous verrons la raison qui a fait prévaloir la première dénomination.

Soit donc un système  $n$ -phasé; les  $n$  fils d'aller qui réunissent

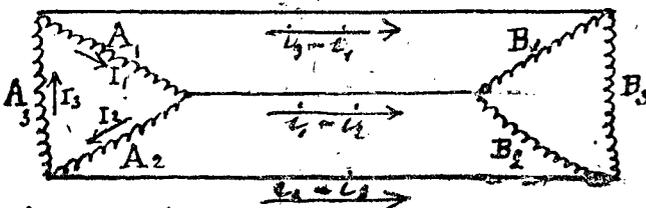
sent la station A à la station B portent des courants dont les intensités sont représentables à un instant quelconque par  $n$  vecteurs égaux et distants de  $\frac{2\pi}{n}$ . La résultante de ces vecteurs est évidemment nulle et il en sera de même de la somme des intensités des courants correspondants; par conséquent au lieu de joindre chaque fil d'aller à un fil de retour, il suffira de les réunir tous au même



point. Par exemple, dans le cas du triphasé;  $(A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3)$  désignent respectivement les enroulements des stators de la génératrice et de la réceptrice, on pourra réaliser le montage en étoile (fig. ci contre).



représentables par des vecteurs égaux régulièrement distribués et ont une somme nulle, par suite aucun courant inutile ne tend à circuler dans le circuit fermé  $A_1 A_2 A_3$ .



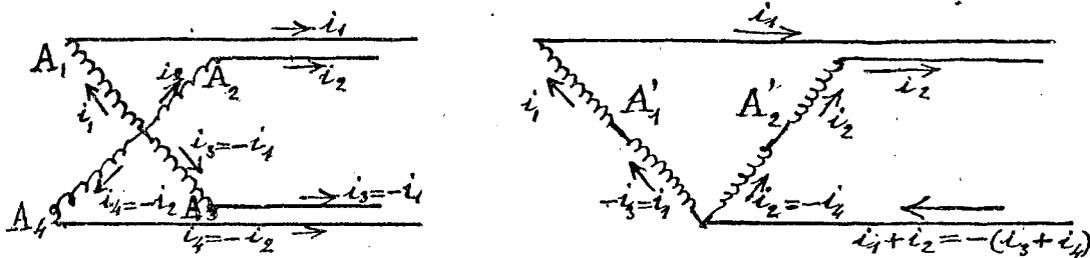
Si, à un instant quelconque,  $i_1, i_2, i_3$  sont les valeurs algébriques des intensités dans chacun des enroulements du générateur, on aura, avec le montage en étoile, les mêmes intensités dans les trois fils de ligne, tandis que dans le montage en triangle ces intensités sont respectivement  $i_1 - i_2, i_2 - i_3, i_3 - i_1$  comme l'indique la figure.

Le triphasé qui ne nécessite que trois fils est donc le plus avantageux; toute fois, il est possible de modifier le montage en étoile d'un système triphasé de manière à n'employer également que trois fils de transmission et, d'une manière générale, un système à  $n$  phases n'exigera que  $n+1$  fils. En effet, le nombre de phases étant pair, à tout vecteur représentant un courant  $i$  correspond un vecteur  $\vec{i}' = -\vec{i}$ .

Le rôle joué par le courant  $i$  dans un récepteur peut être joué par  $i$ , car pour changer  $i$  en  $-i$  il suffit d'invertir

les communications de l'enroulement récepteur. Il suffira donc de transmettre  $n$  courants polyphasés au lieu de  $2n$ . Mais comme leur somme n'est plus nulle, il est nécessaire, d'ajouter, un fil de retour.

Les quatre enroulements d'un système triphasé peuvent être, par exemple, groupés en deux,  $A_1$  et  $A_2$ , comme l'indique les schémas ci-après.



On voit que sur les quatre phases théoriques, deux seulement sont transmises d'où le nom de diphasé.

## 181. ~ Puissance transmise par un système polyphasé. ~

La puissance transmise à chaque instant par le système (puissance instantanée) est constante. C'est là un précieux avantage sur l'emploi de l'alternatif ordinaire.

non exigé Dans l'instant  $dt$ , chacun des courants transmet une puissance  $E_i dt$  positive ou négative.

Désignons par les indices  $1, 2, \dots, n$ , les  $n$  circuits identiques qui constituent le système, on aura pour le  $p$ -ième

$$E_p = E_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{p}{n}\right)$$

$$i_p = i_0 \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{p}{n} - \varphi\right)$$

D'ailleurs, la différence de phase  $\varphi$  est la même pour tous les circuits, dont la résistance imaginaire  $\bar{r} = r + \sqrt{-1}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$  est la même.

car :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r}$$

On aura donc pour l'ensemble :

$$\begin{aligned} dt \sum_1^n E_p i_p &= E_0 i_0 \sum_1^n \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{p}{n}\right) \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{p}{n} - \varphi\right) dt \\ &= E_0 i_0 \sum_1^n \left[ \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos\left(2\omega t - 2\pi \frac{2p}{n} - \varphi\right) \right] dt \end{aligned}$$

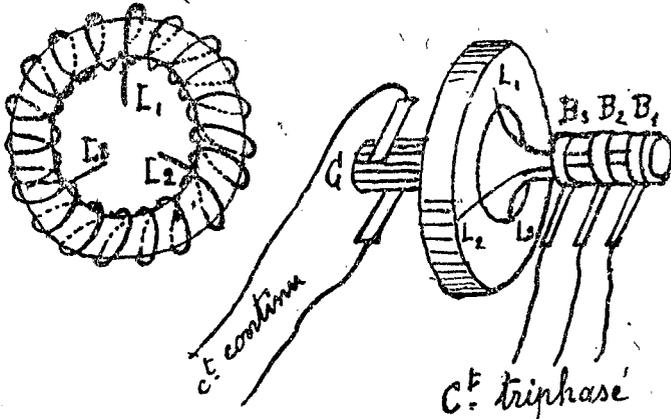
Le second terme de la somme est nul et il reste :

$$dt \sum E_p i_p = \frac{n}{2} E_0 i_0 \cos \varphi dt = n E_{eff} i_{eff} \cos \varphi dt$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

## 182. ~ Commutatrices. ~

La machine de Gramme peut être transformée de manière à donner des courants polyphasés ; en effet chaque spire est le siège d'une force électromotrice périodique et si l'on réunit deux points diamétralement opposés de l'induit, le circuit fermé pendant est traversé par un courant alternatif.



Pour avoir du triphasé, il suffira de brancher des lignes en trois points équidistants  $L_1, L_2, L_3$  pris sur l'anneau ; on réalise ainsi un montage en triangle.

Bien entendu, l'induit étant mobile dans le cas actuel, il faut établir les communications avec les fils de ligne par des

bagues  $B_1, B_2, B_3$  montées sur l'arbre de rotation et convenablement isolées. Une machine ainsi modifiée peut donner à volonté et simultanément du courant continu par l'emploi du collecteur ordinaire C, et des courants polyphasés. On peut aussi, en excitant l'inducteur par un courant indépendant, mettre la machine en marche en lançant du continu dans le collecteur C et recueillir du triphasé par les bagues B ou inversement.

Les dynamos ainsi réalisées sont des commutatrices. Elles permettent la transformation parfois nécessaire des courants

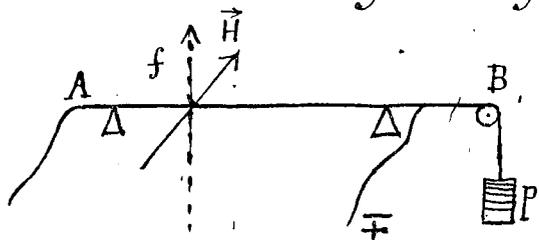
alternatifs en courants continus, et inversement.

## 183. ~ Étude expérimentale d'une force électromotrice alternative - Résonance

Il est évidemment nécessaire de pouvoir étudier en détail la forme ondulatoire de la force électromotrice d'un générateur, dans le but de perfectionner les appareils en suivant méthodiquement les effets produits par les modifications apportées dans leur construction, ou encore pour se rendre compte de leur bon fonctionnement. Par un shuntage convenable, l'étude d'une intensité peut se ramener à celle d'une force électromotrice.

On peut mettre en évidence les harmoniques par des effets de résonance.

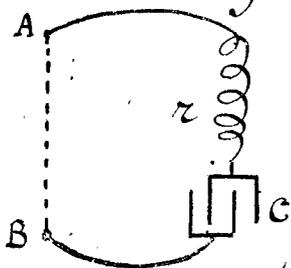
Faisons passer le courant alternatif dans un fil élastique  $AB$  tendu entre deux points fixes et placés dans un champ invariable  $H$ . Ce fil sera périodiquement soumis à des efforts  $\pm f$  normaux à  $H$  et prendra un mouvement vibratoire appréciable dès que, par une tension convenable  $P$ , on aura rendu sa période vibratoire propre suffisamment voisine de celle qui correspond à un harmonique du courant étudié.



En faisant croître progressivement  $P$  et notant les valeurs pour lesquelles la corde  $AB$  prend un mouvement maximum, on pourra déterminer la période fondamentale et les harmoniques de  $E$  et de  $t$ .

On peut encore faire agir sur un fil d'acier tendu un électro-aimant parcouru par un courant alternatif.

M. Pupin a utilisé la résonance électrique. Entre 2 points  $A$  et  $B$  qui sont le siège d'une différence de potentiel périodique, il intercale un circuit composé d'un condensateur  $C$  de capacité variable à volonté, et d'une bobine sans fer de résistance  $r$  et de self  $L$ .

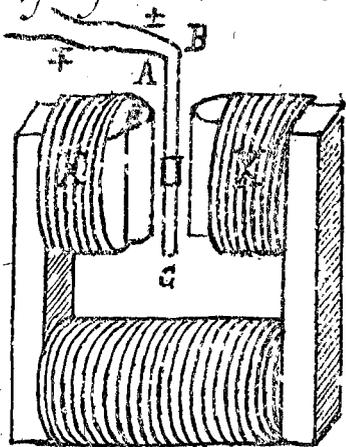


Lorsque  $CL = -\frac{1}{n^2\omega^2}$  l'harmonique  $n$  produit

dans le circuit le maximum de puissance, en même temps que l'intensité  $i_n$  correspondante à la même phase que  $E_n$ .

## 184. ~ Oscillographes. ~

M<sup>r</sup>. Blondel a réalisé le premier des galvanomètres extrêmement rapides dont les déviations sont, à chaque instant, proportionnelles aux intensités du courant qui les traversent.



L'un des plus perfectionnés est l'oscillographe bifilaire, constitué par un fil replié ACB dont les deux parties rectilignes très voisines AC et CB sont tendues dans un champ magnétique intense. Ces fils portent un miroir très petit dont les déviations sont sensiblement proportionnelles à  $i$ .

Les conditions à réaliser sont les suivantes.

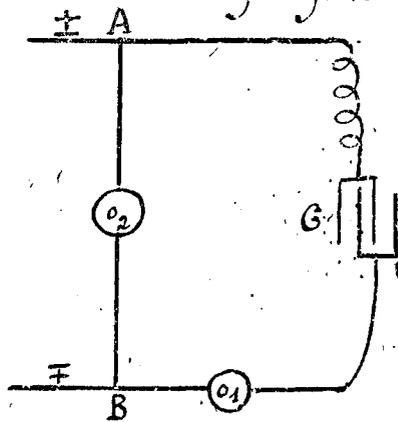
1<sup>o</sup> Le coefficient d'amortissement doit être aussi grand que possible. On y parvient en immergeant tout le système dans de l'huile.

2<sup>o</sup> La période propre d'oscillation doit être très courte par rapport à celle de l'harmonique le plus élevé qu'on se propose de déterminer. C'est une condition inverse de celle qui exige le bon fonctionnement du galvanomètre balistique.

On l'a réalisé en constituant le système par deux fils légers et élastiques en aluminium, assez fortement tendus et très courts (10 à 15  $\frac{m}{m}$ ); on a pu ainsi obtenir des valeurs de  $T$  voisines de  $\frac{1}{15000}$  de seconde.

Divers artifices permettent d'observer directement une courbe qui représente  $i = f(t)$ , ou d'en obtenir une épreuve photographique.

En employant le dispositif de dupin (n<sup>o</sup> 183) M<sup>r</sup>. Armagnat



a pu obtenir simultanément le tracé de la courbe d'un courant et les tracés des diverses sinusoides correspondant à ses harmoniques.

Pour cela, il suffit de placer dans le circuit dérivé un premier oscillographe  $O_1$  qui donnera suivant la capacité  $C$ , tel ou tel harmonique, tandis que la courbe du courant sera donnée par un second oscillographe  $O_2$  directement branché sur les points

A et B

## - Chapitre VII -

### - Electrostatique -<sup>(1)</sup>

#### §.1. Les Diélectriques

##### - 185 - Courant de déplacement et force électrique -

On peut répartir les corps en deux classes :

- 1°/ Les conducteurs dans lesquels nous constatons des courants permanents, et qui opposent au courant une force contre-électromotrice proportionnelle à l'intensité.
- 2°/ Les isolants ou diélectriques à travers lesquels on ne peut pas faire passer un courant continu d'intensité constante.

Avant Maxwell, les électriciens considéraient les diélectriques comme purement inertes, s'opposant radicalement au passage de l'électricité. S'il en était ainsi, on pourrait remplacer un diélectrique par un autre, sans rien changer aux phénomènes ; or, ceci est contraire à l'expérience.

Reprenons, en effet, l'expérience de la charge d'un condensateur (N° 157) : un courant s'est produit dans le fil conducteur et le galvanomètre balistique a mesuré une quantité d'électricité  $q = C E$ .

Nous avons vu que, pour un condensateur à armatures planes et parallèles, de surface  $S$ , distantes de  $e$ ,  
 $C = a \frac{S}{e}$ . On a donc :

$$q = \frac{a}{e} E S$$

$a$  étant une constante qui n'est pas la même pour les divers diélectriques.

Le diélectrique n'est pas inerte, puisque la quantité d'électricité  $q$  dépend de sa nature ; il doit donc être lui-même le siège d'un phénomène électrique.

(1) d'après M. C. Carvallo.

quel phénomène a pu se produire dans le diélectrique pendant la charge du condensateur ? Maxwell répond : c'est un courant.

Les anciens électriciens considéraient le courant de charge comme ouvert ; d'après Maxwell il n'y a que des courants fermés ; le courant variable qui charge le condensateur traverse la lame isolante, mais il s'arrête parce que le diélectrique oppose au passage de l'électricité non pas une résistance plus grande que celle d'un conducteur, mais une résistance d'une toute autre nature.

La force contre-électromotrice d'un condensateur est, en effet,  $-\frac{q}{c}$  (n° 158) ; elle n'est pas, comme celle d'un conducteur, proportionnelle à  $i$ , mais elle est proportionnelle à la quantité d'électricité, si bien que, lorsque celle-ci est devenue telle que  $\frac{q}{c} = E$ , le courant s'arrête. Sa comparaison avec un ressort (n° 158) fait comprendre la nature du phénomène ; il s'agit d'une résistance élastique et non d'une résistance visqueuse comme dans les conducteurs.

Il ne peut donc y avoir, dans un diélectrique, un courant durable, quel que, peu intense, dans le même sens, car la "tension" du diélectrique l'arrêterait bientôt.

Les effets deviennent au contraire observables dans le cas d'une alternance, surtout si elle est rapide ; nous verrons que c'est là l'origine de la lumière.

La formule (252) montre que des éléments égaux de la surface du condensateur sont également intéressés dans le passage de la quantité d'électricité  $q$ . nous sommes donc conduits à considérer la quantité d'électricité par unité de surface ou déplacement électrique (Maxwell).

$$(253) \quad D = \frac{q}{S} = \frac{a}{e} E$$

que, dans le cas du condensateur plan, nous pouvons représenter, par raison de symétrie, par un vecteur normal aux armatures.

Pendant la charge du condensateur, ou quand le condensateur est intercalé dans un circuit où s'exerce une force électro-motrice variable, le déplacement  $D$  est variable avec le temps.

La vitesse de variation de ce vecteur  $\vec{p} = \frac{dD}{dt} = \frac{1}{s} \frac{dq}{dt}$  a mêmes dimensions qu'une densité de courant  $\vec{u}$  dans un conducteur. C'est le courant de déplacement que nous considérerons, avec Maxwell, comme se produisant dans le diélectrique.

La formule (253) s'écrit encore :

$$E = \frac{D}{a} e$$

et montre que tous les éléments de l'épaisseur  $e$  concourent également à équilibrer la force électromotrice  $E$  de la pile.

Nous devons donc envisager la force contre-électromotrice par unité de longueur  $-\frac{D}{a}$ , qui a ainsi mêmes dimensions que le vecteur force électrique  $h$ , que nous avons défini dans un conducteur (n° 74).

Nous appellerons encore force électrique, et nous désignerons par  $h$ , le vecteur  $\frac{D}{a}$ , égal et de sens contraire à la réaction du diélectrique par unité de longueur.

Le sens de  $h$ , est ainsi le sens de la demi-normale à l'armature + du condensateur (reliée au pôle + de la pile) qui est dirigée vers l'armature négative.

Il est essentiel de remarquer que  $h$  s'exerce dans le diélectrique, alors que le vecteur  $h$  du (n° 74) s'exerce dans un conducteur.

Dans la réalité les corps présentent les deux propriétés que nous venons d'envisager : ils sont à la fois diélectriques et conducteurs. Par exemple, les isolants industriels, verre, ébonite, paraffine... qui, comme l'air, peuvent former des condensateurs, conduisent aussi un peu le courant ; mais leur résistivité est énorme ; alors que la résistivité des métaux se compte en microhms-centimètres, celle des isolants industriels se compte en mégahms-centimètres. A cause de cette résistance considérable des isolants industriels, l'intensité  $y$  est pratiquement nulle et ne saurait être mesurée au galvanomètre ; mais un condensateur formé de ces matières, chargé et isolé de la pile se décharge lentement sans qu'aucun fil métallique réunisse ses armatures.

Nous allons étudier les corps au point de vue de cette double propriété.

## 186 - Capacité spécifique et constante diélectrique -

Nous avons dit (n° 157) que la constante  $a$  de l'expression de la capacité ( $C = a \frac{S}{e}$ ) s'appelle capacité spécifique et change d'un isolant à l'autre.

Son inverse  $\frac{1}{a} = \frac{L_2}{D}$  a été appelé par Maxwell coefficient d'élasticité électrique du milieu par analogie avec le coefficient d'élasticité mécanique.  $\frac{1}{a}$  a les dimensions du carré d'une vitesse. Pour l'espace vide de matière (qui est le seul diélectrique parfait), on a trouvé  $\frac{1}{a} = 1,13 \cdot 10^{22}$  valeur qui est égale à  $4\pi C^2$  étant la vitesse de la lumière dans le vide. Nous reviendrons bientôt sur ce fait capital qui a établi la liaison entre l'électromagnétisme et l'optique.

On rapporte la capacité spécifique  $a$  d'un diélectrique à celle du vide  $a_1$ ; le rapport

$$K = \frac{a}{a_1} = 4\pi C^2 a$$

est la constante diélectrique ou pouvoir inducteur spécifique. C'est un nombre sans dimensions.

Exemple numérique. - Un condensateur de surface  $S = 100 \text{ cm}^2$  et d'épaisseur  $e = 0,001$  est placé dans le vide. On constate au galvanomètre balistique qu'il prend la charge  $q = 0,44 \cdot 10^{-2}$  microcoulomb sous la force électromotrice  $E_1 = 50$  Volts. On en déduit

$$\frac{1}{a_1} = \frac{S E_1}{q e} = 1,1 \cdot 10^{22} \text{ C.G.S. pour le vide.}$$

Un condensateur semblable, mais en ébonite, prend une charge double; on en conclut que  $a = 2 a_1$  et  $K = 2$  pour l'ébonite.

### Lois de la constante diélectrique. -

D'après sa définition même, la constante diélectrique du vide est 1. On constate que les constantes diélectriques de tous les corps sont supérieures à 1.

Pour les gaz,  $K$  est très voisin de 1. L'excès  $K-1$  est, sensiblement proportionnel à la densité  $\rho$ ; en d'autres termes  $\frac{K-1}{\rho}$  est à peu près le même pour tous les gaz, quelles que soient la température et la pression (Maxwell, Boltzmann).

Pour les liquides et solides,  $K$  ne varie que très légèrement avec la température. Pour l'ébonite, la paraffine, le pétrole,  $K$  est voisin de 2. Pour le verre,  $K$  varie de 5 à 10 suivant la composition.

**Courant résiduel.** — Dans les diélectriques, solides ou liquides, (surtout s'ils sont impurs), il se produit, après le courant très court de charge, un courant beaucoup plus faible, appelé courant résiduel. Il tend vers zéro et est insensible au bout d'une heure. De même, au courant très court de décharge succède un courant résiduel.

Si, après la décharge rapide, on coupe le fil qui relie les armatures, on constate que le phénomène qui provoquait le courant résiduel se produit encore dans le diélectrique, car les armatures se rechargent légèrement. Ce phénomène se produit dans toutes les parties du diélectrique, car lorsqu'on scie le diélectrique, les deux parties sont "polarisées" comme les deux parties d'un aimant brisé.

Il résulte de ce phénomène que les mesures des constantes diélectriques par la méthode du galvanomètre, balistique, se rapportent seulement au courant instantané et donnent ces constantes pour un temps de charge très court.

### 187 - Condensateur complexe -

Entre les armatures d'un condensateur de surface  $S$ , plaçons deux lames de diélectriques différents (capacités  $a, a_1$ , épaisseurs  $e, e_1$ ). Nous constituons ainsi un condensateur complexe.

Le déplacement  $D = \frac{q}{S}$  y provoque les forces électriques  $\frac{D}{a}, \frac{D}{a_1}$ , qui sur les épaisseurs  $e$  et  $e_1$  donnent des forces contre-électromotrices :

$$E = \frac{D}{a} e = \frac{e}{a} \frac{q}{S} \quad ; \quad E_1 = \frac{D}{a_1} e_1 = \frac{e_1}{a_1} \frac{q}{S}$$

au total 
$$E + E_1 = \frac{q}{S} \left( \frac{e}{a} + \frac{e_1}{a_1} \right)$$

La capacité du condensateur complexe est donc :

$$(254) \quad C = \frac{q}{E + E_1} = \frac{S}{\frac{e}{a} + \frac{e_1}{a_1}}$$

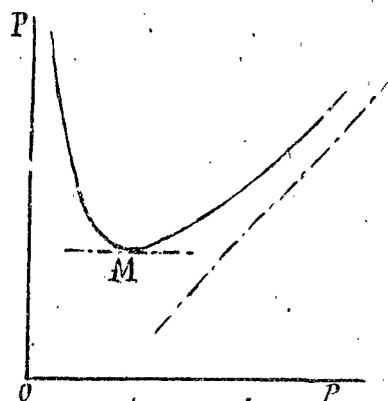
formule qui s'étend à un nombre quelconque de lames diélectriques. Si une lame diélectrique est remplacée par une lame métallique, la force  $F_i$  correspondante est nulle ( $a = \infty$ ). (1)

## 188 - Rigidité électrique -

Quand la différence de potentiel entre les armatures est suffisamment grande, une étincelle éclate dans le diélectrique : c'est la décharge disruptive.

Faraday a le premier étudié ce phénomène, et Maxwell a établi par la théorie que l'étincelle doit éclater quand la force électrique atteint, pour chaque diélectrique, une valeur critique qu'il a appelée rigidité électrique (100 kilovolts-centim. pour la paraffine, 200 pour le verre, 1000 pour le mica).

M<sup>r</sup> Bouty a étudié ce phénomène pour les gaz (il l'appelle cohésion diélectrique). Sa rigidité  $P$  est fonction de la pression  $p$  (voir courbe) ;



infinie pour  $p = 0$  elle passe par un minimum de l'ordre de 100 Volts-cm. pour une pression de quelques dixièmes de millimètre de mercure.

Une cause perturbatrice dans la mesure résulte de la nature et de l'état superficiel des électrodes. Aussi M<sup>r</sup> Bouty a-t-il employé le condensateur complexe, en enfermant

le gaz étudié dans une ampoule plate qu'on glisse entre les armatures du condensateur, sans les lui faire toucher. On évite ainsi l'influence des électrodes et des poussières, et le dispositif se prête à l'étude de l'influence de la pression.

La rigidité des gaz devient beaucoup plus faible quand un rayonnement (lumière ultra-violette, rayons X, corps radioactif) ionise le gaz. (2)

(1) Il est vraisemblable que pendant un temps très court le métal conserve une force électrique  $\frac{D}{a}$ , mais celle-ci est rapidement annihilée par la conduction.

(2) Ses phénomènes d'ionisation seront étudiés dans la deuxième partie du cours.

## 189 - Résistivité des diélectriques -

La résistivité se mesure par la méthode indiquée au N° 159. On forme un condensateur avec le diélectrique; on mesure la charge  $q_0$  donnée par une pile, puis la décharge  $q$  au bout d'un temps  $t$ ; on a :

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{t} \log \frac{q_0}{q} \quad \text{et} \quad r = \frac{\theta}{C}$$

remplaçant  $r$  et  $C$  par leurs valeurs  $r = \rho \frac{l}{S}$  et  $C = a \frac{S}{e}$ , on obtient  $\rho$  en fonction de la capacité spécifique  $a$ .

$$\rho = \frac{\theta}{a}$$

La résistivité diminue vite quand la température augmente; par exemple celle du caoutchouc est 32.000 mégamégohms à 0° et 7.500 à 24°.

La résistivité augmente avec la pression. Voici quelques chiffres :

Mica	84	mégamégohms	à 20°
Ebonite	28.000	"	46°
Paraffine	34.000	"	46°
Benzine	14	"	14°
Acide stéarique	350	"	14°
Huile de goudron de bois	1670	"	14°

La résistivité des gaz et des vapeurs, même celle de la vapeur d'eau pourvu que la vapeur soit sèche, est pratiquement infinie; les gaz sont donc des isolants presque parfaits.

Les poussières et l'humidité donnent aux diélectriques solides une conductibilité superficielle. Cet inconvénient est notable pour le verre qui est très hygrométrique; on le combat avec un vernis de gomme laque qui protège le verre contre l'humidité.

## § 2 - Énergie potentielle du champ électrostatique

Dans le diélectrique du condensateur est localisée

une énergie potentielle que dégage la décharge. Elle se manifeste par des forces mécaniques entre les armatures, comme l'énergie d'un ressort bandé se manifeste par sa force d'expansion.

## 190 - Partage de l'énergie de la pile entre la chaleur de Joule et l'énergie du condensateur -

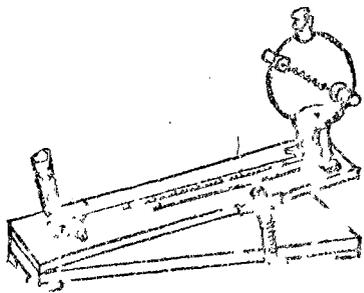
Un condensateur dont la charge est  $q$  à l'époque  $t$  oppose une force contre-électromotrice  $E_q = \frac{q}{C}$ . Il reçoit l'accroissement de charge  $dq$  correspondant à l'accroissement d'énergie :

$$dW = E_q dq = \frac{q}{C} dq$$

Pendant toute la période de charge, il reçoit donc l'énergie totale

$$(255) \quad W = \int_0^{q_0} \frac{q}{C} dq = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} E q_0$$

Cette énergie se dépense en chaleur à la décharge.



Reiss a vérifié la formule (255) par des mesures calorimétriques analogues à celles de Favre. Le calorimètre employé était un calorimètre à air (thermomètre de Reiss).

L'énergie du condensateur (formule 255) étant la moitié de l'énergie fournie par la pile, il faut admettre que l'autre moitié a été consacrée à

la chaleur de Joule pendant la charge. On en conclut encore que les chaleurs de Joule dégagées à la charge et à la décharge sont égales. (1)

**Energie par unité de volume.** - On a  $q = SD$  et  $E = h_e e$ ; l'énergie par unité de volume du condensateur

(1) Soit valable seulement s'il n'y a pas d'autre énergie en jeu. La charge chauffe le diélectrique, et par suite la loi doit être limitée au cas où l'échauffement est négligeable.

est donc :

$$(256) \quad W_1 = \frac{1}{2} D h_1$$

On l'appelle énergie électrostatique par opposition à l'énergie électrocinétique des courants; elle est potentielle car elle dépend, non de la vitesse, mais seulement du déplacement  $D$ .

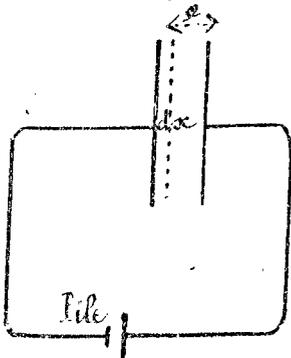
On a encore :

$$(257) \quad W_1 = \frac{1}{2} D h_1 = \frac{D^2}{2a} = \frac{a h_1^2}{2} = \frac{K}{8\pi C^2} h_1^2 \quad (C = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}})$$

Par exemple, pour un condensateur à air ( $K=1$  sensiblement) chargé à 200 Volts on trouve  $W_1 = 2$  ergs par  $\text{cm}^3$ .

## 191 - Tension électrostatique

Les armatures d'un condensateur chargé sont soumises à des tensions. Par exemple l'électroscope bien connu à feuille d'or (ou d'aluminium) est un condensateur dont l'une des armatures est la cage de l'appareil et l'autre armature la feuille mobile; celle-ci est attirée vers les parois de la boîte.



Pour calculer la tension électrostatique, supposons qu'on laisse les armatures du condensateur se rapprocher de  $dx = -de$ , assez lentement pour que le courant qui fournit la décharge supplémentaire,  $dq$  soit assez peu intense pour qu'on puisse négliger la chaleur de Joule.

La pile a fourni l'énergie  $E \cdot dq$ , le condensateur a emmagasiné la moitié de cette énergie. Puisqu'il n'y a pas eu de chaleur de Joule dégagée, l'autre moitié a été dépensée tout entière dans le travail mécanique  $d\mathcal{C}$  produit par la force attractive  $X$  des armatures.

On a donc :

$$d\mathcal{C} = \frac{E dq}{2}$$

$$\text{et } (258) \quad X = \frac{d\mathcal{C}}{dx} = - \frac{d\mathcal{C}}{de} = - \frac{E}{2} \frac{dq}{de}$$

Or, on a :

$$q = \frac{aS}{e} E ; \quad \frac{dq}{de} = - \frac{aS}{e^2} E$$

par suite :

$$(259) \quad X = \frac{1}{2} \frac{aS}{e^2} E^2$$

L'attraction est en raison inverse du carré de la distance

La tension par unité de surface  $X_1 = \frac{X}{S}$  s'exprime en fonction de la force électrique  $h_1 = \frac{E}{e}$ , car la formule (259) s'écrit

$$(260) \quad X_1 = \frac{1}{2} a h_1^2$$

La tension électrostatique par unité de surface a donc même expression que l'énergie par unité de volume.

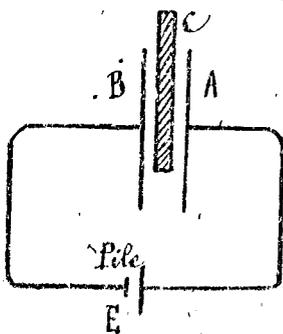
**Electromètre absolu de W. Thomson.** — En fixant l'un des plateaux du condensateur et suspendant l'autre au fléau d'une balance, on peut peser  $X$  et en déduire  $E$  par la formule (259). C'est le principe de l'électromètre absolu de Thomson.

Les bords du condensateur apportant une perturbation sensible quand la surface n'est pas très grande, la partie centrale seule est portée par la balance; la perturbation a lieu sur les bords de l'anneau qui entoure le disque suspendu et non sur la partie suspendue au fléau.

Dans la position d'équilibre, l'armature mobile doit être exactement dans le plan de l'anneau de garde. Or, satisfait à cette condition en amenant un repère porté par le fléau sur un repère porté par l'anneau de garde.

L'équilibre de la balance est instable car un rapprochement des armatures augmente l'attraction; on limite donc les déplacements du fléau entre deux arrêts.

**Equilibre d'une lame diélectrique entre les armatures d'un condensateur.** — Introduisons la lame  $C$  entre les deux armatures  $A$  et  $B$  d'un condensateur à air. L'enfoncement  $dx$  de la lame augmente la capacité de  $dc = \frac{dc}{dx} dx$ . Il en résulte un accroissement  $dW$  d'énergie emmagasinée  $dW = \frac{1}{2} E^2 dc$ ; l'autre moitié de l'énergie  $E^2 dc$  supplémentaire fournie par la pile est employée à accomplir le travail  $X dx$ ; on a donc :



$$(261) \quad X dx = \frac{1}{2} E^2 dC \quad \text{ou} \quad X = \frac{1}{2} E^2 \frac{dC}{dx}$$

En d'autres termes la lame  $C$  est attirée entre les plateaux jusqu'à ce qu'elle occupe toute la surface du condensateur.

Pour vérifier la formule précédente, Pellat a pesé la force  $X$  et a calculé ou mesuré  $\frac{dC}{dx}$ .

## 192 - Convection électrique -

Un condensateur étant chargé, que deviennent la charge et l'énergie quand on sépare les armatures métalliques de l'isolant ?

Deux cas extrêmes sont à envisager :

1°/ Le diélectrique est une lame solide recouverte sur ses deux faces d'une couche conductrice (verre argenté, par exemple). Sur ses faces sont appliqués deux plateaux métalliques. Après la charge on isole le condensateur et on sépare les plateaux. Si, ensuite, on reunit les plateaux par un fil conducteur, il ne se produit aucune décharge, mais si l'on réunit par un fil les deux faces métallisées de l'isolant, on obtient la décharge intégrale en quantité d'électricité et quantité d'énergie. Toute l'énergie est restée dans le diélectrique.

2°/ Ses armatures, au lieu d'être en métal nu, sont recouvertes d'une couche isolante (gomme laque par exemple). Si l'on retire du condensateur la lame diélectrique (métallisée ou non), cette lame ne donne plus aucune décharge. Mais si l'on dispose les plateaux de façon à former un nouveau condensateur, une décharge a lieu en réunissant ces plateaux par un fil.

On constate que la quantité d'électricité obtenue à la décharge de ce nouveau condensateur est égale à la quantité d'électricité qui avait servi à charger le condensateur primitif.

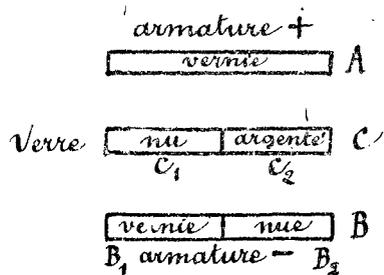
Mais l'énergie développée à la décharge dépend de la capacité du nouveau condensateur ( $W = \frac{q^2}{2C}$ ). Par exemple si le condensateur primitif est à lame d'ébonite et si l'on enlève l'ébonite sans changer la distance des armatures, on forme un nouveau condensateur dont la capacité est deux fois plus faible, donc on double l'énergie.

Cette augmentation d'énergie vient du travail que l'observateur a dû fournir pour enlever l'ébonite (n° 191).  
 L'énergie est encore augmentée si l'on écarte les plateaux. (1)

## 193 - Charges électriques -

D'après les expériences qui précèdent la dernière couche de métal en contact avec le diélectrique chargé emporte avec elle une grandeur invariable, la quantité d'électricité  $q$ , et un sens invariable, celui de la décharge.

On représente cette double propriété en disant que l'armature A qui était reliée au pôle positif de la pile porte la charge  $+q$ ; et que l'autre B porte la charge  $-q$ . La surface A est électrisée positivement, la surface B électrisée négativement.



Soit par exemple le condensateur complexe constitué comme l'indique la figure. Séparons A, B, C. L'armature A emporte la charge  $+q$ ; la partie  $B_1$  de B emporte  $-\frac{q}{2}$  et la partie  $C_2$  de C emporte aussi  $-\frac{q}{2}$ . Si l'on joint métalliquement A à  $B_1$  la décharge est  $\frac{q}{2}$ ; une

seconde décharge  $\frac{q}{2}$  se produit quand on joint l'ensemble  $(A, B_1)$  à  $C_2$ .

On s'explique ainsi les cas complexes tels que celui des armatures nues en contact avec le verre nu. Celui-ci présente en réalité une conductibilité superficielle (humidité, poussières) et emporte la plus grande partie de sa charge. Si l'air est sec et dénué de poussières la charge reste sur les armatures.

Il faut ajouter que le verre emporte avec lui la charge résiduelle (n° 186) car ce phénomène a lieu dans la masse et non à la surface.

Il est essentiel de noter que la somme des charges positives et négatives est toujours nulle.

(1) C'est le principe des machines à influence électrostatique.

### § 3 - Extension des théorèmes de Kirchhoff -

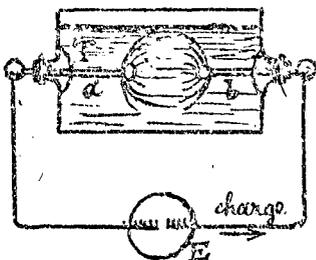
#### 194 - Champ électrostatique -

#### Lignes de force -

Nous avons jusqu'à présent limité notre étude au condensateur plan. Il importe de généraliser : le champ électrostatique existe, non seulement entre les deux armatures planes d'un condensateur, mais aussi bien entre les surfaces métalliques de formes et de positions absolument quelconques entre lesquelles on a produit un déplacement électrique par la force électromotrice d'un générateur.

L'existence de l'action pondéromotrice du champ électrostatique sur les corps est mise en évidence par diverses expériences.

1°/ Expérience de Faraday. - Dans de l'essence de térébenthine, on répand des filaments de soie, puis on plonge dans le liquide deux conducteurs a b formant les pôles d'une machine électrostatique. Ses filaments de soie se dressent et dessinent les lignes de force du champ.



Ces lignes aboutissent normalement à la surface des conducteurs a b.

2°/ On verse de l'huile de ricin sur une boule métallique placée à une vingtaine de centimètres d'une plaque conductrice. Quand on relie la boule et la plaque aux pôles d'une machine électrique, on voit l'huile s'étirer en fils très fins, dessinant approximativement les lignes de force.

3°/ Expérience de Mattencci. - Dans une cloche de verre pleine d'air sec, on suspend une aiguille de soufre. Si l'on approche un corps électrisé l'aiguille oscille autour d'une position d'équilibre comme une aiguille de fer doux dans un champ magnétique.

Déplacement et force électrique en un point.

Entre les armatures d'un condensateur plan, exception faite pour les bords, le champ est évidemment uniforme. Il convient maintenant de donner du déplacement et de

la force électrique une définition applicable à tous les cas et de connaître les lois qui règlent la distribution des vecteurs  $\vec{D}$  et  $\vec{h}$  dans le cas général.

De l'étude du condensateur plan ressort ce fait que la quantité d'électricité qui, pendant la charge, a traversé une lame métallique normale à la direction du champ électrostatique, mesure le flux de  $\vec{D}$  à travers cette lame, puisque  $D = \frac{Q}{S}$  (par définition). De plus une lame infiniment mince n'influe pas sur le déplacement électrique, puisqu'elle ne change pas la capacité du condensateur (n° 192).

Nous pouvons donc théoriquement imaginer qu'une lame de surface  $S$ , infiniment mince, sert à explorer et à définir le champ de la façon suivante : plaçons la lame en un point  $M$  du champ, normalement à la ligne de force. Le déplacement électrique  $\vec{D}$  au point  $M$  a pour grandeur  $\frac{Q}{S}$ ,  $Q$  étant la quantité d'électricité qui aurait traversé la lame si elle s'était trouvée en  $M$  à la création du champ. Sa direction de  $\vec{D}$  est la normale à  $S$  dans le sens du courant de charge.

S'agit-il de connaître le déplacement électrique à la surface de séparation d'un conducteur et d'un diélectrique ? il suffit d'appliquer la lame sur le conducteur ; quand on l'enlève elle emporte une charge  $Q$  positive ou négative (n° 193).  $\frac{Q}{S}$  est encore le déplacement  $\vec{D}$ .

Coulomb a bien procédé ainsi pour étudier les charges réparties aux différents points de la surface d'un conducteur. Il appliquait sur le conducteur un plan d'épreuve constitué par un disque métallique très mince placé au bout d'une tige isolante ; puis il mesurait la charge par l'action répulsive s'exerçant entre ce plan d'épreuve et un autre plan chargé suspendu au fil d'une balance de torsion.

Ses lois générales de la distribution du champ sont au nombre de trois :

La première est simplement la proportionnalité entre  $\vec{D}$  et  $\vec{h}_1$ ,

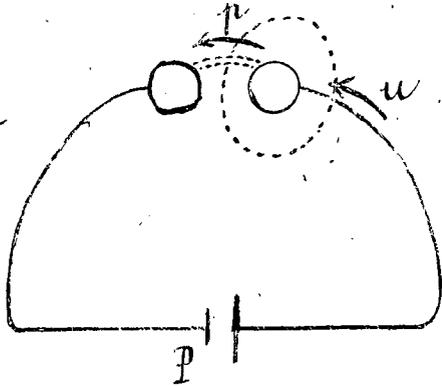
$$\vec{D} = a \vec{h}_1 \quad (a \text{ capacité spécifique du milieu.})$$

Ses deux autres sont les lois de Kirchhoff généralisées.

## 195 - Extension du 1<sup>er</sup> théorème de Kirchhoff -

(Supposons deux conducteurs de forme quelconque,

reliés aux pôles d'une pile. Considérons une surface  $\Sigma$  enveloppant le conducteur chargé positivement et laissant l'autre à l'extérieur. Décomposons le diélectrique, à travers lequel se ferme le courant, en tubes du vecteur  $\vec{D}$  infiniment petits. Deux flux traversent la surface  $\Sigma$ . C'est d'abord, le flux du courant de conduction, c'est-à-dire l'intensité  $i$  de ce courant. C'est ensuite le flux du vecteur courant de déplacement.



Soit  $d\sigma_i$  la section droite de l'un des tubes de déplacement, au point où ce tube coupe  $\Sigma$ ; on a en valeur absolue :

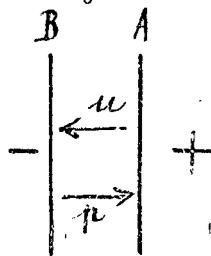
$$p_i = \frac{dD}{dt} = \frac{1}{d\sigma_i} \frac{dq_i}{dt}$$

et le flux est  $p_i d\sigma_i = \frac{dq_i}{dt}$

$dq_i$  étant la quantité d'électricité qui traverse la section de la surface  $\Sigma$  par le tube envisagé, à l'époque  $t$  et pendant le temps  $dt$ . Le flux total de  $\vec{p}$  a donc pour valeur absolue  $\sum \frac{dq_i}{dt}$  c'est-à-dire précisément l'intensité  $i$  du courant de conduction. Mais puisque le courant de conduction entre dans  $\Sigma$ , alors que le courant de déplacement en sort, la somme algébrique est nulle.

Nous avons supposé que les deux milieux en présence sont un conducteur parfait et un diélectrique parfait.

Dans le cas général le courant de conduction  $\vec{u}$  et le courant de déplacement  $\vec{p}$  pourront exister simultanément dans le même milieu. C'est ce qui arrive dans le diélectrique imparfait d'un condensateur qui se décharge spontanément. Le courant très lent de conduction  $\vec{u}$  est alors dirigé de A vers B comme le courant de charge. C'est aussi le sens du déplacement électrique  $\vec{D}$ . Mais la décharge  $u dt$  entraîne une diminution égale de  $\vec{D}$  :



$$dD = -u dt$$

Le courant de déplacement a donc pour valeur :

$$\vec{p} = \frac{d\vec{D}}{dt} = -\vec{u}$$

Il est égal à  $u$ , mais de sens contraire.

Le courant total est nul.

Ainsi le premier théorème de Kirchhoff est étendu au cas des courants de déplacement.

Le flux du courant total  $\vec{j} = \vec{u} + \vec{p}$  est nul à travers toute surface fermée.

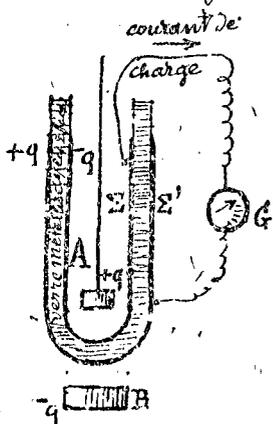
## 196 - Induction électrostatique -

### Cylindre de Faraday. -

à la fin de la charge, si le conducteur de charge a débité la quantité d'électricité  $+q$  à travers une surface fermée  $\Sigma$ , le vecteur  $\vec{D}$  donne à travers  $\Sigma$  un flux sortant égal à  $+q$ . Ce flux sortant est ce que Maxwell appelle induction électrostatique à travers  $\Sigma$ .

Si, au lieu d'apporter la charge  $+q$  par conduction dans la surface  $\Sigma$ , on l'apporte par convection, c'est-à-dire si l'on introduit dans  $\Sigma$  un corps portant la charge  $q$ , l'induction électrostatique à travers  $\Sigma$  est encore  $+q$ . Cela résulte des lois de la convection électrique (N° 192) et on peut l'établir par l'expérience.

On apporte le corps A portant la charge  $q$  dans une enveloppe métallique  $\Sigma$  et l'on constate que l'induction est précisément  $q$ . Pour cela il suffit de doubler l'enveloppe en deux autres et de relier les deux enveloppes par une ligne contenant un galvanomètre balistique.



L'impulsion du galvanomètre mesure une quantité d'électricité égale à la charge  $+q$  du corps A.

Les lignes du vecteur  $\vec{D}$  sont en général appelées lignes d'induction.

Pratiquement il n'est pas nécessaire que l'enveloppe  $\Sigma$  soit rigoureusement fermée; il suffit qu'elle coupe la presque totalité des lignes d'induction. En particulier, l'enveloppe peut avoir la forme d'un cylindre, pourvu qu'il soit assez

profond et qu'on y plonge assez loin le corps chargé A, pourvu surtout que les corps tels que B qui portent la charge  $-q$  (ils existent nécessairement) soient masqués à A par l'enveloppe cylindrique, comme dans la figure.

Une telle enveloppe est appelée cylindre de Faraday.  
Principe de la conservation de l'électricité. —

Quelles que soient les transformations qu'on fasse subir aux corps à l'intérieur du cylindre, si aucune quantité d'électricité n'est apportée de l'extérieur par conduction ou par convection, la somme algébrique des quantités d'électricité induite à travers le cylindre est constante.

## 197 - Ecrans électrostatiques -

Si nous plongeons le cylindre de Faraday  $\Sigma$  dans de l'essence de térébenthine portant des fils de soie, nous voyons les lignes de force aller normalement de  $B$  à  $\Sigma$ , et nous constatons que leur distribution n'est pas changée par les mouvements de  $A$  dans le cylindre. On peut, en particulier, sans changer la distribution extérieure, amener  $A$  au contact de  $\Sigma$ . (1) —

Ainsi, une enveloppe métallique  $\Sigma$  fait écran électrostatique entre les régions de l'espace qu'elle sépare, protégeant chacune d'elles contre l'action directe des corps électrisés situés dans l'autre.

D'une façon générale, la distribution des lignes de force est réglée par le deuxième théorème de Kirchhoff.

## 198 - Extension du 2<sup>ème</sup> théorème de Kirchhoff -

Le raisonnement fait au n<sup>o</sup> 76 subsiste intégralement à condition de tenir compte de toutes les forces électriques qui s'exercent aux différents points d'un contour fermé. Si une partie du contour est tracée dans un diélectrique, en chaque

---

(1). L'expérience est difficile à réaliser car il faut de grandes forces électriques pour orienter les fils de soie; dans ces conditions, la conduction de la térébenthine et le défaut de rigidité de l'air, troublent le phénomène. On peut employer les forces électriques plus faibles et un électroscope. En mettant le bouton de communication avec le cylindre, on constate que la divergence des feuilles est indépendante de la position de  $A$  dans le cylindre.

point s'exerce la force électrique  $\vec{h}_1 = \frac{\vec{D}}{a}$ , et la circulation ou intégrale de cette force équilibre les autres forces électromotrices du contour mesurées par des procédés dynamiques.

Mais si le champ magnétique est variable, l'étude des courants d'induction nous enseigne qu'il faut encore ajouter à l'intégrale des forces électriques  $h_1$  et  $h_2$  le long du contour la dérivée, changée de signe du flux de l'induction magnétique  $B$  à travers ce contour.

En faisant ainsi intervenir toutes les forces électromotrices que l'expérience révèle, la deuxième loi de Kirchhoff, qui n'est qu'un aspect du théorème des travaux virtuels, demeure inchangée et s'énonce :

La force électromotrice totale qui règne sur tout contour fermé est nulle.

**Potentiel électrostatique.** En particulier, sur tout contour fermé tracé dans un milieu diélectrique (homogène ou non), il n'y a pas d'autre force électrique que la force électrostatique  $\vec{h}_1 = \frac{\vec{D}}{a}$ ; par suite l'intégrale de cette force est nulle.

Il résulte immédiatement de là (n° 5) que la circulation ou intégrale de  $\vec{h}_1$  entre deux points du milieu diélectrique a une valeur indépendante du chemin suivi, et par conséquent que la force électrostatique dérive d'un potentiel.

Dans un conducteur la réaction diélectrique est nulle, donc si le conducteur n'est parcouru par aucun courant, le potentiel y est constant. En particulier la surface de séparation d'un conducteur et d'un diélectrique est une surface de niveau et les lignes de force du diélectrique aboutissent normalement à cette surface.

Par contre si un conducteur est parcouru par un courant, ses différents points ne sont plus au même potentiel. Tout courant crée donc un champ électrostatique dans le diélectrique environnant. Ce fait est bien manifesté par l'expérience, car dans les courants de haute tension, il n'est pas rare de voir éclater des étincelles d'une partie à une autre du fil conducteur.

Lorsque des conducteurs électrisés sont à l'intérieur d'une enveloppe conductrice, comme dans le cylindre de Faraday, le problème de la distribution du champ est déterminé que si on connaît les différences de potentiel entre les divers conducteurs.

teurs et l'enveloppe.

Ses potentiels n'étant définis qu'à une constante près, il est naturel de prendre pour zéro celui de l'enveloppe.

**Loi des distributions proportionnelles.** — Étant donnée une distribution du déplacement électrique, si nous la multiplions par un facteur constant, nous obtenons une nouvelle distribution conforme aux lois de Kirchhoff; c'est donc encore une distribution possible: les charges par unité de surface ou densités électriques nouvelles sur les surfaces métalliques sont égales aux précédentes multipliées par un facteur constant.

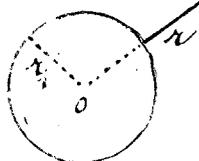
Cette loi des densités proportionnelles a été vérifiée par Coulomb au moyen du plan d'épreuve.

## 199 - Corps isolés -

### Le champ d'une sphère électrisée est newtonien

Supposons qu'on augmente les dimensions de l'enveloppe métallique précédemment considérée et qu'on éloigne ses parois loin de tous les conducteurs en présence. Sa distribution du champ tend rapidement vers une limite indépendante de la forme de l'enveloppe, limite qui correspond à une enveloppe dont les parois seraient à l'infini. Il y a plus: si deux ou plusieurs corps électrisés sont en présence, mais suffisamment éloignés dans un diélectrique, le champ au voisinage de chacun d'eux est sensiblement indépendant des autres corps.

Il est donc permis, dans ces conditions, d'envisager un corps électrisé comme isolé dans le diélectrique et de calculer la distribution du champ dans son voisinage comme s'il était seul, pourvu que les autres corps électrisés soient suffisamment loin. Mais il est essentiel de remarquer que ce n'est là qu'une approximation de calcul, et qu'au point de vue physique c'est un non-sens, car à toute charge correspond quelque part une charge égale et opposée.



Calculons par exemple la distribution du champ d'une sphère métallique de rayon  $r_1$ , supposée isolée dans l'espace diélectrique, et portant une charge  $+q$ . Sa distribution est

évidemment symétrique tout autour du centre. Le déplacement  $\vec{D}$  en  $M$  est dirigé suivant  $OM$  et ne dépend que de la distance  $OM = r$  ; il est déterminé par la loi du flux d'induction électrostatique :

$$(2.62) \quad 4\pi r^2 D = q \quad \text{d'où} \quad D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\text{et} \quad h_1 = \frac{q}{4\pi a r^2} = \frac{c^2}{K} \frac{q}{r^2}$$

Le déplacement et la force sont en raison inverse du carré de la distance. Le champ est newtonien.

La valeur de  $D$  au voisinage immédiat de la surface est  $\sigma = \frac{q}{4\pi r_1^2}$ . C'est la densité superficielle. Primitivement éloignés, leur influence se manifeste par un changement dans la distribution des densités superficielles ; mais la charge totale de chaque conducteur demeure invariable (tant qu'il n'y a pas décharge conductive, disruptive, ou par convection due aux poussières).

## § 4 - Loi de Coulomb -

### Unités électrostatiques -

#### 200 - Champ newtonien des charges électriques - Energie localisée dans le champ.

Nous venons d'établir que le champ électrostatique d'une sphère isolée est un champ newtonien. Il en est évidemment de même du champ qui serait produit par une charge concentrée en un point.

Nous verrons dans la théorie électronique que les centres électrisés qui constituent un atome de matière sont extraordinairement petits, et à des distances très grandes par rapport à leurs dimensions ; nous pouvons admettre que chacun d'eux produit un champ newtonien.

Envisageons maintenant les forces mécaniques de

répulsion et d'attraction qui s'exercent entre les corps électrisés. Coulomb a découvert expérimentalement qu'on peut calculer la force qui s'exerce entre deux corps électrisés, de dimensions très petites par rapport à leur distance (1), et isolés dans un diélectrique, au moyen de la formule :

$$(263) \quad F = \frac{1}{K} \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

$K$  étant la constante diélectrique, égale à 1, dans le vide.

On pourrait établir que cette formule résulte de l'expression de  $h$  (form. 262), en posant  $m = Cq$ ,  $m' = Cq'$ . Nous allons suivre une marche inverse en montrant que la loi de Coulomb conduit à l'expression de l'énergie potentielle précédemment indiquée.

Pour un condensateur plan, c'est-à-dire pour un champ uniforme, nous avons montré que dans chaque élément de volume  $dv$  se trouve localisée une quantité d'énergie  $\frac{D^2}{2\epsilon} dv$ .

Il paraît bien évident que cette expression est encore valable dans un champ non uniforme, car si un élément de volume  $dv$  contient de l'énergie, peu importe la manière dont cette énergie y a été mise; sa valeur ne doit dépendre que du déplacement  $D$  (ou de la force) au point considéré et de la nature du milieu (caractérisée par  $\epsilon$ ).

L'énergie totale d'un champ électrostatique est donc :

$$(264) \quad W = \iiint \frac{D^2}{2\epsilon} dv = \frac{1}{8\pi C^2} \iiint K h^2 dv \quad (2)$$

formule fondamentale

Plaçons-nous maintenant au point de vue de Coulomb, et admettons que deux charges  $dq$ ,  $dq'$ , situées à la distance  $r$ , dans un diélectrique isotrope et homogène, exercent l'une sur l'autre une force de répulsion :

(1) Cette restriction devient inutile dans le cas de deux sphères uniformément chargées, car toute la charge de chacune d'elles peut être supposée concentrée au centre de la sphère (n° 199).

(2) Il est inutile maintenant de conserver l'indice de  $h$  ( $h_1$ ), cet indice n'avait d'autre but que de distinguer provisoirement la force dans les conducteurs et la force dans les diélectriques.

$$(265) \quad F = f \frac{dq dq'}{r^2}$$

Quelle sera la valeur de l'énergie potentielle d'un système de charges en présence ?

Supposons que le milieu, caractérisé par la constante  $f$ , s'étende loin des charges pratiquement jusqu'à l'infini.

Pour amener les charges  $dq$ ,  $dq'$  de l'infini à la distance  $r$ , il faut fournir un travail :

$$d\mathcal{E} = \int -F dr = \frac{f}{r} dq dq'$$

Le travail dépensé pour amener de l'infini, dans leur situation actuelle, un nombre quelconque de charges élémentaires, est égal à la somme  $\sum \frac{f}{r} dq dq'$  étendue à toutes ces charges, car on voit facilement que si cette expression, qui est démontrée pour 2 charges, est supposée vraie pour  $n$ , elle doit l'être encore pour  $(n+1)$ .

Dans cette somme le facteur de  $dq$  est  $\sum \frac{f}{r} dq'$ ; sa valeur est précisément celle du potentiel au point occupé par la charge  $dq$ .

La somme  $\sum \psi dq = \psi dq + \psi' dq' + \dots$  est égale au double de la somme précédente car chaque terme  $\frac{f}{r} dq dq'$  y entre une première fois dans l'expression  $\psi dq$  qui contient  $dq$  en facteur et une seconde fois dans  $\psi' dq'$ .

L'énergie du champ est donc :

$$(266) \quad W = \frac{1}{2} \sum \psi dq \quad (1) \quad (\text{form. également fondamentale})$$

Ses formules (264) et (266) paraissent bien différentes. Nous allons cependant les ramener l'une à l'autre.

Soient  $dv$  un élément de volume du champ,  $dq$  la charge qu'il contient.

On a, puisque d'après (265) le champ est newtonien :

---

(1) Il importe de remarquer que cette expression ne contient en réalité que les différences de potentiel des corps en présence. Si, en effet, on considère l'ensemble d'un système électrisé, la somme totale des charges est nulle, de sorte que si l'on augmente toutes les valeurs des potentiels d'une même quantité  $\psi_0$  la valeur de  $\sum \psi dq$  augmente de  $\psi_0 \sum dq$  qui a une valeur nulle. Le zéro des potentiels est arbitraire.

$$\Delta \psi = -4 \pi f \rho \quad (\text{équation de Poisson, n}^\circ 15,$$

avec

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$

Remplaçons dans 14  $dq$  par  $\rho dv = -\frac{1}{4 \pi f} \Delta \psi dv$ , il vient:

$$(267) \quad W = -\frac{1}{8 \pi f} \iiint \psi \Delta \psi dv$$

Appliquons maintenant la formule de Green (N<sup>o</sup> 10), en y faisant  $f_1 = f_2 = \psi$

$$\iint (\vec{n} \psi h) dS = \iiint \psi \Delta \psi dv + \iiint (\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi) dv$$

Prenons comme domaine d'intégration une sphère de très grand rayon  $r$ , comprenant le système électrisé. L'intégrale du premier membre doit être étendue à la surface de cette sphère; le potentiel  $\psi$ , à mesure qu'on s'éloigne, tend à devenir en raison inverse de  $r$ ;  $h$  devient en raison inverse de  $\frac{1}{r^2}$ . Comme la surface elle-même est proportionnelle à  $r^2$ , l'intégrale est en raison inverse de  $r$  et tend vers zéro. Sa formule 15 devient donc:

$$(268) \quad W = \frac{1}{8 \pi f} \iiint (\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi) dv = \frac{1}{8 \pi f} \iiint h^2 dv.$$

ce qui est précisément la formule 12 en faisant:

$$(269) \quad f = \frac{c^2}{K}$$

La loi de Coulomb conduit donc à l'expression 12 de l'énergie.

Nous avons supposé un diélectrique unique. Dans le cas où l'espace contient des diélectriques différents, l'énergie localisée dans le champ, ne pouvant dépendre que du milieu et de la force électrique, a encore la même expression, à condition de conserver  $K$  sous le signe d'intégration (comme nous l'avons fait dans la formule 12), puisque  $K$  change d'un milieu à un autre.

## 201 - Unités électrostatiques -

La formule  $F = f \frac{qq'}{r^2}$  avec  $f = \frac{c^2}{K}$  s'écrit :

$$F = \frac{1}{K} \frac{cq \cdot cq'}{r^2} \quad K \text{ étant un nombre}$$

sans dimensions, ainsi que nous l'avons déjà dit.

Posons  $m = cq$   $m' = cq'$ , nous obtenons

$$(270) \quad F = \frac{1}{K} \frac{mm'}{r^2}$$

$m$  et  $m'$  sont les charges électrostatiques, alors que  $q$  et  $q'$ , mesurées en unités électromagnétiques étaient les charges électromagnétiques.

Nous avons ainsi deux systèmes différents de mesures : le système électrostatique où les dimensions d'une charge  $m$ , définies par (270), sont  $L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$ , et le système électromagnétique, dont nous nous étions exclusivement servis jusqu'à présent, où une quantité d'électricité  $q$  a pour dimensions  $L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$ . Le rapport  $C$  des unités a les dimensions d'une vitesse. L'unité électrostatique de quantité d'électricité est égale à l'unité électromagnétique divisée par  $C$ .

D'après (270), la force que le corps, chargé de la quantité d'électricité  $m$ , exerce à la distance  $r$  sur un corps chargé de l'unité électrostatique de quantité d'électricité ( $m' = 1$ ), est  $\frac{1}{K} \frac{m}{r^2}$ ; c'est la force électrique exprimée dans le système électrostatique. L'unité électrostatique de force électrique est égale à l'unité électromagnétique multipliée par  $C$ .

Le même rapport existe entre les unités de force électromotrice (ou différence de potentiel). Nous avons déjà dit que  $C = 3 \cdot 10^{10}$ ; comme 1 Volt est égal à  $10^8$  unités électromagnétiques, on voit que l'unité électrostatique de différence de potentiel est égale à 300 Volts.

Dans le système électrostatique une capacité a pour dimension une longueur. L'unité électrostatique de capacité est égale à l'unité électromagnétique divisée par  $C^2$ , c'est-à-dire à  $\frac{10^9}{9 \cdot 10^{20}} = \frac{1}{9} 10^{-11}$  farad.

Si nous désignons par  $h_e$  la force électrique exprimée en unités électrostatiques, l'expression de l'énergie potentielle du champ électrostatique devient :

$$(271) \quad W_e = \frac{1}{8\pi} \iiint K h_e^2 dv \quad (\text{unités électrosta-} \\ \text{tiques C.G.S.})$$

absolument semblable à l'énergie cinétique du champ magnétique  $H$ , exprimée en unités électromagnétiques :

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \iiint \mu H^2 dv \quad (\text{unités électroma-} \\ \text{gnétiques C.G.S.})$$

La constante diélectrique  $K$  joue un rôle analogue à la perméabilité  $\mu$ .

## 202 - Vecteur induction -

De même que  $\mu H$  est le vecteur induction magnétique, de même  $K h_e$  est le vecteur induction électrique  $\vec{b}$ .  
On a d'ailleurs

$$\vec{h}_e = \frac{\vec{h}}{c} \quad \text{et} \quad a = \frac{K}{4\pi c^2}$$

Par suite :

$$(272) \quad K h_e = \vec{b}_{\text{électrost.}} = 4\pi c \vec{D}_{\text{électrom.}}$$

L'induction électrique n'est donc autre chose que le déplacement électrique, à un facteur constant près.

À travers une surface fermée contenant des charges  $\Sigma q$  (unités électromagnétiques), le flux de  $\vec{D}$  est  $\Sigma q$  ; le flux de  $\vec{b}$  est donc  $4\pi \Sigma c q = 4\pi \Sigma m$  ce qui est d'ailleurs l'expression du théorème de Gauss (n° 14).

## 203 - Polarisation des diélectriques -

Poisson, adoptant l'hypothèse des fluides magnétiques, avait considéré les aimants comme formés de doublets magnétiques constitués chacun par deux masses magnétiques, de signes opposés, extrêmement rapprochées. Nous avons dit pour quoi cette hypothèse doit être totalement rejetée dans le cas des phénomènes magnétiques. L'idée de Poisson a été transportée par Mossotti aux phénomènes électriques, et adoptée par Faraday. Puis Sir W. Thomson (Lord Kelvin), sans aucune hypothèse sur la nature des milieux diélectriques, a considéré comme un fait expérimental que tout se passe

comme si chaque élément de volume d'un diélectrique était transformé par un champ électrique en un doublet dont l'action extérieure serait équivalente à celle de deux charges égales et de signes contraires, infiniment voisines.

Sans aucun doute, tout se passe bien ainsi, et l'hypothèse des doublets électriques ne peut pas être rejetée comme celle des doublets magnétiques, puisqu'il existe des charges libres. Mais, si l'on cherche la réalité des phénomènes, la théorie des doublets est une conception vraiment trop simple.

Il est extrêmement probable, pour ne pas dire certain, que les atomes sont formés d'un noyau positif autour duquel gravitent, avec une vitesse considérable, les électrons négatifs (théorie de Bohr); il est bien évident qu'un champ électrique doit produire une modification des orbites des électrons: C'est, si l'on veut, l'idée des doublets, mais combien plus compliquée!

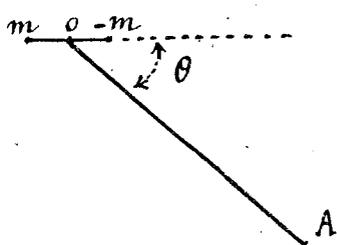
Admettons, cependant, l'hypothèse simple des doublets: elle rend bien compte des propriétés des diélectriques.

Posons que la loi de Coulomb sous la forme  $F = \frac{m m'}{r^2}$  (sans coefficient  $\frac{1}{K}$ ) s'applique toujours quel que soit le milieu qui sépare les deux masses  $m$  et  $m'$ .

Posons, en outre, que les diélectriques sont polarisables, c'est-à-dire que, sous l'action de toutes les charges libres, chaque élément de volume se transforme en un doublet dont le moment électrique est proportionnel à la résultante des forces électriques au centre de cet élément.

Nous appelons moment électrique le produit  $m \rho l$ ,  $\rho l$  étant la distance extrêmement petite des charges  $m$  et  $-m$  formant le doublet.

En un point  $A$  dont les distances aux charges  $m$  et  $-m$  sont  $r_1$  et  $r_2$ , le potentiel  $\rho V$  du doublet est:



$$\rho V = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = m \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Si  $\theta$  est l'angle formé par la droite  $OA$  et la ligne qui joint les charges  $m$  et  $-m$ , on a très sensiblement

$$\rho V = m \frac{\rho l}{r^2} \cos \theta = \frac{\rho M \cos \theta}{r^2}$$

$S Mb$  étant le moment électrique, et pour un doublet infiniment petit :

$$dV = \frac{dMb}{r^2} \cos \theta$$

C'est exactement l'expression (196) (n° 137) trouvée pour le potentiel d'un aimant infiniment petit.

Nous pouvons donc répéter mot pour mot toute la théorie donnée pour les aimants (n° 137 à 142) ; définir une intensité d'électrisation ou polarisation  $\vec{I} = \frac{dMb}{dv}$  ; une densité superficielle et une densité en volume, un coefficient  $X = \frac{1}{\mu}$  analogue à la susceptibilité magnétique et un coefficient  $K$  (la constante diélectrique), égal à  $1 + 4\pi X$ , comparable à la perméabilité  $\mu$ .

Son induction électrique  $b$  est égale à  $Kh$  comme l'induction magnétique  $B$  est égale à  $\mu H$ .

La formule de Coulomb, l'expression du potentiel qui en résulte, et le théorème de Gauss sur les flux dans un champ newtonien, (n° 14), permettent de traiter simplement les questions qui suivent.

## 204 - Capacités des conducteurs -

Nous désignerons par  $V$  le potentiel électrostatique mesuré en unités électrostatiques ( $V = \frac{1}{c} \psi$ ).

Nous supposerons pour simplifier que le milieu diélectrique soit le vide (ou l'air pour lequel on a pratiquement  $K = 1$ ). Soit un système de charges en présence (dont la somme totale est nulle, il ne faut pas l'oublier) ; le potentiel en un point du champ n'est défini qu'à une constante près ; d'après la formule de Coulomb, son expression est :

$$(273) \quad V = \sum \frac{m}{r} + C^te$$

nous pouvons supposer la constante nulle, en prenant pour zéro des potentiels, le potentiel en un point très éloigné de toute charge.

La capacité d'un conducteur est le rapport de sa charge totale  $m$  à son potentiel

$$C_e = \frac{m}{V}$$

Ce rapport est indépendant de  $m$ , car si la densité de charge augmente dans un certain rapport, la distribution reste une distribution d'équilibre, et  $V$  augmente dans le même rapport, toutes les charges étant multipliées par un même nombre.

**Capacité d'une sphère** - Il résulte immédiatement, de la définition qu'en unités électrostatiques, la capacité d'une sphère est égale au rayon.

En effet, le potentiel étant constant en tous les points, évaluons le potentiel du centre.

$$V = \frac{m}{R} \quad \text{donc } C_e = R$$

Ce résultat toutefois n'est exact que pour une sphère très éloignée de tout autre conducteur, puisque nous n'avons tenu compte que des charges de la sphère elle-même.

La connaissance de la capacité de deux conducteurs permet de déterminer les potentiels et les charges dus aux échanges d'électricité entre ces conducteurs.

Soient, en effet, deux corps de capacités  $C_{e_1}$  et  $C_{e_2}$ , et dont les potentiels sont  $V_1$  et  $V_2$ ; les charges sont  $m_1 = C_{e_1} V_1$  et  $m_2 = C_{e_2} V_2$ . Si on met ces corps en communication lointaines (pour que leur capacité ne change pas) par un fil (de capacité négligeable), l'ensemble des deux corps se mettra à un potentiel unique  $V'$  et aura une capacité  $C_{e_1} + C_{e_2}$ . Or la charge totale du système est la même si l'on suppose la déperdition nulle.

On a donc :

$$C_{e_1} V_1 + C_{e_2} V_2 = (C_{e_1} + C_{e_2}) V' \quad \text{d'où } V'$$

Réciproquement si l'on peut déterminer  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V'$  on en déduit une relation entre les capacités. Cette relation est tout-à-fait analogue à celle qui détermine les échanges de chaleur entre deux corps dont les capacités calorifiques sont  $C_1$  et  $C_2$  et les températures  $V_1$  et  $V_2$ .

Le potentiel joue ici le même rôle que la température dans les échanges de chaleur.

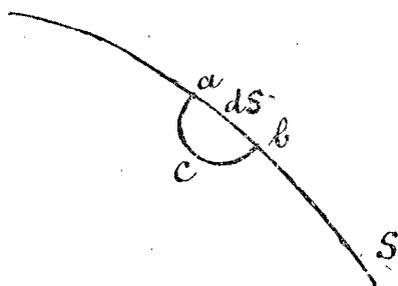
## 205 - Applications du théorème de Gauss -

Le flux de la force à travers une surface fermée

est égale à  $4\pi \Sigma m + 2\pi \Sigma m'$ ;  $\Sigma m$  étant la somme des charges intérieures et  $\Sigma m'$  la somme des charges sur la surface.

La distribution des charges d'un conducteur est donc purement superficielle, car le potentiel étant constant, la force à l'intérieur est nulle, et dans une surface fermée aussi petite qu'on voudra, prise dans l'intérieur, la charge totale est nulle.

Relation entre la force et la densité électrique à la surface d'un conducteur et au voisinage immédiat du conducteur.



Soient  $S$  la surface,  $dS$  un élément de surface  $ab$ ; traçons une surface quelconque  $abc$  à l'intérieur, découpant l'élément  $dS$  sur  $S$ .  
Appliquons le théorème de Gauss.  
Les seules charges qui interviennent sont réparties sur  $ab$ .

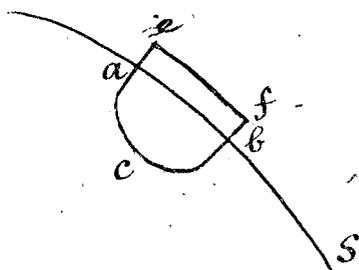
Soit  $dm$  la charge de  $dS$  ;  
remarquons que la force électrique  $h_e$  est normale à la surface qui est une surface équipotentielle, on a :

$$f dS = 2\pi dm$$

d'où (274)

$$f = 2\pi\sigma \quad \sigma \text{ étant la densité } \frac{dm}{dS}$$

Appliquons maintenant le théorème de Gauss à la surface fermée constituée par un élément pris sur la surface équipotentielle infiniment voisine de  $S$ , des normales à  $S$ , et la surface intérieure  $abc$ ; nous avons :



$$(275) \quad f = 4\pi\sigma$$

Il faut observer toutefois que cette discontinuité est purement théorique; elle est le résultat du calcul, parce que nous avons supposé le passage brusque du conducteur au diélect.

trique. Dans la réalité des choses, il doit y avoir une couche de passage, dans laquelle la force varie avec une extrême rapidité de  $0$  à  $4\pi\sigma$ .

**Force mécanique sur l'unité de surface d'un conducteur.** — La force  $f = 2\pi\sigma$  sollicite l'unité de charge sur la surface, donc l'unité de surface sur laquelle est répartie la charge  $\sigma$  est sollicitée par une force mécanique.

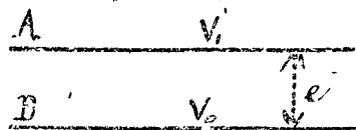
$$(276) \quad f\sigma = 2\pi\sigma^2$$

force toujours positive. Du reste  $f$  est toujours de même signe que  $\sigma$ ; la force  $f\sigma$  est toujours dirigée vers l'extérieur. On l'appelle tension électrique.

## 206 — Capacité d'un condensateur plan et d'un conducteur sphérique.

Considérons un condensateur formé de deux surfaces  $S$  planes, parallèles, grandes par rapport à la distance  $e$  qui les sépare, et séparées par une lame d'air.

L'une des armatures, B, étant au potentiel  $V_0$ , portons l'autre, A, au potentiel  $V_1 > V_0$ , et cherchons la charge qui a été apportée sur A.



Il est évident que les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles aux armatures; la force électrique, dans la lame d'air, est donc  $\frac{V_1 - V_0}{e}$ ;

On a, par suite:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_0}{e} \quad (\text{d'après (275)})$$

La charge apportée sur A est donc:

$$m = S\sigma = \frac{S(V_1 - V_0)}{4\pi e}$$

La capacité est:

$$(277) \quad \frac{m}{(V_1 - V_0)} = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{e}$$

Si la lame, entre les armatures, était formée d'un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique  $K$ , pour la même différence de potentiel, la charge serait  $K$  fois plus grande; la capacité serait  $\frac{K}{4\pi} \frac{S}{e}$  en unités électrostatiques, ou, en

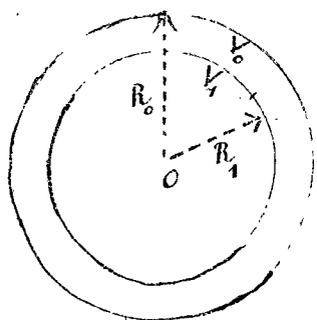
unités électromagnétiques :

$$\frac{K}{4\pi c^2} \frac{S}{e} = a \frac{S}{e} \quad (a = 4\pi c^2 K)$$

Nous retrouvons bien le résultat indiqué au n° 157 (form. 220)

exercice

**Condensateur sphérique.** — Considérons un condensateur formé par deux sphères concentriques séparées par une lame d'air. La sphère intérieure de rayon  $R_1$  est au potentiel  $V_1$  ; la sphère  $R_0$  extérieure est au potentiel  $V_0$ . Soient  $m_1$  et  $m_2$  les charges qui, par raison de symétrie, sont uniformément réparties sur les sphères.



Au centre, le potentiel est  $V_1$  ; on a donc :

$$\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} = V_1$$

Sur la sphère extérieure le potentiel est  $V_0$ , et, comme le potentiel est le même qu' si toutes les charges étaient concentrées au centre, on a :

$$\frac{m_1 + m_2}{R_0} = V_0$$

d'où l'on déduit

$$m_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) = V_1 - V_0$$

Si le potentiel  $V_0$  est nul, ce qui se présente lorsque l'armature extérieure est reliée au sol, on a :

$$m_1 + m_2 = 0 \quad \text{ou} \quad m_2 = -m_1$$

Les charges sur les deux faces sont égales et de signes contraires :

$$m_1 = \frac{V_1 R_1 R_0}{R_1 - R_0}$$

Où, en désignant par  $e$  l'épaisseur de la couche d'air

$$m_1 = V_1 \frac{R_1 R_0}{e}$$

La capacité de la sphère intérieure est devenue  $\frac{R_1 R_0}{e}$  au lieu de  $R_1$ , qui mesurait la capacité de la sphère isolée. Si  $e$  est très petit, on a sensiblement :

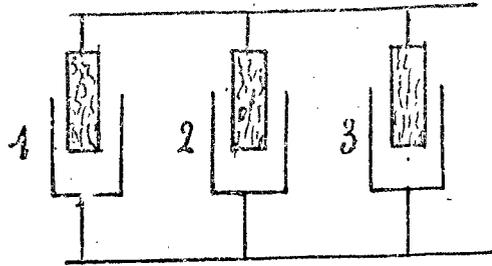
$$C_e = \frac{R_1 R_0}{e} = \frac{R^2}{e} = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{e}$$

même formule que pour le condensateur plan.

## 207 Groupement de condensateurs -

On peut relier les condensateurs en surface ou en cascade.

1°/ Soient, par exemple, trois condensateurs 1, 2, 3, de capacité  $C_1, C_2, C_3$ ; réunissons par un même fil les armatures externes et par un autre fil les armatures internes. Les condensateurs sont reliés en surface.



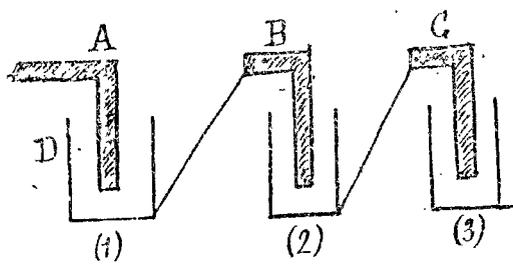
$V_1, V_0$  étant les potentiels, la quantité totale d'électricité répandue sur les armatures internes sera :

$$m = (C_1 + C_2 + C_3)(V_1 - V_0)$$

et elle sera  $-m$  sur les armatures externes.  
La capacité du système est :

$$\frac{m}{V_1 - V_0} = C_1 + C_2 + C_3$$

2°/ Réunissons l'armature externe de (1) avec l'armature interne de (2) et ainsi de suite, comme l'indique la figure; les condensateurs sont en cascade.



Pour obtenir une différence de potentiel  $V_1 - V_0$  entre les armatures extrêmes, il sera nécessaire de communiquer à l'armature A une certaine charge  $m$ , et si nous négligeons l'électricité distribuée sur les fils fins de jonction, nous aurons, en désignant par  $V_B, V_C$  les potentiels des armatures B, C, et par  $m_B, m_C$  leurs charges :

$$m = C_1(V_1 - V_B)$$

$$m_B = C_2(V_B - V_C)$$

$$m_C = C_3(V_C - V_0)$$

Mais si l'on considère le condensateur formé par l'ar-

mature externe D reliée à l'armature interne B, on doit avoir  $\sum m = 0$

Or D porte une charge  $-m$ ; donc  $-m + m_B = 0$ ;  $m_B = m$ , et de même  $m_B = m_C = m$ .

Donc:

$$\frac{m}{C_1} = V_1 - V_B, \quad \frac{m}{C_2} = V_B - V_C, \quad \frac{m}{C_3} = V_C - V_0$$

et en ajoutant

$$m \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = V_1 - V_0$$

L'inverse de la capacité du système en cascade est la somme des inverses des capacités individuelles des condensateurs.

## § 5 - Notions générales d'électrométrie<sup>(1)</sup>

En électrométrie, deux espèces de grandeurs sont à mesurer :

1° La force électromotrice ou différence de potentiel entre deux points, notamment la force électromotrice aux bornes d'un générateur ou récepteur, entre deux points du conducteur d'un courant permanent (n° 74) etc....

2° La charge d'un corps électrisé, notamment celle du plan d'épreuve qui permet l'étude expérimentale de la distribution superficielle. (n° 194).

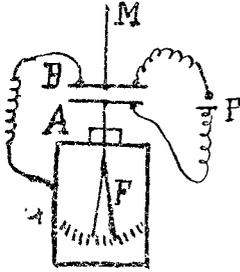
On peut mesurer les forces électromotrices par l'électromètre absolu dont nous avons déjà parlé, et les quantités d'électricité par le galvanomètre balistique. Mais il y a d'autres méthodes, plus sensibles.

### 208 - Electroscope condensateur de Volta -

on exige'  
 L'électroscope à feuilles d'or donne une faible déviation pour 200 Volts; Volta l'a rendu sensible au volt en y adjoignant un condensateur formé de deux plateaux vernis. L'un d'eux A, en communication avec les feuilles d'or F, remplace le bouton de l'électroscope ordinaire; l'autre B, en communication avec la cage C, repose sur A; mais il

(1) E. Carvallo, Leçons d'électricité.

peut être déplacé au moyen d'un manche de verre isolant M. On met par exemple (A, F) au pôle + de l'élément de pile à l'étude P; (B, C) au pôle -. On supprime les communications avec la pile, puis on éloigne le plateau B.

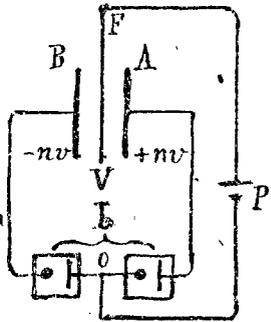


On voit alors les feuilles d'or diverger. L'électroscope forme un condensateur; l'armature intérieure est (A, F); l'armature extérieure est primitivement (B, C). Quand on retire B, la capacité est considérablement réduite, divisée par 250 pour prendre un exemple. Alors la différence de potentiel entre F et C est multipliée par 250 puisque la charge est demeurée constante. Ses feuilles

les d'or divergent donc, avec un seul élément P, comme le feraient celles de l'électroscope ordinaire avec 250 éléments. C'est par cette méthode que Volta a reconnu la force électromotrice de sa pile et l'addition des forces des éléments d'une batterie.

## 209 - Electromètre symétrique hétérostatique

L'appareil de Hanchel se compose d'une feuille d'or F qui pend entre deux plateaux verticaux A et B. Ceux-ci sont aux pôles d'une batterie auxiliaire b contenant 2n éléments de force électromotrice connue E. Pour connaître la force électromotrice E' d'un élément P, on joint son pôle + à F et son pôle - au milieu O de la batterie b.



Les excès des potentiels des pièces A B F sur celui du point O sont respectivement:

$$+nE, \quad -nE, \quad +E'$$

Ses réactions du diélectrique contre le déplacement électrique sont donc:

$$E_{FA} = nE - E' \quad E_{BF} = E' + nE$$

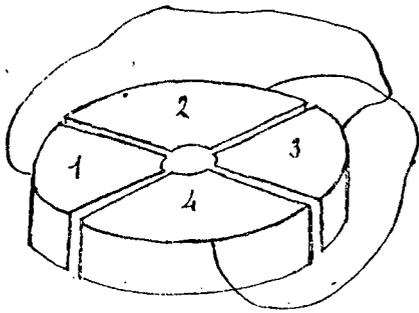
Deux forces sollicitent F, l'une vers A, l'autre vers B; elles sont proportionnelles aux carrés des différences de potentiel (n° 191):  
 Leur résultante est donc mesurée par la différence

$$(E' + nE)^2 - (nE - E')^2 = 4nEE'$$

ainsi les indications de l'instrument sont dues à une force proportionnelle à  $E'$  ; de plus, sa sensibilité, proportionnelle à la force électromotrice de la batterie auxiliaire, peut être multipliée et réglée à volonté.

L'appareil est symétrique. Il est dit hétérostatique parce qu'il emprunte à une pile étrangère son facteur de multiplication  $4 \cdot n E$ .

## 210 - Electromètre à quadrants de W. Thomson. <sup>(1)</sup>

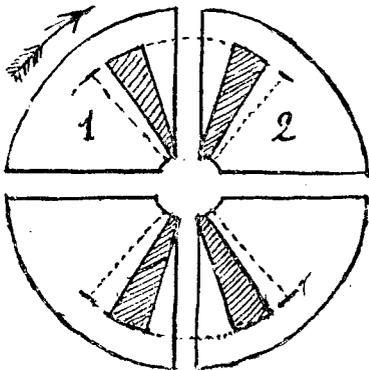


Cet appareil se compose essentiellement d'une boîte cylindrique plate divisée en 4 secteurs égaux, isolés les uns des autres. A l'intérieur de cette boîte peut se mouvoir, parallèlement aux faces, une aiguille très légère ayant la forme d'un double secteur circulaire.

Les quadrants opposés par le sommet communiquent métalliquement entre eux et sont isolés des deux autres.

L'aiguille est suspendue par un fil métallique dont la torsion équilibre les actions électriques et sert à établir la communication avec une source au potentiel  $\psi_0$ .

Soient  $\psi_1$  le potentiel des quadrants impairs,  $\psi_2$  celui des quadrants pairs. L'aiguille forme avec chaque quadrant un condensateur dans lequel on peut considérer deux portions :



1° Une portion moyenne pour laquelle la distribution est régulière.

(ombrée sur la figure)

2° Une portion irrégulière formée des régions voisines soit du bord de l'aiguille soit du bord de la fente.

Lorsque l'aiguille tourne d'un petit angle  $d\alpha$ , dans le sens de la flèche par exemple (pratiquement on ne dépasse jamais  $3^\circ$ ),

chacune des portions de distribution irrégulière reste

(1) Cours de M. Le-S<sup>t</sup> Colonel Lafay.

identique à ce qu'elle était avant la rotation. Seules, les plages régulières des quadrants pairs augmentent de  $d\alpha$  tandis que les plages des quadrants impairs diminuent de  $d\alpha$ .

La capacité du quadrant (2) croît d'une quantité  $c d\alpha$  proportionnelle à la rotation, ce qui, à charges constantes, correspond à une diminution d'énergie  $-\frac{1}{2} c d\alpha (\psi_0 - \psi_2)^2$ .

Pour la même raison la capacité du condensateur (1) diminue de  $c d\alpha$  et l'énergie augmente de  $\frac{1}{2} c d\alpha (\psi_0 - \psi_1)^2$ .

En tenant compte des 4 quadrants, on a donc :

$$-dW = c d\alpha \left[ (\psi_0 - \psi_2)^2 - (\psi_0 - \psi_1)^2 \right]$$

Si  $K$  désigne le moment du couple qui peut faire équilibre aux forces électriques, on a :

$$K = -\frac{dW}{d\alpha} = c \left[ (\psi_0 - \psi_2)^2 - (\psi_0 - \psi_1)^2 \right]$$

Ce couple est indépendant de la position de l'aiguille; celle-ci tourne donc jusqu'à ce que le couple développé par la résistance du fil tordu soit égal à  $K$ .

Si  $\tau$  désigne la constante de torsion de ce dernier, et  $\alpha$  l'angle dont a tourné l'aiguille, on aura :

$$K = \tau \alpha = c \left[ (\psi_0 - \psi_2)^2 - (\psi_0 - \psi_1)^2 \right]$$

$$\alpha = \frac{2c}{\tau} (\psi_1 - \psi_2) \left( \psi_0 - \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right)$$

Mode d'emploi. -

1°/ Avec Kelvin mettons l'aiguille en communication avec une source dont le potentiel  $\psi_0$  est très élevé et maintenu constant. (armature d'une bouteille de Leyde, maintenue chargée par un appareil nommé "replenisher");

$\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$  devient négligeable par rapport à  $\psi_0$ .  
2°/ La différence de potentiel à mesurer  $\psi_1 - \psi_2$  est proportionnelle à  $\alpha$ .

2°/ Maintenons les quadrants à des potentiels  $\psi_1$  et  $\psi_2 = -\psi_1$  élevés en valeur absolue. (on charge les quadrants avec une batterie de piles dont le milieu est relié au sol).

On a alors 
$$\varphi_0 = \frac{\tau}{4C\varphi_1} \alpha$$

On pourra, de l'angle  $\alpha$  (positif ou négatif) déduire la mesure de la différence de potentiel  $\varphi_0$  entre le sol et l'aiguille.

3°/ On peut, comme l'a fait Joubert, relier l'aiguille à une des paires de quadrants (1, 3). On aura :

$$\varphi_1 = \varphi_0 \quad \alpha = \frac{C}{\tau} (\varphi_0 - \varphi_2)^2$$

La déviation de l'aiguille est toujours de même sens, quel que soit le signe de  $(\varphi_0 - \varphi_2)$ , et cette disposition est particulièrement avantageuse quand il s'agit de mesurer la différence de potentiel entre les pôles d'une machine à courants alternatifs.

La remarque suivante s'applique à tous les électromètres. Il faut à l'instrument des supports, une cage. Celle-ci doit être à un potentiel bien défini et connu. On la relie toujours au sol dont le potentiel peut être pris comme zéro.

## . 211 - Applications des électromètres -

1°/ On peut se servir de l'électromètre pour l'étude du potentiel le long du circuit d'une pile, mais tandis que le voltmètre utilise un courant, l'électromètre n'en comporte aucun, et peut servir en outre à mesurer les différences de potentiel d'un champ purement électrostatique.

2°/ Le cylindre de Faraday permet de mesurer la charge d'un corps en valeur absolue; on mesure par le galvanomètre taré le déplacement induit à travers le cylindre. Si l'on veut seulement des mesures relatives, on peut employer l'électroscope: on met le cylindre en communication lointaine avec le bouton de l'électroscope dont la cage est au sol. Avec des charges connues on gradue l'appareil qui peut servir ensuite à mesurer de nouvelles charges.

En particulier, ces charges peuvent être celles qu'un plan d'épreuve recueille sur la surface d'un conducteur. La méthode permet donc d'étudier la distribution super-

ficielle.

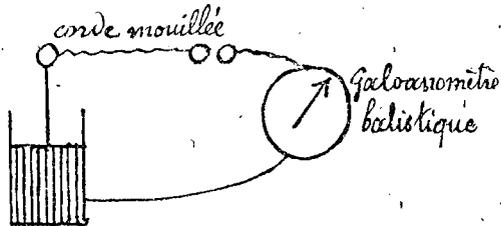
On trouve que les charges se portent aux extrémités saillantes des conducteurs; la densité superficielle est d'autant plus grande que la courbure est plus accentuée. Elle serait infinie aux pointes si la rigidité diélectrique n'était rompue: chacun connaît le puvoir des pointes de laisser passer le courant dans l'air; l'agitation de l'air, manifestée par une bougie, montre qu'il s'agit ici d'un courant de convection. (1).

## 212 - Détermination du rapport C des unités électromagnétiques et électrostatiques -

Weber et Kohlrausch ont mesuré de deux manières différentes la charge d'un même condensateur.

1°/ Mesure électrostatique. - On détermine par communication lointaine le rapport de la capacité du condensateur à celle d'une grosse sphère isolée, puis la différence de potentiel entre les armatures avec un électromètre gradué en valeur absolue.

2°/ Mesure électromagnétique. - On décharge le condensateur dans un galvanomètre balistique. Pour éviter une décharge trop brusque qui pourrait percer les couches isolantes séparant les fils du galvanomètre, on intercale dans le circuit un corps mauvais conducteur comme une corde mouillée.



Connaissant la forme du cadre du galvanomètre et le nombre de tours du fil, on peut en déduire la constante galvanométrique; l'observation de l'élongation permet alors de calculer en unités électromagnétiques la quantité  $q$  d'électricité qui a traversé le circuit. Si  $x$  et  $y$  désignent les nombres obtenus dans chaque mesure,  $m$  et  $q$  les grandeurs prises comme unité, on a:

$$x m = y q \quad \frac{q}{m} = \frac{x}{y} = C$$

L'expérience donne  $C = 3 \cdot 10^{10}$   
Lord Kelvin a employé une méthode différente; il a déduit  $C$  de la mesure d'une force électromotrice dans les deux systèmes.

(1) Le courant est produit par des ions.

# Chapitre VIII

Equations générales de l'élec-  
tromagnétisme dans les milieux  
en repos par rapport à l'observa-  
teur.

## 213. ~ Premier groupe d'équations de Maxwell. ~

Imaginons que dans l'espace règnent un champ électrique et un champ magnétique, dont l'intensité, est pour tous deux, fonction du temps et de la position du point considéré.

Quelles sont les relations qui existent entre les deux champs?  
Deux équations fondamentales résultent immédiatement des deux lois de l'induction magnétique (N° 145).

1°) Loi. — Le flux du vecteur induction magnétique  $\vec{B}$  est conservatif. On a donc, en tout point du champ:

(278)

$$\text{Div. } \vec{B} = 0$$

ou, en notations cartésiennes:  $\frac{dB_x}{dx} + \frac{dB_y}{dy} + \frac{dB_z}{dz} = 0$

2°) Loi. — La circulation du vecteur force magnétique  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$  le long de tout contour fermé est égal au flux du vecteur courant qui le traverse, multiplié par  $4\pi$ .

Nous admettons, avec Maxwell, que les courants de déplacement, dans un diélectrique, produisent les mêmes effets magné-

tiques que les courants de conduction. Nous admettrons aussi que la convection électrique (déplacement de charges) produit les mêmes effets qu'un courant de conduction<sup>(1)</sup> et par suite qu'il n'y a que deux catégories de courants, les courants de conduction et de convection d'une part, les courants de déplacement d'autre part.

Considérons un contour fermé  $C$ , et une surface  $S$  limitée à ce contour; soit  $\delta$  le vecteur courant en un point de  $S$ . La loi s'exprime par la formule:

$$\int_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = 4\pi \iint_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) ds$$

Appliquons le théorème de Stokes (n°11) à l'intégrale de ligne:

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\text{curl} \vec{H} \cdot \vec{n}) ds$$

Il résulte de ces deux équations l'équation locale, c'est-à-dire valable en un point, quelconque d'ailleurs.

(279)

$$4\pi \vec{j} = \text{curl} \vec{H}$$

ou, en notations cartésiennes:

$$\begin{cases} 4\pi j_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 4\pi j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ 4\pi j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{cases}$$

Si  $j$  n'est pas nul, la condition d'intégrabilité de  $H$  n'étant plus satisfaite  $\vec{H}$  ne dérive plus d'un potentiel.

Introduisons la force électrique  $\vec{h}$ . Le courant  $\vec{j}$  est le courant total  $\vec{u} + \vec{p}$ .

1°) Dans le cas d'un conducteur parfait, on a  $\vec{p} = 0$   $\vec{j} = \vec{u} = \gamma \vec{h}$  (n°74), et l'équation (279) s'écrit:

(1) Ceci résulte d'une expérience fondamentale de Rowland, que nous exposerons bientôt.

(280)  $4\pi \vec{j} \cdot \vec{h} = \text{curl. } \vec{H} \cdot \vec{h}$  étant mesuré en unités c.g.s. électromagnétiques.

2°). Dans un diélectrique parfait,  $\vec{u} = 0$  et

$$\vec{j} = \vec{r} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = a \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} = \frac{\kappa}{4\pi c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On a donc:

$$(281) \quad \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{curl. } \vec{H}$$

ou (282)  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \text{curl. } \vec{H}$   $\vec{b}$  étant l'induction électrique  $\vec{K} \vec{h}_e$ , mesurée en unités électrostatiques,  $\vec{H}$  étant toujours mesuré en gauss.

## 214. ~ Second groupe d'équations de Maxwell. ~

Les équations (278) et (279) forment un premier groupe qui ne suffit pas pour déterminer l'état du milieu. Un second groupe est donné par les théorèmes de Kirchhoff généralisés (n° 195 et 198).

1<sup>re</sup> Loi. — Le flux du vecteur courant est conservatif. C'est la loi d'incompressibilité de l'électricité, étendue aux courants de déplacement.

$$(283) \quad \boxed{\text{Div. } \vec{j} = 0} \quad (\vec{j} = \vec{u} + \vec{r})$$

ou, en notations cartésiennes:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$$

2<sup>ème</sup> Loi. — La force électromotrice totale est nulle sur tout contour fermé. Comme nous l'avons vu au n° 198, la force électromotrice totale comprend deux parts: la force appliquée

et la force d'inertie.

La force appliquée comprend plusieurs parties: les forces des générateurs et récepteurs  $\Sigma E$ , les forces contre-électromotrices de Joule, et les forces contre-électromotrices  $(\int -\frac{\partial}{\partial t} ds)$  dues à la réaction des diélectriques.

La somme algébrique de ces forces électromotrices, le long du contour, représente le travail total des forces appliquées pour le déplacement électrique virtuel  $\delta q = 1$ . D'autre part le travail des forces d'inertie est le flux du vecteur  $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  à travers le contour. Le total est nul: c'est le théorème des travaux virtuels. En d'autres termes, il y a équilibre, comme en mécanique, entre les forces appliquées et la force d'inertie.

En tout point, le vecteur force électrique représente en grandeur, direction, et sens, l'action qui s'exercerait sur un très petit corps chargé de l'unité de quantité d'électricité positive. Nous avons défini cette force électrique 1° dans un conducteur parcouru par un courant (n° 74). 2° dans la couche de passage d'un conducteur à un autre (n° 75), dans un diélectrique (n° 135) et nous avons admis sa continuité dans la couche de passage entre un conducteur et un diélectrique (n° 205). Elle est ainsi continue dans tout le champ. Dans tous les cas, le long d'une ligne AB, l'intégrale

$\int_{A \rightarrow B} \mathbf{h} ds$  est égale à la force électromotrice totale appliquée de A à B. On a donc, pour tout contour fermé.

$$-\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) ds - \int_C \mathbf{h} ds = 0$$

ou, d'après le théorème de Stokes:

$$-\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) ds = \iint_{\Sigma} (\text{curl } \vec{h} \cdot \vec{n}) ds$$

D'où

(284)

$$\boxed{-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{curl } \vec{h}}$$

( $\mathbf{h}$  étant exprimé en unités électromagnétiques)

en notations cartésiennes:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

Si  $B$  varie avec le temps la condition d'intégrabilité de  $h$  n'étant plus satisfaite,  $h$  ne dérive plus d'un potentiel.

Suivant que le milieu est un conducteur parfait ou un diélectrique parfait on a :

$$(285) \quad \begin{cases} \text{Div. } \vec{u} = 0 & \text{milieu conducteur} \\ \text{Div. } \vec{h} = 0 & \text{milieu diélectrique} \end{cases}$$

$$(286) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{curl. } \frac{\vec{u}}{\gamma} && \text{milieu conducteur} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{curl. } h_e && \text{milieu diélectrique, } h_e \end{aligned}$$

étant la force du champ électrostatique exprimé dans le système d'unités électrostatiques.

Enfin, si le milieu considéré n'est pas ferromagnétique et si  $\mu$  peut être considéré comme constant, on peut encore écrire :

$$(287) \quad \begin{aligned} -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \text{curl. } \frac{\vec{u}}{\gamma} && (\text{conducteur}) \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \text{curl. } h_e && (\text{diélectrique}). \end{aligned}$$

Les formules (286) et (287) s'appliquent aux points intérieurs aux milieux. Nous avons implicitement supposé, et nous supposons encore dans la suite, que ces milieux sont homogènes et par suite qu'il ne se produit pas de forces électromotrices de contact à l'intérieur de ces milieux. Pour des milieux non homogènes, il faudrait, dans les équations (286) et (287) ajouter une force électrique à la force  $\frac{\vec{u}}{\gamma}$  et une autre force à la force  $h_e$ .<sup>(1)</sup>

Nous devons remarquer que les équations (282) et (284) sont absolument de même forme, les rôles des inductions  $\vec{b}$  et  $\vec{B}$  et des forces  $\vec{h}$  et  $\vec{H}$  étant permutés. Toutefois, les premiers membres ne sont pas affectés du même signe; le signe - dans l'équation (284) résulte, en somme, de la loi de Lenz.

(1) Voir E. Carvallo. l'Electricité allocation Scientia n° 6 m 7)

Les équations générales:

$$(288) \begin{cases} \text{Div. } \vec{B} = 0 \\ \text{Div. } \vec{J} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 4\pi \vec{J} = \text{curl. } \vec{H} \\ \frac{\partial \vec{B}}{c \partial t} = \text{curl. } \vec{h}_e \text{ (en unités électrostatiques)} \end{cases}$$

sont les équations fondamentales de l'électricité.

Plus encore, elles dominent toute la science. Elles contiennent la théorie de la lumière; elles contiennent le principe de relativité et la mécanique nouvelle.

Elles conduisent à la notion de l'espace-temps à quatre dimensions.

## 215. ~ Equations du passage d'un milieu à un autre. ~

Dans la couche de passage, la constante diélectrique, la perméabilité, la conductibilité, doivent varier d'une manière continue depuis leurs valeurs dans le milieu 1 jusqu'à leurs valeurs dans le milieu 2. Dans la couche, les équations fondamentales restent applicables en chaque point; autrement dit toutes les dérivées qui figurent dans les composantes de curl.  $\vec{H}$  et de curl.  $\vec{h}$  doivent conserver des valeurs finies.

Supposons que la surface de contact soit le plan des  $x, y$ ; puisque les dérivées  $\frac{\partial h_y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial h_x}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial H_y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial H_x}{\partial z}$  doivent rester finies,

il s'ensuit que, si l'épaisseur  $\delta z$  de la couche est extrêmement petite, les différences des  $h_x, h_y, H_x, H_y$  doivent elles aussi être extrêmement petites, de sorte qu'à la limite, pour une couche infiniment petite,  $\delta z$ , on a:

$$(289) \quad h_{1x} = h_{2x} \quad h_{1y} = h_{2y} \quad H_{1z} = J_z = H_{2z} = H_{2y}$$

Les composantes tangentielles des forces électrostatiques et magnétiques.

que sont continues.

D'autre part, l'incompressibilité de  $\vec{j}$  et de  $\vec{B}$  entraîne la conservation du flux dans un tube de vecteur de part et d'autre de la surface de séparation, c'est à dire que les composantes normales du courant total et de l'induction magnétique sont continues.

$$(290) \quad j_{1z} = j_{2z} \quad ; \quad B_{1z} = B_{2z}$$

Nous envisagerons trois cas:

1°) Passage d'un conducteur à un autre:

$$(291) \quad \frac{U_{1x}}{\gamma_1} = \frac{U_{2x}}{\gamma_2} \quad ; \quad \frac{U_{1y}}{\gamma_1} = \frac{U_{2y}}{\gamma_2} \quad U_{1z} = U_{2z}$$

2°) Passage d'un diélectrique à un autre:

$$(292) \quad h_{e1x} = h_{e2x} \quad h_{e1y} = h_{e2y} \quad K_1 \frac{\partial h_{e1z}}{\partial t} = K_2 \frac{\partial h_{e2z}}{\partial t}$$

3°) Passage d'un diélectrique à un conducteur:

$$(293) \quad \frac{U_{1x}}{\gamma_1} = h_{e2x} \quad \frac{U_{1y}}{\gamma_1} = h_{e2y} \quad U_{1z} = \frac{K_2}{4\pi\epsilon} \frac{\partial h_{e2z}}{\partial t}$$

( $h$  étant exprimé en unités électromagnétiques)

Si le champ initial  $h$  est nul, l'intégration des troisièmes équations des deux derniers groupes de formules donnent:

$$(294) \quad h_{2z} = h_{1z} \int U_{1z} dt = \frac{K_2}{4\pi\epsilon} h_{1z}$$

## 216. ~ Équations du courant, de la force électrique et de la force magnétique. ~

Revenons aux équations:

$$(295) \quad 4\pi \vec{j} = \text{curl } \vec{H}; \quad - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{curl } \vec{h} \quad (\text{unités électromagnétiques})$$

Supposons la perméabilité constante;  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ; nous pouvons

éliminer  $H$  entre ces équations. Nous avons en effet :

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{curl. } \vec{H} = \text{curl. curl } \vec{h}$$

remplaçant  $\text{curl. } \vec{H}$  par  $4\pi \vec{j}$  :

$$(296) \quad -4\pi \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \text{curl. curl } \vec{h}$$

or on a :

$$\text{curl. curl } \vec{h} = -\text{grad. div. } \vec{h} - \Delta \vec{h} \quad (1)$$

On a donc finalement l'équation générale :

$$(297) \quad 4\pi \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \text{grad. div. } \vec{h} + \Delta \vec{h}$$

Valable pour les milieux homogènes, conducteurs ou diélectriques. Nous envisageons deux cas :

1°) Cas des conducteurs. — On a  $\vec{h} = \frac{\vec{u}}{\gamma}$  ; le conducteur étant supposé homogène  $\gamma$  est constant, et  $\gamma$  comme  $\text{div. } \vec{u} = 0$ , on a  $\text{div. } \vec{h} = 0$ , par suite

$$(298) \quad 4\pi \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \Delta \vec{u} \quad \text{L'équation du courant.}$$

2°) Cas d'un diélectrique sans charges libres. — on a

$$\vec{j} = \vec{p} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\kappa}{4\pi c^2} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \quad \text{D'autre part } \text{div. } \vec{h} = 0, \text{ d'après l'équa-}$$

tion de Laplace (n° 15) puisqu'il n'y a pas d'électricité libre dans le diélectrique ( $\rho = 0$ ). L'équation (297) s'écrit donc :

$$(299) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\kappa \mu} \Delta \vec{h}} \quad \text{équation de la force électrique}$$

l'équation reste la même, quelque soit le système d'unités dans lequel  $h$  est exprimé.

3°) De même, en éliminant  $h$  entre les équations (295) on

(1) Équation qui s'établit immédiatement en écrivant les composantes du curl. de  $h$ , puis les composantes du curl. de ce nouveau vecteur.  $\Delta \vec{h}$  est le vecteur dont les composantes sont  $\Delta h_x, \Delta h_y, \Delta h_z$ .

obtient l'équation de la force magnétique:

$$(300) \quad 4\pi\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \Delta \vec{H} \text{ milieu conducteur.}$$

$$(301) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\kappa\mu} \Delta \vec{H}} \text{ milieu diélectrique.}$$

Si le milieu est anisotrope (cristaux), les constantes  $\gamma$ ,  $\kappa$  et  $\mu$  doivent être remplacées par un système de constantes, un système linéaire définissant une fonction vectorielle linéaire.

### Détermination du problème de l'électrodynamique.

Par une surface, isolons dans un champ un système de conducteurs et de diélectriques (supposés parfaits et à perméabilité  $\mu$  constante). Dans chaque milieu on connaît l'équation vectorielle indéfinie du courant  $\vec{u}$ , ou du champ  $\vec{h}$ , ainsi que du champ  $\vec{H}$ . Elle est du second ordre par rapport aux coordonnées.

On connaît en outre l'équation vectorielle à chaque surface de discontinuité (n.º 215) qu'on fournisse les coordonnées suivantes: 1º  $\vec{u}$  (ou  $\vec{h}$ ) et  $\vec{H}$  en chaque point à l'origine du temps; 2º ces vecteurs et leurs dérivées suivant la normale à la surface limite, à toute époque; le problème du calcul de  $\vec{u}$  (ou  $\vec{h}$ ) et  $\vec{H}$  dans tout l'espace et à toute époque sera déterminé.

non exigé

## 217. ~ Énergie du champ électromagnétique. (1)

Les équations du mouvement d'un système à liaisons s'expriment en écrivant que le travail total des forces appliquées et d'inertie est nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons. Pour avoir l'équation différentielle de l'énergie, on écrit la même condition, non plus pour un déplacement virtuel quelconque, mais pour celui qui se produit effectivement dans le temps  $dt$ .

Le déplacement qui se produit peut être décomposé en...

(1) D'après M. E. Carvallo L'électricité, collection scientia.

infinité d'autres; ils correspondent à tous les déplacements effectifs  $dq$  qui se produisent dans le temps  $dt$  suivant les divers tubes de courant qu'on trouve à l'époque  $t$ . Il nous suffira de considérer un de ces tubes et d'ajouter au résultat ceux qu'on trouverait en considérant les autres tubes.

Considérons une ligne de courant  $c$  dont l'élément est  $ds$ , et une surface  $S$  limitée par  $c$ . L'équation d'équilibre des forces sur le contour  $c$  est:

$$(202) \quad - \int_c \vec{h} ds - \iint_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) ds = 0 \quad (\text{n}^\circ 214)$$

forces appliquées
forces d'inertie

Considérons un tube infiniment mince de courant ayant pour axe cette ligne, et soit  $i$  son intensité. En multipliant par  $i dt$  les deux intégrales de (302), nous aurons la portion de l'énergie qui correspond à ce tube, savoir:

$$(303) \quad dt \left[ - \int_c \vec{h} i ds - i \iint_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) ds = 0 \right]$$

Nous allons transformer l'intégrale de surface en une intégrale de ligne, en introduisant le potentiel vecteur  $\vec{G}$ , satisfaisant à la relation:

$$\vec{B} = \text{curl} \cdot \vec{G} \quad (\text{n}^\circ 141).$$

on a

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{curl} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial t}$$

Portons cette valeur dans l'intégrale de surface; nous obtenons:

$$i \iint_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) ds = i \iint_S \left( \text{curl} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) ds = i \int_c \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} ds.$$

L'équation (303) s'écrit donc:

$$- dt \int_c \left( \vec{h} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \right) i ds = 0$$

Or  $i ds$  est le produit du vecteur courant  $\vec{j}$  par l'élément de volume  $d\tau$  de la partie du tube de courant qui a pour longueur  $ds$ . Ainsi, la partie de l'équation de l'énergie qui correspond

à un tube de courant est exprimée par une intégrale étendue aux seuls éléments  $dv$  de ce tube. On aura l'équation complète en étendant les intégrales à tout l'espace. L'équation différentielle de l'énergie est, en résumé:

$$(304) \quad -dt \iiint \left( \left[ \vec{h} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \right] \vec{j} \right) dv = dt \left[ - \iiint (\vec{h} \vec{j}) dv - \iiint \left( \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \vec{j} \right) dv \right] = 0$$

Diverses espèces d'énergie électrique. — Le premier terme  $-dt \iiint (\vec{h} \vec{j}) dv$  représente le travail des forces appliquées, l'autre terme le travail des forces d'inertie. Le produit de la troisième intégrale par  $dt$  représente donc la variation  $dT$  de l'énergie cinétique; la première intégrale est la puissance résultant des diverses forces appliquées. Cette puissance contient elle-même deux parties: la première  $P$  vient de l'échange d'inertie du système avec l'extérieur (énergie des piles, effets Peltier, Thomson, Joule); la deuxième partie de la puissance vient de l'énergie potentielle due dans les diélectriques à la force électrique (que nous avons comparée à l'énergie d'un ressort bandé). Nous allons calculer ces diverses parties de l'énergie.

Travail des forces appliquées. Puissance des générateurs.

Énergie potentielle du diélectrique. — La puissance des forces appliquées est:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \iiint (\vec{h} \vec{j}) dv$$

Si les corps sont des conducteurs ou des diélectriques parfaits, l'intégrale se partage en deux autres, savoir:

$$1^o) \quad P = \iiint \left( \left[ -\frac{u}{\gamma} + \vec{P} \right] \right) dv \text{ étendue aux conducteurs}$$

$-\frac{u}{\gamma}$  se rapportant à la force contre-électromotrice de Joule  $P$  se rapportant aux piles, aux effets Peltier et Thomson.

$$2^o) \quad -\frac{dW}{dt} = \iiint \left( \left[ -\vec{h} + \vec{P}_1 \right] \cdot \frac{K}{4\pi c^2} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \right) dv \text{ étendue aux diélectriques.}^{(1)}$$

(voir (1) à la page suivante)

La première intégrale représente donc la puissance totale  $P$  fournie au système par les générateurs, les récepteurs et l'effet Joule. La seconde est la dérivée du travail produit par les réactions du diélectrique; elle dérive du potentiel.

$$W = \frac{K}{8\pi c^2} \iiint h^2 dv - \frac{K}{4\pi c^2} \iiint (\vec{P}_1, \vec{h}) dv$$

En général les forces électromotrices qui résident dans les diélectriques sont négligeables (et nous les avons toujours négligées dans les numéros précédents) et l'énergie potentielle se réduit au premier terme.

Si  $h_e$  est la force en unités électrostatiques:

$$(305) \quad W = \frac{K}{8\pi} \iiint h_e^2 dv$$

Ce qui est l'expression (27) déjà indiquée au n° 201.  
Travail des forces d'inertie, Énergie électrocinétique. — Nous avons trouvé pour la différentielle de l'énergie cinétique:

$$dT = dt \iiint \left( \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} - \vec{j} \right) dv$$

Il faut maintenant éliminer  $\vec{j}$  et revenir aux vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  que décèle l'expérience. Remplaçons d'abord  $\vec{j}$  par sa valeur.

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi} \text{curl } \vec{H}$$

Nous obtenons:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \text{curl } \vec{H} \right) dv = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \vec{H} \cdot \text{curl } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dv$$

Où puisque  $\text{curl } \vec{E} = -\vec{B}$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv$$

(1) Remarquons que la réaction du diélectrique est, non pas  $\vec{h}$ , mais  $-\vec{h}$ .

Si la perméabilité est uniforme, on a:

$$(306) \quad T = \frac{\mu}{8\pi} \iiint H^2 dv$$

Ce qui est l'expression déjà démontrée au n° 152 (formule 216).

## 218. — Expression du flux d'énergie sortant d'un domaine. Théorème de Poynting. —

Dans la suite, afin d'avoir plus de symétrie dans l'écriture des formules, nous évaluerons toujours la force électrique, la densité de courant, la conductivité en unités du système électrostatique, et nous supprimerons l'indice  $e$  qui nous avait servi jusqu'à présent à distinguer le vecteur  $\vec{h}_e$  évalué en unités électrostatiques<sup>(1)</sup> du même vecteur  $\vec{h}$  évalué en unités électromagnétiques. Bien entendu les grandeurs magnétiques resteront évaluées en unités électromagnétiques.

Considérons un domaine limité à une surface  $S$ , contenant des milieux conducteurs, diélectriques ou plus généralement participant à la fois aux propriétés des conducteurs et des diélectriques c'est-à-dire possédant à la fois une conductivité  $\gamma$  et un pouvoir inducteur spécifique  $K$ . Supposons que la perméabilité de chaque milieu soit indépendante de  $H$ .

Nous avons vu (n° 77) que l'énergie apportée par l'effet Joule dans le domaine (limité par  $S$ ), pendant l'unité de temps est:

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint \frac{1}{\gamma} v^2 dv = \iiint \gamma h^2 dv$$

Expression encore exacte ici où  $\gamma$  et  $h$  sont exprimés en unités

(1) Dans un conducteur, on écrira encore  $\vec{u} = \gamma \vec{h}$ ; la valeur numérique de  $\vec{u}$  en unités électrostatiques est  $C$  fois plus grande que sa valeur en unités électromagnétiques; comme la valeur de  $h$  est  $C$  fois plus petite, la valeur de  $\gamma$  est  $C^2$  fois plus grande.

électrostatiques. D'autre part, la somme des énergies électrostatiques (potentielle) et magnétiques (cinétique) localisées dans le domaine est:

$$W+T = \iiint \frac{K}{8\pi} h^2 dv + \iiint \frac{\mu}{8\pi} H^2 dv'$$

(n° 152 formule 216, n° 201 formule 271 et n° 217)

L'accroissement d'énergie dans le domaine, par unité de temps est donc:

$$(307) \quad \frac{d}{dt}(Q+W+T) = \iiint \left[ \gamma h^2 + \frac{K}{4\pi} \left( \vec{h} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \right) \right] dv + \iiint \frac{\mu}{4\pi} \left( \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dv$$

Or le courant total  $\vec{j}$  est la somme du courant de conduction  $\gamma \vec{h}$  et du courant de déplacement  $\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$ ; la première intégrale s'écrit donc:

$$(308) \quad \iiint (\vec{h} \vec{j}) dv$$

On a d'autre part les équations de Maxwell (279) et (284), qui s'écrivent, en remarquant encore que  $\vec{j}$  et  $\vec{h}$  sont exprimés dans le système électrostatique.

$$4\pi \frac{\vec{j}}{c} = \text{curl } \vec{H} \quad \text{d'où } \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{curl } \vec{H}$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{curl } \vec{h}$$

Remplaçant  $\vec{j}$  et  $\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  par leurs valeurs dans (307) et (308), on obtient:

$$\frac{d}{dt}(Q+W+T) = \frac{c}{4\pi} \iiint \left[ (\vec{h} \text{curl } \vec{H}) - (\vec{H} \text{curl } \vec{h}) \right] dv = \frac{c}{4\pi} \iiint \text{div} [\vec{H} \vec{h}] dv \quad (1)$$

Appliquons le théorème de Gauss et posons:

$$(309) \quad \vec{R} = \frac{c}{4\pi} [\vec{h} \vec{H}] \quad [\text{dans l'ordre } \vec{h} \vec{H}], \text{ On a:}$$

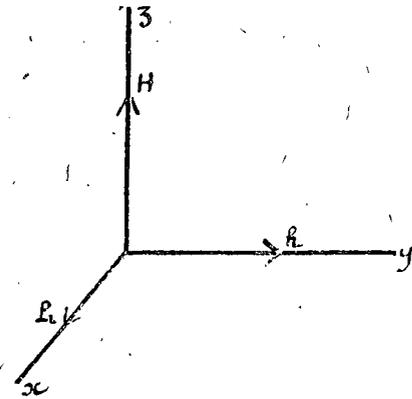
(1) Il est facile d'établir que  $(\vec{h} \text{curl } \vec{H}) - (\vec{H} \text{curl } \vec{h}) = \text{Div} [\vec{H} \vec{h}]$ . Il n'y a qu'à écrire les deux scalaires du 1<sup>er</sup> membre en appliquant la formule 10 du n° 2, puis appliquer la formule (3) qui donne les composantes du produit vectorel  $[\vec{H} \vec{h}]$  et prendre la divergence de ce vecteur-produit.

(2) Ne pas oublier que  $\vec{j}$  étant exprimé en unités électrostatiques a une valeur numérique  $c$  fois plus grande que dans le système électromagnétique, d'où la disparition de  $c$  au dénominateur de l'expression du courant de déplacement.

$$-\frac{d}{dt}(Q+W+T) = + \iint_S (\vec{R} \cdot \vec{n}) dS$$

La diminution, dans l'unité de temps, de l'énergie localisée dans le domaine, est donc égale au flux du vecteur  $\vec{R}$  sortant par la surface qui limite ce domaine.

Le vecteur  $\vec{R}$  est le vecteur radiant.



Le vecteur radiant est normal aux champs électrique et magnétique puisqu'il est égal, à une constante près, au produit vectoriel  $[\vec{h} \vec{H}]$ . Il est dirigé dans le sens de l'axe du cycle construit sur  $\vec{h}$  et  $\vec{H}$ , c'est à dire vers la gauche de l'observateur d'Ampère couché sur la force électrique, et tourné vers la force magnétique.

L'intégration dans un domaine infiniment étendu, en tous les points de la surface, duquel  $h=0$   $H=0$  donne une variation nulle de l'énergie totale. On retrouve la loi de la conservation de l'énergie.

# Chapitre IX -

## Théorie électromagnétique de la lumière.

### § 1. - Les ondes électromagnétiques et la lumière.

#### 219 - Propagation des perturbations électriques et magnétiques -

Considérons un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique  $K$  et de perméabilité  $\mu$ .  
 Ses équations de Maxwell :

$$(309) \quad \begin{cases} \frac{K}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \text{curl. } \vec{H} \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{curl. } \vec{h} \end{cases}$$

expriment le fait que, si la force électrique, en un point, est variable dans le temps, il y a production d'un champ magnétique, et réciproquement, que la variation, avec le temps, de la force magnétique, engendre un champ électrique.

D'autre part l'équation de la force électrique (form. 299. n° 216) :

$$\frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K\mu} \Delta \vec{h}$$

et l'équation absolument semblable de la force magnétique (form. 301) :

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K\mu} \Delta \vec{H}$$

prouvent que la perturbation ne reste pas localisée.

On reconnaît, en effet, dans chacune de ces équations, l'équation différentielle qui exprime la propagation de la variable  $h$  ou  $H$  avec la vitesse :

(310)

$$\frac{c}{\sqrt{K\mu}}$$

les vecteurs  $\vec{h}$  et  $\vec{H}$  restant liés par les équations (309).  
L'ensemble de ces deux vecteurs variables dans le temps et dans l'espace constitue une perturbation électromagnétique. Si en tous les points d'une même surface les vecteurs  $\vec{h}$  d'une part,  $\vec{H}$  d'autre part, sont identiques, on a l'onde électromagnétique, prévue par Maxwell, et montrée expérimentalement par Hertz.

Dans l'espace vide de matière,  $K=1$ ,  $\mu=1$  ; la vitesse de propagation est égale au rapport  $C$ , des unités de quantité d'électricité dans les deux systèmes électromagnétique et électrostatique.

Nous avons vu que ce rapport est égal à  $3 \cdot 10^{10}$ , c'est-à-dire précisément à la vitesse de la lumière dans le vide.

La propagation des perturbations électromagnétiques se conçoit aisément.

Imaginons, par exemple, un fil parcouru par un courant alternatif. Ce courant produit, dans le diélectrique environnant, un champ magnétique variable avec la même période. Ce champ magnétique induit, dans son voisinage, des courants de déplacement qui agissent à leur tour sur les éléments voisins dans le diélectrique, de sorte que la perturbation se propage de proche en proche.

## 220 - Propagation par ondes planes - Transversalité -

Supposons que les vecteurs  $\vec{h}$  et  $\vec{H}$  soient fonction du temps et à chaque instant identiques en tous les points d'un plan normal à l'axe des  $x$ .

Comme ils sont indépendants de  $y$  et de  $z$ , toutes les dérivées par rapport à ces deux variables disparaissent des équations.

Les équations fondamentales (288), dans lesquelles nous remplaçons  $\text{div. } \vec{j} = 0$  par  $\text{div. } \vec{h} = 0$  (le diélectrique étant supposé ne pas contenir d'électricité libre), et  $4\pi \vec{j}$  par  $\frac{K}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$ , donnent immédiatement :

$$(311) \quad \frac{\partial h_x}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial h_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

Il en résulte que  $h_x$  et  $H_x$  sont constants, et comme si l'on étendait le diélectrique à l'infini ils seraient nuls en des points infiniment éloignés, ils sont toujours nuls.

$$(312) \quad h_x = 0 \quad H_x = 0$$

Cela signifie que les forces électrique et magnétique sont dans le plan de l'onde.

Les équations de propagation (n° 219) s'écrivent, en introduisant les projections des vecteurs :

$$(313) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K\mu} \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h_z}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K\mu} \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} \end{cases} \quad (314) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K\mu} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K\mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \end{cases}$$

Elles expriment que les ondes se propagent suivant la direction  $ox$ , normale au plan de l'onde.

Les forces électrique et magnétique se propagent donc dans un diélectrique comme le feraient des vibrations transversales dans un milieu élastique.

Comme nous l'avons vu en acoustique, où nous avons étudié des équations semblables, les solutions générales des équations (313) et (314) sont :

$$(315) \quad \left. \begin{aligned} \vec{h} &= \varphi_1(x - c_1 t) + \varphi_2(x + c_1 t) \\ H &= \psi_1(x - c_1 t) + \psi_2(x + c_1 t) \end{aligned} \right\} c_1 = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$$

Supposons que le vecteur  $\vec{h}$  soit dirigé suivant  $oy$ , cherchons la direction du vecteur  $H$ .

On a  $h_x = h_z = 0$   $H_x = 0$  et les dérivées par rapport à  $y$  et  $z$  sont nulles.

Les équations fondamentales (288) n° 14, se réduisent aux suivantes :

$$(316) \quad \begin{cases} \frac{K}{c} \frac{\partial h_y}{\partial t} = - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = - \frac{\partial h_y}{\partial x} \end{cases}$$

La seconde équation donne  $H_y = 0$ . Le vecteur magnétique est donc dirigé suivant  $Oz$ . Ses forces électrique et magnétique sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

Cherchons comment sont orientées l'une par rapport à l'autre, les forces électrique et magnétique. Supposons que  $h$  se propage, par exemple, dans le sens des  $x$  croissants; on a :

$h = h_y = \varphi(x - c_1 t)$  et  $H = H_z = \psi(x - c_1 t)$ .  
 $\varphi$  et  $\psi$  ne sont pas des fonctions indépendantes l'une de l'autre, car les équations (316) donnent :

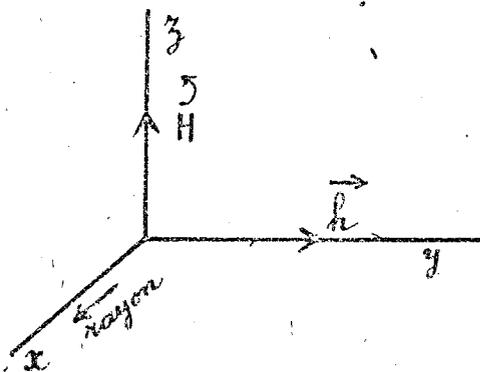
$$\frac{K}{c} c_1 \varphi' = \psi' \quad \text{et} \quad \frac{\mu}{c} c_1 \psi' = \varphi'$$

qui, l'une ou l'autre, conduisent, en remplaçant  $c_1$  par  $\frac{c}{\sqrt{K\mu}}$  à la relation :

$$\sqrt{K} \varphi' = \sqrt{\mu} \psi'$$

ou

$$(317) \quad \sqrt{K} h_y = \sqrt{\mu} H_z$$



En n'ayant pas égard aux constantes d'intégration qui sont indépendantes de  $t$  et de  $x$ ,  $h_y$  et  $H_z$  ont donc le même signe; par suite si  $h$  est dirigé suivant les  $y$  croissants,  $H$  est dirigé suivant les  $z$  croissants.

La propagation ayant lieu

suivant les  $x$  croissants, la disposition du rayon (direction et sens de propagation de l'onde) du vecteur  $\vec{h}$  et du vecteur  $\vec{H}$  est celle représentée sur la figure.

Ainsi, lorsque l'observateur fait face au rayon, il voit la rotation de  $\vec{h}$  vers  $\vec{H}$  dans le sens direct.

Ou encore, l'observateur qui reçoit le rayon d'avant en arrière et qui est traversé des pieds à la tête par le vecteur électrique, a le vecteur magnétique à sa gauche. (1)

Enfin le vecteur radiant de Poynting coïncide avec le rayon, il a le même sens; ce qui exprime que l'énergie se propage dans le sens de propagation de l'ébranlement.

Cette conclusion était à peu près évidente d'ailleurs.

Equipartition de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. — La formule (317) montre immédiatement que les énergies par unité de volume :

$$\frac{K}{8\pi} h^2 \text{ (potentielle) et } \frac{\mu}{8\pi} H^2 \text{ (cinétique)}$$

sont égales. Sa densité de l'énergie est :

$$\frac{K}{4\pi} h^2 = \frac{\mu}{4\pi} H^2$$

## 221 - Ondes planes sinusoïdales. -

### Ondes stationnaires. -

Supposons que la force électrique varie suivant une loi périodique simple :

$$(318) \quad \vec{h} = \vec{h}_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

en posant  $c = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$        $\lambda = c_1 \tau$

On déduit de la relation (317)

$$(319) \quad \sqrt{K} h = \sqrt{\mu} H$$

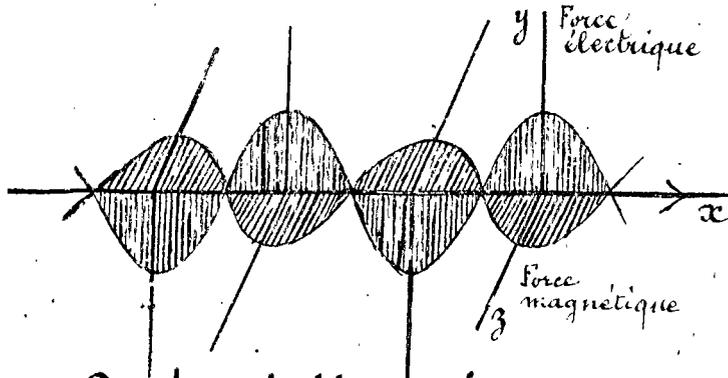
(1) On trouve la même règle en considérant une propagation vers les  $x$  négatifs.

$$H = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} h_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

ou (320) 
$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

en posant (321) 
$$H_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} h_0$$

Il est à remarquer que les relations (319) et (321) ne sont pas des équations vectorielles,  $\vec{h}$  et  $\vec{H}$  étant des vecteurs de natures différentes, d'ailleurs perpendiculaires l'un sur l'autre. Ce sont des relations entre les grandeurs de ces vecteurs.



Ses formules (318) et (320) montrent :

- 1° que  $\vec{h}$  et  $\vec{H}$  sont en concordance de phase
- 2° que dans le vide leurs amplitudes sont égales.

**Ondes stationnaires.** — Si deux trains d'ondes identiques se propagent en des sens opposés, chacun des vecteurs  $\vec{h}$  et  $\vec{H}$  donnera un système d'ondes stationnaires. Quelle sera la disposition relative de ces deux systèmes ?

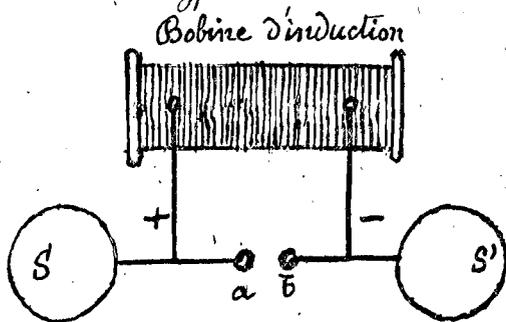
La direction de propagation, la force électrique et la force magnétique forment toujours un trièdre direct, c'est-à-dire orienté comme  $ox, oy, oz$  (avec la convention que nous avons adoptée). D'après cela, si, en un point, les ondes qui cheminent en sens opposés sont en concordance de phase pour  $\vec{h}$  (ventre), au même point les vecteurs  $\vec{H}$  ces deux ondes ont des sens opposés, c'est-à-dire sont en discordance de phase (noeud). Inversement aux points où les vecteurs  $\vec{h}$  des deux ondes sont en opposition de phase, les phases des vecteurs  $\vec{H}$  sont les mêmes.

Ainsi, dans un système d'ondes stationnaires électromagnétiques les ventres de la force électrique coïncident avec les noeuds de la force magnétique, et inversement. Les deux systèmes d'ondes stationnaires sont décalés de  $\frac{\lambda}{4}$  l'un par rapport à l'autre.

## 222. - Production des ondes électromagnétiques. - Expériences de Hertz. (2)

La production des ondes électromagnétiques est due à Hertz. Ses phénomènes que prévoit la théorie ont été vérifiés.

Hertz a obtenu des oscillations extrêmement rapides par la décharge d'un condensateur de forme particulière, de très faible capacité, constitué par deux sphères  $S$   $S'$  reliées par une tige rectiligne interrompue en  $a$  et  $b$  (excitateur de Hertz).



Chaque moitié de l'excitateur est réunie aux bornes d'une puissante bobine d'induction; lors de l'interruption du courant primaire l'électricité induite dans la bobine vient s'accumuler sur les sphères  $S$  et  $S'$  jusqu'à ce que la différence de potentiel correspondante à la distance

explosive  $ab$  soit atteinte.

À ce moment une étincelle oscillante éclate entre  $a$  et  $b$  (n° 158). Cette oscillation a une période de l'ordre du billionnième de seconde; elle est promptement amortie. Une nouvelle décharge oscillante se produit lorsque l'interrupteur de la bobine coupe de nouveau le primaire de cette dernière.

L'effet électrique ainsi réalisé est comparable à l'effet acoustique qu'on obtient en frappant périodiquement sur une cloche, à des intervalles de temps considérables par rapport à la période vibratoire, c'est-à-dire par rapport à la durée de l'état vibratoire provoqué isolément par chaque choc sur la cloche.

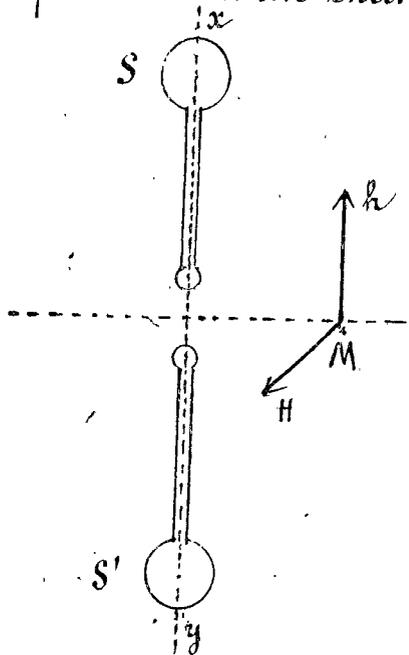
De manière à éviter l'altération des surfaces des boules  $a$   $b$ , qui doivent rester dans un état de polissage aussi parfait que possible, on les place souvent dans un liquide isolant.

Lorsque l'excitateur fonctionne, on observe dans

(1) Cours de M. le Lt Colonel Lafay.

le laboratoire la production spontanée de petites étincelles entre les conducteurs, isolés ou non, placés dans le voisinage les uns des autres, par exemple entre deux pièces de monnaie ou deux clefs qu'on rapproche; on peut également tirer des étincelles des canalisations métalliques voisines.

Si, à un instant quelconque, on considère les charges réparties sur l'excitateur, ces charges doivent provoquer l'apparition d'un champ électrique dont le vecteur  $\vec{h}$  en un point  $M$  doit être, par raison de symétrie, dans le plan  $Mxy$  déterminé par ce point  $M$  et par l'axe  $xy$  qui joint les centres des sphères.



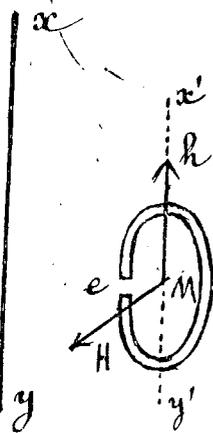
Si, de plus, le point  $M$  se trouve dans un plan équatorial élevé perpendiculairement à  $xy$  par le milieu de l'intervalle  $ab$ , le vecteur  $\vec{h}$  est parallèle à  $xy$ .

D'autre part l'existence du courant oscillant entre  $S$  et  $S'$  produit en  $M$  un champ magnétique  $H$  normal au plan  $Mxy$ .

Les vecteurs  $\vec{h}$  et  $H$  sont perpendiculaires l'un à l'autre. Ils subissent des variations dont la

période est celle de la décharge oscillante de l'excitateur. Leurs effets individuels ont été mis en évidence par le résonateur.

**Résonateur de Hertz** - Cet appareil est essentiellement constitué par un anneau métallique de forme circulaire présentant une coupure dont on règle l'écartement à l'aide d'une vis micrométrique.



Supposons le plan de ce cercle parallèle à  $xy$  et normal au plan  $Mxy$ . Le vecteur  $H$  est alors dans le plan du résonateur, le flux de  $H$  est nul et le conducteur n'est le siège d'aucun phénomène d'induction.

Au contraire, sous l'action de  $\vec{h}$  les charges tendent à se déplacer alternativement vers le haut, puis vers le bas de l'anneau et il en résulte la production d'une force électromotrice périodique entre les bords de la

coupure  $e$ , sauf cependant si celle-ci était placée en  $x'$  ou en  $y'$ ; dans ce cas, en effet, les charges amenées sur les faces opposées de la coupure seraient à tout instant égales, et il n'y aurait pas de différence de potentiel entre les bords de la coupure.

Il y a au contraire maximum d'effet si la coupure se trouve sur un diamètre parallèle à  $H$ , et une étincelle peut éclater dans la coupure.

S'expérience montre que pour obtenir des étincelles énergiques il est nécessaire de donner au résonateur des dimensions déterminées qui dépendent de l'excitateur employé. Quand on dépasse dans un sens ou dans l'autre les dimensions optima les étincelles s'affaiblissent et même disparaissent. Ce fait s'explique aisément: le circuit du résonateur est lui-même le siège d'un courant oscillant; en effet, si après avoir amené les charges sur les faces opposées de la coupure, l'action de  $h$  cessait subitement, le système se trouverait dans les conditions d'un petit condensateur brusquement fermé sur un circuit de résistance très faible par rapport à sa self; la recombinaison des charges serait oscillatoire.

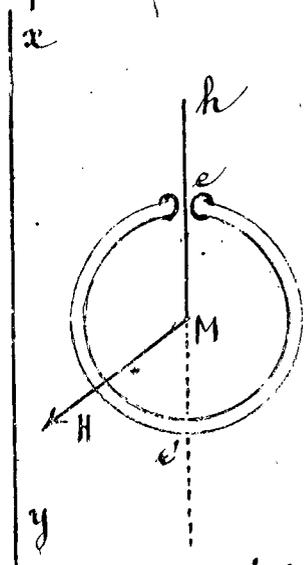
Le résonateur ayant ainsi une période qui lui est propre donnera évidemment le maximum d'effet quand cette période sera aussi voisine que possible de celle de l'excitateur (résonance).

Pour mettre en évidence l'effet du champ  $H$ , il faut placer le plan du résonateur normalement à  $H$ , c'est-à-dire le faire coïncider avec le plan  $Mxy$ .

Le flux est alors maximum, le circuit devient le siège d'un courant d'induction qui s'am-

plifie par l'effet de la résonance et produit une étincelle en  $e$ .

Pour que l'action de  $h$  ne puisse pas se superposer à l'effet d'induction il convient de placer la coupure en  $e$  ou en  $e'$  sur un diamètre  $ee'$  parallèle à  $xy$ .



On estime l'intensité relative des vecteurs en divers points de l'espace en augmentant l'écartement  $e$  jusqu'à ce que les étincelles cessent de se produire ; puis on diminue  $e$  jusqu'à ce que les étincelles partent de nouveau. La moyenne des écartements ainsi obtenus donne une idée de l'intensité du phénomène d'influence électrique ou d'induction électromagnétique dans la région où se trouve placé le résonateur.

## 222<sup>bis</sup>. — Expérience des ondes stationnaires.

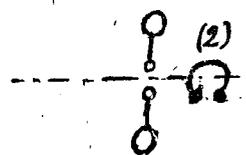
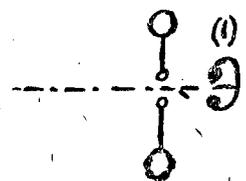
Hertz a démontré que, conformément à la théorie de Maxwell, les perturbations se propagent de proche en proche dans le diélectrique.

L'expérience prouve, en effet, que les oscillations de l'excitateur donnent un système d'ondes qui peuvent être réfléchies sur une plaque métallique de grande étendue, jouant le rôle de miroir, et que devant ce miroir il se produit des ondes stationnaires comme en acoustique ou en optique.

En maintenant le résonateur dans l'orientation (1) favorable pour observer  $\vec{h}$ , Hertz a constaté qu'au voisinage du miroir  $M$  on n'obtenait pas d'étincelle, mais qu'en s'écartant de  $M$  l'étincelle se produisait et augmentait de longueur jusqu'à un certain point  $V_1$ ; au-delà elle diminuait pour disparaître à une distance  $MN$ , sensiblement double; puis elle reparaisait et croissait jusqu'en  $V_2$ , s'annulait en  $N_2$  et ainsi de suite.

L'existence des noeuds  $N$  et des ventres  $V$  était donc démontrée.

Alors que pour  $\vec{h}$  il y a un noeud sur le miroir, pour la force magnétique  $H$  il y a un ventre; les distances des noeuds et des ventres sont les mêmes pour  $H$  et  $\vec{h}$  qui présentent une différence de phase égale à  $\frac{1}{4}$  conformément aux prévisions théoriques (n° 221).



La distance des deux ventres ou des deux nœuds consécutifs est égale à la demi-longueur d'onde qu'on peut ainsi mesurer.

La vitesse de propagation est  $c = \frac{\lambda}{T}$ ; elle peut être calculée si l'on connaît la période  $T$ .

Cette période trop courte pour être mesurée, peut se déduire par le calcul de la forme et des dimensions de l'excitateur, et Hertz a bien trouvé une valeur voisine de la vitesse de la lumière.

Ces résultats constituaient une éclatante vérification des idées de Maxwell, et une justification de la théorie que ce savant avait donnée trente ans avant les expériences de Hertz.

## 222<sup>ter</sup> - Rayonnement électromagnétique. -

### Réflexion, réfraction, polarisation. -

M. M. Righi, Bose, Sebedew, ont réussi à augmenter la fréquence des excitateurs ou radiateurs électromagnétiques et à produire des radiations dont la longueur d'onde est seulement de quelques millimètres (M. Sebedew, 4<sup>mm</sup>)

Pour révéler l'existence des ondulations, on a été conduit à diminuer les dimensions du résonateur de Hertz, et à varier sa forme. Righi a réduit le cercle coupé à des anneaux très petits et même à de simples lames d'argenture déposées sur verre et présentant une coupure extrêmement fine.

**Cohéreur.** - Un récepteur beaucoup plus commode a été découvert par M. Branly.

Si l'on place dans un tube de verre de la limaille métallique (fer, nickel, etc) réunissant deux fils conducteurs qui forment le circuit d'une pile et d'un galvanomètre, aucun courant ne passe; les grains forment de trop mauvais contacts mais si le tube à limaille est exposé à des ondes produites simplement par l'étincelle électrostatique d'un appareil voisin, la limaille devient conductrice, comme si les étincelles induites avaient établi entre les grains une communication persistante. Mais en frappant le tube d'un léger

coup sec, on lui rend sa grande résistance primitive.

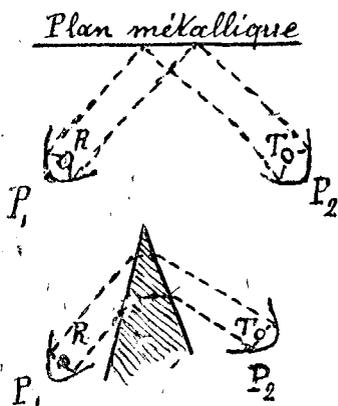
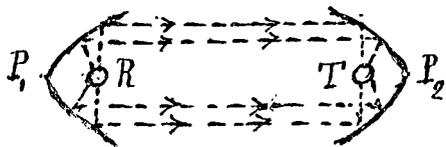
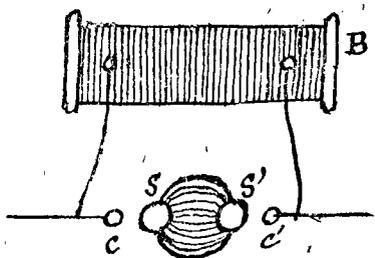
M. Branly avait désigné ce tube sous le nom de radioconducteur. M. Sodge, qui a fait une étude détaillée de ses propriétés, l'a appelé cohéreur.

Sa sensibilité est, dans de larges limites, indépendante de la longueur d'onde de la radiation; il joue un rôle analogue à la plaque photographique qui permet de révéler les rayonnements lumineux de longueurs d'onde très diverses.

Grâce à ce récepteur on peut, avec les courtes longueurs d'onde, répéter les expériences principales de l'optique: réflexions, réfraction, diffraction, polarisation.

Prenons par exemple un radiateur de Righi, composé de deux sphères de cuivre  $S, S'$  séparées par une couche d'huile de vaseline à l'intérieur de laquelle éclate l'étincelle oscillante.

Ces sphères sont chargées par des étincelles qui éclatent entre elles et deux conducteurs  $C, C'$  reliés aux bornes d'une bobine d'induction  $B$ .



Plaçons ce radiateur le long de la ligne focale d'un réflecteur, en forme de cylindre parabolique, qui nous donnera un faisceau parallèle de rayons électriques à vibrations transversales, et par suite polarisé.

Nous recevrons ce faisceau sur un second miroir parabolique, sur l'axe focal duquel est placé un cohéreur  $T$ , ce cohéreur étant dans le circuit d'une pile et d'une sonnerie.

Si, le récepteur  $P_2$  étant convenablement placé, (voir figures), on actionne la bobine qui alimente le radiateur  $R$ , la sonnerie fonctionne.

On arrête le courant du récepteur par un léger choc.

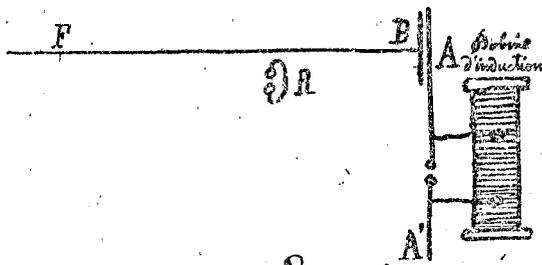
Un réseau de fils métalliques parallèles (gril), arrête les ondes

émises lorsque les fils sont parallèles à l'axe du radiateur ; en effet, dans ce cas, les variations de  $h$  et  $H$  provoquent des courants qui peuvent circuler dans toute la longueur du fil et dissiper en chaleur de Joule l'énergie rayonnée. L'expérience montre qu'un grill conducteur se comporte comme un véritable analyseur qui éteint la composante normale aux fils.

Lorsque le radiateur et le récepteur sont rectangulaires ils n'exercent aucune action l'un sur l'autre ; si l'on interpose à  $45^\circ$  de leurs directions le réseau de fils, le récepteur fonctionne aussitôt ; cette expérience est analogue à celle qui consiste à introduire une lame biréfringente placée à l'azimuth de  $45$  degrés entre les deux nicols croisés.

### 223 - Propagation le long d'un fil métallique. -

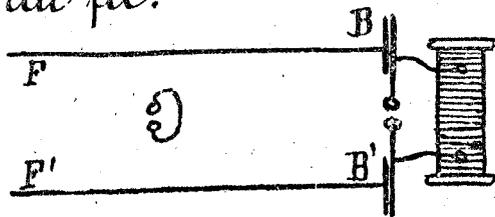
Hertz a également étudié la propagation des ondulations le long d'un fil rectiligne : à cet effet,



il remplaça les deux capacités sphériques de son excitateur par deux plaques A et A', et disposa en face de l'une d'elles, une plaque identique B, réunie à un fil métallique BF convenable.

ment tendu. Les charges oscillantes induites dans B donnent lieu à une oscillation électrique qui se propage le long du fil et se réfléchit à son extrémité.

Si la longueur de ce fil est un multiple de la demi-longueur d'onde correspondant à la période oscillatoire, un régime stationnaire s'établit et l'on peut, avec un résonateur, mettre en évidence la distribution périodique du champ oscillant créé autour du fil.



On double l'effet en disposant deux fils parallèles  $F'B'$ , aboutissant à des plaques identiques B et B' qui sont face aux

plaques de l'excitateur.

De la mesure de la distance entre deux noeuds on déduit la vitesse de propagation.

Ses expériences de Sarasin et de La Rive ont établi que cette vitesse était la même que celle des oscillations dans l'air. L'oscillation se propage à la surface du fil, avec la vitesse caractéristique de la propagation dans le diélectrique.

De plus, ces physiciens ont remarqué que, l'excitateur restant le même, la distance entre deux noeuds ou deux ventres consécutifs variait avec les dimensions du résonateur. Ce phénomène (1) a été expliqué par Henri Poincaré et Bjerknes; il est dû à ce que l'oscillation très amortie de l'excitateur est susceptible d'établir un régime vibratoire dans des résonateurs de périodes assez différentes.

Ses oscillations de ces derniers, beaucoup moins amorties en général, persistent un temps relativement considérable après que la vibration excitatrice a cessé, et il en résulte que chacun d'eux donne pour les distances internodales des valeurs qui correspondent à sa période propre et non à celle de l'excitateur.

M<sup>r</sup> Blondlot a employé pour mesurer la distance entre deux noeuds consécutifs une méthode qui permet de laisser le résonateur dans une position invariable; si l'on réunit, en effet, deux noeuds par un pont métallique, le régime vibratoire n'est pas altéré. Il n'en est plus de même pour les autres positions du pont.

En déplaçant progressivement le pont, on observe une série de positions dont les distances croissent en progression arithmétique et pour lesquelles le résonateur

(1) Au début, ce phénomène fut désigné improprement sous le nom de résonance multiple. Le fait de l'amortissement rapide des oscillations dont on réalise l'interférence dans toutes les expériences d'ondes stationnaires ne permet pas d'avoir des noeuds absolus, mais seulement des minima d'intensité.

S'il était possible d'obtenir des noeuds absolus, le résonateur qui s'y trouverait placé demeurerait inactif et il serait possible de repérer très exactement la position de ces noeuds.

demeure inactif.

On peut ainsi mesurer des intervalles correspondant à un nombre suffisant de demi-longueurs d'onde pour réduire l'influence que les erreurs expérimentales inévitables apportent dans la détermination de  $\lambda$ .

Pour déterminer  $\tau$ , il est nécessaire d'employer un résonateur de forme géométrique convenable et de recourir au calcul.<sup>(1)</sup> C'est ce qu'a fait M. Blondlot qui a obtenu

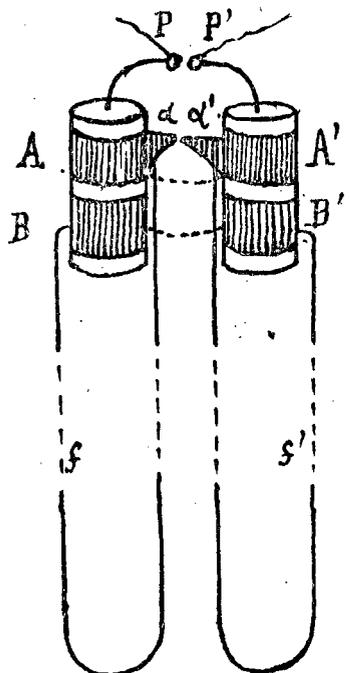
$$C = \lambda T = 3,022 \times 10^{10} \text{ cm/sec.}$$

De plus, M. Blondlot a reconnu qu'en plongeant tout le système conducteur, fils et résonateur, dans un liquide isolant, la longueur d'onde reste la même que dans l'air. Or, la capacité du condensateur est multipliée par  $K$ ; la période est donc multipliée par  $\sqrt{K}$  (puisque  $\tau = 2\pi\sqrt{CL}$ ); la longueur d'onde n'ayant pas changé, la vitesse de propagation est  $\frac{C}{\sqrt{K}}$ : c'est précisément la vitesse théorique  $\frac{C}{\sqrt{K\mu}}$ ,  $\mu$  étant égal à 1.

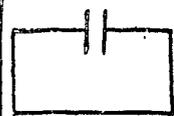
non exigé -

## 224. - Détermination directe de la vitesse de propagation d'une perturbation. -

L'appareil employé par M. Blondlot se compose de deux bouteilles de Leyde dont les armatures extérieures sont divisées en deux parties A et B, A' et B'.



Ses parties A et A' d'une part, B et B' d'autre part, sont réunies par des cordes mouillées qui permettent la circulation lente de l'électricité pendant qu'on charge les bouteilles



(1) Le résonateur de Blondlot était un fil en forme de rectangle ( $10^{\text{cm}} \times 20^{\text{cm}}$ ) coupé par un condensateur. Sa self  $L$  était calculée, et la période  $\tau$  calculée par la formule  $\tau = 2\pi\sqrt{CL}$  ( $C$  capacité). Cette période était  $4 \times 10^{-8}$  seconde, et la longueur d'onde mesurée:

$$\lambda = 12 \text{ mètres.}$$

en en joignant les armatures P et P' aux deux pôles d'une machine électrostatique de Holtz. Ces cordes marquées en pointillé ne jouent aucun rôle dans la décharge.

Lorsqu'une étincelle jaillit en P P', deux étincelles éclatent successivement entre les pointes d et d' : la première due à la décharge de A et A' qui se fait directement, la seconde due à la décharge de B et B' qui se fait par l'intermédiaire d'un fil télégraphique FF' de plusieurs kilomètres de longueur.

Le temps qui s'écoule entre la production des deux étincelles est mesuré à l'aide d'un miroir tournant. Ce miroir projette les images des étincelles sur une plaque photographique où elles laissent des traces distinctes.

La moyenne des résultats obtenus est  $C = 2,98 \cdot 10^{10}$ .

## 225. - Principe de la télégraphie sans fil. (1)

Marconi a obtenu le premier des résultats suffisants pour rendre pratique la transmission des signaux par ondes électromagnétiques.

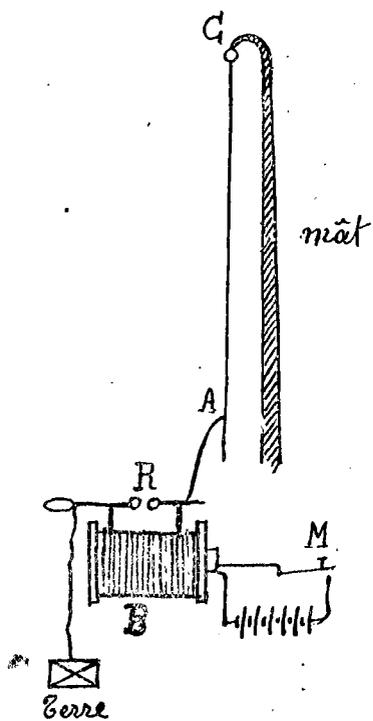
La disposition générale employée consiste à faire fonctionner un radiateur R en agissant pendant un temps plus ou moins long sur un manipulateur M qui actionne une bobine B. L'une des branches du radiateur est en communication avec un fil isolé AC, de longueur variable (10 à 500<sup>m</sup>), qui porte le nom d'antenne. Ce fil est soutenu par un mât élevé ou tout autre dispositif (cerf-volant, ballon captif, etc). L'autre branche du radiateur R est mise en communication avec la Terre. Ses ondes sont recues à distance sur une antenne semblable A'C' qui agit sur un récepteur.

Dans ce but, on fait passer le courant oscillant dont l'antenne est le siège à travers un enroulement primaire P, (3 ou 4 mètres de longueur), qui induit un courant de même période dans un secondaire S<sub>1</sub> S<sub>2</sub>.

Ce secondaire est constitué par deux enroulements symétriques, dont les extrémités sont réunies, d'une part aux extrémités du cohéreur T, d'autre part aux armatures d'un condensateur C, qui sont elles-mêmes

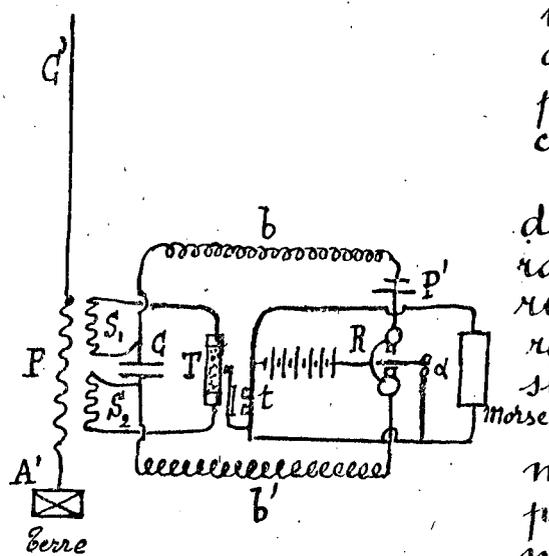
(1) Extrait du cours de M. Le Lt Col. Lafay.

réunies par un circuit comprenant deux bobines  $b$  &  $b'$ , une pile  $P'$  et un relais très sensible  $R$ .



Les bobines  $b$  &  $b'$  ont une faible résistance mais leur self est notable, de telle sorte qu'elles s'opposent au passage des oscillations qui se produisent dans  $S_1$  et  $S_2$ ; ces oscillations agissent par suite sur le tube  $T$  et le rendent conducteur; dans ces conditions le courant de la pile  $P'$  peut passer et actionner le relais.

Le fonctionnement du relais établit un contact  $\alpha$  qui ferme simultanément le circuit d'une pile (8 à 10 éléments):  
 1° à travers un récepteur Morse  
 2° à travers un trembleur  $t$ , portant un marteau, qui vient frapper le cohéreur de manière à le décoherer dès qu'il n'est plus le siège des phénomènes provoqués par l'oscillation électrique.



Lorsque les ondes cessent d'arriver à l'appareil le courant de  $P'$  n'agit plus sur le relais et tout rentre dans le repos jusqu'à l'émission du signal suivant.

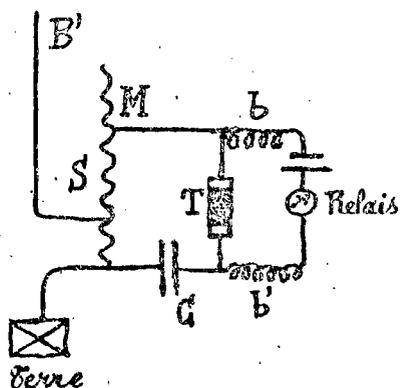
En appuyant plus ou moins longtemps sur le manipulateur  $M$  du poste transmetteur, on détermine l'impression de traits ou de points dans l'appareil Morse du poste

récepteur

Il y a lieu d'éviter les étincelles d'extra-courant provenant de la self des bobines, du trembleur, du relais et du Morse; ces étincelles produiraient en effet, des oscil-

lations qui agiraient sur le cohéreur placé dans leur voisinage immédiat. A cet effet, on place en dérivation sur chacun des circuits de ces appareils des shunts sans self, constitués, par exemple, par des volta-mètres à électrodes d'aluminium.

Au lieu d'employer le montage précédent, on peut, pour actionner le cohéreur, le disposer comme l'indique le schéma ci-contre.



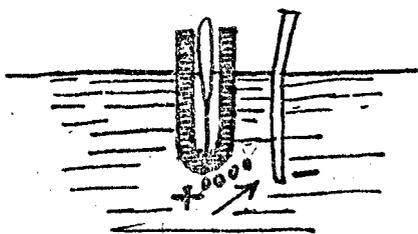
Le courant de l'antenne traverse quelques spires d'une bobine S, et induit un courant de même période dans le circuit constitué par cette bobine, le condensateur C et le tube T.

Les bobines b, b' jouent le même rôle que précédemment. En faisant varier, à l'aide d'un contact mobile M, le nombre de spires de S intercalées dans le circuit qui contient le tube T, on

peut régler la période oscillatoire correspondante jusqu'à ce qu'il y ait résonance avec l'oscillation électrique reçue par l'antenne.

M. le Colonel Ferrié a indiqué, en 1900, la possibilité d'utiliser un voltamètre pour révéler la présence des oscillations électriques; M. M. Fessenden et Schlömilch ont réalisé ultérieurement des appareils extrêmement sensibles basés sur ce principe.

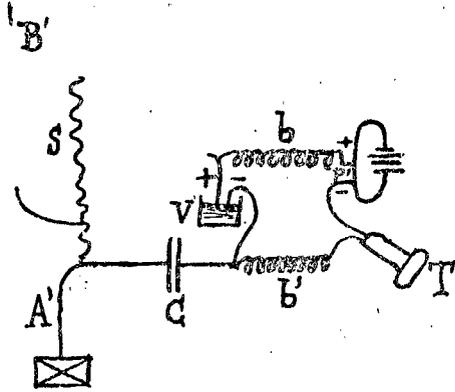
Ces détecteurs d'ondes électromagnétiques sont essentiellement constitués par des voltamètres à eau acidulée (30 à 40%  $\text{SO}_4\text{H}^2$ ), dont l'anode présente une surface extrêmement faible; pour obtenir cette électrode, on soude à l'intérieur d'un tube de verre un fil de platine de  $\frac{1}{100}$  à  $\frac{2}{100}$  de millimètre de manière à ne laisser de-



dépasser qu'une très faible portion de son extrémité. A l'intérieur du tube de verre, ce fil fin est réuni à un fil plus gros qui aboutit à la borne + de l'appareil; quant à la cathode, elle est constituée par un fil de platine ordinaire.

On place ce voltamètre à la place du tube de Branly, en

utilisant un montage semblable à celui que nous venons d'indiquer en dernier lieu, le relais est remplacé par un récepteur téléphonique, et la pile P' par un certain nombre d'éléments



dont on réduit le voltage à l'aide d'un potentiomètre, de manière à n'introduire dans le circuit P'b Vb'T qu'une force électromotrice d'environ trois volts.

Sous l'influence du courant produit par cette force, l'anode se polarise presque immédiatement, et le circuit se trouve coupé;

l'influence des oscillations électriques a pour effet la dépolarisation momentanée de cette anode et un nouveau passage du courant qui produit un son dans le téléphone.

Du moment du passage de l'onde, on peut, dans certains cas, constater un très léger dégagement gazeux dans le voisinage de la pointe effilée de l'anode. Quand on reçoit des ondes énergiques, les petites bulles gazeuses sont projetées avec violence; ces faits peuvent être facilement montrés en employant un microscope à projection qui donne une image agrandie de l'électrode à la Wollaston.

L'intensité des courants obtenus avec les détecteurs électrolytiques est trop faible pour actionner un relais, il est par suite impossible d'obtenir l'inscription des signaux; toutefois, l'extrême sensibilité de ces appareils les a rendus très précieux jusqu'en ces dernières années.

M. Marconi a observé que les ondes hertziennes pouvaient modifier l'hystérésis du fer et des métaux magnétiques, et a basé sur ce fait des détecteurs d'ondes dits détecteurs magnétiques.

Ulérieurement on a réalisé des détecteurs formés par le simple contact d'une pointe métallique avec divers cristaux.

Les détecteurs électrolytiques magnétiques et à cristaux présentent l'avantage de reprendre leur état initial

spontanément lorsqu'ils cessent d'être soumis à l'action de l'onde électrique. On exprime ce fait en disant qu'ils sont « auto-décohérents ».

Tous ces détecteurs sont maintenant supplantés par des appareils basés sur l'ionisation de certains métaux dans le vide qui ont, entre autres progrès, permis la réalisation de la téléphonie sans fil à grande distance.

## 226. - Identité des ondes lumineuses et des ondes électromagnétiques. -

La conclusion théorique (n° 219) que la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques, dans l'espace vide de matière, doit être égale au rapport  $C$  des unités électromagnétiques et électrostatiques de quantité d'électricité, et le fait que ce rapport a été trouvé, par expérience, égal à la vitesse de la lumière, ont conduit Maxwell (bien avant les expériences de Hertz) à penser qu'il y a non pas seulement analogie, mais identité de nature entre les ondes électromagnétiques et les ondes lumineuses, et que la lumière n'est autre chose qu'une succession extrêmement rapide de courants de déplacements alternatifs.

Un fait vient confirmer cette conclusion: comme on peut toujours, dans les diélectriques, poser  $n = 1$ , l'indice de réfraction doit être égal à  $\sqrt{K}$ . (n° 219 expression 310')

C'est bien ce qu'on constate pour les gaz et certains liquides, dont l'indice de réfraction est peu variable avec la période.

	$n$ moyen (jaune)	$\sqrt{K}$
air	1,000.294	1,000.295
Hydrogène	1,000.138	1,000.132
Gaz carbonique	1,000.449	1,000.473
Oxyde de carbone	1,000.346	1,000.345
Protoxyde d'azote	1,000.503	1,000.493
Benzine (liquide)	1,482	1,49

Il est vrai que pour beaucoup de liquides (eau, alcool,...)

et pour la plupart des solides,  $\sqrt{K}$  est plus grand que  $n$ . La relation n'est plus vérifiée et ce n'est pas surprenant: l'indice de réfraction dépend de la couleur, alors que  $K$  a été considéré comme constant. En fait,  $K$  est bien à peu près constant pour les oscillations de période relativement grande, et sensiblement égal à la valeur limite considérée en électrostatique où la période est infinie.

Pour les ondes hertziennes, nous avons vu que la vitesse de propagation est bien  $\frac{c}{\sqrt{K}}$  (expériences de Blondlot). Dans le cas des ondes lumineuses,  $K$  il s'agit de périodes considérablement plus courtes;  $K$  doit être variable avec  $\lambda$  et précisément égal à  $n^2$ , ainsi que nous le montrerons plus loin.

Toutes les propriétés que la théorie électromagnétique permet de prévoir pour les ondes électromagnétiques sont précisément celles qui appartiennent aux ondes lumineuses. De plus, les expériences de Hertz, Blondlot, Righi... etc. ont apporté les preuves expérimentales de l'identité des ondes électromagnétiques et de la lumière.

Cette identité n'est plus une hypothèse, c'est un fait sur lequel aucun doute ne peut subsister.

En somme, lorsque nous mettons en mouvement une machine à courants alternatifs, lorsque nous envoyons des ondes de T. S. F. ou lorsque nous allumons une lampe, nous provoquons dans le milieu environnant des phénomènes de même nature. La seule différence est dans la période.

## §. 2 - Réflexion et réfraction par les corps isotropes. -

### 227. - Conditions aux limites. -

Considérons une onde plane; soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ , les cosinus directeurs de la normale à l'onde; puisque la phase doit être la même pour tous les plans.  $\alpha x + \beta y + \delta z = C$ , les composantes de la force élec.

trique peuvent s'écrire :

$$(322) \quad \begin{cases} h_x = h_{0x} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_1} \right) \\ h_y = h_{0y} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_1} \right) \\ h_z = h_{0z} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c_1} \right) \end{cases} \quad c_1 = \frac{c}{\sqrt{K}}$$

Les composantes du champ magnétique sont en phase avec celles de  $h$ , et nous avons vu que l'amplitude  $a$  pour grandeur  $H_0 = \sqrt{K} h$  (n° 221).

Le rayon lumineux, trajectoire de l'énergie rayonnée, coïncide avec le vecteur radiant de Poynting.

Les équations au passage d'un milieu 1 à un milieu 2 ont été établies au n° 215; ce sont les équations (289); la surface de séparation étant le plan  $xy$ , on a les équations :

$$(323) \quad h_{1x} = h_{2x}; \quad h_{1y} = h_{2y}; \quad H_{1x} = H_{2x}; \quad H_{1y} = H_{2y}$$

auxquelles il faut ajouter les équations (290) n° 215 qui ici s'écrivent :

$$(324) \quad K_1 h_{1z} = K_2 h_{2z} \quad H_{1z} = H_{2z} \quad (\mu = 1)$$

Les 4 équations (323) vont nous permettre de retrouver et de compléter les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière.

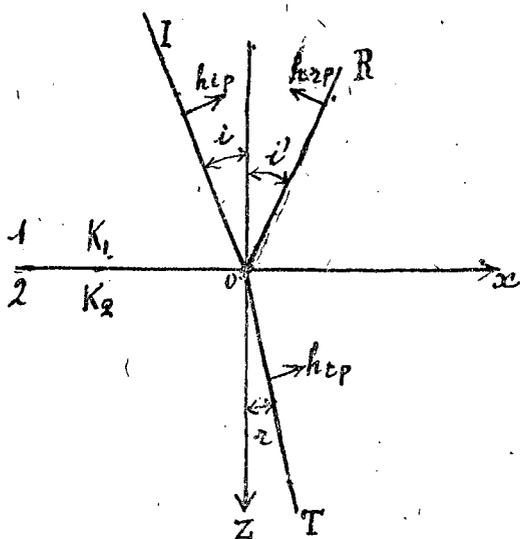
## 228. - Equations des ondes incidente, réfléchie et réfractée. -

La surface de séparation du milieu 1 et du milieu 2 étant le plan des  $xy$  choisissons pour plan des  $xz$  le plan d'incidence.

(1) Pour les ondes lumineuses nous pouvons toujours poser  $\mu = 1$   
Les alternances de  $H$  sont trop rapides pour déterminer une orientation des molécules magnétiques.

Ses cosinus directeurs de la direction de propagation de l'onde incidente sont :

$$\alpha = \sin i \quad \beta = 0 \quad \gamma = \cos i$$



l'axe des  $z$  étant dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. Le champ incident  $h_i$  peut être donné par deux composantes : la composante normale au plan d'incidence d'amplitude  $h_{ip}$ , et la composante  $h_{iy}$  dans le plan d'incidence.

Sa composante normale au plan d'incidence est parallèle à  $Oy$  ; on a donc :

$$(325) \quad h_{iy} = +h_{in} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i + z \cos i}{c_1} \right)$$

Sa composante dans le plan d'incidence est normale au rayon lumineux et les composantes  $h_{ix}$  et  $h_{iz}$  sont :

$$(326) \quad \begin{cases} h_{ix} = +h_{ip} \cos i \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i + z \cos i}{c_1} \right) \\ h_{iz} = -h_{ip} \sin i \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i + z \cos i}{c_1} \right) \end{cases}$$

Si, comme dans la figure,  $h_{ip}$  est compté positivement dans le sens qui s'éloigne de la surface de séparation.

Ses composantes du champ magnétique sont données par les équations de Maxwell :

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial H_{ix}}{\partial t} = \frac{\partial h_{iz}}{\partial y} - \frac{\partial h_{iy}}{\partial z}$$

Calculant les seconds membres d'après (325) et (326), et intégrant, on trouve :

$$(327) \quad \left\{ H_{ix} = -h_{in} \sqrt{K_1} \cos i \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i + z \cos i}{c_1} \right) \right.$$

$$(327) \text{ suite } \left\{ \begin{array}{l} H_{iy} = +h_{ip} \sqrt{K_1} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i + z \cos i}{c_1} \right) \\ H_{iz} = +h_{in} \sqrt{K_1} \sin i \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i + z \cos i}{c_1} \right) \end{array} \right.$$

En rencontrant la surface de séparation cette onde se décompose en deux :

1°/ Onde réfléchie. — Ses forces électrique et magnétique ont des expressions semblables à celles de l'onde incidente ;  $i$  étant l'angle de réflexion, on a :

$$(328) \text{ force électrique } \left\{ \begin{array}{l} h_{rx} = +h_{rp} \cos i' \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i' + z \cos i'}{c_1} \right) \\ h_{ry} = +h_{rp} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i' + z \cos i'}{c_1} \right) \\ h_{rz} = -h_{rp} \sin i' \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i' + z \cos i'}{c_1} \right) \end{array} \right.$$

$$(329) \text{ force magnétique } \left\{ \begin{array}{l} H_{rx} = -h_{rn} \cos i' \sqrt{K_1} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i' + z \cos i'}{c_1} \right) \\ H_{ry} = +h_{rp} \sqrt{K_1} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i' + z \cos i'}{c_1} \right) \\ H_{rz} = +h_{rn} \sin i' \sqrt{K_1} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin i' + z \cos i'}{c_1} \right) \end{array} \right.$$

2°/ Onde réfractée. —

$$(330) \text{ force électrique } \left\{ \begin{array}{l} h_{tx} = +h_{tp} \cos r \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin r + z \cos r}{c_2} \right) \\ h_{ty} = +h_{tn} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin r + z \cos r}{c_2} \right) \\ h_{tz} = -h_{tp} \sin r \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin r + z \cos r}{c_2} \right) \end{array} \right.$$

$$(331) \text{ force magnétique } \begin{cases} H_{tx} = -h_{tn} \cos r \sqrt{K_2} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin r + z \cos r}{c_2} \right) \\ H_{ty} = +h_{tp} \sqrt{K_2} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin r + z \cos r}{c_2} \right) \\ H_{tz} = +h_{tn} \sin r \sqrt{K_2} \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{x \sin r + z \cos r}{c_2} \right) \end{cases}$$

## 229 - Lois de Descartes. -

Les équations de passage, quelles qu'elles soient, doivent être satisfaites pour  $z = 0$ , quelles que soient les valeurs de  $t, x, y$ . Ces conditions sont remplies si pour  $z = 0$  tous les  $h$  ou  $H$  sont proportionnels à une même fonction de  $t, x, y$ , c'est-à-dire si l'on a :

$$\frac{\sin i}{c_1} = \frac{\sin i'}{c_1} = \frac{\sin r}{c_2}$$

D'où  $\sin i = \sin i'$  ou (puisque les rayons incident et réfléchi ne coïncident pas)  $i' = \pi - i$  et  $\sin i = n \sin r$ .

Les lois de Descartes résultent donc seulement de l'existence de conditions aux limites. Elles sont indépendantes de la forme des équations de passage.

## 230 - Réflexion et réfraction. - Formules de Fresnel. -

Appliquons maintenant les équations de passage; on a d'abord :

$$\begin{cases} h_{1x} = h_{ix} + h_{rx} \\ h_{1y} = h_{iy} + h_{ry} \\ h_{1z} = h_{iz} + h_{rz} \end{cases} \quad \begin{cases} h_{2x} = h_{tx} \\ h_{2y} = h_{ty} \\ h_{2z} = h_{tz} \end{cases}$$

Les équations de passage (323) s'écrivent, en remarquant que  $\cos i' = -\cos i$  :

$$(332) \begin{cases} (h_{ip} - h_{rp}) \cos i = h_{tp} \cos r \\ h_{in} + h_{rn} = h_{tn} \\ (h_{in} - h_{rn}) \sqrt{K_1} \cos i = h_{tn} \sqrt{K_2} \cos r \\ (h_{ip} + h_{rp}) \sqrt{K_1} = h_{tp} \sqrt{K_2} \end{cases}$$

D'où l'on tire pour les amplitudes réfléchie et réfractée, en remarquant que  $\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} = n = \frac{\sin i}{\sin r}$

$$(333) \begin{cases} h_{rn} = -h_{in} \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \\ h_{rp} = +h_{ip} \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} \\ h_{tn} = +h_{in} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} \\ h_{tp} = +h_{ip} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} h_{rn} \\ h_{rp} \\ h_{tn} \\ h_{tp} \end{cases}} \right\} \text{Formules de Fresnel}$$

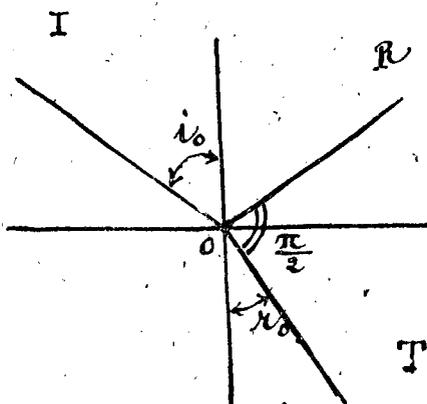
Fresnel avait réussi à établir ces formules par la théorie mécanique de la lumière, mais au prix d'hypothèses peu satisfaisantes (densité de l'éther variable, mais élasticité constante, conservation de la force vive d'une particule d'éther etc....)

### 231 - Loi de Brewster. - (1)

Ses formules (333) montrent que  $h_{rn}$  ne s'annule jamais, mais que  $h_{rp}$  est nul si l'incidence  $i_0$  est telle que l'on ait :

$$\operatorname{tg}(i_0 + r_0) = \infty \quad i_0 + r_0 = \frac{\pi}{2}$$

(1) Voir cours de première année n° 269, p 491



ou si  $\sin r_0 = \cos i_0$  et  
 (334)  $\operatorname{tg} i_0 = n$   
 ainsi, lorsque l'incidence  
 est  $i_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} n$   
 la force électrique réfléchie est  
 normale au plan de l'inci-  
 dence, quel que soit d'ailleurs  
 le rapport  $\frac{h_{in}}{h_{ip}}$ , c'est-à-dire

quelle que soit la constitution de la lumière incidente.

Le résultat s'applique donc à la lumière naturelle et celle-ci, après réflexion sous l'incidence Brewstérienne, devient polarisée rectilignement.

Nous avons appelé plan de polarisation le plan d'incidence. Par conséquent, dans une onde polarisée rectilignement, la force électrique est normale au plan de polarisation: elle est identique à la "vibration" de Fresnel

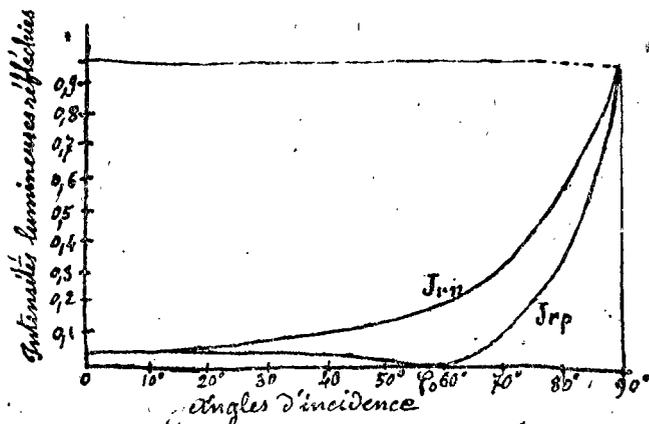
D'autre part Neumann, admettant les hypothèses inverses de celles de Fresnel (densité de l'éther constante quel que soit le milieu, élasticité variable) a été conduit à des formules dans lesquelles la "vibration lumineuse" doit être prise dans le plan de polarisation. Ses formules de Neumann sont identiques à celles qu'on obtient pour la force magnétique qui, après réflexion sous l'incidence Brewstérienne, est dans le plan de polarisation (formule (329))

$H_{ry} = H_{rn} = 0$ , puisque sous l'incidence Brewstérienne  $h_r = 0$ .  
 Ainsi la vibration de Neumann n'est autre que la force magnétique.

La lumière polarisée étant formée des deux vecteurs  $h$  et  $H$  inséparables, les anciennes théories, qui n'envisageaient qu'un seul vecteur, conduisaient, selon les hypothèses admises, soit au vecteur  $h$ , normal au plan de polarisation; soit au vecteur  $H$ , dans le plan de polarisation.

## 232. - Intensité de la lumière réfléchie - Polarisation par réflexion. -

Supposons que les amplitudes des vecteurs  $h$  (et  $H$ ) aient des composantes égales dans le plan d'incidence et normalement au plan d'incidence.



Faisons  $h_{in} = h_{ip} = 1$ .  
 Ses deux premières formules (333) donnent, pour une incidence  $i$  quelconque, les amplitudes des composantes du vecteur réfléchi, et par suite les intensités qui sont représentées par les carrés des amplitudes.

La courbe ci-contre donne l'allure des intensités  $J_{rn} = h_{rn}^2$  et  $J_{rp} = h_{rp}^2$  pour le crown. Dans le cas d'un faisceau de lumière naturelle non polarisée (1) la somme des ordonnées des deux courbes  $J_{rn}$  et  $J_{rp}$  donne pour une incidence quelconque, la proportion de lumière réfléchie; le rapport entre la différence et la somme des ordonnées donne la proportion de lumière polarisée dans le plan d'incidence.

La polarisation de la lumière naturelle par réflexion, n'est totale que sous l'incidence brewstérienne.  
 Incidence normale. — La formule (333) est inapplicable lorsque  $i$  et  $r$  sont nuls, mais les formules (332) donnent directement :

$$(335) \quad h_{rn} = -h_{in} \frac{n-1}{n+1} \quad h_{rp} = h_{ip} \frac{n-1}{n+1}$$

• Pour le crown  $n = 1,5$   $J_{rn} = J_{rp} = 0,04$

Ondes stationnaires. — La première des formules (335) montre que si  $n > 1$ , l'amplitude électrique réfléchie est directement opposée à l'amplitude incidente.

La seconde des formules (335) donne le même résultat car un même signe de  $h_{rn}$  et  $h_{rp}$  (lorsque  $i = 0$ ) représente des amplitudes opposées. (voir fig. du n° 228).

(1) La lumière naturelle peut être considérée comme la superposition de deux faisceaux polarisés, l'un dans le plan d'incidence, l'autre dans le plan perpendiculaire, de mêmes intensités et de phase perpétuellement variable. Mais la variation de phase n'intervient pas dans les formules (333) de sorte que les résultats obtenus avec la lumière polarisée pour le cas où  $h_{in} = h_{ip}$ , sont applicables à la lumière naturelle.

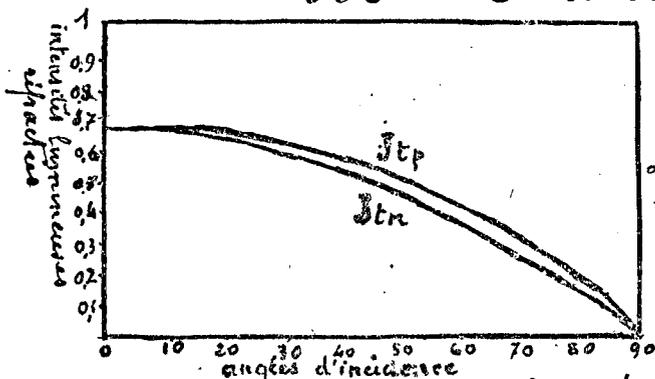
Pour le vecteur électrique il y a donc réflexion avec changement de signe sur la surface d'un milieu plus réfringent.

Mais, pour le vecteur magnétique,  $h_r$  et  $h_{tr}$  représentent les composantes normales au plan d'incidence. Ces amplitudes, de même signe, correspondent réellement à des amplitudes ayant même direction, et la réflexion se fait sans changement de signe.

Dans les ondes stationnaires il y a, par suite, à la surface de séparation, un nœud pour la force électrique et un ventre pour la force magnétique.

Les expériences de Wiener ont donné un nœud sur la surface d'un miroir de verre. C'est donc la force électrique qui produit l'action photographique.

### 233 - Polarisation par réfraction. -



Les deux dernières formules (333) permettent de calculer, en fonction de l'angle d'incidence les intensités des composantes réfléchies  $J_{tn}$  et  $J_{tr}$ . La figure représente les résultats pour le crown en faisant  $h_{in} = h_{ir} = 1$ .

Lorsque  $h_{in} = h_{ir}$ , on a toujours  $h_{rn} > h_{rp}$  (lumière réfléchi) et  $h_{tn} < h_{tp}$  pour la lumière transmise. La lumière naturelle est partiellement polarisée, par réfraction, dans un plan normal au plan d'incidence, mais on n'obtient jamais de polarisation totale; la polarisation est d'autant plus complète que l'angle d'incidence est plus grand, seulement la lumière transmise diminue à mesure que  $i$  augmente.

Après une réfraction, le rapport des intensités des composantes normale et parallèle au plan d'incidence est  $\cos^2(i-r)$ . Si la lumière traverse une lame, il y a deux réfractions et le rapport devient  $\cos^4(i-r)$ .

Après le passage dans  $n$  lames, ce rapport est  $\cos^{4n}(i-r)$ ; une pile de glace polarise donc très notablement la lumière transmise.

### 234 - Vérification expérimentale de la théorie

Les formules (333) ont été vérifiées, soit en com-

parant les intensités des lumières incidente réfléchie et réfractée, soit (ce qui est préférable) en observant la rotation que le plan de polarisation de la lumière subit par suite de la réflexion ou de la réfraction. Soit en effet, un rayon incident polarisé rectilignement; posons:

$$\frac{h_{ir}}{h_{in}} = \operatorname{tg} \alpha$$

$\alpha$  est l'azimuth de polarisation de la lumière incidente. Soit  $\beta$  l'azimuth de polarisation de la lumière réfléchie; on a:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h_{rp}}{h_{rn}} = - \frac{h_{ir}}{h_{in}} \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)} = - \operatorname{tg} \alpha \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}$$

formule vérifiable par l'expérience.

## 235 - Polarisation elliptique de la lumière réfléchie. -

Jamin a constaté que, sous l'incidence brewstérienne, on n'obtient pas une lumière rigoureusement rectiligne; qu'en réalité la lumière est légèrement elliptique.

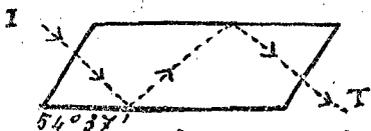
La théorie rend compte de ce fait par l'existence de la couche de passage dans laquelle la constante diélectrique varie progressivement de  $K_1$  à  $K_2$ (1), c'est aussi une conséquence de l'absorption (question que nous traiterons plus loin).

La réflexion totale polarise elliptiquement la lumière primitivement rectiligne, fait que la théorie explique d'une façon complète.

Parallélogramme de Fresnel. - On calcule, et l'expérience prouve que, dans la réflexion totale, la différence de phase entre les axes de l'ellipse est  $\frac{\pi}{2}$  pour un certain angle d'incidence qui dans le crown d'indice 1,51 est  $54^\circ 37'$ . Après deux réflexions totales

(1) Nous ne donnerons pas cette théorie qui nous entraînerait à de trop longs développements.

cet angle, une lumière polarisée rectilignement sous l'azimuth de  $45^\circ$  par rapport au plan d'incidence se trouve transformée en lumière circulaire.



Ce dispositif est réalisé dans le parallélépipède de Fresnel; un rayon polarisé rectilignement à  $45^\circ$  du plan d'incidence frappe normalement la face d'entrée, se réfléchit deux fois totalement en O et O' sous l'angle de  $54^\circ \frac{1}{2}$  et sort polarisé circulairement.

L'avantage de ce polariseur circulaire est que la lumière est pratiquement circulaire pour toutes les couleurs, alors qu'une lame quart-d'onde n'est utilisable que dans une région très restreinte du spectre.

### §. 3. Propagation de la lumière dans les corps anisotropes. —

non exigé

#### 236 - Equations fondamentales dans les cristaux -

En optique, un corps anisotrope est un corps pour lequel la constante diélectrique varie avec la direction considérée.

Nous avons toujours les équations de Maxwell :

$$(336) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \text{curl } \vec{H} ; \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{curl } \vec{h}$$

Il s'agit d'établir la relation entre  $\vec{h}$  et  $\vec{b}$ . Supposons (ce qui conduit à des résultats vérifiés par l'expérience) que, suivant trois directions rectangulaires, les composantes de l'induction soient proportionnelles aux composantes de la force électrique.

$$(337) \quad b_x = K_x h_x ; \quad b_y = K_y h_y ; \quad b_z = K_z h_z$$

Si l'on faisait choix d'axes quelconques, on aurait:

$$(338) \quad \begin{cases} b_x = K_x h_x + K_{xy} h_y + K_{xz} h_z \\ b_y = K_{yx} h_x + K_y h_y + K_{yz} h_z \\ b_z = K_{zx} h_x + K_{zy} h_y + K_z h_z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_{xy} = K_{yx} \\ K_{yz} = K_{zy} \\ K_{zx} = K_{xz} \end{cases}$$

Les constantes  $K_{xy}$ ,  $K_{yz}$ ,  $K_{zx}$  étant utilisées à fixer l'orientation du système particulier d'axes de coordonnées.

On voit que, dans le cas général des cristaux, le vecteur  $\vec{b}$  n'est pas parallèle au vecteur  $\vec{h}$ . En fait les directions de ces deux vecteurs sont assez peu différentes.

Nous appellerons directions principales les directions pour lesquelles les équations (337) sont satisfaites, et nous prendrons comme système de référence 3 axes parallèles à ces directions. Nous nommerons  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ , constantes diélectriques principales.

Un cristal est complètement défini au point de vue optique par ses directions principales et ses constantes principales.

L'énergie présente dans le milieu est:

$$(339) \quad W+T = \frac{1}{8\pi} \iiint (K_x h_x^2 + K_y h_y^2 + K_z h_z^2) dV + \frac{1}{8\pi} \iiint H^2 dv$$

Transversalité. — Pour que les ondes soient transversales pour un vecteur  $\vec{a}$ , il faut que les composantes de ces vecteurs satisfassent à la relation

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0$$

c'est-à-dire qu'on ait  $\text{Div. } \vec{a} = 0$

Des trois vecteurs  $\vec{H}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{h}$ , deux seulement, satisfont à cette condition; ce sont  $\vec{H}$  et  $\vec{b}$ . La divergence de  $\vec{b}$  est nulle, parce que  $\vec{b}$  étant périodique est proportionnel à  $\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$  c'est-à-dire à  $\vec{j}$  (à une différence de phase près).

$$\text{Div. } \vec{j} = 0 \text{ entraîne donc } \text{Div. } \vec{b} = 0$$

Trois théories mécaniques ont été données ; la "vibration lumineuse" se confond : →

- 1°/ Avec l'induction  $\vec{b}$ . Ses ondes planes sont transversales, la vibration est normale au plan de polarisation. (Théorie de Fresnel).
- 2°/ Avec la force magnétique. Ses ondes sont transversales, la vibration lumineuse est dans le plan de polarisation (Neumann).
- 3°/ Avec la force électrique  $\vec{h}$ . Ses ondes ne sont plus rigoureusement transversales. La vibration est sensiblement perpendiculaire au plan de polarisation (Sarrau, Boussinesq).

La théorie électromagnétique montre l'existence simultanée des trois vecteurs, et n'exige pas d'hypothèses plus ou moins contradictoires sur les propriétés de "l'éther".

## 237 - Loi des vitesses de Fresnel -

Nous nous proposons de chercher avec quelle vitesse  $V$  se propage une onde plane dans une direction déterminée.

Ses équations de propagation prennent la forme suivante :

$$(340) \quad \begin{cases} \frac{k_x}{c^2} \frac{\partial^2 h_x}{\partial t^2} = \Delta h_x - \frac{\partial}{\partial x} (\text{div. } h) \\ \frac{k_y}{c^2} \frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = \Delta h_y - \frac{\partial}{\partial y} (\text{div. } h) \\ \frac{k_z}{c^2} \frac{\partial^2 h_z}{\partial t^2} = \Delta h_z - \frac{\partial}{\partial z} (\text{div. } h) \end{cases}$$

Prenons comme vecteur lumineux l'induction  $\vec{b}$ , qui n'est autre que la vibration de Fresnel. Soit une onde plane :

$$(341) \quad \begin{cases} b_x = b_0 \ell \cos \frac{2\pi}{c} \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) \\ b_y = b_0 m \cos \frac{2\pi}{c} \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) \end{cases}$$

t. s. v. p.

$$(341) \quad \left( b_z = b_0 n \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) \right)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sont les cosinus directeurs de la normale à l'onde;  $l, m, n$ , les cosinus de l'induction par rapport aux directions principales prises pour axes de coordonnées.  $V$  est la vitesse normale, c'est-à-dire la vitesse suivant la normale à l'onde.

On a:

$$l^2 + m^2 + n^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$(342) \quad \alpha l + \beta m + \gamma n = 0 \quad (\text{transversalité des ondes, pour le vecteur } b)$$

Les formules (340) s'écrivent:

$$(343) \quad \begin{cases} \frac{l}{c^2} = \frac{l}{K_x V^2} = \frac{\alpha}{V^2} \left( \frac{\alpha l}{K_x} + \frac{\beta m}{K_y} + \frac{\gamma n}{K_z} \right) \\ \frac{m}{c^2} = \frac{m}{K_y V^2} = \frac{\beta}{V^2} \left( \frac{\alpha l}{K_x} + \frac{\beta m}{K_y} + \frac{\gamma n}{K_z} \right) \\ \frac{n}{c^2} = \frac{n}{K_z V^2} = \frac{\gamma}{V^2} \left( \frac{\alpha l}{K_x} + \frac{\beta m}{K_y} + \frac{\gamma n}{K_z} \right) \end{cases}$$

Multiplions ces trois équations par  $c^2 V^2$  et posons:

$$(344) \quad \frac{c^2}{K_x} = A^2 \quad \frac{c^2}{K_y} = B^2 \quad \frac{c^2}{K_z} = C^2.$$

$$\text{et } (345) \quad A^2 \alpha l + B^2 \beta m + C^2 \gamma n = S^2$$

Nous trouvons:

$$(346) \quad \begin{cases} l(A^2 - V^2) = \alpha S^2 \\ m(B^2 - V^2) = \beta S^2 \\ n(C^2 - V^2) = \gamma S^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} l = S^2 \frac{\alpha}{A^2 - V^2} \\ m = S^2 \frac{\beta}{B^2 - V^2} \\ n = S^2 \frac{\gamma}{C^2 - V^2} \end{cases}$$

Multipliant respectivement ces trois égalités par  $\alpha, \beta, \gamma$  et additionnant, le premier membre s'annule (d'après 342) et nous obtenons  $V$  en fonction de  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$$(347) \quad \frac{\alpha^2}{A^2 - V^2} + \frac{\beta^2}{B^2 - V^2} + \frac{\gamma^2}{C^2 - V^2} = 0$$

Cette équation bicarrée donne, pour chaque direction de la normale à l'onde, deux vitesses  $V_1$  et  $V_2$ .

Le milieu propage donc dans chaque direction deux ondes qui possèdent des vitesses différentes.

C'est le résultat que Fresnel avait établi par la théorie mécanique. Nous aurions obtenu la même loi en confondant le vecteur lumineux avec  $h$  ou  $H$ .

Vitesses principales. — Considérons des ondes normales à  $Ox$ ; nous avons  $\alpha = 1$   $\beta = \gamma = 0$ . Les vitesses de propagation sont  $B$  et  $C$ . Les vitesses définies par (344) représentent donc les vitesses de propagation des ondes normales aux directions principales.

238. — Les deux ondes sont polarisées à angle droit —

Les cosinus directeurs  $l, m, n$ , de l'induction, dans chacune des deux ondes qui se propagent dans une même direction  $\alpha, \beta, \gamma$  sont données par les formules (346). Soient  $l_1, m_1, n_1$  les cosinus de l'induction pour l'onde qui se propage avec la vitesse  $V_1$ ;  $l_2, m_2, n_2$  les cosinus pour l'onde dont la vitesse est  $V_2$ .

Formons l'expression  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$  en remplaçant chacun des cosinus par sa valeur en fonction de  $V_1$  ou de  $V_2$  d'après les équations (346).

On trouve que,  $V_1$  et  $V_2$  étant racines de l'équation (347),

$$(348) \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

L'induction de l'onde 1 est donc normale à l'induction de l'onde 2.

239. — Ellipsoïde de Fresnel. —

Nous pouvons obtenir la vitesse de propagation en fonction de la direction du vecteur  $b$ .

Il suffit d'éliminer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  entre les équations (346) et l'équation (347). La loi des vitesses s'écrit alors :

$$(A^2 - V^2)l^2 + (B^2 - V^2)m^2 + (C^2 - V^2)n^2 = 0$$

ou, puisque  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  :

$$(348) \quad V^2 = A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2$$

La vitesse de propagation est donc une fonction bien déterminée de la direction  $l$ ,  $m$ ,  $n$  du vecteur. Considérons alors l'ellipsoïde :

$$(349) \quad A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = 1$$

Soit  $\rho$  la longueur du rayon vecteur issu du centre et aboutissant au point  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ; on a :

$$A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 = \frac{1}{\rho^2} = V^2 \quad (\text{d'après 348})$$

$$\text{D'où} \quad V = \frac{1}{\rho}$$

→ La vitesse de propagation du vecteur lumineux  $b$  est représentée par l'inverse du rayon vecteur de  $b$  de l'ellipsoïde, mené parallèlement à la direction de  $b$ .

**Construction de Fresnel.** — Nous allons montrer que si une direction de propagation  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  est donnée les axes de la section de l'ellipsoïde par un plan passant par le centre de l'ellipsoïde et normal à la direction  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (c'est-à-dire par un plan parallèle aux ondes), sont parallèles aux vecteurs lumineux  $b$ . De plus, d'après ce qui précède, les vitesses de propagation seront les inverses des longueurs de ces axes.

On a les trois relations :

$$(350) \quad \frac{1}{\rho^2} = A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2$$

$l$ ,  $m$ ,  $n$  désignant les cosinus directeurs du rayon vecteur de l'ellipsoïde.

432

$$(351) \quad 1 = l^2 + m^2 + n^2$$

$$(352) \quad 0 = \alpha l + \beta m + \gamma n \quad \text{puisque tous}$$

les rayons vecteurs de l'ellipse sont normaux à  $\alpha, \beta, \gamma$ .  
Cherchons les directions pour lesquelles  $\frac{1}{\rho}$  est maximum ou minimum; ce seront les directions des axes:

Considérons  $l, m, n$  comme des variables indépendantes; ajoutons à l'équation (350) les égalités (351) et (352) multipliées par les facteurs indéterminés de Lagrange  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . En égalant à zéro les dérivées partielles de  $\frac{1}{\rho^2}$  par rapport à  $l, m, n$ , nous obtenons:

$$(353) \quad \begin{cases} 0 = 2(A^2 + \sigma_1)l + \alpha\sigma_2 \\ 0 = 2(B^2 + \sigma_1)m + \beta\sigma_2 \\ 0 = 2(C^2 + \sigma_1)n + \gamma\sigma_2 \end{cases}$$

Multiplions ces trois formules respectivement par  $l, m, n$ ; ajoutons les, et tenons compte de (351), (352) et (350), il vient:

$$(354) \quad A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 = -\sigma_1 = \frac{1}{\rho^2}$$

$l, m, n$  sont maintenant les cosinus directeurs de l'un ou l'autre des axes de l'ellipse.

Portons  $\sigma_1 = -\frac{1}{\rho^2}$  dans les formules (353); nous voyons que  $l, m, n, \rho^2$  sont proportionnels à:

$$\frac{\alpha}{A^2 - \frac{1}{\rho^2}}, \quad \frac{\beta}{B^2 - \frac{1}{\rho^2}}, \quad \frac{\gamma}{C^2 - \frac{1}{\rho^2}}$$

$\frac{1}{\rho}$  est la vitesse de propagation de l'un ou l'autre des vecteurs parallèles aux axes de l'ellipse; nous voyons donc que  $l, m, n$ , satisfont aux relations (346) et sont par conséquent les cosinus directeurs de l'induction dans les ondes normales à  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Ainsi, pour avoir les directions des vecteurs induction et les vitesses de propagation normales des deux ondes qui se propagent dans une même direction,

on coupe l'ellipsoïde par un plan passant par son centre et parallèle aux ondes ; les axes de l'ellipse d'intersection sont les directions des vecteurs  $\vec{b}$ .

Les inverses  $\frac{1}{v}$  des longueurs des axes sont les vitesses de propagation normales des deux ondes.

Portons, à partir du centre de l'ellipsoïde, sur la normale aux ondes, deux longueurs égales aux deux valeurs de  $\frac{1}{v}$  ; puis, par les points obtenus menons deux plans parallèles aux ondes ; l'enveloppe de tous les plans ainsi obtenus, quand on fait varier la direction, est la surface de l'onde.

Cette construction est bien celle qui a été indiquée dans le cours de 1<sup>ère</sup> année.

## §. 4 - Réflexion métallique -

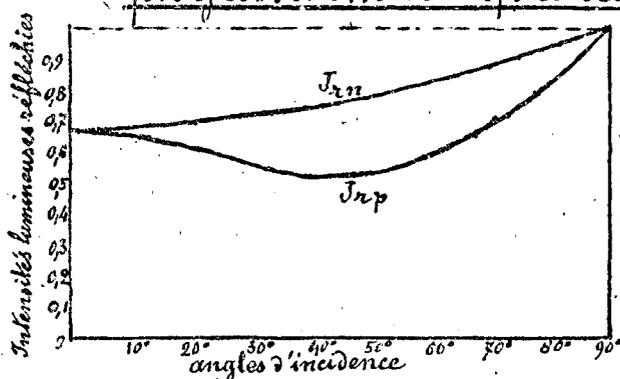
### 240 - Lois expérimentales de la réflexion métallique -

Malus a découvert que la réflexion de la lumière sur la surface des métaux obéit à d'autres lois que la réflexion sur la surface des corps transparents.

Ses recherches de Brewster, Biot, Neumann, de Sénarmont, Jamin, ont conduit aux lois suivantes :

1<sup>ère</sup> loi. - Un rayon polarisé reste polarisé dans le même plan, à condition que son plan de polarisation soit, ou parallèle, ou normal au plan d'incidence.

2<sup>e</sup> loi. - Lorsque la lumière est polarisée dans le plan d'incidence, l'intensité du rayon réfléchi croît progressivement quand l'incidence croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .



Lorsque la lumière est<sup>2</sup> polarisée normalement au plan d'incidence, l'intensité diminue d'abord quand l'incidence croît, puis augmente

jusqu'à l'incidence rasante.

Dans les deux cas, pour l'incidence rasante la lumière est totalement réfléchie.

Il résulte de cette loi que la lumière naturelle est remplacée après réflexion, par de la lumière polarisée partiellement, les composantes des forces électriques normales au plan d'incidence étant prédominantes.

Le maximum de polarisation a lieu pour un angle  $i$ , qui est appelé angle de polarisation ou angle principal d'incidence.

Le minimum de lumière réfléchie, dans le cas où le vecteur électrique est parallèle au plan d'incidence, est peu prononcé pour l'argent, très prononcé pour l'acier et certains oxydes.

La différence avec les corps diélectriques est très nette. On n'arrive plus à rendre à peu près nul le vecteur électrique situé dans le plan d'incidence.

3<sup>e</sup> loi. — Un rayon polarisé rectilignement se transforme par réflexion en un rayon polarisé elliptiquement. (1)

En d'autres termes, un vecteur est décomposé en deux vecteurs, l'un parallèle, l'autre normal au plan d'incidence, présentant une différence de phase.

Le vecteur électrique normal au plan d'incidence est en avance sur le vecteur parallèle au plan d'incidence.

La différence de phase est  $\frac{1}{4}$  sous l'angle principal d'incidence.

Cette loi constitue une deuxième différence avec le cas des diélectriques, bien que pour ces derniers il y ait, sous l'incidence brewstérienne, une très légère polarisation elliptique (n<sup>o</sup> 235).

## 241. — Théorie de la réflexion métallique —

Dans les théories qui précèdent (§ 2 et 3) nous avons supposé des milieux parfaitement transparents : c'est évidemment un cas idéal. Tous les corps sont plus ou moins absorbants ; nous verrons même, dans

(1) Exception faite, bien entendu, pour les deux cas qui font l'objet de la 1<sup>re</sup> loi —

la théorie électronique, que c'est l'absorption de la lumière qui est la cause de la dispersion, c'est-à-dire de la variation de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde.

L'absorption de la lumière a deux causes distinctes : la résonance et la conductibilité.

1<sup>o</sup> Absorption par résonance. — Ce phénomène se produit quand des ions ou des électrons ont une période de vibration propre peu différente de la période de la radiation qui vient frapper la substance.

Cet effet peut se produire dans les diélectriques et dans les conducteurs. L'absorption par résonance donne lieu, dans le spectre, à des bandes d'absorption plus ou moins larges. Nous avons précédemment négligé l'absorption par résonance et nous étudierons cette question dans la théorie électronique.

2<sup>o</sup> Absorption par conductibilité. — Quand un corps est conducteur, des courants sont développés par le passage de l'onde lumineuse ; ces courants produisent un effet Joule dont l'énergie est empruntée à la lumière ; il y a absorption très rapide, ou plutôt il y aurait absorption rapide de toute l'énergie lumineuse si la majeure partie de la lumière n'était pas réfléchie. C'est le phénomène de la réflexion métallique que nous allons étudier, en supposant un corps homogène et isotrope, ayant à la fois les propriétés des diélectriques et des conducteurs, c'est-à-dire possédant une constante diélectrique  $K$  et une conductivité  $\gamma$ , mais en ne tenant pas compte de l'absorption par résonance.

Comme dans les paragraphes précédents, nous évaluons toutes les grandeurs électriques en unités C.G.S. électrostatiques, de sorte que  $\gamma$  est homogène à l'inverse d'un temps et a une valeur numérique  $C^2$  fois plus grande qu'en unités électromagnétiques : par exemple, pour le mercure,  $\gamma$  est égal, à  $9,56 \times 10^{15}$ . Bien entendu le champ magnétique est toujours évalué en gauss. Enfin, même dans le fer, la perméabilité  $\mu$  est égale à 1 pour des oscillations aussi rapides que les oscillations lumineuses.

Les équations fondamentales de Maxwell sont

toujours :

$$(355) \quad \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \text{Curl. } \vec{H} \quad ; \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{Curl. } \vec{h}$$

et l'on a :

$$(356) \quad \vec{j} = \gamma \vec{h} + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$$

Une petite difficulté se présente dans l'intégration des équations différentielles ; il y figure à la fois les composantes du vecteur  $h$  et leurs dérivées premières  $\frac{\partial h_x}{\partial t}$  .....  $\frac{\partial h_x}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial h_x}{\partial z}$  etc.... Nous utiliserons

le procédé de calcul par les exponentielles imaginaires, qu'on emploie lorsqu'une équation différentielle, où la fonction est un cos. ou un sin., contient des dérivées d'ordre impair en même temps que la fonction et des dérivées d'ordre pair. On remplace  $\cos x$  par  $\cos x + i \sin x = e^{ix}$  puis, à la fin du calcul on revient aux parties réelles, pour tirer des résultats leur signification physique. Tous les problèmes relatifs à l'absorption, dans lesquels figurent toujours des dérivées paires et impaires du vecteur lumineux se traitent de cette façon.

Supposons une onde amortie se propageant suivant  $Oz$ , la force électrique étant, par exemple, parallèle à  $Ox$ .

La force électrique amortie peut se représenter par l'expression :

$$(357) \quad h = h_0 e^{-2\pi \frac{x}{\lambda_1}} \cos \frac{2\pi}{c_1} \left( t - \frac{z}{c_1} - \rho z \right)$$

$\rho$  étant une phase constante.

$x$  est le coefficient d'extinction : il signifie qu'après chaque parcours égal à une longueur d'onde  $\lambda_1$  (longueur d'onde, dans le corps, égale à  $C_1 T$ ), l'amplitude a diminué dans le rapport  $\frac{1}{e^{2\pi x}}$ .

D'après le mode de calcul  $e^{2\pi x}$  indiqué, au cos. ajoutons  $i \sin$ . de manière à former l'exponentielle complexe, et remplaçons  $e^{ix}$  par la notation, plus commode à écrire,  $\exp. ix$ . Nous écrivons donc :

$$h = h_0 \exp. \left( -2\pi x \frac{z}{\lambda_1} \right) \exp. \left[ i \frac{2\pi}{c_1} \left( t - \frac{z}{c_1} \right) - 2\pi \rho i \right]$$

$$\text{ou } h = h_0 \exp(-2\pi\varphi i) \exp\left[i \frac{2\pi}{z} \left(t - \frac{z}{c_1}\right) + i^2 \frac{2\pi x z}{\lambda^2}\right] \quad (-1 = i^2)$$

$$h = \eta \exp\left[i \frac{2\pi}{z} \left(t - \frac{z(1-ix)}{c_1}\right)\right]$$

finallement :

$$(358) \quad h = \eta \exp\left[i \frac{2\pi}{z} \left(t - \frac{z}{v}\right)\right]$$

L'amplitude complexe  $\eta = h_0 e^{-i2\pi\varphi}$  donne la représentation de la phase constante  $\varphi$ .

La vitesse de propagation complexe  $v = \frac{c_1}{1-ix}$  donne la représentation de l'absorption ou extinction.

Nous pouvons donc écrire la force électrique sous la forme (358),  $\eta$  et  $v$  étant des grandeurs qui peuvent être complexes.

Il est bien entendu qu'au point de vue physique, la force électrique est la partie réelle de l'expression; mais nous pouvons faire tous les calculs avec la force électrique imaginaire, et puisque, en somme, les parties réelles et les parties imaginaires resteront distinctes, en les séparant à la fin des calculs nous aurons la signification physique des résultats.

Calcul de l'indice de réfraction et du coefficient d'extinction. —  $h$  étant sous la forme (358)

$$h = \eta \exp\left[i \frac{2\pi}{z} \left(t - \frac{z}{v}\right)\right], \text{ nous avons :}$$

$$(359) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = i \frac{2\pi}{z} h \quad \text{ou} \quad h = -i \frac{z}{2\pi} \frac{\partial h}{\partial t}$$

et, portant cette expression de  $h$  dans l'expression de  $j$  (356):  
 $j = \gamma h + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial h}{\partial t}$ , on a :

$$(360) \quad j = \frac{K - 2i\gamma z}{4\pi} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K'}{4\pi} \frac{\partial h}{\partial t}$$

en posant (360)  $K' = K - 2i\gamma z$

$K'$  est la constante diélectrique complexe. Elle joue le même rôle que  $K$  dans la théorie relative aux diélectriques. Toutes les formules précédemment établies restent

valables si l'on y remplace  $K$  par  $K'$ .

L'équation de propagation (299) n° 216 devient :

$$(362) \quad \frac{K'}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}$$

Prenant les dérivées, d'après (358) :  $h = y \exp\left[i \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{z}{v}\right)\right]$ ,  
il vient :

$$(363) \quad K' = \frac{c^2}{v^2}$$

La vitesse de propagation complexe et la constante diélectrique complexe sont liés par la même relation que la vitesse réelle et la constante diélectrique réelle dans les corps non conducteurs.

La vitesse réelle de propagation est  $c_1 = v(1 - ix)$ .  
on a donc :

$$(364) \quad K' = \frac{c^2 (1 - ix)^2}{c_1^2} = n^2 (1 - ix)^2$$

$n = \frac{c}{c_1}$  est l'indice de réfraction (réel). Séparant dans (364) les parties réelles et les parties imaginaires, il vient, puisque  $K' = K - 2i\gamma\tau$  (361) :

$$(365) \quad \begin{cases} n^2(1 - x^2) = K \\ n^2x = \gamma\tau \end{cases}$$

relations qui permettent de déterminer l'indice de réfraction et le coefficient d'extinction à partir des constantes électriques réelles  $K$  et  $\gamma$ .

### Production de lumière elliptique par réflexion.

Occupons-nous maintenant de la réflexion sur la surface du corps. Nous supposons que la lumière incidente est polarisée à  $45^\circ$  sur le plan d'incidence : Nous avons donc  $h_{ip} = h_{in}$ .

Nous pouvons reprendre les résultats auxquels nous sommes parvenus dans le cas des corps transparents, en remplaçant  $K$  par la constante complexe  $K'$ .

Soit  $I$  l'angle d'incidence ; au lieu de l'angle de réfraction réel  $r$  tel que  $n = \sqrt{K} = \frac{\sin I}{\sin r}$ , nous avons à considérer un angle  $r'$  complexe défini par :

$$(366) \quad \sin r' = \frac{\sin I}{\sqrt{K'}}$$

Le rapport des amplitudes complexes des projections du vecteur réfléchi parallèle et normal au plan d'incidence est (comme au n° 234 pour les amplitudes réelles) :

$$(367) \quad \frac{\eta_{rp}}{\eta_{rn}} = - \frac{\cos(I+r')}{\cos(I-r')}$$

posons (368) 
$$\frac{\eta_{rp}}{\eta_{rn}} = \rho \exp(-2\pi i \varphi)$$

$\rho$  est le rapport  $\frac{h_{rp}}{h_{rn}}$  des amplitudes réelles des deux composantes  $p$  et  $n$  de la lumière réfléchie ;  $\varphi$  est la différence de phase de ces deux composantes ; d'après ce que nous avons vu plus haut :  $\varphi = \varphi_n - \varphi_p$

Comme le second membre de (367) est une grandeur complexe, il en est de même du 1<sup>er</sup> membre  $\frac{\eta_{rp}}{\eta_{rn}}$  ; donc  $\varphi$  n'est pas nul. Une lumière polarisée rectilignement, tombant sur une surface métallique est donc transformée, après réflexion, en lumière elliptique.

Si l'on représente, en fonction de  $I$ , les intensités réfléchies, les courbes de  $h_{rp}$  et de  $h_{rn}$  ont même forme que les courbes obtenues expérimentalement (n° 246).

La formule (367) donne :

$$\frac{1 + \rho \exp(-2\pi i \varphi)}{1 - \rho \exp(-2\pi i \varphi)} = \frac{\sin I \sin r'}{\cos I \cos r'}$$

ou, puisque  $\sin r' = \frac{\sin I}{\sqrt{K'}}$

$$(369) \quad \frac{1 + \rho \exp(-2\pi i \varphi)}{1 - \rho \exp(-2\pi i \varphi)} = \frac{\sin I \operatorname{tg} I}{\sqrt{K' - \sin^2 I}}$$

Pour  $I=0$ , on a  $\rho \exp(-2\pi i \varphi) = -1$

d'où  $\varphi = 0 \quad \rho = -1$

Pour  $I = \frac{\pi}{2}$   $\rho \exp(-2\pi i \varphi) = 1$

d'où  $\varphi = 0 \quad \rho = 1$

L'ellipticité disparaît donc pour les incidences normale et rasante.

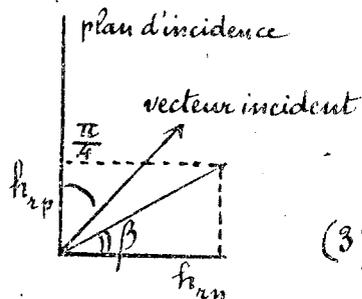
non exigé

Détermination des constantes optiques  $n$  et  $x$  par observation de la lumière réfléchie. —

Posons  $\rho = \frac{h_{rp}}{h_{rn}} = \operatorname{tg} \beta$ . L'angle  $\beta$  représente

l'azimuth de la polarisation rétablie; si en effet par un compensateur, on rétablit la polarisation rectiligne, l'angle du nouveau vecteur avec le plan d'incidence est  $\beta'$ , alors que l'angle du vecteur incident était  $\frac{\pi}{4}$ .

Remplaçons  $\rho$  par  $\operatorname{tg} \beta$  dans le



rapport  $\frac{1 - \rho \exp(-2\pi i \varphi)}{1 + \rho \exp(-2\pi i \varphi)}$ , nous a-

vous :

$$(370) \quad \frac{1 - \rho \exp(-2\pi i \varphi)}{1 + \rho \exp(-2\pi i \varphi)} = \frac{\cos 2\beta + i \sin 2\pi \varphi \sin 2\beta}{1 + \cos 2\pi \varphi \sin 2\beta}$$

Supposons que l'incidence soit assez faible (ou  $K'$  assez grand) pour qu'on puisse négliger  $\sin^2 I$  devant  $K'$ . L'expression (369) devient :

$$(371) \quad \frac{1 - \rho \exp(-2\pi i \varphi)}{1 + \rho \exp(-2\pi i \varphi)} = \frac{n(1 - ix)}{\sin I \operatorname{tg} I} \quad (\text{puisque } \sqrt{K'} = n(1 - i))$$

Remplaçant le 1<sup>er</sup> membre de cette expression par le second membre de (370), et égalant les parties réelles et les parties imaginaires dans les deux membres de l'expression obtenue on obtient :

$$(372) \quad \begin{cases} x = -\sin 2\pi \varphi \operatorname{tg} 2\beta \\ n = \sin I \operatorname{tg} I \frac{\cos 2\beta}{1 + \cos 2\pi \varphi \sin 2\beta} \end{cases}$$

Ces formules permettent de déduire, avec une précision presque toujours suffisante, les constantes optiques  $n$  et  $x$  de la mesure de  $\beta$  et de  $\varphi$ .

On voit que  $x$  étant nécessairement positif,  $\varphi$  est négatif, et par suite  $h_{rn}$  est en avance sur  $h_{rp}$ . (n° 242). Les formules se simplifient pour l'angle prin.

principal d'incidence (à condition que l'approximation (371) soit encore légitime). On a en effet  $\varphi = -\frac{1}{4}$  ; par suite :

$$(373) \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} 2\beta_0 \\ n = \sin I_0 \operatorname{tg} I_0 \cos 2\beta_0 \end{cases}$$

**Pouvoir réflecteur** — Le pouvoir réflecteur  $R$  est le rapport de l'intensité de la lumière réfléchie à la lumière incidente, pour l'incidence normale.

Les formules (365) n° 232 s'appliquent en remplaçant  $n$  par  $\sqrt{K}$ , c'est-à-dire par  $n(1-ix)$  ; on a donc :

$$\frac{h_{rp}}{h_{ip}} = \frac{h_{rp} \exp(-2\pi i \varphi_p)}{h_{ip}} = \frac{n(1-ix)-1}{n(1+ix)+1}$$

D'où, en multipliant par l'égalité complexe conjuguée :

$$(374) \quad R = \frac{h_{rp}^2}{h_{ip}^2} = \frac{n^2(1+x^2)+1-2n}{n^2(1+x^2)+1+2n}$$

Si  $x$  est grand,  $R$  est très voisin de l'unité.

## 242 — Comparaison de la théorie avec l'expérience —

Dans la théorie précédente, une remarque essentielle doit être faite sur les conditions dans lesquelles les formules peuvent être considérées comme exactes.

Les formules (365) ont été établies en admettant qu'il n'y a pas d'absorption par résonance, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'absorption sélective et en admettant que  $\gamma$  est exactement la conductivité qui ne dépend nullement de la période de la lumière qui frappe la substance.

Nous verrons dans la théorie électronique que, pour des oscillations aussi rapides que celles qui constituent la lumière du spectre visible, il faut tenir

compte de l'inertie des électrons et que  $\gamma$  ne peut plus représenter la conductivité qu'on mesurerait d'après la loi d'Ohm.

Faut-il alors considérer les formules (365) comme inexactes ? — Oui, si l'on envisage  $K$  comme la constante électrostatique et  $\gamma$  comme la conductivité ohmique ; non, si l'on considère  $K$  et  $\gamma$  comme un pouvoir inducteur spécifique et une conductivité fonctions de la période ; alors les équations (365) permettent non plus de calculer  $n$  et  $x$  d'après la constante électrostatique et la conductivité ohmique, mais au contraire de calculer  $K$  et  $\gamma$  lorsque  $n$  et  $x$  ont été déterminés par expérience, et d'étudier les variations de  $K$  et de  $\gamma$  avec la période.

Les formules qui donnent  $n$  et  $x$  en fonction de l'azimut de polarisation rétablie et de la différence de phase entre  $h_p$  et  $h_n$  sont rigoureuses ; elles ne supposent nullement la constance de  $K$  et de  $\gamma$  et s'appliquent à chaque période particulière.

Il en est de même de l'expression du pouvoir réflecteur en fonction de  $n$  et de  $x$ .

Bien plus, ces formules restent vraies pour les corps non conducteurs dans lesquels l'absorption est uniquement due à la résonance, car pour les établir on ne suppose rien d'autre que l'existence d'un coefficient d'extinction. Elles sont indépendantes de la cause de l'absorption.

En particulier la formule (374) donne, pour tous les corps, la relation entre le pouvoir réflecteur, l'indice et le coefficient d'extinction. Il est curieux de constater que tout corps très fortement absorbant pour certaines radiations ne les absorbe guère en réalité car il les renvoie par réflexion ; on dit alors, même s'il ne s'agit pas d'un métal, que le corps présente la réflexion métallique pour les radiations considérées. Dans ce phénomène, que le corps soit ou non conducteur, la lumière réfléchie est polarisée elliptiquement (sauf sous les incidences normale et rasante).

Expériences de Hagen et Rubens. (1903) — Ces physiciens ont déterminé le pouvoir réflecteur d'un certain nombre de métaux, pour diverses radiations.

infra-rouges.

Ils mesuraient le rapport du rayonnement d'un métal porté à haute température au rayonnement du corps noir à la même température. Ce rapport est égal au pouvoir absorbant du métal (loi de Kirchhoff) c'est-à-dire à l'énergie qu'il ne réfléchit pas ; il est donc égal à  $1-R$ .

Des formules (365) et (374) on déduit :

$$(375) \quad 1-R = \frac{2}{\sqrt{\gamma^2}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{4}{\tau(1-R^2)}$$

en négligeant  $\frac{1}{K}$  et 1 devant  $\gamma\tau$ .

Il se trouve que pour les grandes longueurs d'onde, supérieures à  $12\mu$ , les valeurs de  $\gamma$  ainsi calculées pour les métaux sont précisément égales aux conductivités de ces métaux (pour les températures auxquelles les mesures ont été faites). Cette vérification de la théorie est très importante.

Mais, conformément à la remarque que nous avons faite plus haut, pour des longueurs d'onde plus courtes  $\gamma$  ne représente plus la conductivité ohmique ; l'écart est considérable dans le spectre visible.

### 243. — Constantes optiques des métaux. —

Les formules (372) ou (373) permettent de déterminer expérimentalement l'indice de réfraction et le coefficient d'extinction en faisant tomber sur le corps de la lumière polarisée rectilignement et en déterminant  $\beta$  et  $\rho$  au moyen d'un compensateur de Babinet et d'un nicol analyseur. Voici les résultats obtenus par Drude pour un certain nombre de métaux avec la lumière jaune du sodium.

Le pouvoir réflecteur  $R$  est calculé par la formule (374)

	$n$	$x$	$nx$	$I_0$	$\beta_0$	$R$ calculé
Argent	0,18	20,4	3,67	$75^\circ 42'$	$43^\circ 35'$	0,953
Or	0,37	7,63	2,82	$72^\circ 18'$	$41^\circ 39'$	0,851
Platine	2,06	2,07	4,26	$78^\circ 30'$	$32^\circ 35'$	0,701
Cuivre	0,64	4,08	2,62	$71^\circ 35'$	$38^\circ 57'$	0,732

	$n$	$x$	$444$ $nx$	$I_0$	$\beta_0$	$R$ calculé
acier	2,41	1,41	3,40	77,03	27,49'	0,585
Sodium	0,005	523	2,61	71,19	44 58	0,997
Mercur	1,73	2,87	4,96	79,34	35 43	0,784

Un fait remarquable est que, pour certains métaux, l'indice est inférieur à l'unité. Ce résultat semble impliquer que la lumière se propage dans ces métaux avec une vitesse plus grande que dans le vide; il n'en est rien: l'indice ne donne pas la vitesse de l'amplitude ou du train d'ondes, mais ce qu'on nomme la vitesse de propagation de la phase (voir de 4<sup>ème</sup> année n°212)

La lumière qui frappe un corps provoque une émission de la part de la matière, d'une multitude de petites ondes qui produisent à leur tour de nouvelles ondes. Quand le régime permanent est établi, la longueur d'onde est la distance entre deux plans sur lesquels le milieu se trouve dans le même état; et le quotient de cette longueur d'onde par la période est la vitesse de propagation de la phase.

Le rapport de  $c$  à cette vitesse est l'indice de réfraction. Un indice inférieur à l'unité signifie simplement que la distance de deux plans correspondant à des états identiques est plus petite dans le milieu que dans le vide, mais ne signifie nullement que l'énergie se propage plus rapidement que dans le vide; en fait elle se propage toujours plus lentement.

L'indice est extraordinairement petit pour le sodium; c'est un effet de résonance, la lumière employée étant précisément celle des radiations émises par le sodium.

On peut mesurer directement  $x$  et  $n$ , ou plus exactement  $nx$  et  $n$ .

Pour mesurer  $nx$  on détermine expérimentalement le rapport entre l'intensité  $J$  de la lumière qui pénètre dans une feuille très mince et l'intensité  $J_0$  de la lumière qui a traversé la feuille. On a, si  $l$  est l'épaisseur de la feuille:

$$\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{J_0}} = e^{-2\pi x \frac{l}{\lambda_1}} \quad \text{d'où} \quad \frac{J}{J_0} = e^{-4\pi nx \frac{l}{\lambda}}$$

$\lambda_1$  étant la longueur d'onde dans la substance, et  $\lambda$

la longueur d'onde dans le vide.

Afin d'éviter de tenir compte de la réflexion on compare par différence les absorptions de deux lames d'épaisseurs différentes; l'intensité de la lumière réfléchie s'élimine d'elle-même dans la différence, puisqu'elle est la même pour les deux lames.

L'indice  $n$  se mesure directement par la méthode du prisme; il faut un prisme de très petit angle (inférieur à une minute d'angle). Kundt est parvenu à obtenir des prismes métalliques par dépôt électrolytique.

## 244. - Couleur superficielle produite par la réflexion métallique. -

Les couleurs observées dans la réflexion métallique résultent évidemment de la variation du pouvoir réflecteur avec la période.

La couleur de la lumière réfléchie est complémentaire de la couleur de la lumière transmise, qu'on peut observer à travers des feuilles très minces (ordre du millième de millimètre); par exemple l'or qui est rougeâtre par réflexion apparaît vert par transparence.

Il faut distinguer les couleurs superficielles produites par la réflexion métallique de celles que présentent les corps modérément absorbants, comme le papier coloré. La couleur provient dans ce dernier cas, des rayons qui pénètrent dans la substance et sont réfléchis, avec diffusion à l'intérieur. Ce sont alors seulement les rayons pour lesquels la substance n'est pas trop absorbante qui peuvent être diffusés, de sorte que la couleur par réflexion diffuse et la couleur par transparence sont les mêmes, au lieu d'être complémentaires comme dans le cas des métaux.

Rayons restants. - Par des réflexions successives on isole les radiations qui correspondent au maximum du pouvoir réflecteur. C'est ainsi que M. M. Rubens, Nichols et Lockman ont isolé les plus grandes longueurs d'onde observées jusqu'à présent; par cinq réflexions de la lumière d'un marchon aux (sans verre) sur la sylvine (KCl) on obtient une radiation sensiblement homogène dont la longueur d'onde est  $61 \mu$  (Cours de 1<sup>re</sup> année n° 345 p. 612).

## Libre II

# Notions sur la théorie électronique.

## Chapitre I Electrons et ions

L'évolution des théories de l'électricité jusqu'à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle comprend deux grandes périodes.

La première, à laquelle le nom de Coulomb reste attaché, est le développement de la théorie des fluides. La notion en est celle de l'action à distance, directe et instantanée, entre les charges électriques, entre les masses magnétiques, qui se repoussent ou s'attirent suivant la loi newtonienne de la gravitation.

La seconde période commence avec Faraday qui a compris le rôle que joue le milieu intermédiaire. Pour Faraday, il n'y a que des actions de proche en proche; c'est l'état du milieu entourant une charge électrique qui détermine la force subie par celle-ci. La notion fondamentale devient celle de l'intensité du champ dans le milieu, celle des lignes ou tubes de force tendus à travers le milieu comme des fils élastiques et aboutissant aux corps électrisés. Ces tubes portent à leurs deux extrémités des charges égales et de signes contraires, sur lesquelles ils tirent avec une force variable avec la nature du milieu électrique.

Maxwell a précisé les idées de Faraday en substituant à la conception du "nombre de tubes de force" celle du flux d'induction. C'est presque la disparition de la notion concrète

de charge électrique, car la charge présente dans l'intérieur d'une surface devient une quantité proportionnelle au flux d'induction qui sort de cette surface. Nous avons développé ce point de vue dans la première partie du cours.

L'extension de la théorie purement énergétique a été la conséquence de l'échec de la théorie des fluides caloriques et lumineux. Cependant la répugnance générale qui s'est manifestée contre les fluides était exagérée. S'il n'y a pas (nous en sommes certains aujourd'hui) de fluides caloriques et lumineux, ni de fluides magnétiques, nous connaissons les fluides électriques ou tout au moins un fluide électrique. On a isolé l'électron négatif, corpuscule de masse infime qui porte une charge négative dont la valeur est celle de l'atome d'électricité (no 21). Un mystère plane encore sur l'électricité positive, bien qu'on ait des raisons de penser que l'ion d'hydrogène est l'électron positif.

La découverte de l'électron a donc amené un retour à la théorie des fluides, mais non pas un retour à la théorie des actions à distance car les idées de Faraday, la théorie de Maxwell restent intactes. M. Lorentz, en développant la théorie électronique, a rendu à la notion de charge la réalité physique qu'elle avait perdue et a permis de donner une explication concrète du mécanisme de la plupart des phénomènes électriques, magnétiques et lumineux.

Il est à peine besoin d'ajouter que nous restons dans l'ignorance la plus profonde de la nature d'une charge électrique. Nous prenons son existence comme un fait sans en connaître l'origine.

La théorie électronique repose sur deux faits principaux.

1°) L'identité des effets produits par un courant de convection et un courant de conduction, démontrée par une célèbre expérience de Rowland.

2°) L'existence de rayonnements électrisés (décharge dans les gaz raréfiés, radioactivité).

# §1 Propriétés d'une charge en mouvement.

## 246. ~ Expérience de Rowland. ~

Lorsque les corps chargés d'électricité se déplacent avec leurs charges à travers un diélectrique, le champ d'induction électrique, ou dans le langage de Faraday, les tubes de force se trouvent modifiés. On doit donc observer des actions magnétiques; on peut prévoir que ces actions doivent être identiques à celles que produit un courant de conduction.

Ce fait, annoncé par Faraday, a été constaté en 1876 par Rowland; des mesures plus précises ont été faites en 1879, par Rowland et Hutchinson (1) puis par m. m. Grémieu et Pender (2).

Imaginons un disque possédant une charge superficielle et tournant autour d'un axe passant par son centre. Supposons que le disque entraîne sa charge dans son mouvement.

Soient  $\sigma$  la densité superficielle (électrostatique),  $N$  le nombre de tours par seconde; la vitesse linéaire est  $2\pi Nr$  à la distance  $r$  de l'axe.

Décomposons le disque en filets circulaires compris entre les distances à l'axe  $r$  et  $r+dr$ . Puisqu'il y a déplacement de charges dans chacun de ces filets, nous pouvons les envisager comme autant de courants circulaires: l'intensité électromagnétique du courant circulaire compris entre  $r$  et  $r+dr$  est la quantité d'électricité qui passe dans l'unité de temps à travers une section normale

on a donc:

$$di = \frac{\sigma}{c} dr \cdot 2\pi Nr \quad (c = 3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{sec})$$

Le champ magnétique de courant en un point de l'axe situé à une distance  $l$  est

(1) Rowland et Hutchinson. Phil. Mag. 5<sup>e</sup> série t. XXVII, p. 445.

(2) Grémieu et Pender. Journal de physique 1903 p. 541.

$$2\pi di \frac{r^2}{(r^2+l^2)^{3/2}} = 4\pi^2 \frac{5N}{c} \frac{r^3 dr}{(r^2+l^2)^{3/2}} \quad (\text{form 125, n}^\circ 102)$$

Intégrant entre 0 et R (rayon du disque) et doublant, car, dans l'expérience que nous allons décrire, il y a deux disques.

$$H = \frac{8\pi^2 N 5}{c} \int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2+l^2)^{3/2}} = \frac{8\pi^2 N 5}{c} \left[ \frac{R^2+2l^2}{(R^2+l^2)^{3/2}} - 2l \right]$$

Lorsque R est grand devant l, on a approximativement  $H = \frac{8\pi^2 N 5}{c} (R - 2l)$ . Pour avoir l'ordre de grandeur de l'effet, prenons les données suivantes: Chacun des deux disques forme une armature d'un condensateur dont l'autre armature est fixe; on maintient entre les armatures de chaque condensateur une différence de potentiel de 3000 volts, c'est à dire de dix unités électrostatiques. Si la distance des armatures est 1 cm, la force est  $4\pi 5 = 10$  d'où  $5 = 0,8$ .

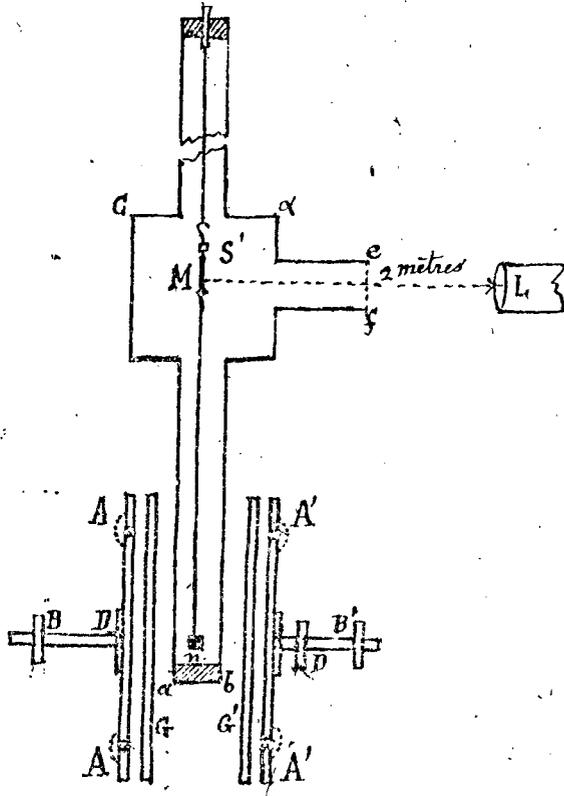
Prenons R = 20 cm l = 2 cm N = 100; on trouve  $H = 3,37 \cdot 10^{-6}$ .

En chiffres ronds, on doit avoir au point considéré, (l = 2 cm) un champ de l'ordre du cinquante millième du champ terrestre, très faible mais cependant mesurable avec un système astatique.

Dispositif de Rowland. — Il faut d'abord que le disque entraîne sa charge. Il en serait évidemment ainsi avec un disque isolant, mais on n'obtiendrait pas une charge uniforme. On peut prendre un disque conducteur, à condition qu'il n'y ait pas de composante du champ électrique parallèle à la surface car cette composante déplacerait les charges par rapport à la matière du disque.

On ne peut obtenir un champ magnétique mesurable qu'à condition de réaliser et de maintenir une densité électrique au moins de l'ordre de l'unité statique. Ce n'est possible qu'en faisant du disque l'armature d'un condensateur; alors la question se pose de savoir si la charge de l'autre armature (fixe) sera ou non entraînée par le mouvement de l'armature mobile. L'expérience a montré que la charge de l'armature fixe n'est pas entraînée.

Deux disques en ébonite  $D$  et  $D'$ , vu de profil sur la figure, sont dorés sur l'une de leurs faces et peuvent tourner ( $125$  tours/seconde) autour de deux axes horizontaux  $DB, D'B'$  placés dans le prolongement l'un de l'autre.



Des disques fixes  $G, G'$  également dorés, constituent avec les précédents deux condensateurs dont les champs sont rendus uniformes par l'adjonction d'anneaux de garde  $A, A'$ . La dorure déposée sur ces divers organes était subdivisée en secteurs par de fines rayures radiales de façon à éviter tout déplacement de l'électricité sur les surfaces conductrices.

La charge des secteurs mobiles était assurée à l'aide de petites touches métalliques, reliées à chacun d'eux, qui venaient toucher une feuille d'or mise en communication avec l'anneau de garde et l'un des pôles d'une machine de Holtz. Les plateaux  $G$  et  $G'$

réunis à l'autre pôle communiquaient avec la terre et l'on pouvait ainsi condenser sur les secteurs de  $D$  et  $D'$  des charges suffisamment fortes, positives ou négatives. Il est clair que les connexions inverses pouvaient être également établies et que le sens de rotation des disques était choisi de manière à correspondre à l'addition des effets magnétiques.

Pour étudier le champ magnétique développé par ce transport mécanique des charges, on employait un système rotatif soigneusement mis à l'abri de toute action électrostatique et de tout courant d'air par une cage en laiton  $a, b, c, d, e, f$ , reliée au sol et ne présentant qu'une ouverture grillagée  $e, f$  juste suffisante pour rendre possible l'observation des déplacements du miroir  $M$  avec une lunette  $L$  située à deux mètres.

La densité superficielle  $\sigma$  se déduisant de la mesure

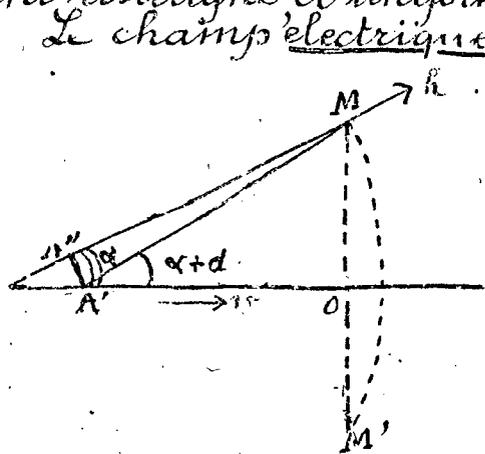
de la différence de potentiel et de la distance entre les plateaux des condensateurs  $DG$  et  $D'G'$ .

On comparait le champ magnétique produit à celui de deux courants continus d'intensité connue lancés dans un fil logé dans deux gorges circulaires creusées sur le pourtour de deux disques ayant à peu près même dimension que  $D$  et  $D'$ ; ces disques (non représentés sur la figure) étaient symétriquement placés à une distance connue de part et d'autre de  $n$ .

Les résultats ont été absolument conformes aux prévisions théoriques. On peut donc conclure qu'un transport de charges par convection produit les mêmes effets qu'un déplacement électrique par conduction, et l'on pressent déjà qu'un courant de conduction pourra être expliqué par un déplacement de particules électriques à l'intérieur d'un conducteur.

## 246. ~ Champ magnétique produit par le mouvement d'un corpuscule chargé. ~

Imaginons un corpuscule  $A$  de forme sphérique possédant une charge superficielle totale  $e$ . Supposons que ce corpuscule se déplace, avec une vitesse  $v$ , d'un mouvement rectiligne et uniforme, et soit  $AO$  sa trajectoire.



Le champ électrique produit par le corpuscule sphérique en un point extérieur  $M$  est le même que si toute la charge était concentrée au centre; le corpuscule peut être assimilé à un centre ponctuel.

Au point  $M$ , le champ électrique augmente tant que le corpuscule s'approche, devient maximum lorsque le corpus-

cule passe en  $O$ , puis décroît; la direction  $AM$  de la force électrique varie avec la position du corpuscule.

La charge tant évaluée en unités électromagnétiques, la force électrique en  $M$  est: ce que nous supposerons toujours dans la suite,

$$h = \frac{ce}{AM^2} = \frac{ce}{r^2}$$

D'après la loi du courant de déplacement de Maxwell, la variation du champ électrique détermine la production d'un champ magnétique. Proposons nous de chercher la distribution de ce champ.

Comme pour un courant rectiligne, le champ magnétique va être, à chaque instant, constitué par des lignes de force circulaires ayant pour axe la trajectoire. En tous les points de la circonférence  $MM'$  de centre  $O$ , le champ a même intensité à un instant déterminé, et cette intensité est variable dans le temps.

Appliquons la loi du courant de déplacement sous la forme suivante: la circulation de la force magnétique suivant le contour de la circonférence  $MM'$  est égale à la dérivée par rapport au temps, divisée par  $c$ , du flux d'induction électrique à travers toute surface passant par la circonférence.

Choisissons comme surface la calotte sphérique de centre  $A$ ; en tous ses points, le vecteur  $h$  est normal à la surface. On a donc en désignant par  $\alpha$  l'angle  $MAO$ .

$$\underbrace{H \cdot 2\pi r \sin \alpha}_{\text{circul. de } H} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left[ \underbrace{2\pi r^2 (1 - \cos \alpha)}_{\text{surf. calotte}} \cdot \underbrace{\frac{ce}{r^2}}_{f. \text{ élect.}} \right]$$

D'où en effectuant le calcul et réduisant:

$$H = \frac{e}{r} \frac{d\alpha}{dt}$$

or on a:

$$r d\alpha = AA' = AA' \sin \alpha = v dt \sin \alpha \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v \sin \alpha}{r}$$

finalement:  
(376)

$$H = \frac{ev \sin \alpha}{r^2}$$

Nous avons calculé la grandeur de  $H$  sans nous occuper de son sens. Si la charge  $e$  est positive (ce que nous avons supposé sur la figure d'après le sens marqué pour la force électrique de  $A$  vers  $M$ ), le sens du courant est celui de la vitesse  $v$ , et d'après la règle du bonhomme d'Ampère (nég.)

Le vecteur  $H$  est, au point  $M$ , dirigé en avant du plan du papier.

La formule (375) est identique à la formule (127, n° 91) si l'on remplace, dans cette dernière  $ids$  par  $e v$ . Une charge  $e$  animée d'une vitesse  $v$  est donc identique à un élément de courant  $e v$ , le sens du courant étant celui de la vitesse si la charge est positive, le sens opposé si la charge est négative.

Ce résultat pouvait se prévoir par un raisonnement très simple: soit  $ds$  un élément de longueur parcouru pendant le temps  $dt$ , la quantité d'électricité qui y passe est  $e$ ; on a donc  $e = i ds$ ; comme  $ds = v dt$ , on a bien  $i ds = e v$ .

Il est évident que ce résultat ( $i ds = e v$ ) s'étend à un mouvement quelconque du corpuscule.

## 217. ~ Inertie d'une charge. ~

### ~ Masse électromagnétique. ~

La mise en mouvement d'une charge électrique nécessite la création du champ magnétique qu'elle doit produire et par conséquent une dépense d'énergie; inversement l'arrêt d'une charge est accompagné de la restitution de l'énergie magnétique. C'est un effet identique à celui de l'inertie de la matière, l'énergie magnétique jouant le rôle de force-vive: nous allons voir d'ailleurs qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse, à condition que la vitesse soit petite par rapport à la vitesse de la lumière.

L'énergie magnétique  $dT$  dans un élément de volume  $dv$  étant  $\frac{H^2}{8\pi} dv$ , l'énergie totale du champ s'obtient par intégration  $\int T$  dans tout l'espace extérieur au corpuscule que nous supposons sphérique de rayon  $a$ .

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint H^2 dv = \frac{e^2 v^2}{8\pi} \iiint \frac{\sin^2 \alpha}{r^4} dv = \frac{e^2 v^2}{8\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \alpha}{r^2} dr d\alpha d\varphi$$

l'élément de volume en coordonnées polaires étant

$$dr \cdot r d\alpha \cdot r \sin \alpha d\varphi;$$

L'intégration est immédiate <sup>(1)</sup> et donne:

$$(377) \quad T = \frac{e^2 v^2}{3a} = \frac{1}{2} m v^2$$

en posant:

(378)

$$m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a}$$

$m$  est une véritable masse qui ne se distingue en rien d'une masse mécanique puisque l'énergie à dépenser pour donner à la charge la vitesse  $v$  est  $\frac{1}{2} m v^2$ . Une charge, considérée en elle-même, c'est à dire indépendamment de tout support matériel, possède donc une masse d'origine électromagnétique.

Jusqu'à ces dernières années, la cause de l'inertie de la matière était restée mystérieuse. Nous verrons qu'il est bien probable que toute l'inertie de la matière est due à l'inertie électromagnétique des corpuscules électrisés qui constituent les atomes et qu'il n'y a pas lieu de distinguer l'inertie mécanique de l'inertie électromagnétique.

Remarquons encore que, plus que jamais, l'énergie magnétique se présente comme une énergie cinétique: c'est la force vive de la charge en mouvement. Fait remarquable, cette force vive est localisée dans l'espace, elle est complètement en dehors du corpuscule.

Autre résultat qui étonne à première vue: la masse est d'autant plus grande que la particule est plus petite; cela se comprend si l'on remarque que la charge est plus concentrée.

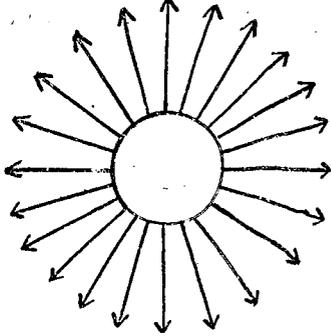
## 217 ~ Illage électromagnétique - Accroissement de la masse aux grandes vitesses.

Nous avons fait une restriction: nous avons dit que les formules établies ne sont valables que pour les petites

(1) L'intégration par rapport à  $\mathcal{L}$  se fait en prenant  $(1 - \cos^2 \alpha) \sin \alpha d\alpha = -(1 - \cos^2 \alpha) d \cos \alpha$  et en prenant  $\cos \alpha$  pour variable.

vitesse. Une analyse plus complète des phénomènes est nécessaire.

Considérons un centre électrisé immobile; ce centre est entouré d'une chevelure de lignes de force électrique distribuées radialement et uniformément dans toutes les directions.



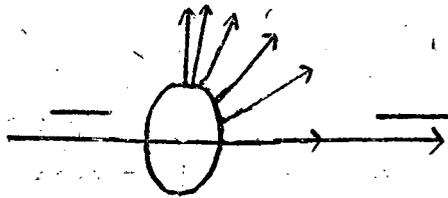
Mettons le centre en mouvement; tant que la vitesse est faible la distribution de la chevelure n'est pas sensiblement modifiée: c'est ce que nous avons implicitement admis au n° 246 en écrivant la loi de Coulomb.  $h = \frac{ec}{r^2}$ , comme si le corpuscule était au repos. L'ensem-

ble des lignes de force électrique et de force magnétique constitue le sillage du corpuscule; ce sillage lui est lié, les deux champs se formant à l'avant et disparaissant à l'arrière.

Mais supposons que la vitesse soit très grande. Les actions ne se transmettent pas instantanément et nous ne pouvons plus admettre que les champs  $h$  et  $H$  sont déterminés uniquement par la position actuelle du corpuscule: ils dépendent de positions antérieures qu'elles-mêmes dépendent de la vitesse.

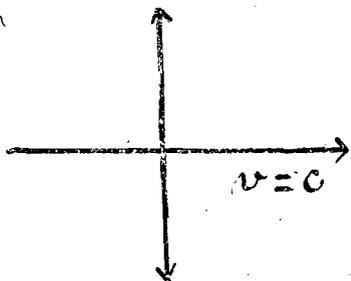
On peut envisager le phénomène sous un autre aspect: le champ magnétique en  $M$  varie avec le temps, d'autant plus rapidement que la vitesse est plus grande.

D'après les lois de Maxwell, il engendre un champ électrique, lui-même d'autant plus intense que  $\frac{dH}{dt}$  est plus grand au point considéré. Ce nouveau champ électrique se compose avec le champ électrostatique de Coulomb. Une analyse détaillée montrerait que les lignes de force restent radiales, mais que la chevelure se raréfie dans la direction de la vitesse et dans la direction opposée pour devenir plus épaisse dans la région du plan diamétral normal au déplacement (1).



(1). C'est à dessin que nous avons figuré un ellipsoïde. Pour l'observateur par rapport auquel il se déplace, le corpuscule est contracté dans la direction du mouvement (principe de relativité). Pour  $v=c$  le corpuscule serait infiniment aplati.

Cette modification est insignifiante tant que la vitesse n'atteint pas une valeur de l'ordre de 50.000 Km/sec. Mais elle devient rapidement importante quand la vitesse tend vers la vitesse de la lumière. Pour  $v = c$ , toutes les lignes de force seraient normales au déplacement.



On pourrait montrer dès à présent, que ce phénomène se traduit par un accroissement de la masse; en d'autres termes que l'énergie cinétique croît plus vite que  $v^2$  et qu'il faudrait une énergie infinie pour communiquer à la charge la vitesse de la lumière, mais la loi de variation dépend de l'hypothèse ad-

mise sur la forme que prend le corpuscule (électron indéformable d'Abraham, électron déformable de Lorentz).

Nous traiterons la question plus tard, par le principe de relativité qui impose une loi simple, d'ailleurs vérifiée par l'expérience:

$$(379) \quad m = \frac{m_0}{\beta} \quad m_0 \text{ masse au repos; } \beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

La masse étant la masse maupertuisienne (rapport de la quantité de mouvement à la vitesse).

En mécanique rationnelle on admet comme loi rigoureuse la constance de la masse dite "matérielle". En électromagnétisme la masse électromagnétique n'est pas constante. Dans le parallèle que nous avons établi jusqu'ici entre l'électromagnétisme et la mécanique classique, nous trouvons pour la première fois une divergence.

## 248. ~ L'onde d'accélération et le rayonnement. ~

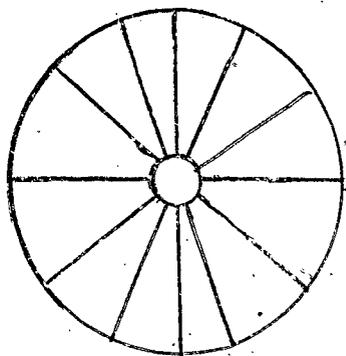
Une autre différence entre l'électromagnétisme et la dynamique classique va nous apparaître dans le phénomène du rayonnement.

Tant que la particule électrisée garde un mouve-

vement rectiligne et uniforme, elle emporte simplement avec elle son sillage dans l'espace; elle reste accompagnée de la distribution d'énergie qui l'entoure, et aucune portion de cette énergie n'est rayonnée à distance.

Il en est tout autrement quand la vitesse change. Une particule électrisée dont le mouvement n'est pas rectiligne et uniforme émet un rayonnement qui se propage avec la vitesse de la lumière.

La comparaison suivante (1) fait comprendre le phénomène: Imaginons, au milieu d'une enveloppe, une bou-



le maintenue en équilibre par des fils élastiques tendus dans toutes les directions entre sa surface et les parois de l'enveloppe. Ces fils sont analogues à la chevelure de lignes de force et la comparaison est bonne, car Maxwell a montré qu'une tension s'exerce dans le milieu le long des lignes de force.

Que le système soit au repos, ou qu'il soit en mouvement uniforme, les fils restent rectilignes. Mais si la boule subit un choc modifiant sa vitesse, des ondes transversales courent sur les fils; l'amplitude est maximum dans des directions perpendiculaires à celle du choc et nulle sur les fils dont la direction est parallèle au choc. (2)

Dé même quand la particule électrisée est secouée par une accélération, la chevelure de lignes de force subit une déformation qui court le long de ces lignes, en s'affaiblissant avec la distance. Cette déformation est maximum pour les lignes de force normales et nulle pour les lignes parallèles à l'accélération.

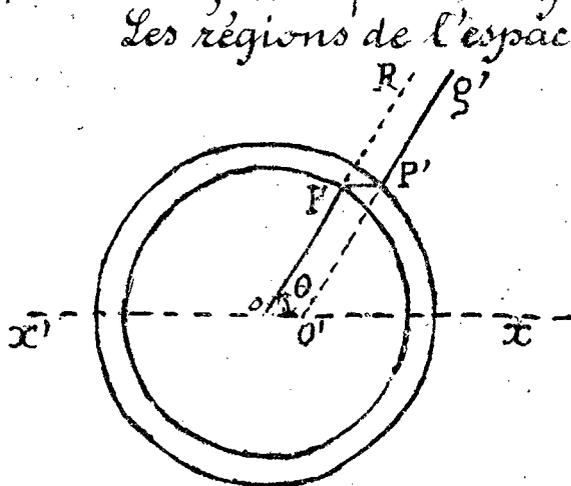
Supposons que la particule s'arrête, avec une accélération négative dans un temps  $\tau$  très court.

Prenons pour origine des temps l'époque à laquelle la particule commence à changer de vitesse et voyons

(1) P. Langevin. Conférence à la Société de Physique (1912), publiée dans le recueil "Les idées modernes sur la constitution de la Matière".

(2) Sur les fils il y a aussi des déformations longitudinales, mais celles-ci ne nous intéressent pas pour la comparaison.

ce qui se passe à l'époque  $t$ . Décrivons deux sphères de rayon  $ct$  et  $c(t-\tau)$ , la première ayant pour centre le point où se trouvait la particule au début de son ralentissement, la seconde ayant pour centre le point extrêmement voisin où elle se trouve après l'arrêt. Le temps  $\tau$  étant très court, les deux sphères sont pratiquement concentriques.



Les régions de l'espace extérieures à la sphère  $ct$  n'ont pas encore été averties du changement de vitesse, de sorte que extérieurement à cette sphère les lignes de force sont encore, à l'époque  $t$ , réparties comme si la vitesse n'avait pas changé; elles sont donc dirigées vers le point  $O'$ , tel que  $O'O' = vt$ , où serait la particule si elle avait gardé sa vitesse. Soit  $P'O'$  une de ces

lignes de force, faisant l'angle  $\theta$  avec la direction de la vitesse qui, dans le cas envisagé, est aussi la direction de l'accélération.

Mais, à l'intérieur de la sphère  $c(t-\tau)$  le remaniement du champ s'est effectué et la ligne de force est  $OP$ .

Entre les deux sphères, la ligne passe donc de  $P$  à  $P'$ .

Cette déformation court le long des lignes de force avec la vitesse  $c$ , elle constitue l'onde d'accélération.

La force électrique suivant  $PP'$  a une composante tangentielle  $h_T$  et une composante radiale  $h_R$ ; et l'on a:

$$\frac{h_T}{h_R} = \frac{P'R}{PR} = \frac{O'O' \sin \theta}{E} = \frac{vt \sin \theta}{E}$$

$E = PR$  étant l'épaisseur de l'onde d'accélération.

D'après la loi de Coulomb,  $h_R$ , en unités électrostatiques, est égal à  $\frac{ce}{r^2}$  ( $e$  électromagnétique); on a donc:

$$(380) \quad h_T = \frac{ce \, vt \sin \theta}{r^2 E} = \frac{ev \sin \theta}{r E} \quad \text{car } r = ct$$

Nous voyons que cette force tangentielle est énorme comparativement à la force magnétique qui existait au même point avant l'arrêt de la particule, et qui avait pour grandeur  $H = \frac{ev \sin \theta}{r^2}$  (form. 375).

Le rapport  $\frac{h\tau}{H}$  est en effet égal à  $\frac{r}{\epsilon}$ .

L'onde d'accélération est donc le siège d'une force électrique intense nécessairement accompagnée d'une force magnétique égale, qui varient en raison inverse de la distance alors que les forces électrique et magnétique du sillage variaient en raison inverse du carré de la distance.

L'énergie contenue dans l'onde d'accélération est la somme des énergies électrique et magnétique, ou le double de l'énergie électrique.

$$2. \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{e^2 v^2}{r^2 \epsilon^2} \sin^2 \theta dV$$

L'intégration étant étendue au volume compris entre les deux sphères; le calcul se fait comme au n.° en faisant  $\epsilon = dr$  (puisque  $\epsilon$  est très petit) on trouve immédiatement:

$$(381) \quad W = \frac{2}{3} \frac{e^2 v^2}{\epsilon}$$

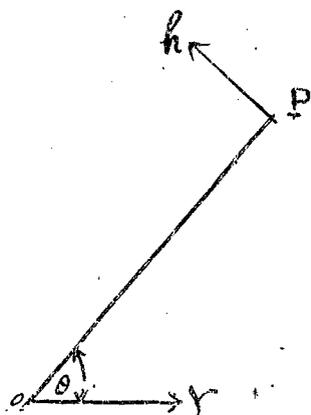
L'énergie est donc énorme si l'arrêt est presque instantané. Cette énergie reste constante, elle n'est pas dépensée en route (si elle ne rencontre aucun corps al sorbant) ce qui signifie qu'elle ne se localise pas dans le champ. Sa densité varie en raison inverse du carré de la distance, puisque le volume compris entre les sphères est proportionnel à  $r^2$ .

Au lieu d'un arrêt brusque, supposons maintenant que la vitesse de la particule varie d'une façon quelconque,  $\dot{v}$  étant l'accélération à l'époque  $t$ . La théorie reste la même; il suffit d'envisager le  $dt$  au lieu du temps  $\tau$ , la variation de la vitesse  $d\dot{v}$  au lieu de  $v$ , et de remplacer  $\epsilon$  par  $cdt$ . La théorie devient même rigoureuse car les approximations faites sont d'autant plus légitimes que  $\epsilon$  est plus petit, et maintenant  $\epsilon$  est infiniment petit. Les formules (380) et (381) deviennent:

$$(382) \quad h_{\pi} = \frac{e \gamma \sin \theta}{c^2}$$

$$(383) \quad W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \gamma^2}{c} dt$$

L'énergie rayonnée est, à chaque instant, proportionnelle au carré de l'accélération  $\gamma$ . Précisons la direction et le sens de la force électrique de l'onde d'accélération. Sur la figure précédente où l'accélération était négative (dirigée suivant  $ox'$ , puisqu'on supposait un arrêt), la charge étant supposée positive, la force électrique, dans la pellicule entre les sphères était dirigée suivant  $PP'$  et dans le sens de l'onde  $P'$ , la composante tangentielle, c'est à dire la force de l'onde d'accélération était donc dirigée de  $R$  vers  $P$ ; ceci nous donne le sens de cette force par rapport à celui de l'accélération.



En résumé la perturbation due à une accélération  $\gamma$  se fait sentir en un point  $P$  situé à la distance  $r$  de  $O$ , dans une direction faisant l'angle  $\theta$  avec l'accélération, au bout d'un temps  $\frac{r}{c}$ ; au champ radial (loi de Coulomb) se superpose une force électrique transversale  $Ph$ , située dans le plan passant par le point  $P$  et par l'accélération, dont la grandeur est  $\frac{e \gamma \sin \theta}{c^2}$ , et qui est parallèle, mais de sens opposé, à la projection  $\gamma \sin \theta$  de l'accélération sur le plan tangent à l'onde d'accélération. (plan normal à  $OP$ ).

En même temps s'il se produit en  $P$  un champ magnétique normal à  $OP$  et à  $Ph$ , dans un sens tel que les trois directions champ électrique, champ magnétique, propagation, sont disposées les uns par rapport aux autres comme les trois premiers doigts de la main droite.

Si la particule possède un mouvement périodique simple il en est de même de son accélération et par suite des forces électrique et magnétique de l'onde d'accélération.

Nous verrons que la lumière est ainsi constituée par les ondes d'accélération des électrons qui gravitent autour des noyaux atomiques.

Les formules qui viennent d'être établies supposent

encore une vitesse faible par rapport à celle de la lumière, car d'une part nous avons admis que la pellicule dans laquelle se trouve l'énergie rayonnée est limitée par deux sphères concentriques, ce qui revient à dire que le déplacement de la pellicule pendant le temps  $dt$  est beaucoup plus petit que  $c dt$ ; d'autre part, nous avons encore supposé que la vitesse est assez faible pour que les lignes de force radiales soient uniformément distribuées autour de la particule.

Quel est le rôle de l'onde d'accélération quand la particule subit un changement de vitesse, par exemple un accroissement?

Il est nécessaire que le sillage soit remanié, de façon que le champ magnétique prenne, à chaque distance de la particule, la nouvelle valeur qui correspond à la nouvelle vitesse, si celle-ci doit rester constante. L'onde d'accélération a précisément pour rôle de produire ce remaniement, d'informer les régions éloignées du changement subi par le centre.

Quelle énergie doit transporter l'onde d'accélération?

Elle doit d'abord apporter et distribuer en route le supplément d'énergie magnétique égal à l'accroissement de force vive; mais il y a plus, elle transporte en outre son énergie propre (form. 383) qu'elle ne distribue pas.

Réaction de rayonnement. — La force extérieure qui agit sur la particule doit donc fournir à l'onde d'accélération deux parts d'énergie: l'une est le supplément de force vive, l'autre est l'énergie rayonnée.

En mécanique la seule énergie à fournir est l'accroissement de force vive. En électrodynamique nous trouvons une énergie supplémentaire.

De même que la force d'inertie de la mécanique rationnelle est l'intermédiaire par lequel un corps emprunte aux actions extérieures l'énergie nécessaire pour accroître sa vitesse, de même il y a en électrodynamique une force d'inertie —  $m\gamma$  ( $m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a}$  pour les faibles vitesses, form. 378).

Mais il vient se superposer à cette force d'inertie une réaction rayonnante, <sup>(1)</sup> intermédiaire par lequel

(1) voir la note (1) de la page suivante.

L'énergie rayonnée est empruntée aux actions extérieures. C'est une force que la mécanique ne prévoit pas.

L'augmentation de la masse électromagnétique lorsque la vitesse croît, l'existence de la réaction de rayonnement, ne suffiraient pas pour affirmer un conflit radical entre la mécanique classique et l'électromagnétisme. On pourrait, en effet, essayer de concilier la mécanique ordinaire et l'électromagnétisme en admettant un milieu, l'éther, et en supposant un entraînement de ce milieu par une charge en mouvement.

C'est seulement dans l'étude du principe de relativité que la discordance complète nous apparaîtra.

## 249. ~ La force électrodynamique - extension de la formule de Biot et Savart

Le fait qu'une particule électrisée en mouvement produit un champ magnétique, c'est à dire exerce une action sur un aimant ou sur un courant près desquels elle passe, a pour conséquence une réaction de l'aimant ou du courant voisin (bien que la réaction ne soit pas directement opposée à l'action).

Puisque  $e v$  est un élément de courant  $ids$ , la loi fondamentale de l'électromagnétisme, qui donne l'expression de la force électrodynamique (n° 91) s'écrit:

$$(384) \quad \vec{F} = e [\vec{v} \hat{\times} \vec{B}] \quad \vec{B} \text{ étant l'induction magnétique.}$$

Supposons qu'une particule se meuve avec la vitesse  $v$  dans un champ magnétique  $H$  et dans un champ électri.

(1) Dans les circonstances ordinaires l'énergie rayonnée est très faible par rapport au changement d'énergie cinétique et la modification aux lois ordinaires de la mécanique est le plus souvent négligeable.

La réaction de rayonnement; quand l'accélération ne varie pas trop vite est  $\frac{2e^2}{3c} \frac{d^2x}{dt^2}$ ; elle est généralement petite par rapport à la force d'inertie.

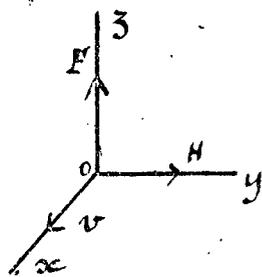
que  $\vec{h}$  (évalué, comme  $e$ , en unités électromagnétiques, c'est à dire en nombre de volts par centimètre, multiplié par  $10^9$ ) L'action exercée par  $\vec{h}$  est  $\vec{h}e$ , l'action de  $\vec{H}$  est  $e[\vec{v}\vec{H}]$ . La force qui agit sur la particule est donc:

$$(385) \quad \vec{F} = e(\vec{h} + [\vec{v}\vec{H}]) \text{ somme vectorielle ou géométrique.}$$

Le mouvement peut d'ailleurs être extrêmement compliqué, surtout si les champs ne sont pas uniformes. Au contraire le problème est simple si la particule se déplace, soit dans un champ magnétique uniforme, soit dans un champ électrique uniforme.

### 10) Trajectoire dans un champ magnétique uniforme. —

Supposons que la particule de charge  $e$  et de masse  $m$  (masse mécanique + masse électromagnétique) soit lancée avec la vitesse  $v$  suivant  $ox$ , dans un champ  $H$  dirigé suivant  $oy$ . Si la charge  $e$  est positive, d'après la règle du bonhomme d'Ampère la force électrodynamique  $H \times v$  est dirigée suivant  $oz$  à l'instant initial. (1)



La particule est déviée, mais la force reste normale à la trajectoire, la grandeur de la vitesse n'est donc pas changée; la force n'est pas changée non plus car la trajectoire reste normale à  $H$ , cette force est toujours égale à  $H \times v$ . Par suite la particule décrit dans un plan normal à  $H$ , un cercle de rayon  $R$ :

$$\frac{mv^2}{R} = H \times v \text{ d'où } (386) \quad R = \frac{1}{H} \frac{m}{e} v$$

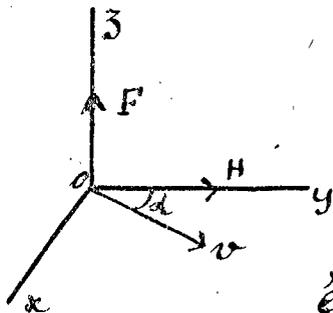
Supposons maintenant que la vitesse initiale fasse un angle  $\alpha$  avec la direction du champ; la composante  $v \cos \alpha$  suivant la direction de  $H$  reste constante; dans un plan normal à  $H$ , la composante de la vitesse est  $v \sin \alpha$  et la projection de la trajectoire est un cercle

(1) Règle des trois doigts de la main gauche: le pouce étant dans la direction de  $H$ , l'index dans celle de  $v$ , la force agit dans la direction du médium si la particule est positive et en sens opposé si elle est négative.

de rayon  $R'$ :

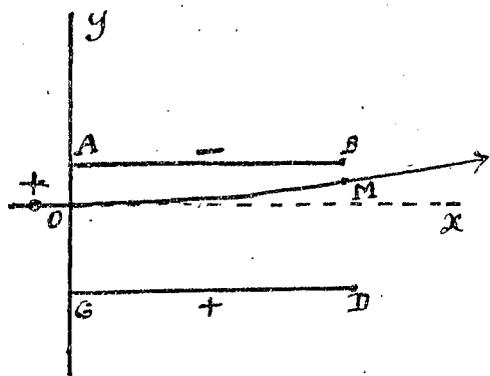
(387)

$$R' = \frac{1}{H} \frac{m}{e} v \sin \alpha$$



La trajectoire est une hélice sur un cylindre de rayon  $R'$  dont les génératrices sont parallèles à  $H$ ; elle avance dans la direction de  $H$  avec une vitesse  $v \cos \alpha$ .

2°) Trajectoire dans un champ électrique uniforme. — Considérons une particule qui pénètre en  $o$  dans un champ élec.



étrique (par exemple entre les deux armatures d'un condensateur) normalement aux lignes de force. La force garde une direction constante; le problème est identique à celui de la chute des corps et la particule décrit un arc de parabole; en sortant du champ, en  $M$  elle reprend

une trajectoire rectiligne, on a:

$$x = vt; \quad y = \frac{1}{2} \gamma t^2; \quad m \gamma = h e \quad (h \text{ électromagnétique})$$

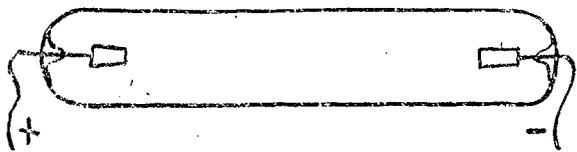
D'où (388) 
$$y = \frac{1}{2} h \frac{e}{m} \frac{x^2}{v^2}$$

## §2. Les rayons cathodiques et l'électron.

### 250. ~ Décharges dans les gaz raréfiés. ~

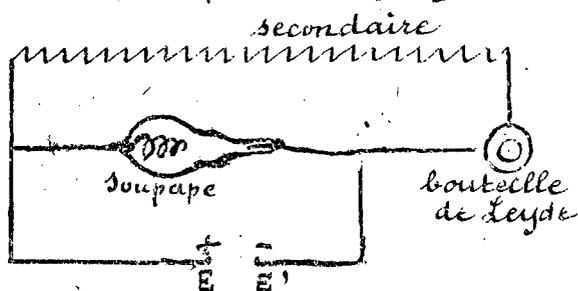
Prenons un tube de verre de quelques centimètres de diamètre muni à ses deux extrémités d'électrodes métalliques (formées par exemple d'un gros fil ou

d'un petit disque d'aluminium relié à un fil de platine traversant la paroi). Pour produire une décharge dans le gaz nous pouvons relier les électrodes à une machine statique, ou à une bobine d'induc.



tion. Il est commode de monter une forte bobine en transformateur (en supprimant l'interrupteur) avec adjonction d'une soupape de Villard. La soupape est un tube à gaz très raréfié, ayant l'une de ses électrodes en forme de spirale: pour des raisons que nous verrons plus loin, la soupape ne laisse passer le courant que si la spirale est cathode; elle supprime donc l'une des alternances du transformateur et le courant garde un sens invariable.

Par exemple, on peut employer le dispositif dont le schéma est représenté ci-contre (M. Villard)<sup>(1)</sup>. On réunit les bornes du secondaire aux armatures d'un condensateur de grande capacité, une soupape étant intercalée dans le circuit; le condensateur constitue une source continue d'électricité. L'alternance qui passe par la soupape charge le condensateur, à l'alternance suivante le condensateur chargé et le secondaire du transformateur sont en série; le courant, ne pouvant passer par la soupape, fait apparaître en  $EE'$  le double

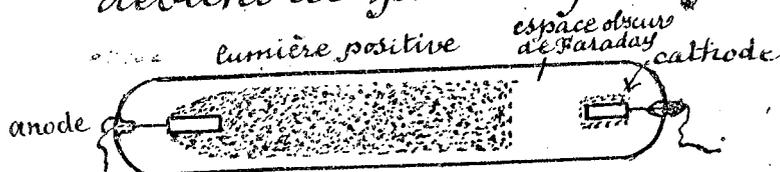


de la différence de potentiel du condensateur. On relie  $EE'$  aux électrodes du tube dans lequel on veut produire les décharges.

Apparences de la décharge à divers pressions. — Quand le gaz est à la pression ordinaire, on obtient des étincelles disruptives si la différence de potentiel est suffisante (machine statique ou bobine avec interrupteur.) Lorsqu'on abaisse la pression le passage de la décharge est facilité et l'aspect de l'étincelle se modifie. La pression étant de l'ordre de 1<sup>m</sup> de mercure, on voit une colonne lumineuse, rouge violacé, étincelle d'aspect nébuleux, partir

(1) P. Villard. Les rayons cathodiques. Collection Scientia

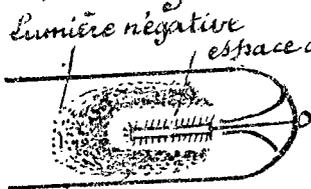
de l'anode et se terminer sans atteindre la cathode. C'est la lumière positive. A mesure que la pression s'abaisse, la lumière positive augmente de volume jusqu'à remplir le tube (vers  $1^{\text{mm}}$  de pression); en même temps l'espace sombre, appelé espace obscur de Faraday, qui sépare la lumière positive de la cathode, devient de plus en plus grand.



Autour de la cathode, on voit une gaine lumineuse désignée sous le nom de lumière négative; sa couleur

dépend du gaz (violette avec l'azote, jaune pâle avec l'oxygène, rose avec l'hydrogène); à une pression de  $1^{\text{mm}}$  elle est encore très peu étendue. La raréfaction étant poussée plus loin, la lumière négative s'avance à mesure que la lumière positive est refoulée vers l'anode.

Entre la lumière négative et la cathode, on remarque une zone obscure; c'est l'espace obscur de Hittorf;

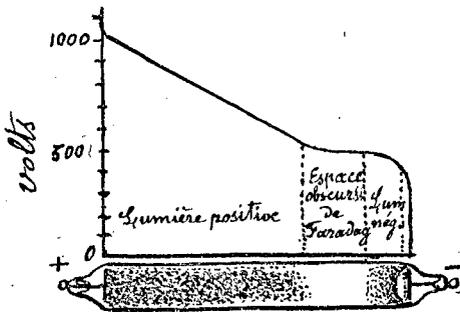


enfin, sur la cathode se trouve une dernière couche lumineuse rosée qui donne presque exclusivement le spectre de l'hydrogène (on y voit cependant aussi

le spectre du métal de la cathode, si ce métal est volatil comme le lithium, le magnésium... etc...).

L'espace de Hittorf est assez nettement délimité par la gaine négative suivant une surface qui diffère peu d'une surface équipotentielle entourant la cathode. Cet espace ne se voit bien qu'aux pressions inférieures à  $1^{\text{mm}}$ . Pour une pression de  $0^{\text{mm}},5$  il ne s'étend qu'à  $2^{\text{mm}}$ , de la cathode; pour  $0^{\text{mm}},15$  il atteint un centimètre. Aux très basses pressions (ordre de  $\frac{1}{100}$  de millimètre) l'espace de Hittorf gagne tout le tube, toute leur disparaît sauf aux environs immédiats de l'anode et sur la cathode; et le verre de l'ampoule présente une phosphorescence verte. Enfin à un degré de raréfaction extrême le courant ne passe plus.

Distribution du potentiel. — La figure ci-contre donne une idée de la distribution du champ électrique



dans un tube cylindrique contenant de l'air à  $1 \text{ mm}$  de pression et pour un milli.ampère environ. Près de la cathode existe une chute brusque de potentiel, la chute cathodique. Dans la lumière positive, le potentiel varie linéairement comme dans un conducteur homogène, lorsque le tube est cylindrique. La chute cathodique augmente quand la pression s'abaisse, et aux très basses pressions la distribution du potentiel est très simple; le champ est intense près de la cathode, à peu près nul partout ailleurs, les parois de l'ampoule sont chargées à un potentiel voisin de celui de l'anode.

Cathodes incandescentes. — Hittorf (1869) a découvert qu'avec une cathode incandescente la résistance au passage du courant est au moins cent fois plus faible qu'à froid, c'est-à-dire que la chute cathodique diminue quand la température s'élève. Wehnelt (1905) a établi que les oxydes des métaux alcalino-terreux et les terres rares sont remarquables à ce point de vue. Avec une pastille de chaux incandescente sur fil de platine, la chute peut être abaissée à 20 volts, ce phénomène est lié à l'effet Edison dont nous parlerons plus loin.

## 251. ~ Les rayons cathodiques. ~

La chute cathodique est connexe d'un phénomène très important; la production d'un rayonnement qui émane de la cathode et règne dans l'espace obscur de Hittorf.

Les rayons cathodiques, entrevus en 1859 par Plücker, ont été découverts en 1868 par Hittorf. Ce physicien a observé que lorsque la pression est assez basse pour que la lumière négative ait atteint la paroi du tube opposée à la cathode, et pour que cette paroi soit devenue phosphorescente, un objet placé entre la cathode et la paroi porte ombre sur le verre. Il a conclu de ses expériences que, dans l'espace entourant l'électrode négative,

la propagation de l'électricité se fait selon des trajectoires rectilignes le long desquelles l'électricité négative cheminerait dans des directions à peu près normales à la surface de la cathode.

Le rayonnement est invisible par lui-même, mais il excite la fluorescence du gaz de sorte qu'on peut le suivre dans le tube surtout avec l'oxygène pur qui donne une assez vive lumière jaune; toute fois la luminosité disparaît quand la raréfaction du gaz est très grande.

La découverte de Hittorf fit renaître la lutte entre la théorie de l'émission et la théorie des ondulations. Cette fois, l'hypothèse de l'émission était exacte; Crookes soutint l'idée d'un "bombardement moléculaire" et envisagea un nouvel état de la matière "l'état radiant".

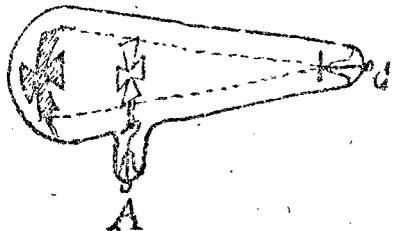
Les recherches ultérieures ont donné raison à Crookes, sauf en ce qui concerne la nature des particules: celles-ci ne sont pas des molécules; ce sont des corpuscules de masse beaucoup plus petite, ainsi que nous l'établirons plus loin.

Mentionnons quelques propriétés du rayonnement cathodique.

Phosphorescence. — Les rayons cathodiques exercent une action phosphorogénique remarquable, surtout quand ils sont "durs", c'est à dire quand la raréfaction est grande et que le voltage nécessaire pour faire passer la décharge est de l'ordre de 30.000 volts. Un très grand nombre de substances s'illuminent sous l'action de ces rayons; citons: le verre, le cristal, le diamant, le rubis, les sulfures alcalins-terreux, la blende, les sels uraniques, le platino-cyanure de baryum, la willémitte etc...

Effets calorifiques. — Les rayons chauffent considérablement les corps qu'ils frappent, l'ampoule de verre est rapidement percée par des rayons durs. Le diamant noircit à sa surface (transformation en graphite).

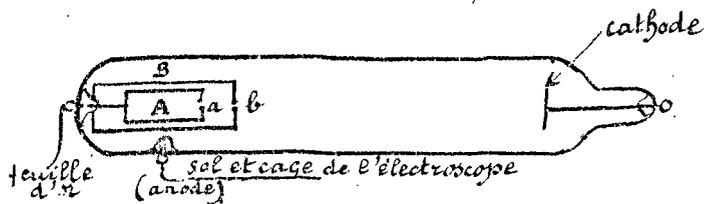
La rotation d'un moulinet (expérience de Crookes) est due, comme l'a montré Sir J.J. Thomson, au fait que les palettes sont chauffées sur la face qui reçoit les rayons.

ombres portées

Hitroff, nous l'avons dit, avait déjà constaté qu'un écran porte ombre sur la paroi du verre. Crookes réalisa une série d'expérience dont la plus célèbre est celle de la croix : Une croix en métal, servant d'anode, est placée devant la cathode. L'ombre agrandie apparaît sur l'ampoule; la position et les dimensions de l'ombre prouvent que le rayonnement est rectiligne et que la majeure partie de ce rayonnement est rectiligne et que la majeure partie de ce rayonnement émane du centre de la cathode.

## 252. Les rayons cathodiques sont électrisés. Expérience de M<sup>r</sup> Jean Perrin.

La nature du rayonnement cathodique a été établie par M. Jean Perrin qui a réalisé une expérience capitale (1895).



A est un cylindre métallique fermé, dans lequel on a percé une petite ouverture en face de la cathode. Le cylindre est relié par un fil aux feuilles d'or d'un électroscope.

cope.

B est un cylindre protégeant le cylindre A contre toute influence électrostatique extérieure. Il est percé d'une ouverture b sur la ligne qui joint a au centre de la cathode.

Le cylindre B, qui est relié au sol et à la cage de l'électroscope, forme anode, le pôle positif de la machine statique (ou de la bobine) étant lui-même relié au sol.

On constate que le cylindre A se charge progressivement d'électricité négative quand les rayons cathodiques pénètrent en a.

Si l'on dévie les rayons par un aimant la charge cesse d'augmenter. L'électrisation du cylindre A n'est pas due à un défaut de protection électrostatique car même si

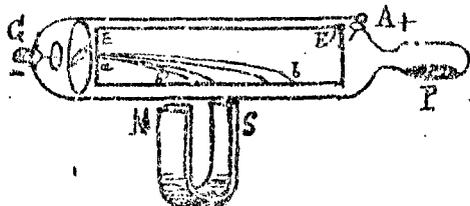
l'ouverture  $b$  est fermée par une feuille mince d'aluminium la charge se produit.

Les rayons cathodiques transportent donc de l'électricité négative. De plus, ces rayons ont de l'inertie, puisque, pénétrant dans une cage de Faraday, ils continuent leur route en dehors de toute action électrique et puisque leur rencontre avec un obstacle donne lieu à un dégagement de chaleur.

Nous allons préciser la nature des particules.

## 253. Les particules cathodiques.

Déviations dans un champ magnétique. — La déviation des rayons cathodiques dans un champ magnétique, (découverte en 1869 par Hittorf) est facile à constater. Il suffit d'approcher du tube un aimant. Voici le dispositif classique de Crookes :



Devant la cathode est placé un écran en mica, percé d'une fente, qui limite un pinceau de rayons; ces rayons tombent, sous une incidence presque rasante sur un écran  $EE'$  en mica recouvert d'une substance phosphorescente sur laquelle on voit la trace du pinceau.

Pour obtenir un faisceau très fin M. Villard employe un fil d'aluminium affleurant exactement l'extrémité d'un tube de verre étroit, ou mieux encore un disque d'aluminium placé dans

une coupe de verre couverte par une lame de mica percée d'une ouverture de  $1/4$  mm; les rayons ne se forment qu'en face du centre de l'ouverture.

On constate que lorsque les rayons sont émis dans un champ uniforme normal à la direction qu'ils prennent en l'absence du champ, ils reviennent sur eux-mêmes en décrivant un cercle dans un plan normal au champ ou plutôt un ensemble de trajectoires circulaires car ils ne sont pas homogènes, en général, et le faisceau est dispersé par le champ.

Lorsque le champ est oblique sur la direction d'émission,

le faisceau s'enroule en hélice autour des lignes de force. On obtient un pinceau sensiblement homogène en diaphragmant le faisceau dévié, à quelque distance de la cathode.

Ces trajectoires sont celles qui prévoient la théorie pour des charges électriques en mouvement (n° 249). Le sens de la déviation correspond à des charges négatives.

Déviations dans un champ électrique — Goldstein (1876) a observé le premier la répulsion par une cathode et l'attraction par une anode.

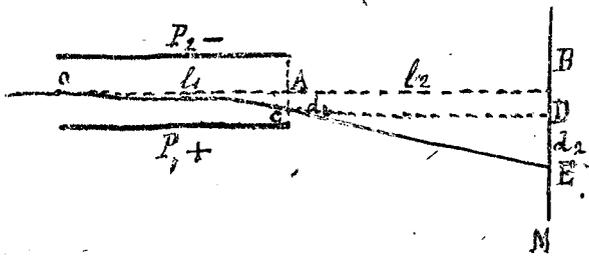
De nombreuses expériences ont été réalisées sur les actions électrostatiques subies par les rayons. En particulier, si on les fait passer entre deux plateaux portant des charges opposées, l'arc de courbe décrit dans le champ électrique est un arc de parabole (n° 249).

Il est donc certain que les rayons cathodiques sont formés de corpuscules électrisés en mouvement, et que ces corpuscules sont chargés négativement.

Mesure de la vitesse et du rapport  $\frac{e}{m}$  de la charge à la masse. — 1° Par un diaphragme isolons, dans un faisceau dévié par un champ magnétique uniforme normal à la direction d'émission, un pinceau homogène de rayons cathodiques. La détermination du rayon  $R$  de la trajectoire circulaire donne une première relation entre la vitesse  $v$  et le rapport  $\frac{e}{m}$  (n° 249 formule 386).

$$(389) \quad \frac{m}{e} v = R H$$

2° Une seconde relation est obtenue par la mesure de la déviation dans un champ électrique. Faisons passer un pinceau de rayons entre les deux armatures  $P_1, P_2$  d'un condensateur plan, suffisamment long pour que les régions non uniformes du champ aux extrémités puissent être négligées. Soit  $M$  un écran recouvert d'une



substance phosphorescente, placé à quelque distance du condensateur normalement à la trajectoire  $OAB$  en l'absence du champ électrique. Posons  $OA = l_1$ ;  $AB = l_2$ ;  $AC = d_1$ ,  $DE = d_2$ . Quand le condensateur n'est pas

chargé, la trace du pinceau est en B; quand il est chargé on observe la déviation.

$$BE = BD + DE = AC + DE = d_1 + d_2$$

Soit  $t$  le temps mis par un corpuscule à parcourir l'arc de parabole OC, on a:

$$d_1 = \frac{1}{2} \gamma t^2, \quad l_1 = vt, \quad \gamma = \frac{he}{m}, \quad (249)$$

$$\text{D'où} \quad d_1 = \frac{1}{2} \frac{he}{m} \frac{l_1^2}{v^2}$$

D'autre part, soit  $u$  la vitesse acquise suivant la direction de la force électrique dans le même temps  $t$  pendant le trajet OC, on a:

$$\frac{d_2}{l_2} = \frac{u}{v} \quad \text{et} \quad u = \gamma t = \frac{he}{m} \frac{l_1}{v}$$

$$\text{D'où} \quad d_2 = \frac{he}{m} \frac{l_1 l_2}{v^2}$$

Donc la mesure de la déviation totale,  $l_1$  et  $l_2$  étant connus,

$$(390) \quad d_1 + d_2 = \frac{he}{mv^2} \left( \frac{1}{2} l_1^2 + l_1 l_2 \right)$$

donne une relation entre  $\frac{e}{m}$  et  $v$ .

3°) Une troisième relation résulte de l'application du théorème de la force vive. Soit  $\Psi$  la chute cathodique; le travail de la force qui s'est exercée sur la charge (négative)  $e$  est  $e\Psi$ , il est égal à la force vive acquise par la masse  $m$ .

$$(391) \quad \frac{1}{2} m v^2 = e\Psi \quad \text{ou} \quad \frac{mv}{e} v^2 = 2\Psi$$

4°) Une quatrième relation s'obtient encore en recevant le rayonnement dans un cylindre de Faraday au fond duquel se trouve un couple thermo-électrique. On mesure, d'une part la charge communiquée au cylindre pendant un temps déterminé, d'autre part la chaleur développée pendant le même temps. Soient  $E$  la

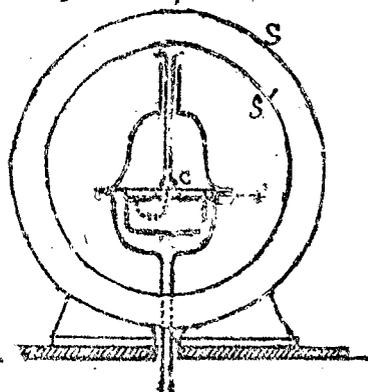
charge totale due à  $N$  corpuscules,  $W$  l'énergie calorifique,  
on a

$$E = Ne \quad W = \frac{1}{2} N m v^2$$

D'où (392) 
$$\frac{m}{e} v^2 = 2 \frac{W}{E}$$

Dans les relations (389), (390); (391), (392)  $e$  et  $m$  ne sont pas séparés; on a toujours le rapport  $\frac{e}{m}$ , de sorte qu'il y a deux inconnues  $v$  et  $\frac{e}{m}$ . La combinaison de la 1<sup>re</sup> méthode avec l'une quelconque des trois autres  $\frac{e}{m}$  détermine ces deux quantités.

Sir J.J. Thomson (1897) a employé la méthode de la déviation magnétique jointe à celle du cylindre de Faraday, puis les méthodes des déviations électriques et magnétique. M. Kaufmann, M. Simon puis M. Classen ont mesuré la chute cathodique et la déviation magnétique. Nous dirons quelques mots des expériences de M. Classen (1908) qui paraissent les plus précises.



Trois conditions importantes ont été réalisées.

1<sup>o</sup>) Le champ magnétique, obtenu avec deux solénoïdes  $SS'$  concentriques était homogène et constant (à un millième près).

2<sup>o</sup>) Les rayons étaient émis directement dans le champ magnétique.

3<sup>o</sup>) La distance sur laquelle se faisait la chute de potentiel était aussi faible que possible ( $1^{\text{mm}}$ ); de la sorte les rayons prenaient immédiatement leur vitesse définitive.

A cet effet la cathode  $c$  (cathode de Weipelt chauffée de l'extérieur) était à  $1^{\text{mm}}$  d'une feuille de Platine  $P$ , prise comme anode, percée d'un trou de  $1^{\text{mm}}$  devant la cathode. Au dos de la feuille de platine était une plaque photographique annulaire sur laquelle les rayons faisaient impression (pose 2 secondes). On fait deux opérations avec deux directions opposées du champ.

La différence de potentiel entre  $c$  et  $P$  était 1.000 volts dans une première série d'expériences,

4000 V dans une autre série.  
D'après (389) et (391) on a:

$$\frac{m}{e} v^2 = 2 \psi$$

$$\frac{m}{e} v = R H$$

D'où  $v = \frac{2 \psi}{R H}$

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \psi}{R^2 H^2}$$

Avec  $\psi = 1000 \text{ V} = 10^{11} \text{ CGS}$ ,  $H = 56 \text{ gauss}$ , la trajectoire circulaire avait un diamètre d'environ  $38 \text{ cm}$ .  
Classen a trouvé

$$v = 9420 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

$$\frac{e}{m} = 1,773 \cdot 10^7$$

La précision indiquée pour  $\frac{e}{m}$  est  $\pm 0,002$

## 254. ~ L'électron. ~

La vitesse des corpuscules cathodiques dépend essentiellement de la chute de potentiel cathodique, car elle est proportionnelle à  $\sqrt{\psi}$ . Avec une chute cathodique de l'ordre de 50.000 V, la vitesse est de l'ordre de 70.000 km/sec.

Le fait remarquable est que la valeur de  $\frac{e}{m}$  est indépendante du gaz de l'ampoule, indépendante aussi de la nature de la cathode.

Nous verrons bientôt comment on a pu établir que la charge  $e$  est précisément l'atome d'électricité, dont nous avons indiqué l'existence comme conséquence de la loi de Faraday et de la structure discontinue de la matière.

La valeur de  $e$  est moins exactement connue que celle de  $\frac{e}{m}$ . Admettons la valeur donnée au n°28, calculée en adoptant pour la quantité d'électricité transportée par un équivalent électrochimique 9650 unités c.g.s. pour le nombre  $N$  d'Avogadro  $6,80 \cdot 10^{23}$  (Jean Perrin); nous avons trouvé  $e = 1,42 \cdot 10^{-20}$  (unité CGS. électro-magnétique).

D'autre part les mesures directes de N. Millikan, dont nous parlerons bientôt, ont conduit à la valeur  $e = 1,59 \cdot 10^{-20}$  qui paraît plus exacte. Il en résulte  $m = 0,89 \cdot 10^{-27}$ . La masse de l'atome d'hydrogène étant  $m_H = \frac{e}{9650}$ ; on en déduit  $\frac{m_H}{m} = 1830$ .

La masse du corpuscule cathodique est environ dix huit cents fois plus petite que celle de l'atome d'hydrogène.

Le corpuscule n'est donc pas l'atome d'un élément chimique. Nous verrons par la suite qu'on est conduit à le considérer comme un constituant universel de la matière. Comme il a une charge égale à l'atome d'électricité et qu'on a toutes raisons de penser que son inertie est d'origine purement électromagnétique (n° 247), on lui a donné le nom d'électron.

## 255. Formation des rayons cathodiques.

### Afflux positif.

M. Schuster (1890) avait observé qu'un objet placé dans l'espace obscur de Hittorf, près de la cathode, porte ombre sur celle-ci.

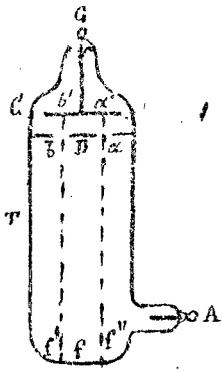
M. Villard a établi que la formation des rayons cathodiques est liée à l'existence d'un afflux, chargé positivement, qui vient frapper la cathode. Parmi les nombreuses expériences de M. Villard nous citerons les suivantes.

Si l'on approche de la cathode une électrode auxiliaire, placée latéralement, cette électrode repousse sur la cathode la région d'émission des rayons cathodiques si elle est chargée positivement et produit l'effet contraire quand elle est chargée négativement. Ce fait s'explique aisément si l'on admet que l'électrode agit sur des charges positives qui viennent frapper la cathode, et que les rayons cathodiques partent de la région frappée par l'afflux.

Pretons maintenant un tube cylindrique (diamètre 50<sup>mm</sup>) avec un large disque C comme cathode.

À 15<sup>mm</sup> en avant de C est disposé un diaphragme métallique D percé de deux trous a et b.

Faisons le vide progressivement: tant que l'espace

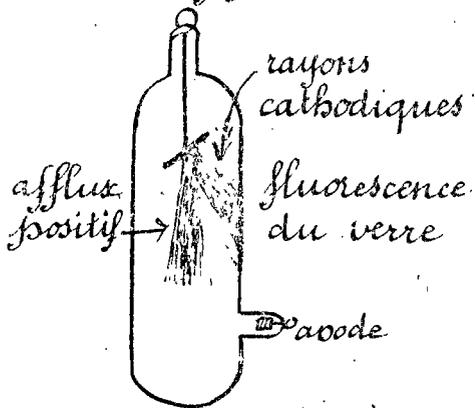


obscur est à l'intérieur de CD, tout se passe comme si le diaphragme n'existait pas; mais dès que l'espace obscur a dépassé D, on voit sur la cathode deux points brillants a' b' d'où partent les rayons cathodiques, suivant les axes des trous a et b, le reste de la cathode n'émettant presque rien. Aux basses pressions, deux faisceaux étroits de rayons cathodiques viennent frapper le verre en f' et f''.

Si il n'y avait pas de diaphragme, à égalité de résistance du tube, on aurait un faisceau central frappant le verre en f, et il n'y aurait presque rien en f' et f''. Au contraire avec le diaphragme le verre est menacé de fondre en f' f'', comme s'il y avait deux cathodes, l'une en a', l'autre en b'.

Evidemment le faisceau cathodique étant diaphragmé, il est naturel de n'observer que deux faisceaux a'a f'', b' b f'', mais si le rôle de l'écran D se bornait à diaphragmer le faisceau cathodique si l'émission n'était pas transformée, on ne verrait pas deux points radiants en a' et b' seulement, et surtout les rayons a'a f'', b' b f'' ne seraient pas plus intenses qu'en l'absence du diaphragme.

L'approche d'un aimant dévie les rayons cathodiques et les empêche de passer par les trous, mais ne change pas la position des points d'émission a' b'.



Enfin si l'on incline la cathode, on voit une gerbe rosée centrée sur l'axe du tube, distincte du faisceau cathodique qui est normal à la cathode.

L'afflux cathodique n'est pas visiblement influencé par un champ magnétique faible. Nous verrons qu'il est formé d'ions c'est à dire de matière électrisée.

En résumé quand on fait le vide progressivement, l'afflux positif apparaît en même temps que l'espace de Hittorf, et part de toutes les régions de cet espace. Le vide étant avancé, l'afflux se centre sur le tube car,

étant positif, il est repoussé par les parois. Les rayons cathodiques partent des points où il frappe la cathode.

On conçoit qu'un tube ayant une électrode en forme de spirale soit beaucoup moins résistant quand la spirale est cathode que lorsqu'elle est anode, car la spirale peut recevoir une grande quantité d'afflux; c'est l'explication du fonctionnement de la soupape de Villard (n° 251).

## 256. ~ Rayons de Lenard. ~

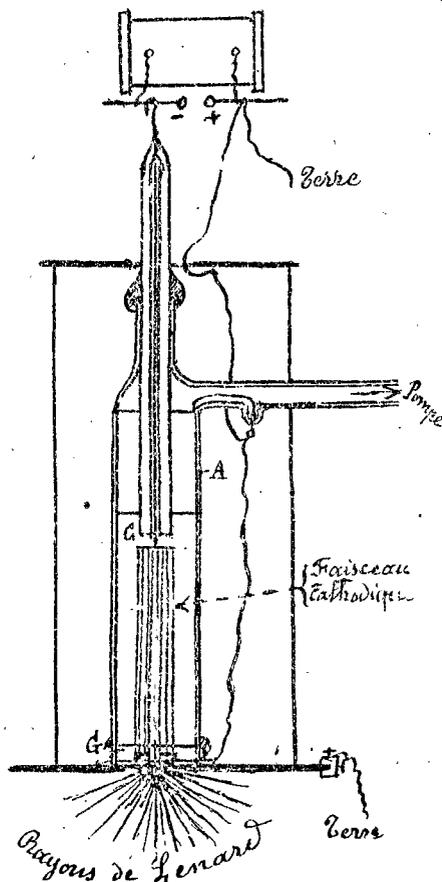
Les rayons cathodiques peuvent sortir de l'ampoule, à travers une fenêtre d'aluminium très mince.

Hertz (1892) avait déjà observé que, derrière une feuille d'or ou d'aluminium, il subsistait dans le gaz de l'ampoule une phosphorescence appréciable, et que la tache lumineuse projetée derrière cette feuille se déplaçait par l'approche d'un aimant, preuve que des rayons cathodiques avaient traversé la feuille mince.

M. Lenard (1894) a employé un tube comme l'indique la figure: la cathode C est un disque d'aluminium (12<sup>mm</sup> de diamètre); l'anode A est un tube de laiton en arrière de la cathode. L'extrémité du tube opposée à la cathode est fermée par un godet métallique G fixé au tube par de la glu marine; dans ce godet est percé un trou de 1<sup>mm</sup> recouvert d'une feuille mince d'aluminium (0<sup>mm</sup> 003); la feuille est en communication métallique avec le godet, relié lui-même à l'anode et à la terre.

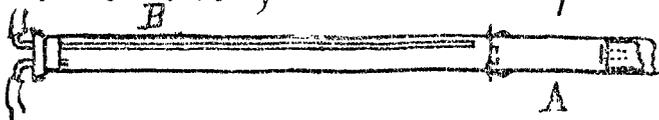
La pression dans le tube est très réduite de manière à avoir des rayons durs.

Dans une chambre sombre, on voit une lueur diffuse émaner de la



fenêtre, dans l'air, jusqu'à une distance de 5 cm environ. Ces rayons excitent la phosphorescence, impressionnent une plaque photographique, et rendent l'air conducteur de l'électricité. Il est vrai qu'aux rayons de Lenard viennent s'ajouter des rayons X (non encore découverts à l'époque où Lenard fit ces expériences) qui produisent les mêmes effets.

Faisant déboucher les rayons, non plus dans l'air mais dans un second tube B où l'on pouvait introduire divers gaz à la pression qu'on voulait, M. Lenard étudia l'absorption des rayons par la matière du tube B. Il trouva que l'absorption est la même dans tous les gaz, pourvu qu'on règle la pression de manière à leur donner à tous la même densité. L'absorption dépend donc essentiellement, non de la nature du corps absorbant, mais de la quantité de matière traversée.



En faisant le vide dans le tube B et mesurant les déviations électrique et magnétique des rayons issus du tube A, on trouve le même rapport  $\frac{e}{m}$  que pour les rayons cathodiques: ce sont donc bien des électrons qui sont sortis du tube A.

## 257. ~ Effet photo-électrique. ~

M. Hallwachs (1888) a découvert que la lumière ultra-violette provoque la décharge des corps électrisés négativement. Il éclairait au moyen d'une lampe à arc, riche en ultra-violet, un plateau de zinc, bien nettoyé, relié à un électroscope. Si le plateau est chargé négativement la décharge est rapide; s'il est chargé positivement, la lumière est sans effet; s'il n'est pas chargé il prend sous l'action de la lumière ultraviolette une légère charge positive.

M. M. Elster et Geitel (1889-1895) ont observé que les métaux alcalins, les alliages qu'ils forment entre eux, et leurs amalgames perdent de l'électricité négative quand ils sont exposés aux radiations du spectre visible (sans ultra-violet). Le rubidium est même sensible aux radiations émises d'un corps à peine chauffé au rouge. La sensibilité de chaque

métal dépend de la longueur d'onde; comme on pouvait d'ailleurs s'y attendre, les radiations les plus actives sont celles qui sont le plus absorbées (par exemple le jaune dans le cas du sodium).

Les métaux ne sont pas les seuls corps présentant l'effet photo-électrique; le phénomène est très général et assez intense pour beaucoup de corps absorbants<sup>(1)</sup> (solutions colorées, solutions de corps fluorescents, corps phosphorescents). L'eau ne donne pas d'effet photo-électrique, mais la glace sèche est sensible à l'ultra-violet (M. Buisson).

L'explication de ce phénomène résulte du fait, découvert par Sir J. J. Thomson (1899), que les radiations actives provoquent une expulsion d'électrons, c'est à dire une émission de rayons identiques à des rayons cathodiques. En faisant l'expérience à basse pression, déviant les corpuscules dans un champ magnétique et un champ électrique rectangulaires, J. J. Thomson trouva une valeur de  $\frac{e}{m}$  de l'ordre de  $10^7$ .

Puisqu'un corps frappé par la lumière émet des électrons, non seulement il perd sa charge s'il est chargé négativement, mais il s'électrise positivement jusqu'à ce que le champ électrique qu'il produit arrête l'expulsion d'électrons, ou plus exactement soit assez intense pour ramener les électrons expulsés. L'expérience montre que l'émission s'arrête lorsque le corps est à un potentiel voisin de 2 volts; a fortiori elle ne peut avoir lieu quand le corps est chargé positivement à un potentiel plus élevé.

Dans l'air le phénomène est plus compliqué car les rayons émis ionisent le gaz.

La vitesse initiale des électrons résulte immédiatement de la valeur du potentiel pris par le corps. On a:

$$\frac{1}{2} m v^2 = e \psi \quad , \quad v = \sqrt{2 \psi \frac{e}{m}}$$

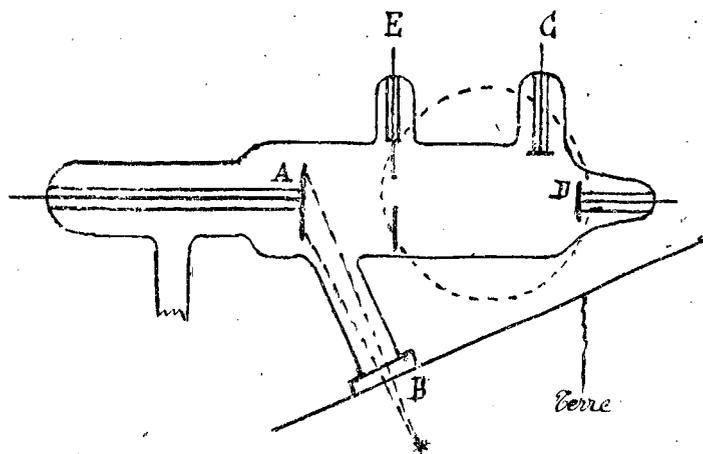
Prenant  $\psi = 2 \text{ volts} = 2 \cdot 10^8 \text{ C.G.S.}$   $\frac{e}{m} = 1,77 \cdot 10^7$  on trouve  $v = 8,4 \cdot 10^7$ .

La vitesse initiale est donc de l'ordre de  $10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ .

M. Lenard (1900) a étudié ce phénomène avec le dispo.

(1) L'effet photo-électrique est toujours accompagné d'absorption, mais cependant la réciproque n'est pas toujours vraie.

sitif suivant: dans une ampoule où le vide a été aussi poussé que possible (raréfaction telle qu'on ne pouvait plus y produire des rayons cathodiques à la manière ordinaire,



on dispose une plaque d'aluminium A, sur laquelle tombe la lumière ultra-violette issue d'un arc électrique produit entre électrodes de zinc, (B est une fenêtre en quartz transparent pour l'ultra-violet). E est une électrode, reliée à la terre, qui forme écran électrostatique pour la partie de l'appareil située du côté opposé à la cathode. C et

D sont des électrodes qu'on peut relier à un électromètre.

Lorsque A est chargée négativement, un flux d'électricité négative tombe sur D; par l'approche d'un aimant, on fait tomber le rayonnement sur C.

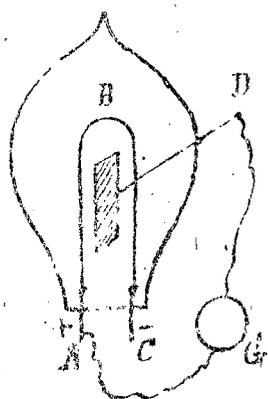
On peut déterminer le rapport  $\frac{e}{m}$  connaissant la différence de potentiel entre A et E et d'autre part mesurant la déviation magnétique dans la région E, DC où ne règne plus de champ électrique et où par conséquent la vitesse des corpuscules reste constante. Mais on peut démontrer directement l'identité de ces rayons avec les rayons cathodiques: il suffit de laisser rentrer un peu d'air et de produire des rayons cathodiques ordinaires avec une chute de potentiel égale au potentiel négatif auquel on maintenait l'électrode A quand elle était exposée à la lumière. On constate que le champ magnétique nécessaire pour amener le rayonnement sur C, et produire le maximum d'électrisation de C, est le même que précédemment.

Un fait remarquable est le suivant: la quantité d'électrons émis par un corps dépend de l'intensité de la lumière, mais le potentiel auquel se charge le corps est indépendant de l'intensité; le potentiel augmente quand la longueur d'onde diminue.

Ce résultat, dont nous donnerons plus loin l'explication, est une conséquence de l'existence des quanta d'énergie.

## 258. ~ Effet Edison. ~

Mr. Edison (1884) a découvert le phénomène suivant: Soit A.B.C. le filament en charbon d'une lampe à incandescence; on place entre les parties AB, BC, du filament une lame de platine isolée, munie d'un fil D.

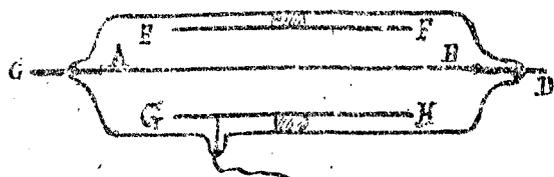


Si l'on relie le fil D à l'extrémité positive A du filament, par l'intermédiaire d'un galvanomètre, on constate la production d'un courant notable (3 à 4 milliampères) dirigé de A vers la plaque. Si la plaque est reliée à la branche négative C au lieu de la branche positive, l'effet est à peu près nul.

Le courant se fermant nécessairement à travers l'espace compris entre la lame et la partie négative du filament, on est conduit à penser que le filament émet des charges négatives.

L'effet est, beaucoup moins intense avec un filament métallique qu'avec un filament de charbon.

Sir J.J. Thomson a réalisé le dispositif suivant: Un



fil rectiligne AB porté au rouge blanc par un courant traverse une ampoule dans laquelle on a fait le vide; autour de ce fil est disposé un cylindre EF, CH. Le fil est relié au pôle négatif d'une

batterie, le cylindre est relié au pôle positif, et un galvanomètre est intercalé dans le circuit. On constate la production d'un courant, bien que le fil et le cylindre soient isolés l'un de l'autre.

Sir J.J. Thomson a mesuré le rapport  $\frac{e}{m}$  par la méthode des déviations électrique et magnétique, les particules émises par le fil incandescent sont des électrons.

L'émission augmente très vite quand la température s'élève (loi exponentielle); le charbon est plus actif que les autres corps, à 1600° il donne un flux d'électrons constituant un courant de 2 ampères par centimètre carré.

Nous verrons qu'on explique la conductibilité des

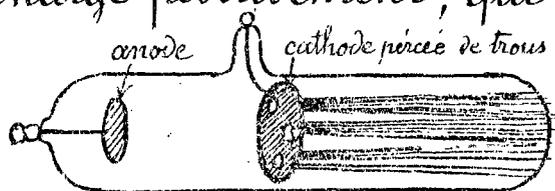
corps par la présence d'électrons libres. On conçoit que  
ceux-ci puissent, lorsque la température est élevée,  
acquies une force vive suffisante pour s'échapper  
du conducteur, à condition bien entendu que ce dernier  
ne soit pas dans un champ électrique qui les ramène  
sur lui.

---

### § 3. Rayons d'électricité positive.

#### 259 - Les rayons canaux. -

Nous avons montré que la formation des rayons cathodiques est liée à l'existence d'un afflux chargé positivement, qui vient frapper la cathode.



Dès 1886 Goldstein, ayant porté son attention sur la lueur qui s'étend à quelques millimètres au plus de la cathode, avait pensé que cette lueur était produite

par des rayons se dirigeant vers la cathode et avait eu l'idée de percer un canal dans celle-ci ; il avait constaté un rayonnement issu du canal en arrière de la cathode.

Pourvu que la cathode sépare le tube en deux parties, et que l'espace situé derrière la cathode soit électriquement protégé, un rayon s'engage dans le canal et parcourt un trajet qui peut atteindre plusieurs décimètres. Le verre prend une fluorescence pâle aux points frappés par ce rayonnement.

Les rayons canaux ne sont autre chose que le prolongement de l'afflux : si, avec une électrode, on dévie l'afflux en avant de la cathode, on constate que les rayons canaux prolongent en ligne droite l'afflux dévié.

M. Wien a observé les déviations électrique et magnétique de ces rayons ; les sens de ces déviations correspondent bien à un flux d'électricité positive, mais l'action du champ magnétique est considérablement plus faible que pour les rayons cathodiques.

Ses particules qui composent ces rayons sont essentiellement différentes des électrons : le rapport  $\frac{e}{m}$  est du même ordre de grandeur que pour les ions électrolytiques et n'a pas une valeur unique. Ses rayons positifs sont formés d'atomes ou de molécules, ou plus exactement d'ions. Quant à leur vitesse, elle est seulement de quelques centaines de Kilomètres par seconde.

Ses premières mesures étaient grossières, les rayons une fois déviés devenant très flous.

Sir J.-J. Thomson a fait une remarquable étude des rayons canaux. Nous résumerons ses dernières recherches :

Ses rayons canaux sont déviés par un champ électrique et un champ magnétique parallèles.

Supposons un pinceau de rayons se propageant parallèlement à  $Ox$  et frappant au point  $O$  en l'absence de tout champ, un plan perpendiculaire à cette direction. Si, avant d'atteindre le plan les rayons sont soumis à un champ électrique parallèle à  $Oy$ , le point où une particule rencontre le plan est déplacé parallèlement à  $Oy$  d'une quantité  $y$  donnée par l'équation.

$$(393) \quad y = \frac{e}{m v^2} A$$

$A$  étant une constante qui dépend de l'intensité du champ électrique et de la longueur du parcours de la particule, mais qui est indépendante de  $e$ ,  $m$ ,  $v$ .

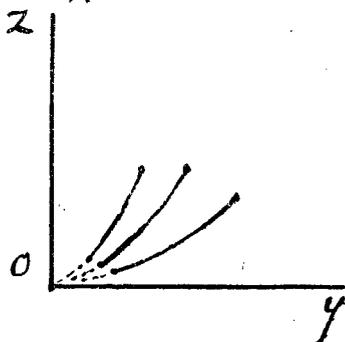
Soumettons la particule à l'action d'une force magnétique parallèle à la même direction  $Oy$ ; elle subira une déviation parallèle à  $Oz$  et l'écart dans cette direction sera donné par l'équation :

$$(394) \quad z = \frac{e}{m v} B$$

où  $B$  ne dépend que du champ magnétique et de la distance parcourue.

Soumettons maintenant les rayons à la fois au champ électrique et au champ magnétique.

Si différentes particules ayant même valeur de  $\frac{e}{m}$ , mais des vitesses différentes, sont présentes dans le rayon  
nement, ces particules rencontrent le plan en des points  
différents et nous obtenons le lieu de ces points en éliminant  $V$  entre les équations précédentes.



$$(395) \quad z^2 = \frac{e}{m} \frac{B^2}{A} y$$

C'est l'équation d'une parabole.  
Ainsi toutes les particules correspon-

dont à une valeur déterminée de  $\frac{e}{m}$  frappent le plan sur un arc de parabole qui peut être photographié, si l'on dispose une plaque normalement à la direction  $Ox$  de la propagation en l'absence des champs électrique et magnétique.

Un simple coup d'œil sur la plaque révèle immédiatement le nombre de particules distinctes qui existent dans le rayonnement.

Détermination de  $\frac{e}{m}$ . — L'équation (395) montre que, pour une même valeur de  $y$ , les valeurs de  $\frac{e}{m}$  sont proportionnelles à  $z^2$ . Donc, si l'on mesure, sur les paraboles les valeurs de  $z$  correspondant à une même abscisse  $y$ , on a immédiatement les rapports des valeurs de  $\frac{e}{m}$  pour les diverses natures de particules; et si l'on connaît la valeur de  $\frac{e}{m}$  pour une parabole, on a les valeurs de  $\frac{e}{m}$  pour toutes les autres. Or il y a une parabole qu'on trouve toujours, c'est celle qui correspond à l'ion d'hydrogène. — fait d'ailleurs remarquable. — on la reconnaît aisément car elle est toujours la plus déviée. Il est donc facile d'obtenir  $\frac{e}{m}$  pour toutes les particules, puisque pour l'ion d'hydrogène on sait que  $\frac{e}{m} = 9.650$  (n° 28)

Détermination des vitesses. — Ses particules de même nature n'ont pas toutes la même vitesse, ainsi que le prouve l'existence des arcs de parabole. Ce fait est dû à ce qu'elles n'ont pas toutes franchi, à l'état d'ions, la totalité de la chute cathodique. Ses ions de l'affluve, dont le prolongement constitue le rayon canal, viennent de toutes les parties de l'espace obscur et parcourent, avant de pénétrer dans le canal, une fraction plus ou moins grande de la chute cathodique.

La vitesse  $V$  correspondant à un point déterminé  $y, z$ , d'un arc de parabole s'obtient en éliminant  $\frac{e}{m}$  entre (393) et (394):

$$(396) \quad V = \frac{A}{B} \frac{z}{y}$$

On peut calculer  $A$  et  $B$ , mais on peut encore déterminer  $A$  en repérant le point origine de la parabole de l'ion  $B$  d'hydrogène; en effet ce point correspond aux ions hydrogène les moins déviés, c'est-à-dire à ceux qui ont franchi toute la chute cathodique  $\varphi$ ; leur vitesse  $V_H$

est donnée par la relation  $\frac{1}{2} m_H V_H^2 = e \psi$  ; connaissant ainsi  $V_H$ , et mesurant les coordonnées  $y$  et  $z$  du point origine, on obtient par la formule (396), le rapport  $\frac{A}{B}$  qui est une constante du dispositif expérimental.

non exige

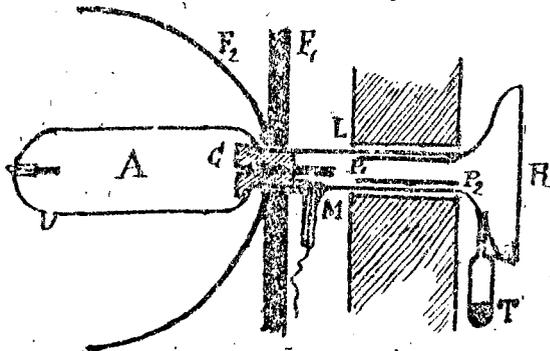
**Ions, à charges multiples.** — Ses paraboles étant déterminées par les valeurs de  $\frac{e}{m}$ , une particule portant une seule charge produira la même parabole qu'une particule de masse double portant une charge double.

On peut cependant reconnaître la présence de particules ayant une charge multiple de la charge élémentaire.

En effet, les particules portant deux charges, acquièrent dans le tube une énergie cinétique double de celle des particules qui n'ont qu'une charge ; quelques unes des particules à double charge perdent une charge au cours de leur passage dans le canal long et étroit, tout en gardant deux fois autant d'énergie cinétique que celles qui n'ont jamais eu qu'une seule charge. ainsi, le faisceau des particules simplement chargées, qui émergent du tube, se composera de deux parties dont l'une aura une énergie cinétique double de l'autre : les particules ayant l'énergie double viendront prolonger, plus près de l'origine, la parabole correspondant aux particules qui n'ont jamais eu qu'une seule charge.

Si la particule avait acquis plus de deux charges, le prolongement de la parabole serait encore plus grand ; si elle avait acquis 8 charges, par exemple, la parabole commencerait en un point pour lequel  $y$  (inversement proportionnel à l'énergie  $\frac{1}{2} m V^2$ ) serait le huitième de la distance normale. Ce cas s'est présenté pour le mercure.

**Dispositif.** — Ses rayons cathodiques sont produits dans



l'ampoule A. La cathode C est mastiquée hermétiquement à la paroi du tube et un canal long (6 cm) et extrêmement fin (0,1 mm) fait communiquer la région d'émission et la région d'observation.

Grâce à l'étroitesse du canal, on peut, à l'aide d'un

tube T contenant du charbon et refroidi par de l'air liquide, maintenir un vide beaucoup plus avancé dans la région d'observation que dans l'ampoule A.

En P, P<sub>2</sub> sont les armatures du condensateur qui donne le champ électrique. L et M sont les pièces polaires d'un électro-aimant. R est le plan y, z sur lequel on dispose la plaque photographique.

L'ampoule est protégée contre le champ de l'électro-aimant par des pièces de fer F, F<sub>2</sub>.

Résultats. — Ses résultats obtenus sont bien remarquables. On trouve dans les rayons canaux des atomes-ions positifs portant une ou plusieurs charges élémentaires et des molécules-ions avec une charge.

Il y a aussi des atomes et des molécules chargés négativement. Ces ions proviennent d'ions positifs qui ont non seulement repris la charge négative qu'ils avaient perdue mais ramassé en outre un ou plusieurs électrons négatifs.

Le procédé que nous avons exposé constitue une nouvelle méthode d'analyse des gaz. Avec l'air, par exemple, on observe les paraboles dues à tous les gaz rares de l'atmosphère; on constate que le néon est un mélange de deux corps de poids atomiques 20 et 22, ce dernier étant en faible proportion, (1) et récemment deux chlorures de poids atomiques différents ont été ainsi séparés.

On trouve aussi un nouveau gaz, de poids moléculaire égal à 3, que Sir J. J. Thomson a appelé X<sub>3</sub>. Il est très probable que ce gaz est de l'hydrogène triatomique.

Le bombardement des corps solides (métaux, oxydes, sels, diamant, minéraux etc...) par les rayons cathodiques donne naissance à de l'hydrogène, de l'hélium et du gaz X<sub>3</sub>. Quelle est l'origine de ces gaz? pré-existent-ils dans les solides avant le bombardement, à l'état occlus ou à l'état de combinaison? sont-ils libérés par désintégration des atomes du corps frappé lors du choc des corpuscules cathodiques? Ces questions ne sont pas encore bien élucidées. Nous verrons que les substances radioactives émettent spontanément des atomes d'hélium sous forme de particules  $\alpha$  résultant de la désintégration des atomes; Sir J. J. Thomson a émis l'hypothèse que les éléments ordinaires essaient d'expulser des particules  $\alpha$ .

(1) Ce sont deux corps isotopes ayant mêmes propriétés quoique les masses atomiques soient différentes.

" Dans les éléments ordinaires, l'énergie de ces particules n'est pas assez grande pour qu'elles puissent sortir de l'atome; elles sont cependant détachées, pour ainsi dire, de sorte qu'elles peuvent être arrachées par un vigoureux bombardement des rayons cathodiques." (1)

Telle pourrait être l'origine de l'hélium. L'hydrogène pourrait lui aussi, résulter d'une désintégration atomique, mais pourrait simplement provenir d'une décomposition de traces d'eau dont il est presque toujours impossible de se débarrasser. Enfin le gaz  $X_3$  serait, ou bien engendré par l'hydrogène en présence d'eau, ou bien libéré des atomes, la présence d'eau paraissant "une condition importante et peut-être essentielle de sa production par rupture atomique."

Ces travaux qui touchent aux transformations de la matière sont une voie ouverte à des recherches d'un prodigieux intérêt

## 260 Les rayons anodiques -

non exigé

Dans un tube de Crookes, l'anode est généralement inerte. Il y a cependant une exception. M.M. Geelke et Reichenheim ont découvert que lorsque l'anode est formée d'un chlorure, bromure ou iodure d'un métal alcalin ou alcalin-terreux, il se produit à cette anode une chute de potentiel de plusieurs milliers de volts, supérieure à la chute cathodique, et un rayonnement émane de l'anode.

Comme les rayons cathodiques, les rayons anodiques sont émis normalement à la surface, se propagent en ligne droite, et produisent la fluorescence des substances frappées.

Le rapport  $\frac{e}{m}$  et la vitesse  $V$  ont été déterminés soit par la mesure simultanée de la chute anodique et de l'effet Doppler (déplacement des raies spectrales permettant de mesurer  $V$ ), soit par la chute anodique et la déviation magnétique.

La vitesse est de l'ordre de  $100 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ .  
 Ses valeurs de  $\frac{e}{m}$  correspondent à des masses égales

(1) J.J. Thomson. revue scientifique 15-22 Janvier 1916; 29 Janv. - 5 Février 1916

aux masses des atomes du métal alcalin ou alcalin-terreux, transportant une seule charge élémentaire si le métal est monovalent, deux charges s'il est bivalent.

## 261 - Conclusions -

L'étude des rayons électrisés montre la dissymétrie profonde entre l'électricité négative et l'électricité positive. Il existe un atome d'électricité négative, l'électron, constituant universel de la matière, qui est facilement libéré. L'électricité positive, au contraire, reste liée à la matière : on ne trouve pas d'électrons positifs libres, mais seulement des ions, atomes ou molécules privés d'un ou de plusieurs électrons négatifs.

Certains résultats de Sir J. J. Thomson semblent pouvoir être interprétés par une transmutation de la matière : présence constante de l'hydrogène dans les rayons-canaux ; production d'hélium et du corps  $X_3$  par bombardement cathodique.

Enfin il est certain que des corps, qu'on croyait simples, sont des mélanges de corps ayant, sinon des propriétés physiques et chimiques différentes, du moins des poids atomiques différents.

## § 4 - Ionisation -

### 262 - Phénomène de l'ionisation -

Les rayons cathodiques issus d'un tube de Crookes dans l'expérience de M. Senard (n° 257), ou encore les rayons émanés d'un corps radioactif, rendent les gaz conducteurs de l'électricité (un corps chargé placé dans le gaz perd rapidement sa charge). On dit alors que le gaz est ionisé.

Ce phénomène s'explique aisément : les électrons cathodiques ou les corpuscules émanés des corps radioactifs, constituent par eux-mêmes des centres élec-

trisés ; de plus, possédant une force vive notable, ils arrachent, par collision, un électron aux molécules qu'ils rencontrent. Une molécule, primitivement neutre, est donc ainsi divisée en deux fragments : un électron et un reste, de masse beaucoup plus grande, chargé positivement, qui tous deux doivent, par attraction électrostatique, s'entourer d'un cortège de molécules neutres, à condition que la pression soit suffisante et que la température ne soit pas trop élevée. On donne le nom général d'ion à tout centre électrisé.

Le champ électromagnétique d'une onde lumineuse de courte longueur d'onde (rayons de Schumann), ou mieux encore rayons X) arrache aussi des électrons aux molécules, et ionise les gaz.

Les ions participent évidemment à l'agitation thermique et se meuvent d'une façon désordonnée, à moins qu'il n'y ait un champ électrique qui oriente leurs déplacements. Le gaz est conducteur parce que les ions d'un certain signe viennent décharger les corps possédant une charge de signe opposé.

## 264. Mesure directe de la charge élémentaire. (atome d'électricité).

Nous ne décrivons pas en détail les premières méthodes employées pour la mesure de la charge des ions, mais nous indiquerons le principe qui est extrêmement curieux.

Dans un gaz soigneusement privé de poussières, la condensation de la vapeur d'eau ne se produit que si la sursaturation a atteint une grande valeur : c'est qu'en effet un centre est nécessaire pour que la condensation puisse se produire, car, plus grande est la courbure d'une gouttelette liquide, plus la composante radiale de la tension capillaire tend à produire l'évaporation.

M.M. Townsend, Blondlot, J. J. Thomson ont montré que l'électrisation doit neutraliser en partie l'effet dû, à la courbure, en donnant lieu à une tension opposée à la composante radiale de la tension capillaire.

Dans un gaz non ionisé la condensation se fait sur les molécules elles-mêmes, mais seulement si la sursa-

turation est grande. Si le gaz est ionisé, la condensation est facilitée et se produit sur les ions. L'expérience prouve que la condensation se produit plus aisément sur les ions négatifs que sur les ions positifs. (M.C.T.R. Wilson)

Dans un gaz ionisé, privé de poussières, on produit une détente adiabatique pour amener la sur-saturation. Si la détente est suffisante pour condenser l'eau autour des ions négatifs, et insuffisante pour provoquer la condensation sur les ions positifs, toutes les gouttelettes sont chargées négativement.

On constate que toutes les gouttelettes tombent avec la même vitesse : ceci prouve qu'elles ont toutes la même grosseur, qu'on peut calculer d'après une formule due à Stokes, en mesurant la vitesse de chute (très lente car les gouttelettes sont très petites).

Comme les gouttelettes sont électrisées, on modifie à volonté leur vitesse de chute en les faisant tomber dans un champ électrique.

Dans un champ électrique, toutes les gouttelettes ont encore la même vitesse de chute : elles ont donc, non seulement la même grosseur, mais la même charge.

On peut régler l'intensité du champ de manière à les maintenir en suspension : il y a alors équilibre entre leur poids et l'action du champ électrique ; comme on connaît leur poids, puisqu'on a calculé leur grosseur, et qu'on connaît aussi l'intensité du champ qui les empêche de tomber, on a la charge de chaque gouttelette.

On peut, de plus, dénombrer les ions contenus dans un volume déterminé en évaluant la quantité totale d'eau condensée et en la divisant par la masse d'une gouttelette.

La charge ainsi mesurée est celle de l'électron puisque, quand l'ionisation est produite par les rayons de Lenard, par exemple, les corpuscules cathodiques, après avoir perdu leur vitesse, constituent eux-mêmes des ions négatifs qui se mêlent aux ions produits par doublement des molécules du gaz, et que tous les ions portent la même charge.

La charge d'un ion positif est évidemment la même, au signe près, que celle d'un ion négatif,

à moins que plusieurs électrons n'aient été enlevés à une même molécule ; ce fait se produit d'ailleurs quand l'ionisation est intense.

Ses meilleures mesures faites par cette méthode (M. Begevan 1910) ont donné pour la charge de l'électron la valeur  $1,5 \cdot 10^{-20}$  ; c'est bien la valeur de l'atome d'électricité (n° 28 et n° 254).

## 264. — Démonstration expérimentale de la structure discontinue de l'électricité.

### Expériences de M. Millikan. —

Nous avons dit que toutes les gouttelettes ont même grosseur. Ceci ne peut pas être rigoureusement exact : aussi est-il préférable d'observer, non pas une foule de particules pendant un temps assez court, mais une seule particule, qu'on suivra aussi longtemps qu'on le voudra. C'est ce qu'a fait M. Millikan.

Un nuage de fines gouttelettes d'huile est pulvérisé au-dessus d'un condensateur (plateaux de 20<sup>cm</sup> de diamètre, distants de 16<sup>mm</sup>), à plateaux horizontaux. Le plateau supérieur est percé d'un petit trou d'aiguille par lequel entrent un petit nombre de gouttelettes. On éclaire les gouttelettes latéralement et on les suit dans un viseur où elles apparaissent comme des étoiles brillantes sur fond noir.

Le champ électrique (4000 V par cm) est produit dans le sens tel qu'il fasse remonter la gouttelette (sens qui dépend du signe de la charge). On peut donc balancer pendant plusieurs heures la même gouttelette, qu'on suit avec la lunette, la faisant remonter sous l'action du champ et la laissant retomber. On mesure les vitesses de chute et de montée.

On constate de temps en temps que la vitesse d'ascension dans le champ électrique saute d'une façon discontinue d'une valeur à une autre. Cette variation, qui est d'autant plus fréquente que le gaz est soumis à une radiation ionisante plus intense, est évidemment due à la capture d'un ion.

Admettons, ce qui est légitime puisque le frottement rend le mouvement uniforme, que les vitesses soient proportionnelles aux forces motrices.

Soient  $V$  et  $u$  les vitesses de chute en l'absence du champ et avec le champ ( $u$  négatif quand la goutte remonte) on a, si  $\mu$  est la masse et  $E$  la charge de la gouttelette :

$$\frac{\mu g - hE}{\mu g} = \frac{u}{V} \quad \text{D'où } E = \frac{\mu g}{h} \frac{V-u}{V}$$

Pour des charges  $E_1, E_2, \dots$  on a :

$$E_1 = \frac{\mu g}{h} \frac{V-u_1}{V} ; \quad E_2 = \frac{\mu g}{h} \frac{V-u_2}{V} \dots$$

D'où :

$$\frac{E_1}{V-u_1} = \frac{E_2}{V-u_2} = \dots = C =$$

Les charges successives  $E_1, E_2, \dots$  seront donc des multiples d'une charge élémentaire si  $V-u_1, V-u_2, \dots$  sont proportionnels à des nombres entiers. C'est bien ce que M. Millikan a constaté.

Ainsi la structure discontinue de l'électricité est expérimentalement démontrée.

Pour avoir la valeur de  $E$ , il faut connaître la masse  $\mu$  ; on applique la formule de Stokes ( $\mu g = 6\pi a \eta v$ ) ( $a$  rayon,  $\eta$  viscosité) ; mais cette formule, exacte dans les liquides, doit être corrigée pour la chute dans un gaz.

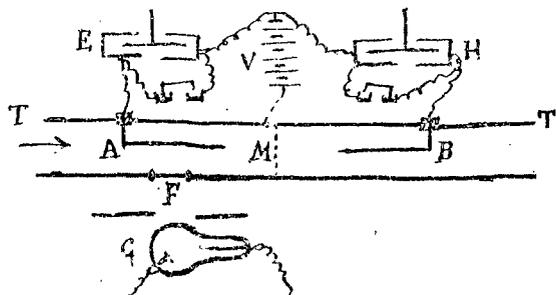
M. Roux a exécuté des expériences par la méthode de M. Millikan, en employant des sphérules de soufre pulvérisé suspendu, vitreux à la température ordinaire, et il a mesuré la vitesse de chute d'un même sphérule dans l'air et dans un liquide ; la loi de Stokes s'appliquant dans un liquide, on obtient le rayon exact.

La moyenne des résultats obtenus par Millikan donne pour la charge élémentaire ou atome d'électricité la valeur

$$4,77 \cdot 10^{-10} \text{ unité électrostatique, c'est-à-dire } 1,59 \cdot 10^{-20} \text{ unité électromagnétique.}$$

C'est cette valeur que nous adopterons.

## 265 - Caractères de l'ionisation <sup>(1)</sup>

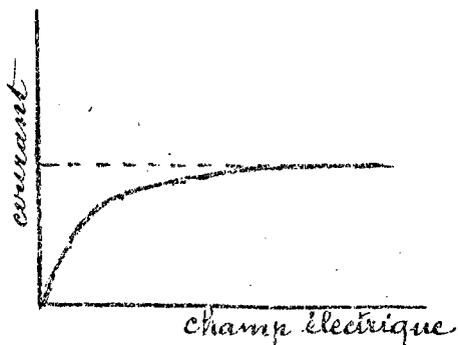


Supposons le dispositif suivant (M.M. J. J. Thomson, Rutherford): un tube métallique T est percé en F d'une fenêtre recouverte d'une lame mince d'aluminium; A est une lame métallique isolée reliée à l'une des paires de quadrants d'un électromètre E, dont l'autre paire de quadrants est au sol, l'aiguille étant chargée. On crée un

champ entre A et le tube T au moyen d'une batterie d'accumulateur V.

Des rayons X émanés de C ionisent le gaz du tube; A recueille par seconde une quantité d'électricité  $Q$  que l'électromètre permet de mesurer. En même temps le tube recueille  $-Q$ .

1° Courant de saturation. - Le tube de Crookes C



fonctionnant d'une façon constante, on constate que si la différence de potentiel  $\psi$  entre A et T est très faible  $Q$  augmente proportionnellement à  $\psi$  (loi d'Ohm), mais  $\psi$  continuant à augmenter, la quantité  $Q$  tend vers une limite finie  $Q_0$  qui représente la limite supérieure de ce que le

champ peut extraire.

Se champ ne peut donc extraire du gaz ionisé qu'une quantité limitée d'électricité.

Ce fait se comprend aisément: le champ ne peut pas enlever dans un temps donné, plus d'ions qu'il ne s'en produit. Le courant maximum est appelé courant de saturation.

(1) P. Sangevin thèse de doctorat.

**Décharge disruptive.** - Si cependant on continue à accroître la différence de potentiel  $\psi$  les électrons provenant de l'ionisation des molécules prennent immédiatement une vitesse trop grande pour pouvoir former des ions négatifs par agglomération avec les molécules et ionisent eux-mêmes le gaz. Le courant augmente donc de nouveau très vite et finalement la décharge disruptive se produit.

**Les ions se déplacent avec une vitesse finie.** - Avec le dispositif précédent faisons passer dans le tube un courant de gaz. Si le champ n'a pas une valeur trop grande, on constate que le courant gazeux produit une diminution de  $Q$  d'autant plus grande que  $\psi$  est plus faible.

Si les charges libérées se déplaçaient dans le gaz avec une vitesse indépendante du champ, aucun changement ne devrait se produire dans l'effet du courant gazeux quand on fait varier  $\psi$ .

Ainsi les ions se déplacent avec une vitesse finie, d'autant plus grande que le champ est plus intense. Cette vitesse se compose en chaque point avec celle du courant gazeux.

**Mobilités.** - M. Zaeleny a fondé sur ce principe une méthode de mesure de la vitesse des charges dans un champ  $h$ . L'expérience montre que les ions positifs et négatifs se meuvent avec des vitesses différentes  $K_1 h$  et  $K_2 h$  proportionnelles au champ.  $K_1$  et  $K_2$  qui sont les vitesses dans un champ de 1 volt par centimètre se nomment les mobilités.

Dans l'air sec, dans les conditions normales,  $K_1 = 1,36$  et  $K_2 = 1,86$ . Les ions négatifs sont plus mobiles que les ions positifs.

**Recombinaison.** - L'ionisation du gaz disparaît peu à peu par recombinaison des ions de signes opposés. Au dispositif précédent ajoutons une lame B reliée à un second électromètre; séparons les champs de B et de A par une toile métallique. Si l'on ne produit aucun courant de gaz, la lame B ne recueille rien,

même si l'on isole A de manière à supprimer le champ entre A et T. Mais, A étant toujours isolé, lorsqu'on fait passer le courant d'air, on recueille en B une quantité d'électricité maximum  $Q'$ , toujours inférieure à  $Q$ , et augmentant avec la vitesse du courant gazeux. Une recombinaison partielle s'est donc produite pendant le trajet, d'autant plus importante que le temps écoulé est plus grand.

**Déchargé dans les tubes à gaz raréfié.** — Il y a toujours un petit nombre d'ions. La décharge se produit dès que le champ est suffisant pour permettre à ces ions de créer de nouveaux ions. La décharge est facilitée par l'abaissement de la pression parce que dans un gaz raréfié les ions peuvent prendre plus de vitesse. Cependant, à partir d'un certain degré de vide, la résistance du tube augmente par manque de matière.

**Gros ions.** — M. Langevin a découvert que l'air contient de gros ions de très faible mobilité. M. Townsend a observé également des ions de faible mobilité dans les gaz récemment préparés, et M. Eugène Bloch a trouvé des gros ions dans l'air en contact avec du phosphore. Ces ions sont de véritables poussières ou des gouttelettes électrisées.

**Causes générales de l'ionisation.** — En plus des rayonnements que nous avons étudiés, qui provoquent l'ionisation des gaz, nous pouvons citer comme autres causes d'ionisation le rayonnement des corps radioactifs, les combustions, le barbotage des gaz dans les liquides et la pulvérisation des gouttelettes.

## 266. — Phénomènes cosmiques et météorologiques

Les rayons électrisés et l'ionisation jouent dans la nature un rôle fondamental. L'effet photo-électrique de la lumière solaire sur les matières du sol, sur les aiguilles de glace des nuages appelés cirrus, sur les molécules d'air elles-mêmes; les matières radioactives du sol qui, nous le verrons bientôt, donnent des rayons électrisés; l'émission par le Soleil d'un torrent d'électrons (effet Edison) qui peuvent parvenir jusqu'à la Terre, sont autant de causes de l'ionisation de l'air.

La vapeur d'eau se condensant sur les ions,

la formation des nuages, la séparation des nuages positifs et négatifs (puisque les ions négatifs condensent l'eau plus facilement que les ions positifs), les orages, les divers phénomènes d'électricité atmosphérique sont intimement liés à la production, à la mobilité et à la recombinaison des ions de l'atmosphère.

Les aurores polaires sont presque certainement dues à des rayons cathodiques, tantôt d'origine solaire, tantôt d'origine terrestre, qui, dans la haute atmosphère raréfiée, s'enroulent autour des lignes de force du champ magnétique qui entoure la Terre.

---

## Chapitre II

# Radioactivité.

### §1. - Les rayons Becquerel.

#### 267. - Découverte de la radioactivité.

Parmi les problèmes qui ont tenté l'esprit humain, il en est peu qui aient suscité plus d'efforts que la recherche de la transmutation de la matière. La transformation des éléments a été le rêve de nombreux philosophes et l'espoir des alchimistes.

Plus tard, les découvertes de Lavoisier ont conduit au principe de la conservation de la masse dans les réactions chimiques et fait croire à la stabilité des éléments. Le développement de la chimie, au cours du siècle dernier, a de plus en plus fortifié l'idée que les atomes des éléments ont une individualité propre et sont indestructibles. La production d'un élément à partir d'un autre élément fut alors considérée comme une utopie.

Mais une admirable découverte est venue bouleverser les idées qui paraissaient si bien fondées, et porter un coup mortel au dogme de l'invariabilité de l'atome.

Henri Becquerel a découvert (1<sup>er</sup> mars 1896) que les sels d'uranium et l'uranium métallique, dans l'obscurité et à l'abri de toute radiation connue, émettent un rayonnement qui, au travers du papier noir et d'une mince plaque d'aluminium impressionne une plaque photographique et provoque la décharge des corps électrisés (nous disons aujourd'hui ionise l'air).

Ces effets rapprochent le rayonnement de l'uranium des rayons Lenard et des rayons X, mais avec un caractère absolument inattendu : l'émission est spontanée, paraissant défier le principe de la conservation de l'énergie, (en 1896 on n'avait aucune raison de penser que la matière pouvait être un réservoir d'énergie).

Les caractères fondamentaux du phénomène ont été reconnus par Henri Becquerel.

1<sup>o</sup>) L'émission spontanée est d'une constance remarquable : de larges variations de température ne la modifient pas.

2°) Le dégagement d'énergie appartient en propre à l'atome; il ne dépend aucunement de l'état de combinaison de l'uranium; alors que toutes les autres propriétés changent d'un composé à un autre.

On voit que ce phénomène intéresse l'atome plus profondément que tous les phénomènes antérieurement connus.

Deux ans après cette découverte pendant qu'Henri Becquerel poursuivait l'étude des propriétés et de la nature du nouveau rayonnement, Curie et M<sup>me</sup> Curie observèrent que le thorium et ses sels, ainsi que de nombreux minéraux, présentent le même phénomène auquel ils ont donné le nom de radioactivité. Parmi les minéraux étudiés, quelques uns possédaient une activité supérieure à celle de l'uranium et du thorium; ils devaient donc contenir des corps plus radioactifs. Ayant séparé les éléments constitutifs de la pechblende, M<sup>me</sup> Curie reconnut que le bismuth et le baryum extraits de ce minerai étaient fortement radioactifs; elle parvint à isoler, d'abord l'élément associé au bismuth, qu'elle nomma polonium, puis l'élément associé au baryum, qu'elle appela radium. Peu après, M. Debierne a découvert l'actinium.

Le radium se sépare du baryum par cristallisation fractionnée, en utilisant les différences de solubilité des chlorures ou bromures. Dans les pechblendes les plus riches, il n'y a que 3 décigrammes environ de radium par tonne de matière. Le radium est utilisé sous forme de chlorure ou de bromure. M<sup>me</sup> Curie (1910) l'a obtenu à l'état métallique; c'est un métal alcalino-terreux, très altérable à l'air.

L'activité du radium est environ deux millions de fois plus grande que celle de l'uranium<sup>(1)</sup>; la découverte du radium a, de ce fait, considérablement facilité les recherches sur les propriétés du rayonnement.

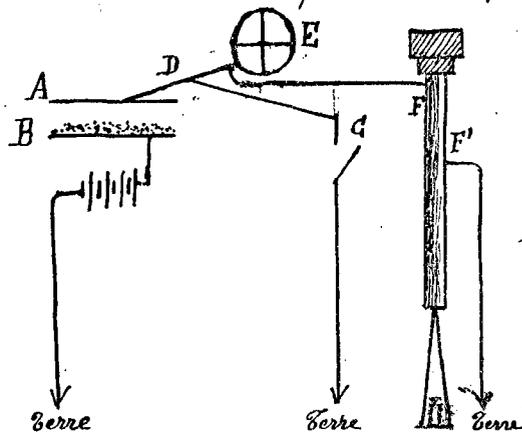
Mesure comparative de l'activité. — Le procédé consiste, sous une forme ou sous une autre, à comparer les intensités des courants

<sup>(1)</sup> Entre la radioactivité de l'uranium et celle du radium, il n'y a qu'une différence d'intensité, mais cette différence est telle que l'attention de tout le monde s'est trouvée concentrée sur le radium, au point que pour la plupart des gens le radium personnifie, en quelque sorte la radioactivité. C'est là une étrange confusion. D'ailleurs il existe de nombreux corps beaucoup plus actifs que le radium, seulement on ne les obtient qu'en quantité extraordinairement faible, ce qui se comprend, car une grande activité est la manifestation d'une évolution rapide. Le radium tient un juste milieu: il est suffisamment actif pour avoir fait parler de lui plus que les autres, et suffisamment peu actif pour être obtenu en quantité appréciable.

de saturation obtenus dans une même chambre d'ionisation par des surfaces égales de diverses substances. Voici, par exemple, la méthode de M<sup>me</sup> Curie.

non exige

La substance est placée sur le plateau B du condensateur AB; on porte B à un potentiel élevé; A est relié à une des paires de quadrants E d'un électromètre; A et E pouvant être reliés au sol par l'interrupteur C. D'autre part, un quartz piézo-électrique sur les faces duquel sont fixées deux armatures métalliques F, F', communique avec la paire de quadrants E, par F' avec la terre.



L'armature A étant au sol, le courant de saturation se produit entre B et A. A un moment donné, à partir duquel on compte le temps, on ouvre l'interrupteur C. La paire de quadrants E se chargerait, si l'on ne compensait la charge qu'elle reçoit par une charge égale et opposée: cette compensation se fait en suspendant au quartz un poids déterminé qui dé-

gage une quantité d'électricité connue. On soutient le poids à la main de manière à ne le laisser agir que progressivement et à maintenir au zéro l'aiguille de l'électromètre; dès que la quantité d'électricité libérée par le quartz est épuisée, l'aiguille ne reste plus au zéro. On note cet instant: l'activité est en raison inverse du temps écoulé depuis le début de l'expérience.

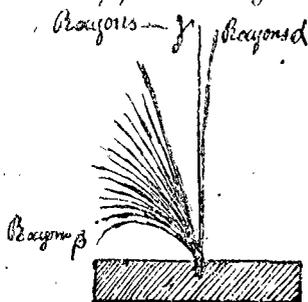
## 268. — Propriétés générales des rayons Becquerel.

Nous avons déjà indiqué des effets semblables à ceux que produisent les rayons Lenard (action photographique, ionisation). Comme ces derniers ils provoquent la phosphorescence de nombreux corps. Un sel de radium est lumineux par lui-même et rend l'air lumineux dans son voisinage immédiat; les sels d'uranyle malgré leur faible activité, sont aussi légèrement lumineux.

L'hétérogénéité du rayonnement a été découverte par Henri Becquerel, qui, par des expériences très variées, a reconnu que les rayons du polonium sont très absorbables, ceux de l'uranium très pénétrants, et que le rayonnement du radium contient à la fois des radiations absorbables et des radiations pénétrantes.

(1) M<sup>me</sup> Curie a découvert qu'une plaque de quartz taillée <sup>parallèlement à l'axe optique</sup> possède la propriété de dégager, sur ses faces des charges égales et opposées quand on soumet la plaque à une compression normale à ses faces ou à une traction parallèlement aux faces.

Ayant soumis le rayonnement du radium à un champ magnétique, Henri Becquerel sépara deux faisceaux : l'un très dispersé et dévié dans le même sens que des rayons cathodiques, l'autre qui ne paraissait pas dévié. M. Rutherford a établi que ce dernier est légèrement dévié en sens opposé. Enfin M. Villard a découvert d'autres rayons, ayant une faible action photographique, parce qu'ils sont très peu absorbés, insensibles à l'action de la force magnétique.



En résumé les rayons Becquerel se composent de trois espèces de rayons. On obtient leurs traces sur une plaque photographique en plaçant une petite quantité de radium au fond d'une rainure profonde dans un bloc de plomb, produisant un champ magnétique parallèle aux bords de la rainure (normal au plan de la figure) et coupant les faisceaux par une plaque presque normale au champ (incidence des rayons presque rasante).

## 269. - Les rayons $\beta$ .

Les rayons  $\beta$  sont ceux que le champ magnétique dévie fortement. Avec l'uranium on a un faisceau moins dispersé qu'avec le radium; le polonium ne donne pas de rayons de cette nature. Henri Becquerel a constaté aussi la déviabilité de ces rayons dans un champ électrique. Ils se comportent exactement comme des rayons cathodiques.

non exigé

Pierre Curie et M<sup>me</sup> Curie ont montré, par une expérience directe, que les rayons  $\beta$  transportent des charges négatives. Un disque conducteur M, relié à un électromètre, est entouré d'ébonite et recouvert d'une enveloppe métallique E en communication avec la terre. La face très mince p est exposée au rayonnement du sel radifère placé dans une auge en plomb A.

Les rayons  $\beta$  sont absorbés par le disque M; on constate que celui-ci se charge d'une façon continue d'électricité négative.

Les premières mesures des déviations électrique et magnétique (Henri Becquerel) ont donné pour le rapport  $\frac{e}{m}$ , un chiffre du même ordre de grandeur que celui qui avait été obtenu pour les corpuscules cathodiques. Pour les rayons les moins déviés les vitesses sont voisines de la vitesse de la lumière.

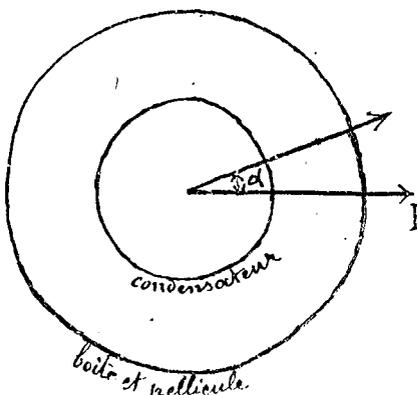
(1) M<sup>me</sup> Curie, thèse de doctorat.

non exigé

## 270. - Expériences de M. Bucherer. - Vérification de la loi de Lorentz-Einstein.

M. Bucherer<sup>(1)</sup> (1908) a produit, dans le vide, les déviations électrique et magnétique des rayons  $\beta$  en disposant l'expérience de manière que les deux déviations se compensent; pour cela, les deux champs doivent être perpendiculaires l'un sur l'autre.

Un grain de fluorure de radium est placé au centre d'un condensateur plan formé de deux disques de 8 centimètres de diamètre très rapprochés ( $0^{\text{mm}}, 25$ ). Ce condensateur est enfermé dans une boîte cylindrique étanche de 16 cm. de diamètre dont la paroi latérale porte une

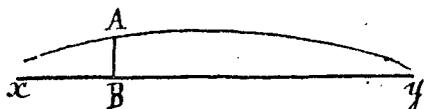


boîte cylindrique étanche de  $16^{\text{mm}}$  de diamètre dont la paroi latérale porte une pellicule photographique. Le vide est fait dans la boîte. L'ensemble est dans un solénoïde de section rectangulaire, donnant un champ magnétique  $H$  parallèle aux plateaux du condensateur.

Une particule  $\beta$  émise parallèlement aux plateaux est déviée par le champ  $H$  normalement à ceux-ci; c'est-à-dire parallèlement à la force électrique  $h$ . Pour qu'elle sorte du condensateur et vienne frapper la pellicule il faut qu'elle continue à se mouvoir parallèlement aux plateaux c'est-à-dire que la force  $he$  qu'exerce le champ électrique soit égale et opposée à la force électrodynamique  $Hev \sin \alpha$ ,  $\alpha$  étant l'angle formé par la direction d'émission et par le champ magnétique. On a donc, au signe près:

$$v = \frac{h}{H \sin \alpha}$$

seules, les particules satisfaisant à cette condition sortiront de la zone étroite comprise entre les plateaux. Après leur sortie du condensateur elles seront soumises au champ magnétique seul, dans l'espace compris entre le condensateur et la boîte. On obtient alors sur la pellicule développée sur un plan une courbe dans le genre de celle représentée



ci-contre: la position du point B fait connaître la direction d'émission (angle  $\alpha$ ) des particules qui ont impressionné la pellicule en A, et par suite la vitesse  $v$  correspondante. La déviation  $BA$  à partir de la ligne  $xy$  obtenue en l'absence des champs  $H$  et  $h$  permet de calculer  $\frac{e}{m}$ ,  $v$  étant connue.

<sup>(1)</sup> A.H. Bucherer. Phys. Zeitschrift, 9, p. 755

Les mesures ont prouvé que la masse croît avec la vitesse conformément à la loi de Lorentz-Einstein (formule 379 N° 247). La valeur de la "masse au repos" elle a été trouvée sensiblement égale à la valeur qui résulte des mesures de M. Classen sur les rayons cathodiques.

Ainsi, les particules  $\beta$  sont des électrons; de plus, la masse de l'électron varie suivant la loi imposée par le principe de relativité.

Bien que le principe de relativité impose la même loi à toute masse, quelle que puisse être la cause de l'inertie, il paraît excessivement probable que toute l'inertie de l'électron est due à sa charge. Supposer que l'électron possède, en outre, une "masse matérielle" c'est-à-dire une masse dont on ne saurait expliquer l'origine, serait une hypothèse arbitraire et complètement inutile.

Dimension de l'électron. — On peut calculer le rayon  $a$  d'une sphère possédant une charge superficielle égale à l'atome d'électricité et ayant une masse purement électromagnétique égale à la masse de l'électron. On a, en effet (formule 378, N° 247):

$$m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ environ.}$$

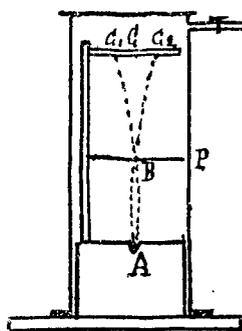
Cel est l'ordre de grandeur de la dimension de l'électron. Ses dimensions atomiques étant de l'ordre de  $10^{-8}$  (1<sup>ère</sup> année N° 12), on voit que, par rapport à un atome, la dimension de l'électron peut être comparée à la dimension d'une planète par rapport à l'ensemble du système solaire.

## 271. Rayons $\alpha$ .

Les rayons  $\alpha$  constituent, nous l'avons dit, la partie très absorbable du rayonnement. Ils ne traversent pas une feuille de papier, les plus pénétrants ne produisent aucune action photographique ni ionisante à plus de 9<sup>m</sup> dans l'air sous la pression normale.

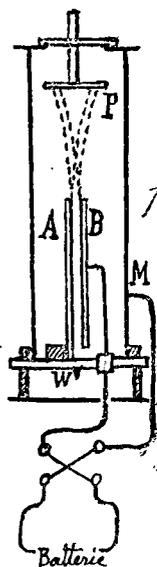
Les recherches que nous allons résumer ont établi que les rayons  $\alpha$  sont formés par des ions d'hélium émis avec une vitesse de plusieurs milliers de kilomètres par seconde (jusqu'à 22000).

Déviation magnétique et électrique. — Pour avoir un faisceau homogène il était nécessaire d'employer une couche très mince de matière radioactive, car autrement les particules provenant de l'intérieur se trouveraient ralenties. M. Rutherford s'est servi, soit d'une couche de sel de radium obtenue en plongeant un fil dans une solution étendue, soit d'un fil activé par exposition au radium<sup>(1)</sup>. Le fil est placé dans une



<sup>(1)</sup> Nous verrons plus loin que ce fil se couvre d'un produit de désintégration du radium. Ce produit est lui-même radioactif.

rainure  $A$ ; en  $B$  est une fente parallèle à la rainure, et en  $C$  est disposée une plaque photographique. Tout l'appareil étant entre les pièces polaires d'un électro-aimant on produit un champ magnétique uniforme parallèle au fil; on obtient une première trace  $C_1$ , puis par inversion du champ une deuxième trace  $C_2$ . Le rayon de la trajectoire se calcule aisément puisque le cercle est défini par les 3 points  $ABC_1$  (ou  $ABC_2$ ). On déduit:  $\frac{e}{mv}$ . L'expérience est faite dans le vide. Pour les rayons du fil activé par le radium, le cercle a un rayon de  $40\text{ cm}$  dans un champ de  $10000$  gauss. Les rayons sont donc peu déviés.



Le dispositif pour la mesure de la déviation électrique est figuré ci-avant:  $A$  et  $B$  sont les deux plateaux ( $4\text{ cm}$  de diamètre) très rapprochés ( $0,21\text{ mm}$ ) d'un condensateur; le fil actif est en  $W$ . Par inversion du champ électrostatique on a deux traces sur la plaque  $P$ . La mesure de l'écartement de ces deux traces pour une intensité déterminée du champ, jointe à la connaissance de l'écartement des plateaux, du diamètre de ceux-ci et de la distance de l'extrémité du condensateur à la plaque  $P$ , donne la valeur de  $\frac{e}{mv}$ .

Avec le fil activé par le radium (recouvert de radium -  $C$ ) on trouve

$$\frac{e}{m} = 5 \cdot 10^3, \quad v = 2 \cdot 10^9 \text{ cm/sec} = 20000 \text{ km/sec}.$$

Pour tous les corps qui émettent des rayons  $\alpha$  on trouve la même valeur de  $\frac{e}{m}$ . Seule la vitesse dépend du corps mais pour un même corps toutes les particules ont la même vitesse (il n'y a pas de dispersion magnétique ou électrique).

Des écrans excessivement minces (feuilles d'aluminium) ralentissent les particules, mais ne changent pas la valeur de  $\frac{e}{m}$ .

Le sens des déviations indique que les particules sont chargées positivement. La valeur du rapport  $\frac{e}{m}$  révèle soit l'atome d'hélium ayant perdu deux électrons, soit la molécule d'hydrogène ayant perdu un seul électron.

non exigé

Dénombrement des particules  $\alpha$  par le spintaroscope. — Sir W. Crookes a découvert qu'un grain minuscule d'un sel radioactif, placé près d'un écran de sulfure de zinc produit une scintillation sur cet écran, offrant, au microscope l'aspect d'un ciel étoilé perpétuellement variable. Crookes supposa que chaque étoile fugitive marquait le point d'arrivée d'un projectile  $\alpha$ ; le phénomène disparaît en effet quand on intercepte les rayons  $\alpha$ .

D'autre part M. Rutherford a mesuré, au cylindre de Faraday, la charge positive  $q$  émise par seconde, sous forme de rayons  $\alpha$ , par une masse déterminée d'une préparation de polonium, puis par une

mesure de conductibilité de gaz les charges  $+Q$  et  $-Q$  que libèrent par ionisation, les rayons  $\alpha$  de la même quantité de la même préparation quand ils s'arrêtent dans l'air. Il a trouvé  $Q = 94000 \text{ g}$ .

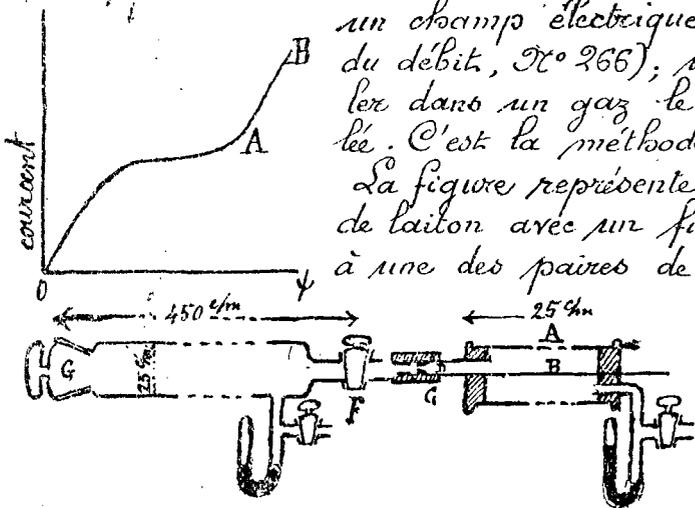
M. Regener (1908) eut alors l'idée d'utiliser l'expérience, de Crookes pour dénombrer les particules et d'appliquer le résultat, de M. Rutherford à la détermination de la charge d'une seule particule.

M. Regener compta une à une les scintillations produites dans une angle solide très petit par une préparation de polonium. Admettant une égale répartition des rayons dans toutes les directions il en déduisit le nombre total de projectiles émis, dans chaque seconde, par la préparation; il trouva 1800. Il mesura d'autre part la quantité d'électricité de chaque signe libérée, par ionisation, dans l'air par la même quantité de la préparation et obtint 0,136 unité électrostatique. Chaque projectile a donc une charge électromagnétique

$$\frac{1}{c} \frac{0,136}{1800 \times 94000} \text{ soit } 2,7 \cdot 10^{-20};$$

c'est environ le double de la charge élémentaire. D'après la valeur de  $\frac{e}{m}$ , la particule  $\alpha$  ne peut être qu'un ion d'hélium porteur de deux charges.

Dénombrement par l'électromètre. — On peut amplifier plusieurs centaines de fois l'ionisation en produisant celle-ci dans un champ électrique intense (partie AB de la courbe du débit, N° 266); il devient alors possible de révéler dans un gaz le passage d'une particule  $\alpha$  isolée. C'est la méthode de M. M. Rutherford et Geiger<sup>(1)</sup>



La figure représente le dispositif. A est un cylindre de laiton avec un fil central isolé B; ce fil est relié à une des paires de quadrants d'un électromètre, et le tube extérieur au pôle négatif d'une batterie de nombreux petits accumulateurs dont l'autre pôle est au sol. L'air est, à une pression de 2 à 5 centimètres.

En D se trouve un diaphragme de  $1 \text{ mm}^5$  qui laisse passer les particules  $\alpha$ . La matière radioactive (par exemple une petite plaque activée par le radium, sur laquelle est, par conséquent, déposée une couche de radium C) est dans le tube, de gauche. On règle la quantité de la matière active et sa distance au diaphragme de manière qu'il entre dans A trois à cinq particules par minute.

Chaque fois qu'une particule pénètre dans la chambre d'ionisation

(1) Le Radium 1908, p. 256.

AB on observe, ou mieux on enregistre photographiquement l'impulsion de l'électromètre. Si accidentellement plusieurs particules entrent à la fois, on s'en aperçoit par la grandeur de l'impulsion.

Prenant la moyenne d'un nombre suffisant d'observations, on calcule d'après la surface et la position de la source, et le diamètre du diaphragme, le nombre total de particules émises en une seconde par la préparation.

Rapportant les nombres à 1<sup>g</sup> de radium, on trouve que 1<sup>g</sup> de radium émet par seconde le chiffre colossal de 136 milliards de particules  $\alpha$ .

Connaissant le nombre total  $n$  de particules émises pendant un temps déterminé par une quantité déterminée d'une matière radioactive, il suffit maintenant de mesurer la charge  $q$  recueillie dans un cylindre de Faraday (les rayons  $\beta$  étant éliminés par déviation magnétique) pour avoir la charge  $\frac{q}{n}$  d'une seule particule. On trouve  $3,1 \cdot 10^{-20}$ ; c'est bien le double de la charge élémentaire.

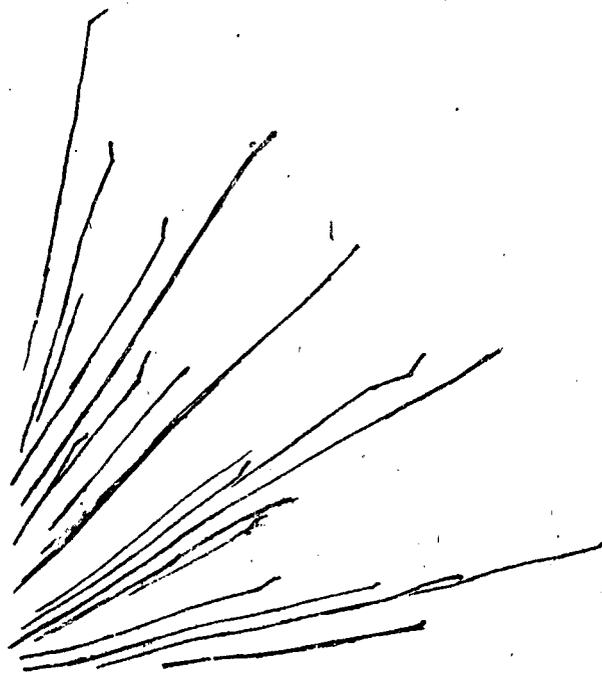
Photographie de la trajectoire d'une particule  $\alpha$ . — Une magnifique expérience a été réalisée par M. C. T. Wilson. Un petit grain de radium, placé à l'extrémité d'un fil, est introduit dans une enceinte saturée de vapeur d'eau; une détente produit la sursaturation par refroidissement.

Chaque particule  $\alpha$  laisse sur son passage une traînée d'ions qui condensent l'eau. Immédiatement après la détente, on éclaire l'enceinte par une étincelle; les files de gouttelettes sont rendues visibles et peuvent être photographiées; elles dessinent les trajectoires qui ont été parcourues par les particules.

La figure ci-contre reproduit une de ces photographies.

Les trajectoires s'incurvent notablement sur les derniers millimètres du parcours et présentent parfois des coudes brusques, qu'on peut attribuer à une collision véritable contre le noyau d'un atome de gaz. Nous reviendrons sur ces résultats quand nous parlerons de la constitution de l'atome.

M. Wilson a de même rendu visible le chemin parcouru par un électron (rayons  $\beta$ ).



Résumé des propriétés des rayons  $\alpha$ . — 1° Les particules  $\alpha$  sont des atomes d'hélium ayant perdu deux électrons (les deux seuls qu'ils possèdent en dehors du noyau).

Le fait remarquable établi que le noyau de l'atome d'hélium entre dans la constitution de nombreux atomes, peut être de tous.

2° Chaque élément radioactif envoie des particules  $\alpha$  avec une vitesse particulière. La plus grande vitesse a lieu pour le thorium - Ca (22.000 km/sec.).

3° La matière ralentit les particules  $\alpha$ . Le pouvoir ionisant, l'action photographique et l'action sur les corps phosphorescents disparaissent en même temps, dès que la vitesse devient inférieure à une vitesse critique (environ  $0,7 \cdot 10^9$  cm/sec.), de sorte que s'il existe des éléments émettant des rayons  $\alpha$  à faible vitesse, nous n'avons aucun moyen de nous en apercevoir).

## 272. — Rayons $\gamma$ .

Ces rayons qu'aucune action ne peut dévier sont extrêmement pénétrants; l'action photographique est faible car ils ne sont presque pas absorbés; elle ne donne donc aucune idée de leur intensité.

Les rayons  $\gamma$  ne sont produits que par des substances donnant aussi des rayons  $\beta$ .

Les rayons  $\gamma$  ne sont pas constitués par des particules. Ce sont des ondulations électromagnétiques dont les longueurs d'onde sont excessivement courtes, plus courtes encore que celles des rayons X.

Le dosage des substances radioactives par l'ionisation due aux rayons  $\gamma$  est d'usage courant; il présente l'avantage d'une grande facilité expérimentale. On utilise seulement les rayons très pénétrants en supprimant tous les autres par des écrans convenables; l'absorption par les ampoules n'entre plus en ligne de compte. La comparaison est précise pour des échantillons renfermant un même élément radioactif si les rayons émis de chaque point de la source sont dans tous les cas reçus dans la chambre d'ionisation sous le même angle solide et après passage à travers les mêmes écrans.

## 273. — Rayons secondaires.

Un fait à première vue paradoxal, est le suivant; si l'on place un écran (1 mm d'épaisseur de plomb, par exemple) sur le trajet des rayons  $\gamma$ , l'action photographique devient intense derrière l'écran, alors qu'en l'absence d'écran elle est très faible. Voici l'explication: la partie du rayonnement  $\gamma$  qui a été absorbée a donné naissance à des rayons secondaires très absorbables et par suite très actifs; ceux-ci,

fortement déviables par un champ magnétique, sont de même nature que les rayons  $\beta$ ; les électrons qui les forment sont animés de vitesses relativement faibles.

Les rayons  $\beta$  pénétrants donnent aussi des rayons secondaires.

Comme l'action photographique, l'action ionisante des rayons secondaires est beaucoup plus forte que celle des rayons primaires, quoique bien plus faible que celle des rayons  $\alpha$ . La méthode de M. Wilson (N° 273) montre les trajectoires des rayons secondaires: elles sont fortement incurvées et diffusées.

## §.2. L'évolution radioactive.

### 274. La radioactivité induite.

Puisque les particules  $\alpha$  sont matérielles, il est évident que les atomes d'un élément radioactif qui ont perdu une particule  $\alpha$  ont perdu de leur masse (4 unités dans le système des poids atomiques, puisque  $\text{He} = 4$ ) et par conséquent ne sont plus des atomes de l'élément primitif. Ils doivent caractériser un corps différent. C'est dire que les corps radioactifs se transforment spontanément, en donnant naissance à des éléments nouveaux.

Ce résultat nous apparaît, comme une conséquence de la nature de la particule  $\alpha$ , mais il avait été démontré directement, avant qu'on eût connaissance de la nature des rayons  $\alpha$ .

Curie et M<sup>me</sup> Curie ont découvert (1898) que n'importe quel objet mis pendant quelque temps en présence du radium dans une enceinte fermée, puis éloigné de la matière active, devient lui-même radioactif, mais pendant quelques heures seulement. Ils appelèrent cet effet la radioactivité induite.

### 275. Les émanations radioactives

Vers la même époque M. Rutherford découvrit que les gaz mis en contact avec du thorium pressentés, pour quelques minutes, une partie de l'activité de la substance comme si une émanation radioactive, très éphémère, se dégageait du thorium. Puis il reconnut que le thorium provoque, comme le radium, une radioactivité induite et montra que ce phénomène est dû à l'émanation. Peu après, M. Dorn découvrit l'émanation du radium qui est la cause de la radioactivité induite observée par Curie.

Il nous est impossible d'étudier en détail toutes les transformations successives du thorium, du radium, etc... nous choisirons

seulement quelques exemples pour donner une idée des méthodes employées pour révéler ces transformations.

Considérons, par exemple, le thorium. L'existence de son émanation est démontrée par l'expérience suivante. Dans le tube A, on place une certaine quantité (50<sup>gr</sup>) d'oxyde de thorium hydraté (profitable au thorium); ce tube communique, par un tube I long et étroit, avec un électroscope. Si l'on fait passer un courant d'air sur la substance, on constate qu'au moment précis où l'air pénètre dans l'électroscope, celui-ci commence à se décharger rapidement: l'air a donc entraîné un gaz radioactif. Si l'on arrête le courant d'air, l'activité tombe en 54 secondes à la moitié de sa valeur primitive, tombe au quart de 108 secondes... etc.: la loi de décroissance est exponentielle.

Toutes les solutions des composés du thorium donnent une quantité d'émanation proportionnelle à la quantité de thorium qu'elles contiennent. Les solides ne produisent pas moins d'émanation que les solutions, mais la dégagent moins aisément.

La nature matérielle de l'émanation résulte du fait qu'elle se condense à  $-120^{\circ}$  quand elle est mélangée avec l'air: elle est arrêtée quand le gaz passe dans un tube plongeant dans de l'air liquide. La lenteur de sa diffusion montre que c'est un gaz de gros poids moléculaire.

### 276. — Constante radioactive. — Période. — Vie moyenne.

Soit une quantité d'émanation donnant l'activité  $I_0$  (mesurée par l'ionisation produite) à l'origine du temps. La loi exponentielle de disparition de l'émanation s'écrit:

$$(397) \quad I_t = I_0 e^{-\lambda t}$$

$I_0$  étant l'activité au temps  $t$ .

$\lambda$  se nomme constante radioactive. Chaque corps radioactif a ainsi une constante qui le caractérise.

Le temps  $T$  pendant lequel l'activité est réduite dans le rapport  $\frac{1}{2}$  s'appelle la période:  $T = \frac{\log_2 2}{\lambda}$ .

On peut écrire autrement l'équation (397). Soient  $n_0$  et  $n_t$  les nombres d'atomes qui rayonnent, c'est-à-dire qui se transforment pendant une seconde aux époques 0 et  $t$ . Ces nombres sont proportionnels aux activités; on a donc:

$$(398) \quad n_t = n_0 e^{-\lambda t}$$

Désignons maintenant par  $N_0$  et  $N_t$  les nombres d'atomes existants aux époques 0 et  $t$ . Comme ils doivent tous être transformés au bout d'un

temps infini on a :

$$N_0 = \int_0^{\infty} n_t dt = n_0 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{n_0}{\lambda}$$

et :

$$N_t = n_0 \int_t^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{n_0}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

d'où : (399)  $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$

c'est-à-dire que le nombre des atomes diminue comme l'activité, ou encore que l'activité est proportionnelle au nombre des atomes présents.

Comme on a :  $\frac{dN_t}{dt} = -\lambda N_t$

on voit que  $\lambda$  est le pourcentage des atomes qui disparaissent en une seconde : la quantité de matière qui se transforme à chaque instant est proportionnelle à la quantité présente.

La vie moyenne d'un atome est la durée  $\theta$ , telle que :

$$N_0 \theta = \int_0^{\infty} N_t dt = N_0 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt$$

d'où :

(400)  $\theta = \frac{1}{\lambda}$

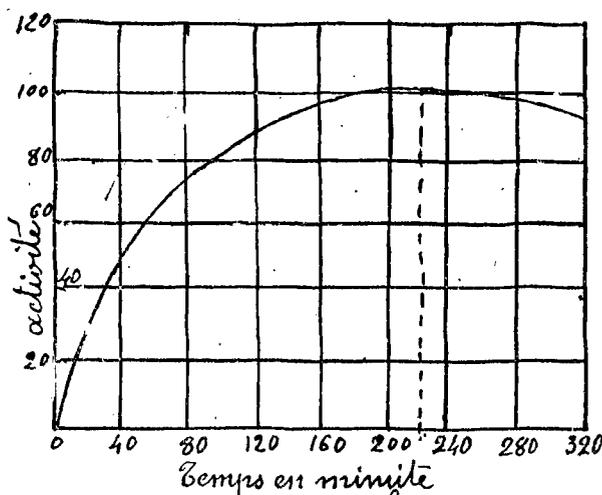
## 277. Exemples de transformations radioactives.

Nous avons dit que tout objet exposé en thorium ou en radium dans une enceinte devient actif<sup>(1)</sup>. Cet effet est dû à un dépôt de matière active, car il disparaît quand on frotte l'objet avec de l'étoffe et c'est l'étoffe qui devient active. On peut dissoudre le dépôt dans un acide : on constate son évaporation à haute température. L'expérience prouve que l'activité induite est proportionnelle à la quantité d'émanation présente. Ce fait donne à penser que le dépôt actif provient d'une transformation de l'émanation.

Étudions comme exemple, l'activité induite par l'émanation du thorium. Si un objet a été exposé plusieurs jours à cette émanation, son activité décroît suivant une loi à peu près exponentielle avec une période de 10,6 heures. Il y a émission de rayons  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

Mais si l'exposition n'a duré que quelques minutes, l'activité suit une marche représentée par la courbe (p. ci-après) ; elle croît d'abord, passe par un maximum au bout de 220 minutes et c'est seulement après qu'elle décroît suivant la loi exponentielle avec la période de 10,6 heures.

(1) Le dépôt de la matière est facilité quand on électrise l'objet négativement.



Si l'exposition est courte, le thorium B est seul en dépôt, il ne rayonne presque pas, l'activité est faible (rayon  $\beta$  seulement), mais il donne naissance au thorium C qui rayonne beaucoup plus que lui ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). Il y a maximum d'activité au moment où la quantité de C qui se détruit est égale à la quantité engendrée par B; puis la décroissance commence, parce que le thorium B est en quantité de plus en plus faible.

Soient  $n_0$  le nombre d'atomes du thorium B déposés sur le corps activé, B le nombre d'atomes du thorium B, et C le nombre d'atomes du thorium C présents au temps  $t$ . On a :

$$B = n_0 e^{-\lambda_B t} \quad \frac{dB}{dt} = -\lambda_B n_0 e^{-\lambda_B t} = -\lambda_B B.$$

$$\frac{dC}{dt} = \lambda_B n_0 e^{-\lambda_B t} - \lambda_C C$$

vitesse de croissance de C      vitesse de destruction de B      vitesse de destruction de C

On tire de ces équations :

$$(401) \quad C = \frac{\lambda_B n_0}{\lambda_C - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t})$$

Le maximum a lieu pour  $\frac{dC}{dt} = 0$ , c'est-à-dire au temps  $T$  tel que :

$$(402) \quad \frac{\lambda_C}{\lambda_B} = e^{-(\lambda_B - \lambda_C) T}$$

Le rayonnement de B étant négligeable, l'activité est proportionnelle à C (form. 401).

$$(403) \quad \frac{I_t}{I_T} = \frac{e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t}}{e^{-\lambda_B T} - e^{-\lambda_C T}}$$

(1) M. Rutherford l'avait appelé th. A; mais on a découvert ensuite un corps intermédiaire entre l'émanation et le corps appelé maintenant th. B. Le th. A a une période consécutivement courte (0,14 seconde).

Comme finalement que l'exposition soit courte ou longue, l'activité tombe avec une période de  $10^6.6$  c'est que, l'un des corps a une période de  $10^6.6$ . Supposons que ce soit B, on a  $\lambda_B$ , on connaît T, on peut donc calculer  $\lambda_C$  par la formule (402). On trouve que le radium C a une période de 60 minutes. On constate alors que (403) donne exactement la courbe trouvée expérimentalement, ce qui justifie l'explication.

Mais on pouvait attribuer au thorium C la période de 10,6 heures (la formule 403 étant symétrique). L'expérience a bien prouvé que c'est le corps qui rayonne peu qui a la période de  $10^6.6$ . M. Leitch a pu en effet séparer B et C par électrolyse du dépôt actif dissous dans l'acide chlorhydrique; il a obtenu sur une lame de nickel, un produit très radioactif ayant une période voisine de 1 heure. D'autre part M<sup>lle</sup> Slater a séparé les deux corps par volatilisation.

Il est remarquable qu'on en soit arrivé à mettre en évidence un corps tel que le thorium B qui ne rayonne pas, ou du moins ne donne pas de rayons  $\alpha$  et qui est en quantité trop petite pour pouvoir être manié. Il est extraordinaire aussi d'avoir pu séparer le thorium B et le thorium C.

La méthode dont nous venons de donner un exemple a été utilisée pour l'étude générale des transformations, mais elle présente une grande variété dans la manière de l'appliquer. Il faut parfois faire intervenir séparément les courbes d'activité des rayons  $\alpha$  et celles des rayons  $\beta$ . Il est absolument prouvé qu'une forme temporaire de radioactivité caractérise un élément et que cet élément disparaît en même temps que la manifestation radioactive.

Thorium A. — Nous signalerons encore l'ingénieuse méthode par laquelle M. Rutherford et ses collaborateurs ont découvert le produit direct de la transformation de l'émanation du thorium. Un fil sans fin, chargé négativement, passe très rapidement le long de l'axe d'un cylindre contenant de l'émanation du thorium. On observe que la partie du fil qui vient de sortir du cylindre est fortement active, émettant des rayons  $\alpha$  intenses. Mais l'activité décroît rapidement le long du fil; de cette décroissance on déduit la période du thorium A (0,14 secondes).

## 278. — Constatation directe de la formation de l'hélium.

Comme l'émanation du thorium, l'émanation du radium est un gaz qu'on isole en utilisant sa facile condensation à basse température; on a pu en obtenir une quantité suffisante pour l'étudier; on a déterminé son poids atomique, son point critique etc... Ce gaz appartient à la famille des gaz rares (He Ne etc...).

M. M. Ramsay et Soddy (1903) ont enfermé dans un petit tube vide l'émanation extraite de 60 milligr. de bromure de radium, après l'avoir, en la condensant, séparée des autres gaz. Au bout de trois jours l'analyse spectrale révèle la raie  $D_3$  de l'hélium; après cinq jours le spectre entier de l'hélium fut visible tandis que le spectre de l'émanation ne tarda pas à disparaître.

Des mesures directes, faites par Dewar, puis par M. M. Rutherford et Boltwood ont permis de déterminer la quantité d'hélium engendré par un gramme de radium en un an. Ces derniers ont trouvé  $156 \text{ mm}^3$ .

D'autre part la numération des particules  $\alpha$  ( $N^\circ 271$ ) conduit à un chiffre très voisin,  $141 \text{ mm}^3$ .

### 279. — Équilibre radioactif.

Considérons un corps A qui se transforme en un corps B, lequel engendre un corps C, etc... et supposons qu'on maintienne en présence tous ces produits. Au bout d'un temps suffisamment long il s'établira un état d'équilibre, dit équilibre radioactif, caractérisé par le fait qu'à chaque instant, le nombre d'atomes de chaque corps qui se forment est égal au nombre des atomes du même corps qui se détruisent, c'est-à-dire au nombre des atomes du corps suivant qui se forment. Soient  $N_A$ ,  $N_B$ , ... les nombres d'atomes des différents corps présents à un moment donné, l'état d'équilibre étant réalisé, on a

$$(404) \quad \lambda_A N_A = \lambda_B N_B = \lambda_C N_C = \dots$$

La constante radioactive étant inversement proportionnelle à la période, pour chaque produit le nombre d'atomes présents est proportionnel à la période, c'est-à-dire que plus un produit se transforme vite plus petite est sa quantité; aussi les corps très radioactifs n'existent-ils qu'en quantité extraordinairement faible.

Chaque corps qui émet des rayons  $\alpha$  engendre un nombre d'atomes du corps suivant, et un nombre d'atomes d'hélium égale entre eux et égale au nombre de ses propres atomes qui se transforment.

Donc, dans l'état d'équilibre, tous les corps à rayons  $\alpha$  produisent la même quantité d'hélium dans le même temps.

### 280. — Chaleur dégagée par les corps radioactifs.

Les corps radioactifs qui émettent des rayons  $\alpha$  dégagent dans leur transformation une quantité de chaleur considérable. Parmi les nombreuses mesures calorimétriques qui ont été faites, les plus précises donnent 118 calories pour la chaleur dégagée en une heure par 1 gr. de radium.

en équilibre radioactif; les trois quarts de cette chaleur sont dus à l'émanation et à ses produits de transformation; à poids égal, l'émanation dégage 80.000 fois plus de chaleur que le radium dans le même temps.

M. J. G. Rutherford et Barnes ont démontré que la chaleur provient presque entièrement de la transformation en énergie calorifique de l'énergie cinétique des rayons  $\alpha$ , lors de l'arrêt des particules. Les rayons  $\beta$ ,  $\gamma$  et les atomes eux-mêmes (qui reculent comme un canon en émettant une particule  $\alpha$ ) ne contribuent que pour 1 à 2 % à la chaleur totale.

Un seul gramme de radium dans sa transformation complète en hélium et en plomb (terme final), dégage autant de chaleur que la combustion de 500 kg de charbon. A volume égal, l'émanation du radium est capable de libérer 2500.000 fois plus d'énergie que l'explosion d'un mélange d'hydrogène et d'oxygène.

La chaleur mise en jeu est donc d'un tout autre ordre de grandeur que dans les réactions chimiques. C'est qu'il ne s'agit pas ici d'une décomposition chimique. Les corps radioactifs ne sont pas des corps composés, ce sont des éléments qui donnent naissance à d'autres éléments. Il s'agit d'une transmutation pour les corps qui n'émettent pas de rayons  $\alpha$  et gardent le même poids atomique et d'une désintégration pour ceux qui se dédoublent en hélium et en un autre corps de moindre poids atomique.

## 281. — Origine du radium.

Nous avons vu comment M. Rutherford a compté le nombre des particules  $\alpha$  émises par seconde. Pour le radium seul, c'est-à-dire privé de ses produits de transformation ce nombre est  $3,4 \cdot 10^{10}$  par gramme.

Soit  $n$  le nombre d'atomes contenus dans 1 gr. de radium, on a par définition de la constante radioactive :

$$\lambda = \frac{3,4 \cdot 10^{10}}{n} \text{ et d'autre part } n = \frac{N}{226,5}$$

$N$  étant le nombre d'Avogadro ( $6,810^{23}$ ) et 226,5 le poids atomique du radium. On déduit de là  $\lambda = 1,13 \cdot 10^{-11}$  (sec.<sup>-1</sup>); période  $T = 1950$  ans et vie moyenne  $\theta = 2800$  ans.

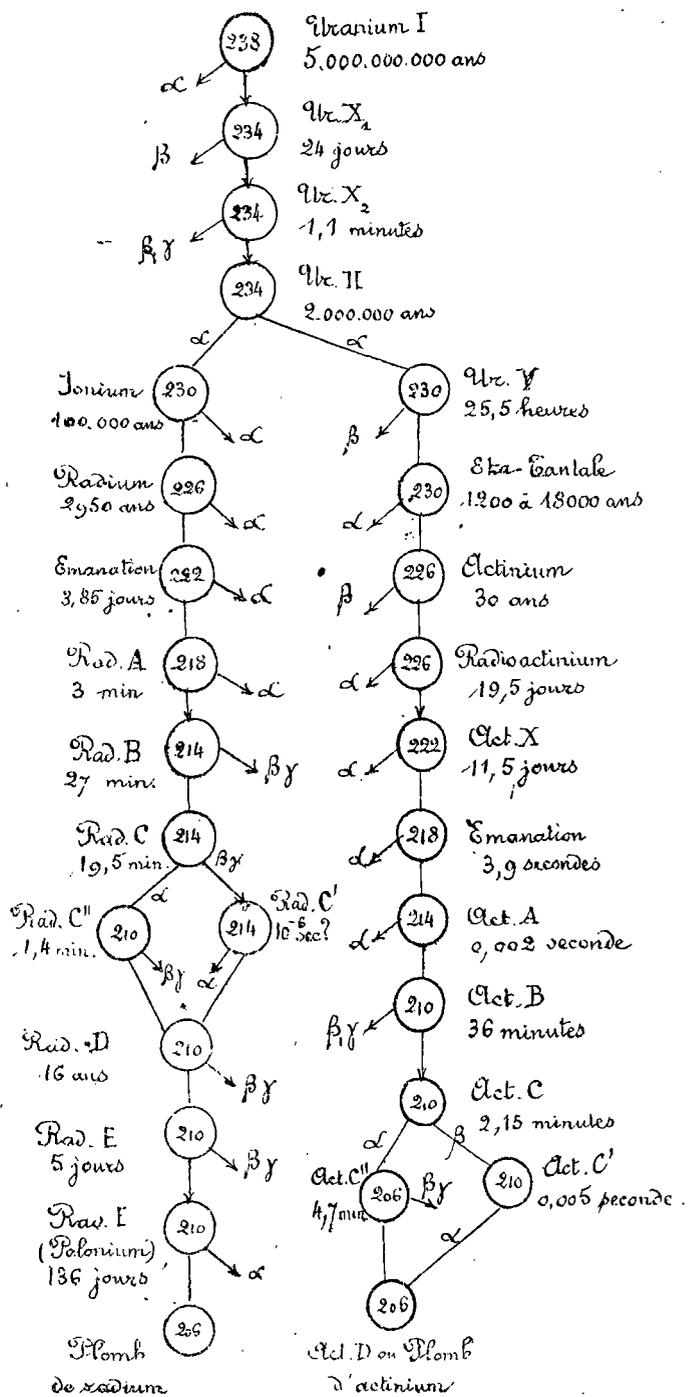
Le radium disparaît donc en somme assez vite : il est certain qu'il provient d'un autre corps.

Précisément il se trouve toujours dans les minerais contenant de l'uranium, de plus il y a un rapport constant entre les proportions d'uranium et de radium ce qui est caractéristique de l'équilibre radioactif. Une tonne d'uranium contient 0<sup>re</sup> 38 de radium.

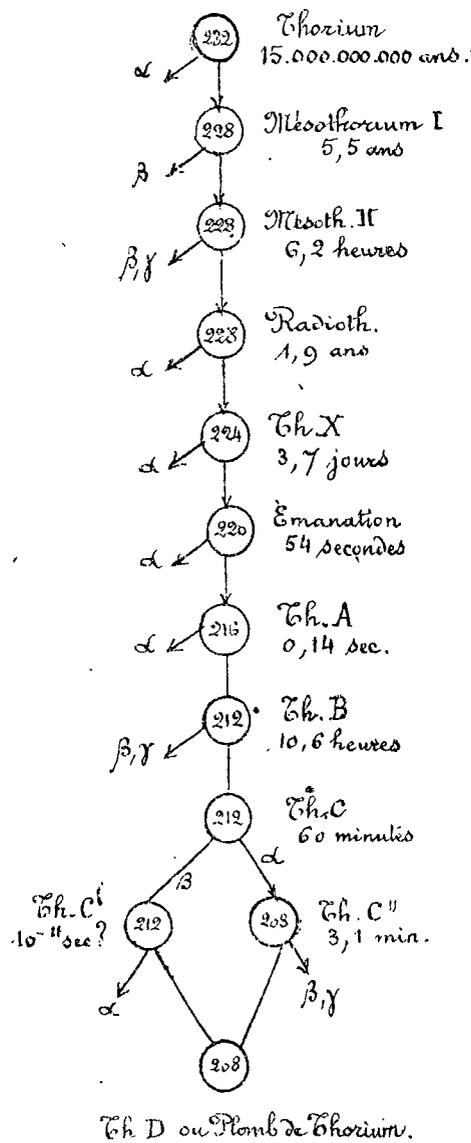
Le rapport des nombres d'atomes de deux corps en équilibre radioactif étant égal au rapport de leurs vies moyennes, on déduit de la proportion entre l'uranium et le radium la vie moyenne de l'uranium, 7.200.000.000 ans.

Mais le radium n'est pas engendré directement par l'uranium, on a démontré l'existence de 5 éléments intermédiaires.

Famille de l'Uranium



Famille du Thorium



Les trois plombs sont isotopes.

## 282. - Vue d'ensemble des corps radioactifs.

Le schéma (p. ci-avant) résume nos connaissances sur les transformations radioactives. Les poids atomiques des éléments sont marqués au milieu des cercles. Les durées indiquées sont les périodes (il faut les diviser par  $\text{Log. 2}$  pour avoir les vies moyennes). On remarquera que ces périodes varient dans des limites formidables, depuis des temps inférieurs au milliègne de seconde jusqu'à des milliards d'années.

Il y a deux familles. Une bifurcation de la famille de l'Uranium donne d'une part la famille du radium, d'autre part, celle de l'actinium. On aboutit à trois plombs (isotopes)

## 283. - Les corps isotopes.

Lorsqu'on a cherché à placer les nombreux corps radioactifs dans la classification périodique des éléments (Mendelejeff) une difficulté s'est présentée; le nombre des cases vacantes était insuffisant pour les loger isolément; il fallait donc en mettre plusieurs dans une seule case, comme s'ils étaient chimiquement identiques.

On a effectivement constaté que certains des nouveaux éléments, bien que possédant des poids atomiques différents et des constantes radioactives différentes, ont les mêmes propriétés physiques et chimiques, et il est impossible de les séparer chimiquement quand ils sont mélangés. Ainsi le thorium, le radiothorium, l'uranium X et l'ionium sont indiscernables; de même le radium B, le radium D, le radium A sont chimiquement identiques au plomb. Le spectre des rayons X excités dans le plomb ordinaire par un faisceau de rayons  $\beta$  est formé des plus fortes lignes du spectre de rayon  $\gamma$  du radium B. Le spectre lumineux du radium C est identique à celui du radium A, celui de l'ionium est identique à celui du thorium.

Tous avons vu qu'on connaît aujourd'hui deux néons et deux chloros (N° 360). On a constaté aussi que le poids atomique du plomb varie selon la provenance; le plomb ordinaire est un mélange de plusieurs éléments ayant des poids atomiques différents, mais les mêmes propriétés.

M. Soddy a appelé isotopes les éléments chimiquement et physiquement semblables et M. Fajans a désigné sous le nom de pleiade un groupe de corps isotopes.

Les deux lois suivantes éclairent la question:

1° Toute transformation à rayons  $\alpha$  abaisse le poids atomique de 4 unités (poids atomique de l'hélium = 4) et donne un atome qui doit être placé deux cases plus haut dans la classification périodique (Soddy).

2° Toute transformation à rayons  $\beta$  conserve le poids atomique et donne un atome situé une case plus loin (Russell, Soddy et Fajans).

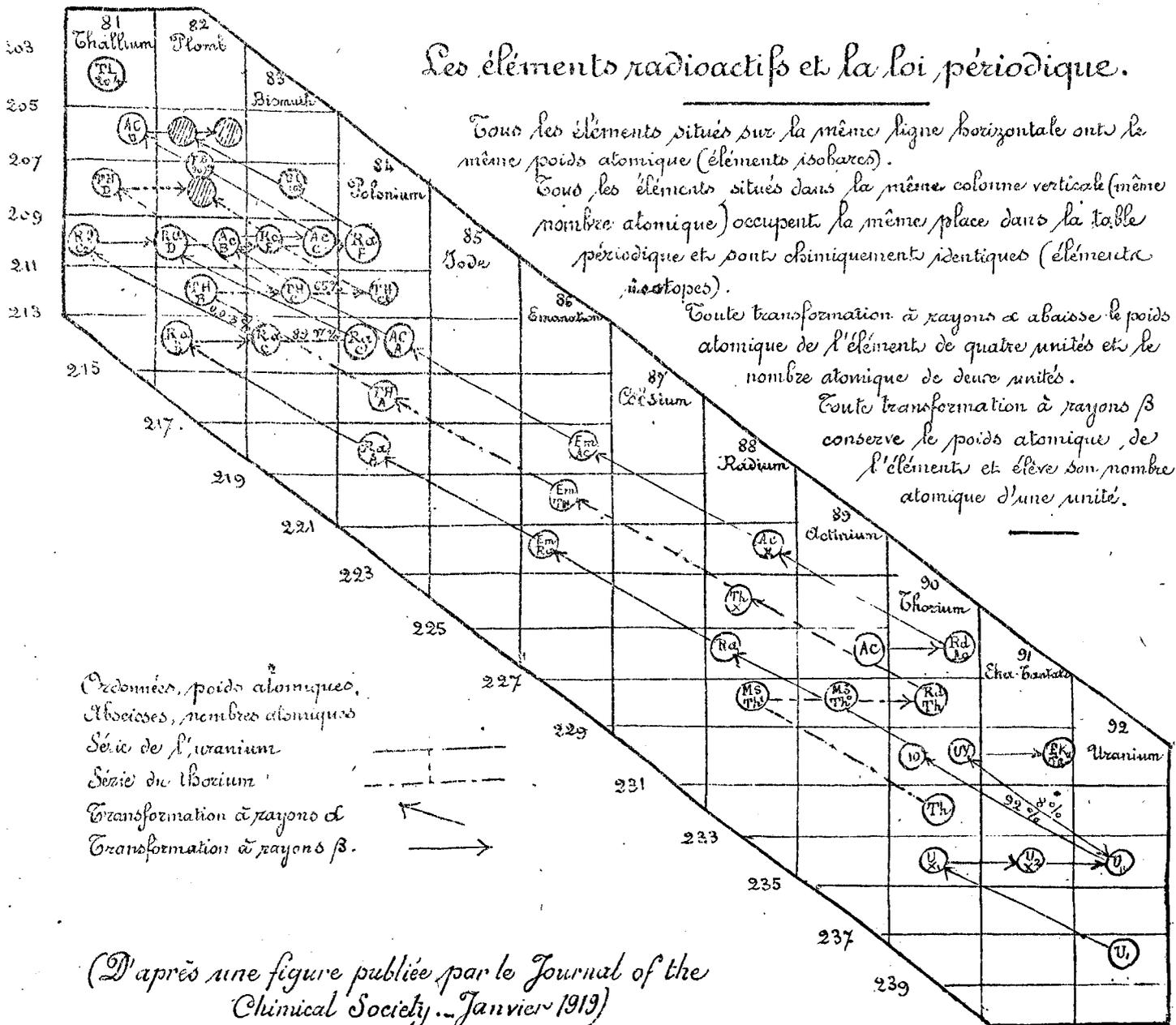
En appliquant ces lois, les corps d'une pleiade se trouvent placés dans la même case. Nous pouvons interpréter ces lois de la façon suivante: Prenons pour unité la charge élémentaire; la perte d'une particule  $\alpha$  qui porte deux charges positives diminue de 2 unités la charge positive du noyau atomique. La perte d'un électron augmente d'une unité la charge du noyau. Il apparaît donc que la classification

périodique ne doit pas être, comme on l'avait pensé, une classification par ordre de poids atomiques croissants, mais une classification par ordre de charges croissantes des noyaux atomiques, le nombre de charges positives étant d'ailleurs égal au nombre d'électrons qui gravitent autour du noyau puisque l'atome est électriquement neutre.

Le rang d'un élément dans la classification est alors égal au nombre de charges élémentaires du noyau, ou plus exactement au quotient de la charge totale du noyau par la charge élémentaire, car le noyau peut contenir des charges des deux signes. On appelle ce nombre le nombre atomique. — Nous verrons, dans la théorie de Bohr, pourquoi les corps ayant même nombre atomique ont les mêmes propriétés.

Le tableau suivant (M. Soddy) donne la classification des corps radioactifs d'après les lois énoncées plus haut.

### Les éléments radioactifs et la loi périodique.



### § 3. - Idées générales sur l'évolution de la matière.

#### 284. - Signification de la loi exponentielle des transformations.

Malgré les faits bien établis, malgré la perfection de la théorie de l'évolution à laquelle personne ne songe à faire d'objection, la radio-activité reste un phénomène étrange et mystérieux.

Si, en effet, on cherche à remonter aux causes premières, on ne sait comment expliquer la spontanéité de cette évolution, l'impossibilité de la modifier en quoi que ce soit et surtout on s'arrête devant la loi des transformations qui exprime que les atomes ne vieillissent pas et sont détruits accidentellement.

Nous avons vu, en effet, que la loi des transformations est exponentielle : la quantité de matière qui se transforme est à chaque instant proportionnelle à la quantité présente : c'est là une loi statique de hasard, car elle signifie qu'à un instant quelconque la probabilité de survie pendant un temps déterminé est la même pour tous les atomes d'un même élément et reste toujours constante.

Nous avons parlé de la "vie moyenne" de l'atome, mais certains atomes d'un même élément disparaissent dès leur formation, d'autres ont une vie très longue, il n'y a de loi qu'à cause du nombre colossal d'atomes et cette loi exponentielle est une loi de grands nombres.

La loi de hasard apparaît d'ailleurs nettement quand il n'y a plus qu'une quantité excessivement faible de matière ; on constate des écarts à la loi exponentielle et ces écarts sont absolument fortuits.

Un atome d'émanation du radium, par exemple, a toujours une chance sur deux de survivre pendant les cinq jours et demi qui vont suivre, il ne meurt donc pas de vieillesse, mais d'accident car s'il vieillissait, la probabilité de destruction augmenterait avec le temps.

On doit conclure de là que les atomes, pris individuellement, ne renferment pas dans leur constitution une cause de mort qui leur assigne une durée de vie déterminée, car ils disparaîtraient tous au bout d'un même temps. On pourrait, il est vrai, supposer qu'il y a dans chaque élément un nombre immense d'atomes dissemblables, ayant chacun sa destinée tracée à l'avance ; M. Debièvre<sup>(1)</sup> a

<sup>(1)</sup> Conférence à la Société de Physique, publiée dans l'ouvrage "les idées modernes sur la constitution de la matière" 1903. (Gauthier-Villars, Éditeur).

discute' cette hypothèse et a montré combien elle est, peu vraisemblable.

En somme la loi de hasard nous enseigne qu'une cause de destruction fortuite vient frapper les atomes.

Il s'agirait de trouver cette cause, et c'est ce qui embarrasse les physiciens. On ne peut faire appel à l'agitation thermique et aux chocs qui en résultent car la constante radioactive est absolument indépendante de la température; elle est même indépendante de toute action extérieure.

On est donc conduit à penser que le hasard qui préside aux destinées des atomes est, suivant le mot d'Henri Poincaré, un "hasard interne". Mais qui dit hasard dit grands nombres; c'est donc que l'atome lourd des corps radioactifs est un monde compliqué, renfermant un grand nombre de particules dans le mouvement desquelles interviennent des paramètres irrégulièrement variables comme pour une masse gazeuse en équilibre statistique. Lorsque, par hasard, certaines conditions, pour nous mystérieuses, se trouvent réalisées dans ce monde complexe, un bouleversement formidable se produit, avec redistribution des particules suivant un autre régime de mouvements intérieur débordonné.

On doit cependant remarquer que ce désordre n'est pas absolu car, si le temps que doit vivre un atome sous une forme particulière est absolument arbitraire, cet atome doit, néanmoins, tôt ou tard, passer par des formes déterminées.

Puisque la partie de l'atome où se passent les phénomènes radioactifs reste indifférente aux actions extérieures, c'est qu'elle constitue un monde fermé.

Il n'y a communication avec le monde extérieur que lorsqu'un cataclysme interne détermine l'expulsion d'un noyau d'hélium ou même seulement d'un électron. Il est à remarquer que les rayons  $\beta$  très pénétrants n'apparaissent que vers la fin de l'évolution. Après l'expulsion d'un électron de vitesse formidable, l'atome prend une forme moins instable. Les rayons  $\alpha$  possèdent une vitesse d'autant plus grande que la vie moyenne est plus courte; en portant en abscisses les parcours des rayons  $\alpha$  dans l'air et en ordonnées les vies moyennes, M. Geiger a constaté que les points sont sensiblement en ligne droite pour les corps d'une même famille.

Les considérations qui précèdent nous conduisent encore à envisager dans l'atome deux parties: le noyau constituant

ce monde inaccessible, à l'abri des actions extérieures, et l'enveloppe constituée par des électrons (en nombre, évidemment égal au nombre atomique). Ces électrons périphériques sont sensibles aux actions que nous pouvons faire agir (force électrique, force magnétique, lumière etc.) III. Debiere compare cette image de l'atome à un astre dont l'atmosphère est le siège de phénomènes susceptibles du dehors, mais dont la masse interne est presque isolée, n'étant pas en équilibre de température avec l'extérieur, et renferme une énergie formidable.

Il est possible que la radioactivité soit une propriété générale de la matière. Il est naturel de penser que toute matière subit une évolution, mais que la lenteur des transformations ou la faible énergie des particules émises qui échappent alors à nos moyens d'investigation, nous donnent l'illusion de la stabilité.

---

## - Chapitre III -

### L'émission et l'absorption de la lumière.

#### 285. Les particules électrisées sources de lumière.

On doit attribuer l'émission de lumière, visible ou invisible, au mouvement des particules électrisées contenues dans la matière.

L'agitation désordonnée des mouvements thermiques produit le spectre continu des corps incandescents ; les mouvements réguliers de périodes définies intérieurs aux atomes donnent les ondes périodiques qui se traduisent par les spectres discontinus de raies et de bandes.

Imaginons une particule électrisée en mouvement uniforme sur une trajectoire circulaire autour d'un centre d'attraction. La rotation uniforme implique à chaque instant une accélération normale à la trajectoire ; de direction variable par conséquent mais de grandeur constante. Il en résulte une émission d'ondes dont la période est égale à la durée de révolution de la particule. <sup>(1)</sup>  
Examinons comment ces ondes se présenteront à l'observateur dans les différents cas.

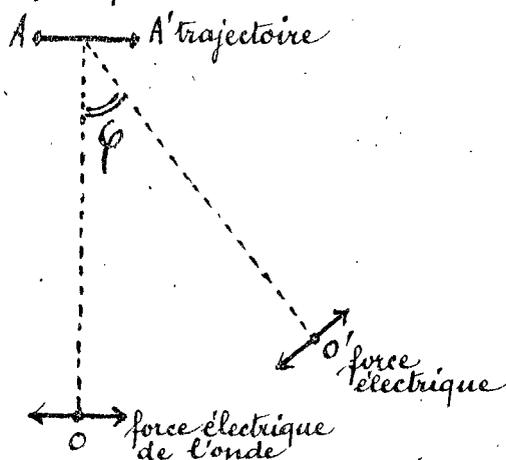
Supposons d'abord l'observateur placé dans le plan de l'orbite à grande distance de celle-ci par rapport à son rayon ; il voit l'orbite "par la tranche".  
Le champ électrique de l'onde est toujours situé dans le plan de l'orbite puisque ce plan contient la direction de visée et celle de l'accélération (voir n<sup>o</sup> 248), et ce champ conserve la direction fixe normale à la direction de visée, tout en variant périodiquement comme la projection, (à laquelle il est proportionnel) de l'accélération, sur le plan d'onde (n<sup>o</sup> 248). Cette fixité de direction de la force électrique signifie que le rayonnement observé est pola-

(1) Nous verrons dans l'exposé de la théorie de Bohr dans quelles conditions cette émission peut se produire.

risé rectilignement dans un plan perpendiculaire à celui de l'orbite.

Observons maintenant dans une direction perpendiculaire à l'orbite en son centre. Sa projection de l'accélération sur le plan, d'onde, qui est parallèle à l'orbite, est égale à l'accélération elle-même et tourne à raison d'un tour par période. Sa radiation est polarisée circulairement.

Enfin dans les directions obliques, on a de la lumière elliptique.



Une particule animée d'un mouvement d'oscillation périodique suivant une portion de droite AA' émettrait dans toutes les directions une radiation polarisée rectilignement dans le plan passant par la direction de visée et normal à celui qui passe par cette direction et par la trajectoire rectiligne.

Soient  $h_0$  l'amplitude de la force électrique en O et  $h'_0$  l'amplitude en O'; on a:  $h'_0 = h_0 \cos \phi$ . L'émission est nulle dans la direction AA' de la trajectoire.

Nous avons étudié dans le cours de 1<sup>ère</sup> année les propriétés générales de la lumière et les spectres des radiations visibles ou voisines de ces dernières. Il est un phénomène dont nous n'avons pas parlé, la luminescence nous l'examinerons d'abord; puis nous étudierons des radiations lumineuses bien éloignées des radiations visibles dans l'échelle des fréquences, les rayons X, qui nous apporteront des données d'une extrême importance sur la constitution de la matière.

## § 1 - Luminescence -

### 286 - Phénomènes généraux -

Dans le cours de 1<sup>ère</sup> année (n<sup>o</sup> 347 p. 614) nous avons

montré que les phénomènes de rayonnement doivent être divisés en deux classes : le rayonnement thermique où l'énergie émise est uniquement empruntée à l'énergie de l'agitation moléculaire, et la luminescence, où l'énergie rayonnée provient d'une source autre que la chaleur des corps. Nous avons étudié le rayonnement thermique (lois de Kirchhoff, théorie du corps noir); nous donnerons maintenant un aperçu des divers phénomènes de luminescence.

Ces effets peuvent se ranger en cinq catégories:

- 1° La photoluminescence, produite par la lumière.
- 2° La radioluminescence qui est provoquée par les radiations diverses (rayons cathodiques,  $\beta$ ,  $\alpha$ , ... etc)
- 3° La thermoluminescence, causée par une élévation de température (la température pouvant d'ailleurs parfois rester très basse).
- 4° La triboluminescence, causée par des actions mécaniques (clivage, percussion, etc)
- 5° La luminescence par actions chimiques (phosphore, animaux et végétaux lumineux, etc)

On a pris l'habitude d'appeler fluorescence, la luminescence émise pendant l'action de la cause excitatrice, et phosphorescence l'émission qui persiste après suppression de la cause. Evidemment tout corps phosphorescent est fluorescent, mais la réciproque peut n'être pas vraie.

Les corps luminescents sont extrêmement nombreux dans la nature tant parmi les substances minérales qu'organiques. Ils peuvent se présenter sous les trois états.

Une même substance luminescente peut se trouver sensible à divers modes d'excitation (1) en donnant d'ailleurs le même spectre. L'action la plus énergique est produite tantôt par l'une, tantôt par l'autre des causes que nous avons énumérées, selon la substance étudiée.

---

(1) Ceci s'applique surtout aux causes physiques.

La luminescence par action chimique est un phénomène à part, très mal connu.

## 287 - Photoluminescence -

## Excitation, émission, extinction. -

Sous l'action de la lumière les solides seuls peuvent être phosphorescents ; les liquides et les gaz sont seulement fluorescents.

La persistance de la phosphorescence peut varier depuis un temps inappréciable jusqu'à plusieurs heures et même, dans le cas des sulfures alcalino-terreux, jusqu'à plusieurs jours.

Le phosphoroscope d'Edmond Becquerel<sup>(1)</sup> a permis d'apprécier des durées de phosphorescence de l'ordre du dix millième de seconde et de constater que pour toutes les substances phosphorescentes l'intensité de la lumière émise décroît suivant une loi exponentielle.

Spectre d'excitation. - Toutes les radiations ne sont pas également actives pour exciter la fluorescence ou la phosphorescence d'une substance particulière.

Si l'on projette un spectre continu sur un écran enduit d'une substance lumineuse déterminée, on constate que l'émission ne se produit que dans des régions localisées, variables avec la substance, qui constituent le spectre d'excitation. Toutes les bandes du spectre d'excitation appartiennent au spectre d'absorption de la substance, ce qui est d'ailleurs nécessaire car la lumière doit être absorbée pour produire un effet.

En général ce sont des radiations de courtes longueurs d'onde qui forment le spectre d'excitation.

Le spectre de luminescence est bien entendu, différent du spectre d'excitation et du spectre d'absorption, bien que certaines bandes puissent être communes au spectre de luminescence et au spectre d'absorption.

Loi de Stokes. - Ses longueurs d'onde des radiations émises ne sont jamais plus courtes que la longueur d'onde de la radiation excitatrice.

Spectre d'extinction. - Prenons un écran enduit d'une substance phosphorescente à longue persistance.<sup>(2)</sup>

(1) La lumière, ses causes et ses effets (1867-68)

(2) L'expérience réussit particulièrement bien avec la blende hexagonale (Sulfure de zinc).

excitons la phosphorescence, puis projetons sur cet écran un spectre continu. Nous constatons un phénomène fort différent du précédent. Dans la région des grandes longueurs d'onde du spectre projeté, principalement dans l'infra-rouge, il se produit sur l'écran pendant un temps très court, une augmentation de lumière de phosphorescence, immédiatement suivie d'une extinction. Les radiations de grande longueur d'onde ont fait rendre à la substance, très rapidement, la majeure partie de l'énergie emmagasinée (Edmond et Henri Becquerel).

L'effet doit être rapproché de celui que produit une élévation de température, qui fait rendre plus vite à une substance phosphorescente, la même quantité de lumière qu'elle mettrait plus de temps à rayonner si elle était abandonnée à elle-même à une température constante. Cependant le phénomène d'extinction est dû à une action particulière des radiations incidentes, et non pas à une simple élévation de température, car le maximum d'action ne se produit pas pour la région la plus chaude du spectre infra-rouge. Henri Becquerel a observé que dans la région infra-rouge il y a de larges maxima et minima d'extinction, variables d'une substance à une autre et correspondant à des régions particulières du spectre, absorbées par ces substances.

Si le spectre qu'on projette est discontinu, dans les larges régions dont il vient d'être question on voit apparaître sur l'écran les bandes ou raies de ce spectre. Cette méthode, due à Edmond Becquerel, a permis à Henri Becquerel de découvrir le spectre infra-rouge du soleil et d'étudier les spectres infra-rouges des vapeurs incandescentes.

## 288 - Radioluminescence. -

**Excitation par les rayons cathodiques.** - La fluorescence et la phosphorescence produites par les rayons cathodiques sont généralement beaucoup plus intenses que celles produites par la lumière; aussi a-t-on souvent donné la préférence à ce mode d'excitation pour l'étude spectroscopique. On constate d'ailleurs que les bandes spectrales sont aux mêmes places que celles obtenues par

luminescence, mais la plus grande intensité est favorable à l'observation des détails de structure des spectres.

La qualité du rayonnement cathodique influe non seulement sur l'intensité de la fluorescence pendant l'excitation, mais parfois aussi sur la persistance de la phosphorescence c'est-à-dire que le coefficient  $\alpha$  de la loi exponentielle de décroissance  $I = I_0 e^{-\alpha t}$  dépend de la dureté des rayons (M. S. Matout).

**Excitation par les rayons X** — L'excitation par les rayons X est en général assez faible; les corps les plus lumineux sont le platino-cyanure de baryum et le tungstate de cadmium; ce dernier est très employé aujourd'hui pour les écrans radioscopiques.

**Excitation par les corps radioactifs** — Ses rayons  $\beta$  et  $\gamma$  produisent respectivement les mêmes effets que les rayons cathodiques et les rayons X. Ses rayons  $\alpha$  ont en général une action assez vive (Spinthariscopes n° 271) surtout sur les corps cristallisés: il s'agit alors d'une sorte de triboluminescence par rupture des cristaux, sous l'influence de la force vive des particules  $\alpha$ .

## 289 — Thermoluminescence —

En chauffant même légèrement, un corps phosphorescent (Sulfure de calcium, de zinc etc --) on constate un effet identique à celui produit par les rayons infra-rouges, c'est-à-dire un accroissement momentané de lumière, suivi d'extinction.

Il y a plus; certains corps qui n'ayant pas été excités depuis fort longtemps peuvent être considérés comme ayant épuisé leur émission, sont cependant capables d'émettre encore un reliquat de lumière si l'on élève leur température. Après cette ultime émission, une nouvelle excitation devient nécessaire pour reproduire le phénomène. Il ne s'agit pas ici d'une émission thermique car il ne faut pas confondre un accroissement de température avec une haute température. Par exemple le phénomène se produit pour les sulfures alcalino-terreux excités à la température de liquéfaction de l'hydrogène ( $-253$ ); ils deviennent thermoluminescents lorsque la température remonte à celle de l'air liquide (35) (Senard et Kamerlingh-Onnes, Jean Becquerel et Kamerlingh-Onnes)

## 290 - Triboluminescence -

## Luminescence par actions chimiques -

La triboluminescence est une émission qui a lieu sous l'influence d'actions mécaniques produisant des brisures ou des clivages, ou encore sous l'influence des percussions (deux quartz frappés l'un contre l'autre). Une modification spontanée dans la structure des cristaux peut être accompagnée d'éclairs lumineux, par exemple dans la cristallisation de l'acide arsenieux (Rose, Quinchant, Gernez).

Une émission accompagne certaines réactions chimiques, par exemple l'oxydation du phosphore. Dans la nature, ce phénomène présente une grande variété, surtout dans les régions tropicales. La phosphorescence de la mer est due à de nombreux animalcules (noctiluques etc --) contenus dans le plancton. On peut citer encore la phosphorescence des poissons des grandes profondeurs, celle de multitudes d'insectes (ver luisant, lucioles etc..) Dans le règne végétal, on observe la phosphorescence des champignons au moment de la dégénérescence.

## 291 - Constitution des corps solides phosphorescents -

Dans le cas général, un composé binaire pur n'est pas phosphorescent, la présence d'un corps étranger, nommé phosphorogène est nécessaire.

M. Urbain a étudié systématiquement ce phénomène et a énoncé la loi dite de l'optimum :

Quand on fait varier les proportions du phosphorogène et de la masse principale (appelée diluant), chaque bande de phosphorescence passe par un maximum d'intensité, pour une teneur déterminée en phosphorogène.

Cette teneur est variable, non seulement suivant le phosphorogène mais encore suivant le diluant employé.

Les terres rares (Erbium, terbium, gadolinium, yttrium etc..) employés comme phosphorogène donnent des bandes assez fines; il en est de même du chrome

en dilution dans l'alumine (rubis). Les autres métaux donnent de larges bandes ou des portions de spectre continu.

MM. Senard et Klatt, dans une étude approfondie des sulfures phosphorescents, ont été conduits aux mêmes conclusions. Ils ont préparé des substances photoluminescentes par le mélange de trois matières :

un sulfure alcalino-terreux, un métal actif (phosphorogène), un fondant (NaCl, KCl etc...), sel incolore fusible à la température où l'on prépare la substance.

Le fondant pénètre la masse et sert, non seulement à unir les grains pulvérulents, mais à produire une liaison intime entre le sulfure et le phosphorogène. (1)

Le sulfure et le métal actif déterminent le nombre et la position des bandes, ainsi que leurs intensités; le fondant augmente la durée de la phosphorescence.

Les résultats importants sont les suivants :

La loi de Stokes et la loi de l'optimum sont vérifiées.

De plus, il existe trois phases dans le phénomène :

- 1°/ la phase froide, où se produit une accumulation d'énergie sans émission.
- 2°/ la phase durable, dans laquelle l'accumulation est suivie d'émission.
- 3°/ la phase chaude, dans laquelle il se produit de la fluorescence, sans accumulation.

A chacun de ces états correspond un intervalle de température assez nettement défini.

La thermoluminescence se produit soit dans la phase durable quand l'émission n'est pas achevée, soit quand on fait passer le corps de la phase froide à la phase durable. On peut dire encore que le coefficient  $\alpha$  de la loi exponentielle d'extinction diminue quand la température croît. Il est infini dans la phase froide.

Théorie de Senard — M. Senard a admis qu'un sulfure phosphorescent contient des molécules complexes, par exemple  $\text{Ca}_x \text{Bi}_y \text{S}_z$  disséminés dans  $\text{CaS}$ . L'action de la lumière excitatrice doit être un

(1) Voici un exemple :  $\text{CaS}$  3 grammes, métal actif 0,01 à 0,0005, fondant 0,1.

effet photo-électrique sur ces centres. D'abord, des électrons sont expulsés du phosphorogène; puis ces électrons sont mis en réserve dans la masse; enfin ils reviennent dans l'atome du phosphorogène en émettant de la lumière.

Les résultats expérimentaux suivants viennent à l'appui des idées de M. Senard. La conductibilité (permettant le retour des électrons) est variable avec la température: nulle aux très basses températures (phase froide), elle est notable à haute température.

M. M. Nichols et Merritt ont montré que les solutions fluorescentes présentent un accroissement de conductibilité quand on les éclaire par la lumière qui excite leur fluorescence.

M. M. Senard et Sein Saeland ont établi que les sulfures alcalino-terreux purs ne présentent pas l'effet photo-électrique, mais que cet effet se manifeste lorsqu'ils contiennent un métal phosphorogène, précisément sous l'action des radiations excitatrices de la phosphorescence.

Les hypothèses de M. Senard sont fort intéressantes, mais il ne faut pas se dissimuler leur précarité.

## 292 - Sels d'uranyle -

Les sels d'uranyle (composés uraniques) présentent des propriétés qui les classent à part parmi les corps phosphorescents.

La persistance de la phosphorescence est toujours très courte, visible seulement au phosphoroscope. Le sulfate et le nitrate présentent une indifférence totale aux variations de température (Jean Becquerel et H. Kamerlingh Onnes); même aux plus basses températures, la durée de la phosphorescence n'est pas modifiée; l'intensité globale paraît aussi rester la même. D'autres composés d'uranyle ont une persistance légèrement plus grande à basse température mais toujours (si l'on adopte les vues de M. Senard) ils restent aux alentours de la phase chaude, même à  $14^{\circ}$  absolu (solidification de l'hydrogène).

Ces corps semblent bien porter en eux-mêmes la cause de leur phosphorescence, sans intervention d'un phosphorogène.

Leur caractère le plus remarquable réside dans la structure de leurs spectres. Chaque sel d'uranyle a un spectre formé de 7 ou 8 groupes de bandes tous identiques entre eux et équidistants dans l'échelle des fréquences (Edmond et Henri Becquerel). Ces bandes se résolvent en raies fines aux très basses températures, fait qui a permis de vérifier avec plus de précision la loi de répartition.

Le spectre d'absorption prolonge vers l'infra rouge le spectre de phosphorescence, avec lequel il a quelques bandes communes.

Ce sont ces propriétés qui ont attiré l'attention d'Henri Becquerel sur les sels d'uranyle, l'ont conduit à chercher si ces sels n'émettraient pas des rayons analogues aux rayons X et l'ont directement amené à la découverte de la radioactivité.

## § 2 - Les rayons X -

### 293 - Production et propriétés des rayons X -

M. Röntgen a découvert (déc. 1895) que les parties de la paroi de verre d'une ampoule de Crookes qui sont frappées par les rayons cathodiques sont l'origine d'un rayonnement qui se propage en ligne droite, traverse plus ou moins les objets opaques à la lumière, impressionne la plaque photographique, et excite la phosphorescence.

Ces rayons sont émis chaque fois que des rayons cathodiques frappent un objet. On n'a pas tardé à prendre comme source une plaque d'un métal réfractaire (platine, tungstène), nommée anticathode, que les rayons cathodiques viennent frapper. En donnant à la cathode une forme convenable, on peut, sinon rendre la source ponctuelle, du moins concentrer les rayons cathodiques sur une faible surface.

Une propriété fondamentale des rayons X est

d'ioniser les gaz.

On reconnut rapidement que ces rayons ne subissent ni réflexion ni réfraction dans les conditions où les rayons lumineux sont réfléchis ou réfractés. Ils sont d'autant, moins absorbés que le poids atomique du corps traversé, ou les poids atomiques de ses constituants sont moins élevés. On s'aperçut aussi que les rayons X présentent des différences de qualité rendues sensibles au moyen de mesures d'absorption; leur pouvoir pénétrant augmente avec la vitesse des rayons cathodiques générateurs et dépend de la matière de l'anticathode. Avec une même ampoule, dans laquelle se produisent des rayons cathodiques de vitesses différentes, on obtient un faisceau hétérogène.

Les rayons qui subsistent après passage dans des écrans de plus en plus épais étant de plus en plus pénétrants ou "durs", on peut, par filtration, obtenir des rayons assez homogènes; on constate alors que le pouvoir absorbant d'un corps pour ces rayons est indépendant de l'état physique du corps ou de la combinaison chimique dont il fait partie: c'est une propriété atomique.

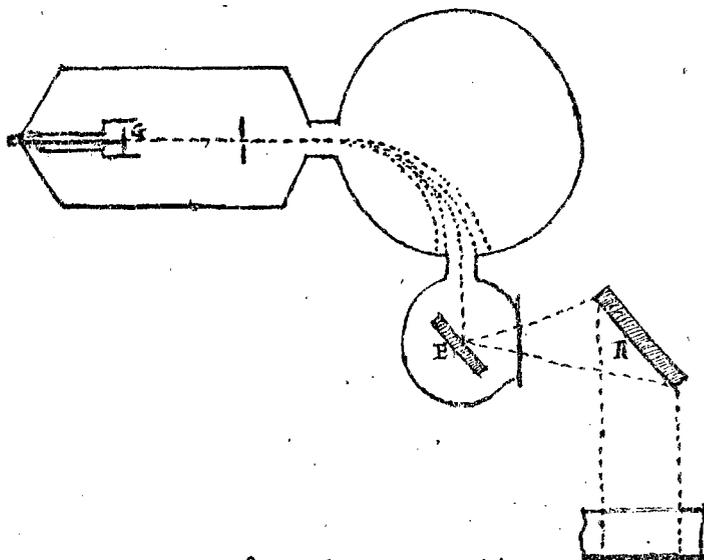
## 294 - Rayons secondaires -

M. Sagnac a découvert (1897) que lorsque des rayons X tombent sur un corps, ce dernier émet dans toutes les directions de nouveaux rayons X moins pénétrants que les rayons primaires (analogie avec la loi de Stokes).

Les recherches de M.M. Barkla, Sadler et Whiddington ont établi qu'il y a deux phénomènes superposés:

- 1° Une diffusion des rayons incidents, envoyant dans toutes les directions des rayons de même nature que les rayons primaires.
- 2° Une véritable fluorescence, caractéristique du corps frappé, et exigeant pour se produire des rayons primaires dont la dureté ne soit pas inférieure à une certaine limite qui dépend du corps.

Pour étudier les rayons caractéristiques, M. Whiddington a étalé un faisceau cathodique hétérogène par un champ magnétique; en faisant varier le champ, on amène sur l'anticathode E des



électrons ayant une vitesse plus ou moins grande de manière à produire des rayons X primaires de dureté déterminée et variable à volonté. Ces rayons tombent sur le radiateur secondaire R dont on étudie le rayonnement par une méthode d'ionisation. Ses rayons caractéristiques de R apparaissent lorsque les

rayons cathodiques atteignent une certaine vitesse  $V$ , sensiblement proportionnelle au poids atomique  $P$  de R, on a, à peu près  $V = P \cdot 10^8$ .

Ainsi, plus le poids atomique de R est élevé, plus ses rayons caractéristiques sont pénétrants.

On appelle série K la série des rayons ainsi obtenus avec les divers éléments. Cette série se manifeste à partir de l'aluminium.

Avec l'argent et les métaux de poids atomiques plus élevés on obtient, en plus de la série K, une série L dont les rayons, très absorbables pour les corps de poids atomiques voisins de celui de l'argent, deviennent de plus en plus durs quand on va de l'argent au platine.

Ses rayons X caractéristiques, ou rayons de fluorescence sont beaucoup plus homogènes que les rayons primaires.

**Rayons  $\beta$  secondaires.** — Les rayons X (comme la lumière ultra-violette) arrachent des électrons aux atomes. Ce rayonnement est particulièrement intense lorsque les rayons primaires sont précisément ceux qui excitent la fluorescence de la substance frappée.

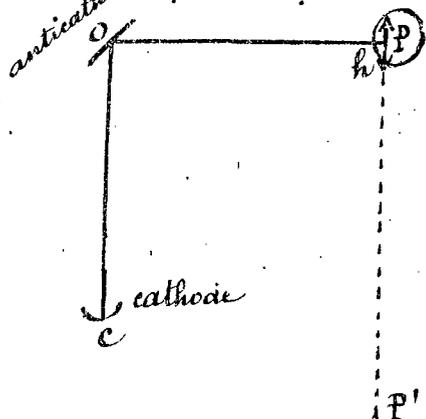
L'ionisation des gaz par les rayons X est due en majeure partie, non à un effet direct des rayons X, mais aux électrons détachés de certaines molécules; ces électrons produisent une traînée d'ions sur leur parcours.

## 295 - Nature des rayons X -

Jusqu'en 1912 on a admis la théorie de

la pulsation (Stokes, Wiechert, J-J Thomson); on pensait que les rayons X étaient uniquement constitués par l'ensemble des ondes d'accélération, ondes solitaires et incohérentes, émises lors de l'arrêt des corpuscules cathodiques sur l'anticathode.

Dans cette hypothèse soit  $CO$  la trajectoire d'un électron qui est arrêté en  $O$ ; la force électrique de la pulsation émise est parallèle à  $CO$ ; l'onde est polarisée. Tous les électrons frappant l'anticathode ayant des directions sensiblement parallèles, le rayonnement doit être totalement polarisé. Sur la normale  $OP$  à la direction du faisceau cathodique, plaçons un corps recevant les rayons X primaires, corps de faible poids atomique ne donnant pas de rayons de fluorescence et produisant seulement des rayons secondaires de diffusion. Le vecteur électrique incident  $h$  étant normal à  $PO$ , les électrons



du corps frappé sont mis en mouvement forcé suivant la direction de ce vecteur et diffusent les radiations incidentes. L'émission doit être nulle dans la direction du mouvement des électrons, et un observateur placé en  $P'$  normalement à  $OP$  dans le plan du tableau ne doit pas recevoir de rayonnement secondaire.

L'expérience a montré l'existence d'une polarisation, mais cette polarisation n'est pas totale. Ceci indique une insuffisance de la théorie: l'émission n'est pas aussi simple que le suppose la théorie de Stokes.

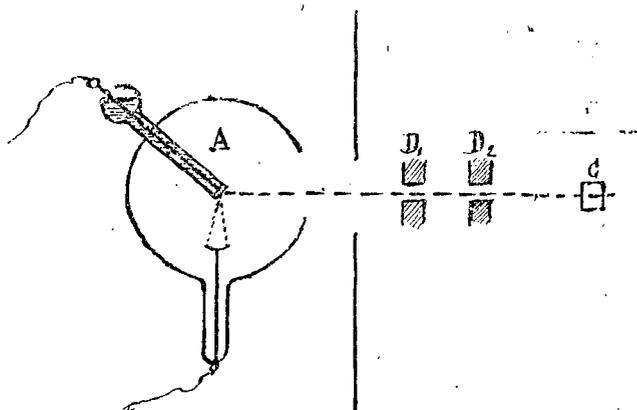
Il est certain néanmoins que la théorie de la pulsation s'applique pour une partie du rayonnement primaire, car l'arrêt des corpuscules cathodiques, a pour conséquence nécessaire la production d'ondes d'accélération, mais il peut aussi y avoir des ondes périodiques dans le rayonnement primaire, et à fortiori dans le rayonnement secondaire qui ne provient pas d'un arrêt d'électrons.

## 296 - Diffraction des rayons X par les réseaux cristallins.

L'absence des phénomènes optiques ordinaires, la grande

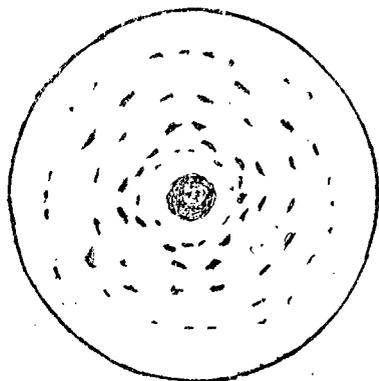
pénétrabilité des rayons X, faisaient penser que si ceux-ci étaient, au moins en partie, formés d'ondes périodiques, ces ondes devaient être de très courte longueur d'onde. Évidemment un réseau ordinaire serait trop grossier pour donner des phénomènes de diffraction observables.

Une théorie de Bravais rapporte la structure des milieux cristallins à un triple système de plans parallèles définissant des petits parallélépipèdes dont les sommets sont les noeuds du réseau. Ses distances des noeuds doivent être de l'ordre des intervalles qui séparent les molécules dans les solides, soit  $10^{-9}$ .



M. von Laue a eu l'idée que les réseaux cristallins pouvaient réaliser les conditions cherchées pour diffracter les rayons X. Il a donné la théorie des réseaux à trois dimensions. L'expérience a été réalisée avec succès par M.M. Friedrich et Knipping (1912).

L'anticathode A envoyait sur le cristal C (blende cubique) par exemple, un faisceau étroit de rayons X limité par les écrans en plomb  $D_1$  et  $D_2$ . Après une pose de plusieurs heures, on obtint sur la plaque P le résultat représenté ci-contre, qui est précisément celui que doit donner un réseau à 3 dimensions.



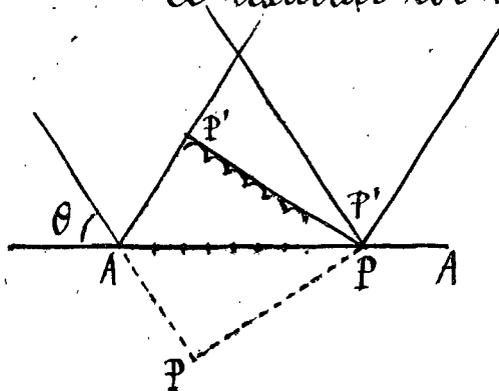
Cette expérience capitale démontrait, d'un seul coup, la périodicité des rayons X et la réalité des réseaux cristallins.

## 297 Réflexion des rayons X sur une face cristalline. —

M.M. W.H et W.L. Bragg ont montré qu'un faisceau

de rayons X se réfléchit sur une face d'un cristal.

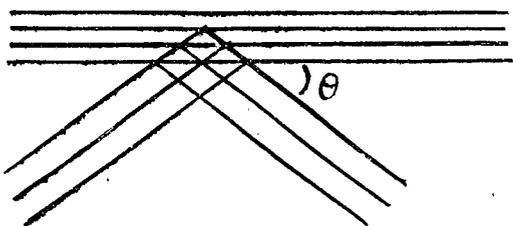
Ce résultat est une conséquence de la diffraction.



Considérons, en effet, une série de particules matérielles situées dans un plan AA; quand une onde plane PP tombe sur ce plan sous une incidence  $\theta$ , chaque particule donne naissance à une onde diffractée qui se propage dans toutes les directions. L'enveloppe de ces ondes élémentaires

(construction d'Huygens) est un plan P'P' faisant avec le plan des particules un angle égal à l'angle d'incidence; l'onde incidente se réfléchit donc suivant la loi de la réflexion régulière.

Supposons maintenant un empilement de plans régulièrement espacés, chacun étant à une distance  $d$  du plan voisin. Chaque plan réfléchit régulièrement une portion de la lumière et la superposition des ondes réfléchies par l'ensemble des plans donne des interférences.



C'est, en somme, une réflexion par des lames multiples; les effets des divers plans s'ajoutent si :

$$(405) \quad n\lambda = 2d \sin \theta$$

( $n$  nombre entier)

ils se détruisent si cette condition n'est pas remplie.

On obtient donc la réflexion d'une lumière monochromatique  $\lambda$ , pour tous les angles d'incidence  $\theta$  satisfaisant à l'équation précédente.

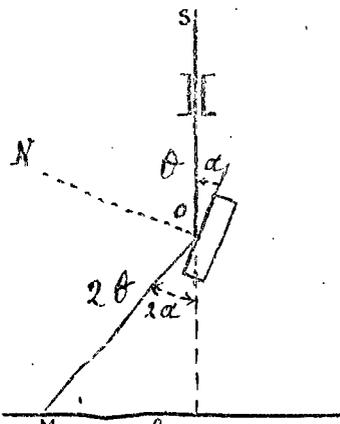
C'est ce qui se produit dans les cristaux avec l'empilement des plans réticulaires. Il y a un assez grand nombre de manières de grouper les nœuds du réseau cristallin suivant des plans parallèles, mais les plans de plus grande densité, généralement parallèles aux faces extérieures du cristal, ont une influence prépondérante.

## 298 - Spectres des rayons X. Mesure des longueurs d'onde

M.M. Bragg, M.M. Moseley et Darwin ont réalisé des

spectromètres dans lesquels les rayons réfléchis pénètrent dans une chambre d'ionisation.

M. de Broglie a obtenu des spectres magnifiques par le procédé suivant : le faisceau est limité par une fente étroite et dirigé sur un cristal tournant. La face qui sert de miroir contient l'axe de rotation parallèle à la fente et le faisceau est centré sur cet axe. Sur la plaque photographique M on concentre successivement en diverses parties, les diverses radiations. On obtient des spectres très purs formés de lignes fines, absolument semblables à ceux qu'on réalise avec un spectrographe pour les ondes lumineuses ordinaires.



La mesure des angles  $\theta$  qui correspondent à des valeurs consécutives de  $n$  dans la formule (405) permet de calculer la longueur d'onde, si l'on connaît l'équidistance  $d$  des plans réticulaires.

Connaissant le nombre des molécules dans une molécule-gramme, la masse d'une molécule et la densité du cristal, on a le nombre de molécules contenues dans un volume donné.

L'équidistance s'en déduit si l'on sait de quelle façon les molécules sont arrangées par rapport aux nœuds du réseau. Pour les cristaux cubiques du sel gemme, M.W.L. Bragg a trouvé  $d = 2,81 \cdot 10^{-8}$  cm. On peut donc calculer les longueurs d'onde : elles sont comprises entre  $10^{-7}$  et  $10^{-8}$  cm, mille fois plus petites que celles des ondes lumineuses ordinaires.

Inversement, les longueurs d'onde étant connues, on possède le moyen d'étudier la structure des cristaux.

Les périodes extrêmement courtes des rayons X nécessitent des forces de liaison considérables ; il est évident que ces rayons viennent, sinon du noyau atomique, du moins des électrons voisins du noyau.

## 299 - Loi de Moseley. -

Nous avons vu que l'étude des rayons X carac.

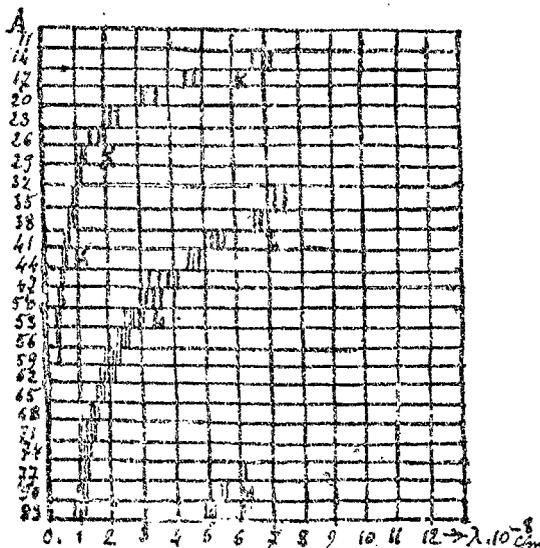
caractéristiques a révélé deux séries de radiations, appelées K et L. Pour un même élément, la radiation K est plus pénétrante que la radiation L, et toutes deux deviennent plus dures à mesure que le poids atomique augmente.

Ces radiations ne sont pas simples : on a d'abord reconnu que K est double, et on a appelé les deux lignes spectrales  $K_{\alpha}$  et  $K_{\beta}$  ( $K_{\alpha}$  est la plus intense); puis on a vu que chacune d'elles est en réalité un doublet, de sorte qu'on a, dans l'ordre des longueurs d'onde croissantes, les quatre radiations :  $K_{\alpha_1}$ ,  $K_{\alpha_2}$ ,  $K_{\beta_1}$ ,  $K_{\beta_2}$ .

La série L est composée d'un nombre variable de radiations, jusqu'à 7.

Enfin, dans les corps à gros poids atomique, M. Siegbahn a découvert une troisième série, la série M, moins pénétrante que L.

On pense que toutes ces radiations existent dans tous les éléments, mais que dans ceux qui ont un faible poids atomique, elles sont trop absorbables pour qu'on ait pu les observer.



Le graphique ci-contre représente les principales raies des trois séries; en abscisses sont portées les longueurs d'onde; l'ordonnée est le nombre atomique, c'est-à-dire le numéro d'ordre de l'élément dans la classification périodique.

Il importe de remarquer que l'état de combinaison d'un élément n'a aucune influence sur son spectre de rayons X; par exemple le laiton donne à la fois les lignes du cuivre et du zinc, non déplacées dans le spectre. Ce résultat montre bien que les rayons X proviennent de parties de l'atome qui n'entrent pas en jeu dans les combinaisons chimiques.

Moseley<sup>(1)</sup> (1913) a découvert une loi d'un haut

(1) tué aux Dardanelles en 1915, à l'âge de 28 ans.

intérêt:

La racine carrée de la fréquence d'une ligne donnée du spectre de rayons X des divers éléments est une fonction linéaire du nombre atomique.

Ses observations de Moseley ont été étendues par M. Siegbahn à la plupart des raies des trois séries K, L, M, et par M. de Broglie aux bandes d'absorption.

La loi de Moseley s'écrit:

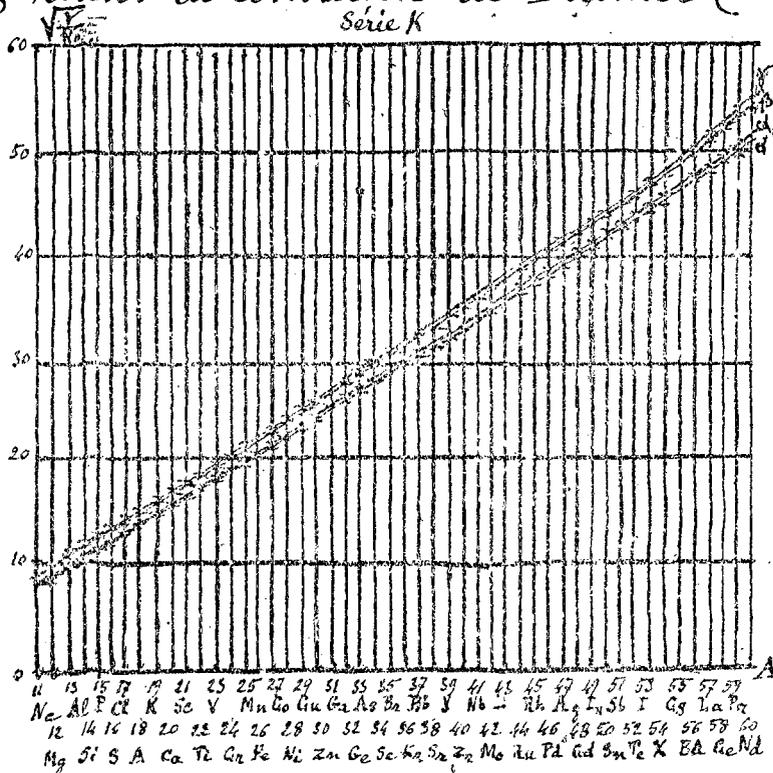
$$(406) \quad \bar{\nu} = K (A - a)^2$$

K et a étant des constantes qui dépendent de la raie spectrale envisagée. A est le nombre atomique.

Par exemple, pour la raie  $K_\alpha$  on a :

$$(407) \quad \bar{\nu} = N_0 \frac{3}{4} (A - 1)^2$$

$N_0$  étant la constante de Balmer (cours de 1<sup>re</sup> année n° 328)

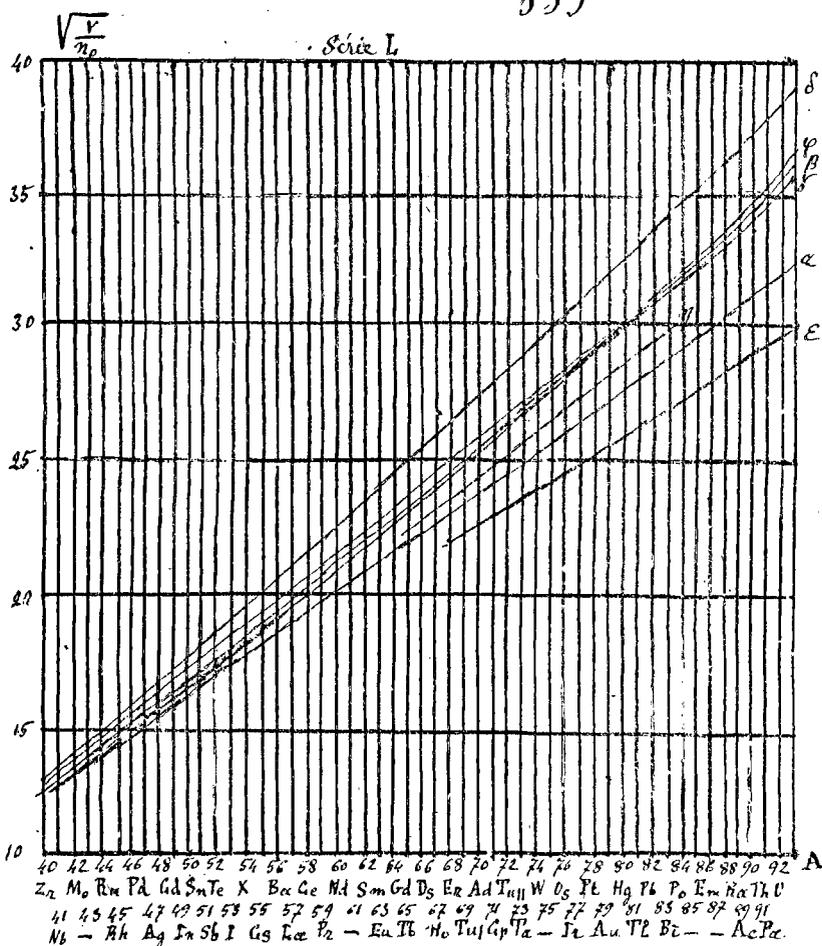


La figure ci-contre et la suivante donnent  $\sqrt{\frac{\bar{\nu}}{N_0}}$  en fonction de A pour les raies des séries K et L.

Ses éléments isotopes, qui ont même nombre atomique, ont exactement le même spectre de rayons X.

La loi de Moseley a permis de fixer les nombres atomiques de tous les éléments connus depuis le sodium (11) jusqu'à

l'uranium (92); dans cette série, il y a 6 nombres qui ne correspondent à aucun élément connu; il y a donc encore 6 éléments (ou 6 groupes d'isotopes) à découvrir :



un métal alcalin (87), un halogène (85), deux terres rares (61, 72) et deux métaux homologues du manganèse (43, 75).

La radioactivité et les rayons X nous obligent à conclure que la grandeur fondamentale dont dépendent les propriétés physiques et chimiques (sauf la dégradation radioactive) de la matière est, non le poids atomique, mais

le nombre atomique. à un même nombre ne peuvent correspondre que des éléments isotopes ayant les mêmes propriétés, et à deux nombres différents ne peuvent correspondre que des éléments chimiquement différents, même s'ils ont des poids atomiques identiques.

Nous avons déjà dit que le nombre atomique est proportionnel à la charge positive du noyau atomique.

### 300 - Les rayons $\gamma$ -

Les rayons  $\gamma$  sont des rayons X caractéristiques du corps qui les émet, mais de plus courte longueur d'onde encore que les rayons de la série K.

La plus petite longueur d'onde mesurée est  $0,071 \cdot 10^{-8}$  (Radium C), mais Sir Rutherford a conclu, de mesures d'absorption, qu'il y a des radiations plus courtes encore, jusqu'à  $0,007 \cdot 10^{-8}$ ; les cristaux sont trop grossiers pour les diffracter. Ils doivent être émis par l'action de corpuscules

ayant traversé des différences de potentiel de plusieurs millions de volts ; ils proviennent de l'intérieur du noyau atomique.

### 301 - Justification de la théorie des quanta -

Nous avons dit que, dès les premières recherches sur les rayons caractéristiques, il a été reconnu que les radiations de chaque série n'apparaissent que si les corpuscules cathodiques générateurs des rayons X ont atteint une vitesse sensiblement proportionnelle au poids atomique du corps qu'ils frappent.

Il faut corriger cette loi et remplacer la proportionnalité au poids atomique par la proportionnalité au nombre atomique. La loi se vérifie alors avec plus d'exactitude.

Cette loi, combinée avec celle de Moseley (où  $\lambda$  est petit par rapport à  $A$ ), montre que la vitesse minimum des corpuscules est proportionnelle à  $\sqrt{\nu}$  ou que l'énergie minimum d'un corpuscule est proportionnelle à  $\nu$ .

Appliquons la théorie de Planck. Quand un oscillateur produit des ondes, la quantité d'énergie émise est un multiple de  $h\nu$ ,  $h$  étant la constante d'action (cours de 1<sup>re</sup> année n° 361).

Il faut donc, pour qu'un corpuscule cathodique engendre une onde en mettant un autre électron en mouvement, qu'il ait lui-même une énergie au moins égale à  $h\nu$ .

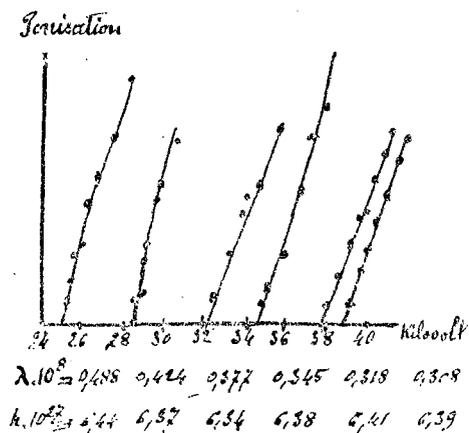
$$\frac{1}{2} m V_{\min}^2 = h\nu$$

ou en désignant par  $\psi$  la chute cathodique

$$(408) \quad \frac{1}{2} m V_{\min}^2 = e\psi_{\min} = h\nu$$

Nous obtenons donc une relation entre la chute cathodique minimum et la fréquence de la radiation X émise par l'anticathode. C'est bien la forme de la loi énoncée plus haut, il reste à savoir si le facteur de proportionnalité de cette loi est effectivement la constante

de Planck.



M. M. Duane et Hunt ont mesuré la différence de potentiel cathodique et l'ionisation produite par plusieurs des radiations X monochromatiques. Ses courbes ci-contre représentent les résultats.

On constate que l'ionisation, c'est-à-dire l'intensité, est une fonction linéaire du champ générateur des rayons cathodiques. En prolongeant les droites jusqu'à l'axe des abscisses on a les valeurs des différences de po-

tentiel pour l'intensité nulle, c'est-à-dire les valeurs de  $\psi_{\text{min}}$ .

L'équation permet alors de calculer  $h$ .

Les résultats obtenus avec les diverses radiations concordent tous et donnent précisément la constante de Planck.

Prenons maintenant l'équation en sens inverse  $h\nu = e\psi = \frac{1}{2}mV^2$ , dans le sens d'une transformation de lumière en rayons corpusculaires.  $V$  est la vitesse maximum des corpuscules,  $\psi$  est le potentiel maximum auquel se charge le corps qui les émet. L'équation s'applique aux rayons corpusculaires secondaires des rayons X; elle s'applique aussi à l'effet photo-électrique donné par la lumière visible ou ultra-violette.

Donnant à  $\nu$  les valeurs des fréquences des radiations visibles, on a  $\psi = 2$  à 3 volts; ce sont précisément les valeurs du potentiel auquel se charge un corps présentant l'effet photo-électrique (n° 257).

La théorie des quanta se trouve donc vérifiée dans d'énormes limites, depuis la lumière visible jusqu'aux rayons X.

### §. 3. Absorption et dispersion de la lumière.

Dans la matière, la lumière ne se propage pas avec la même vitesse que dans le vide, et la réfraction sépare les diverses radiations; c'est la dispersion. Nous devons rechercher les causes de ces phénomènes: nous allons montrer que l'absorption est due à la présence, dans la matière, de particules électrisées, et que l'absorption, même sélective, c'est-à-dire limitée à quelques radiations, entraîne la dispersion des autres radiations sur une plus ou moins grande étendue du spectre.

Le champ électromagnétique d'une onde lumineuse qui pénètre dans la matière exerce sur les électrons des forces périodiques, par l'intermédiaire desquelles l'énergie du rayonnement se transforme d'abord en énergie de mouvement des électrons, puis par l'intermédiaire des chocs, ou plutôt des actions mutuelles, en rayonnement secondaire (lui-même partiellement ou totalement absorbé) et en énergie calorifique.

Nous devons considérer deux cas; celui des diélectriques dans lesquels les charges peuvent, seulement, osciller, et celui des conducteurs qui contiennent des charges libres.

#### 302. Théorie de la dispersion dans les diélectriques.

L'absorption sélective des radiations de période égale à la période propre d'oscillation d'une particule électrisée se comprend immédiatement: c'est un effet de résonance.

Un mouvement périodique simple, non amorti, est représenté par les équations:

$$(409) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} + f x = 0 \\ \text{période } \tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{f}} \end{array} \right.$$

Supposons qu'une particule de charge  $e$ , possédant un mouvement propre d'oscillation, soit rencontrée par une onde lumineuse; la force électrique  $h_0$  de l'onde va agir sur la particule, et les équations du mouvement seront les suivantes:

$$(410) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} + f x - e h_x = 0 \\ \text{-----} \end{array} \right.$$

Le train d'ondes va entretenir le mouvement, et si  $h$  a précisément pour période  $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{f}}$ , l'amplitude augmentera.

Mais ces équations conduiraient au résultat suivant: la particule absorberait les ondes lumineuses possédant la même période que celle de sa vibration propre, à l'exclusion des périodes même les plus voisines: les raies

spectrales seraient infiniment fines, ce qui est toujours inexact. Nous avons vu, dans le cours de 1<sup>ère</sup> année, qu'il y a des causes d'élargissement des raies, l'effet Doppler, l'agitation thermique, et à ces causes il faut encore ajouter la perte d'énergie par rayonnements qui constitue un véritable amortissement. Pour tenir compte de ces faits, nous allons supposer qu'il s'exerce sur la particule une force comparable à un frottement, proportionnelle à la vitesse. Ce n'est évidemment pas l'expression exacte de la réalité; cependant, les résultats auxquels nous aboutirons donneront une représentation, bien vérifiée par l'expérience du lien qui existe entre l'absorption et la dispersion.

Nous écrirons donc :

$$(411) \quad \left\{ m \frac{d^2 x}{dt^2} + g \frac{dx}{dt} + fx - eh_x = 0 \right.$$

Il y a certainement, dans le corps envisagé, de nombreuses particules oscillantes; nous appellerons particules d'espèce  $p$  toutes celles pour lesquelles les valeurs de  $m$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  sont les mêmes et nous affecterons ces grandeurs de l'indice  $p$ : si ce sont des électrons, les masses  $m_p$  et les charges  $e_p$  sont toujours les mêmes, les  $f_p$  et  $g_p$  étant différents, pour les électrons qui n'ont ni la même période, ni le même amortissement; si ce sont des ions, toutes les grandeurs peuvent varier d'une espèce à l'autre.

Nous évaluerons toutes les grandeurs électriques en unités électrostatiques ( $e$  électrostatique,  $h$  électrostatique, densité de courant,  $u$  électrostatique).

Expression de la densité de courant. — La composante  $u_x$  de la densité de courant se compose de deux parties :

1<sup>o</sup> La densité  $u_{0x}$  qui provient de la variation du champ  $h$  dans l'espace vide; elle a pour valeur  $u_{0x} = \frac{1}{4\pi} \frac{dh_x}{dt}$

2<sup>o</sup> La somme des densités  $u_{px}$  dues au déplacement des diverses espèces de particules chargées. Pour l'espèce  $p$ , si l'on désigne par  $N_p$  le nombre de ces particules par unité de volume, il passe à travers l'unité de section, normalement à  $ox$ , pendant le temps  $dt$ , une charge  $e_p N_p dx_p$ ; par suite, il passe dans l'unité de temps :

$$u_{px} = e_p N_p \frac{dx_p}{dt}$$

de sorte que l'expression de la densité totale de courant est :

$$(412) \quad \left\{ u_x = \frac{1}{4\pi} \frac{dh_x}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^{p=n} e_p N_p x_p \right.$$

Soit  $\tau$  la période de la lumière, la force électrique  $h$  de période  $\tau$ , impose un mouvement de période  $\tau$  aux particules; nous pouvons poser:

$$(413) \quad \begin{cases} x_p = A_p \exp. \left( i \frac{t}{\theta} \right) \quad \theta \text{ étant la période réduite } \frac{\tau}{2\pi}. \end{cases}$$

Les  $A_p$  sont des fonctions du lieu, mais ne renferment plus le temps  $t$ . Bien entendu les  $x_p$  sont les parties réelles des expressions complexes (413), les imaginaires n'intervenant que comme mode de calcul, (comme au n: 241).

On a: 
$$\frac{\partial x_p}{\partial t} = \frac{i}{\theta} x_p; \quad \frac{\partial^2 x_p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\theta^2} x_p$$

de sorte que les équations (411) s'écrivent

$$(414) \quad x_p \left( f_p + \frac{g_p i}{\theta} - \frac{m_p}{\theta^2} \right) = e_p h_x$$

et les équations (412) deviennent:

$$(415) \quad u_x = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial h_x}{\partial t} \left[ 1 + \sum \frac{4\pi e_p^2 N_p}{f_p + \frac{g_p i}{\theta} - \frac{m_p}{\theta^2}} \right]$$

ou:

$$(416) \quad \left\{ u_x = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial h_x}{\partial t} \left[ 1 + \sum \frac{\eta_p N_p}{1 + \frac{i g_p}{\theta f_p} - \frac{m_p}{\theta^2}} \right] \right.$$

en posant (416): 
$$\eta_p = \frac{4\pi e_p^2}{f_p}; \quad \theta_p^1 = \frac{g_p}{f_p}; \quad \theta_p^2 = \frac{m_p}{f_p}$$

Constante diélectrique complexe. — D'après les équations (415) nous avons:

$$u_x = \frac{K'}{4\pi} \frac{\partial h_x}{\partial t}$$

$K'$  étant la constante diélectrique complexe, fonction de la période  $\tau = 2\pi\theta$  de la radiation incidente; d'après la relation:

$$(417) \quad K' = 1 + \sum \frac{\eta_p N_p}{1 + \frac{i g_p}{\theta f_p} - \frac{m_p}{\theta^2}}$$

Si  $\theta = \infty$ ,  $K'$  devient réel et se confond avec la constante diélectrique envisagée en électrostatique; celle-ci s'écrit:

$$(418) \quad K = 1 + \sum \epsilon_p \text{ en posant } \epsilon_p = N_p \eta_p$$

Dans (417) 1 est la constante diélectrique du vide,  $\epsilon_p$  est la constante diélectrique de l'espèce  $p$  d'ions. La constante diélectrique résultante est la somme de la constante du vide et de celle de toutes les espèces d'ions.

Indice de réfraction et coefficient d'extinction. — Nous avons vu au N° 241 qu'une constante diélectrique complexe signifie qu'il y a absorption et qu'on a (formule 364):

$$K' = n^2 (1 - i\kappa)^2$$

Séparant alors, dans (417) les parties réelles et les parties imaginaires, nous obtenons les équations qui déterminent, pour la lumière de période  $2\pi\theta$ , l'indice de réfraction  $n$  et le coefficient d'extinction  $\kappa$ ,

$$(419) \quad \begin{cases} n^2(1 - \kappa^2) = 1 + \sum \frac{\epsilon_p \theta^2 (\theta^2 - \theta_{op}^2)}{(\theta^2 - \theta_{op}^2)^2 + \theta^2 \theta_p'^2} \\ 2n^2\kappa = \sum \frac{\epsilon_p \theta^3 \theta_p'}{(\theta^2 - \theta_{op}^2)^2 + \theta^2 \theta_p'^2} \end{cases}$$

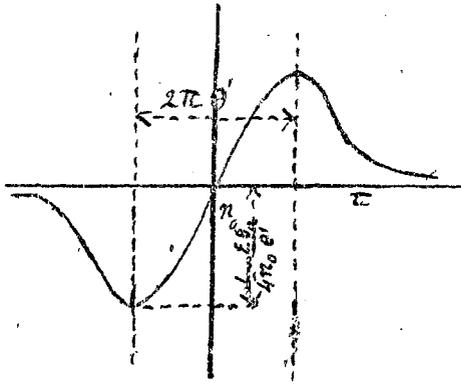
La théorie électronique pure montre donc nettement la raison de la divergence apparente (n° 226) entre l'expérience et le résultat  $n^2 = K$  déduit de la théorie de Maxwell. Dans cette formule,  $K$  est la constante électrostatique  $1 + \sum \epsilon_p$ ; en tenant compte des vibrations propres des ions et électrons, la formule  $n^2 = K$  est remplacée par le groupe des équations (419). La formule de Maxwell est cependant une bonne approximation pour les périodes  $\theta$  grandes par rapport aux périodes  $\theta_0$  des vibrations propres des ions, et grandes par rapport aux  $\theta'$  largeur des bandes d'absorption. C'est bien ce qu'on a constaté (n° 226).

### 303. — Comparaison de la théorie avec l'expérience.

Le carré  $\kappa^2$  du coefficient d'extinction étant en général, même au milieu d'une bande d'absorption ( $\theta = \theta_p$ ) négligeable devant l'unité, la première des équations (419) permet de tracer la courbe théorique représentant la variation de  $n$  au près et à l'intérieur d'une bande d'absorption.

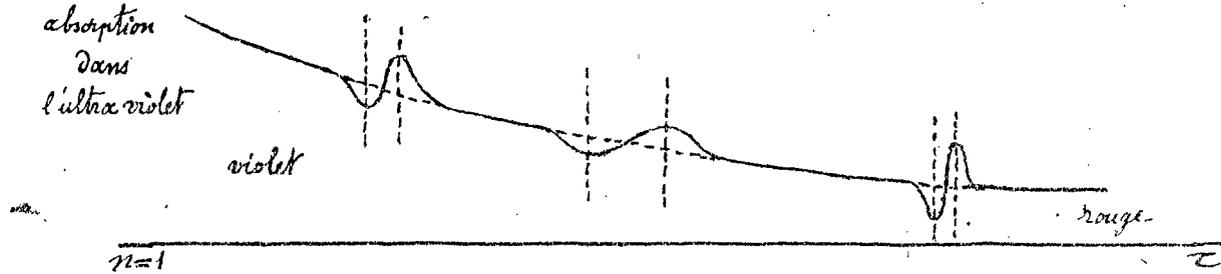
Si la bande n'est pas très large (par exemple si elle occupe seulement quelques  $\mu$  dans l'échelle des longueurs d'onde), les termes dus aux autres espèces de particules peuvent être considérés comme constants dans l'intervalle envisagé, et l'on a très sensiblement:

$$(n_0 \text{ valeur moyenne de } n). \quad 2n_0 \Delta n = \frac{\epsilon_p \theta^2 (\theta^2 - \theta_{op}^2)}{(\theta^2 - \theta_{op}^2)^2 + \theta^2 \theta_p'^2}$$



La perturbation en apportée par les particules  $p$  dans la valeur de l'indice de réfraction est représentée par la courbe ci-contre. L'indice passe par un maximum et un minimum  $n_0 + \frac{1}{\epsilon_p} \frac{\epsilon_p \theta_{010}}{\theta_p}$ , pratiquement distants de  $2\pi \theta'$  dans l'échelle des périodes;  $2\pi \theta'$  est la largeur de la bande.

Supposons maintenant un corps très absorbant dans l'ultra-violet et ayant quelques bandes dans le spectre visible; la courbe de  $n$  en fonction de  $\tau = 2\pi \vartheta$  (ou en fonction de  $\lambda$ ) sera de la forme suivante.



Lois de la dispersion. — 1°) À l'extérieur d'une bande d'absorption l'indice de réfraction décroît quand la longueur d'onde croît.  
2°) À l'intérieur d'une bande l'indice croît, en même temps que la longueur d'onde.

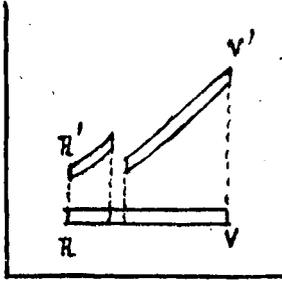
On donne souvent au premier mode de dispersion normale, et au second, le nom de dispersion anormale. Ce dernier terme est impropre, car ce n'est pas une anomalie mais la loi générale dans toute région où l'absorption passe par un maximum. Ailleurs on avait cru à une anomalie parce que l'effet ne s'observe pas souvent, pour la raison que la lumière étant absorbée on ne voit plus rien.

non exigé

Le Roux (1862) a découvert la dispersion dite anormale, en observant que dans un prisme de vapeur d'iode le rouge est plus dévié que le bleu. L'effet est dû à une large bande d'absorption qui recouvre le spectre visible mais qui, étant peu intense, laisse passer une quantité de lumière suffisante.

La méthode des prismes croisés (Kranolt) permet d'observer la dispersion en sens contraire du sens habituel par des régions absorbées. À l'aide d'un prisme ou d'un réseau on produit un premier spectre horizontal RV très étroit qu'on fait tomber sur la fente, placée horizontalement, d'un spectroscopie contenant un

prisme à arête horizontale; ce second prisme dévie verticalement les radiations et l'on obtient un spectre oblique R'V' courbe. Si le deuxième prisme est formé de la substance à étudier, possédant par exemple, une bande d'absorption, le spectre obtenu est formé de deux parties disjointes, séparées par la région sombre qui correspond à la bande d'absorption de la substance.



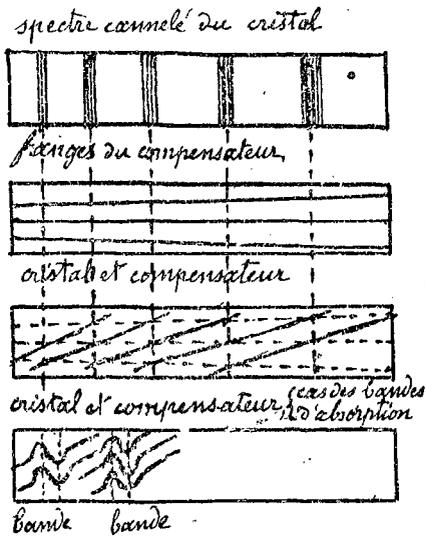
De part et d'autre d'une raie d'absorption intense et fine ( $\theta$  très petits) la variation de l'indice est énorme; c'est le cas des vapeurs métalliques. Ce phénomène a été observé par Henri Becquerel par la méthode des prismes croisés. Le prisme de vapeur de sodium était obtenu simplement en coupant la flamme d'un brûleur par une gouttière en platine à arête horizontale, et contenant du chlorure de sodium fondu.

Avec les corps isotropes, il est évidemment impossible d'observer les variations de l'indice au milieu des bandes quand celles-ci ne sont pas très peu intenses. Avec les cristaux polychroïques il est possible au contraire de suivre les variations de  $n$  au milieu des bandes, même très intenses. La méthode est la suivante (Jean Becquerel).

Le spectre d'un cristal polychroïque varie selon la direction du vecteur électrique de l'onde. Dans le cas des cristaux uniaxes, il y a deux spectres: le spectre ordinaire correspondant aux vecteurs normaux à l'axe optique et le spectre extraordinaire donné par les vecteurs parallèles à l'axe; beaucoup de bandes n'appartiennent qu'à l'un des deux spectres; ce sont celles qu'il faut choisir pour l'observation.

Prenons une lame de cristal, taillée parallèlement à l'axe optique; plaçons horizontalement la direction de l'axe; faisons passer dans la lame normalement à ses faces, un faisceau de lumière blanche polarisée à  $45^\circ$ ; puis faisons tomber ce faisceau, après sa sortie de la lame sur la fente verticale d'un spectroscopie à réseau. Plaçons enfin derrière la fente un nicol croisé avec le premier. Nous observerons un spectre cannelé de Fizeau et Foucault (extinction des radiations pour lesquelles  $\frac{t(n_o - n_e)}{\lambda} = K$  ( $t$  étant l'épaisseur de la lame)).

Disposons sur la fente même du spectroscopie une lame de quartz parallèle à l'axe, taillée en biseau, donnant une épaisseur régulièrement croissante le long de la fente (ou un compensateur de Babinet). En l'absence du cristal, ce compensateur donne dans le spectre une frange centrale horizontale, de part et d'autre de laquelle s'observent des franges légèrement inclinées.



Plaçons maintenant à la fois le cristal et le compensateur ; les cannelures verticales et les franges horizontales se combinent en donnant des franges obliques.

Supposons qu'un seul des deux spectres, le spectre ordinaire par exemple, présente une bande d'absorption ; l'indice  $n$ , seul va subir une perturbation ; à la traversée de la bande les franges vont dessiner exactement, en coordonnées obliques, la courbe de  $n$  en fonction de  $\lambda$ . Il n'y a jamais extinction dans la région de la bande, puisque la lumière de l'autre spectre n'est pas absorbée.

Ce procédé, appliqué aux cristaux de terres rares a permis de vérifier la loi théorique de la dispersion, de mesurer  $\delta n$ ,  $\theta$ ,  $\theta'$ , de calculer  $\epsilon$  et par suite le nombre  $N$  de particules contribuant à former une même bande ; le nombre de centres absorbants a toujours été trouvé extrêmement petit par rapport au nombre des molécules. Les mesures de  $\theta'$  jusqu'à la température de  $14^\circ$  absolus ont démontré que la largeur des bandes varie proportionnellement à la racine carrée de la température absolue, ce qui permet d'attribuer l'élargissement des raies à l'agitation thermique.

Le fait que dans les corps transparents pour les radiations visibles l'indice diminue du violet au rouge, est dû à ce que l'absorption a lieu dans l'ultra-violet et dans l'infra-rouge (plus ou, moins loin) ; les deux régions d'absorption contribuent à donner une dispersion dans le même sens.

L'étude de la dispersion de la fluorine a permis à Drude de calculer que, si l'absorption dans l'ultra-violet est due à des électrons ( $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$  un. électrostatique,  $m = 0,89 \cdot 10^{-27}$ ) il y a 4 électrons absorbants par molécule <sup>(1)</sup>, 4 est précisément la somme des valences des atomes de  $\text{CaF}_2$ . Cette conclusion a été étendue par M. Cheneveau à de nombreux corps en solution. Il est donc très probable que l'absorption principale, dans l'ultra-violet, est due aux électrons de valence, à ceux qui forment le trait d'union entre les atomes dans une molécule.

D'après Drude l'absorption dans l'infra-rouge serait due à des ions positifs.

<sup>(1)</sup> Pour l'absorption intense dans l'ultra-violet, toutes les molécules interviennent ; nous avons vu au contraire que pour les bandes de moindre importance disséminées dans le spectre, les centres vibrants sont très réfrés.

## 304. Dispersion dans les métaux.

Nous verrons bientôt qu'on a été conduit à considérer la conductibilité métallique comme due à des électrons libres. Pour déterminer leur influence sur une onde lumineuse, nous n'avons qu'à faire  $f=0$  dans les termes relatifs à ces électrons; nous supposons d'ailleurs qu'il n'y a qu'une seule espèce de particules conductrices, les électrons, et que pour tous le coefficient d'amortissement  $g$  est le même.

Admettant qu'il y a aussi des particules liées, comme dans les diélectriques, l'expression de la densité de courant (415) devient:

$$(420) \quad u_{\infty} = \frac{1}{4\pi} \frac{d h_{\infty}}{dt} \left[ 1 + \sum \frac{4\pi e_p^2 N_p}{f_p + \frac{g_p}{\theta} - \frac{m_p}{\theta^2}} + \frac{4\pi e^2 N}{\frac{g}{\theta} - \frac{m}{\theta^2}} \right].$$

Le terme entre crochets représente la constante complexe  $K'$  et les formules d'absorption et de dispersion (419) sont:

$$(421) \quad \left\{ \begin{array}{l} n^2 (1-x^2) = 1 + \sum \frac{\epsilon_p \theta^2 (\theta^2 - \theta_{op}^2)}{(\theta^2 - \theta_{op}^2)^2 + \theta^2 \theta_p'^2} - \frac{\epsilon \theta^2 m}{m^2 + g^2 \theta^2} \\ 2n^2 x = \sum \frac{\epsilon_p \theta^3 \theta_p'}{(\theta^2 - \theta_{op}^2)^2 + \theta^2 \theta_p'^2} + \frac{\epsilon \theta^3 g}{m^2 + g^2 \theta^2} \end{array} \right.$$

en posant  $\epsilon = 4\pi N e^2$ .

Dans l'expression de  $2n^2 x$  la première terme est d'ailleurs négligeable devant le second, l'absorption par les électrons conducteurs étant beaucoup plus considérable que l'absorption par les particules oscillantes.

On s'explique encore ici pourquoi les formules (365) (n° 241) doivent être modifiées, ou plutôt pourquoi dans ces formules  $K$  et  $\gamma$  ne représentent pas la constante électrostatique et la conductibilité ohmique.  $x$  peut être supérieur à 1 puisque le second membre de la première équation (421) peut être négatif, ce qui arrive si  $\epsilon$  et par suite  $N$  sont grands.

Supposons une période  $\theta$  grande, la seconde des formules (421) donne:

$$(422) \quad n^2 x = 2\pi \theta \frac{N e^2}{g} = \gamma \tau \quad \text{en posant} \quad \gamma = \frac{N e^2}{g}.$$

$\gamma$  est la conductivité ohmique (en unités électrostatiques). En effet le terme  $g \frac{dx}{dt}$  représente une force; si cette force est une dyne, on a  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{g}$ ;  $\frac{1}{g}$  est donc la vitesse moyenne avec laquelle le centre se déplace sous l'action d'une force égale à 1. C'est la mobilité de l'électron. La quantité d'électricité traversant l'unité de surface en une seconde sous l'action de la force électrique  $h$  est alors:

$$Ne. eh. \frac{1}{g} = \frac{Ne^2}{g} h = \gamma h.$$

$\gamma$  est bien la conductibilité.

La formule (422) est donc identique à celle que nous avons déduite de la théorie primitive. Nous avons vu qu'elle est vérifiée pour l'infra-rouge. Pour des longueurs d'onde plus courtes, la seconde formule (421) montre que  $n^2 x < \gamma \tau$ , ce qui est conforme à l'expérience.

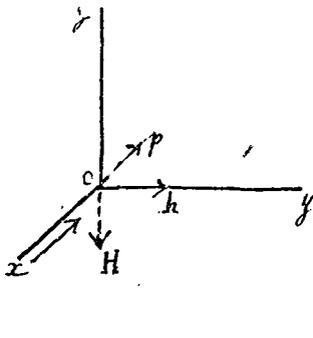
### 305. — La pression de la lumière.

Imaginons une lame métallique conductrice recevant sur une de ses faces un train d'ondes lumineuses (ou électromagnétiques). Nous supposons que ces ondes tombent normalement sur la surface. Le plus d'onde (parallèle à la surface) contient un champ électrique et un champ magnétique perpendiculaires l'un sur l'autre. Le champ électrique donne lieu, dans la couche superficielle de la lame, à un mouvement d'ensemble des électrons, c'est-à-dire à une nappe de courant.

Cette nappe de courant subit l'action du champ magnétique de l'onde; sur chaque électron mis en mouvement dans la direction de la force électrique (en sens opposé du sens de la force puisque les électrons sont négatifs), s'exerce la force électrodynamique normale à la direction de la vitesse, c'est-à-dire normale au champ électrique et aussi normale au champ magnétique: cette force est donc parallèle à la direction de la propagation et les règles connues montrent qu'elle s'exerce dans le sens même de la propagation. Autrement dit, un électron est mis en mouvement par la force électrique de l'onde, le champ magnétique de l'onde exerce une action dans le sens de la propagation: l'électron est poussé suivant la direction et dans le sens où se propage la radiation. Toutes les petites forces ainsi produites dans la lame sont transmises au métal et il en résulte une pression exercée sur le conducteur.

non exigé

Prends le plan de la surface pour plan des  $yz$ , la propagation des ondes ayant lieu suivant  $ox$ , dans le sens des  $ox$  négatifs; prends l'axe des  $y$  parallèle à la force électrique de l'onde, et l'axe des  $z$  parallèle à la force magnétique.



Nous supposons le corps infiniment conducteur (réflecteur intégral). Sur la surface, la force électrique s'annule, et d'après les conditions aux limites, il doit en être de même à l'extérieur du corps, infiniment près de la surface. Cela revient à dire que la réflexion est totale et qu'il

Il y a réflexion avec changement de signe, la force électrique de l'onde réfléchie annulant celle de l'onde incidente. Soit  $u$  la densité de courant à l'intérieur du métal, on a :

$$(423) \quad 4\pi \vec{u} = \text{curl. } \vec{H} \quad \text{ou} \quad 4\pi u = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (u \text{ électromagnétique}).$$

$dS$  étant un élément de surface du corps, considérons à l'intérieur de ce corps un cylindre de base  $dS$ , dont les génératrices sont parallèles à  $ox$ . Sur l'élément de volume  $S dx$ , agit la force :

$$dF = S dx u H = -\frac{S dx}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial x} H = -\frac{S dx}{8\pi} \frac{\partial H^2}{\partial x}.$$

La force agissant sur le cylindre est :

$$(424) \quad F = -\frac{S}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial H^2}{\partial x} dx = \frac{S}{8\pi} H^2.$$

Il s'exerce donc sur la surface une pression  $p$  :

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{8\pi} H^2.$$

La force magnétique  $H$  est le double de la force magnétique  $H_i$  de l'onde incidente, puisqu'il y a un ventre de la force magnétique à la surface; on a donc :

$$p = \frac{H_i^2}{2\pi} = 2w$$

$w$  étant l'énergie par unité de volume de l'onde incidente. La pression est égale à la densité de l'énergie présente dans le milieu (énergie incidente, augmentée de l'énergie réfléchie...)

## Chapitre IV.

# Magnéto-optique et magnétisme.

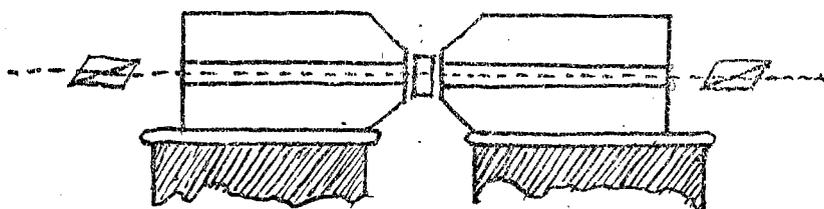
## §1. Polarisation rotatoire magnétique.

### 306. Découverte de Faraday.

Faraday a découvert en 1845 un phénomène qu'il a appelé illumination des lignes de force magnétiques.

Un corps isotrope est placé entre les pièces polaires d'un électro-aimant. Un faisceau de lumière, polarisée par un nicol, traverse le

corps dans la direction des lignes de force magnétiques. Avant d'établir le champ, on éteint par un nicol analyseur la lumière transmise par le corps. Dès que le champ est produit, on constate que



la lumière réapparaît à travers l'analyseur, et qu'il faut faire tourner celui-ci d'un certain angle pour retrouver l'extinction.

Cette extinction n'est d'ailleurs totale qu'avec

une lumière monochromatique, car la rotation du plan de polarisation dans le champ magnétique dépend de la période lumineuse.

Cet effet pourrait ainsi se présenter avec les mêmes caractères que la rotation naturelle de certaines substances; il est cependant essentiellement différent. La rotation naturelle a toujours le même sens par rapport à l'observateur (1<sup>re</sup> année n° 306), tandis que la rotation magnétique d'une substance a toujours le même sens par rapport au champ: on peut donc amplifier la rotation magnétique par des réflexions successives; la rotation est proportionnelle au trajet parcouru par la lumière dans la substance.

Pour toutes les substances étudiées par Faraday, le sens de la rotation s'est trouvé être celui du courant qui parcourt les bobines de l'électro-aimant; nous commencerons d'appeler ce sens le sens positif des rotations magnétiques.



Mais Edmond Becquerel a découvert que les solutions des sels de fer donnent une rotation de sens opposé, sens négatif; les observations ultérieures

ont montré que les rotations des corps paramagnétiques sont, le plus part du temps, de sens négatif.

### 307. Loi de Verdet. — Mesure de la constante de Verdet.

La rotation du plan de polarisation d'un rayon monochromatique  $\lambda$  qui effectue un parcours  $l$  dans une substance placée dans un champ magnétique  $H$  est donnée par la relation:

$$\alpha_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \int H dl \cos(H, dl).$$

La constante  $\alpha_{\lambda}$ , qui exprime la rotation pour une épaisseur de 1<sup>m</sup> dans un champ uniforme de 1 gauss parallèle au rayon, est appelée

constante de Verdet. Pour une même substance elle dépend de la longueur d'onde et de la température.

La mesure des rotations magnétiques se fait par les mêmes méthodes que pour la rotation naturelle (1<sup>ère</sup> année N° 307).

non exigé

Et ces méthodes on peut ajouter celle du compensateur pour lumière circulaire, très commode pour révéler des rotations variant rapidement avec la longueur d'onde. Une lame de quartz rotatoire (normale à l'axe par conséquent) taillée en biseau est placée entre deux nicols. L'arête du biseau étant normale à la fente d'un spectroscopie, on place le quartz contre la fente, ou l'on projette son image sur la fente; on observe dans le spectre des franges noires longitudinales. Si l'on interpose entre l'analyseur et le polariseur un corps doué de pouvoir rotatoire (naturel ou magnétique), la rotation due à ce corps s'ajoute algébriquement à celle qui est due au compensateur et les franges sont déplacées; le déplacement pour chaque longueur d'onde, mesure la rotation pour la radiation correspondante, la distance de deux franges consécutives correspondant à une rotation égale à  $\pi$ .

La méthode employée par Henri Becquerel pour la mesure des rotations en unités absolues est la suivante.

Un long tube (2 à 3<sup>m</sup>) fermé par des glaces travaillées et plein de sulfure de carbone est placé dans l'axe d'une bobine (0<sup>m</sup>50 de longueur). On connaît le nombre  $N$  de tours du fil; on mesure l'intensité  $i$  du courant et la rotation  $\omega_D$  pour la lumière jaune du sodium.

Le tube étant très long et le rayon du solénoïde n'étant pas trop grand, on a pratiquement:

$$\int_0^l H dl = 4\pi Ni.$$

Donc:

$$\alpha_D = \frac{\omega_D}{4\pi Ni}.$$

A 0° pour le sulfure de carbone  $\alpha_D = 0,0434$ .

Bichat a donné la formule suivante:

$$\alpha_D = 0,0434 (1 - 0,00164 \theta - 0,000014 \theta^2) \quad \theta \text{ temp. centigr.}$$

Cette constante étant connue, on peut utiliser la rotation à travers une colonne de sulfure de carbone pour mesurer l'intensité absolue d'un champ magnétique, ou l'intensité absolue du courant traversant une bobine.

Pouvoirs rotatoires magnétiques de quelques corps. —

Le tableau suivant donne les valeurs des pouvoirs rotatoires magnétiques  $\alpha$  de quelques corps en prenant pour unité la constante du sulfure de carbone.

	Pouvoir rotatoire magnétique $\omega$	Indice de réfraction $n$	$\frac{\omega}{n^2(n^2-1)}$
Lumière jaune (raies D).			
Azote	0,000164	1,0002977	0,274
Eau	0,308	1,334	0,222
Sulfure de carbone	1,000	1,625	0,231
Flint	1,530	1,760	0,234
Phosphore	3,120	2,074	0,220
Bleue (ZnS)	5,295	2,369	0,204
Lumière rouge			
Sulfure de carbone	1,000	1,612	0,240
Sélénium	10,960	2,655	0,255
Oxyde de cuivre cristallisé	14,060	2,849	0,241

Henri Becquerel, par des considérations théoriques, avait été conduit à penser que  $\frac{\omega}{n^2(n^2-1)}$  devait être à peu près constant, pour une même radiation. La dernière colonne du tableau montre que ce rapport varie peu, même quand les pouvoirs rotatoires sont extrêmement différents.

Le pouvoir rotatoire magnétique des gaz a été découvert et étudié par Henri Becquerel.

non exigé

### 308. Pouvoir rotatoire magnétique des métaux ferromagnétiques.

Les lames minces (quelques  $\mu$ ) de fer, nickel, cobalt, ont un pouvoir rotatoire magnétique colossal de sens positif (Kundt, du Poë). Ce pouvoir rotatoire est proportionnel, non plus à  $H$ , mais à l'aimantation  $I$ , ce qui n'a rien de surprenant car c'est le champ intérieur qui agit. A la saturation, et avec une épaisseur de 1<sup>mm</sup>, les rotations sont 21° pour le fer, 19° pour le nickel, 9° pour le cobalt.

En écrivant  $\omega = \beta l I$ , on trouve que la constante de Kundt,  $\beta$ , est du même ordre de grandeur que la constante de Verdet pour les autres substances.

Fer a découvert qu'un rayon réfléchi sur la surface polie d'un morceau de fer aimanté éprouve une modification dans l'orientation de son plan de polarisation. Cet effet s'explique si l'on admet que la lumière pénètre à une certaine profondeur dans le métal avant d'être réfléchi. En fait, une couche mince d'argent supprime le phénomène.

## 309. — Dispersion rotatoire magnétique.

Presque toujours le pouvoir rotatoire magnétique augmente quand la longueur d'onde diminue (exception faite pour les lames de Fe, Ni, Co) et les lois sont différentes selon qu'il est positif ou négatif.

**Pouvoir rotatoire positif.** — Edmond Becquerel a montré que la constante de Verdet est à peu près proportionnelle à  $\frac{1}{\lambda}$ ; Henri Becquerel a donné la loi plus exacte  $\alpha = K \lambda \frac{dn}{dn}$  ( $n$  indice de réfraction).

L'étude du phénomène de Zeeman nous <sup>en</sup> montrera que la loi est plus complexe.

**Pouvoir rotatoire négatif.** — La constante de Verdet croît, la plupart du temps, à peu près comme  $\frac{1}{\lambda}$ .

Il est important de remarquer que toutes les substances à rotation négative contiennent des corps para ou ferro-magnétiques mais que la réciproque n'est pas vraie; d'ailleurs le fer, le nickel et le cobalt donnent des rotations positives.

La polarisation rotatoire magnétique est donc un phénomène complexe, qui paraît dû à plusieurs causes.

Nous verrons bientôt qu'une des causes est parfaitement connue; c'est le diamagnétisme, sous la forme du phénomène de Zeeman. L'effet est, en général, une rotation positive peu variable avec la température.

Cette cause doit s'en superposer une autre liée au paramagnétisme. Certains faits sont en faveur de cette hypothèse: le pouvoir rotatoire négatif de certains corps paramagnétiques augmente considérablement quand on abaisse la température<sup>(\*)</sup> (Jean Becquerel), en même temps que la susceptibilité magnétique.

Mais on ne comprend plus pourquoi, alors que les corps paramagnétiques ont en général un pouvoir rotatoire négatif, les métaux les plus magnétiques donnent un effet positif.

## § 2. Phénomène de Zeeman.

310. — Action d'un champ magnétique sur l'émission et sur l'absorption de la lumière.

M. Zeeman (1896), guidé par les conceptions de Lord Kelvin et de Maxwell sur les "mouvements tourbillonnaires" dans les milieux soumis au champ magnétique, eut l'idée de chercher

(\*) La tysonite (fluorure de lanthane, cérium, didyme) possède à 20° absolu, un pouvoir rotatoire magnétique négatif 85 fois plus grand (en valeur absolue) que celui du sulfure de carbone à la température ordinaire.

une action directe du champ magnétique sur la source de lumière.

Il disposa la flamme d'un chalumeau, contenant un morceau d'asbeste, recouvert de sel, entre les pôles d'un électro-aimant (10.000 gauss). Le spectre était produit avec un réseau concave de Rowland. Les raies D manifestèrent un élargissement.

L'action mécanique du champ sur la flamme pouvant provoquer un changement d'aspect des raies, M. Zeeman remplaça la flamme par un tube contenant de la vapeur de sodium et fit passer dans ce tube un faisceau de lumière de manière à observer les raies D renversées (ce qui revient à observer l'émission à basse température). L'effet fut le même.

### 311 - Théorie élémentaire de Lorentz.

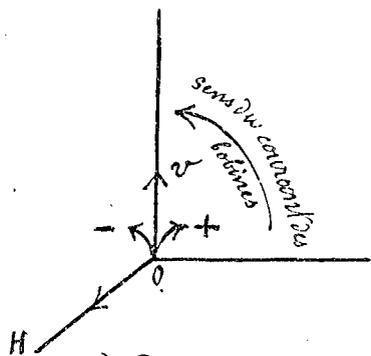
M. Lorentz donna aussitôt une théorie restée célèbre. Supposons qu'un ion de masse  $m$  et de charge  $e$ , déplacé de sa position d'équilibre, soit sollicité par une force (dite quasi-élastique)  $f$  proportionnelle à son déplacement  $x$ . Cet ion va osciller avec une pulsation  $n_0$ :

$$n_0 = \sqrt{\frac{f}{m}}$$

( $n_0$  nombre de vibrations dans le temps  $2\pi$ ).

Dans un champ  $H$ , cet ion est soumis à la force.

$$F = [e\vec{v} \vec{H}]$$



Si la direction de  $\vec{H}$  est normale à celle de  $\vec{v}$  et si les sens sont ceux indiqués sur la figure, un ion + est dévié vers la droite de l'observateur placé debout sur  $O\vec{H}$ , un ion - est dévié à gauche.

On peut décomposer un mouvement vibratoire quelconque en 3 mouvements:

- 1°) Un mouvement rectiligne parallèle à  $\vec{H}$
- 2°) Un mouvement circulaire droit dans un plan normal à  $\vec{H}$ .
- 3°) Un mouvement circulaire gauche normal à  $\vec{H}$ .

Cela revient à remplacer l'ion par trois ions fictifs ayant ces trois mouvements.

Le mouvement du premier n'est pas modifié. Sur les deux autres s'exercent des forces électrodynamiques normales aux trajectoires, celles-ci restent circulaires mais la période est changée. Les deux mouvements circulaires provenant de la décomposition du mouvement d'un même ion, ont d'ailleurs, dans le cas général, des amplitudes inégales.

Soient  $r$  le rayon,  $n$  la pulsation :

$$v = nr \quad \frac{mv^2}{r} = mn^2r = fr \pm Henr$$

Reportons-nous à la figure; supposons une charge tournant dans le sens des aiguilles d'une montre; si la charge est positive, la force  $Henr$  est centripète et s'ajoute à  $fr$ ; si la charge est négative, la force se retranche de  $fr$ , de sorte que, si  $e$  est la valeur algébrique de la charge, on a dans les deux cas,

$$\text{D'où: } \begin{cases} mn^2 = fr + Henr & \text{pour les vibrations droites,} \\ mn^2 = fr - Henr & \text{pour les vibrations gauches.} \end{cases}$$

$$(426) \quad \begin{cases} n = n_0 + \frac{eH}{2m} & (\text{vibrations droites}) \\ n = n_0 - \frac{eH}{2m} & (\text{vibrations gauches}). \end{cases}$$

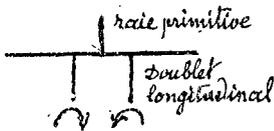
ou :

$$(427) \quad \begin{cases} \lambda = \lambda_0 - \frac{\lambda_0^2}{4\pi c} \frac{e}{m} H & (\text{vibrations droites}) \\ \lambda = \lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{4\pi c} \frac{e}{m} H & (\text{vibrations gauches}) \end{cases}$$

$\lambda_0$  étant la longueur d'onde en l'absence du champ.

Pour l'observation du phénomène, il faut distinguer deux cas :

I) Observation longitudinale. — Quand on observe dans la direction du champ, le vecteur électrique parallèle aux lignes de force n'émettant aucune lumière dans sa propre direction (transversalité) on voit seulement les deux vibrations circulaires. On doit donc observer un doublet dont les deux composantes sont polarisées circulairement en des sens opposés.



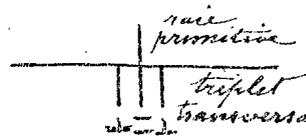
II. Observation transversale. — Si l'on observe dans une direction normale au champ :

1°. Le vecteur électrique parallèle au champ donne une composante à la même place que la raie primitive.

2°. Les deux vibrations circulaires, vues "par la tranche" donnent deux composantes à la même place que celles de l'effet longitudinal. On a donc un triplet, dont la composante médiane correspond à un vecteur parallèle à  $H$ , et les composantes extrêmes à des vecteurs normaux à  $H$ .

L'état de polarisation des composantes est le critérium

d'une action spécifique du champ magnétique sur la source.



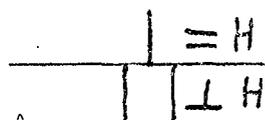
les composantes.

M. Zeeman constata d'abord que les bords des raies élargies étaient polarisées, puis avec un champ plus intense et des raies plus fines (cadmium) sépara

### 312. — Conditions d'observation de l'effet Zeeman.

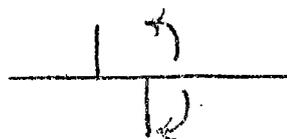
Pour obtenir une séparation nette des composantes, il faut un champ magnétique intense et un spectroscopie à grand pouvoir séparateur. La grandeur de l'effet prévu par la théorie, en admettant que les particules sont des électrons ( $\frac{e}{m} = 1,77 \cdot 10^8$ ) est seulement un écart de 0,7 Angstr. pour  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . et  $H = 30.000$  gauss.

Pour reconnaître l'état de polarisation des composantes, on place un analyseur en avant de la fente du spectroscopie. Dans l'observation transversale, il est commode de juxtaposer le spectre des vibrations parallèles et celui des vibrations normales au champ. On y parvient en produisant sur la fente à l'aide d'un rhomboïdre de spath deux images contigües d'un même diaphragme. Un triplet apparaît alors, sous l'aspect représenté ci-contre :



observation transversale

Dans l'observation longitudinale, on juxtapose les spectres des vibrations circulaires droites et gauches en faisant précéder le rhomboïdre d'une lame quart d'onde convenablement orientée. L'effet Zeeman se manifeste par un décalage entre les raies de ces spectres contigües.



observation longitudinale

L'effet Zeeman est identiquement le même avec les raies d'absorption; c'est ce qu'on appelle le phénomène inverse. Les composantes sont des raies d'absorption pour des vibrations polarisées de la même manière que les raies d'émission correspondantes. L'étude sur les raies d'absorption est avantageuse car ces raies sont plus fines, n'étant autres que les raies d'émission à une température plus basse (cours de 1<sup>ère</sup> année n° 333)

### 313. — L'électron source de lumière.

L'effet Zeeman s'est montré très général. Dans toutes les observations faites avant celles qui seront l'objet du § 3, on a constaté :

1°) Que les vibrations circulaires qui sont déplacées du côté des longueurs d'onde décroissantes sont décrites dans le sens du courant qui parcourt les bobines de l'électro-aimant.

Ce sens correspond à des charges négatives.

2°) Que la grandeur de l'écart des composantes correspond à une valeur de  $\frac{e\hbar}{m}$  de l'ordre de  $10^7$

De ces deux faits on a conclu que ce sont des électrons qui émettent la lumière.

### 314. Divers types de décomposition des raies.

Les résultats sont loin d'être très rigoureusement conformes aux conclusions de la théorie élémentaire de Lorentz.

Le triplet "normal" tel que le prévoit la théorie, pour l'électron, est très exceptionnel.

Pour comparer entre eux les principaux types de décomposition des raies on peut les ramener à un même champ, car on a toujours observé que l'écartement de deux composantes polarisées de la même manière est proportionnel à  $H$ . Il faut en outre figurer la décomposition dans l'échelle des fréquences au lieu de l'échelle des longueurs d'onde, parce que d'après les formules (426) et (427)  $\Delta n$  est indépendant de  $n_0$ , alors que  $\Delta \lambda$  est proportionnel à  $\lambda_0^2$ . C'est pourquoi,  $\Delta \lambda$  étant la différence des longueurs d'onde de deux composantes dans un champ  $H$ , on calcule la valeur de  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2 H}$ , qu'on appelle l'écart, et on la compare à la valeur de l'écart normal correspondant aux composantes extrêmes du triplet normal. L'écart normal est  $\delta = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2 H} = \frac{1}{2\pi c} \frac{e}{m} = 9,39 \cdot 10^{-5}$  en prenant  $\frac{e}{m} = 1,77 \cdot 10^7$ .

Il n'y a qu'un élément dont toutes les raies donnent des triplets purs avec écart normal, c'est l'hélium. Avec d'autres corps on a observé un bon nombre de certaines de triplets, mais l'écart normal ne se rencontre que rarement.

De plus les décompositions sont souvent plus compliquées; la vibration parallèle au champ peut donner plusieurs composantes, ce que la théorie ne prévoit pas.

En tous cas, dans l'observation longitudinale on voit deux groupes de composantes, l'un formé de vibrations circulaires droites, l'autre de vibrations gauches. Dans l'observation transversale cet ensemble donne un groupe de vibrations normales au champ et il s'y ajoute un groupe de vibrations parallèles au champ.

Règle de Runger. — Les décompositions complexes donnent des raies dont les écarts sont des multiples (peu élevés) d'une partie aliquote (simple) de l'écart normal.

Cette règle montre une relation avec l'écart normal, ce qui ne laisse aucun doute sur le fait que les électrons sont les sources de la lumière.

**Loi de Preston.** — Cette loi est relative aux spectres de lignes (1<sup>ère</sup> année, N° 328) Les lignes homologues d'une même série donnent des décompositions identiques, et presque toujours les raies des séries correspondantes des éléments de même famille donnent les mêmes décompositions.

1 <sup>ère</sup> Série Secondaire du mercure m <sub>g</sub> , Ca Sr, Zn, Cd	a <sub>2</sub>	s	s	s	P	P	P	s	s
	b <sub>2</sub>	s	s		P		P	s	s
	c <sub>2</sub>	s				P			s
Satellites des raies de la 1 <sup>ère</sup> série du mercure (Sortes de satellites)		s	s	P	s	P	s	P	s
			s	s	P	P	s	s	s
		P	s(?)	s	P	s		s	P
								s	P
Doublet de la série primaire Na, Ca, Mg, Al (P, P, P, Na)	a <sub>0</sub>		s		P		P		s
	b <sub>0</sub>		s	s	P	P	s	s	
Neon λ = 6678 et 6305			s	s	P	P	P	s	s
Neon λ = 6218		s	s	P	s	P	s	P	s
Neon λ = 5945		s		P		s		s	
Neon λ = 6402		s		P		s		s	

Le tableau ci-contre montre quelques types de décompositions; on voit leurs relations avec l'écart normal.

Voici encore un phénomène intéressant. (M. M. Paschen et Back). Il y a des raies spectrales qui ne sont pas simples. Dans un champ faible, chacune des raies composantes donne un système de composantes magnétiques; dans un champ intense les composantes multiples se ramassent entre elles pour donner un triplet normal. Ainsi un système déjà compliqué quand il n'y a pas de champ magnétique est simplifié par un champ intense et donne le phénomène prévu par la théorie élémentaire.

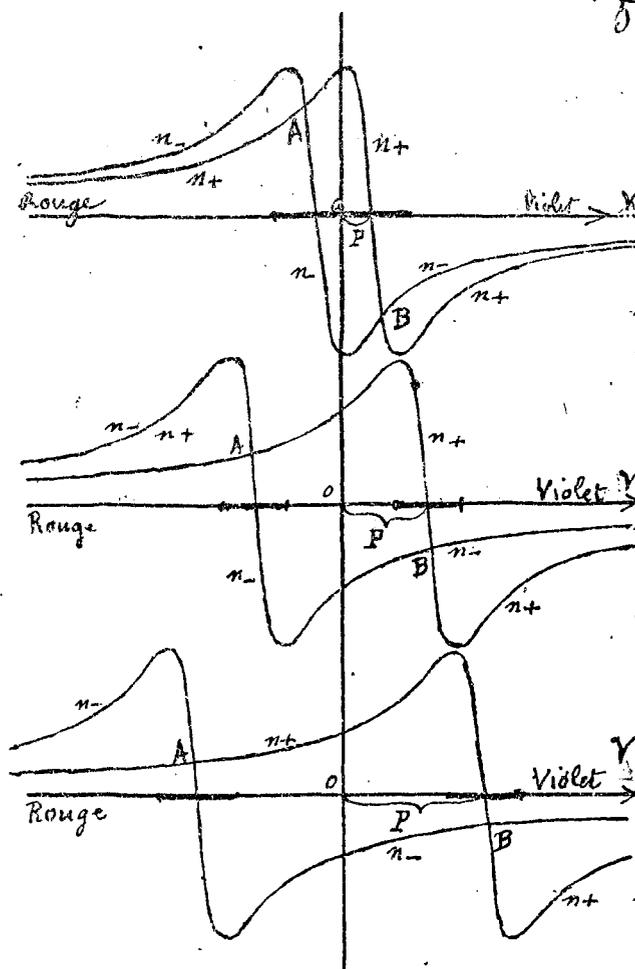
**Spectres de bandes.** — Les spectres de bandes (1<sup>ère</sup> année N° 332) sont la plupart du temps insensibles à l'action magnétique. Il y a cependant des exceptions par exemple pour les bandes des chlorures et fluorures alcalino-terreux (M. Dufour).

Nous n'insisterons pas sur des particularités telles que les dissymétries d'intensités et de positions, qui sont extrêmement fréquentes.

**315. — Phénomènes liés à l'effet Zeeman.**

**Polarisation rotatoire magnétique.** — M. M. Macaluso et Corbino ont constaté un pouvoir rotatoire extrêmement grand pour les radiations voisines des raies D du sodium.

Le fait est général pour les radiations voisines des raies d'absorption lorsque celles-ci présentent l'effet Zeeman. L'explication résulte des travaux de nombreux physiciens et peut se résumer simplement. Supposons qu'une bande donne deux composantes polarisées circulairement: ces deux composantes et avec elles les courbes de dispersion des vibrations circulaires droites et gauches sont décalées l'une par rapport à l'autre; par conséquent deux vibrations circulaires de sens



opposés se propagent avec des vitesses différentes; il y a donc polarisation rotatoire. De part et d'autre du groupe des deux composantes, ce sont les vibrations ayant le sens du courant des bobines qui ayant le plus petit indice se propagent le plus vite. Une vibration rectiligne, décomposable en deux circulaires, tourne donc dans le sens du courant. La polarisation rotatoire est positive en dehors du groupe des deux composantes, elle est négative au milieu du doublet magnétique.

Les figures ci-contre font comprendre l'effet. La rotation magnétique est proportionnelle aux différences des ordonnées des courbes de dispersion; elle est nulle aux points A et B et change de sens en ces points.

En un mot, la polarisation rotatoire magnétique n'est autre chose

qu'un aspect de l'effet Zeeman, qui se trouve mis en évidence par la dispersion.

**Biréfringence magnétique.** — Pour la même raison, dans l'observation transversale, les vibrations (rectilignes) parallèles et les vibrations normales au champ se propagent avec des vitesses inégales; il y a biréfringence pour les radiations très voisines des bandes. Cet effet a été prévu et observé par M. Voigt.

### §. 3. — Changements magnétiques des bandes d'absorption des solides. — L'effet positif.

L'étude expérimentale de la polarisation rotatoire magnétique dans les solides et les solutions, pour des radiations voisines des bandes d'absorption, a donné des résultats qui n'ont pas paru s'accorder avec la théorie qui vient d'être indiquée pour le cas des vapeurs. Certains physiciens avaient donc été conduits à penser que les solides et les solutions possédaient des propriétés magnéto-optiques radicalement différentes de celles des gaz, que la polarisation rotatoire magnétique n'était pas

due à une variation des bandes d'absorption. Les tentatives infructueuses faites pour constater une biréfringence magnétique et un effet Zeeman dans les solides avaient confirmé cette manière de voir, et Drude a imaginé une théorie dite théorie des courants moléculaires, destinée à expliquer la polarisation rotatoire magnétique dans les solides et les solutions.

C'était une opinion erronée. L'absorption dans les solides est modifiée par un champ magnétique; cet effet entraîne un pouvoir rotatoire et une biréfringence pour les radiations voisines des bandes. Mais le phénomène s'est présenté avec des caractères différents de ceux qui avaient été observés jusqu'alors dans le cas des gaz.

### 316. — Action du champ magnétique sur les bandes d'absorption des cristaux de terres rares. — L'effet positif.

Pour observer un effet du champ magnétique sur l'absorption, il faut choisir des corps possédant des bandes d'absorption suffisamment fines. C'est le cas des minéraux et cristaux contenant des terres rares. Il y a de plus un moyen d'améliorer les conditions d'observation: c'est d'abaisser la température (n° 303) en plongeant les corps dans de l'air ou de l'hydrogène liquide; les bandes se rétrécissent et parfois se résolvent en raies d'une finesse comparable à celle des vapeurs.

Il y a intérêt à observer l'action du champ sur les bandes des cristaux; car on agit sur des mouvements déjà orientés. Le phénomène est, à ce point de vue, physiquement plus simple que dans le cas des vapeurs; et il présente une richesse plus grande car les effets ne restent pas les mêmes quand on fait varier les orientations relatives du faisceau lumineux, du vecteur lumineux et du champ magnétique.

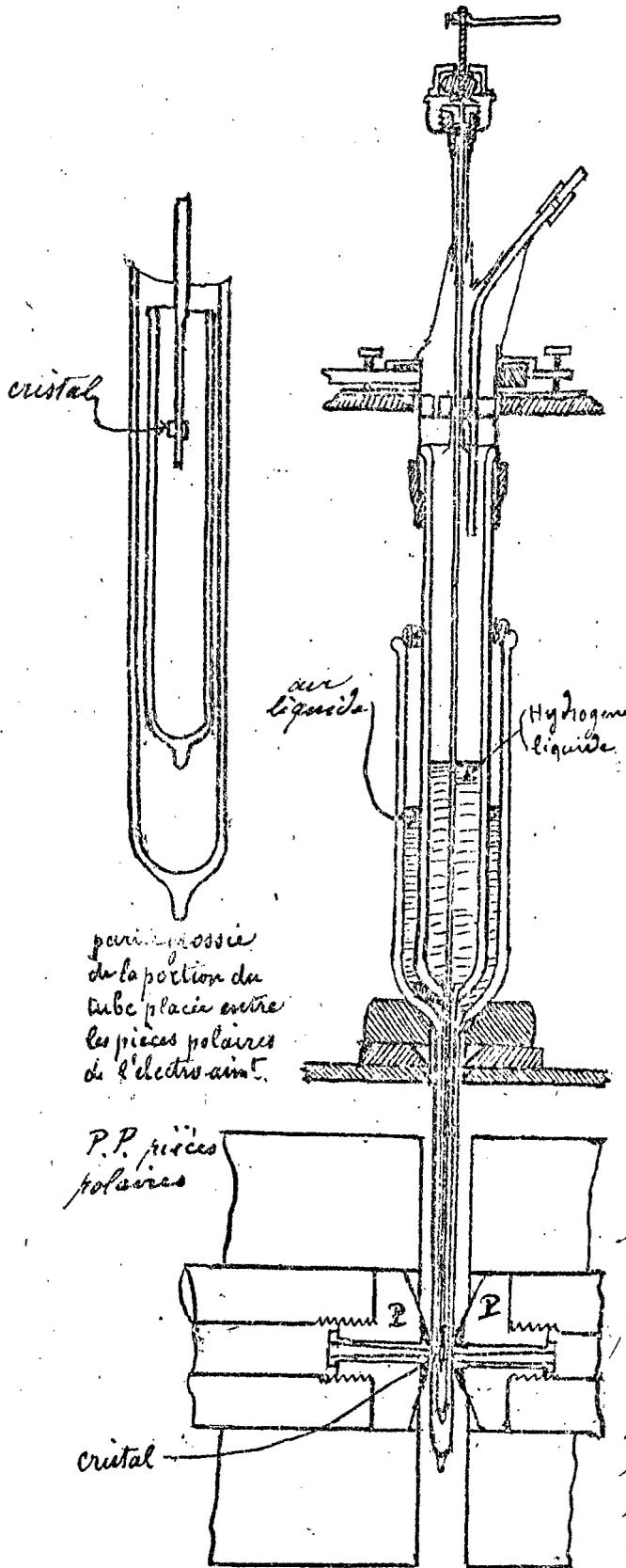
Il nous est impossible d'examiner tous les cas; nous indiquerons seulement les résultats les plus importants.

Parmi les cristaux étudiés nous citerons le scénotime (phosphate d'yttrium et d'erbium) la tysonite, l'apatite, la parisite, la monazite, (spectre du didyme) divers sels de néodyme, de praséodyme et d'erbium.

Cristaux uniaxes. — Faisceau lumineux et champ magnétique parallèles à l'axe optique. — La symétrie, non seulement permet, mais exige que si les bandes sont décomposées, leurs composantes soient polarisées circulairement.

1°) Un fait inattendu s'est révélé. Les bandes correspondant à des vibrations circulaires d'un même sens ne se déplacent pas toutes d'un même côté du spectre sous l'influence d'un même champ.

Il y a donc deux effets de sens opposés. Pour les



Dispositif expérimental pour l'étude des phénomènes magnéto-optiques dans les cristaux aux très basses températures.

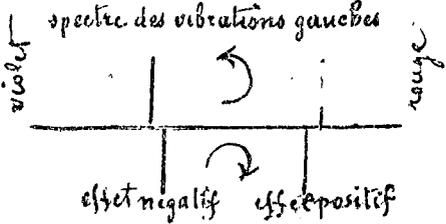
distinguer on a appelé effet négatif celui qui est dans le sens prévu pour les électrons négatifs, et jusqu'alors toujours observé (vapeurs), et effet positif, celui qui a le sens contraire.

L'effet positif est tout aussi fréquent que l'effet négatif. Le plus surprenant, c'est qu'il existe des raies qui donnent à la fois les deux effets: il ne s'agit pas, d'une polarisation

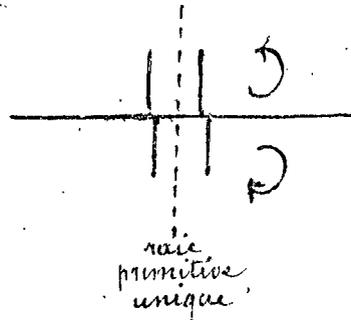
circulaire incomplète car les composantes sont séparées dans un champ intense (30.000 à 40.000 g.) et totalement polarisées.

2° Les écarts atteignent, pour certaines bandes, 10 fois l'écart normal, aussi bien pour l'effet négatif que pour l'effet positif. Les écarts sont d'ailleurs extrêmement variables d'une bande à l'autre, sans aucun rapport apparent avec l'écart normal.

3° Les changements de fréquence produits par un même champ sont rigoureusement indépendants de la température (observations faites jusqu'à 14° absolu). Ils n'ont donc aucune liaison avec le paramagnétisme de ces



Sens du courant dans les bobines





cristaux; nous verrons d'ailleurs bientôt que les changements de fréquence sont un aspect du diamagnétisme et doivent être indépendants de la température.

4° Par contre, un autre effet est peut-être lié à l'origine du paramagnétisme; c'est la dissymétrie qui se produit, et qui s'accroît quand la température s'abaisse ou que le champ augmente, entre les intensités des composantes circulaires inverses d'une même bande. Cet effet, toujours de même sens (la composante déplacée vers les courtes longueurs d'onde étant la plus intense), révèle un phénomène d'orientation.

Orientations diverses du faisceau, du cristal et du champ. La position et l'intensité des composantes d'une bande dépendent uniquement de l'orientation du cristal et de l'orientation du vecteur lumineux par rapport au champ. On observe les cas les plus variés de décompositions dissymétriques.

### 317. Extension du phénomène observé dans les cristaux et de l'effet positif.

La décomposition magnétique des bandes s'observe, non seulement dans les corps cristallisés, mais dans les solutions (solidifiées à basse température) et, d'une façon générale dans les corps qui présentent des bandes assez fines pour qu'on puisse voir leurs modifications. Les bandes de phosphorescence du rubis (chrome) donnent l'effet positif (M. M. du Bois et Elias).

L'effet positif a été observé dans les spectres de bandes des vapeurs (M. Dufour) et se manifeste pour certaines raies du second spectre de l'hydrogène.

### 318. Polarisation rotatoire magnétique.

Une variation rapide du pouvoir rotatoire s'observe au voisinage des bandes d'absorption sensibles au champ magnétique. Cet effet s'explique exactement comme dans le cas des vapeurs (N° 315) mais la rotation due à une bande, sur les bords de celle-ci est positive ou négative selon que l'effet subi par la bande est lui-même dans le sens de l'effet Zeeman ou dans le sens opposé. C'est cette variabilité du sens qui avait conduit autrefois à considérer les résultats comme incompatibles avec la théorie donnée pour les vapeurs. Non seulement le sens de l'effet produit par une bande est maintenant expliqué, mais la grandeur de la rotation est bien conforme à la théorie. On peut, en effet, (n° 303) mesurer la variation de l'indice de réfraction et calculer, d'après

l'écart des composantes magnétiques de la bande, la grandeur du pouvoir rotatoire dû à celle-ci ; on trouve exactement la rotation mesurée directement.

Dans les parties transparentes, chacune des régions d'absorption plus ou moins éloignées contribue pour une part à produire la polarisation rotatoire magnétique et les effets s'ajoutent. On conçoit qu'on ne puisse, dans ces conditions, représenter le pouvoir rotatoire par une formule simple.

L'une des causes de la polarisation rotatoire magnétique est donc complètement déterminée : c'est la décomposition des bandes d'absorption en composantes polarisées circulairement, et la différence des vitesses de propagation qui en résulte pour les vibrations circulaires de sens opposés. Nous avons dit, d'ailleurs, que le pouvoir rotatoire magnétique doit parfois avoir une autre origine, qu'on ne saurait préciser aujourd'hui.

La théorie électronique est jusqu'à présent impuissante à expliquer les particularités de l'effet Zeeman, et surtout l'existence de l'effet positif.

## §. 4. — Notions élémentaires sur la théorie du magnétisme.

### 319. — Le diamagnétisme. — Théorie de Langevin. —

Pour rendre compte des phénomènes magnétiques, Ampère avait supposé l'existence dans les molécules, de circuits de résistance nulle, parcourus par des courants.

Weber a donné l'explication suivante du diamagnétisme : la production d'un champ extérieur provoque, dans les circuits d'Ampère, des courants d'induction qui réagissent contre la création du champ. Les courants continuent à circuler, puisque le circuit est dépourvu de résistance, jusqu'à ce qu'une nouvelle induction, accompagnant la disparition du champ, les détruise.

Des électrons mobiles sur des orbites fermées constituent précisément les courants de résistance nulle imaginés par Ampère et Weber. Celle est la base de la théorie de M. Langevin.

Au moment où l'on établit un champ extérieur, ou, l'on amène le corps dans un champ préexistant, les mouvements qui ont lieu dans un sens sont accélérés, ceux qui ont lieu en sens opposé sont ralentis : c'est la modification diamagnétique.

Il est essentiel de remarquer que, pour les électrons qui donnent lieu aux raies spectrales, cette modification n'est autre chose que le phénomène de Zeeman, qui apparaît ainsi comme un aspect de la

propriété diamagnétique (N° 311).

Soient  $S$  la surface de l'orbite,  $\tau$  la période de révolution, le moment magnétique du courant particulier est :

$$(428) \quad \mathcal{M} = \pm Si = \pm \frac{Se}{\tau}$$

À distance, le moment magnétique de la molécule sera la somme géométrique des moments de chaque courant; ce moment pourra être nul si, par une symétrie intérieure, les différents courants se compensent au point de vue de leur action moyenne à distance, cette compensation n'empêchant pas les courants particuliers d'exister et la molécule de produire un champ électromagnétique plus ou moins complexe à des distances comparables à ses dimensions.

Si le moment résultant est nul, un champ extérieur ne produit pas d'orientation d'ensemble de la molécule. Si le moment n'est pas nul, la molécule est un petit aimant.

Dans un cas comme dans l'autre, le champ extérieur polarise diamagnétiquement toutes les molécules. Cet effet se produit seul si le moment est nul, et la matière est diamagnétique au sens ordinaire du mot.

Si le moment n'est pas nul, au diamagnétisme se superpose le phénomène d'orientation des aimants moléculaires : la substance est paramagnétique, si les actions mutuelles entre aimants moléculaires sont négligeables; elle est ferromagnétique lorsque ces actions jouent un rôle essentiel.

Le paramagnétisme et à fortiori le ferromagnétisme sont énormes par rapport au diamagnétisme et le masquent. Ceci explique l'absence de continuité dans les apparences diamagnétiques ou magnétiques; le paramagnétisme existe ou n'existe pas; quand il existe, il est prédominant. Mais le diamagnétisme existe toujours. Le spectre du fer présente l'effet Zeeman, connexe du diamagnétisme.

Le champ extérieur modifie le moment magnétique d'un courant particulier; on a :

$$\delta \mathcal{M} = \pm Se \delta \left( \frac{1}{\tau} \right)$$

Nous avons vu dans l'étude de l'effet Zeeman que

$$\delta \left( \frac{1}{\tau} \right) = \pm \frac{eH}{4\pi m} \quad (\text{formules 426 N° 311}).$$

Donc :

$$(429) \quad \delta \mathcal{M} = - \frac{He^2 S}{4\pi m}$$

Le signe - correspond à un moment de sens inverse au champ extérieur c'est-à-dire à une modification diamagnétique.

On a :

$$\frac{\delta \mathcal{M}}{\mathcal{M}} = \mp \frac{H\tau}{4\pi} \frac{e}{m},$$

modification toujours très faible,  $\tau$  étant excessivement petit (ordre de  $10^{-5}$  pour les électrons donnant la lumière visible).

D'après (429), la susceptibilité / diamagnétique est :

$$(430) \quad K = - \sum \frac{e^2 S}{4\pi m}$$

la sommation étant étendue à l'unité de volume,

Si la molécule a un moment résultant nul / et si elle est symétrique, aucune action du champ ne suivra cette modification diamagnétique qui est indépendante de la température ; les chocs entre molécules se produiront comme auparavant et il n'y aura aucune variation de température.

Le fait que les écarts des composantes des raies spectrales sont absolument les mêmes jusqu'à la température de solidification de l'hydrogène est la preuve expérimentale que la modification diamagnétique, qui apparaît directement dans ce phénomène, ne dépend pas de la température (N° 316).

La susceptibilité diamagnétique est en général indépendante de la température et même de l'état physique du corps (Curie); s'il y a des exceptions, c'est à cause de phénomènes différents, tels que l'action sur des électrons libres ayant un long parcours (bismuth), ou à cause de la dissymétrie des molécules, qui subissent alors une orientation n'ayant rien à voir avec la modification diamagnétique proprement dite.

### 320. - Le paramagnétisme. - Théorie de Langevin.

Si les molécules ont un moment magnétique, le champ extérieur tend à les orienter. Il résulte de là un changement dans l'agitation thermique, mais les chocs ultérieurs ont pour effet de produire un réarrangement qui égalise les énergies cinétiques moyennes dans toutes les orientations et fait apparaître un moment paramagnétique d'ensemble.

Loi de Curie. - Nous avons vu que l'aimantation est accompagnée d'un dégagement de chaleur, qu'on peut écrire (N° 153)

$$(431) \quad Q = \int H dI \quad dQ = H \left( \frac{\partial I}{\partial H} dH + \frac{\partial I}{\partial T} dT \right)$$

Pour une aimantation très faible, la modification est réversible et le théorème de Clausius s'applique :  $\frac{dQ}{T}$  est une différentielle totale, écrivant cette condition, il vient :

$$(432) \quad H \frac{\partial I}{\partial H} + T \frac{\partial I}{\partial T} = 0$$

Equation dont l'intégrale générale est :

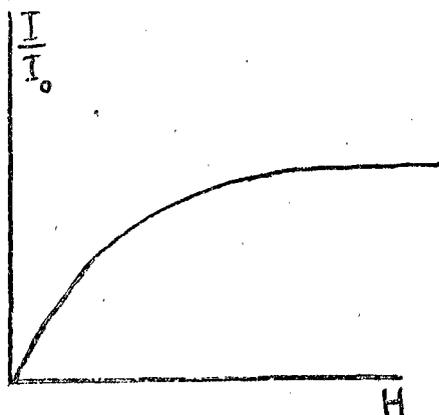
$$(433) \quad I = f\left(\frac{H}{T}\right),$$

Chu début de l'aimantation, où la susceptibilité est constante à une même température, on a :

$$\kappa = \frac{I}{H} = \kappa' \frac{1}{T}$$

La susceptibilité paramagnétique est inversement proportionnelle à la température absolue, loi trouvée expérimentalement par Curie.

La thermodynamique ne permet pas de trouver la forme de la fonction  $f$ . M. Langevin y est parvenu en appliquant les méthodes de la mécanique statistique (1) Le résultat est représenté par la figure ci-contre ; l'aiman-



tation  $I$  a un maximum théorique la "saturation absolue  $I_0$ " qui serait réalisé si tous les aimants moléculaires étaient parallèles. Ce n'est que dans des champs qu'on ne peut réaliser ( $10^6$ ) que, à la température ordinaire, la courbure de la courbe d'aimantation commence à se manifester. A très basse température la même orientation moléculaire s'obtient pour des champs diminués dans le rapport des températures (formule 433).

non exigé

### 321. — Le ferromagnétisme (2) Théorie de Pierre Weiss.

La théorie cinétique de Langevin est pour le paramagnétisme ce que la théorie cinétique des gaz parfaits de D. Bernoulli est pour leur compressibilité. Van der Waals a étendu cette dernière théorie aux fluides en général, en faisant une hypothèse sur l'action mutuelle des molécules du gaz jusque là supposées indépendantes. Cette hypothèse se traduit par la pression intérieure qui, s'ajoutant à la pression extérieure, explique la grande densité des liquides en faisant appel aux propriétés des gaz. D'une manière analogue M. P. Weiss a imaginé un champ moléculaire qui, s'ajoutant au champ magnétique extérieur, explique par les lois de l'aimantation paramagnétique la forte aimantation des corps ferromagnétiques. Cette hypothèse s'énonce :

L'action de l'ensemble des molécules sur l'une d'entre elles est équivalente à un champ magnétique uniforme ( $H_m = Ni$ ) proportionnel à l'aimantation  $I$ , et dirigée comme elle.

(1) L'exposé de la théorie nous entraînerait trop loin. Nous nous bornerons à l'indication des résultats. Voir Langevin Ann. de Ch. et de Physique t. V. 1905. Pierre Weiss, Conf. à la Soc. de Physique dans l'ouvrage "les idées modernes sur la constitution de la matière."

(2) Cet exposé très clair des idées et des résultats est dû à M. Pierre Weiss. Il est textuellement extrait de la revue de Métallurgie, Juin 1909.

Sans faire aucune hypothèse sur les forces qui, dans un solide, s'opposent à la translation des molécules, M. Weiss a admis, en outre que les actions mutuelles d'origine magnétique sont les seules qui interviennent dans la rotation des molécules, ou en d'autres termes, qu'à part le champ moléculaire, celles-ci tournent aussi librement dans un métal magnétique que dans un gaz parfait.

Cette hypothèse incontestablement assez risquée a été justifiée par le succès; la possibilité de diriger l'aimantation dans n'importe quel sens montre d'ailleurs que l'on ne saurait refuser aux molécules une certaine mobilité d'orientation.

Le calcul conduit alors à ceci: au-dessous d'une certaine température, l'état stable de l'édifice moléculaire abandonné à lui-même, sans champ extérieur, n'est pas celui qui correspond à  $I=0$  et  $H_m=0$ , comme il pourrait sembler à première vue, mais au contraire un état pour lequel l'aimantation  $I$ , et par conséquent le champ moléculaire  $H_m=NI$  ont des valeurs finies. Ces valeurs sont fonction de la température.

Nous sommes donc invités à nous familiariser avec une aimantation spontanée, alors que l'expérience ne nous fait connaître l'aimantation que comme une conséquence de l'application d'un champ magnétique actuel ou antérieur. Ce résultat n'a en soi rien qui doive surprendre puisque d'une manière analogue un liquide peut exister, avec sa forte densité, sous une pression extérieure nulle, c'est-à-dire sous la seule pression intérieure. Reste à voir pourquoi dans un morceau de fer ou d'acier à l'état neutre cette aimantation s'échappe à nos sens. On se rend compte que, dans ce que nous avons dit, rien ne détermine la direction dans laquelle se produira l'aimantation spontanée. Livrée au hasard elle prendra toutes les directions possibles dans une portion de la matière quelque peu étendue qui paraîtra neutre par compensation.

En réalité, le hasard sera aidé par la structure cristalline de la matière et les états de tension dont elle est toujours plus ou moins le siège, toutes les causes qui ont, pour effet de créer, dans le milieu des directions de facile aimantation, suivant lesquelles l'aimantation spontanée s'oriente naturellement. Le problème de l'aimantation d'un milieu à cristallisation confuse, comme le sont tous les métaux usuels, se rattache donc à celui des cristaux magnétiques. Disons, pour abrégé<sup>(1)</sup> que ces propriétés magnéto-cristallines, aujourd'hui connues pour l'étude de la magnétite et de la pyrrhotine, s'expriment très simplement dans l'hypothèse du champ moléculaire et permettent de faire la synthèse des propriétés des matières cristal-

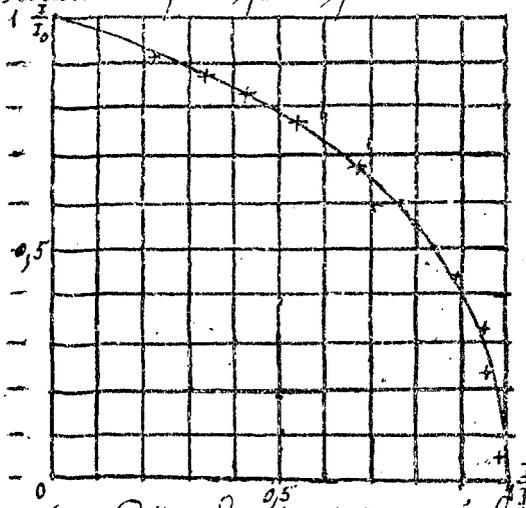
<sup>(1)</sup> Pour plus de détails voir: Journal de Phys. (4) VI, 661, 1907.

lines, isotropes en apparence.

On voit maintenant quel est le rôle du champ extérieur. A mesure qu'il croît, il surmonte des champs démagnétisants internes d'origine magnétocristalline et les frottements connus sous le nom d'hystérèse et, rapprochant de plus en plus du parallélisme les aimantations primitivement dirigées en tout sens, il rend l'aimantation spontanée sensible à l'observation.

On n'observe l'aimantation spontanée avec sa vraie grandeur que quand elle est parallèle dans toute l'étendue du corps, c'est-à-dire dans un champ extérieur très intense. L'aimantation spontanée est donc la saturation à la température considérée.

C'est une condition cependant. Il faut que le champ extérieur n'ait changé que l'orientation et non la grandeur de l'aimantation spontanée. Or la théorie montre que, effectivement, un champ extérieur ne peut faire varier l'aimantation spontanée que de quantités de l'ordre de grandeur des aimantations paramagnétiques. En d'autres termes, les champs moléculaires du fer, du nickel, de la magnétite sont de l'ordre de grandeur de  $10^7$  gauss, c'est-à-dire 100 à 1000 fois plus intenses que ceux des électro-aimants les plus puissants. Ces derniers n'y ajoutent donc en valeur relative que fort peu de chose. La proposition ci-dessus appelée encore



une remarque : il importe de ne pas confondre les saturations relatives aux diverses températures  $I$  dont il est question ici avec la saturation absolue  $I_0$  de Langevin. Ces expressions ne désignent la même chose qu'à la température du zéro absolu.

L'aimantation spontanée  $I$  décroît quand la température s'élève, l'agitation thermique devient de plus en plus intense et, finalement, pour une certaine température  $\theta$ , elle tombe rapidement à zéro. Cette loi de variation théorique est représentée par la courbe de la figure ci-dessus. Elle est la même pour toutes les substances ferromagnétiques quand on l'exprime au moyen de  $I$ ,  $I_0$  et de  $T : \theta$ . C'est donc une loi des états correspondants.

Les points marqués sur la courbe sont des résultats de mesures faites par M. Weiss sur la magnétite. Elles montrent combien l'expérience est d'accord avec la théorie pour ce corps. Pour les métaux il y a concordance quant à la physionomie générale de la courbe, seulement. L'étude expérimentale de leur aimantation à saturation en fonction de la température donnera la deuxième

approximation, comme l'étude précise de la compressibilité des fluides a conduit à perfectionner l'équation de Van der Waals. Pour faire ressortir la signification physique des données magnétiques, la théorie actuelle suffit. Par contre, dans les applications dont il sera question plus loin il faudra avoir recours à la courbe expérimentale de chaque corps.

Nous pouvons dès maintenant tirer de ce qui précède une conclusion qui a son importance au point de vue de la distinction des états de la matière. Il n'y a pas de différence essentielle entre un corps aimanté et un corps magnétique, c'est-à-dire fortement aimantable. Ils sont l'un et l'autre, aimantés à saturation, seulement dans l'un l'aimantation est coordonnée et dans l'autre elle est confuse.

### 322. — Le magnétron.

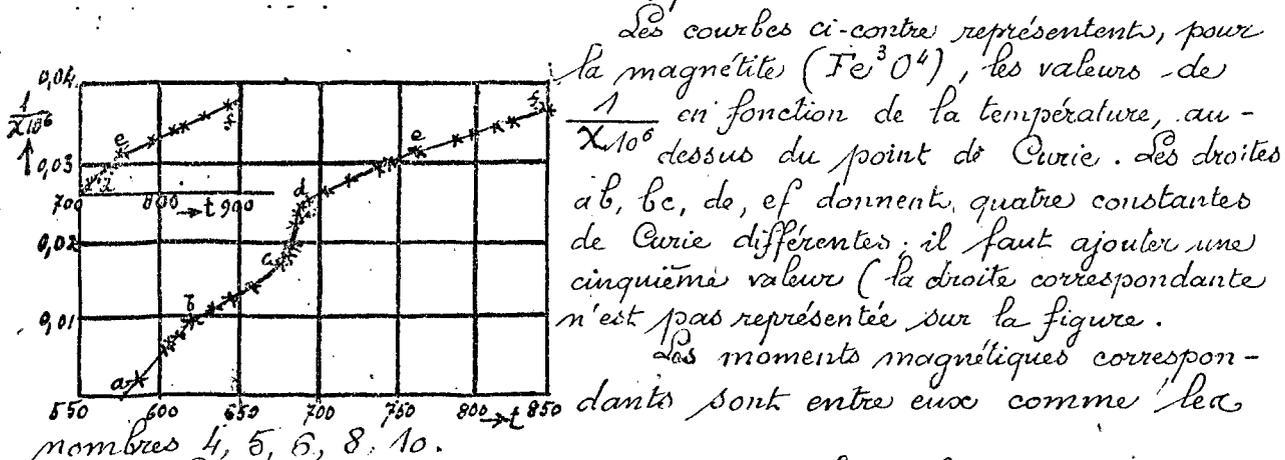
Les expériences de M. Weiss et de ses collaborateurs ont conduit à ce résultat remarquable que les moments magnétiques des atome-grammes et des molécules-grammes sont tous des multiples entiers d'un même moment magnétique.

Les moments magnétiques de l'atome-gramme de fer et de l'atome-gramme de nickel, mesurés à saturation à 20° absolu (M. M. Weiss et Kamerlingh-Onnes), sont respectivement  $12360 = 11 \times 1123,6$  et  $3370 = 3 \times 1123,3$ .

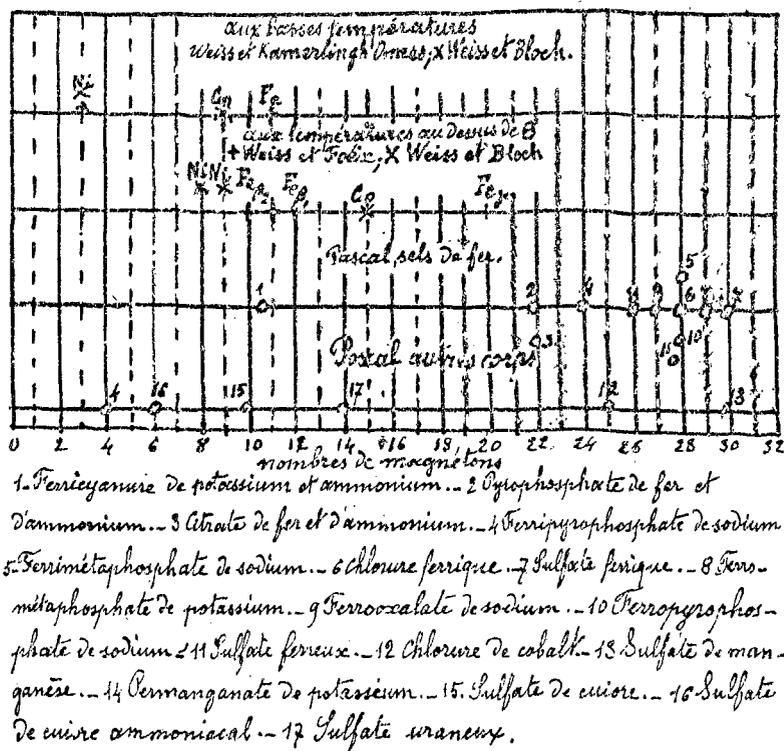
Expériences sur la magnétite. — Il résulte de la théorie du champ moléculaire, et l'expérience prouve que, pour les corps ferromagnétiques, le coefficient d'aimantation spécifique  $\chi$  (rapport du moment moléculaire au champ), au lieu d'être inversement proportionnel à  $T$ , est inversement proportionnel à  $T - \theta$

$$\chi = C (T - \theta)$$

C'est la constante de Curie et  $\theta$  le point de Curie.



Le schéma ci-après représente les valeurs des moments moléculaires d'un grand nombre de corps; la grille à barreaux



verticaux a été tracé, avec la valeur du magnéton déduite des expériences sur le fer et le nickel. Tous les points se placent sur les traits verticaux.

De l'ensemble de toutes les expériences, on déduit pour la valeur du magnéton - gramme le chiffre 1129,1. En divisant ce nombre par le nombre d'Avogadro, on obtient  $16,4 \cdot 10^{-22}$ . C'est le magnéton ou moment magnétique élémentaire, atome de moment magnétique.

## Chapitre V

# Théorie électronique des métaux.

### § 1. Conductibilité.

La théorie électronique des métaux est la forme moderne de la vieille théorie des fluides électriques, ou plutôt de la théorie du fluide unique, ce fluide étant constitué par des électrons.

L'expérience prouve qu'il y a des corps qui perdent leurs électrons plus facilement que les autres; ce sont les substances dites électro-négatives, et particulièrement les métaux. Ces corps sont conducteurs de la chaleur et de l'électricité. Il était naturel de penser que les atomes métalliques abandonnent facilement des corpuscules, et que ceux-ci transportent la chaleur et l'électricité; on admet donc qu'il existe dans les conducteurs des électrons libres en même temps que des électrons liés, et que dans les isolants il n'y a que des électrons liés.<sup>(1)</sup>

Un équilibre dynamique s'établit entre les électrons libres, les ions positifs avec lesquels ils peuvent se recombinaer et les molécules neutres qui contiennent des atomes pouvant laisser échapper des électrons.

Il y a deux manières de concevoir cet équilibre: 1°) Riecke, Drude et Lorentz ont admis que les électrons libres effectuaient un grand nombre de chocs contre les molécules avant de se recombinaer avec un ion; 2°) Sir J.J. Thomson a admis qu'il y a échange immédiat d'électrons entre atomes, c'est-à-dire qu'un électron sortant d'un atome est pris aussitôt par un autre, de sorte que l'équilibre ther-

(1) Pour plus de développements, lire la Conférence de M. Eugène Bloch, publiée par la S<sup>té</sup> de Physique dans l'ouvrage « les idées modernes sur la constitution de la matière » (1913) - Gauthier Villars, Editeur.

mique ne peut s'établir entre électrons et molécules.

Nous n'exposerons qu'un résumé de la première théorie, qui constitue une extension de la théorie cinétique.

### 323. — Conductibilité thermique. —

Les électrons sont, en somme, considérés comme un gaz à l'intérieur du métal. Après un certain trajet, les électrons se recombinaient avec un ion, tandis que d'autres sont libérés par dissociation corpusculaire, de sorte qu'en moyenne le nombre des électrons libres se maintient constant. Le trajet parcouru est assez long pour que l'équilibre de température s'établisse entre les électrons et les molécules (neutres ou ionisées); alors les énergies cinétiques se répartissent conformément aux lois de la théorie cinétique: toute particule, et en particulier un électron, possède en moyenne l'énergie cinétique (cours de 1<sup>ère</sup> année, n° 8)

$$(43A) \quad \frac{1}{2} m v^2 = \alpha T = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T = 1,83 \cdot 10^{-6} T.$$

(R constante des gaz pour la molécule-gramme, N nombre d'Avogadro, T température absolue).

À la température ordinaire, la vitesse quadratique moyenne d'un électron est ainsi de l'ordre  $10^7$  (100 km/sec.).

La conductibilité thermique s'explique aisément: les électrons ayant une énergie cinétique plus grande dans la région chauffée communiquent par chocs cette énergie aux parties plus froides et la chaleur se transmet de proche en proche.

On démontre (1) la formule suivante, que nous admettrons comme connue. Si chaque particule possède une quantité  $G$  d'une certaine grandeur,  $G$  étant fonction de la position, la quantité de cette grandeur que l'agitation thermique transporte par diffusion à travers l'unité de surface normale à  $Ox$ , et dans l'unité de temps est:

$$\Gamma = \frac{1}{3} n l v \frac{\partial G}{\partial x}$$

\* Boltzmann - théorie cinétique des gaz - traduction Galotti et Bénard (Gauthier-Villars)

n étant le nombre des particules par unité de volume,  $l$  leur libre parcours et  $v$  leur vitesse que nous supposons la même pour toutes les particules.

Appliquons aux électrons; en prenant pour  $\alpha$  la force vive  $\alpha T$ . Le flux de chaleur par centimètre carré et par seconde est:

$$(435) \quad W = \frac{1}{3} n l v \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x} = \frac{1}{3} \alpha n l v \frac{\partial T}{\partial x}$$

La conductibilité thermique est donc:

$$(436) \quad K = \frac{1}{3} \alpha n l v$$

### 324.- Conductibilité électrique - Lois d'Ohm et de Joule.-

Le mouvement est désordonné tant qu'il n'y a pas de champ électrique; les électrons possédant des charges négatives, un champ électrique détermine un mouvement d'ensemble dans le sens opposé à celui de la force électrique; l'agitation thermique intervient en limitant la durée  $t = \frac{l}{v}$  du libre parcours; l'accroissement de vitesse dû au champ électrique étant petit vis-à-vis de  $v$ , l'action antérieure du champ électrique est pratiquement annulée par chaque choc.

Dans un champ  $h$  et pendant l'intervalle de temps  $t$  qui s'écoule entre deux chocs, l'accroissement de la vitesse d'un

électron est  $\frac{eh}{m} t$ , puisque l'accélération est  $\frac{eh}{m}$ . Pendant

son libre parcours  $l$ , l'électron a donc, en moyenne, parallèlement au champ, une vitesse qui surpasse (algébriquement) sa vitesse d'agitation de

$$(437) \quad v' = \frac{1}{2} \frac{eh}{m} t = \frac{1}{2} \frac{eh}{m} \frac{l}{v}$$

L'intensité du courant est la charge qui traverse l'unité de surface, normale au champ, pendant l'unité de temps:

$$(438) \quad u = ne v' = \frac{1}{2} \frac{ne^2 h}{m} \frac{l}{v} = \frac{ne^2 l v}{4\alpha T} h = \gamma h$$

C'est la loi d'Ohm (formule 107, p. 150).

L'excès d'énergie cinétique que les électrons reçoivent du champ électrique entre deux chocs donne naissance à la chaleur de Joule. Pour un électron et un libre parcours, cet excès est:

$$W = \frac{1}{2} m \left( \frac{ehl}{mv} \right)^2$$

Le nombre des chocs subis par un électron en une seconde est  $\frac{v}{\ell}$ , de sorte que la chaleur de Joule a pour expression:

$$(439) \quad W = n \frac{v}{\ell} W = \frac{u^2}{\gamma}$$

ce qui est bien l'expression de la loi de Joule.

### 325. — Loi de Wiedemann et Franz.

Calculons le rapport  $\frac{K}{\gamma}$  des conductibilités thermique et électrique; nous obtenons:

$$(440) \quad \frac{K}{\gamma} = \frac{4}{3} \left( \frac{\alpha}{e} \right)^2 T$$

Le rapport des conductibilités thermique et électrique d'un métal est indépendant de la nature de ce métal et proportionnel à la température absolue.

Cette loi avait été établie expérimentalement (première partie énoncée en 1852 par Wiedemann et Franz, seconde partie en 1882 par L. Lorenz). Le tableau suivant indi-

que les valeurs de  $\frac{K}{\gamma}$  (K par centimètre carré et par degré,  $\gamma$  en unités électromagnétiques) résultant des mesures de Jaeger et Diesselhorst, pour la température de 18°. La seconde colonne donne le coefficient de variation de ce rapport avec la température entre 18° et 100°. La loi n'est pas rigoureuse; cependant la constance est assez grande étant donné que K varie dans le rapport de 1 à 12.

Loi de Wiedemann-Franz

Il est mesuré en thermies par centimètre carré et par degré,  
 en unités électromagnétiques C.G.S.

	Rapport $\frac{k}{\gamma}$	Coefficient de variation.
Al à 99 pour 100	6,36 . 10 <sup>10</sup>	4,37 . 10 <sup>-3</sup>
Cu	6,11	3,95
Ag	6,86	3,77
Au	7,09	3,75
Ni à 97 pour 100	6,99	3,93
Zn	6,12	3,85
Cd	7,06	3,73
Pb	7,15	4,07
Sn	7,35	3,40
Pt	7,53	4,64
Pa	7,54	4,69
Fe (0,1 pour 100 C)	8,02	4,32

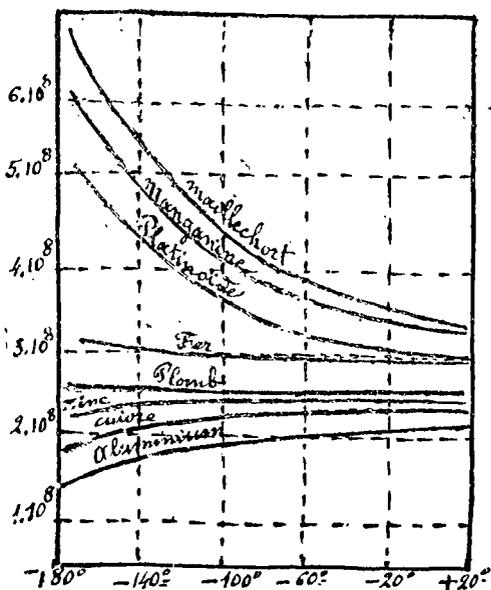
La formule (440) où  $\alpha$  et  $e$  sont des constantes universelles connues permet de calculer  $\frac{k}{\gamma}$ . Pour la température de 18°C (T = 291°), on trouve 6,5 . 10<sup>10</sup>; les chiffres du tableau montrent que l'accord avec l'expérience est satisfaisant.

D'après la théorie, l'expression

$\frac{K}{\gamma T}$  doit être une constante

égale à 2,27 . 10<sup>8</sup> M. Ces a construit les courbes qui représentent les variations réelles de cette grandeur; ces courbes représentées ci-contre sont intéressantes car elles semblent bien montrer que la loi de Wiedemann-Franz est une loi limite d'autant plus approchée que la température est plus haute.

L'expérience a encore montré que K varie peu avec la température et que  $\gamma$  varie à peu

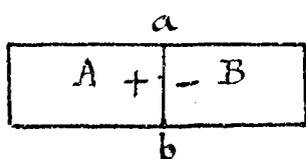


près en raison inverse de  $T$  pour les métaux purs (courbes de la page 108).

## §. 2.- Electricité de contact.- Phénomènes Thermo-électriques.-

### 326.- Force électromotrice de contact.- Effet Peltier.

Soient deux métaux A et B ; mettons les au contact suivant la surface  $ab$ , tous deux étant à la même température. Le « gaz corpusculaire » possède une pression  $p_A$  dans le métal A, une pression  $p_B$  dans B données par la formule de la théorie cinétique (1<sup>ère</sup> année, n<sup>o</sup> 8).

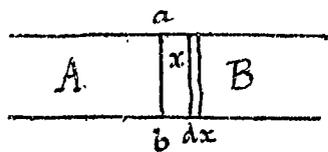


$$p_A = \frac{1}{3} n_A m v^2$$

$$p_B = \frac{1}{3} n_B m v^2$$

Supposons  $p_A > p_B$  ; il y a passage des corpuscules de A à B ; alors A se charge positivement et B se charge négativement. Le courant ne dure que jusqu'au moment où la charge positive de A qui retient les électrons et la charge négative de B qui les repousse donnent un champ électrique qui produit des actions faisant équilibre à la différence de pression.

Couche de passage. - Soit  $h$  la force électrique qui se développe ainsi à la distance  $x$  de la surface de contact ; dans la tranche d'épaisseur  $dx$ , il y a  $n dx$  électrons par unité de surface, et la force qui s'exerce sur l'unité de surface de la tranche



$dx$  est  $neh dx$  ; cette force fait équilibre à la variation

de pression  $\frac{dp}{dx} dx$  ; on a donc :

$$neh = - \frac{dp}{dx}, \text{ ou comme } p = \frac{2}{3} n \alpha T$$

$$(III) \quad h = - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \frac{1}{n} T \frac{dn}{dx}$$

Pour avoir la différence de potentiel de contact, intégrons sur toute l'épaisseur de la couche de passage :

$$(442) \quad \Psi_{A,B} = \int_A^B h dx = -\frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e} \int_A^B \frac{dn}{n} = \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e} \log \frac{n_A}{n_B}$$

ou, très sensiblement, en volts

$$\Psi_{A,B} = \frac{1}{40} \frac{T}{273} \log \frac{n_A}{n_B}$$

Ainsi, d'après cette théorie, la force électromotrice de contact est due à la différence de concentration des électrons libres dans les deux métaux.

C'est la force électromotrice de l'effet Peltier.

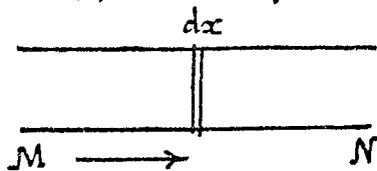
Loi de Volta. — Plaçons un métal C entre A et B, la différence de potentiel entre A et B est :

$$\frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e} \log \frac{n_A}{n_C} + \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e} \log \frac{n_C}{n_B} = \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e} \log \frac{n_A}{n_B}$$

elle est la même que si le métal intermédiaire n'existait pas, et si les métaux extrêmes sont identiques, elle est nulle.

### 327. — Effet Thomson.

Supposons que dans le conducteur MN la température



dans des températures croissantes et du courant.

soit croissante de M en N et comptons les abscisses  $x$  dans ce sens; faisons passer un courant  $i$  également de même sens.

Entre les sections  $x, x+dx$ , il existe une différence de température  $dT$ ; il existe aussi

une différence de pression corpusculaire, car  $n$  dépend de  $T$ . Il y a donc deux transports de chaleur dus, l'un à la différence de température, l'autre à la différence de pression. Nous allons les exprimer.

1°) — Le courant  $i$  transporte un électron de la section  $x+dx$  à la section  $x$ . L'énergie cinétique de cet électron passe de la valeur  $\alpha(T+dT)$  à la valeur  $\alpha T$ ; la différence  $\alpha dT$  est un dégagement de chaleur dans la tranche  $dx$ .

2°) - La différence de pression engendre une force électrique représentée non plus par (441) puisque  $T$  est variable, mais par :

$$(443) \quad h = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \frac{1}{n} \frac{d(nT)}{dx}$$

Le travail exécuté dans le transport contre la force  $h_e$  est négatif ; il correspond à une absorption de chaleur  $h_e dx$ .

Au total, la chaleur dégagée pendant le transport par unité de surface de la tranche d'épaisseur  $dx$  est :

$$nv' \left( \alpha dT - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{n} d(nT) \right)$$

$v'$  étant l'excès de vitesse moyen que le courant communique aux électrons de  $N$  vers  $M$ . Or  $nv' = \frac{u}{e}$ , on a donc :

$$(444) \quad dW = \frac{u}{e} \left( \alpha dT - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{n} d(nT) \right)$$

et le coefficient de Thomson  $H$  est :

$$(445) \quad H = \frac{dW}{udT} = \frac{\alpha}{e} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{n} \frac{d(nT)}{dT} \right) = \frac{\alpha}{3e} \left( 1 - T \frac{d \ln n}{dT} \right)$$

Le premier terme de  $H$ ,  $\frac{\alpha}{3e}$  est une constante égale à  $0,43 \cdot 10^4$  ; or les valeurs de  $H$  sont beaucoup plus petites ; les deux termes doivent donc à peu près se compenser. Si la compensation était complète, la formule (445)

entraînerait  $\text{Log } n = \frac{1}{2} \text{Log } T + C^{\text{te}}$ , c'est-à-dire  $n$  propor-

tionnel à  $\sqrt{T}$ . On arrive donc à la conclusion que  $n$  doit toujours varier à peu près suivant cette loi. Ce résultat entraîne une grosse difficulté. En effet la

conductibilité  $\gamma$  est proportionnelle à  $\frac{nv\ell}{T}$  ;  $v$  est propor-

tionnel à  $\sqrt{T}$ ,  $\gamma$  varie à peu près comme  $\frac{1}{T}$  ; alors si  $n$

est proportionnel à  $\sqrt{T}$ , le libre parcours  $\ell$  doit varier

NE

sensiblement raison inverse de  $T$ . Il est difficile de s'expliquer une variation aussi rapide si les chemins moyens des électrons sont limités par les molécules mêmes du métal. Sir J.J. Thomson a émis l'hypothèse suivante: Les métaux sont formés de cristaux enchevêtrés, visibles au microscope. On peut alors penser que les particules qui limitent le chemin moyen sont des agglomérations de nombreuses molécules et que ces agglomérations se désagrègent quand la température s'élève.

### 328.- Courants thermo-électriques:

Les effets Peltier et Thomson ont pour conséquence la production d'un courant thermo-électrique dans un circuit hétérogène dont toutes les parties ne sont pas à la même température.

Considérons, par exemple, un circuit ouvert constitué par trois conducteurs: le premier et le troisième sont formés par le métal A, le second par le métal B. La température est constante le long du premier; elle varie de  $T_1$  à  $T_2$  dans B, puis revient de  $T_2$  à  $T_1$  dans le troisième conducteur A'. La différence de potentiel aux extrémités sera la force électromotrice du couple AB entre les températures  $T_1$  et  $T_2$ .

Évaluons les variations de potentiel successives.

NE

Passage de A à B	$\frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} T_1 \log \frac{n_{1A}}{n_{1B}}$
Le long de B	$-\frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \int_{T_1}^{T_2} T \frac{d \log (n_B T)}{dT} dT$
Passage de B à A'	$\frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} T_2 \log \frac{n_{2B}}{n_{2A}}$
Le long de A'	$-\frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \int_{T_2}^{T_1} T \frac{d \log (n_A T)}{dT} dT$

La somme donne la force électromotrice totale.

$$(446) \quad E = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \int_{T_1}^{T_2} \log \frac{n_A}{n_B} dT$$

Les lois fondamentales se déduisent de ces formules. Le long d'un même métal en circuit fermé la variation

totale de potentiel est nulle car  $\Psi_{T_1, T_2} = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \int_{T_1}^{T_2} T \frac{d \log(nT)}{dT} dT$

est nul si  $T_1 = T_2$ . C'est la loi de Magnus.

D'autre part la formule (446) montre que la force électromotrice entre  $T_1$  et  $T_2$  est la somme des forces qu'on obtiendrait entre  $T_1$  et  $T$ , puis entre  $T$  et  $T_2$ . C'est la loi des températures intermédiaires. La loi des métaux intermédiaires est également contenue dans la formule.

NE

Les formules (442) (445) (446) ont pour conséquence que la force électromotrice de Peltier, le coefficient de Thomson, et la force électromotrice d'un circuit thermo-électrique sont reliés par les relations

$$(447) \quad H_A - H_B = -T \frac{d}{dT} \left( \frac{\pi_{A,B}}{T} \right) = -T \frac{dP}{dT}$$

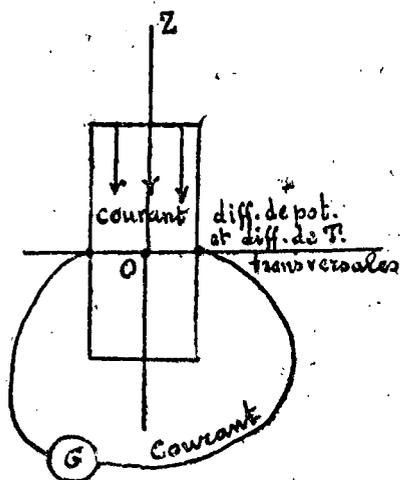
$$(448) \quad E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\pi}{T} dT$$

Ce sont les relations (92) et (91) (page 133) que nous avons déduites précédemment de l'application des principes de la thermodynamique.

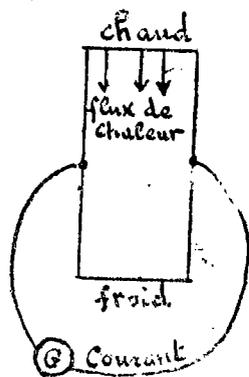
## § 5. Effets galvanomagnétiques et thermomagnétiques.

### 329. — Phénomènes généraux.

Soit un parallépipède rectangle à arêtes parallèles aux axes de coordonnées ( $Ox$  normal au plan de la figure) placé dans un champ magnétique parallèle à  $Ox$ ; on observe les phénomènes suivants:



magnétique (OZ) et longitudinal au champ dans la direction Ox.



L'existence de ces phénomènes se comprend immédiatement par la théorie électronique. Le courant d'électrons, qu'il soit dû à la convection produite par une différence de potentiel, ou à une diffusion due à une chute de température, est dévié transversalement par le champ magnétique. Les différences de concentration corpusculaire qui en résultent provoquent à la fois une différence de potentiel et une différence de température.

Nous examinerons seulement l'effet Hall.

### 330.- — Phénomène de Hall.-

Reprenons la figure de la page 168. Le courant

I.- Un courant électrique parallèle à OZ, produit les effets galvanomagnétiques:

1°) - Une différence de potentiel transversale dans la direction Oy, entraînant une déformation des lignes de courant (effet Hall),

2°) - Une différence de température transversale dans la même direction Oy (Von Ettinghausen et Nernst - 1887).

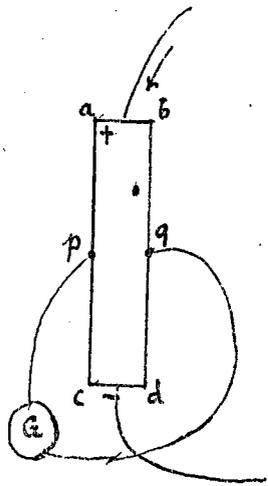
3°) - Un changement de résistance transversal au champ

II.- Un flux de chaleur parallèle à OZ produit:

1°) - Une différence de potentiel dans la direction Oy (V. Ettinghausen et Nernst - 1887)

2°) - Une différence de température dans la direction Oy (Righi et Seduc 1887)

3°) - Un changement de conductibilité calorifique parallèlement à OZ et à Ox.



électrique est dévié vers la gauche si le champ magnétique est dirigé en avant du plan du papier; le courant étant formé d'électrons négatifs, il y a accumulation d'électricité négative à gauche, donc abaissement du potentiel en ac et accroissement en bd.

Soit  $h'$  la force électrique du champ transversal, la force  $h'e$  qui agit sur l'électron fait équilibre à la force électrodynamique  $H e v'$ ; on a donc :

$$h' = H v' = \frac{H u}{n e} = R H u \quad (u \text{ densité de courant})$$

$R = \frac{1}{n e}$  est le coefficient de Hall.

C'est bien la formule (119) p. 169.

On conçoit à la rigueur que  $R$  puisse ne pas être constant pour un même métal (à température constante), c'est-à-dire puisse dépendre de  $H$ . Mais l'effet Hall devrait avoir toujours le sens (appelé négatif) qui correspond au sens prévu pour les électrons négatifs. Nous avons déjà dit qu'il n'en est pas ainsi (n° 83) et même que dans le bismuth, on peut produire l'inversion par des variations de température ou d'intensité du champ.

Une explication par un double flux de charges positives et négatives a été tentée par Ozude. Non seulement cette manière de voir soulève des difficultés, mais elle est incompatible avec nos connaissances actuelles sur la structure de l'atome : les charges positives, restant liées au noyau atomique, n'ont pas la mobilité des électrons.

Ici, J.J. Thomson a proposé d'admettre que, au moment des chocs, le champ magnétique peut agir en sens inverse du champ habituel. Si les molécules sont magnétiques, elles s'orientent et dans le voisinage de chacune d'elles il y a un champ opposé au champ extérieur; un corpuscule traversant cette région est donc dévié en sens opposé.

NE

NE

Sans doute, ce sont précisément les métaux magnétiques qui donnent en général l'effet positif, mais ce n'est pas une loi générale, car le tellure, qui est diamagnétique, est le corps qui donne l'effet positif le plus grand. Il y a là une objection à la théorie de Thomson.

Néanmoins l'explication semble devoir être cherchée dans le même ordre d'idées, en faisant intervenir les champs moléculaires de P. Weiss.

On doit faire un rapprochement entre l'effet Hall et l'effet Zeeman; le premier s'exerce sur les électrons libres, le second sur les électrons liés. Dans un cas comme dans l'autre, on a observé deux phénomènes de sens opposés alors que la théorie prévoyait un sens unique.

---

## - Chapitre VI -

### La structure de l'atome -

L'étude des décharges électriques dans les gaz raréfiés, met en évidence une dissymétrie entre l'électricité négative et l'électricité positive.

D'une part, les rayons d'électricité négative sont constitués par des électrons, de masse 1800 fois plus petite que la masse du plus léger des atomes ; d'autre part, les rayons d'électricité positive sont formés d'ions, c'est-à-dire de matière électrisée.

Cette dissymétrie apparaît sous une forme plus frappante encore dans le rayonnement des corps radioactifs : les rayons  $\beta$  sont des électrons, les rayons  $\alpha$  sont des ions d'hélium. Dans cette émission, qui a certainement son origine dans les profondeurs de l'atome, on ne voit pas apparaître d'électrons positifs comparables aux électrons négatifs.

Dans l'effet photo-électrique, dans l'effet Edison, phénomènes qui paraissent intéresser seulement la superficie de l'atome, ce sont des électrons négatifs qui sont expulsés de la matière.

Il était naturel d'envisager l'atome comme formé d'un noyau chargé positivement, constituant la presque totalité de la masse atomique, entouré d'une atmosphère d'électrons, gravitant autour de lui comme les planètes autour du soleil. Cette idée a été émise, il y a plus de vingt ans, par M. Jean Perrin.

Mais cette conception de l'atome entraînait des difficultés qui, jusqu'à ces dernières années, ont paru insurmontables.

Ses lois de l'électrodynamique paraissaient, en effet, exiger un rayonnement continu des électrons planétaires dont le mouvement n'est pas uniforme (n° 243). Ce rayonnement entraînerait une perte continue d'énergie, et par suite une modification continue des orbites : aucun système ne serait permanent. Ses durées de révolution

des électrons changeraient perpétuellement, pouvant prendre une infinité de valeurs. Comment comprendre la fixité des raies spectrales ?

Pour expliquer l'absorption, la difficulté était la même ; une augmentation continue de force vive produirait une modification progressive des dimensions de l'orbite et de la durée de révolution.

Aussi les physiciens ont-ils cherché d'autres modèles de l'atome. Sir J. J. Thomson a imaginé un atome formé d'une sphère chargée positivement renfermant des électrons négatifs ; ceux-ci possèderaient des positions d'équilibre ; écartés de ces positions, ils seraient soumis à une force "quasi-élastique" proportionnelle à l'écart et vibreraient avec une période bien déterminée.

W. Ritz, voyant dans le magnéton un constituant de la matière, a supposé l'existence de bâtonnets de même moment magnétique, placés bout à bout en files linéaires.

Cependant divers faits, que nous allons exposer maintenant, ont prouvé l'extraordinaire concentration de la masse atomique, et ont amené Sir Rutherford à faire un retour vers l'idée la plus naturelle, vers la conception d'un système solaire en miniature.

## § 1 - Concentration de la masse atomique -

Nous rappellerons d'abord que la constance des capacités calorifiques atomiques des gaz monoatomiques, jusqu'aux très hautes températures, a pour conséquence, par application de la théorie des quanta, une concentration formidable de la majeure partie de la masse de l'atome (voir cours de 1<sup>ère</sup> année n<sup>os</sup> 56 et 57 p. 70).

### 331 - Le passage des particules $\alpha$ à travers les atomes -

On considère les rayons  $\alpha$  comme très absor-

tables : sans doute, si on les compare à ce point de vue avec les rayons  $\beta$  ; mais, lorsqu'on y réfléchit, on peut s'étonner qu'un atome matériel, même animé de la vitesse de 20.000 kilomètres par seconde, puisse parcourir un aussi grand trajet dans la matière.

Si, en effet, on envisage le diamètre atomique, tel qu'il apparaît dans la théorie cinétique, c'est-à-dire le diamètre de choc dans l'agitation thermique, les atomes d'aluminium, par exemple, ne sont guère moins serrés que les boulets d'une pile de boulets ; il est impossible d'admettre que la particule  $\alpha$  passe dans les interstices ; elle passe donc dans les atomes eux-mêmes, et elle en traverse environ 100.000 avant d'être arrêtée.

Ses recherches de Sir Rutherford et de ses élèves ont conduit aux résultats suivants :

Les rayons  $\alpha$  subissent, en traversant des lames métalliques très minces de légères déviations, réparties au hasard ; mais accidentellement, une particule peut se trouver considérablement déviée ; on observe ce phénomène en recevant les rayons sur un écran de blende (spinharscope, n° 271) où l'on constate de temps en temps quelques grandes déviations pouvant aller jusqu'à des angles de  $150^\circ$  avec la direction primitive du faisceau. Ces déviations exceptionnelles sont extrêmement rares.

La méthode de M. C. T. R. Wilson (n° 271) permet, comme nous l'avons vu, de photographier les trajectoires des rayons  $\alpha$  dans l'air et de constater l'incurvation, absolument quelconque, des trajectoires.

De temps en temps, il y a des courbes brusques ; parfois aussi la trajectoire se dédouble. Les grandes déviations s'expliquent aisément si l'on admet que l'ion hélium a frappé un centre matériel ; le dédoublement est dû au noyau heurté qui a pris une vitesse suffisante pour ioniser l'air.

Sir Rutherford conclut de ses observations que, dans les déviations anormales, la particule  $\alpha$  a subi l'action d'un champ électrique intense provenant d'un noyau très petit ; la grandeur de ces déviations

croît avec le poids atomique de l'élément traversé, ce qui montre que la charge du centre déviant augmente avec ce poids atomique. Pour l'or, (poids atomique 197), Sir Rutherford a calculé que la charge du centre devait être de l'ordre de  $\pm 100 e$ .

D'autre part, pour produire une grande déviation de la particule  $\alpha$ , le noyau doit posséder, non seulement une forte charge, mais une forte masse; puisque les charges positives restent liées à la matière, alors que les charges négatives sont emportées par les électrons négatifs, légers et mobiles, la forte charge du noyau doit être positive.

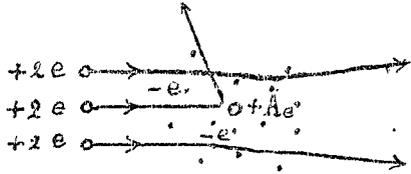
D'après les résultats des expériences, Sir G. Darwin a calculé que le diamètre du noyau de l'or n'est pas supérieur à  $3 \cdot 10^{-12}$ , et que celui du noyau de l'hydrogène ne dépasse pas  $2 \cdot 10^{-13}$ . C'est là une limite supérieure: les noyaux peuvent être plus petits encore.

Ainsi le noyau de l'hydrogène n'a pas des dimensions supérieures à celles de l'électron négatif, bien que sa masse soit 1800 fois plus grande. Il est probable - mais ce n'est pas démontré - que l'ion d'hydrogène est l'électron positif, c'est-à-dire que sa masse est d'origine purement électromagnétique; son diamètre doit alors être 1800 fois plus petit que celui de l'électron négatif, puisque la masse est d'autant plus grande que la concentration de la charge est plus forte (n° 247).

La déformation de la trajectoire d'une particule  $\alpha$ , observée dans la grande majorité des cas, s'explique très bien en supposant le noyau entouré d'électrons négatifs. Si, dans son trajet, la particule  $\alpha$  se dirige vers un électron, l'action de ce dernier dévie un peu la particule; mais l'électron subit lui-même la force attractive de la particule; comme il a une faible masse, il prend de la vitesse et est souvent arraché de l'atome: c'est le phénomène de l'ionisation.

En somme, la particule  $\alpha$  traverse un atome aussi facilement qu'un astre errant, tel qu'une comète traverse le système solaire; l'astre est un peu dévié par les planètes, fortement dévié par le noyau, c'est-à-dire par le soleil, s'il passe à

proximité de lui. Il y a cependant une différence : pour les autres les forces sont toujours attractives ; pour la particule  $\alpha$  l'action d'un électron est attractive et celle du noyau est répulsive.



La figure ci-contre donne la représentation du passage de trois particules  $\alpha$  dans un atome.

Une autre conséquence des recherches de Sir Rutherford est que le nombre de charges élémentaires du noyau est toujours voisin de la moitié du poids atomique. Si l'on rapproche ce résultat de ceux que nous avons exposés précédemment (n<sup>os</sup> 283 et 299) on voit qu'il y a toutes chances pour qu'il y ait identité entre le nombre de charges du noyau et le nombre atomique (1), c'est-à-dire que la charge du noyau détermine son rang dans la classification des éléments.

### 332 - L'atome de Rutherford -

Un noyau très petit et très dense, possédant une charge  $+ Ae$  ( $A$  nombre atomique,  $e$  charge élémentaire) est entouré de  $A$  électrons négatifs, formant autant de planètes qui gravitent autour de lui.

Le noyau ne peut pas être formé de charges positives séparées, sans charges négatives, car les charges positives se repoussant ne pourraient rester assemblées.

Si le noyau n'est pas une particule unique, il est constitué par des particules positives et des électrons négatifs.

Nous sommes fixés dans le cas des corps radioactifs, puisque ceux-ci émettent des particules  $\alpha$  et des corpuscules  $\beta$ . Les énormes vitesses constatées (la vitesse de certains corpuscules  $\beta$  atteint 298.000 Kilomètres par seconde) prouvent que le noyau est le siège de mouvements fantastiques.

(1) Cette idée a été exprimée pour la première fois par M. Van den Broek (1913).

Sans doute, dans les autres corps, il existe aussi un noyau complexe, sauf très probablement pour l'hydrogène et peut être aussi pour l'hélium. Nous avons déjà dit que l'hydrogène est vraisemblablement un électron positif; d'autre part le noyau d'hélium, qui constitue la particule  $\alpha$ , entre dans la constitution des noyaux de nombreux corps; ce pourrait être un second électron positif.

Nous raisonnons dans l'hypothèse que l'ion d'hydrogène est l'unique électron positif. Nous sommes alors conduits aux conceptions suivantes:

Le noyau d'hélium est un groupement de 4 électrons positifs et de 2 électrons négatifs. Sa valeur du poids atomique de l'hélium, presque exactement quadruple de celle du poids atomique de l'hydrogène, est en faveur de cette manière de voir: si le noyau d'hélium était un second électron positif, il n'y aurait aucune raison pour que  $He = 4$ .

Ce groupement 4 électrons positifs et 2 électrons négatifs intervient "en bloc" dans la constitution d'autres corps.

Pour un corps quelconque la charge résultante du noyau est la différence entre la charge totale des électrons positifs et la charge totale des électrons négatifs nucléaires. Puisque la presque totalité de la masse est due aux électrons positifs, si l'électron positif est le noyau d'hydrogène, le nombre des électrons positifs est égal à la partie entière  $P$  du poids atomique. La charge totale des électrons positifs est donc  $Pe$ ; comme la charge résultante est  $+Ae$ , la charge des électrons négatifs nucléaires est  $-(P-A)e$ , c'est-à-dire que le nombre de ces électrons est  $P-A$ . Le nombre des électrons négatifs satellites est  $A$ .

Prenons pour exemple l'uranium, le plus lourd des atomes, de poids atomique 240. Le nombre des électrons positifs du noyau est 240; son rang dans la classification étant 92, le noyau contient  $240-92$  c'est-à-dire 148 électrons négatifs. Autour du noyau gravitent 92 électrons négatifs.

Le noyau des atomes tels que celui de l'uranium est donc un monde compliqué ce qui est bien

conforme aux idées que suggère la loi statistique de la dégradation radioactive (n° 284).

Enfin, le noyau atomique est un monde fermé, inaccessible aux actions extérieures; les propriétés physiques et chimiques des corps sont uniquement déterminées par la répartition des électrons négatifs qui gravitent autour du noyau. Comme cette répartition ne dépend que de la charge  $Ae$  du noyau, les corps isotopes, qui ont même nombre atomique  $A$ , ont exactement les mêmes propriétés physiques et chimiques.

## § 2 - Théorie de Niels Bohr <sup>(1)</sup>

La conception précédente de la structure de l'atome n'est pas seulement celle qui satisfait le mieux l'esprit; c'est, parmi celles qui ont été imaginées, la seule qui s'accorde avec les résultats expérimentaux: on peut presque dire qu'elle s'impose.

Cependant, si l'on s'en tient aux lois habituelles de l'électrodynamique, les difficultés précédemment signalées restent entières. Il appartient à M. Bohr d'avoir, par une application géniale de la théorie des quanta, levé toutes les objections.

### 333 - Forme canonique des équations du mouvement (Hamilton)

Il n'est pas inutile d'indiquer d'abord la forme hamiltonienne des équations du mouvement. Ces équations comportent une généralisation qui fera comprendre sous quelle forme la théorie des quanta s'applique à un mobile gravitant autour d'un centre.

Définition et loi de Newton ("les principes").  
 1<sup>o</sup> Quantitas motus est mensura ejusdem, orta ex

(1) Pour plus de détails voir A. Sommerfeld  
 "Atombau und Spektrallinien" nouvelle édition (i)

velocitate et quantitate materiae conjunctionem." (1)

La quantité de mouvement est le produit de la masse et de la vitesse.

2<sup>o</sup> "Mutationem motus proportionaliter esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur."

La variation de la quantité de mouvement est, en grandeur et direction, proportionnelle à la force appliquée.

Soit  $p = mV$  la quantité de mouvement ou impulsion d'un point matériel de masse  $m$ .

Désignons par  $q_1, q_2, q_3$  les coordonnées de position du point par rapport à 3 axes rectangulaires ( $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$ ); la composante  $p_K$  de l'impulsion correspondant à  $q_K$  est:

$$(449) \quad p_K = m q'_K \quad (q' \text{ dérivée de } q \text{ par rapport au temps } t).$$

Soit  $F$  une force appliquée dérivant d'une énergie potentielle  $V$ ; nous écrivons la loi de Newton:

$$(450) \quad p'_K = F = - \frac{\partial V}{\partial q_K} \quad (K = 1, 2, 3)$$

D'autre part l'énergie cinétique  $T$  est:

$$(451) \quad T = \frac{m}{2} \sum q'^2 = \frac{1}{2m} \sum p_K^2 \quad (\text{d'après } 449)$$

L'énergie totale considérée comme fonction des  $q_K$  et  $p_K$  est la fonction  $H$  de Hamilton. Si on a:

$$H(q, p) = V + T; \quad \frac{\partial H}{\partial q_K} = \frac{\partial V}{\partial q_K}; \quad \frac{\partial H}{\partial p_K} = \frac{\partial T}{\partial p_K} = \frac{p_K}{m}$$

Ses équations (449) et (450) s'écrivent par suite:

$$(452) \quad \frac{dq_K}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_K}; \quad \frac{dp_K}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_K}$$

(1) Nous citons cette définition et cette loi de Newton parce que nous aurons à y revenir dans l'exposé du principe de relativité. On ignore souvent que Newton a introduit, à côté de la grandeur cinématique accélération, la grandeur dynamique impulsion.

Ce sont les équations canoniques, remarquables non seulement par leur symétrie, mais principalement parce qu'elles restent les mêmes dans un changement arbitraire de coordonnées, et parce qu'elles s'étendent à un système quelconque. L'impulsion est définie par

$$(453) \quad p_K = \frac{\partial T}{\partial q'_K}$$

L'énergie cinétique étant une fonction des  $q_K$  et  $q'_K$ .

### 334 - Oscillateur linéaire et oscillateur en mouvement de révolution -

Dans la généralisation qui précède, les  $q_K$  sont des coordonnées de position quelconques; les impulsions  $p_K$  généralisées sont, par définition, les dérivées de l'énergie cinétique  $T$  par rapport aux  $q'_K$  (les  $q'_K$  sont les dérivées des  $q_K$  par rapport au temps). C'est seulement dans le cas particulier où les  $q_K$  sont les coordonnées habituelles  $x, y, z$ , que les  $p_K$  sont les composantes de la quantité de mouvement  $mV$ .

Les  $p_K$  et  $q_K$  déterminent, à un instant quelconque, l'état ou la "phase" du système.

Oscillateur linéaire de Planck. (1) — Supposons un point matériel (ou une charge de masse électromagnétique  $m$ ) oscillant périodiquement suivant une droite, avec une amplitude constante.

Nous pouvons prendre  $p$  et  $q$  comme coordonnées;  $q$  est alors la coordonnée de position suivant la droite et  $p = mV$ . Portons  $p$  et  $q$  suivant 2 axes rectangulaires dans un plan, que nous appellerons le plan de phase. Nous pouvons tracer les "trajectoires de phase" c'est-à-dire les lignes dont les points représentent les états de mouvement successifs de l'oscillateur. Nous avons :

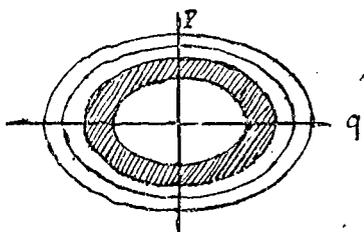
$$(454) \quad q = a \sin 2\pi \nu t$$

(1) Question déjà traitée dans le cours de 1<sup>ère</sup> année (n° 361)

$$(455) \quad p = m \dot{q} = 2\pi \nu m a \cos 2\pi \nu t.$$

L'élimination de  $t$  nous donne, pour une valeur constante de l'amplitude, c'est-à-dire pour une valeur déterminée de l'énergie totale (potentielle et cinétique  $W+T$ ), une trajectoire de phase elliptique :

$$(456) \quad \frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \quad b = 2\pi \nu m a$$



La surface de cette ellipse est :

$$(457) \quad \pi a b = 2\pi^2 \nu^2 m a^2 = \frac{W}{\nu}$$

car  $2\pi^2 \nu^2 m a^2$  est l'énergie totale constante  $W = V + T$  de l'oscillateur.

(pour  $t=0$  l'énergie potentielle est nulle et l'énergie cinétique est  $\frac{m}{2} a^2 (2\pi \nu)^2 = W$ .)  
 A chaque valeur de l'énergie  $W$  correspond une ellipse particulière ; toutes les ellipses sont semblables car  $\frac{b}{a} = 2\pi \nu m = C$ .

Appliquons maintenant la théorie des quanta : l'énergie correspondant à une fréquence  $\nu$  ne peut varier d'une façon continue ; elle varie par quanta égaux à  $h\nu$ .

L'énergie totale  $W$  de l'oscillateur linéaire doit donc être un multiple de  $h\nu$ . Traduisons ceci dans la représentation par les trajectoires de phase : la surface  $\frac{W}{\nu}$  d'une ellipse (form. 457) est nécessairement un multiple de  $h$ . Nous devons donc considérer, non plus toutes les ellipses imaginables, mais seulement une série d'ellipses ayant pour surfaces  $h, 2h, \dots, nh, \dots$  l'intégrale :

$$(458) \quad \iint dp dq = \int p dq = nh$$

donnant l'aire de la  $n^{\text{e}}$  ellipse est l'intégrale de phase.  
 L'élément d'action  $h$  est la surface comprise entre deux ellipses consécutives : c'est le domaine élémentaire d'extension en phase.

Ses ellipses  $h, 2h, \dots, nh$  représentent les états de mouvement stables de l'oscillateur linéaire ; ce sont les états stationnaires. Ses autres états sont instables.

Lorsque l'oscillateur est dans un état stationnaire, son énergie reste constante. Mais, sous une influence extérieure, il peut changer son énergie.

Il passe alors d'un état stationnaire à un autre état stationnaire : il émet de l'énergie quand son point représentatif passe sur une ellipse plus petite, il absorbe de l'énergie quand le point passe sur une ellipse plus grande.

Telle est la traduction de l'hypothèse des quanta. Cette représentation conduit à une généralisation immédiate.

Imaginons une coordonnée de position  $q$ , non plus linéaire, mais quelconque ; soit  $p$  l'impulsion qui lui correspond (form. 453).

Nous aurons des trajectoires de phase qui seront des courbes dépendant du choix de  $q$  et de  $p$  ; l'hypothèse des quanta exige que l'aire comprise entre 2 trajectoires de phase consécutives soit égale à l'élément d'action  $h$ , ou que l'intégrale de phase soit un multiple entier de  $h$ .

C'est sous cette forme que nous allons appliquer la théorie à l'oscillateur en mouvement autour d'un centre.

Oscillateur en mouvement de révolution circulaire. — Soit  $a$  le rayon du cercle ; nous prenons comme coordonnée de position  $q$  l'angle  $\varphi$  du rayon vecteur avec une direction fixe. La vitesse angulaire est  $q'$  et l'énergie cinétique est :

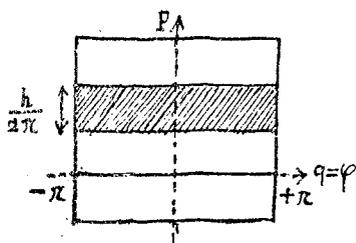
$$(459) \quad T = \frac{m}{2} a^2 q'^2$$

et, d'après (453), (460)  $p = m a^2 q'$

l'impulsion (au sens généralisé de ce mot) est ici le moment de la quantité de mouvement.

Si la vitesse angulaire est constante, ce que nous supposons,  $q'$  est constant et  $p$  est constant. La trajectoire de phase est une droite parallèle à l'axe des  $q$ . Il n'y a plus de courbe fermée.

Mais nous remarquons que la phase de l'oscillateur repasse par les mêmes valeurs à chaque ré-



volution complète. Sa trajectoire de phase est donc une portion de droite comprise entre  $q = \pm \pi$ , et pour la  $n^{\text{ième}}$  trajectoire, l'intégrale de phase est  $2\pi p_n$ .

L'hypothèse des quanta s'exprime donc ici par la relation :

$$(461) \quad p_n = n \frac{h}{2\pi}$$

### 335. — Le spectre de l'hydrogène —

Première application de la théorie des quanta —

Il résulte de l'extension précédente de la théorie des quanta que, pour un oscillateur en mouvement circulaire uniforme autour d'un centre, ce n'est plus l'énergie qu'il convient de "quantifier"; c'est le moment de la quantité de mouvement. Ses états stables ou états stationnaires sont seulement ceux pour lesquels le moment de la quantité de mouvement est un multiple entier de  $\frac{h}{2\pi}$ .

C'est là le point <sup>2 $\pi$</sup>  essentiel de la théorie de Bohr. Considérons le cas le plus simple : un électron de charge  $-e$  et de masse  $m$  tourne d'un mouvement circulaire uniforme autour d'un noyau de charge  $+E$  ayant une forte masse par rapport à celle de l'électron; soient  $a$  le rayon de la trajectoire,  $v$  la vitesse linéaire,  $\omega$  la vitesse angulaire. La force centrifuge équilibre la force attractive donnée par la loi de Coulomb, les charges  $e$  et  $E$  étant mesurées en unités électrostatiques, nous avons :

$$(462) \quad \frac{mv^2}{a} = mv\omega = ma\omega^2 = \frac{eE}{a^2}$$

ou  $(463) \quad ma^3\omega^2 = eE$

Cette formule résulte de la loi d'inertie. Nous allons maintenant chercher les orbites qui, d'après

la théorie des quanta, peuvent seules être stables. Il faut écrire que le moment de la quantité de mouvement est un multiple entier de  $\frac{h}{2\pi}$ .

$$(464) \quad p = m v a = m a^2 \omega = n \frac{h}{2\pi} \quad (n \text{ nombre entier})$$

Divisant (463) par (464), il vient :

$$(464)^{\text{bis}} \quad v = a \omega = \frac{2\pi e E}{n h}$$

Remplaçant  $a \omega$  par cette valeur dans (463), nous obtenons  $a$ , puis  $\omega$  :

$$(465) \quad a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2 E} ; \quad \omega = \frac{8\pi^3 m e^2 E^2}{n^3 h^3}$$

Ainsi, alors que d'après la loi primitive (n° 248) toutes les orbites seraient possibles, mais qu'aucune ne serait stable puisque l'électron rayonnant d'une façon continue perdrait de l'énergie, la théorie des quanta exige qu'il y ait des orbites stables, et que sur ces orbites, l'électron, dont l'état de mouvement est stationnaire, ne rayonne pas.

Le modèle d'atome de Rutherford peut donc être accepté.

Un état stationnaire serait permanent si le système était isolé, mais l'influence de forces électriques (champ dû à une radiation, ou à une particule électrisée) peut faire passer le système d'un état stationnaire à un autre état stationnaire. L'électron rayonne nécessairement pendant ce passage, car l'énergie correspondant aux deux états n'est pas la même.

Revenons aux équations (465). Il y a un nombre théoriquement infini de trajectoires stables, correspondant à toutes les valeurs entières de  $n$ .

Les rayons des cercles sont proportionnels aux carrés et les durées des révolutions ( $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ ) sont proportionnelles aux cubes des nombres entiers.

Énergie du système. — L'énergie potentielle électrostatique est :

$$(466) \quad V = -\frac{eE}{a} = -\frac{4\pi^2 m e^2 E^2}{n^2 h^2}$$

Le signe - provient de la force attractive. Si nous amenons l'électron de l'infini auprès du noyau, nous recueillons de l'énergie.

L'énergie cinétique est :

$$(467) \quad T = \frac{mv^2}{2} = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{n^2 h^2} = -\frac{1}{2} V$$

L'énergie cinétique est, au signe près, la moitié de l'énergie potentielle.

Quant à l'énergie totale, constante pour une même trajectoire, sa valeur est la suivante :

$$(468) \quad W = V + T = -\frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

elle est inversement proportionnelle au carré du nombre de quanta.

Notre mesure de l'énergie comporte une énergie nulle pour une trajectoire à l'infini, et par suite une énergie négative pour les autres trajectoires, mais cela n'a aucune importance, car il va s'agir de différences d'énergie. Il convient d'ailleurs de remarquer que si nous trouvons une valeur négative, c'est parce que nous ne comptons pas toutes les énergies ; on aurait une énergie positive si l'on comptait l'énergie du champ de l'électron ; il y aurait aussi à compter l'énergie encore plus grande du noyau. Mais ces énergies sont constantes et n'ont pas à intervenir dans les variations.

L'énergie  $W$  (formule 468) étant négative, la plus petite valeur de l'énergie correspond à  $n=1$  ; c'est à dire à la trajectoire la plus voisine du noyau. Celle-ci est donc la plus stable ; elle constitue l'état normal du système. Pour passer sur une trajectoire plus éloignée du noyau, l'électron doit absorber de l'énergie ; il cède au contraire de l'énergie en tombant d'une trajectoire sur une trajectoire plus rapprochée.

Seconde application de la théorie des quanta.

La théorie des quanta fixe, comme nous l'avons vu, les trajectoires stables ou états stationnaires ; elle va maintenant nous permettre de fixer la quantité d'énergie émise quand l'électron passe de l'état initial  $i$  (énergie  $W_i$ ) à l'état final  $f$  (énergie  $W_f$ ).

M. Bohr a posé :

$$(469) \quad W_i - W_f = h\nu$$

$\nu$  est la fréquence de la radiation émise par l'électron dans le passage de l'état  $i$  à l'état  $f$ . Voyons si les conséquences sont vérifiées par l'expérience.

Soient  $n_i$  et  $n_f$  les numéros d'ordre (nombres entiers) des trajectoires initiale et finale,  $n_i$  étant plus grand que  $n_f$  si l'électron rayonne de l'énergie, d'après ce que nous avons vu plus haut.

Portons dans (269) les valeurs de  $W_i$  et de  $W_f$  données par (268) ; il vient :

$$(470) \quad \nu = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = N \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

avec (471) 
$$N = \frac{2\pi^2 m e^2 E^2}{h^3}$$

C'est précisément la forme de la formule de Balmer (1<sup>re</sup> année n° 328, p. 588)

$$(472) \quad \nu = N_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad k = 3, 4, 5, \dots$$

qui donne très exactement les fréquences des raies de l'hydrogène.

Mais il n'y a pas seulement analogie de forme. La constante théorique de Bohr et la constante expérimentale de Balmer sont les mêmes.

En effet, pour l'hydrogène  $E = -e$  ; d'après (471) la constante théorique est  $\frac{2\pi^2 m e^2}{h^3}$ , elle peut être calculée puisqu'on connaît les constantes universelles  $e$  et  $\frac{e}{m} h$ . On a :

$$e = 4,77 \cdot 10^{-10} \text{ (unité électrostatique) } \quad \frac{e}{m} = 1,77 \cdot 10^7 \text{ C } \quad h = 6,55 \cdot 10^{-34} \text{ (Classen)}$$

On trouve 
$$N_H = 3,27 \cdot 10^{15} \text{ Sec}^{-1}$$

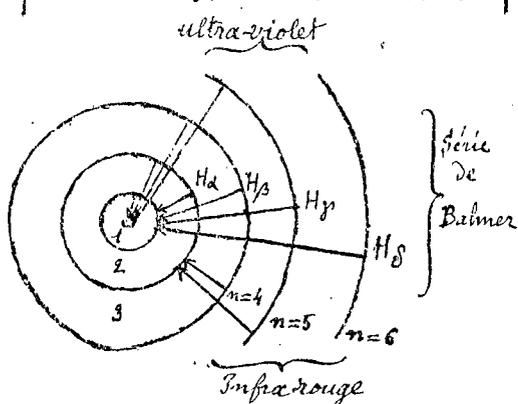
On mesure habituellement  $\nu$  en nombre de longueurs d'onde (réduites au vide) contenues dans  $1 \text{ cm}$  ; il faut alors diviser par  $c$  le nombre que nous venons de calculer ; nous trouvons :

$$(472) \quad N_H = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} = 1,09 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

Le nombre résultant des mesures récentes de M. Paschen est  $1,0967 \cdot 10^5$ . Sa concordance est remarquable.<sup>(1)</sup>

Se modèle d'atome de Rutherford et la théorie des quanta permettent donc de prévoir le spectre de lignes de l'hydrogène.

Ajoutons que le diamètre du premier anneau stable ( $n=1$ ) correspondant à l'état normal de l'hydrogène calculé d'après (465) est  $2a = 1,06 \cdot 10^{-8}$  ce qui est bien l'ordre de grandeur assigné à l'atome par la théorie cinétique.



La figure ci-contre représente les six premières trajectoires stables de l'unique électron négatif de l'atome de l'hydrogène. Le petit cercle 1 figure l'état normal.

La série de Balmer (spectre visible et ultra-violet) est donnée par l'électron partant d'un état stationnaire d'ordre élevé pour aboutir à l'état d'ordre 2 ( $n$  est

égal à 2 dans la formule de Balmer). Inversement, dans le cas de l'absorption, l'électron part de l'état 2 pour aboutir à un état d'ordre  $n > 2$ .

L'aboutissement à l'état normal  $n=1$  donne la série ultra-violette de Lyman.

L'aboutissement à l'état  $n=3$  correspond à la série infra-rouge de Paschen.<sup>(2)</sup>

La figure montre l'énorme extension de l'atome lorsque l'électron a une trajectoire d'ordre élevé. On comprend alors pourquoi les basses pressions sont nécessaires pour la production du spectre de Balmer. Il faut évidemment, pour qu'une radiation soit émise, que le libre parcours moyen des atomes soit supérieur au diamètre de l'atome anormal qui doit donner la

(1) Elle est même trop remarquable, car  $e$  intervient par sa 4<sup>e</sup> puissance,  $h$  par sa 3<sup>e</sup> puissance, et il y a nécessairement une certaine incertitude sur les valeurs de  $e$  de  $h$  déterminées par expérience.

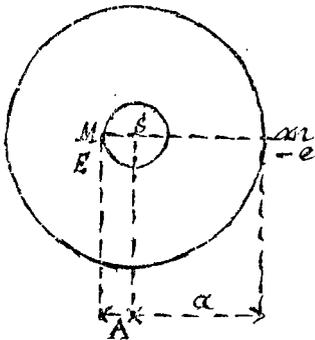
(2) Il est recommandé de relire le n° 328 du cours de première année.

raie spectrale, c'est-à-dire supérieur au diamètre de l'orbite initiale de l'électron.

Par exemple, pour la 31<sup>e</sup> raie (observée) de la série de Balmer, le diamètre de l'orbite est  $10^{-5}$ ; il faut que la pression soit inférieure à 0,02 mm. de mercure.

### 336 - L'entraînement du noyau -

La lune et la terre se meuvent toutes deux autour du centre de gravité de l'ensemble. Il en est de même d'un électron et d'un noyau de masse plus grande. Il faut donc retoucher les calculs précédents :



Soit  $S$  le centre de gravité qui reste au repos. Ses masses  $M$  et  $m$  se meuvent en restant diamétralement opposées l'une à l'autre, aux distances  $a = Sm$  et  $A = SM$  du centre de gravité. On a d'abord :

$$(473) \quad a m = A M \quad \text{ou}$$

$$a = (a+A) \frac{M}{M+m} ; \quad A = (a+A) \frac{m}{M+m}$$

Ses forces centrifuges  $m a \omega^2$  et  $M A \omega^2$  sont égales à la force d'attraction de Coulomb, d'où les équations :

$$(474) \quad m a \omega^2 = M A \omega^2 = \frac{e E}{(a+A)^2}$$

Posons (475) 
$$\mu = \frac{M m}{M+m}$$

Ses équations (474) se réduisent, en vertu de (473), à l'équation unique :

$$(476) \quad \mu (a+A)^3 \omega^2 = e E$$

L'équation de la théorie des quanta s'écrit :

$$(477) \quad p = m a^2 \omega + M A^2 \omega = \mu (a+A)^2 \omega = n \frac{h}{2\pi}$$

En définitive, les équations (465), (466), (467), (468) du

numéro précédent restent les mêmes en remplaçant  $\alpha$  par  $\alpha + A$  et  $m$  par  $\mu$ . Enfin la constante  $N$  de la formule (470) devient :

$$(478) \quad N = \frac{2\pi^2 \mu e^3 E^2}{h^3} = \frac{N_0}{1 + \frac{m}{M}}$$

en désignant par  $N_0$  la constante précédemment obtenue sans tenir compte de l'entraînement du noyau ( $M = \infty$ ), c'est-à-dire :

$$(479) \quad N_0 = \frac{2\pi^2 m e^3 E^2}{h^3}$$

### 337 - Le spectre de l'hélium ionisé -

L'hélium vient immédiatement après l'hydrogène dans la série des éléments. Son nombre atomique est 2 ; nous devons le considérer comme formé d'un noyau de charge  $E = +2e$  entouré de deux électrons négatifs.

Supposons que l'atome ait perdu un de ses deux électrons ; il reste un électron tournant autour du noyau. La formule (470) s'applique en y faisant  $E^2 = 4e^2$ , mais nous ferons la correction d'entraînement du noyau (voir n° précédent), en posant :

$$(480) \quad N_0 = \frac{4\pi^2 m e^4}{h^3} \quad N_{\text{He}} = \frac{4 N_0}{1 + \frac{m}{M_{\text{He}}}}$$

$$(481) \quad \nu_{\text{He}} = \frac{4 N_0}{1 + \frac{m}{M_{\text{He}}}} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

alors que pour l'hydrogène, avec la correction d'entraînement, on a :

$$(482) \quad \nu_{\text{H}} = \frac{N_0}{1 + \frac{m}{M_{\text{H}}}} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

La formule (481) s'écrit encore :

$$(483) \quad \nu_{\text{He}} = \frac{N_0}{1 + \frac{m}{M_{\text{He}}}} \left( \frac{1}{\left(\frac{n_f}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n_i}{2}\right)^2} \right)$$

La comparaison de (482) et (483) montre que l'ion hélium simplement ionisé (un seul électron perdu) peut donner, non pas exactement la série de Balmer, mais une série extrêmement voisine pour  $n_f = 4$   
 $n_i = 6, 8, 10, \dots$ , avec des raies intermédiaires  
 $n_i = 5, 7, 9, 11, \dots$

La série 6, 8, 10... serait identique à celle de l'hydrogène s'il n'y avait pas l'entraînement du noyau; elle en est très voisine parce que  $1 + \frac{m}{M_{\text{H}}}$  et  $1 + \frac{m}{M_{\text{He}}}$  sont très voisins l'un de l'autre et presque égale à 1.

Ce résultat a été entièrement vérifié (voir cours de 1<sup>ère</sup> année). Ses positions des raies de l'hydrogène et celles des raies de l'hélium ont permis de calculer les constantes  $N_{\text{H}} = \frac{N_0}{1 + \frac{m}{M_{\text{H}}}}$  et  $N_{\text{He}} = \frac{4 N_0}{1 + \frac{m}{M_{\text{He}}}}$ ;

il en résulte bien  $M_{\text{He}} = 4 M_{\text{H}}$  ce qui est encore une vérification remarquable.

Rappelons que les séries de Pickering et de Fowler avaient été attribuées à l'hydrogène. C'est grâce à la théorie de Bohr que l'erreur a été relevée; il est bien prouvé maintenant que ces raies appartiennent à l'hélium.

### 338 - Spectres d'arc et spectres d'étincelle.

Pour les autres éléments le problème devient très compliqué. Ses électrons doivent se placer sur plusieurs anneaux contenant chacun plusieurs électrons; on n'est pas encore fixé sur le nombre des anneaux dans les divers corps; même pour les 2 électrons de l'hélium on est embarrassé. (1) Nous n'insisterons pas. Nous pouvons cependant donner les indications générales suivantes:

(1) Aussi n'avons-nous traité que le cas où l'hélium a perdu un de ses deux électrons.

Supposons un électron seul sur une trajectoire extérieure aux autres. Le noyau  $+Ae$  et les  $(A-1)$  autres électrons peuvent être considérés comme un ensemble de charge  $+e$  autour duquel tourne l'électron considéré. On a un système "hydrogénoïde".

Il n'est pas surprenant que la constante  $N$  (constante de Rydberg) soit voisine de la constante de Balmer.

Supposons maintenant que l'atome ait perdu un électron; un électron extérieur gravite autour d'un ensemble de charge  $+2e$ ; on est ramené à un cas analogue à celui de l'hélium ionisé; la constante  $N$  est voisine de  $4N_0$ . C'est bien ce qu'on a observé pour les raies des spectres d'étincelle (voir cours de 1<sup>ère</sup> année).

### 339 - L'origine des rayons X - Explication de la loi de Moseley -

Dans un atome quelconque, considérons les électrons qui se trouvent au voisinage du noyau sur les premières orbites stables. Ces électrons subissent de la part du noyau une influence prépondérante vis à vis de laquelle on peut, au moins en première approximation, négliger l'effet des autres électrons.

La formule (470) est alors valable, comme loi approchée, en y faisant  $E = +Ae$ ,  $A$  étant le nombre atomique; on a donc:

$$(484) \quad \gamma = N_0 A^2 \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Dans toute la série des éléments, considérons les mêmes numéros d'ordre  $n_i$  et  $n_f$  des trajectoires initiale et finale; le terme entre parenthèses est constant;

$$(485) \quad \gamma = K A^2$$

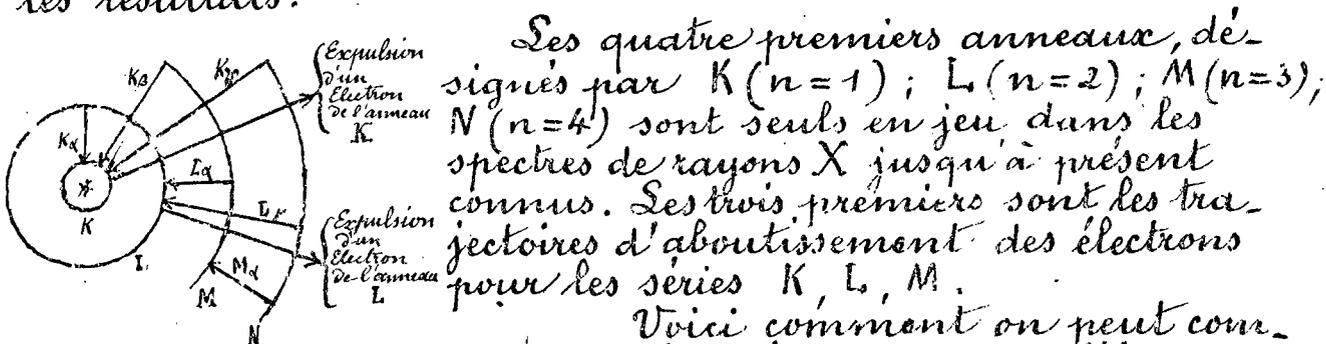
C'est la loi de Moseley (n° 299, formule (406)), abstraction faite de la constante  $a$  (petite par rapport à  $A$ ); la formule (485) n'est d'ailleurs qu'une approxi-

mation comme nous venons de le dire.

Pour les raies  $K_\alpha$ , l'expérience a prouvé que  $K = \frac{3}{4} N_0$  (formule 407); ce résultat nous permet de préciser l'origine de ces rayons : en effet  $\frac{3}{4} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$ , donc  $n_i = 2$ ,  $n_f = 1$ .

La raie  $K_\alpha$  du spectre de rayons X est donnée par un électron qui passe de la 2<sup>ème</sup> trajectoire stable, à la première (celle qui est la plus voisine du noyau).

La détermination des constantes de la formule de Moseley pour les raies principales des spectres de rayons X permet, comme pour  $K_\alpha$ , de déterminer l'origine de ces radiations. La figure ci-contre résume les résultats.



Ses quatre premiers anneaux, désignés par K ( $n=1$ ); L ( $n=2$ ); M ( $n=3$ ); N ( $n=4$ ) sont seuls en jeu dans les spectres de rayons X jusqu'à présent connus. Les trois premiers sont les trajectoires d'aboutissement des électrons pour les séries K, L, M.

Voici comment on peut comprendre le mécanisme de l'émission : les rayons excitateurs, qu'ils soient formés d'électrons ou de rayons X, apportent de l'énergie et peuvent enlever un électron d'un anneau intérieur, l'anneau K par exemple. Cet électron est emporté à la périphérie ou en dehors de l'atome ; il faut naturellement que l'énergie apportée soit au moins égale à celle qu'il faut donner à l'électron K pour le séparer du noyau ; c'est pourquoi les rayons X primaires doivent être au moins aussi durs que les rayons de fluorescence qu'ils provoquent.

L'anneau K, privé d'un électron cherche à en reprendre un aux dépens d'une trajectoire plus éloignée et moins stable ; c'est alors la trajectoire L qui cède un électron, lequel pendant le passage, donne la raie  $K_\alpha$ , ou c'est la trajectoire M qui abandonne un électron, avec production de la raie  $K_\beta$ .

La comparaison de la figure avec celle qui représente le mécanisme de production des raies de l'hydrogène est intéressante :

La série de Lyman est la série K de l'hydrogène.  
 La série de Balmer (spectre visible) est la série L de l'hydrogène.  
 La série de Paschen est la série M de l'hydrogène.  
 Pour cet atome simple, il y a identité entre  
 les rayons X et les rayons lumineux.

### 340 - Extension de la théorie -

Nous indiquerons enfin que M. Sommerfeld<sup>(1)</sup> a traité le problème des orbites elliptiques, en appliquant non seulement la théorie des quanta, mais la mécanique de la relativité. Il a complètement expliqué la structure des raies spectrales, l'existence et la grandeur des doublets (très étroits) du spectre de Balmer, la structure complète des spectres de rayons X. Ses doublets observés pour les raies de Balmer se retrouvent dans les spectres de rayons X, mais ils sont d'autant plus larges que le nombre atomique est plus élevé.

L'application de la théorie aux résultats de l'observation des spectres de l'hydrogène et de l'hélium permet les déterminations, probablement les meilleures, des deux constantes universelles :

$$e = 4,766 \cdot 10^{-10} \text{ (Un. électrost.)} \quad h = 6,526 \cdot 10^{-27}$$

### 341 - Explication des résultats de Whiddington -

La vitesse minimum que doit avoir un corpuscule cathodique pour chasser un électron d'un anneau intérieur doit être au moins égale à celle de cet électron sur son orbite.

Prenons le premier anneau : la formule (464<sup>bis</sup>) donne :

$$v = \frac{2\pi e E}{h} = 2,1 A \cdot 10^8$$

M. Whiddington avait indiqué la loi  $v = P \cdot 10^8$  (n° 294) le poids atomique est bien, en effet, un peu supérieur au double du nombre atomique. Mais c'est le nombre

---

(1) *Atombau und Spektrallinien.*

atomique et non le poids atomique qui doit figurer dans la formule.

### 342 - Phénomène de Zeeman -

La théorie de l'effet Zeeman, indiquée par M. Bohr, a été développée conformément aux idées nouvelles par M. Sommerfeld.

Malgré le progrès considérable réalisé dans la compréhension du phénomène, les détails des décompositions complexes, la tendance à la formation du triplet normal dans un champ intense, sont restés inexplicables.

On ne semble avoir actuellement aucune idée d'une explication de l'effet magnéto-optique de sens opposé à celui observé par M. Zeeman (n° 316)

Nous nous bornerons au cas le plus simple et nous indiquerons la théorie (1) qui doit aujourd'hui remplacer la théorie élémentaire de Lorentz.

Supposons d'abord un point matériel de masse  $m$  en mouvement, décrivant une trajectoire dans un système qui tourne avec une vitesse de rotation uniforme  $\Omega$  autour d'un axe  $A$ .

Soit  $v$  sa vitesse dans ce système : pour avoir le mouvement du point dans un système immobile, nous devons ajouter aux forces appliquées les forces d'inertie dues à la rotation du système qui tourne.

Ces forces sont les suivantes :

En premier lieu la force centrifuge :

$$C = m\Omega^2 l$$

$l$  étant la distance du point à l'axe  $A$ .

En second lieu la force centrifuge composée de Coriolis :

$$(486) \quad C' = 2m [\vec{v} \vec{\Omega}]$$

Considérons maintenant un électron de charge - en mouvement autour d'un noyau, dans un champ magnétique  $H$ . Sa force électrodynamique (force d'i-

(1) A. Sommerfeld. *Atombau und Spektrallinien*, nouv. édit (1921) p. 423

inertie) est :  
 (487)  $F = -\frac{e}{c} \left[ \vec{v} \vec{H} \right]$  (e électrostatique)

La force  $F$  est identique à la force de Coriolis (1) si la direction de  $H$  est celle de l'axe  $A$  considéré plus haut et si l'on a la relation :

$$(488) \quad \begin{aligned} 2m\vec{\Omega} &= -\frac{e}{c} \vec{H} \\ \vec{\Omega} &= -\frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{1}{c} \vec{H} \end{aligned}$$

Si l'on néglige la force centrifuge,  $C$ , qui est effectivement négligeable par rapport à  $C'$ , la force électrodynamique fait équilibre à la force d'inertie due à la rotation  $\Omega$  : cela revient à dire que l'électron décrit dans le champ magnétique la même trajectoire que dans un système où le champ magnétique est nul, mais relativement à un système de référence qui tourne autour de  $H$  avec la vitesse  $\Omega$  donnée par l'équation (488).

En d'autres termes, le champ  $H$  ne modifie pas la forme de l'orbite, ni son inclinaison par rapport à la direction du champ magnétique, mais l'orbite prend un mouvement de précession uniforme autour de la direction des lignes de force avec la vitesse de rotation  $\Omega$  et la fréquence  $\nu'$  :

$$(489) \quad \vec{\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{1}{c} \vec{H} \quad \nu' = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{m} \frac{1}{c} H$$

Pour un observateur qui serait animé de la vitesse de rotation  $\Omega$  autour d'un axe parallèle à  $H$ , passant par le centre de l'orbite, il n'y aurait rien de changé.

Cela revient à dire que, pour l'observateur immobile, si le mouvement de l'électron s'effectue dans un plan normal à  $H$ , la fréquence  $\nu'$  s'ajoute ou se retranche (selon le sens du mouvement par rapport au sens de  $\Omega$ ) à la fréquence  $\nu$  observée quand  $H=0$ .

Si le mouvement de l'électron s'effectue dans un plan oblique sur  $H$ , on peut décomposer ce mouvement

---

(1) Relire le n° 25

(comme nous l'avons vu au n<sup>o</sup> 311) en un mouvement parallèle à  $H$ , qui n'apparaît pas modifié, et deux mouvements circulaires opposés dans un plan normal à  $H$ . On doit donc avoir trois composantes, l'une à la place de la raie primitive, les deux autres de fréquence  $\nu \pm \frac{1}{4\pi} \frac{e}{m} \frac{1}{c} H$  ; l'écart des composantes est le même que celui que prévoyait la théorie de Lorentz.

## livre III.

# Le Principe de Relativité.

Une théorie nouvelle a révolutionné les notions fondamentales sur lesquelles reposaient la mécanique et la physique. Le physicien suisse Einstein, ayant eu l'audace d'abandonner les idées basées sur les apparences les plus familières, a développé cette théorie, avec une admirable continuité de pensée, en deux étapes principales: celle de la relativité restreinte au mouvement non accéléré (1905) et depuis 1912 celle de la relativité généralisée. S'étant élevé au-dessus de Copernic, de Galilée et de Newton, Einstein a découvert les lois de la gravitation et a été conduit à une merveilleuse conception de l'Univers.

Les premiers hommes ont considéré la Terre comme plane; on a pensé pendant longtemps que la Terre était le centre du Monde. Aujourd'hui des illusions aussi profondes, mais plus

### Ouvrages recommandés:

Sorenly - Einstein - Minkowski - das relativitäts prinzip - Nouvelle édition (Teubner)  
Ce livre contient les plus importants mémoires originaux.

A. Einstein - über die spezielle und die allgemeine relativitäts theorie, gemeinverständlich - (Vieweg) édition 1922 - (facile à lire).

Max von Laue - Die relativitäts theorie (ouvrage difficile à lire.)

A.S. Eddington - Report on the relativity theory of gravitation (1920)

A.S. Eddington - Space, time and gravitation - 1919. (Une traduction va paraître prochainement, (Hermann éditeur Paris)

P. Langevin - L'évolution de l'espace et du temps. extrait de Scientia (1911). —

Le temps, l'espace et la causalité dans la physique moderne. Bulletin de la Société de philosophie (19 oct. 1911). — L'inertie de l'énergie. Journal de Physique. Conf. à la Société de physique (17 mars 1913). — Le principe de relativité. Bulletin de la Société des électriciens, décembre 1919. La lecture des conférences de M. Langevin est particulièrement recommandée.

difficiles à reconnaître et surtout à abandonner, règnent encore: On considère l'espace et le temps comme indépendants l'un de l'autre, le temps comme absolu, l'espace comme formant un univers euclidien et infini.

Cependant l'espace dans lequel nous mesurons des longueurs, le temps que nous évaluons par des horloges, ne sont ni absolus ni indépendants; ils sont unis dans un univers à 4 dimensions et seule cette union possède une individualité. L'espace-temps est courbe, et sa courbure se révèle à nous par le phénomène de la gravitation universelle.

Dans l'espace-temps existe la matière, et plus généralement l'énergie dont la matière est un des aspects.

Il n'y a plus, comme en mécanique rationnelle, de masse invariable caractérisant une quantité déterminée de matière; la notion de masse vient se confondre avec celle d'énergie; la masse d'un corps est la mesure de son énergie totale; elle varie avec la vitesse, et elle est relative à l'observateur car il n'y a pas de vitesse absolue, il n'y a que des mouvements relatifs.

Il faut noter, toutefois, que la mécanique classique garde toute son importance. Bien que les notions qui sont à la base même de cette science soient inexactes, les lois auxquelles elle conduit sont d'excellentes approximations, toujours valables dans la pratique, presque toujours bonnes en physique. Mais il est nécessaire de savoir pourquoi ces lois ne sont pas comme on le croyait, l'expression exacte de la réalité.

On doit aujourd'hui répandre universellement les idées nouvelles. Elles ne conduisent pas à une complication de la science; au contraire il en résulte une admirable harmonie. Le souci de la vérité, la satisfaction qu'éprouve l'esprit à pénétrer plus avant dans la compréhension des phénomènes, compensent largement les efforts que demande l'étude du principe de relativité. Les seules difficultés qu'on rencontre viennent de la répugnance à abandonner des idées acquises, et de l'étonnement où l'on est plongé devant certaines conséquences qui, par leur étrangeté, choquent ce qu'on considère comme le bon sens. Il faut, avant d'aborder cette étude, renoncer résolument aux idées préconçues.

# Chapitre I.

## La relativité restreinte.

### §. 1.- Les notions anciennes d'espace et de temps.-

Nous allons reprendre, par la base, les conceptions sur lesquelles est fondée la mécanique rationnelle. Cette étude nous conduira à l'expérience de Michelson où nous trouverons une discordance absolue entre la prévision théorique et le résultat expérimental.

#### 343.- Groupes de transformations de coordonnées.

Soit, dans l'espace, un corps immobile par rapport à l'observateur; pour repérer la position de ce corps, nous pouvons choisir un système d'axes rectangulaires quelconque, que nous supposerons également immobile. Ce système  $S(x, y, z)$  nous permettra d'exprimer les distances des différents points du corps, les angles, la surface, le volume.

Changeons maintenant de système de coordonnées, en prenant un second système de référence  $S'(x', y', z')$ . On appelle formules de transformation de coordonnées les relations bien connues qui expriment les coordonnées nouvelles en fonction des coordonnées anciennes (et inversement). Ces relations font intervenir six paramètres, qui définissent la position relative des deux systèmes d'axes.

Avec les coordonnées nouvelles, nous pouvons exprimer, par des formules ayant la même forme que les précédentes, les distances des points du corps, les angles, etc....

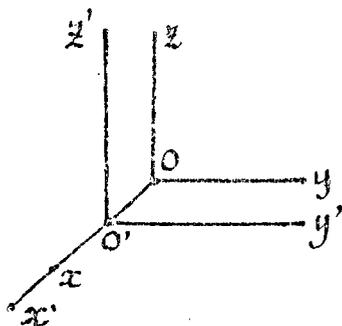
La propriété essentielle de ces formules de transformation de coordonnées est qu'elles forment un groupe (1), c'est-à-dire

---

(1) P. Langevin - Bulletin de la Société de philosophie (janvier 1912).

que si nous effectuons successivement deux transformations de ce genre, la première correspondant au passage de  $S(x, y, z)$  à  $S'(x', y', z')$ , la seconde au passage de  $S'(x', y', z')$  à un troisième système  $S''(x'', y'', z'')$ , la relation entre les coordonnées  $x, y, z$  et  $x'', y'', z''$  est exprimée par des formules de même genre correspondant au passage direct du premier système  $S$  au troisième système  $S''$ . L'ensemble de toutes ces transformations de coordonnées correspondant à toutes les valeurs possibles des 6 paramètres qui caractérisent une transformation, jouit donc de cette propriété que l'emploi successif d'un nombre quelconque de transformations de ce groupe est équivalent à une transformation unique du même groupe.

Groupe de la cinématique. - Considérons maintenant un système  $S'(x', y', z')$  en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier système  $S$ , avec une vitesse  $v$ . Pour



envisager le cas le plus simple, supposons que les axes  $Ox, O'x'$  soient parallèles à la vitesse  $v$ , que les origines  $O$  et  $O'$  des coordonnées coïncident à l'origine des temps, et que les axes de coordonnées soient parallèles;  $O'x'$  est alors confondu avec  $Ox$ . Les formules de transformation sont les suivantes:

$$(490) \quad x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z$$

Ces trois relations définissent une transformation dépendant d'un seul paramètre  $v$ , et toutes les transformations de ce genre correspondant à toutes les valeurs possibles de  $v$ , constituent un groupe qu'on nomme groupe de Galilée.

Il est utile d'appeler, dès le début, l'attention sur les groupes de transformation, car nous verrons que le principe de relativité est basé sur le fait que les équations fondamentales de la mécanique et les équations de Maxwell n'admettent pas le même groupe de transformation.

344. — Les invariants fondamentaux de l'ancienne conception de l'Univers: Le temps et l'espace absolus.

Toutes les sensations par lesquelles nous percevons

L'Univers font intervenir à la fois l'espace et le temps, car elles sont déterminées, non pas uniquement par des positions ou des formes dans l'espace, mais par des « événements » situés dans l'espace et se produisant à une certaine époque. Un événement a quatre coordonnées, trois coordonnées espace et une coordonnée temps.

Les lois des phénomènes sont des relations entre diverses grandeurs mesurées par l'observateur ; pour que ces lois aient une réalité objective, il faut qu'elles puissent s'exprimer sous une forme indépendante de l'observateur et indépendante du système de coordonnées que celui-ci a choisi. Il faut donc dégager des observations les éléments invariants, ceux qui sont indépendants de tout système de référence.

Le temps absolu : Dans la conception ancienne, un postulat fondamental est celui qui fait jouer au temps le rôle d'invariant, c'est l'hypothèse du temps universel et absolu. Cherchons quelle peut être l'origine de cette notion de temps absolu.

Imaginons un certain nombre de systèmes de référence, en mouvement les uns par rapport aux autres ; dans chaque système se trouve un observateur, immobile par rapport à son système.

Deux événements A et B se produisent : pour l'observateur d'un des systèmes, A est antérieur à B. Pourquoi a-t-on admis que A est nécessairement antérieur à B dans tous les autres systèmes ?

Cela tient à ce qu'on suppose implicitement que A a pu être la cause de B, ou tout au moins que l'événement A aurait pu influencer l'événement B. Comme il serait absurde de supposer que, pour certains observateurs, l'effet puisse être antérieur à sa cause, on admet que l'ordre de succession des deux événements est le même dans tous les systèmes.

Si l'on admet que B a toujours pu être prévenu de A, c'est parce qu'on admet la possibilité d'une causalité pouvant se propager instantanément à distance. Cette possibilité est exigée par la mécanique rationnelle, puisqu'on admet la conception du solide parfait : une tige rigide pourrait signaler instantanément la production du premier événement au point où le second va se produire, et influencer ce second événement.

La notion de possibilité d'une propagation instantanée entraîne celle de simultanéité absolue : deux événements

simultanés dans un système sont simultanés dans tous les autres. Il résulte de là que la durée qui sépare deux événements A et B est la même pour tous les observateurs. Considérons en effet deux systèmes S et S'; soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux événements se produisant dans le système S et simultanés avec A et B dans ce système,  $\alpha'$  et  $\beta'$  deux événements simultanés avec A et B dans le système S'. La simultanéité étant absolue,  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont simultanés, ainsi que  $\beta$  et  $\beta'$ . Donc l'intervalle de temps qui sépare  $\alpha$  et  $\beta$  dans le système S est égal à l'intervalle qui sépare  $\alpha'$  et  $\beta'$  dans S', égal aussi à celui qui sépare A et B. C'est bien le temps absolu.

On voit que les notions de solide parfait, de propagation instantanée, de simultanéité absolue, de durée absolue s'adaptent complètement les unes aux autres. Qu'une de ces notions vienne à être renversée, tout l'échafaudage s'écroule.

L'espace absolu. La notion d'espace absolu dérive de l'idée du solide parfait, ou encore de l'invariance de forme des figures géométriques.

La géométrie n'envisage que des événements simultanés, car la forme d'un objet est l'ensemble des positions simultanées de tous ses points. La simultanéité étant supposée absolue, une figure géométrique a une forme absolue, indépendante de l'état de mouvement du système de référence. Un corps qui a la forme d'une sphère pour un observateur est encore une sphère pour tous les observateurs en mouvement par rapport à lui.

L'invariant fondamental de l'espace est la distance de deux événements simultanés. Soient  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  les coordonnées de ces événements dans un premier système S; soient  $x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2$  les coordonnées des deux mêmes événements dans un second système S'. La distance de ces événements est donnée par les équations:

$$(491) \quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \text{ dans le système S}$$

$$d^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \text{ dans le système S'}$$

Si les systèmes S et S' sont immobiles l'un par rapport à

l'autre, l'application des formules de transformation de coordonnées de la géométrie montre que  $d^2 = d'^2$ . Cette condition suffit d'ailleurs à définir entièrement le groupe de la géométrie.

Si  $S$  et  $S'$  sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, l'application du groupe de Galilée donne encore  $d^2 = d'^2$ ; le temps s'élimine parce que, la simultanéité ayant un caractère absolu, les événements sont simultanés dans les deux systèmes à la fois.

Ainsi, dans la conception ancienne, la distance spatiale de deux événements est un invariant, à condition que ces événements soient simultanés.

D'autres invariants sont d'ailleurs envisagés en géométrie : ce sont les angles, surfaces, volumes.

Ses équations qui expriment les lois de la géométrie sont les mêmes dans tous les systèmes d'axes, car elles ne changent pas de forme par application des formules de transformation de coordonnées. Cette invariance de forme correspond à une réalité indépendante du système de référence ; cette réalité est l'espace de la géométrie euclidienne, l'espace absolu.

### 345. — Distance dans l'espace de deux événements non simultanés.

Lorsque deux événements ne sont plus simultanés, leur distance dans l'espace cesse d'être un invariant ; elle est fonction du mouvement du système de référence. Par exemple, un observateur quitte un lieu A dans un véhicule qui le transporte dans un lieu B, au bout d'un temps déterminé. Le départ de A et l'arrivée en B sont deux événements. Dans un système lié à la terre, la distance spatiale des deux événements est la distance AB ; dans le système de l'observateur, c'est-à-dire dans un système d'axes lié à l'observateur la distance est nulle, puisque les points de ce système où se sont passés les événements A et B sont en coïncidence.

La distance de deux événements non simultanés est donc relative au système de référence ; évidemment elle doit avoir une valeur absolue dans l'espace absolu, mais l'observateur ne peut pas déterminer la distance absolue, parce que, ignorant

son propre mouvement dans l'espace absolu, il ne peut pas tenir compte du trajet qu'il a parcouru dans l'espace absolu pendant le temps écoulé entre les deux événements.

Il y a donc une dissymétrie entre les propriétés de l'espace et du temps, telles que les envisage la cinématique, l'espace est absolu pour des événements simultanés, relatif pour des événements non simultanés, le temps est toujours absolu. L'espace et le temps jouent des rôles différents dans la conception ancienne. Nous verrons que cette dissymétrie disparaît dans l'espace-temps de la théorie nouvelle.

### 346. — La dynamique newtonienne.

La cinématique est définie par le groupe de Galilée (n° 343). La dynamique ajoute les notions de masse et de force. La masse d'une portion de matière est, à priori, considérée comme un invariant, indépendant de l'état de repos ou de mouvement, indépendant des changements d'état que la portion de matière peut subir. Les composantes de la force se comportent comme les projections d'une distance sur les axes, c'est-à-dire restent constantes dans le cas que nous avons envisagé ( $O'x', O'y', O'z'$  parallèles à  $Ox, Oy, Oz$ ).

Écrivons de nouveau le groupe de Galilée:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

On a immédiatement  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v$

C'est le théorème de l'addition des vitesses, dont les composantes s'ajoutent et qui, par conséquent, se composent suivant la règle du parallélogramme.

Une seconde dérivation donne:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}$$

Les équations du mouvement dans le système S ( $x, y, z$ ):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

s'écrivent dans le système S'

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = X \quad m \frac{d^2y'}{dt^2} = Y \quad m \frac{d^2z'}{dt^2} = Z$$

elles restent donc invariantes, ce qui s'exprime par la relation vectorielle, indépendante de tout système de coordonnées

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} \quad \gamma \text{ étant l'accélération.}$$

Les équations de la dynamique conservent leur forme quand on passe d'un système de référence à un autre système en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier.

Cette invariance des lois de la mécanique permet d'en donner des énoncés intrinsèques (par l'introduction d'éléments vectoriels et scalaires) indépendants de tout système de coordonnées, de même que les invariants de la géométrie (distances, angles, etc...) permettent d'énoncer les théorèmes sans faire intervenir les axes de coordonnées.

347: — Le caractère relatif du mouvement de translation uniforme et le caractère absolu de l'accélération:

Puisque les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les systèmes en mouvement de translation uniforme, il est impossible, par des expériences mécaniques faites à l'intérieur d'un système clos, de mettre en évidence un mouvement de translation uniforme de ce système.

Ce principe constitue le principe de relativité de la mécanique newtonienne. Il est conforme à l'expérience.

Par contre, toute accélération a un caractère absolu et peut être mise en évidence par des expériences intérieures à un système. En particulier, il y a rotation absolue, comme le prouvent les effets de force centrifuge en statique

et de force centrifuge composée en dynamique : le pendule de Foucault a mis en évidence la rotation de la Terre.

## §. 2. — La recherche du mouvement absolu.

Si, par des expériences mécaniques à l'intérieur d'un système clos, il est impossible de révéler un mouvement de translation uniforme de ce système, il en est autrement lorsque le système n'est plus clos, lorsque l'observateur peut se mettre en relation avec un milieu extérieur. Il devient alors possible de mettre en évidence et de mesurer la vitesse par rapport au milieu extérieur.

Précisément, pour expliquer la propagation des ondes électromagnétiques et lumineuses, les physiciens avaient supposé l'existence d'un milieu, l'éther, remplissant tout l'espace et pénétrant la matière. On pouvait donc espérer, par des expériences électromagnétiques ou optiques, révéler un mouvement de translation par rapport à l'éther. L'éther s'identifiant en quelque sorte avec l'espace, on a appelé ce mouvement le mouvement absolu.

### 348. — L'expérience de Fizeau, dite « entraîne-ment des ondes lumineuses par la matière ».

Tout d'abord, une question se pose : l'éther ne serait-il pas entraîné par la matière en mouvement ? S'il en était ainsi, et si l'entraînement était total, il serait impossible de révéler le mouvement absolu.

Fresnel a déduit de l'étude de l'aberration de la lumière, par la théorie mécanique, que l'éther devait être entraîné partiellement : soient  $n$  l'indice de réfraction d'un corps transparent,  $v$  la vitesse de ce corps ; l'éther doit être entraîné avec une vitesse  $u$  :

$$(492) \quad u = v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

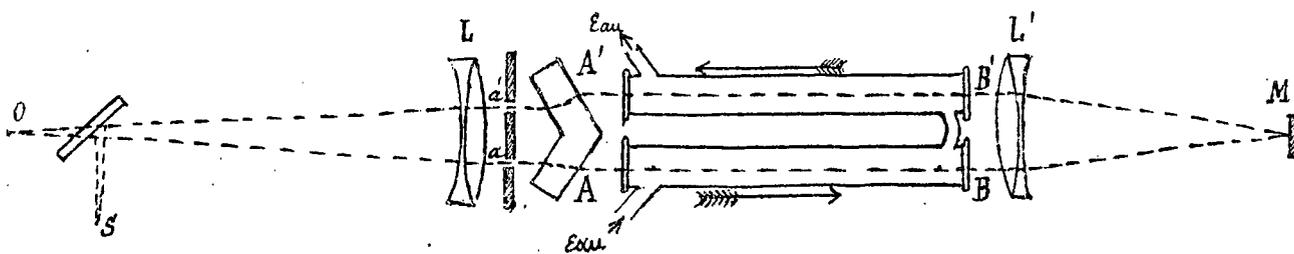
de sorte que, si  $c'$  désigne la vitesse de la lumière dans le corps en mouvement on doit avoir :

$$(493) \quad c' = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

la vitesse d'entraînement  $\frac{n^2-1}{n^2} v$  s'ajoutant à la vitesse  $\frac{c}{n}$  dans le corps au repos, ou se retranchant de cette vitesse selon que le sens du mouvement du corps est celui de la propagation des ondes ou le sens opposé.

Fizeau a vérifié expérimentalement la formule de Fresnel.

Une source de lumière est placée en S. Ses rayons,



réfléchis par une lame de verre à faces parallèles, sont rendus parallèles par un objectif achromatique L. Ses rayons traversent les deux fentes a et a', sont écartés par une bi-lame AA', traversent les tubes AB, A'B', puis sont reçus sur une lentille L' qui les concentre en son foyer M. En ce point, un miroir renvoie les rayons au point de départ : le rayon AB suit le chemin ABMB'A'O, et le rayon A'B' le chemin A'B'MBAO. En O, on observe des franges d'interférences.

Si les tubes AB et A'B' sont remplis d'eau et si l'on communique à l'eau des mouvements de sens contraires, on voit que le rayon ABM'B'A' traverse les tubes toujours dans le sens du mouvement, alors que l'autre rayon chemine toujours en sens contraire du courant d'eau. Les franges ont une netteté remarquable, malgré le défaut d'homogénéité inévitable des milieux traversés (inégalités de température, de densités, etc...) parce que les deux rayons qui interfèrent traversent exactement les mêmes milieux.

Soient  $v$  la vitesse de l'eau,  $K$  le coefficient d'entraînement des ondes,  $l$  la longueur de chaque tube. Le temps

employé par le rayon A' à parcourir les deux tubes est  $\frac{2l}{\frac{c}{n} - kv}$ ,  
 le temps employé par le rayon A est  $\frac{2l}{\frac{c}{n} + kv}$ . La différence des  
 temps est :

$$2l \left( \frac{1}{\frac{c}{n} - kv} - \frac{1}{\frac{c}{n} + kv} \right) = \frac{4l kv}{\left(\frac{c}{n}\right)^2 - k^2 v^2}$$

c'est-à-dire,  $k^2 v^2$  étant négligeable devant  $\left(\frac{c}{n}\right)^2$

$$\theta = 4l kn^2 \frac{kv}{c^2}$$

La différence de phase des deux rayons qui interfèrent  
 est

$$\varphi = \frac{\theta}{\tau} = 4 \frac{l}{\lambda} n^2 \frac{kv}{c}$$

Cette différence de phase est le déplacement évalué  
 en nombre de franges.

On constate effectivement un déplacement des franges;  
 les mesures ont bien donné  $k = 1 - \frac{1}{n^2}$  c'est-à-dire  $u = v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

L'expérience de Fizeau a été considérée comme la preuve  
 de l'existence de l'éther, et la preuve de l'entraînement  
 partiel.

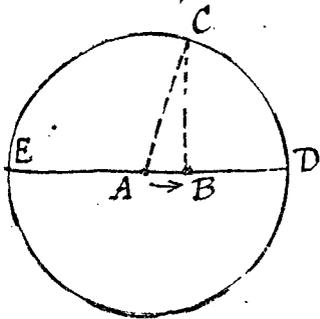
Mais M. Lorentz a montré que l'expérience de Fizeau  
 ne permet pas de conclure à un entraînement de l'éther,  
 car elle peut s'expliquer par l'entraînement des électrons  
 qui modifient la vitesse de propagation de la lumière.

Même s'il y avait entraînement de l'éther, comme cet  
 entraînement ne serait que partiel, l'expérience de Michelson,  
 que nous allons décrire, devrait révéler un mouvement de  
 translation de la terre par rapport au milieu qui propage  
 les ondes lumineuses.

### 349. — L'expérience fondamentale de Michelson.

Imaginons que d'un point A dans l'éther immobile  
 parte un signal lumineux instantané. Une seconde plus

tard, l'ébranlement formera une surface d'onde sphérique de rayon  $C$  ayant pour centre le point  $A$ . Un observateur parti de  $A$  en même temps que le signal, dans la direction  $ox$  et avec la vitesse  $v$ , sera à la distance  $AB = v$  au bout d'une seconde; il ne sera donc plus au centre de la sphère et pour lui, la lumière ne se propagera pas avec la même vitesse dans toutes les



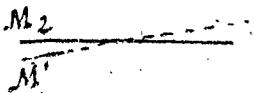
directions; la vitesse de la lumière, relativement à l'observateur, devra être  $BD = C - v$  dans la direction de la vitesse  $v$ ,  $BE = C + v$  dans la direction opposée, et  $BC = \sqrt{c^2 - v^2}$  dans la direction perpendiculaire. L'observateur devra pouvoir constater et mesurer cet effet., Voici comment Michelson a réalisé l'expérience.

Michelson s'est servi de son interféromètre (cours de 1<sup>ère</sup> année, n° 233, p. 399) dont nous rappelons brièvement le principe<sup>(1)</sup> un faisceau de lumière parallèle tombe sous l'incidence de  $45^\circ$  sur une lame de verre  $G_1$  dont la première face est légèrement argentée; cette lame réfléchit une partie du faisceau et laisse passer une autre partie. Après réflexion sur les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  placés sur deux bras rectangulaires, on obtient deux faisceaux qui se superposent suivant la direction  $G_1E$  et qui interfèrent; ils sont reçus dans une lunette  $E$ . Tout se passe comme si le rayon  $SOM_1OE$ , avait parcouru le chemin  $SOM'OE$ ,  $M'$  étant l'image (appelée plan de référence) du miroir  $M_2$  produite par la lame argentée.

Une lame  $G_2$  sert de compensateur de manière que chaque rayon traverse trois épaisseurs de lame; en faisant tourner  $G_2$  on change le chemin optique et l'on déplace les franges.

Si  $M_2$  et le plan de référence  $M'$  sont parallèles on voit, en lumière monochromatique et en pointant à l'infini, des anneaux circulaires.

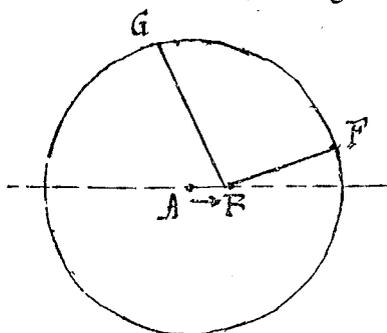
Si les deux bras de l'appareil ont même longueur, c'est-à-dire si  $M_2$  et  $M'$  coïncident, en inclinant légèrement  $M_2$  on voit en lumière blanche des franges rectilignes localisées sur  $M_2M'$ ; ce sont les franges d'égales épaisseurs de la lame d'air comprise entre  $M_2$  et  $M'$ .



(1) Voir la figure plus loin

La Terre est en mouvement dans l'éther ; donc, pour l'observateur entraîné avec elle, la vitesse de la lumière doit dépendre de la direction.

Reprenons la figure qui représente la sphère sur laquelle se trouve un ébranlement lumineux au bout de l'unité de temps. La Terre se trouve en B ; par ce point menons deux parallèles aux deux bras de l'appareil ; BF et BG sont les vitesses de la lumière, relativement à l'observateur, suivant les directions des deux bras de l'interféromètre ; ces vitesses sont inégales : la frange centrale n'occupe donc pas la position qu'elle



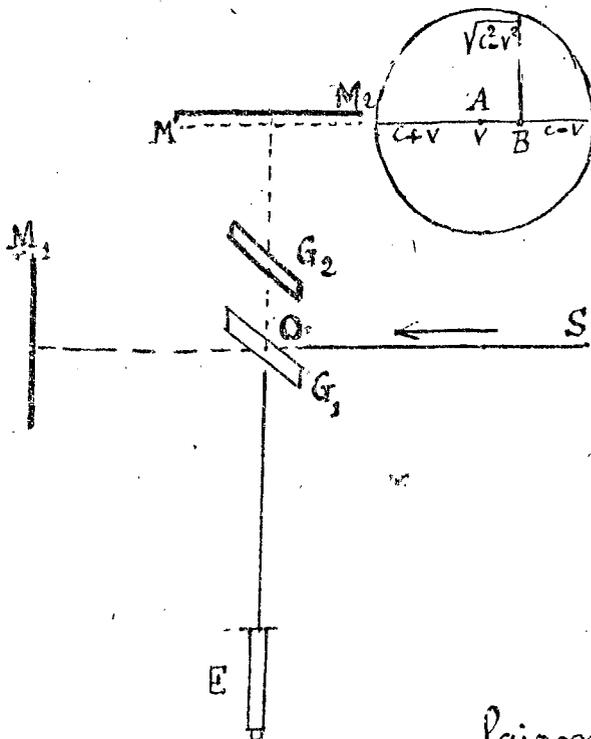
aurait si la vitesse était la même suivant les deux bras, et cette frange doit se déplacer quand on tourne l'appareil, qui est mobile sur une plate-forme.

Supposons qu'en faisant tourner l'appareil on n'observe aucun déplacement des franges par rapport au réticule de la lunette ; on devra penser que B et A coïncident, c'est-à-dire

qu'à ce moment particulier la Terre est immobile dans l'éther, c'est-à-dire que sa vitesse de translation sur son orbite se trouve par hasard compenser exactement la vitesse du système solaire dans l'espace. Mais alors, six mois plus tard, la Terre ayant sur son orbite une vitesse égale mais opposée à celle qu'elle avait la première fois, aura par rapport à l'éther une vitesse égale au double de sa vitesse de translation sur son orbite ; c'est-à-dire une vitesse  $v = 60 \text{ km/sec}$ . Pour observer l'effet, on devra placer l'appareil de manière que la différence des vitesses de la lumière dans les directions des deux bras soit la plus grande possible, c'est-à-dire orienter l'un des bras dans la direction de la translation de la Terre sur son orbite : on observera les franges en les repérant avec le réticule ; puis on permutera les rôles des deux bras de l'appareil en faisant tourner la plate-forme de  $\frac{\pi}{2}$  ; on devra alors observer

un déplacement des franges par rapport à leur position précédente. Calculons ce déplacement :

Soit  $l$  le trajet optique de la lumière entre la lame  $G_1$  et chacun des miroirs ; si le bras  $OM_1$  est parallèle au mouvement de la Terre, le temps que met la lumière à aller au



miroir  $M_1$  et à revenir sur  $G_1$  est :

$$(494) \quad t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

Le temps employé pour parcourir le bras  $OM_2$ , aller et retour est

$$(495) \quad t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

d'où :

$$(496) \quad t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

En tournant de  $\frac{\pi}{2}$  les

faisceaux permutent leurs rôles ; la différence des temps est

$$(497) \quad t'_1 - t'_2 = - \frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

Pour obtenir, mesuré en nombre de franges, le déplacement  $\frac{\lambda}{2}$  des franges de part et d'autre de la position qu'elles occuperaient si la Terre était immobile, il n'y a qu'à diviser chacune des différences (496) et (497) par la période  $\tau$  de la lumière employée. Le déplacement total dans la rotation  $\frac{\pi}{2}$  est le double de chacun de ces deux déplacements.

$$(498) \quad \varphi = 2 \cdot \frac{1}{\tau} \frac{l}{c} \frac{v^2}{c} = \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad v = 60 \text{ km/sec.}$$

L'expérience, faite par Michelson, (1881), a été répétée par Michelson et Morley, (1887), puis par Morley et Miller (1904-1905), dans des conditions d'extrême précision : par des réflexions successives, le trajet de la lumière avait été porté à 22 m, la précision des mesures atteignait le centième de frange alors que le déplacement prévu devait dépasser une frange.

On n'a jamais obtenu aucun déplacement, à aucune époque de l'année. Tout se passe comme si la Terre était immobile.

Le désaccord entre l'expérience et la théorie est brutal. Avons-nous donc raisonné faux? Nous avons raisonné juste, (1) mais en admettant les notions habituelles d'espace et de temps, et en appliquant les lois de la mécanique. Ces lois ne sont donc pas exactes pour les phénomènes optiques (2); il faut renoncer à toute tentative de fonder sur la mécanique classique une théorie des phénomènes optiques et électromagnétiques.

### 350. — La contraction de Fitzgerald-Lorentz.

M. M. Fitzgerald et Lorentz ont, indépendamment l'un de l'autre, émis une hypothèse qui rend compte du résultat négatif de l'expérience de Michelson.

L'expérience nous apprend que la lumière met le même temps à parcourir (aller et retour) les deux bras de l'appareil, quelle que soit l'orientation. Pour égaliser les temps  $t_1$  (formule 494) et  $t_2$  (495), il suffit de supposer que le bras dirigé dans la direction de la vitesse  $v$  s'est contracté et que

sa longueur est devenue  $l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . L'hypothèse est donc

la suivante:

Pour tous les corps, les dimensions linéaires parallèles au mouvement dans l'éther subissent un raccourcissement; dû uniquement à ce mouvement, dans le rapport

de 1 à  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Les dimensions perpendiculaires à la vitesse

se absolue ne sont pas altérées.

Pour une vitesse de 30 km/sec la contraction serait très faible (5<sup>ème</sup> par mètre); mais elle deviendrait considérable aux

(1) — La théorie est en réalité plus compliquée, comme Righi l'a montré; mais on arrive au même résultat.

(2) — D'autres expériences, dans le domaine de l'électromagnétisme, destinées à révéler le mouvement absolu, ont également conduit à des résultats complètement négatifs.

très grandes vitesses et pour  $v=c$  tous les objets seraient réduits à deux dimensions. L'observateur ne s'apercevrait jamais de la contraction, car tous les instruments de mesure la subirait, et il la subirait lui-même. Il serait impossible de mettre en évidence le mouvement absolu.

### 351. — Le point de vue de Lorentz.

M. Lorentz, dans l'hypothèse de la contraction de la matière, a cherché à sauvegarder les bases de la mécanique classique et la notion de temps absolu dont elle dérive. La contraction serait une contraction réelle produite par le mouvement absolu dans l'éther, et elle serait la même pour toute matière.

Effectivement, M.M. Morley et Miller ont constaté que si l'on remplace la dalle en pierre, sur laquelle était fixé l'appareil, par une dalle en bois, le résultat de l'expérience interférentielle est toujours négatif.

Mais comment admettre que la contraction, si elle est réelle, soit la même pour tous les corps, c'est-à-dire indépendamment de la substance, quelle que soit sa rigidité? Se produit-elle aussi pour les gaz, et alors où est la limite entre un gaz raréfié et l'espace vide?

Est-il possible d'admettre que la contraction soit une propriété de la matière? Ne traduirait-elle pas plutôt une propriété de l'espace dans lequel nous apparaît la matière? La théorie de Einstein nous donnera la réponse (voir plus loin n° 364).

### 352. — Le point de vue d'Einstein. Principe de relativité.

Pour éviter les difficultés qui résultent de l'hypothèse de Lorentz (du moins sous la forme qui précède), pour rendre compte, d'une façon générale, de l'insuccès de toutes les expériences électromagnétiques ou optiques par lesquelles on a cherché à révéler le mouvement absolu, pour exprimer les faits de la façon la plus simple, Einstein a énoncé les principes suivants:

1°) — Les lois des phénomènes physiques sont les mêmes dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par

rapport aux autres.

Ce principe constitue l'extension aux phénomènes électromagnétiques et optiques du principe de relativité de la mécanique (n° 347).

2°) - Pour tous les systèmes en mouvement de translation uniforme la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions ; cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source lumineuse.

Le mouvement de la Terre sur son orbite peut, pendant la durée d'une expérience, être considéré comme rectiligne et uniforme. Deux systèmes de référence liés à la Terre à deux époques de son mouvement annuel constituent deux systèmes en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. La vitesse de la lumière est, à toute époque de l'année, la même dans toutes les directions comme le prouve l'invariabilité de la position des franges quand on fait tourner la plate-forme de l'expérience de Michelson.

### § 3. — Le groupe de transformation de Lorentz.

#### 353. — Formules de Lorentz.

Le résultat négatif de Michelson, l'échec de toutes les expériences tentées pour révéler le mouvement absolu de la Terre, tiennent à des causes profondes qu'on n'avait pas remarquées dans les débuts de la théorie électromagnétique.

Si l'on effectue, dans les équations fondamentales de Maxwell, la transformation du groupe de Galilée (n° 343)

$$(499) \quad \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (499 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Ces équations ne conservent pas leur forme. En un mot, en ce qui concerne les transformations de l'espace et du temps, les équations de Maxwell n'admettent pas le groupe de transformation de coordonnées de la mécanique.

Mais ces équations admettent un autre groupe que il. Lorentz a eu le grand mérite de découvrir.

Nous considérerons, comme au n° 343, un système  $S'$   $(x', y', z')$  en mouvement rectiligne et uniforme, par rapport au système  $S$   $(x, y, z)$ , avec une vitesse  $v$ .  $Ox, O'x'$  sont en coïncidence et parallèles à  $v$ ;  $Oy$  et  $O'y'$ ,  $Oz$  et  $O'z'$  sont parallèles; les origines  $O$  et  $O'$  coïncident à l'origine des temps.

Le groupe de Lorentz est le suivant: (1) Posons  $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$(500) \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\alpha} (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\alpha} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{cases} \quad (500 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\alpha} (x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{1}{\alpha} \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \end{cases}$$

Si les lois de l'électromagnétisme sont exactes dans le système  $S$  elles ne seront valables dans  $S'$  que si les nouvelles coordonnées d'espace et de temps sont liées aux coordonnées du système  $S$  par les équations de Lorentz.

Ces équations forment un groupe car deux transformations successives de vitesses  $v$  et  $v'$  équivalent à une transformation de même forme et de vitesse  $v''$  donnée par l'équation:

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

Ce n'est plus l'addition des vitesses comme en mécanique. Nous reviendrons sur cette loi de composition des vitesses.

Nous établirons plus loin les substitutions qu'on doit faire pour les grandeurs électriques et magnétiques; pour l'instant il n'est question que des transformations de longueurs et de temps.

Il est essentiel de remarquer que les équations de Maxwell impliquent que toutes les perturbations électromagnétiques se

(1) Nous établirons ces formules en partant du principe de la constance de la vitesse de la lumière. Nous vérifierons plus loin qu'elles laissent invariantes les équations de Maxwell.

propagent dans le vide avec la même vitesse  $c$  dans toutes les directions, et que cette vitesse reste la même dans la substitution définie par le groupe de Lorentz.

### 354. — Le temps local de Lorentz.

La différence entre le groupe de Lorentz et celui de Galilée est profonde. Au lieu du temps  $t$  du système  $S$ , il faut introduire dans le système  $S'$  un temps  $t'$  fonction, non seulement de la vitesse  $v$ , mais du lieu considéré dans l'espace, puisque ce temps  $t'$  dépend de l'abscisse  $x$  du point. Il faut donc envisager, pour chaque plan normal à la vitesse  $v$  dans le système  $S'$ , un temps qui diffère du temps  $t$  de tout le système  $S$ , et en diffère d'autant plus que le plan est plus éloigné de l'origine des coordonnées. Ce temps  $t'$  a été appelé par M. Lorentz temps local.

M. Lorentz qui avait obtenu ces formules (au facteur  $\alpha$  près, car il avait négligé  $\frac{v^2}{c^2}$ ) en cherchant les conditions

d'invariance des équations du champ électromagnétique n'avait pas attribué d'importance physique au temps local. L'expression de  $t'$  n'avait été considérée que comme un symbole mathématique.

Il appartient à Einstein d'avoir établi que le temps local est le temps physique dans le système  $S'$ , le temps que marqueront des horloges identiques à celles qui, dans le système  $S$ , mesurent le temps  $t$ .

## §. 4. — L'invariance de la vitesse de la lumière.

### 355. — La notion de temps. — Définition de la simultanéité. — (1)

Einstein a fait une remarquable analyse de la notion de temps; cette analyse a été le début de sa théorie. Pour décrire le mouvement d'un point, on donne les

---

(1) D'après Einstein. Ann. der Physik 17 (1905).

valeurs de ses coordonnées espace en fonction d'une quatrième variable, le temps. Pour que les relations mathématiques aient un sens physique, il faut avoir une idée claire de ce qu'on nomme "le temps".

Nous devons d'abord remarquer que dans toutes les circonstances où le temps joue un rôle, il s'agit toujours d'événements simultanés. Quand nous disons: la leçon commence à 9 heures, cela signifie, l'indication 9h des aiguilles de la pendule et le commencement de la leçon sont deux événements simultanés. On pourrait croire que toutes les difficultés inhérentes à la définition du temps disparaissent en remplaçant "le temps" par "la position des aiguilles de l'horloge." Cette définition convient pour le lieu où se trouve l'horloge, parce qu'en ce lieu la simultanéité d'un événement et d'une position particulière des aiguilles de l'horloge est parfaitement définie; mais on ne peut pas coordonner ainsi des événements qui se passent en des lieux éloignés de l'horloge.

On pourrait s'imaginer que, pour situer dans le temps un événement se produisant en un lieu éloigné, il suffirait de repérer l'heure marquée par l'horloge à l'arrivée d'un signal lumineux parti du point où s'est produit l'événement, et simultané à cet événement en ce point. Mais on n'arriverait ainsi à aucune définition acceptable, car une pareille coordination des événements dépendrait, dans un même système, du lieu d'observation. Voici ce qu'on doit faire.

Considérons un système S. Au point A se trouvent un observateur et une horloge. L'observateur A peut situer dans le temps tous les événements qui se produisent dans son voisinage immédiat. En un autre point B se trouvent aussi un observateur et une horloge identique à l'horloge du point A; cet observateur peut, de son côté, coordonner tous les événements qui se produisent autour de lui. Il s'agit maintenant de coordonner les événements qui se passent en A avec ceux qui se passent en B, car jusqu'à présent nous avons un temps du point A et un temps du point B, mais nous n'avons pas un temps valable à la fois pour A et pour B.

Ce temps commun aux points A et B sera défini de la façon suivante :

Puisque, dans un même système, la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, le temps que met la lumière à aller de A en B est égal au temps qu'elle met à aller de B en A.

Faisons alors partir de A un signal lumineux (ou électromagnétique) à l'instant  $t_A$  (temps du point A); ce signal arrive en B et est réfléchi en ce point à l'instant  $t_B$  (temps du point B); il est de retour au point A à l'instant  $t'_A$  (temps de A). Ses deux horloges de A et de B seront synchrones, par définition, si l'on a :

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \quad \text{ou} \quad t_B = \frac{t_A + t'_A}{2}$$

Cette définition du synchronisme ne soulève aucune objection ; elle est valable pour tous les points d'un même système.

En effet : 1°) si l'horloge de A est synchronisée avec celle de B, l'horloge de B est synchronisée avec celle de A.

2°) Si l'horloge de A est synchronisée avec l'horloge de B et avec celle d'un troisième point C, les horloges de B et de C sont synchronisées entre elles.

Nous avons donc maintenant une définition précise du temps dans un système, définition valable pour tous les points du système. Nous savons ce qu'on appelle horloges synchrones, nous savons ce qu'on doit entendre par simultanéité de deux événements qui se produisent en des lieux différents : deux événements A et B sont simultanés lorsque les heures simultanées à ces événements marquées par deux horloges synchrones en A et B sont les mêmes. ou, ce qui est la même chose, (d'après le procédé de synchronisation des horloges) lorsqu'un signal électromagnétique parti de A au temps  $t_A$  de l'horloge A arrive en B au temps  $t_B$  de l'horloge tel que  $\frac{\text{distance AB}}{t_B - t_A} = c$ , c étant la vitesse de la lumière.

Mais il est impossible de synchroniser deux horloges dans deux systèmes en mouvement relatif. Nous allons voir

d'ailleurs que les deux systèmes ont des temps différents.

Il faut bien remarquer que cette définition du temps d'un système et ce procédé de synchronisation des horloges (1) sont basés sur la constance de la vitesse de la lumière, quelle que soit la direction de propagation:

356. — La vitesse de la lumière est une constante universelle.

Le principe de relativité et le principe de l'invariance de la vitesse de la lumière dans un même système (n° 352), ont pour conséquence immédiate que la vitesse de la lumière a la même valeur dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

Considérons deux systèmes  $S$  et  $S'$  en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Dans chacun de ces systèmes, la vitesse de la lumière a une valeur indépendante de la direction; soient  $c$  et  $c'$  les valeurs de cette vitesse dans  $S$  et dans  $S'$ .

Supposons qu'on ait  $c' > c$ ; cela voudrait dire: pour un observateur  $B$  du système  $S'$  en mouvement par rapport à  $S$ , la vitesse de la lumière est plus grande que pour l'observateur  $A$  du système  $S$ , et ce résultat serait indépendant de la direction et du sens de la vitesse relative  $v$ , car pour  $A$  toutes les directions de l'espace sont équivalentes. Mais alors, comme rien ne distingue le système  $S$  du système  $S'$ , puisque les lois physiques sont les mêmes dans ces deux systèmes (principe de relativité), la même conclusion serait valable dans le passage du système  $S'$  au système  $S$ , car pour l'observateur  $B$  toutes les directions de l'espace sont équivalentes. On aurait donc aussi  $c > c'$ ; les deux inégalités étant contradictoires, on a  $c' = c$  (2).

Il importe de bien préciser la signification de ce résultat. Nous supposons que, dans divers systèmes en translation uniforme, les observateurs sont munis des mêmes étalons de longueur, c'est-à-dire de règles qui, si on les mettait à côté les

(1) Le procédé est pratiquement employé pour la comparaison des heures des observations et la détermination des longitudes, par la T. S. E.

(2) Raisonnement de M. Max Planck Acht Vorlesungen über theoretische Physik, (1910) p. 118.

unes des autres dans un des systèmes auraient la même longueur. Nous supposons que les observateurs ont des horloges étalons identiques, c'est-à-dire qu'ils mesurent le temps en prenant comme étalon de temps la période d'un même phénomène, qui ne soit pas déterminé par des conditions spéciales à un système particulier: par exemple, un pendule ne pourra pas servir d'étalon universel, parce que sa période d'oscillation est déterminée par la pesanteur, mais on pourra adopter la période d'une radiation émise par un corps et prendre pour unité de temps, dans tous les systèmes, un même multiple de cette période.

Dans ces conditions, si les observateurs prennent, chacun dans son système, une base, et mesurant le temps employé par la lumière à parcourir cette base, — par exemple, par la méthode de Fizeau — en divisant le nombre qui mesure la distance par le nombre qui mesure l'intervalle de temps, ils trouveront tous le même quotient.

Nous supposons, dans ce qui suit, que tous les observateurs se servent des mêmes règles étalons et des mêmes horloges étalons.

### 357. — Le groupe de Lorentz déduit de l'invariance de la vitesse de la lumière:

Considérons un événement noté  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  par les observateurs du système  $S$ , et noté  $(x', y', z', t')$  par les observateurs du système  $S'$  en translation uniforme avec la vitesse  $V$  par rapport à  $S$ . Nous nous proposons de chercher les fonctions  $f, \varphi, \psi, F$  satisfaisant aux relations suivantes:

$$x - x_0 = f(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0)$$

$$y - y_0 = \varphi(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0)$$

$$z - z_0 = \psi(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0)$$

$$t - t_0 = F(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0)$$

Si l'on suppose la combinaison de l'espace et du temps homogène<sup>(1)</sup> (euclidienne), ces formules de transformation doivent

(1) C'est précisément cette hypothèse de l'homogénéité de l'espace-temps qui est à la base de la relativité restreinte; l'univers considéré est euclidien; nous verrons plus tard, dans la relativité généralisée que cet univers euclidien est l'univers tangent à l'univers réel.

s'appliquer quel que soit l'évènement de référence  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  ou  $(x'_0, y'_0, z'_0, t'_0)$ .

Cette hypothèse de l'homogénéité permet de trouver la forme des fonctions. Considérons trois évènements (indices 0, 1, 2); nous aurons:

$$x'_1 - x'_0 = f(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0, t_1 - t_0)$$

$$x'_2 - x'_1 = f(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_2 - t_1)$$

$$x'_2 - x'_0 = f(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0, t_2 - t_0)$$

Donc:

$$f(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0, t_2 - t_0) = f(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_2 - t_1) + f(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0, t_1 - t_0)$$

équation fonctionnelle qui montre que  $f$  est une fonction linéaire et homogène de ses arguments. Nous allons chercher les coefficients de ces relations.

Ces coefficients ne peuvent évidemment être fonctions que de la vitesse relative  $v$ . De plus le principe de relativité exige que les formules donnant les  $x', y', z', t'$  en fonction des  $x, y, z, t$  soient les mêmes que celles donnant  $x, y, z, t$  en fonction de  $x', y', z', t'$  dans lesquelles  $v$  serait simplement changé en  $-v$ .

Adoptons la disposition d'axes précédemment indiquée. Prenons comme premier évènement l'émission d'un signal lumineux en  $O$  et  $O'$  au moment où les axes des 2 systèmes coïncident (origine des temps).

Au bout du temps  $t$ , pour  $O$ , le signal lumineux aura atteint la surface de la sphère du système  $S$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

La vitesse de la lumière étant une constante universelle, pour l'observateur  $O'$  le signal lumineux est au bout du temps  $t'$  sur la sphère du système  $S'$ :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

Si  $x, y, z, t, x', y', z', t'$  sont les coordonnées d'un même

appareil qui reçoit le signal lumineux (second événement),  
on a:

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = \lambda (x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) = 0$$

Les lois des phénomènes ne devant pas changer quand on  
passe de S à S' ou réciproquement,  $\lambda = 1$  et :

$$(501) \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

La disposition d'axes que nous avons choisie exige que:

quels que soient y et z on ait à la fois  $x' = 0$  et  $x = vt$  (502)

" x, z et t "  $y' = 0$  et  $y = 0$  (503)

" x, y et t "  $z' = 0$  et  $z = 0$  (504)

Les relations linéaires et homogènes qui donnent les  
 $x', y', z', t'$  en fonction des  $x, y, z, t$  contiennent 16 coefficients  
fonctions de  $v$  dont nous allons réduire le nombre, car les condi-  
tions précédentes montrent que  $x'$  est indépendant de y et z;  
 $y'$  indépendant de x, z, t;  $z'$  indépendant de x, y, t. De  
plus la relation entre y et y' doit être identique à celle entre  
z et z' car les directions des axes y et z sont arbitraires et  
peuvent être échangées. Il ne reste que 7 coefficients:

$$(505) \quad \begin{cases} x' = mx + nt \\ y' = ay; \quad z' = az \\ t' = px + by + cz + qt \end{cases}$$

Posons  $a = \theta(v)$ ; la relation entre y et y' ne devant pas  
dépendre du signe de  $v$ , on a  $\theta(v) = \theta(-v)$ ; de plus la réci-  
procité entre S et S' exige que  $y = \theta(-v) y'$  d'où  $\theta(v)\theta(-v) = 1$   
 $a = 1$

$$\text{Donc (506)} \quad y' = y \quad z' = z$$

D'après (502), pour  $x = vt$   $x' = 0$  donc  $mv + n = 0$   
et l'on a:

1<sup>re</sup> Division Physique 1920-21

160<sup>e</sup> feuille

$$(507) \quad x' = m(x - vt)$$

En substituant à  $x', y', z', t'$  leurs valeurs données par (505), (506), (507) dans l'identité (501), il vient :

$$m^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(px + by + cz + qt)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

En en conclut que :

$$b = c = 0; \quad (508) \quad m^2 = p^2 c^2 + 1; \quad (509) \quad m^2 v^2 = -c^2 pq; \quad (510) \quad m^2 v^2 = c^2 q^2 - c^2$$

de (509) on tire : (511)  $p = -\frac{m^2 v}{c^2 q}$

Portant dans 508 il vient (512)  $q^2 = \frac{m^4 v^2}{c^2(m^2 - 1)}$

et l'on en déduit en portant dans (510)

$$m = \frac{1}{\alpha} \quad \text{en posant} \quad \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(512) et (511) donnent ensuite

$$q = \frac{1}{\alpha} \quad p = -\frac{1}{\alpha} \frac{v}{c^2}$$

Finalement les formules de transformation sont :

$$x' = \frac{1}{\alpha} (x - vt) \quad x = \frac{1}{\alpha} (x' + vt')$$

$$y' = y \quad \text{ou} \quad y = y'$$

$$z' = z \quad z = z'$$

$$t' = \frac{1}{\alpha} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad t = \frac{1}{\alpha} \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

Cesont précisément les équations de Lorentz

358. — La mécanique doit être soumise aux lois de l'électromagnétisme.

Nous avons établi que les deux principes énoncés par Einstein :

1°) — Les lois des phénomènes physiques sont les mêmes dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par

rapport aux autres,

2°). Dans un même système, la vitesse de la lumière est indépendante de la direction et indépendante du mouvement de la source de lumière;

ont pour conséquence:

1°). Que la vitesse de la lumière est une constante universelle.

2°). que la transformation des coordonnées d'espace et de temps, quand on passe d'un système à un autre, sont les transformations de groupe de Lorentz; ces transformations conservent leur forme aux équations de l'électromagnétisme.

Inversement, si l'on cherche, comme l'avait fait Lorentz, les formules de transformation qui laissent invariantes les lois de l'électromagnétisme, on obtient les formules (500) qui impliquent la constance de la vitesse de la lumière, et la relativité du temps. Nous sommes donc en présence de deux groupes de transformations:

1°). le groupe de Galilée, qui seul laisse invariantes les lois de la mécanique classique.

2°). le groupe de Lorentz, qui seul laisse invariantes les lois de l'électromagnétisme.

Ces deux groupes sont incompatibles. Le premier admet un temps universel, le second implique un temps différent d'un système à un autre (4<sup>ème</sup> équation du groupe de Lorentz).

Le désaccord qui s'est manifesté entre la théorie mécanique de l'expérience de Michelson et le résultat expérimental est la conséquence d'un conflit entre les lois de la mécanique newtonienne et celles de l'électromagnétisme.

En effet, en conservant les notions anciennes d'espace et de temps, telles que la mécanique rationnelle les exige, on devait obtenir un déplacement des franges dans l'expérience de Michelson, or, on n'a rien obtenu.

D'autre part, on constate que les lois de l'électromagnétisme ne restent pas invariantes quand on leur applique le groupe de transformations de la mécanique; elles admettent un groupe différent dont la découverte est venue montrer que les équations de Maxwell contenaient implicitement l'explication de l'échec de toutes les tentatives faites pour révéler un mouvement absolu. Le résultat de Michelson, en particulier, est évident si la vitesse de la lumière est constante, comme l'exige le groupe de Lorentz, l'expérience devait conduire

à un résultat négatif.

C'est donc un fait d'expérience que les lois de l'électromagnétisme restent invariantes. Cela est d'ailleurs logique et l'on devait s'y attendre : ces lois ont été établies sur la Terre ; dans un système qui n'est nullement privilégié dans l'univers ; elles s'expriment sous une forme simple et deviendraient compliquées par une transformation différente de celle du groupe de Lorentz. Il serait déraisonnable d'admettre que ces lois sont spéciales à un système de référence lié à la Terre ; elles doivent avoir une portée générale, et la preuve de leur invariance est le fait qu'elles ne se modifient pas dans le cours de l'année, malgré le changement du système de référence, la Terre changeant de direction sur son orbite.

Peut-on conserver à la fois les lois de la mécanique classique et celles de l'électromagnétisme ?

Cela est impossible : adopter le temps absolu de la mécanique, c'est renoncer à l'invariance des lois de l'électromagnétisme ; adopter le temps relatif de l'électromagnétisme, c'est abandonner la mécanique newtonienne, car il serait absurde de supposer deux temps, l'un absolu, l'autre relatif. Il y a là incompatibilité radicale.

Il faut choisir, et le choix n'est pas douteux car il est imposé par l'expérience. Les lois de l'électromagnétisme sont trop bien vérifiées pour qu'on puisse les abandonner<sup>(1)</sup>. Quant aux lois de la mécanique, nous n'avons aucune raison de les conserver ; elles paraissent valables dans les phénomènes ordinaires, trop grossiers pour qu'une discordance apparaisse, mais dès qu'il s'agit de phénomènes comportant une vérification précise, le désaccord se révèle (expérience de Michelson).

Il faut donc renoncer aux lois de la mécanique rationnelle et soumettre la mécanique aux lois de l'électromagnétisme. Les lois classiques deviennent alors une approximation, d'ailleurs excellente dans la plupart des cas ; si, en effet, on fait  $c = \infty$  dans les équations de Lorentz, on retrouve le groupe de Galilée.

On peut se servir de la mécanique classique, tant que le carré de la vitesse des corps, (vitesse par rapport à l'observateur) est négligeable vis à vis du carré de la vitesse

\* (1) Nous verrons, par la suite, les vérifications expérimentales.

de la lumière.

On voit par là que le désaccord entre la mécanique classique et l'électromagnétisme n'est qu'un aspect du conflit profond qui a dominé la physique jusqu'à l'époque actuelle, le conflit entre la théorie des actions à distance instantanées admise en mécanique céleste jusqu'à ces dernières années, et la théorie de l'action de proche en proche avec vitesse finie, à laquelle Maxwell a donné son plein développement. La théorie de la relativité est la suite logique de la théorie de Maxwell.

Dans le cours d'électricité, nous sommes restés longtemps d'accord avec la mécanique classique, tant que nous avons admis la propagation instantanée des actions électriques et magnétiques. Ce n'était qu'une approximation. C'est en introduisant les courants de déplacement que nous avons abandonné la mécanique newtonienne, car les équations de Maxwell, auxquelles nous avons été directement conduits, entraînent la négation du temps absolu. Impliquant la notion de temps relatif, ces équations interdisent la possibilité d'une relation de cause à effet, quelle qu'elle soit, pouvant se propager avec une vitesse infinie.

## § 5.- Relativité de l'espace et du temps.-

### 359.- L'espace et le temps relatifs.-

Dans le groupe de Lorentz, le temps n'est plus un invariant; ainsi disparaît une dissymétrie qui, dans le Groupe de Galilée existait entre l'espace et le temps (n° 345).

Soyent  $x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2$  les coordonnées de deux événements  $E_1, E_2$  dans un système  $S, x, y, z, t; x', y', z', t'$  les coordonnées des mêmes événements dans le système  $S'$ . Dans la cinématique ancienne, la distance spatiale était relative;

$$x'_1 - x'_2 = x_1 - x_2 - v(t_1 - t_2)$$

mais l'intervalle de temps séparant ces événements était indé-

pendant du système de référence.

Dans la cinématique nouvelle, l'intervalle  $t'_1 - t'_2$  est fonction de  $v$  comme l'intervalle dans l'espace.

$$(513) \quad \begin{cases} x'_1 - x'_2 = \frac{1}{\alpha} (x_1 - x_2) - \frac{1}{\alpha} v (t_1 - t_2) \\ t'_1 - t'_2 = \frac{1}{\alpha} (t_1 - t_2) - \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c^2} (x_1 - x_2) \end{cases}$$

La symétrie de ces deux relations est remarquable.

Il résulte immédiatement de l'expression de  $t'_1 - t'_2$  que la simultanéité de deux événements est relative. Si deux événements sont simultanés dans un système ( $t_1 - t_2 = 0$ ), ils ne sont simultanés dans aucun autre ( $t'_1 - t'_2 \neq 0$ ), à moins qu'ils ne coïncident à la fois dans l'espace et dans le temps; ( $x_1 - x_2 = 0$ ,  $t_1 - t_2 = 0$ ,  $x'_1 - x'_2 = 0$ ,  $t'_1 - t'_2 = 0$ ) dans ce cas ils sont en coïncidence absolue. Cette coïncidence complète a un sens absolu car il peut en résulter un effet sur lequel tous les observateurs seront nécessairement d'accord (par exemple rupture de deux objets par choc mutuel).

La relativité complète de l'espace que perçoit chaque observateur entraîne la suppression de la notion de système fixe et de mouvement absolu. L'éther, du moins celui de la théorie de Fresnel, doué de propriétés mécaniques et élastiques, devient inadmissible. Nous verrons, dans la relativité généralisée, pour quelle conception l'ancien éther doit être remplacé.

### 360: — Loi de composition des vitesses.

Un point  $P'$  du système  $S'$  se meut dans ce système avec

la vitesse  $v'$ :  $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ ;  $v'_y = \frac{dy'}{dt'}$   $v'_z = \frac{dz'}{dt'}$ .

Quelle est sa vitesse dans le système  $S$  qui, à l'époque  $t$  (temps du système  $S$ ) coïncide avec  $P'$ ?

Différencions les équations de Lorentz (500<sup>bis</sup>):

$$dx = \frac{1}{\alpha} (dx' + v dt') \quad dy = dy' \quad dz = dz' \quad dt = \frac{1}{\alpha} (dt' + \frac{v}{c^2} dx')$$

Il suffit de diviser les trois premières équations par la dernière pour avoir le résultat:

$$(514) \quad u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v + v'_x}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{dy}{dt} = \alpha \frac{v'_y}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}}, \quad u_z = \alpha \frac{v'_z}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}}$$

En particulier si  $v'$  est parallèle à  $v$ , on a :

$$(515) \quad u = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

Deux vitesses mesurées dans des systèmes différents ne se composent pas suivant la règle du parallélogramme, mais il importe de remarquer que deux vitesses mesurées dans un même système se composent toujours suivant la règle habituelle.

On voit, par l'équation (515) que  $u$  est toujours inférieure à  $c$ , même si l'une des vitesses  $v$  ou  $v'$  est égale à  $c$ . La vitesse de la lumière est une vitesse limite qui ne peut être dépassée; un mobile, par accroissements successifs à partir de son mouvement primitivement acquis n'atteint jamais la vitesse de la lumière.

Comme exemple, supposons un observateur  $A$  et deux observateurs  $B$  et  $C$  s'éloignant de  $A$ , dans des directions opposées avec la vitesse, mesurée par  $A$ , de  $200\,000 \text{ km/sec}$ . Pour l'observateur  $A$ , les observateurs  $B$  et  $C$  s'écartent l'un de l'autre de  $400\,000 \text{ km/sec}$ , mais pour chacune des observateurs  $B$  et  $C$ , la vitesse de l'autre est seulement  $277\,000 \text{ km/sec}$ .

### 361. — Explications de l'expérience de Fizeau, dite "entraînement des ondes".

Il n'y a qu'à écrire la loi de composition des vitesses. Le courant d'eau (système  $S'$ ) coule relativement à l'observateur (système  $S$ ) avec la vitesse  $v$ . Le rayon lumineux se propage dans l'eau (système  $S'$ ) avec la vitesse  $v' = \frac{c}{n}$ ; la vitesse  $c'$  de ce rayon mesurée par l'observateur (système  $S$ ) est donc :

$$c' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{cn}} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

en limitant le développement aux termes du 1<sup>er</sup> ordre. C'est bien le résultat de Fizeau.

La loi d'entraînement n'a qu'une signification purement cinématique, immédiate et simple au possible.

## § 6.- L'Univers de Minkowski.

« A l'heure actuelle l'espace et le temps considérés en eux-mêmes doivent disparaître dans l'ombre, et leur union seule peut posséder une individualité. »

H. Minkowski : *Raum und Zeit* <sup>(1)</sup> (1908)

### 362.- — L'invariant « Intervalle d'Univers » Union de l'espace et du temps.

Considérons deux événements quelconques. Si on les repère dans des systèmes différents (en translation uniforme), ni la distance spatiale  $l$  des points où se produisent ces événements, ni l'intervalle de temps  $T$  qui les sépare ne sont les mêmes, car chaque système possède son espace propre et son temps, mais la quantité

$$(516) \quad S^2 = c^2 T^2 - l^2$$

a la même valeur dans tous les systèmes, ainsi qu'on le vérifie aisément par les formules de Lorentz.

D'ailleurs nous avons vu (n° 357) que si la quantité  $c^2 T^2 - l^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$  est nulle dans un système, elle est nulle dans tous les autres, parce que la vitesse de la lumière est un invariant. Pour qu'une valeur nulle de cette quantité entraîne nécessairement une valeur nulle dans un autre système quelconque, il faut que les formules de transformation (formules de Lorentz) possèdent la propriété de laisser invariante l'expression  $S^2 = c^2 T^2 - l^2$  quelle que soit sa valeur.

L'invariant  $S$  est l'intervalle d'Univers; il remplace la distance de deux points, considérée en géométrie.

Nous avons vu, en effet, que dans les anciennes notions d'espace et de temps, la distance de deux événements simultanés est un invariant. En géométrie, où l'on ne considère

(1) Conférence publiée dans l'ouvrage Lorentz - Einstein - Minkowski, des relativitätsprinzip (Bentner éditeur).

que des événements simultanés, cet invariant est la distance de deux points.

La condition d'invariance de la distance, quand on passe d'un système de coordonnées à un autre, définit complètement les formules de transformation de la géométrie analytique.

La conception ancienne ne peut plus être conservée, puisque la simultanéité est purement relative.

Dans la théorie nouvelle, la condition d'invariance de  $s$  définit aussi les formules de transformation et, ces formules sont celles de Lorentz.

La réalité objective de l'espace était affirmée autrefois par l'invariance de la distance de deux points en géométrie. La réalité du temps était affirmée par l'invariance du temps. Ces invariants doivent être supprimés, et remplacés par l'invariant  $s^2 = c^2 T^2 - l^2$ .

Il n'y a ni espace absolu ni temps absolu, mais une réalité unique, affirmée par l'invariant  $s$ . La modification est radicale: le nouvel invariant contient à la fois les trois coordonnées espace et les coordonnées temps. L'espace et le temps ne sont pas indépendants, et seule leur union possède une individualité. L'Espace-Temps ou Univers est l'ensemble des événements; il possède quatre dimensions.<sup>(1)</sup>

L'Univers est indépendant du système de référence qui sert à repérer les événements. C'est cette indépendance qui est exprimée dans l'énoncé du principe de relativité. Les lois de l'Univers qui sont les mêmes dans tous les systèmes, doivent pouvoir s'énoncer sous une forme intrinsèque, comme le fait la géométrie pour l'espace, grâce à l'introduction d'éléments invariants. C'est cette idée qui a guidé Einstein, qui l'a conduit à la relativité généralisée et à la découverte des lois de la gravitation.

Que devient alors l'espace? L'espace reste encore l'ensemble des événements simultanés; c'est une "coupe de l'Univers à temps donné" (P. Langevin). Cette définition

(1) L'union de l'espace et du temps a été exprimée pour la première fois par Minkowski.

s'applique à l'ancienne conception de l'espace et à celle d'aujourd'hui, mais la différence est profonde : la conception compatible avec la mécanique newtonienne admettait un temps universel, et la coupe était la même dans tous les systèmes, la forme des corps était invariable. Dans l'univers de Minkowski, la simultanéité étant relative, la coupe à temps donné dépend du système de référence ; la forme des corps n'est plus invariable, il y a une infinité d'espaces euclidiens dans l'univers "euclidien" unique à 4 dimensions, comme en géométrie il y a une infinité de plans dans l'espace euclidien à trois dimensions.

### 363. — Propriétés des couples d'événements. (P. Langevin) (1)

Soient A et B deux événements : trois cas peuvent se présenter : l'intervalle  $s$  est imaginaire, nul ou réel.

1°) Couples dans l'espace. — Supposons  $s$  imaginaire. Quel que soit le système de référence,  $s^2 = c^2 T^2 - l^2$  est négatif ; la distance spatiale  $l$  est plus grande que le trajet  $cT$  que parcourt la lumière dans l'intervalle de temps  $T$  qui sépare les événements. Deux tels événements n'ont pas, dans le temps, un ordre de succession déterminé, car leur ordre de succession peut être renversé par un changement convenable du système de référence. Repérons en effet les deux événements dans deux systèmes  $S$  et  $S'$  dont les axes des  $x$  passent par les deux événements ; donnons à  $S'$  une vitesse  $v$  par rapport à  $S$ . Soient  $x_1, x_2$  les coordonnées des événements dans  $S$ ,  $t_1, t_2$  leurs époques dans  $S$ ,  $t'_1, t'_2$  leurs époques dans  $S'$ . Ses formules de Lorentz donnent :

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\alpha} (t_2 - t_1) - \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)$$

Nous avons d'autre part, puisque  $s^2 < 0$  :

$$(t_2 - t_1)^2 < \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2}$$

(1) P. Langevin - L'évolution de l'espace et du temps. Scientia. Vol. X (1911). -  
Le temps, l'espace et la causalité - Bulletin de la Société de Philosophie - 19 octobre 1911.

ce que nous pouvons écrire :

$$(t_2 - t_1)^2 = \frac{u^2}{c^2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{c^2} \text{ avec } 0 < u < c.$$

Supposons A antérieur à B dans S, c'est-à-dire  $t_2 - t_1 > 0$ ; pour toutes les vitesses  $v$  dont la valeur absolue est comprise entre  $u$  et  $c$ , vitesses possibles puisque  $u < c$ , prises positives ou négatives selon que la différence  $x_2 - x_1$  est positive ou négative, nous avons :

$$t_2 - t_1 < \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)$$

et par suite  $t'_2 - t'_1 < 0$ ; l'événement A sera alors postérieur à B dans le système S'.

Dans un système tel que  $v = u$ , les deux événements sont simultanés.

La distance spatiale de ces deux événements est minimum dans le système pour lequel ils sont simultanés, car  $c^2 T^2 - l^2$  étant constant,  $l$  est minimum pour  $T = 0$ .

Deux tels événements, qui peuvent être amenés en coïncidence dans le temps, mais non dans l'espace, forment un couple dans l'espace.

Deux événements forment un couple dans l'espace sont nécessairement, sans influence mutuelle possible. Aucun lien de cause à effet ne peut exister entre eux car, l'ordre de succession pouvant être inversé, s'il existait un lien de cause à effet entre eux, pour certains observateurs, la cause serait postérieure à l'effet, ce qui est absurde; on ne peut pas télégraphier dans le passé.

De pareils événements sont donc véritablement indépendants. Ils ne peuvent se succéder dans une même portion de matière, ni appartenir à la vie d'un même être, puisqu'ils ne peuvent pas être amenés en coïncidence dans l'espace.

2°) - Si  $s = 0$ ,  $l$  et  $T$  sont nuls dans tous les systèmes; les deux événements sont en coïncidence absolue dans l'espace-temps.

3° - Couples dans le temps. - Lorsque  $s$  est réel, la distance spatiale  $l$  est plus courte que le trajet  $cT$  de la lumière pendant la durée qui s'écoule entre les événements.

On verrait aisément que  $t'_2 - t'_1$  est toujours du même signe que  $t_2 - t_1$ , quelque choix qu'on fasse du système S'. L'ordre de succession a alors un sens absolu.

On peut trouver un système dans lequel  $l = s$  annule.

Deux tels événements peuvent être amenés en coïncidence dans l'espace, mais non dans le temps. Ils forment un couple dans le temps. De plus, la durée qui les sépare est minimum dans le système pour lequel ils coïncident dans l'espace.

Deux événements formant un couple dans le temps peuvent être mis par un lien de causalité. Ils peuvent aussi, bien entendu, être indépendants, mais toujours le second événement peut avoir été informé du premier.

L'intervalle d'Univers  $s$  est donc réel ou imaginaire suivant que l'un des événements peut ou non influencer sur l'autre; il indique la possibilité d'influence ou d'action d'un des événements sur l'autre.

### 364. — La contraction des longueurs.

Appliquons les considérations qui précèdent à une tige de longueur  $l$  pour un observateur  $S$  immobile par rapport à elle, et de longueur  $l'$  pour un observateur par rapport auquel elle se déplace dans le sens de sa longueur. Prenons comme événements  $A$  et  $B$  les positions des extrémités de la tige à un même instant pour  $S$ . Ces événements forment un couple dans l'espace. Pour l'observateur  $S$ , la distance des événements  $A$  et  $B$  est la longueur  $l$  de la tige; mais, pour  $S'$ ,  $A$  et  $B$  ne sont pas simultanés et la tige est plus longue. Supposons qu'une des extrémités coïncide avec  $O$  et  $O'$  à l'origine des temps:

$$\text{La formule } x' = \frac{1}{\alpha} (x - vt)$$

montre que pour  $t = 0$

$$(517) \quad x' = \frac{x}{\alpha} \quad \text{ou} \quad l' = \frac{l}{\alpha}; \quad l = \alpha l'$$

Pour l'observateur  $S$  qui voit passer la tige, celle-ci est donc plus courte que pour l'observateur  $S'$ , dans le rapport

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

C'est la contraction de Lorentz, mais elle n'a plus aucun caractère absolu et sous cette forme elle ne prête plus aux objections précédemment indiquées (n° 351); elle résulte simplement de la manière différente dont les deux ob-

observateurs définissent la simultanéité et du fait que la forme d'un corps en mouvement ne peut être définie que comme le lieu des positions simultanées des différents points de ce corps (P. Langevin).

Le fait qu'un objet qu'on voit passer est contracté dans le sens du mouvement ne signifie pas que l'objet a été modifié; il signifie que l'espace relatif à l'observateur et l'espace relatif à l'objet ne sont pas les mêmes, ainsi que nous l'avions fait pressentir (v. n° 351).

Un objet qui passerait avec la vitesse de la lumière serait, pour l'observateur du système S, infiniment aplati.

### 365. — La dilatation du temps. — (Einstein)<sup>(1)</sup>

Une horloge est immobile dans le système S'; elle marque le temps  $t'$ . Comment marche-t-elle, vue du système S? Supposons l'horloge placée à l'origine des coordonnées  $O'$  du système S'; on a:

$$t' = \frac{1}{\alpha} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \text{ et } x = vt. \quad \text{D'où:}$$

$$(518) \quad t' = \alpha t$$

L'horloge du système S', vue du système S, retarde, par seconde, de  $(1 - \alpha)$  seconde, elle prend d'autant plus de retard sur les horloges de S qu'elle s'éloigne davantage de l'origine des coordonnées de S.

À un instant déterminé  $t$  de S, l'horloge de S' placée en un point qui coïncide à cet instant avec un point du système S dont l'abscisse est  $x$ , retarde sur les horloges de S, et retarde d'autant plus que  $x$  est plus grand.

La relation entre les temps  $t$  et  $t'$  est réciproque. Vues de S', ce sont les horloges de S qui retardent sur celles de S'.

La dilatation du temps est la contre-partie de la contraction des longueurs. On a  $dx dt = dx' dt'$ , c'est-à-dire encore:

(1) A. Einstein - Ann. de Physik 17 (1905). Les mémoires d'Einstein sont publiés dans le recueil Lorentz - Einstein - Minkowski, das relativitätsprinzip.

$$(519) \quad dx \, dy \, dz \, dt = dx' \, dy' \, dz' \, dt'$$

ce qui exprime l'invariance de l'élément d'hypervolume d'univers.

### 366. — Les lignes d'Univers (Minkowski).-

Suivons maintenant la succession des événements qui constituent la vie d'une même portion de matière ou d'un même être. Leur ensemble forme dans l'Espace-Temps une « ligne d'Univers », comme en géométrie, une succession de points forme une ligne dans l'espace.

Dans l'espace de la géométrie l'élément d'arc de courbe s'écrit :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Dans l'Espace-Temps, l'élément d'arc de ligne d'Univers a pour expression l'invariant :

$$(520) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

C'est l'intervalle, indépendant de tout système de référence, entre deux événements infiniment voisins pris sur la ligne d'Univers considérée. Entre deux événements A et B pris sur cette ligne, la longueur de l'arc de ligne d'Univers est :

$$(521) \quad I = \int_A^B ds$$

l'intégrale étant étendue à tous les couples d'événements qui se succèdent d'une manière continue le long de cette ligne. Cette intégrale a une valeur indépendante du système de référence.

Prenons comme système de référence un système lié à la portion de matière. Tous les événements concernant cette portion de matière y sont fixes dans l'espace, puisqu'ils occupent la même position par rapport aux axes  $ox, oy, oz$  du système de référence; pris deux à deux, ils constituent des couples dans le temps (n° 363); l'arc de ligne d'Univers qui les sépare est toujours réel (1) et leur ordre de succession ne peut être inversé; le passé, le présent et l'avenir gardent un ordre immuable pour les événements con-

(1) C'est la raison pour laquelle nous avons posé  $s^2 = c^2 T^2 - l^2$  et non  $l^2 - c^2 T^2$ .

cernant un même objet ou un même être.

### 367.- Le temps propre. (Minkowski):-

Dans le système de référence lié à une portion de matière, la distance spatiale entre deux événements concernant cette portion de matière est toujours nulle. On a donc, dans ce système:

$$(522) \quad ds = cd\tau \quad s = c \int_A^B d\tau$$

$d\tau$  est l'élément de temps propre de la portion de matière considérée et de tout le système qui lui est lié. Le temps propre est le temps que mesurera un observateur, c'est le temps que marqueront les horloges dans ce système.

Une horloge liée à un mobile mesure la longueur divisée par  $c$ , de l'arc de ligne d'Univers de ce mobile.

Considérons maintenant un point matériel libre  $M_1$ ; il est en mouvement rectiligne et uniforme: à cet état de mouvement correspond, dans l'Espace-Temps, une ligne d'Univers formée par l'ensemble des événements qui représentent les diverses positions successives de ce mobile dans son mouvement de translation uniforme.

Sur la ligne d'Univers de  $M_1$ , prenons deux événements déterminés A et B: ces deux événements forment un couple dans le temps; leur ordre de succession est invariable; nous supposons que A soit antérieur à B.

Entre ces événements A et B, nous pouvons imaginer une infinité de lignes d'Univers réelles: il suffit de considérer un second mobile  $M_2$  parti de l'événement A, qui, après avoir parcouru un trajet spatial plus ou moins long (repéré dans un système de référence en translation uniforme lié à  $M_1$ ), avec une vitesse plus ou moins grande, rejoint le mobile  $M_1$  à l'événement B.

Il importe de remarquer pour la suite que  $M_2$ , ayant quitté en A le système uniforme de  $M_1$  pour y revenir en B (ou seulement pour y passer en B) a nécessairement subi une accélération entre les événements A et B.

Repérons les événements dans un système S lié à  $M_1$  (par conséquent en translation uniforme); prenons deux

époques  $t$  et  $t + dt$  (du temps du système  $S$ ) comprises entre les époques  $t_A$  et  $t_B$  auxquelles se produisent, toujours dans le système  $S$ , les événements  $A$  et  $B$ . Aux époques  $t$  et  $t + dt$ , le second mobile  $M_2$  est repéré  $x, y, z, t$ ;  $x + dx, y + dy, z + dz, t + dt$  dans le système  $S$ . ces coordonnées déterminent, sur la courbe d'Univers de  $M_2$ , deux événements  $C$  et  $D$  infiniment voisins, dont l'intervalle est  $ds$ . On a:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

mais on a aussi:  $ds = c d\tau$

$d\tau$  étant le temps propre du mobile  $S_2$ . On déduit de là:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \left( \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \right] = c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 \alpha^2 dt^2$$

$v$  étant la vitesse du mobile  $M_2$  à l'époque  $t$ , vitesse et temps mesurés dans le système uniforme du mobile  $M_1$ .

On a donc finalement:

$$(523) \quad d\tau = \alpha dt, \text{ ce qui signifie:}$$

Le temps propre d'un mobile  $M_2$ , entre deux événements de sa courbe d'Univers est plus court que le temps mesuré entre les mêmes événements dans un système uniforme et est d'autant plus court que la vitesse du mobile par rapport au système uniforme est plus grande.

Ceci résultait, d'ailleurs, de la propriété de minimum démontrée au n° (363): lorsque deux événements forment un couple dans le temps, la durée qui les sépare est minimum dans le système pour lequel ils sont en coïncidence dans l'espace; le temps propre jouit donc de la propriété de minimum par rapport au temps de tout système en translation uniforme.

Nous n'avons pas encore tenu compte de la coïncidence absolue des mobiles  $M_1$  et  $M_2$  aux événements  $A$  et  $B$ . Intégrons (523):

$$(524) \quad \int_A^B d\tau = \int_{t_A}^{t_B} \alpha dt$$

Plus le mouvement du mobile  $M_2$ , entre A et B différera d'un mouvement rectiligne et uniforme, plus, par conséquent, sa vitesse par rapport à  $M_1$  sera grande, puisque la durée totale  $t_B - t_A$  est fixe, et plus le temps propre total sera court.

Cela revient à dire que:

Entre deux événements déterminés la plus longue ligne d'univers est celle qui correspond au mouvement de translation uniforme. (1)

Il y a une infinité de lignes d'univers de longueur nulle; en effet, dans le système S lié à  $M_1$ , les événements A et B se passent au même point: il y a une infinité de trajectoires possibles pour un rayon lumineux partant de ce point à l'époque  $t_A$  et y revenant à l'époque  $t_B$ . Une ligne d'univers d'un rayon lumineux a une longueur nulle, puisque

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{c^2}{c^2}\right) = 0.$$

D'étranges conséquences se déduisent des résultats qui viennent d'être établis.

Dans un système en translation uniforme — la berge par exemple, car son accélération est négligeable — deux horloges identiques et synchrones sont au même endroit. On déplace l'une rapidement et on la ramène près de l'autre au bout du temps  $t$  (temps du système). Elle se trouve en retard sur l'autre horloge de  $t(1-\alpha)$ . (Einstein a établi ce résultat sans faire intervenir le temps propre, par les considérations du n° 365).

Dans les mêmes conditions, un échantillon de matière radioactive aura moins évolué que celui qui n'a pas été déplacé, qui n'a pas subi d'accélération (M. Langevin).

Il reste bien entendu que pour rendre appréciables de semblables phénomènes, il faudrait réaliser des vitesses colossales.

Avec M. Langevin<sup>(1)</sup> imaginons qu'un observateur ait

(1) — Il importe de remarquer que, dans la démonstration précédente, il n'y a pas réciprocité entre les systèmes de référence liés à  $M_1$  et à  $M_2$ , parce que  $M_2$  n'est pas en translation uniforme. C'est l'accélération de  $M_2$  qui a créé la dissymétrie: on reconnaît ici le caractère absolu de l'accélération.

(2) — F. Langevin - L'évolution de l'espace et du temps. Scientia Vol. X - 1911.

une machine lui permettant de quitter la Terre et d'atteindre une vitesse fantastique. Supposons, pour fixer les idées, que cette vitesse soit inférieure de  $\frac{1}{20000}$  seulement à la vitesse

de la lumière. Pendant un an, le voyageur s'éloigne de la Terre et revient au bout de deux ans; il n'a vieilli que de deux ans; il a vécu le temps propre de son système, temps d'ailleurs enregistré par ses horloges. Cependant, à son retour, il trouve sur la Terre d'autres générations, et il apprend qu'il est parti depuis 200 ans. Il s'est transporté dans l'avenir, sans retour possible dans le passé.

Le calcul montre que si les habitants de la Terre et le voyageur pouvaient se suivre mutuellement par des signaux, la Terre mettrait deux siècles à recevoir le signal envoyé par le voyageur pour annoncer le commencement de son voyage de retour et que le retour se produirait, pour la Terre, deux jours plus tard. Tandis que le voyageur aurait vu la Terre s'éloigner et se rapprocher de lui pendant des temps égaux chacun, pour lui, à un an, la Terre, prévenue seulement par l'arrivée d'ondes électromagnétiques, aurait vu le voyageur s'éloigner d'elle pendant deux siècles et revenir pendant un temps quarante mille fois plus court.

Nul exemple ne peut mieux mettre en évidence la relativité du temps.

Pour un mobile qui serait animé de la vitesse de la lumière, le cours du temps serait suspendu.

### 368. — La loi d'inertie. <sup>(1)</sup>

Nous venons d'établir que l'intégrale  $I = \int_A^B ds$  est maximum pour la ligne d'Univers qui correspond au mouvement rectiligne et uniforme, c'est-à-dire pour un mobile qui se meut conformément à la loi d'inertie.

Cette loi a donc pour énoncé intrinsèque et simple:

$$(525) \quad \delta \int ds = 0$$

Le mouvement rectiligne et uniforme joue, dans l'Univers,

(1) P. Langevin - Bulletin de la Société des électriciens - 3 décembre 1919.

le rôle que joue la droite en géométrie euclidienne, avec cette différence que la ligne d'Univers qui se traduit pour nous par l'état de mouvement rectiligne et uniforme entre deux événements est la ligne la plus longue, alors qu'en géométrie la ligne droite entre deux points est la ligne la plus courte. Cependant, dans un cas comme dans l'autre, l'énoncé, sous forme de loi d'action stationnaire, est le même.

On peut dire encore, sous une forme plus générale, que la ligne d'Univers d'un point matériel libre est une géodésique de l'Espace-Temps.

La ligne d'Univers d'une perturbation électromagnétique est une géodésique de longueur nulle.

L'Espace-Temps régi par les formules de Lorentz, dans lequel les géodésiques sont des lignes d'Univers comparables aux droites de la géométrie, c'est-à-dire dans lequel peut se produire le mouvement rectiligne et uniforme, est un Univers euclidien. (1)

### 369. — La géométrie de Minkowski. (Géométrie des événements).

L'invariant  $s$ , qui joue dans l'Espace-Temps le même rôle que la distance dans l'espace de la géométrie, permet de donner une interprétation géométrique de la transformation de Lorentz (2).

La géométrie des événements diffère de celle des figures de l'espace, non seulement parce qu'elle est à 4 dimensions, mais parce que dans l'expression de  $s^2$  il y a un terme positif et trois termes négatifs alors que le carré de la distance de deux points est exprimé par la somme de trois carrés.

Nous prendrons comme 4<sup>e</sup> coordonnée la longueur  $u = ct$ .  
Dans un hyperespace à 4 dimensions, imaginons

(1) Nous verrons, dans la relativité généralisée que le mouvement de translation uniforme n'est jamais rigoureusement réalisé. L'Univers réel n'est pas euclidien, mais en chaque événement, on peut considérer un Univers de Minkowski tangent, de même qu'en géométrie des surfaces courbes on peut, aux alentours de chaque point, remplacer la surface par son plan tangent.

(2) H. Minkowski - Raum und Zeit - Max Von Laue - Die Relativitätstheorie T.I. p. 66 (1919).

4 axes de coordonnées rectangulaires  $ox, oy, oz, ou$ , constituant un système  $S$ ; il y a 6 plans de coordonnées  $xy, yz, zx, ux, uy, uz$  sur chacun desquels on peut représenter la projection d'une figure à 4 dimensions; il y a aussi 4 espaces de coordonnées euclidiens, à 3 dimensions, perpendiculaires les uns sur les autres: un seul de ces 4 espaces est celui que nous appelons "l'espace" ( $x, y, z$ ).

En géométrie ordinaire, si nous portons à partir d'un point origine, dans toutes les directions, la distance unité, nous obtenons la surface d'une sphère:

$$(526) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Dans l'hyperespace, prenons un événement origine  $O$ . Nous devons remplacer la distance de la géométrie par l'intervalle d'univers  $s$  qui peut être réel ou imaginaire. Les événements tels que le carré de l'intervalle qui les sépare de l'événement origine soit égal à  $\pm 1$ , sont représentés par les espaces hyperboliques (3 dimensions)

$$527 \quad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = \mp 1$$

Ces espaces sont des équivalents de la surface sphérique (526).

Figurons dans le plan du tableau les axes  $ox$  et  $ou$ , coupons par ce plan ( $x=c, z=0$ ) les deux espaces hyperboliques: nous obtenons les deux hyperboles:

$$(528) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - u^2 = -1 \quad \text{hyperbole (1)} \\ x^2 - u^2 = +1 \quad \text{hyperbole (2)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{asymptotes communes} \\ x^2 - u^2 = 0 \end{array}$$

Considérons maintenant un système  $S'$  de points matériels, ou, selon l'expression de Minkowski, de points substantiels, le mot substance étant pris dans un sens très général, et signifiant qu'il y a "quelque chose"; matière, électricité, énergie. Supposons que les points substantiels soient animés, parallèlement à  $ox$ , d'une vitesse  $v$  par rapport au système  $S$ ; leurs lignes d'univers sont toutes représentées par des droites faisant avec l'axe  $ou$  l'angle  $\Psi = \text{arc tg } \frac{v}{c}$ : on a en effet:

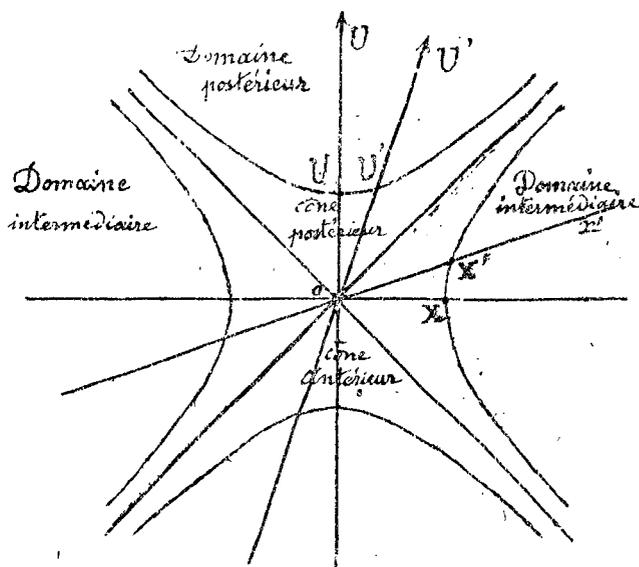
$$(529) \quad v = \frac{dx}{dt} = c \frac{dx}{du}, \quad \frac{dx}{du} = \frac{v}{c} = \operatorname{tg} \psi$$

de sorte que les équations de la ligne d'Univers d'un point substantiel du système  $S'$  sont:

$$(530) \quad x = \frac{v}{c} u + x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

Ces sont bien des droites parallèles à la droite  $ou'$  du plan des  $xu$ , faisant avec  $ou$  l'angle  $\psi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{c}$ ; la droite  $ou'$  est la ligne d'Univers du point substantiel dont la position à l'origine des temps est un événement en coïncidence absolue avec l'événement origine  $O$  du système  $S$ .

La vitesse  $v$  ne pouvant dépasser  $c$ , l'angle  $\psi$  est inférieur à  $\frac{\pi}{4}$ .



Tracons le diamètre  $ox'$  conjugué de  $ou'$ , et remplaçons les axes  $ox$ ,  $ou$  par  $ox'$ ,  $ou'$  (obliques). Dans le nouveau système prenons pour unité de longueur, sur  $ox'$  et  $oo'$  au lieu de  $ox$  et  $ou$ .

### Transformation de Lorentz:

Les droites  $ou'$  et  $ox'$  ont pour équations dans le système  $oxu$ .

$$(ou') \quad x = \frac{v}{c} u; \quad (ox') \quad u = \frac{v}{c} x$$

Les coordonnées des points d'intersection  $U'$  et  $X'$  avec les hyperboles (528) sont:

$$u_{U'} = \frac{1}{\alpha}; \quad x_{U'} = \frac{v}{c} \frac{1}{\alpha}$$

$$u_{X'} = \frac{v}{c} \frac{1}{\alpha}; \quad x_{X'} = \frac{1}{\alpha}$$

Dans le système  $ox'u$  on doit avoir :

$$u'_{y'} = x'_{y'} = 1 ; \quad u'_{x'} = x'_{u'} = 0$$

Les 4 constantes de la transformation linéaire de  $x, u$  en  $x', u'$  sont déterminées par ces conditions et l'on trouve :

$$x' = \frac{1}{\alpha} (x - \frac{v}{c} u) ; \quad u' = \frac{1}{\alpha} (u - \frac{v}{c} x)$$

ou en revenant à la coordonnée temps  $t = \frac{u}{c}$

$$x' = \frac{1}{\alpha} (x - vt) \quad t' = \frac{1}{\alpha} (t - \frac{vx}{c^2})$$

Ce sont les formules de Lorentz.

Les expressions  $x^2 - u^2$  et  $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$  restent invariantes de sorte que les équations des hyperboles et des espaces hyperboliques conservent leur forme

$$x'^2 - u'^2 = -1 \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2 = -1 \quad (y' = y \quad z' = z)$$

La transformation de Lorentz consiste donc dans la substitution de deux diamètres conjugués aux axes, et dans le changement d'unités indiqué.

En prenant les nouveaux axes ( $ox', oy', oz', ou'$ ) les points qui dans l'ancien système étaient animés d'une vitesse  $v$  apparaissent immobiles, puisque leurs lignes d'univers sont parallèles à l'axe des temps.

Toute droite coupant l'hyperbole (1) peut être choisie comme axe des temps ( $\psi < \frac{\pi}{4}, \frac{v}{c} < 1$ ). De même toute droite coupant (2)

peut servir d'axe des  $x'$ , mais non d'axe des temps ; tout événement  $E$  tel que  $u^2 < x^2$  peut ainsi être rendu simultané de l'événement origine  $O$ , en prenant pour axe des temps le diamètre conjugué de  $OE$ .

Construction générale. - On peut généraliser les résultats précédents et les étendre au cas d'une vitesse orientée d'une façon quelconque :

L'espace hyperbolique à deux nappes

$$(591) \quad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = -1 \quad (1)$$

et l'espace à une nappe

$$(532) \quad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = +1 \quad (2)$$

ont un espace conique asymptote

$$(533) \quad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$$

Dans l'espace hyperbolique (1) choisissons un point  $U'$  quelconque, et joignons  $OU'$ . Nous pouvons prendre cette droite comme nouvel axe des temps  $ou'$ . A la droite  $OU'$  correspond un espace diamétral conjugué (euclidien), comme à un diamètre d'un hyperboloïde correspond un plan diamétral conjugué. Cet espace a pour équation:

$$(534) \quad x x_{U'} + y y_{U'} + z z_{U'} - u u_{U'} = 0$$

il coupe l'espace hyperbolique (2) à une nappe suivant un ellipsoïde (comme un plan coupe un hyperboloïde suivant une ellipse). L'ellipsoïde est une sphère si  $U'$  est un sommet de l'espace hyperbolique (cas du système  $x, y, z, u$ ).

Nous pouvons toujours prendre pour  $x'$  l'intersection de l'espace conjugué de  $ou'$  par le plan  $uu'$ , et d'autre part faire tourner le système  $x, y, z$  pour amener  $ox$  dans le même plan  $uu'$ . Nous sommes alors ramenés à la construction précédente,  $ox$  et  $ox'$  étant dans le plan  $ou, ou'$ .

La vitesse de l'espace conjugué de  $ou'$  par rapport à l'espace  $x, y, z$  est  $\text{ctg } \psi$ ,  $\psi$  étant l'angle des axes des temps  $ou$  et  $ou'$ . Il ne faut plus parler de "l'espace" mais des espaces. Il y a en effet une triple infinité de points dans l'espace hyperbolique (1), donc une triple infinité d'axes du temps, et une triple infinité d'espaces euclidiens conjugués de ces axes du temps.

Le passé et l'avenir. - L'espace conique:

$$\bullet \quad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 0$$

partage le univers en trois domaines.

1<sup>o</sup> Le domaine postérieur pour lequel  $s^2 > 0$  ou  $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$  avec  $u > 0$ . Par chaque événement  $A$  de ce domaine, on peut faire passer un axe du temps  $ou'$  avec la direction  $O \rightarrow A$ .

Un événement quelconque de ce domaine est "dans l'avenir" de l'événement origine  $O$ , quel que soit le système de référence, il forme avec  $O$  un couple dans le temps (n° 363),  $O$  étant antérieur à l'événement considéré parce que  $u > 0$ .

2°.- Le domaine antérieur  $s^2 > 0$  ou  $u^2 > x^2 + y^2 + z^2$  avec  $u < 0$ . Par chaque événement  $A$  de ce domaine, on peut encore faire passer un axe du temps, mais le sens du temps croissant est  $A \rightarrow O$ . L'événement  $A$  est antérieur à  $O$ .

3°.- Le domaine intermédiaire  $s^2 < 0$  ou  $u^2 < x^2 + y^2 + z^2$ . Dans ce domaine, trois événements  $A, B, C$  quelconques, c'est-à-dire trois points d'univers forment avec  $O$  un espace euclidien qui peut être choisi comme "espace" ( $ox'oy'oz'$ ); l'axe du temps est alors le diamètre conjugué de cet espace. Dans le système de référence ainsi constitué, les trois événements  $A, B, C$  sont simultanés avec l'événement origine  $O$  ( $t' = 0$  pour  $A, B, C$  et  $O$ ). Par un choix convenable d'axes de coordonnées on peut, à volonté, rendre un événement de ce domaine antérieur ou postérieur à  $O$ .

En résumé : le cône  $x^2 + y^2 + z^2 - u^2$  se compose de deux parties : le cône antérieur pour lequel  $u < 0$  et le cône postérieur pour lequel  $u > 0$ . Le premier contient les points d'univers ou événements dont l'annonce a pu précéder l'événement  $O$ . Ces points d'univers peuvent "envoyer de la lumière à  $O$ ".

Le cône postérieur contient l'ensemble des événements qui peuvent être avertis de l'événement  $O$ . Ces points d'univers peuvent "recevoir de la lumière de  $O$ ".

En d'autres termes les événements du cône antérieur peuvent être causes de l'événement  $O$ , ceux du cône postérieur peuvent être causés par  $O$ .

Dans le domaine intermédiaire, où le cours du temps n'a pas de sens absolu, il ne peut y avoir avec l'événement  $O$  aucune relation de cause à effet.

370.- L'équivalence du temps et d'une longueur imaginaire (Minkowski).

$$\text{Posons } l = ct \sqrt{-1} = u \sqrt{-1} \quad \text{ou } u = -l \sqrt{-1}$$

L'invariant, changé de signe, s'écrit :

$$(535) \quad -s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + l^2$$

Prenez  $l$  comme 4<sup>e</sup> dimension, les quatre coordonnées  $x, y, z, l$  interviennent exactement au même titre. Considérons alors 4 axes rectangulaires, les 3 axes de l'espace et le 4<sup>e</sup> axe imaginaire.

Les formules de Lorentz deviennent :

$$(536) \quad x' = \frac{1}{\alpha} (x + i \frac{v}{c} l) \quad l' = \frac{1}{\alpha} (l - i \frac{v}{c} x)$$

Définissons un angle  $\varphi$  tel que :

$$\cos \varphi = \frac{1}{\alpha} \quad \sin \varphi = i \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} \quad \text{d'où } \operatorname{tg} \varphi = i \frac{v}{c}$$

( $\varphi$  est lié à l'angle réel  $\psi$  de la géométrie hyperbolique par la relation  $\operatorname{tg} \varphi = i \operatorname{tg} \psi$ .)  
Les équations (536) s'écrivent :

$$(537) \quad \begin{cases} x' = x \cos \varphi + l \sin \varphi \\ l' = l \cos \varphi - x \sin \varphi \end{cases}$$

La transformation de Lorentz est donc simplement une rotation d'un angle (imaginaire)  $\varphi$  des deux axes  $ox$  et  $ol$  dans le plan  $xol$ .

La formule de la composition des vitesses n'est autre que la formule qui exprime la tangente de la somme de deux angles.

En effet, soient  $v$  la vitesse du système  $S'$  par rapport au système  $S$ ,  $v'$  la vitesse d'un mobile dans le système  $S'$ .  $v$  correspond à une rotation  $\varphi$ ,  $v'$  correspond à une rotation  $\varphi'$  dans le système  $S'$ .

Par rapport à  $S$ , nous avons à calculer la vitesse  $u$  qui correspond à la rotation  $(\varphi + \varphi')$ . On a :

$$v = -ic \operatorname{tg} \varphi \quad v' = -ic \operatorname{tg} \varphi' \quad u = -ic \operatorname{tg} (\varphi + \varphi')$$

$$\text{donc (538) } u = -ic \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$$

L'équation "mystique" (1) de Minkowski. — L'équivalence

(1) H. Minkowski. Raum und Zeit.

des longueurs et des temps a été exprimée par Minkowski dans une formule qu'il appelle "formule mystique". La limite des vitesses  $c$  étant prise pour unité naturelle, on a :

$$3.10^5 \text{ Kilomètres} = 1 \text{ seconde} \cdot \sqrt{-1}$$

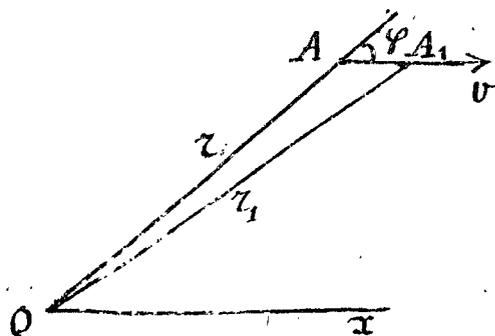
Effectivement, une longueur de 300 000 Kilomètres et le temps imaginaire 1 seconde  $\sqrt{-1}$  jouent exactement le même rôle dans l'expression des lois de l'Univers.

---

## § 7. — Phénomènes optiques dans les systèmes en mouvement relatif.

### 371. — L'effet Doppler-Fizeau. <sup>(1)</sup>

Soit un observateur  $O$  qui reçoit le rayonnement émis par une source d'ondes électromagnétiques  $A$  mobile par rapport à lui avec la vitesse  $v$ . Dans le système de référence  $S$  lié à l'observateur, la perturbation émise par  $A$  à l'instant  $t$  arrive en  $O$  à l'instant



$t + \frac{r}{c}$  ( $r = AO$ ). Au bout d'une

période  $\theta$  de durée  $\theta$  dans le système lié à  $O$ , la source est venue en  $A_1$ , tel que  $AA_1 = v\theta$ , et l'instant d'arrivée en  $O$  de la perturbation correspondante est :

$$t + \theta + \frac{r_1}{c}$$

L'intervalle de temps entre les arrivées en  $O$ , ou période apparente  $T_o$  pour l'observateur  $O$  est :

$$T_o = \theta + \frac{r_1 - r}{c}$$

Si la période est assez courte pour que  $AA_1$  soit très petit par rapport à  $AO$ , on a :

$$r_1 - r = AA_1 \cos \varphi = v\theta \cos \varphi$$

D'où : 
$$T_o = \theta + \frac{v}{c} \theta \cos \varphi = \theta \left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi\right) = \theta \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)$$

en désignant par  $v_r$  la vitesse radiale de la source par rapport

(1) D'après une note rédigée par M. Langevin.

à l'observateur  $O$ .

C'est la formule qu'on donnait autrefois, en considérant  $\theta$  comme la période propre de la source.

Mais nous savons maintenant que  $\theta$  n'est pas la période propre, c'est-à-dire la durée qui sépare deux phases égales de l'émission dans un système  $S'$  lié à la source. Soit  $T_A$  la période propre de  $A$ , on a :

$$T_A = \alpha \theta$$

car  $T_A$  est l'intervalle de temps propre entre les deux émissions, alors que  $\theta$  est la durée mesurée dans le système  $S$ . (formule (523) n° 367). Il en résulte la formule de l'effet Doppler<sup>(1)</sup>

$$(539) \quad T_o = T_A \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{v_z}{c}\right)$$

Si  $\varphi = 0$ , on a l'effet Doppler longitudinal :

$$(540) \quad T_o = T_A \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = T_A \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

qui pour une faible vitesse  $v$  donne la formule de la théorie ordinaire, (la même qu'en acoustique)  $T_o = T_A \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ .

Si  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $v_z = 0$  et l'on a l'effet Doppler transversal

qui ne prévoyait pas la théorie ancienne :

$$(541) \quad T_o = T_A \frac{1}{\alpha}$$

L'effet transversal est d'ailleurs simplement l'expression de la dilatation du temps (n° 365). La source  $A$ , vue de  $O$ , est une horloge qui retarde par rapport à une horloge constituée par la même source, liée à l'Observateur  $O$ .

### 372. — L'aberration de la lumière.

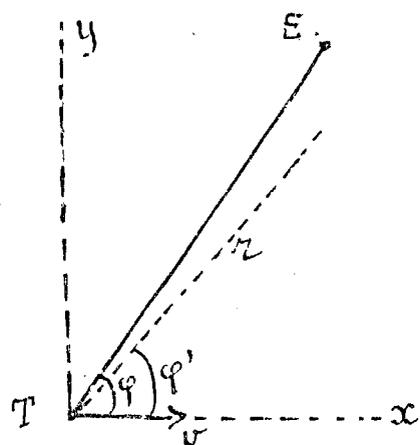
Au commencement du siècle dernier, Bradley a découvert que les coordonnées des étoiles varient dans le cours de l'année. Chaque étoile décrit sur la sphère céleste une ellipse dont

(1) Pour les applications de l'effet Doppler en Astronomie, voir le cours de l'année.

le grand axe est  $20,5''$  et dont le petit axe est  $20,5 \sin \lambda$ ,  $\lambda$  désignant la latitude rééliste (comptée à partir de l'écliptique).

Cet effet ne peut être attribué à la parallaxe, c'est-à-dire au diamètre apparent sous lequel, de l'étoile, on verrait l'orbite de la terre, car la parallaxe donnerait une ellipse dont le grand axe, inversement proportionnel à la distance de l'étoile, n'aurait pas une valeur constante. (1) D'ailleurs le mouvement de l'étoile se produit à  $90^\circ$  de celui qui résulterait de la parallaxe : le déplacement a sa plus grande élongation lorsque la terre se meut, sur son orbite, normalement à la direction de l'étoile.

Imaginons des observateurs placés sur l'orbite de la terre, mais ne participant pas au mouvement de la terre autour du Soleil. Ces observateurs appartiendraient à un système  $S$  dans lequel la direction de l'étoile sera fixe, si cette étoile est assez lointaine pour pouvoir être considérée comme infiniment éloignée.



La terre constitue, à chaque instant, un système  $S'$  en mouvement relatif par rapport au système  $S$ . Nous allons chercher quelle est la direction de l'étoile pour un observateur entraîné avec la terre.

Soit  $T$  une position de la terre sur son orbite ; dans le système  $S$  prenons comme axe des  $x$  la direction  $Tx$  de la vitesse de translation  $v$  autour du soleil, pour plan des  $xy$  le plan de la vitesse et de la direction  $TE$  de l'étoile  $E$ . Dans

le système  $S$ , le départ de  $E$  d'une onde lumineuse reçue en  $T$  a pour coordonnées :

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = 0 \quad t = -\frac{r}{c}$$

$r$  est la distance  $TE$  de la terre à l'étoile,  $\varphi$  l'angle de la vitesse  $v$  avec la direction fixe de l'étoile ; l'origine du temps est l'instant

(1) Pour les étoiles dont la lumière nous vient en moins d'une trentaine d'années la parallaxe est appréciable et se superpose à l'aberration de la lumière. Corrigant les observations de l'effet d'aberration, on calcule la parallaxe et par suite la distance à la terre.

où l'onde arrive en T.

Preons maintenant comme système S' un système animé de la vitesse  $v$  par rapport à S, les axes étant en coïncidence avec ceux de S à l'instant où l'onde est reçue en T. C'est, dans ce système, qui est celui de l'observateur lié à la terre.

$$x' = \frac{1}{\alpha} (x - vt) = \frac{r}{\alpha} \left( \cos \varphi + \frac{v}{c} \right) \quad y' = y = r \sin \varphi$$

Pour l'observateur, l'angle de la vitesse et du rayon reçu est  $\varphi'$ , tel que :

$$(542) \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{y'}{x'} = \frac{\alpha \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{v}{c}}$$

En ne conservant que les termes du 1<sup>er</sup> ordre en  $\frac{v}{c}$ , on obtient la formule habituelle de l'aberration :

$$(543) \quad \varepsilon = \varphi - \varphi' = \frac{v}{c} \sin \varphi.$$

L'étoile est donc vue, à chaque instant, dans une direction faisant avec TE l'angle  $\frac{v}{c} \sin \varphi$ . Le maximum d'écart est

$\frac{v}{c}$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire quand la vitesse de la terre est

normale à la direction de l'étoile, le minimum est  $\frac{v}{c} \sin \lambda$ ,  $\lambda$  étant la latitude céleste de l'étoile.

La mesure du grand axe donne  $20,5''$  ou  $\frac{v}{c} = \frac{20,5 \cdot \pi}{180 \cdot 3600}$

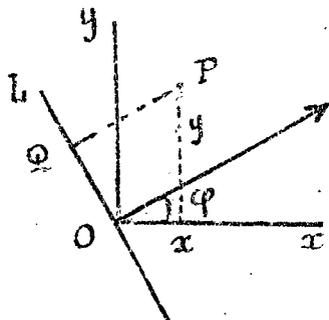
on en tire  $v = 29,8$  kilom/sec, ce qui est bien la vitesse de la terre sur son orbite.

### 373.- — Effet Doppler, aberration et entraînement des ondes. (1)

On peut retrouver ces résultats sous une forme plus générale en supposant toujours la source à grande distance et considérant par suite un rayonnement par ondes planes périodiques. Si divers observateurs en translation uniforme les uns par rapport aux autres examinent ces ondes, cherchons comment varient

(1) Rédigé par M. P. Langwin

des uns aux autres : la période (effet Doppler), la direction (aberration), et la vitesse de propagation (entraînement).



Soit une onde  $L$  se propageant par rapport au système de référence  $O(x, y, z)$  avec la vitesse nor-

male  $c_1 = \frac{c}{n}$  ( $n$  indice du milieu

par rapport au vide), dans une direction faisant l'angle  $\varphi$  avec l'axe des  $x$  et situé dans le plan  $xOy$ . Si nous choisissons l'origine du temps au moment où l'onde passe par l'ori-

gine des coordonnées, l'instant  $t$  auquel elle atteindra un point  $P$  de coordonnées  $x, y, z$  sera évidemment :

$$(544) \quad t = \frac{PQ}{c_1} = \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1}$$

Si les ondes de même phase se succèdent à intervalle  $T$  (période pour les observations liées à  $O$ ), les instants de passage en  $P$  de ondes successives seront :

$$(545) \quad t = \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{c_1} + KT$$

$K$  étant un nombre entier.

Introduisons un second système de référence  $O'(x' y' z')$  mobile avec la vitesse  $v$  dans la direction des  $x$  par rapport au premier et dont l'origine se trouve en  $O$  à l'origine du temps. Les passages des ondes en un point fixe par rapport à  $O'$  seront notés de manière analogue :

$$(546) \quad t' = \frac{x' \cos \varphi' + y' \sin \varphi'}{c_1'} + KT'$$

En remplaçant dans (545)  $x, y, t$  en fonction de  $x', y', t'$  par les relations du groupe de Lorentz :

$$x = \frac{1}{\alpha} (x' + vt') \quad y = y' \quad t = \frac{1}{\alpha} \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

et en identifiant avec (546), on obtient les relations :

$$(547) \quad \frac{T}{T'} = \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{v \cos \varphi}{c_1} \right) = \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{nv \cos \varphi}{c} \right) \quad \text{Effet Doppler}$$

$$(548) \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{\alpha \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{1}{n} \frac{v}{c}} \quad \text{aberration}$$

$$(549) \quad \frac{\cos \varphi'}{c_1'} = \frac{\frac{\cos \varphi}{c_1} + \frac{v}{c^2}}{1 + \frac{v \cos \varphi}{c_1}} \quad \text{Entraînement des ondes.}$$

Les deux premiers résultats redonnent les formules obtenues aux nos 371 et 372, quand on fait  $n=1$ . La troisième, dans le cas particulier  $\varphi = \varphi' = 0$  donne :

$$c_1' = \frac{c_1 + v}{1 + \frac{c_1 v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{1}{n} \frac{v}{c}} = \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) + \dots$$

C'est bien la formule habituelle d'entraînement, le développement étant limité aux termes du 1<sup>er</sup> ordre en  $v$ .

## § 8. — Le champ électromagnétique.

374. — Transformation des équations de Maxwell dans l'espace vide. (1)

Les équations de Maxwell, pour l'espace vide, et pour un système au repos par rapport à l'observateur (livre I, chapitre VIII) s'écrivent :

$$(550) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{array} \right.$$

(1) D'après Einstein - Ann. de Physik. 17. 1905.

Si, pour passer aux coordonnées  $x'y'z't'$  du système  $S'$ , on applique les formules de Lorentz, on obtient :

$$(551) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial h_x}{\partial t'} = \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (H_z - \frac{v}{c} h_y)}{\partial y'} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (H_y + \frac{v}{c} h_z)}{\partial z'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (h_y - \frac{v}{c} H_z)}{\partial t'} = \frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (H_z - \frac{v}{c} h_y)}{\partial x'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (h_z + \frac{v}{c} H_y)}{\partial t'} = \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (H_y + \frac{v}{c} h_z)}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t'} = \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (h_y - \frac{v}{c} H_z)}{\partial z'} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (h_z + \frac{v}{c} H_y)}{\partial y'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (H_y + \frac{v}{c} h_z)}{\partial t'} = \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (h_z + \frac{v}{c} H_y)}{\partial x'} - \frac{\partial h_x}{\partial z'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (H_z - \frac{v}{c} h_y)}{\partial t'} = \frac{\partial h_x}{\partial y'} - \frac{\partial \frac{1}{\alpha} (h_y - \frac{v}{c} H_z)}{\partial x'} \end{array} \right.$$

Le principe de relativité exige que, pour un observateur immobile, dans le système  $S'$ , les équations de Maxwell soient encore vérifiées, c'est-à-dire qu'on ait, dans le système  $S'$  les équations (550) avec des lettres accentuées. Ces équations (avec lettres accentuées) sont équivalentes aux équations (551) pour le système  $S$ , on a donc :

$$(552) \left\{ \begin{array}{l} h'_{x'} = \varphi(v) h_x \quad H'_{x'} = \varphi(v) H_x \\ h'_{y'} = \varphi(v) \frac{1}{\alpha} (h_y - \frac{v}{c} H_z) \quad H'_{y'} = \varphi(v) \frac{1}{\alpha} (H_y + \frac{v}{c} h_z) \\ h'_{z'} = \varphi(v) \frac{1}{\alpha} (h_z + \frac{v}{c} H_y) \quad H'_{z'} = \varphi(v) \frac{1}{\alpha} (H_z - \frac{v}{c} h_y) \end{array} \right.$$

En la réciproque des systèmes  $S$  et  $S'$ , les équations doivent rester les mêmes quand on permute les lettres accentuées et non accentuées en changeant  $v$  en  $-v$ , on a par suite :

$$\varphi(v) \varphi(-v) = 1$$

La symétrie exigeant qu'on ait aussi  $\varphi(v) = \varphi(-v)$ , on a  $\varphi(v) = 1$ .  
Les formules de transformation des forces électriques et magnétiques sont donc, en définitive :

$$(553) \quad \begin{cases} h'_x = h_x \\ h'_y = \frac{1}{\alpha} (h_y - \frac{v}{c} H_z) \\ h'_z = \frac{1}{\alpha} (h_z + \frac{v}{c} H_y) \end{cases} \quad \begin{cases} H'_x = H_x \\ H'_y = \frac{1}{\alpha} (H_y + \frac{v}{c} h_z) \\ H'_z = \frac{1}{\alpha} (H_z - \frac{v}{c} h_y) \end{cases}$$

Le résultat est du plus haut intérêt : il montre qu'un champ électrique et un champ magnétique n'ont pas d'existence absolue : ils sont relatifs. Supposons, par exemple :  $h_x = h_y = h_z = 0$  ; il n'y a dans le système S qu'un champ magnétique  $H_x, H_y, H_z$  : dans le système S' existe non seulement un champ magnétique  $H'_x = H_x, H'_y = \frac{1}{\alpha} H_y, H'_z = \frac{1}{\alpha} H_z$ , mais aussi un champ électrique  $h'_y = -\frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} H_z, h'_z = \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} H_y$ . Ce qui, pour le système S est un pur champ magnétique, est un champ mixte pour le système S'. Ce résultat nous fait voir la loi fondamentale de l'électromagnétisme sous un aspect nouveau.

Loi de Biot et Savart : Supposons, dans le système S, une charge ponctuelle unité, c'est-à-dire qui, immobile dans S, exerce sur une charge égale placée à 1 cm. une force égale à une dyne. D'après le principe de relativité, cette même charge est aussi égale à l'unité si on la mesure dans le système S'.

Si cette charge est immobile dans S,  $h_x, h_y, h_z$  est, par définition, la force qui s'exerce sur elle. Si elle est immobile dans S' à l'instant considéré,  $h'_x, h'_y, h'_z$  est la force agissant sur elle, mesurée dans le système S'.

On disait autrefois : Si une charge unité est déplacée avec la vitesse  $v$  dans un champ électromagnétique, en plus de la force électrique agit sur elle une force électrodynamique égale au produit vectoriel  $\frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}]$

Nous devons dire: si une charge unité est déplacée dans un champ électromagnétique, la force agissant sur elle est égale à la force électrique présente au point où elle se trouve, force qui résulte de la transformation du champ dans un système de coordonnées immobile relativement à la charge (énoncé d'Einstein).

Nous voyons aussi que la formule qui exprime l'action d'un champ magnétique  $H$  sur une charge unité animée de la vitesse  $v$  par rapport à l'observateur est, non pas  $\frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}]$  mais  $\frac{1}{\alpha c} [\vec{v} \vec{H}]$ .

### Induction par déplacement d'un conducteur.

Supposons une tige conductrice de longueur  $l$ , parallèle à  $Oz$ , en déplaçant parallèlement à  $Ox$ , avec une vitesse  $v$  dans un champ magnétique  $H_y$  parallèle à  $Oy$ . La 3<sup>e</sup> formule du 1<sup>er</sup> groupe (553) montre que, dans le système  $S'$  de la tige, règne un champ électrique parallèle à  $Oz'$

$$h'_z = \frac{1}{\alpha} \frac{v}{c} H_y.$$

Les électrons présents dans la tige sont soumis à l'action de ce champ et s'accumulent à une extrémité jusqu'à ce qu'il en résulte un champ électrostatique  $-h'_z$ , faisant équilibre au champ  $h'_z$ . La différence de potentiel entre les extrémités est (en unités électromagnétiques):

$$-h'_z l c = -\frac{1}{\alpha} v l H_y.$$

$v l H_y$  est le flux coupé par la tige dans l'unité de temps. Nous retrouvons la loi de l'induction (corrigée par le facteur  $\frac{1}{\alpha}$ .)

### 375. — Equations de Maxwell dans le cas d'un courant par convection. — (1)

Soient  $\rho$  la densité de charge multipliée par  $4\pi$  et  $w_x, w_y, w_z$  les composantes, dans le système  $S$ , de la vitesse des charges en mouvement. Ses équations de Max.

---

(1) D'après Einstein. Ann. de Physik 17. 1905.

elles s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} (W_x \rho + \frac{\partial h_x}{\partial t}) &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial h_y}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial y} \\ (554) \quad \frac{1}{c} (W_y \rho + \frac{\partial h_y}{\partial t}) &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial z} \\ \frac{1}{c} (W_z \rho + \frac{\partial h_z}{\partial t}) &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x} \end{aligned}$$

avec

$$\rho = \text{Div. } h = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

Si l'on applique à ces équations les formules de transformation de Lorentz, en ce qui concerne les coordonnées de position, et les formules de transformation (553) pour les forces électrique et magnétique, on trouve des équations exactement de même forme que les équations (554).

$$\begin{aligned} (555) \quad \frac{1}{c} (W'_x \rho' + \frac{\partial h'_x}{\partial t'}) &= \frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} & \frac{1}{c} \frac{\partial H'_x}{\partial t'} &= \frac{\partial h'_y}{\partial z'} - \frac{\partial h'_z}{\partial y'} \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

avec les conditions suivantes:

$$(556) \quad W'_x = \frac{W_x - v}{1 - \frac{W_x v}{c^2}} \quad ; \quad W'_y = \alpha \frac{W_y}{1 - \frac{W_x v}{c^2}} \quad ; \quad W'_z = \alpha \frac{W_z}{1 - \frac{W_x v}{c^2}}$$

$$(557) \quad \text{et} \quad \rho' = \text{div. } h' = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{W_x v}{c^2} \right) \rho$$

Les formules (556) expriment la loi de composition des vitesses (n° 360), que nous connaissons déjà.

La formule (557) doit retenir l'attention. Soit  $e$  la charge de l'élément de volume d'espace,  $dx \, dy \, dz$ : on a  $\rho = \frac{4\pi e}{dx \, dy \, dz}$ ;  $\rho' = \frac{4\pi e'}{dx' \, dy' \, dz'}$  par suite l'équation (557) s'écrit:

672

$$\frac{e'}{dx' dy' dz'} = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{W_x v}{c^2}\right) \frac{e}{dx dy dz}$$

$$\text{Mais } t' = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{v x}{c^2}\right) \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{v W_x}{c^2}\right)$$

On a donc  $e' dx' dy' dz' dt' = e dx dy dz dt$

et puisque l'élément d'hypervolume est un invariant :

$$e = e'$$

La charge d'un corps mesurée dans un système quelconque S ou S' a toujours la même valeur. C'est un invariant.

Champ magnétique d'une charge en mouvement:  
La charge produit, dans un système S' par rapport auquel elle est immobile, un champ électrostatique. Dans le système de l'observateur, qui est animé de la vitesse - v relativement à la charge, le champ est mixte; en supposant la vitesse faible on retrouve, en 1<sup>ère</sup> approximation, la formule connue  $H = \frac{1}{c} \frac{ev \sin \alpha}{r^2}$  (e électrostatique)

## § 9. — Dynamique de la relativité. — (1)

376. — La masse est fonction de la vitesse.

Supposons que dans un système S, un point matériel soit en mouvement avec la vitesse v à l'instant t.

Introduisons un second système S' se mouvant par rapport au premier avec la vitesse v; à l'instant considéré le mobile a une vitesse nulle par rapport à S'. Pendant le temps infiniment court qui suit, nous pouvons, dans le système S', appliquer les équations de la dynamique classique, puisque le mobile part du repos dans ce système.

(1) Ce paragraphe a été rédigé d'après une note de M. Langevin.

Soient  $x', y', z', t'$  les coordonnées d'espace et de temps du mobile par rapport à  $S'$ ,  $m_0$  sa masse initiale ou masse au repos, c'est-à-dire sa masse pour des observateurs par rapport auxquels il est au repos à l'instant considéré. Désignons par  $X', Y', Z'$  les composantes, mesurées par un observateur du système  $S'$ , de la force qu'il subit. On aura:

$$(558) \quad m_0 \frac{d^2 x'}{dt'^2} = X'; \quad m_0 \frac{d^2 y'}{dt'^2} = Y'; \quad m_0 \frac{d^2 z'}{dt'^2} = Z'$$

Pour avoir les équations de la dynamique pour les observateurs du système  $S$ , il suffit de savoir comment se transforment  $\frac{d^2 x'}{dt'^2}, \frac{d^2 y'}{dt'^2}, \frac{d^2 z'}{dt'^2}, X', Y', Z'$ , en fonction des mesures faites dans le système  $S$ .

En ce qui concerne l'accélération, les équations de Lorentz nous donnent la réponse; on a, en adoptant la disposition d'axes précédemment considérée (axes des  $x$  et des  $x'$  parallèles à  $v$ , origines  $O$  et  $O'$  en coïncidence à l'origine des temps):

$$(559) \quad x' = \frac{1}{\alpha} (x - vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{1}{\alpha} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

On déduit de là:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{1}{\alpha} \left( \frac{dx}{dt} - v \right)}{\frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right) \cdot \frac{1}{\alpha \left( 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} = \alpha^3 \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{1}{\left( 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^3}$$

mais  $\frac{dx}{dt} = v$  puisque le mobile part du repos dans  $S'$  et de la vitesse initiale  $v$  dans  $S$ . Remplaçant  $\frac{dx}{dt}$  par  $v$  au dénominateur de la dernière expression, et par conséquent  $\left( 1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)$  par  $\alpha^2$ , il vient:

674

$$(560) \quad \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{1}{\alpha^3} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

et par un calcul semblable on trouverait:

$$(561) \quad \frac{d^2 y'}{dt'^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad \frac{d^2 z'}{dt'^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Pour obtenir la transformation des composantes de la force, nous considérerons le cas particulier de la force électrique pour laquelle la transformation des équations de Lorentz-Einstein (n° 374) donne les formules nécessaires. Supposons donc que dans le système  $S$  règne un champ électrique  $h_x, h_y, h_z$  (sans champ magnétique); pour les observateurs de ce système, la force qui s'exerce sur une particule de charge  $e$  est

$$X = e h_x; \quad Y = e h_y; \quad Z = e h_z$$

Appliquant les équations (553) (n° 374) en y faisant  $H = 0$ , remarquant que la charge  $e$  est un invariant (n° 375), on voit que pour les observateurs du système  $S'$ , il s'exerce sur la particule une force:

$$(562) \quad X' = X; \quad Y' = \frac{Y}{\alpha}; \quad Z' = \frac{Z}{\alpha}$$

En substituant dans (553) les valeurs des composantes de l'accélération et de la force ainsi calculées (560, 561, 562), il vient:

$$(563) \quad \boxed{\frac{m_0}{\alpha^3} \frac{d^2 x}{dt^2} = X; \quad \frac{m_0}{\alpha} \frac{d^2 y}{dt^2} = Y; \quad \frac{m_0}{\alpha} \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.}$$

Bien qu'établies dans un cas particulier, celui de la force électrique, ces équations s'appliquent à une force quelconque; supposons, en effet, qu'une force mécanique, telle que la tension d'un ressort fasse équilibre à l'action exercée par un champ électrique sur un corps électrisé; ce sera un fait absolument indépendant de tout observateur, sur lequel tous les observateurs de tous les systèmes devront se trouver d'accord. Il est donc nécessaire que dans le passage d'un système  $S$  à un système  $S'$ , les composantes de la force mécanique

se transforment suivant la même loi que les composantes de la force électrique (equ. 562).

Les équations (563) montrent que si l'on définit la masse comme coefficient de proportionnalité de la force à l'accélération (masse newtonienne), non seulement la masse mesurée dépend de la vitesse relative du corps et de l'observateur, mais il faut envisager deux masses :

1<sup>o</sup>) la masse longitudinale  $m_l = \frac{m_0}{\alpha^3}$  pour la composante de l'accélération dans la direction de la vitesse.

2<sup>o</sup>) la masse transversale  $m_p = \frac{m_0}{\alpha}$

377. — Le vecteur impulsion et la masse maupertuisienne.

Bien qu'avec la disposition d'axes que nous avons considérée les composantes  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  de la vitesse  $v$  suivant  $ox$  et  $oy$  soient nulles, complétons l'expression de la vitesse en écrivant :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \quad \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right)}$$

(552) Nous remarquons alors que les équations de la dynamique peuvent s'écrire :

$$(564) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\alpha} \frac{dx}{dt} \right) = X, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\alpha} \frac{dy}{dt} \right) = Y, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\alpha} \frac{dz}{dt} \right) = Z}$$

Sous cette forme absolument symétrique, les équations sont indépendantes de l'orientation des axes coordonnés; la vitesse peut avoir une direction quelconque par rapport aux axes.

$Xdt$ ,  $Ydt$ ,  $Zdt$  sont les composantes de la quantité de mouvement ou impulsion  $d\mathcal{G}$  communiquée par la force. On peut écrire :

$$(565) \quad d\left(\frac{m_0}{\alpha} \frac{dx}{dt}\right) = dG_x; \quad d\left(\frac{m_0}{\alpha} \frac{dy}{dt}\right) = dG_y;$$

$$d\left(\frac{m_0}{\alpha} \frac{dz}{dt}\right) = dG_z$$

on en intégrant et prenant la quantité de mouvement nulle au repos.

$$(566) \quad \boxed{\frac{m_0}{\alpha} \vec{v} = \vec{G}}$$

Si l'on définit la masse comme coefficient de proportionnalité de l'impulsion à la vitesse (masse maupertuisienne) il n'y a plus à envisager deux masses, il y a une masse unique, capacité d'impulsion :

$$(567) \quad m = \frac{m_0}{\alpha}$$

qui a même valeur que le coefficient d'inertie transversal ou masse newtonienne (1) transversale.

### 378. — L'inertie de l'énergie. (2)

Multiplications les équations (564) respectivement par  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , et ajoutons ; nous obtenons :

$$d\left(\frac{m_0 c^2}{\alpha}\right) = d(m c^2) = X dx + Y dy + Z dz = dW$$

$dW$  étant le travail de la force ou l'énergie fournie au point matériel.

On a donc :

$$(568) \quad m c^2 = W + c^2 \epsilon$$

(1) Nous avons fait remarquer (n° 333) que Newton avait défini l'impulsion. Mais dans la mécanique newtonienne il y avait identité entre la masse coefficient d'inertie et la masse capacité d'impulsion.

(2) A. Einstein - Ann. der Physik 17 (1905) - P. Langevin - Conférence à la Société de Physique, 26 mars 1913, publiée dans le Journal de Physique.

La variation de masse est proportionnelle à la variation d'énergie.

L'énergie cinétique acquise par le point matériel en passant dans le système S, de l'état de repos à la vitesse  $v$  est donc :

$$(569) \quad T = (m - m_0) \cdot c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

formule qui donne en première approximation l'expression habituelle de l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ .

Ainsi, il y a identité, au facteur  $c^2$  près, entre la variation de la masse corrélatrice d'un changement de vitesse et la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel ou d'un corps.

Nous allons montrer que cette relation, qui vient d'être établie dans le cas particulier de l'énergie cinétique, doit être considérée comme générale et doit s'appliquer à toute énergie, quelle que soit sa forme.

1°)  Masse de l'énergie rayonnante. <sup>(1)</sup> Considérons un train d'ondes planes tombant normalement sur une surface noire S. Soit W l'énergie absorbée pendant le temps t, exerçant pendant ce temps une pression moyenne  $p = \rho$  égale à la densité de l'énergie. Cette énergie, à l'origine du temps, était contenue dans un volume Sct :

$$p = \rho = \frac{W}{Sct}$$

Elle a communiqué au corps absorbant une impulsion

$$(570) \quad G = ft = pSt = \frac{W}{c}$$

L'énergie rayonnante W possède donc une quantité de mouvement  $G = \frac{W}{c}$ , et puisque sa vitesse est c, on peut la considérer comme possédant une masse maupertuisienne  $\frac{W}{c^2}$ . On a donc  $mc^2 = W$  et l'on doit remarquer que la constante de l'équation

(1) Question déjà traitée dans le cours de 1<sup>ère</sup> année n° 358 p. 635.

(568) est nulle dans le cas envisagé.

2°) Un corps qui rayonne éprouve une perte de masse égale à la masse  $\frac{W}{c^2}$  de l'énergie rayonnée  $W$

Nous traiterons le cas suivant: Supposons qu'une lame plane, normale à  $Ox$ , rayonne par ses deux faces, avec la même intensité, des ondes planes se propageant de part et d'autre normalement à son plan.

Pour un observateur  $S$  lié à la source, celle-ci envoie, de part et d'autre, des quantités de mouvement électromagnétiques, égales et opposées; elle reste donc immobile. Pendant l'unité de temps et par unité de surface, l'énergie moyenne rayonnée de part et d'autre de la lame est:

$$\frac{1}{4\pi} h^2 c \quad \text{au total } w = \frac{1}{2\pi} h^2 c.$$

$h$  étant la force électrique moyenne de l'onde.

Supposons maintenant qu'un observateur  $S'$  soit animé d'une vitesse  $v$  par rapport à la source, parallèlement à  $Ox$ . Quel sera pour  $S'$  l'aspect du phénomène? Pour cet observateur,

l'énergie par unité de volume aura une valeur  $\frac{1}{4\pi} h'^2$  qu'il est

facile de calculer par les équations de transformation des vecteurs électrique et magnétique. Supposons  $h$  parallèle à  $Oy$ ,  $H$  sera parallèle à  $Oz$  et pour le train d'ondes se propageant vers les  $x$  (ou  $x'$ ) croissants  $h_y = H_z$ . L'équation de transformation:

$$h'_y = \frac{1}{\alpha} \left( h_y - \frac{v}{c} H_z \right) \quad \text{devient}$$

$$h' = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{v}{c} \right) h$$

Le train d'ondes occupe pour  $S'$  une longueur  $c+v$  parce que la tête s'est propagée avec la vitesse  $c$  et que la lame rayonnante s'est déplacée de  $-v$ . L'énergie contenue dans ce train d'ondes est donc, pour  $S'$

$$\frac{1}{4\pi} h'^2 (c+v) = \frac{h^2}{4\pi} (c-v)$$

et la quantité de mouvement de cette énergie lumineuse est:

$$G'_1 = \frac{h^2}{4\pi c} (c-v)$$

Considérons maintenant le train d'ondes qui s'est déplacé vers les  $x$  décroissants. On a

$$h_y = -h_z, \quad h' = \frac{1}{\alpha} (1 + \frac{v}{c}) h.$$

Ce train d'ondes occupe pour  $S'$  une longueur  $c+v$ ; l'énergie est  $\frac{h^2}{4\pi} (c+v)$  et la quantité de mouvement

$$G'_2 = \frac{h^2}{4\pi c} (c+v)$$

Au total, la quantité de mouvement qui s'est propagée, pour  $S'$ , dans le sens des  $x'$  croissants est:

$$(571) \quad G'_1 - G'_2 = -\frac{h^2}{2\pi c} v = \frac{W}{c^2} (-v)$$

$(-v)$  est la vitesse de la source pour l'observateur  $S'$ . D'après la conservation de la quantité de mouvement,  $G'_1 - G'_2$  est la quantité de mouvement perdue par la lame; comme la vitesse  $v$  n'a pas changé, la variation de la quantité de mouvement de la lame provient d'une variation de masse:

$$\Delta m = \frac{W}{c^2}$$

Il faut remarquer que nous avons négligé les termes du second ordre en admettant que le temps est le même dans les systèmes  $S$  (source) et  $S'$  (observateur); mais le résultat est rigoureux parce que  $v$  peut être supposée aussi petite qu'on le veut;  $\Delta m$  est la variation  $\Delta m_0$  de la masse au repos.

Un corps qui rayonne de l'énergie perd donc de sa masse, et cette masse se retrouve comme capacité d'impulsion de l'énergie rayonnée. Inversement une absorption d'énergie entraîne une variation proportionnelle de la masse.

30) - L'énergie potentielle totale d'un électron est égale à sa masse au repos, multipliée par  $C^2$  (!) - Supposons que

(1) P. Langevin - Journal de Physique - Conf. à la Société de Physique - 26 mars 1913.

l'électron soit une sphère de rayon  $a$  (au repos) possédant une charge superficielle. L'énergie potentielle du champ électrostatique est:

$W_1 = \frac{1}{8\pi} \iiint h^2 dV$ , l'intégrale étant étendue à tout l'espace extérieur à l'électron. On a donc, puisque  $h = -\frac{e}{r^2}$  (loi de Coulomb):

$$W_1 = \frac{e^2}{8\pi} \iiint \frac{1}{r^4} dV = \frac{e^2}{8\pi} \int_{2a}^{\infty} \int_{\theta^0}^{\pi} \int_{\varphi^0}^{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dr d\theta d\varphi = \frac{e^2}{2a}$$

D'autre part, la masse de l'électron, la charge étant exprimée en unités électrostatiques est:

$$m = \frac{2}{3} \frac{1}{c^2} \frac{e^2}{a}$$

On a par suite:

$$(572) \quad mc^2 - W_1 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{a} = \frac{1}{6} \frac{e^2}{a}$$

Pour avoir l'égalité entre  $mc^2$  et l'énergie totale, il faudrait une énergie supplémentaire  $\frac{1}{6} \frac{e^2}{a}$ . Imaginons qu'une pression extérieure  $p$  s'exerce sur l'électron: l'énergie potentielle  $W_2$  de cette action est égale au produit de  $p$  par le volume  $\frac{4}{3} \pi a^3$  de l'électron: écrivons que cette énergie  $W_2$  compense la différence  $mc^2 - W_1 = \frac{1}{6} \frac{e^2}{a}$

$$\frac{4}{3} \pi a^3 p = \frac{1}{6} \frac{e^2}{a}$$

$$\text{D'où } p = \frac{e^2}{8\pi a^4} = 2\pi\sigma^2 \text{ en posant } \sigma = \frac{e}{4\pi a^2}$$

$4\pi a^2$  est la surface de l'électron, donc  $\sigma$  est la densité superficielle, l'électron étant assimilé à une sphère chargée. Une pression  $p$  ayant la valeur  $2\pi\sigma^2$  équilibrerait la tension résultant de la répulsion mutuelle des éléments qui composent

la charge  $e$  (n° 205).

Cette pression avait précisément été imaginée par Henri Poincaré, qui, étendant à l'électron les lois de l'électrostatique, avait admis que le milieu extérieur devait exercer une action s'opposant à la dispersion de la charge.

Sans insister sur les difficultés de cette conception, il est remarquable de constater que la pression de Poincaré fournit exactement le supplément d'énergie nécessaire pour que l'énergie potentielle totale ( $W_1 + W_2$ ) soit égale au produit de la masse de l'électron par le carré de la vitesse de la lumière.

Ici encore, la constante de la formule (568) est nulle.

Généralisation. - Nous avons établi les résultats suivants:

1°) - Toute variation d'énergie cinétique  $\Delta W$  est accompagnée d'une variation de masse  $\frac{\Delta W}{c^2}$ .

2°) - L'énergie rayonnante  $W$  a une masse  $\frac{W}{c^2}$ .

3°) - Une source qui émet (ou absorbe) l'énergie  $W$  subit une diminution (ou une augmentation) de masse  $\frac{W}{c^2}$ .

Nous avons fait le calcul dans le cas particulier des ondes planes. Des cas plus compliqués conduisent au même résultat.

4°) - L'énergie potentielle d'un électron est égale à  $m_0 c^2$ ,  $m_0$  étant sa masse au repos.

Ce résultat s'étend à toute la matière, formée d'électrons positifs et négatifs.

5°) - Dans tous les cas où l'on peut calculer l'énergie totale d'un système, on la trouve égale au produit de la masse du système par le carré de la vitesse de la lumière.

On est donc conduit à généraliser, à annuler la constante de l'équation  $W = mc^2 + Cte$ , et à énoncer les lois suivantes:

Toute variation d'énergie (potentielle ou cinétique) d'un système est accompagnée d'une variation de masse égale au quotient de cette variation d'énergie par le carré de la vitesse de la lumière.

Toute forme d'énergie possède de l'inertie; la masse de l'énergie  $W$  est  $\frac{W}{c^2}$ .

Toute masse  $m$  représente une énergie totale  $mc^2$ .

### 379. — Quelques conséquences de l'inertie de l'énergie (1)

#### 1°) — Variation de la masse avec la température —

Une masse d'eau, par exemple, égale à 1 gramme à la température de  $0^\circ$ , aura à  $100^\circ$  une inertie plus grande. La différence s'obtient en divisant l'énergie  $4,18 \cdot 10^9$  ergs (100 calories) par  $c^2 = 9 \cdot 10^{20}$ . On trouve  $5 \cdot 10^{-12}$  gr, variation d'ailleurs insensible.

Malgré la petitesse de l'effet, cet exemple montre que la notion de masse cesse de se confondre avec celle de quantité de matière. Deux masses d'eau égales, prises, l'une à  $100^\circ$ , l'autre à  $0^\circ$  ne contiennent pas la même quantité de matière, puisqu'elles cessent d'être égales quand on les ramène toutes les deux à la même température. Deux quantités d'eau contenant le même nombre de molécules n'ont la même masse que si elles sont prises à la même température.

2°) — Réactions chimiques. — La masse du composé n'est pas rigoureusement égale à la somme des masses des composants. Par exemple, lorsque 2 gr. d'hydrogène s'unissent à 16 gr. d'oxygène, il se dégage  $2,87 \cdot 10^{12}$  ergs. On n'obtient pas 18 gr. d'eau, mais  $3,2 \cdot 10^{-6}$  milligr. en moins.

3°) — Transformations radioactives — Dans les transformations radioactives, l'énergie libérée est considérablement plus grande que dans les réactions chimiques. Par exemple, la transformation complète d'un gramme de radium en helium et radium D libère  $1,1 \cdot 10^7$  ergs; il doit en résulter une perte de masse égale à 0,12 milligrammes, ce n'est qu'une étape des transformations qui partent de l'uranium pour aboutir à un plomb; la masse globale de l'helium et du plomb engendrés par une certaine quantité d'uranium est certainement inférieure de plus de  $\frac{1}{10000}$  à la masse de cette quantité d'uranium.

Si la masse d'une même portion de matière se conservait exactement au cours des transformations radioactives dont cette portion de matière peut être l'objet, il en résulterait des relations simples entre les masses atomiques des éléments successivement engendrés.

(1) P. Langevin - Journal de Physique - Conf. à la Société de Physique - 26 mars 1913.

Pour une transformation accompagnée seulement d'une émission  $\beta$  ou  $\gamma$ , la masse atomique ne changerait pas, puisque le nouvel atome, pour redevenir électriquement neutre doit récupérer un nombre d'électrons égal au nombre des électrons perdus, et que la perte de masse par émission  $\gamma$  est inappréciable. Dans le cas d'émission  $\alpha$ , la masse atomique diminuerait exactement de celle d'un atome d'hélium: la différence entre la masse atomique de l'uranium et celle du radium devrait être exactement le triple de la masse atomique de l'hélium, puisqu'il y a entre l'uranium et le radium trois produits donnant des rayons  $\alpha$ .

L'énergie libérée étant inerte, il ne doit pas en être ainsi: les différences doivent être plus grandes et les écarts, proportionnels aux énergies perdues pendant les transformations, peuvent être notables. (1)

M. Langevin voit dans les écarts à la loi de Prout, la preuve de l'inertie de l'énergie. Prout a émis l'hypothèse que les divers atomes sont construits à partir d'un élément primordial, et cette idée est reprise aujourd'hui si l'on admet, comme cela est probable, que le noyau de l'hydrogène est l'électron positif. Le nombre des électrons négatifs de l'atome neutre étant nécessairement égal au nombre des électrons positifs, la masse d'un atome neutre devrait être un multiple exact de celle de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire que les poids atomiques, calculés en prenant  $H = 1$ , devraient être des nombres entiers. Effectivement, les poids atomiques sont groupés autour de nombres entiers, mais il y a cependant des écarts:

Li = 6,94    Gl = 9    Bo = 10,90    C = 11,91    Az = 13,90    O = 15,87    Fe = 18,90  
[etc...]

M. Langevin a proposé l'explication suivante: les écarts proviennent de ce que la formation des atomes à partir d'éléments primordiaux (par désintégration radioactive, ou par un processus inverse non encore observé mais qui s'est nécessairement produit dans la formation des atomes lourds) s'accompagne de variations d'énergie internes par émission ou absorption de rayonnement. Ses écarts  $\Delta m = C^2 \Delta W$  sont tels que les énergies mises en

(1) Des mesures suffisamment précises n'ont pas encore été faites pour vérifier ce résultat.

jeu seraient du même ordre de grandeur que celles observées effectivement au cours des transformations radioactives. (1)

### 380. — La matière, réservoir d'énergie. —

Soit  $m_0$  la masse initiale ou masse au repos d'un corps. La constante de l'équation (552) étant nulle, lorsque le corps est animé de la vitesse  $v$  par rapport à un système  $S$ , son énergie totale pour les observateurs de ce système est :

$$(574) \quad W = mc^2 = \frac{m_0}{\alpha} c^2 = m_0 c^2 + \boxed{\frac{1}{2} m_0 v^2} + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Le second terme et les suivants représentent l'énergie cinétique due à la vitesse  $v$ , (relative au système  $S$ ),

qui pratiquement se réduit à  $\frac{1}{2} m_0 v^2$  pour les faibles

vitesse. L'énergie cinétique croît indéfiniment quand la vitesse  $v$  tend vers la vitesse de la lumière.

Le premier terme est l'énergie intra atomique; c'est la somme des énergies cinétiques et potentielles des particules électrisées qui composent la matière. Cette énergie est fantastique: un gramme de matière, quelle que soit sa nature, correspond à la présence d'une énergie interne égale à  $9 \cdot 10^{20}$  ergs, énergie qui permettrait de soulever trente millions de tonnes au sommet de la Tour Eiffel.

Presque toute l'énergie interne appartient aux noyaux atomiques, à ces mondes fermés, insensibles aux actions extérieures. Une très faible partie de l'énergie des noyaux est libérée dans les transformations radioactives; une portion d'énergie, considérablement plus petite encore, provenant des électrons qui gravitent autour des noyaux, est libérée dans les transformations radioactives; une portion d'énergie, considérablement plus petite encore, provenant des électrons qui gravitent autour des noyaux, est dégagée dans le rayonnement, ou mise en jeu dans les réactions chimiques.

---

(1) Il faut remarquer que dans certains cas, par exemple pour le chlore et le néon, le mélange d'isotopes de poids atomiques différents est une autre cause des écarts à la loi de Prout.

381.— Le principe de la conservation de la masse se confond avec le principe de la conservation de l'énergie.

Dans un système isolé, les diverses parties échangent de l'énergie entre elles; les masses individuelles ne se conservent donc pas: seule la masse de l'ensemble reste invariable. Le principe de la conservation de la masse n'est pas distinct du principe de la conservation de l'énergie.

Si l'on acceptait, comme on l'a d'ailleurs proposé, de prendre la vitesse de la lumière dans le vide comme unité fondamentale, on pourrait dire: la masse d'un corps est égale à son énergie totale.

Les masses individuelles ne se conservant pas, l'individualité d'une portion de matière ne peut plus être caractérisée par sa masse: il faut la chercher dans le nombre des éléments primordiaux, électrons positifs et négatifs dont elle est formée, car ce nombre reste seul invariable à travers tous les changements que subit la portion de matière.

382.— Les quadri-vecteurs de l'Espace-Temps

Considérons un point d'Univers  $M$ ; ses coordonnées  $x, y, z, t$  définissent un vecteur  $OM$ .

En géométrie ordinaire, les cosinus directeurs d'une droite  $OM$  joignant l'origine à un point  $M$  à la distance  $s$

sont  $\frac{x}{s}, \frac{y}{s}, \frac{z}{s}$ , et l'on a:

$$\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{s^2} + \frac{z^2}{s^2} = 1$$

Dans la géométrie de la relativité, on a de même  $s$  étant l'intervalle d'Univers:

$$(575) \quad \frac{c^2 t^2}{s^2} - \frac{x^2}{s^2} - \frac{y^2}{s^2} - \frac{z^2}{s^2} = 1$$

$\frac{x}{s}, \frac{y}{s}, \frac{z}{s}, \frac{ct}{s}$  ne sont plus des cosinus, ce sont des coefficients de direction dans l'espace-temps.

Dans la représentation géométrique de Minkowski, on doit distinguer deux natures de vecteurs: les vecteurs de temps

et les vecteurs d'espace. Le vecteur  $OM$  est un vecteur de temps si  $M$  appartient au domaine antérieur ou postérieur ( $s^2 > 0$ ), c'est-à-dire si la droite  $OM$  de la représentation géométrique coupe l'espace hyperbolique à deux nappes  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -1$ , et peut être prise comme axe du temps ou encore si les événements  $O$  et  $M$  forment un couple dans le temps. Le vecteur est un vecteur d'espace si le point d'univers  $m$  est dans le domaine intermédiaire ( $s^2 < 0$ ).

Plus généralement un vecteur est un vecteur de temps ou un vecteur d'espace suivant qu'une direction parallèle (ayant mêmes coefficients de direction) menée par l'origine peut ou non servir d'axe du temps, ou encore suivant que les événements origine et extrémité du vecteur forment un couple dans le temps ou un couple dans l'espace.

En géométrie ordinaire, les vecteurs dont les composantes sont  $x, y, z$ ;  $x_1, y_1, z_1$  sont orthogonaux si l'on a:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0$$

De même nous dirons que les vecteurs  $x, y, z, t$ ;  $x_1, y_1, z_1, t_1$  sont "orthogonaux" si la condition suivante est remplie:

$$(576) \quad c^2 t t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0$$

Dans la représentation géométrique, si l'on joint à l'origine un point  $M$  d'un des espaces hyperboliques, et si l'on mène une tangente en  $M$  à cet espace, on a deux directions "orthogonales". D'après cela, un vecteur orthogonal à un vecteur de temps est nécessairement un vecteur d'espace.

Vecteur de mouvement. - Considérons maintenant un mobile  $M$  auquel appartient une certaine ligne d'univers. Avec Minkowski, nous pouvons considérer les coordonnées  $x, y, z, t$  comme des fonctions du temps propre  $\tau$  dont la différentielle est:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \alpha dt$$

Les dérivées par rapport à  $\tau$ :

$$(577) \quad \frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{dz}{d\tau}, \quad \frac{cdt}{d\tau}$$

sont les composantes du vecteur du mouvement.

Ces composantes sont proportionnelles aux composantes de  $ds$  ( $ds = c d\tau$ ); le vecteur du mouvement est dirigé suivant l'élément de ligne d'univers du mobile, disons suivant la tangente à la ligne d'univers, comme en cinématique ordinaire la vitesse est tangente à la trajectoire.

Vecteur de l'accélération. - Ses dérivées secondes :

$$(578) \quad \frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}, \frac{cd^2t}{d\tau^2},$$

définissent les composantes du vecteur de l'accélération.

De la relation :

$$c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 = c^2$$

on tire

$$c^2 \frac{dt}{d\tau} \frac{d^2t}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau} \frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dy}{d\tau} \frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{dz}{d\tau} \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0$$

relation qui exprime que le vecteur de l'accélération est normal au vecteur du mouvement, (au sens précédemment indiqué).

Le vecteur du mouvement étant un vecteur de temps, puisqu'il est tangent à la ligne d'univers, c'est-à-dire au temps propre, le vecteur de l'accélération est un vecteur d'espace.

Le vecteur force. - Pour transformer la force  $X, Y, Z$  en un vecteur de l'espace-temps, multiplions ses composantes par

$\frac{dt}{d\tau} = \alpha$ ; les équations (361) s'écrivent :

$$\frac{d}{d\tau} \left( m_0 \frac{dx}{d\tau} \right) = m_0 \frac{d^2x}{d\tau^2} = \alpha X = F'_x$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( m_0 \frac{dy}{d\tau} \right) = m_0 \frac{d^2y}{d\tau^2} = \alpha Y = F'_y$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( m_0 \frac{dz}{d\tau} \right) = m_0 \frac{d^2z}{d\tau^2} = \alpha Z = F'_z$$

La quatrième composante s'obtient par la condition que le vecteur force soit dirigé suivant le vecteur d'accélération :

$$(580) \quad m_0 \frac{cd^2t}{d\tau^2} = F_t \quad (\text{composante du temps})$$

Les équations :

$$m_0 \frac{d^2x}{d\tau^2} = F_x, \quad m_0 \frac{d^2y}{d\tau^2} = F_y, \quad m_0 \frac{d^2z}{d\tau^2} = F_z$$

sont sous la forme newtonienne, avec une masse constante, la masse au repos du point matériel (effectivement le point matériel est au repos dans le système qui lui est lié, où le temps est  $\tau$ ). Ses composantes d'espace de la force de Minkowski sont liées à celles de la force  $X, Y, Z$  par les relations :

$$F_x = \alpha X, \quad F_y = \alpha Y, \quad F_z = \alpha Z.$$

Nous pouvons généraliser, en effectuant une transformation de coordonnées rectangulaires absolument quelconque et écrire :

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}$$

les coordonnées sont alors imaginaires.

Le vecteur d'accélération a pour composantes :

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2x_2}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2x_3}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2x_4}{d\tau^2}$$

et ces composantes multipliées par  $m_0$  sont les composantes du vecteur force.

L'impulsion d'Univers = Multiplions par  $m_0$  les composantes du vecteur du mouvement, nous avons l'impulsion d'Univers :

$$(581) \quad m_0 \frac{dx}{d\tau}, \quad m_0 \frac{dy}{d\tau}, \quad m_0 \frac{dz}{d\tau}, \quad m_0 \frac{cdt}{d\tau}$$

$m$  étant la masse  $\frac{m_0}{\alpha}$  du point matériel dans le système  $x, y, z, t$ , ces composantes s'écrivent, puisque  $d\tau = \alpha dt$  :

$$(582) \quad m \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{dz}{dt}, \quad mc$$

Les 3 composantes d'espace de l'impulsion d'Univers sont les 3 composantes de la quantité de mouvement, la composante de temps est l'énergie totale, divisée par c.

383: — Unification des principes de la conservation de la masse, de l'énergie, et de la quantité de mouvement. — Conservation de l'impulsion d'Univers: (1)

Soit un système matériel isolé. En mécanique on envisage trois principes; la conservation de la masse, la conservation de l'énergie, la conservation de la quantité de mouvement. Nous avons déjà identifié le principe de la conservation de la masse et le principe de la conservation de l'énergie (n° 381)

La conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, qui s'écrivent:

$$\Sigma \bar{G}_x = C \bar{t} \quad \Sigma \bar{G}_y = C \bar{t} \quad \Sigma \bar{G}_z = C \bar{t} \quad \Sigma W = C \bar{t}$$

se résument maintenant dans l'affirmation que la somme des vecteurs impulsions d'Univers, somme entendue au sens géométrique, reste constante dans un système matériel isolé.

Il ne subsiste plus qu'un principe unique: la conservation de l'impulsion d'Univers, vecteur à 4 composantes dont la composante de temps est l'énergie (divisée par c) et dont les composantes d'espace sont les composantes de la quantité de mouvement.

Ce principe a un sens absolu, indépendant du système de référence, tandis que les composantes du vecteur d'Univers, c'est-à-dire l'énergie et la quantité de mouvement ne sont pas des invariants.

Seul, l'ensemble des principes de la dynamique a un sens absolu.

Loin de compliquer les lois de la nature, le principe de relativité, par sa puissance de simplification, conduit à une synthèse sur la beauté de laquelle il serait superflu d'insister.

(1) d'après une note de M. Langevin.

## § 10. - Vérifications expérimentales

384. — Les électrons des rayons  $\beta$  ont des vitesses qui convergent vers la vitesse de la lumière.

La théorie de la relativité affirme que la vitesse de la lumière est une vitesse limite qui ne saurait être dépassée. Cette affirmation est la base même de la théorie, car c'est elle qui entraîne la négation du temps absolu.

Les vitesses les plus rapides que nous connaissions sont celles des particules  $\beta$  émises par les corps radioactifs. Danysz a montré que ces particules présentent toute une série de vitesses, et il est remarquable que ces vitesses convergent vers la vitesse de la lumière, allant jusqu'à 297000 km/sec, sans pouvoir atteindre 300000 km/sec.

385. — Vérification de la loi  $m = \frac{m_0}{\alpha}$ .

Nous avons déjà parlé des expériences de M. Bücherer (n° 270). Ces expériences avaient pour objet de décider entre deux formules qui avaient été proposées pour exprimer la variation de la masse: la formule de M. Max Abraham, qui avait supposé l'électron indéformable, et celle de Lorentz-Einstein  $m = \frac{m_0}{\alpha}$ . Les expériences de M. Bücherer, faites sur les rayons  $\beta$ , ont donné des résultats qui concordent avec la loi de Lorentz-Einstein beaucoup mieux qu'avec la formule d'Abraham.

Des mesures plus précises ont été faites par Ch. Eug. Guye et Lavanchy, sur les rayons cathodiques à grande vitesse (1). Si l'on observe la déviation, par un champ magnétique connu  $H$ , des rayons cathodiques produits sous une différence de potentiel  $\Psi$  connue, on obtient les deux relations suivantes:

i°) - Le travail effectué par le champ électrique sur la charge  $e$  est égal à l'accroissement d'énergie cinétique de l'électron.

$$e\Psi = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (\text{formule 569 n° 378})$$

(1) Ch. Eug. Guye et Lavanchy - Arch. des Sc. phys. et nat. Genève t. XL. Oct. 1915.

2°)  $R$  étant le rayon de courbure de la trajectoire dans le champ magnétique :

$$RH = \frac{mv}{e} = \frac{m_0 v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

L'élimination de  $v$  entre ces deux relations montre suivant quelle loi doivent varier simultanément  $\psi$  et  $H$  pour que la déviation reste constante.

La loi prévue est exactement vérifiée pour des vitesses de rayons cathodiques allant jusqu'à la moitié de la vitesse de la lumière.

Les rayons  $\beta$  permettent des vitesses beaucoup plus grandes, mais la précision est moindre puisqu'on est obligé de remplacer la première des deux relations précédentes par une autre exprimant la déviation dans un champ électrique perpendiculaire à la direction des rayons; cette mesure de déviation est moins précise que celle de la différence de potentiel envisagée dans le cas des rayons cathodiques.

### 386. — La structure des raies de l'hydrogène et des spectres de rayons X.

L'expérience prouve que les raies spectrales de l'hydrogène (série de Balmer) ne sont pas simples. Elles possèdent chacune une série de composantes extrêmement rapprochées, dont deux sont particulièrement intenses : la différence de période de ces composantes a été mesurée par la variation de visibilité des franges d'interférences quand on change la différence de marche (M. M. Buisson et Ch. Fabry). Pour la raie rouge  $H_\alpha$  de l'hydrogène, la différence des longueurs d'onde est voisine de trois centièmes d'unité Angström.

Nous avons vu comment M. Bohr, admettant que l'atome d'hydrogène est formé d'un noyau chargé positivement autour duquel gravite un unique électron négatif, a réussi, par une application de la théorie des quanta, à prévoir le spectre de Balmer.

M. Bohr avait supposé que l'électron décrit des orbites circulaires. M. Sommerfeld a étendu la théorie au cas des orbites elliptiques; mais le résultat est le même; on trouve toujours la série de Balmer avec une fréquence unique pour chaque raie.

M. Sommerfeld eut alors l'idée de remplacer la mécanique ordinaire par la mécanique de la relativité, les vitesses prises par l'électron sur les diverses orbites stables étant déjà une fraction sensible de la vitesse de la lumière.

Le résultat a été remarquable. La dynamique de la relativité donne, non seulement qualitativement, mais quantitativement, la structure exacte des raies de l'hydrogène.

Dans le cas d'atomes plus complexes, formés d'anneaux d'électrons gravitant autour du noyau, on trouve les spectres des rayons X et la loi de Moseley (n° 339).

M. Sommerfeld a montré que la dynamique de la relativité conduit à la même structure que pour les raies de l'hydrogène, mais avec des composantes d'autant plus séparées que le nombre atomique de l'élément (charge du noyau ou rang dans la classification des éléments) est plus grand. Par exemple les raies  $L_{\beta}$  et  $L_{\alpha}$  de l'uranium sont l'équivalent du doublet ( $H_{\beta}$  de l'hydrogène, mais avec un écart de fréquence cent millions de fois plus grand (la vitesse des électrons voisins des noyaux est, d'autant plus grande que la charge du noyau est plus considérable). La théorie de M. Sommerfeld présente un accord excellent avec l'expérience.

L'explication de la structure des spectres par la dynamique nouvelle constitue une remarquable vérification du principe de relativité. Il est établi aujourd'hui que les problèmes relatifs aux mouvements intra-atomiques exigent l'emploi de la dynamique nouvelle pour donner des solutions en accord avec l'expérience.

### 387. — La signification de l'expérience de Michelson.

On présente souvent l'expérience de Michelson comme l'unique base du principe de relativité et beaucoup de personnes objectent qu'il est scabreux de bâtir une pareille théorie sur une expérience dont le résultat a été négatif.

Il est essentiel de faire remarquer que ce n'est pas sur l'expérience de Michelson qu'il faut fonder la théorie de la relativité. Cette théorie est basée sur les formules de Lorentz, qui sont implicitement contenues dans les équations de Maxwell: c'est la nécessité de garder leur forme aux équations de l'électromagnétisme quand on passe d'un

ystème de référence à un autre qui est la base solide de toute la théorie. L'expérience de Michelson a joué un rôle considérable, parce qu'elle a d'abord appelé l'attention sur la discordance entre l'expérience et les prévisions déduites des lois de la mécanique ; on a ensuite reconnu la cause profonde de ce désaccord. Si maintenant on donne à l'expérience de Michelson son véritable sens, on constate qu'elle vient simplement se joindre aux autres vérifications expérimentales, du principe de relativité.

La relativité généralisée et la loi de la gravitation d'Einstein nous apporteront des vérifications plus remarquables encore.

## - Chapitre II -

# La relativité généralisée et la gravitation -

---

### § 1 - Le champ de gravitation -

#### 388 - Conditions d'application du principe de relativité restreint -

Une hypothèse fondamentale est à la base de la théorie de la relativité restreinte : on admet l'existence du mouvement rectiligne et uniforme.

Cette condition doit être précisée car l'état de mouvement rectiligne et uniforme n'a pas de sens absolu. S'il est légitime de parler de deux systèmes en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre, on n'a aucun repère pour décider si un système envisagé isolément est ou non en translation uniforme.

Voici alors quel sens on doit attribuer au principe de relativité restreint : nous supposons qu'il existe un système S tel que, dans ce système, la loi d'inertie de Galilée soit exacte : un point matériel sur lequel n'agit aucune force se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme ; cela signifie : dans ce système S nous envisageons des corps de référence.

ou des axes de référence immobiles par définition; un point matériel sur lequel n'agit aucune force se déplace d'un mouvement de translation uniforme par rapport à ces corps ou axes.

Un tel système est dit "système galiléen", et d'autres systèmes  $S', S'', \dots$  sont également des systèmes galiléens s'ils sont animés par rapport à  $S$  d'un mouvement de translation uniforme, sans rotation.

Le principe restreint n'envisage que des systèmes galiléens; il affirme que dans tous ces systèmes la vitesse de la lumière est une constante universelle, et que les lois des phénomènes sont les mêmes.

Un Espace-Temps, pouvant contenir dans toute son étendue des systèmes galiléens est un Univers de Minkowski; il est "euclidien" à cause de l'analogie entre l'état de mouvement rectiligne et uniforme dans l'Espace-Temps et la ligne droite dans l'espace de la géométrie euclidienne. Comme cet espace, l'Univers de Minkowski est infini.

Dans l'Univers de Minkowski, il n'a pas été question d'un champ de gravitation. Cependant, dans l'Univers réel, la gravitation s'exerce partout et agit sur toute portion de matière! Agit-elle aussi sur l'énergie?

### 389 - La pesanteur de l'énergie -

La dynamique de la relativité restreinte a pour conséquence la loi, vérifiée d'ailleurs par l'expérience, de l'inertie de l'énergie, mais n'implique pas à priori que l'énergie soit pesante.

Une question capitale se pose donc: la pesanteur est-elle, comme l'inertie, une propriété de l'énergie? est-elle liée à l'inertie? lorsque la "masse inerte" d'un corps change avec son énergie interne, en est-il de même

de la "masse pesante".

Supposons qu'une perte d'énergie par rayonnement, d'où résulte une variation proportionnelle de la masse inerte, ne s'accompagne d'aucune variation de poids, il en résulterait qu'une certaine quantité d'uranium et l'ensemble des produits de sa transformation, hélium et plomb, auraient des poids égaux mais des masses différentes, et par suite ne prendraient pas la même accélération sous l'influence de la pesanteur. Il devrait exister, en un même lieu, pour l'uranium et le plomb, une différence dépassant  $\frac{1}{10000}$  dans les valeurs de l'accélération due à la pesanteur.

Or les expériences de M. Eotvös ont établi que l'accélération de la pesanteur est, en un même lieu, la même pour tous les corps. Cette vérification a été faite au moyen de la balance de torsion, qui a permis de constater que la direction de la verticale est exactement la même pour tous les corps : cette direction est celle de la résultante du poids et de la force centrifuge due à la rotation de la terre ; comme la force centrifuge est proportionnelle à la masse inerte, si le poids n'était pas proportionnel à la masse, la verticale n'aurait pas la même direction pour tous les corps. La constance du rapport entre le poids et la masse inerte a été observée avec une précision qui dépasse le vingt millionième : nous sommes loin d'écarts supérieurs au dix millième.

Nous avons vu, d'autre part, que les petits écarts des masses atomiques doivent résulter de variations d'énergie interne pendant la formation des atomes. Nous pouvons remarquer que ces écarts se constatent par des mesures de poids.

Nous sommes donc amenés à conclure que l'énergie est pesante et qu'il y a, dans un champ de gravitation déterminé, proportionnalité exacte entre le poids et la masse inerte de l'énergie. Il était donc naturel d'admettre que l'énergie rayonnante, en particulier la lumière,

est pesante, et l'on devait penser qu'un rayon lumineux s'incurve dans un champ de gravitation.

Einstein a d'abord appliqué la loi de Newton<sup>(1)</sup>; le calcul de l'angle des asymptotes de la trajectoire hyperbolique suivie par un mobile dont la vitesse à grande distance du Soleil serait  $C$ , a conduit au résultat suivant :

un rayon lumineux dont la trajectoire passerait à la distance minimum  $R$  du centre du Soleil devrait subir une déviation :

$$\alpha = \frac{2GM}{R C^2}$$

$G$  étant la constante de la gravitation, et  $M$  la masse du Soleil. Pour un rayon passant tangen-  
tiellement au bord du Soleil, on aurait  $\alpha = 0,87''$ .

Mais la découverte de la loi de la gravitation, faite plus tard par Einstein, a montré que la loi de Newton n'est qu'une approximation pour les faibles vitesses, et que la déviation du rayon lumineux doit être exactement le double de la valeur précédente. Nous verrons que les observations ont vérifié l'exactitude de la loi d'Einstein.

### 390 - La généralisation du principe de relativité -

La pesanteur de la lumière met pour la première fois la gravitation en liaison avec les phénomènes électromagnétiques. De graves conséquences en résultent.

(1) Le premier raisonnement d'Einstein était hybride : il associait le point de vue de la propagation de la lumière, régie par les lois de l'électromagnétisme, qui impliquent des actions de proche en proche à travers l'espace, avec le point de vue de la mécanique classique, celui des actions instantanées à distance.

Pour un observateur lié à la Terre, un mobile lancé et abandonné à lui-même ne satisfait pas à la loi galiléenne d'inertie, puisqu'il est dévié par la pesanteur; nous voyons qu'il en est de même pour la lumière et que par suite la vitesse d'une onde n'est pas constante sur tout son parcours. La même conclusion s'applique à tous les mondes réels de l'Univers; d'aucun système naturel on ne peut voir — du moins sur une grande étendue — un mobile ou même un rayon lumineux se propager suivant un mouvement rectiligne et uniforme; en un mot, le système galiléen n'est qu'une fiction.

Faut-il donc considérer le principe de relativité comme une abstraction en dehors des réalités objectives? doit-on renoncer à cette admirable synthèse et considérer l'invariance des lois de la Nature comme une simple approximation, d'autant meilleure que le système envisagé est plus loin de toute masse attirante?

Peut-on, au contraire, étendre le principe de relativité au cas d'un système en mouvement quelconque? Einstein n'a pas hésité: il a érigé, en principe, l'affirmation suivante:

Tous les systèmes de référence sont équivalents pour formuler les lois de la Nature: ces lois sont "covariantes" (1) vis-à-vis de transformations arbitraires.

Cette généralisation du principe de relativité s'impose.

En effet toutes les sensations par lesquelles nous percevons l'Univers sont déterminées par des coïncidences absolues (par exemple la coïncidence d'une onde lumineuse avec notre rétine); toutes les lois de notre science sont basées sur la constatation de coïncidences dans l'Espace-Temps.

(1) Le terme signifie que si ces lois sont données dans un système, elles sont données à la fois dans tout système arbitrairement choisi.

Dans le langage de la relativité, ces coïncidences sont des intersections de lignes d'Univers, absolues, et par suite indépendantes de tout système de référence.

Voici une image, due à M. Eddington,<sup>(1)</sup> qui fait comprendre la question :

"supposons tracé un réseau de lignes d'Univers et imaginons-le placé dans une masse gélativeuse. Si maintenant nous déformons cette gelée d'une manière quelconque, chaque ligne d'Univers se déformera, mais les intersections continueront à se succéder dans le même ordre et aucune intersection supplémentaire ne se trouvera créée. La gelée déformée nous donnera une histoire du monde aussi exacte qu'avant sa déformation, et il n'existe aucun criterium, qui nous permette de dire qu'une des deux représentations est préférable à l'autre.

Supposons maintenant que nous introduisons des divisions de l'espace et du temps, ce que nous pourrions faire en traçant des mailles rectangulaires dans les deux états successifs de la gelée. Nous avons maintenant deux manières de situer les lignes d'Univers et les événements dans l'espace et dans le temps, manières que nous devons traiter sur un pied d'égalité. Evidemment nous ne changeons rien au résultat si, au lieu de déformer d'abord la gelée puis d'introduire des mailles régulières, nous introduisons des mailles irrégulières dans une gelée non déformée. Tous les systèmes de mailles sont donc équivalents."

Cependant les effets de l'accélération paraissent contredire le principe généralisé; ainsi que nous l'avons fait remarquer (n° 347), l'accélération nous apparaît comme ayant une sorte de réalité physique absolue.

Il est clair que, dans un système non galiléen, le principe de relativité précédem-

(1) A. S. Eddington *Space, time and gravitation* (1920)  
Traduction française par M. J. Rossignol (1921) p. 109.  
(Hermann éditeur)

ment étudié ne s'applique pas tel quel. La suite nous montrera que la généralisation du principe nécessite l'introduction, dans chaque système, d'un champ de gravitation particulier à ce système ; c'est précisément ce champ qui se manifeste par les effets mécaniques de l'accélération.

C'est en cherchant les conditions exigées par la généralisation du principe qu'Einstein a découvert les lois de la gravitation.

### 391 - L'équivalence entre un champ de gravitation et un champ de force dû à un état de mouvement accéléré -

Nous allons commencer par l'analyse de notions qui nous paraissent évidentes parce que nous y sommes habitués, et c'est précisément parce que nous y sommes trop habitués, que personne, avant Einstein, n'avait eu l'idée de les approfondir.

1<sup>o</sup> / La gravitation est une action de proche en proche. - A la question "pourquoi un objet soulevé et abandonné à lui-même tombe-t-il ?" chacun est tenté de répondre : parce qu'il est attiré par la Terre. La physique moderne doit formuler la réponse d'une façon différente.

Le développement, dans le domaine de l'électromagnétisme, de la théorie des actions de proche en proche, non instantanées, a conduit à la théorie de Maxwell et au principe de relativité restreint. Une conception semblable doit être admise pour la gravitation. L'attraction de la Terre sur l'objet qui tombe n'entre en jeu qu'indirectement. D'une façon générale toute matière ou toute énergie détermine les propriétés de l'Espace-Temps, produit une modification de l'Espace-Temps qui se manifeste à nous par ce

que nous appelons un champ de gravitation.

La propriété d'agir sur un objet ou sur une onde électromagnétique appartient à l'espace-temps modifié par la présence de matière ou d'énergie; ce n'est pas une action directe et instantanée à distance produite par un corps attirant.

2°/ L'égalité de la masse pesante et de la masse inerte. — Le champ de gravitation possède une propriété excessivement remarquable qui n'appartient pas aux champs électrique et magnétique. Alors que dans un champ électrique des charges différentes prennent des accélérations différentes, dans un champ de gravitation l'accélération acquise par un corps ne dépend ni de l'état physique ni même de la nature du corps. Tous les corps, qu'ils soient lourds ou légers, tombent avec la même vitesse si les conditions initiales sont les mêmes.

Ainsi, dans un champ de gravitation, l'accélération est indépendante de la force qui s'exerce sur le corps.

Ce fait, si familier, est extraordinaire: Nous allons, avec Einstein, le formuler autrement.

D'après la loi d'inertie, on a (pour les faibles vitesses):

$\text{force} = \text{masse inerte} \times \text{accélération}$   
c'est-à-dire que la masse inerte (masse au repos) est caractéristique du corps accéléré.

Si la force est la pesanteur, on a:

$\text{force} = \text{masse pesante} \times \text{intensité du champ}$ ,  
la masse pesante étant également une caractéristique du corps. Il suit de là:

$$\text{accélération} = \frac{\text{masse pesante}}{\text{masse inerte}} \times \text{intensité du champ}$$

Puisque l'expérience prouve que, dans un même champ, l'accélération est indépendante du corps, le rapport  $\frac{\text{masse pesante}}{\text{masse inerte}}$  est une constante pour tous les corps et si l'on choisit les unités de façon que ce rapport soit égal à 1, la masse pesante est égale à la masse inerte, et d'autre part l'accélération est égale à l'intensité du champ.

Il y a longtemps que la mécanique a enregistré ce résultat, mais personne ne l'avait interprété. S'interprétation est celle-ci : la même qualité d'un corps se manifeste selon les circonstances, soit comme inertie, soit comme pesanteur ; en termes plus précis : la force de gravitation est une force d'inertie.

Imaginons une portion d'Univers vide, si loin des étoiles et de toute matière - que nous soyons dans le cas idéal où la loi galiléenne d'inertie est applicable. Il est alors possible dans cette portion d'Univers, de choisir un système galiléen  $S$  relativement auquel des points immobiles restent au repos, des corps en mouvement sur lesquels n'agit aucune force sont animés d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Dans ce système galiléen  $S$ , supposons une chambre isolée, dans laquelle se trouve un observateur ; pour cet homme il n'y a pas de pesanteur, pas de direction privilégiée.

Par un câble fixé à un crochet au milieu de la toiture de la chambre, un être extérieur se met à tirer avec une force constante. Pour un observateur immobile dans le système galiléen  $S$ , la chambre commence à être animée d'un mouvement uniformément accéléré et sa vitesse croît d'une façon fantastique. Toute autre sera l'opinion de l'homme, enfermé dans la chambre. L'accélération va projeter cet homme sur le plancher, pour lui il y aura un "haut" et un "bas" comme dans une chambre sur la Terre ; il constatera la loi de la chute des corps, tous les objets ayant la même accélération ; sa première impression sera qu'il se trouve dans un champ de gravitation.

Cependant il sera étonné des effets observés, car la chambre devrait tomber en chute libre dans le champ de gravitation, ce qui ferait disparaître la pesanteur. Cherchant ce qui se passe - il découvrira le crochet et le câble tendu ; cette fois tout sera clair pour lui ; il se dira : ma chambre est sus-

pendue, au repos, dans un champ de gravitation uniforme.

Cet homme est-il dans l'erreur ? nullement, car son interprétation est absolument conforme aux lois de la mécanique. Alors nous pouvons, comme lui, considérer la chambre comme immobile, bien qu'elle soit accélérée relativement à l'espace galiléen  $S$  : la possibilité de cette conception repose sur la propriété fondamentale d'un champ de gravitation, de donner à tous les corps la même accélération, c'est-à-dire sur l'égalité de la masse pesante et de la masse inerte.

Supposons maintenant qu'à l'intérieur de la chambre, l'homme suspende un corps au bout d'une corde, c'est-à-dire constitue un pendule : la corde se tendra et prendra une direction bien déterminée qui sera "la verticale". L'homme estimera que la tension de la corde équilibre le poids du corps ; que la tension est déterminée par la masse pesante. Mais d'autre part, un observateur du système galiléen  $S$  jugera de la façon suivante : la corde est forcée d'accompagner la chambre dans son mouvement accéléré et transmet ce mouvement au corps suspendu : la tension équilibre la force d'inertie ; elle est déterminée par la masse inerte.

3°/ Le boulet de Jules Verne. — Au lieu d'imaginer que la chambre de l'observateur est loin de toute matière, supposons la, au contraire, lancée sans rotation et se mouvant en chute libre dans le champ de gravitation d'un globe ; la pesanteur y sera supprimée puisque tous les objets seront soumis à une même accélération d'indivisible. Pour l'observateur de la chambre il n'y aura ni haut, ni bas et un mobile libre sera au repos ou au mieux à un mouvement rectiligne et uniforme : la lumière à l'intérieur ou dans le voisinage de la chambre se propagera en ligne droite. En résumé, un système de référence lié à la chambre en chute libre sera un système galiléen (bien que pour un observateur de l'astre

sur lequel tombe la chambre le système soit accéléré), et l'homme de la chambre considérera l'Univers comme euclidien dans son voisinage.

4°/ Le principe d'équivalence. — Il résulte des considérations qui précèdent que, d'une part, l'emploi d'un système de référence en mouvement équivaut à créer un certain champ de gravitation dans lequel ce système pourra être considéré comme immobile; que, d'autre part, l'emploi d'un système de référence lié à un corps en chute libre dans un champ de gravitation revient à supprimer ce champ.

Dans toute portion d'espace il est impossible de se prononcer entre les deux hypothèses suivantes: 1° il existe un état de mouvement sans champ de gravitation, 2° le système envisagé est au repos, mais il règne dans la région considérée un champ de gravitation s'exerçant sur toute portion d'énergie.

Il est donc impossible de distinguer un champ de force d'inertie dû à un état de mouvement et un champ de gravitation. Il y a équivalence, selon l'expression d'Einstein.

Cette conception est en plein accord avec un fait bien connu: nous avons déjà dit, à propos des expériences d'Eötvös (339) que la verticale est déterminée par la résultante du champ de la pesanteur et du champ de la force centrifuge due à la rotation de la Terre. Ces deux constituants du champ terrestre interviennent au même titre dans tous les phénomènes sensibles à leur action. Tout se passe pour un système de référence en rotation comme s'il était en translation dans un champ de gravitation distribué comme le champ de force centrifuge.

### 392 — L'Univers n'est pas euclidien —

Pour un observateur en chute libre, dans un boulot de Jules Verne, le champ de gravitation est supprimé; il est essentiel de remarquer que c'est seulement dans une région peu étendue

(théoriquement infiniment petite) que l'Univers est euclidien pour cet observateur. Le champ de gravitation existe à distance, car l'intensité de la pesanteur n'est constante ni en grandeur ni en direction. En supprimant le champ en un point, on l'accroît ailleurs; par exemple, relativement à l'observateur qui tombe en chute libre sur la Terre, le champ de la pesanteur est doublé dans la région symétrique par rapport au centre de la Terre.

Aucun champ de gravitation n'est uniforme; aucun système de référence ne peut annuler un champ de gravitation dans toute son étendue; on ne peut supprimer le champ que localement.

L'Univers, envisagé dans son ensemble, n'est donc pas euclidien.

## § 2 - La théorie des surfaces de Gauss, et son extension à une multiplicité possédant quatre dimensions -

Nous avons donné un énoncé du principe de relativité généralisé et nous avons dit pour quelle raison cette généralisation s'impose; nous pouvons maintenant comprendre comment il faudra l'exprimer.

Faire une transformation arbitraire de coordonnées, ou choisir un système de référence arbitraire, c'est introduire un état de mouvement arbitraire ou, d'après le principe d'équivalence, un champ de gravitation arbitraire.

Par conséquent, les lois qui régissent

les phénomènes physiques doivent contenir, implicitement ou explicitement, sous la forme la plus générale, les grandeurs qui caractérisent un champ de gravitation.

Le principe de relativité exige que les équations qui expriment ces lois conservent leur forme dans un champ de gravitation quelconque.

Cette condition d'invariance, ou plus exactement de covariance limite considérablement les formes possibles pour les lois de la Nature.

### 393 - Les longueurs et le temps dans un champ de gravitation -

L'influence d'un champ de gravitation sur la marche des horloges et sur la mesure des longueurs dépend du champ envisagé, ou ce qui revient au même, de l'état de mouvement équivalent. Nous allons prendre un exemple.

Imaginons un système  $S$  en chute libre, par conséquent galiléen, dans lequel l'Univers est (localement) euclidien; dans ce système  $S$  les résultats de la théorie de la relativité restreinte sont applicables. Prenons un second système  $S'$  formé par un disque plan dont le mouvement par rapport à  $S$ , est une rotation autour d'un axe normal au plan du disque, passant par le centre de ce disque, et fixe dans le système  $S$ .

Un observateur situé excentriquement éprouve l'action d'une force qui agit radialement vers l'extérieur; cette force est interprétée par un observateur du système galiléen  $S$  comme un effet d'inertie: c'est la force centrifuge. Mais, d'autre part, l'observateur entraîné avec  $S'$  doit considérer son disque comme un corps de référence immobile et doit interpréter la force qui agit sur lui et sur les corps au repos par rapport au disque comme l'effet d'un certain champ de gravitation.

Il est à peine besoin de faire remarquer que

ce champ de force possède une structure qui n'a aucun rapport avec celle du champ de gravitation au voisinage d'une masse attirante, mais conformément à la généralisation à laquelle nous autorise le principe d'équivalence, nous appelons quand même ce champ un champ de gravitation, ou si l'on préfère, un champ de gravitation géométrique.

L'observateur de  $S'$  prend deux horloges identiques marquant toujours la même heure tant qu'elles restent au même point. Il place l'une au centre du disque et transporte l'autre en un point du disque à la distance  $r$  du centre; les deux horloges sont immobiles dans le système  $S'$  du disque; vont-elles rester synchrones? certainement non. Examinons-les, en effet, du système galiléen  $S$ : celle qui est au centre n'a pas de vitesse, l'autre est en mouvement; nous savons qu'elle va marcher plus lentement. Cet effet sera constaté par l'observateur du disque car il s'agit d'un effet bien réel et non d'une apparence, le temps propre  $\tau$  au point situé à la distance  $r$  du centre étant plus court que le temps  $t$  du système galiléen, qui est le temps au centre:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} dt$$

Si, au bout de quelque temps, on ramène l'horloge du point  $r$  au centre du disque, on constate qu'elle est en retard sur celle du centre.

A chaque distance  $r$  correspond un temps propre; c'est dire qu'il n'y a aucune synchronisation possible pour l'observateur du système  $S'$ ; il n'y a pas un temps unique sur le disque.

Cet exemple fait comprendre que, d'une façon générale, dans un système immobile dans un champ de gravitation équivalent à un système accéléré par rapport à un système galiléen, il n'y a plus de définition possible du temps pour le système tout entier, plus de mesure possible par des

horloges synchrones, car chaque point possède son temps propre.

La définition des coordonnées spatiales présente de même des difficultés insurmontables si l'on s'en tient aux coordonnées de la géométrie euclidienne. Reprenons l'exemple du disque tournant. Imaginons qu'en appliquant sur la périphérie du disque un fil flexible dont la longueur est l'unité choisie, on marque deux points A et B, et que le rayon soit mesuré avec la même unité. Un observateur placé au centre O appartient au système galiléen puisque le centre est immobile; il peut donc appliquer les résultats de la relativité restreinte. D'une part le rayon du disque n'est pas changé pour cet observateur, car les rayons sont normaux à la vitesse; d'autre part l'unité de longueur AB qu'il voit passer lui paraît plus courte que si le disque ne tournait pas (contraction de Lorentz-Einstein); l'observateur est donc conduit à considérer la circonférence comme contenant un plus grand nombre de fois l'unité de longueur; il trouve que le rapport de la circonférence au diamètre est supérieur à  $\pi$  et le rapport obtenu est d'autant plus grand pour une même vitesse angulaire, que le rayon de la circonférence est plus grand. La géométrie de ce disque n'est plus euclidienne.

D'une façon générale, pour un système au repos dans un champ de gravitation, on ne peut plus définir les coordonnées spatiales  $x, y, z$ , comme on le fait en géométrie euclidienne. La notion même de ligne droite perd sa signification.

Il semble que, par ces difficultés, toute la théorie de la relativité soit remise en question; car tant que les coordonnées des événements ne sont pas définies, les lois de la Nature paraissent ne plus avoir de sens.

Einstein a solutionné le problème par une admirable extension de la théorie des surfaces de Gauss.

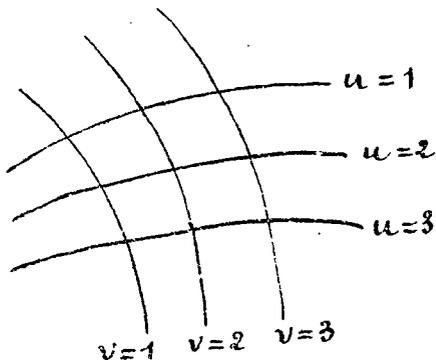
## 394 - Les surfaces et les coordonnées de Gauss -

Supposons une surface qui ne soit ni plane ni développable sur un plan. Dans une multiplicité à deux dimensions seulement, cette surface est un univers non euclidien.<sup>(1)</sup>

Gauss a montré qu'il est possible d'énoncer les lois de la géométrie de ces surfaces sous une forme indépendante du système de coordonnées. On comprend, dès à présent, qu'en ajoutant deux dimensions, on pourra, par une généralisation de la théorie de Gauss, énoncer les lois de l'Univers non euclidien à quatre dimensions.

Gauss est parti de l'idée qu'il doit être possible, par des opérations de géodésie sur la surface, de mettre en évidence la courbure de la surface en faisant simplement des opérations locales d'arpentage, par les procédés habituels, en appliquant la géométrie euclidienne du plan.

En effet, en tout point de la surface il y a un plan tangent et dans une étendue limitée la surface peut être confondue avec son plan tangent, ceci est d'autant plus exact que l'étendue envisagée est plus petite et devient rigoureuse pour une étendue infiniment petite.



Traçons sur la surface une famille de courbes arbitraires  $u$ ; désignons chacune de ces courbes par un chiffre, et figurons les courbes  $u=1, u=2, \dots$ ; entre deux de ces courbes, on peut imaginer une infinité de courbes représentant tous les nombres compris entre les deux nombres entiers qui désignent les deux courbes envisagées. Les courbes sont assujetties à la condition essentielle de ne pas se couper, de façon qu'il ne passe

(1) Il est euclidien dans l'espace à trois dimensions.

qu'une courbe  $u$  par chaque point. Donc, à chaque point de la surface correspond une coordonnée  $u$  bien déterminée.

Traçons de même une seconde famille de courbes  $v$ , les courbes  $v$  coupant les courbes  $u$ .  
Chaque point a deux coordonnées  $u$  et  $v$ .

Deux points  $P$  et  $P'$  infiniment voisins ont pour coordonnées respectives  $u, v$ ;  $u+du, v+dv$ .  
Les coordonnées de Gauss reviennent, en somme, à la coordination de deux nombres, faite de manière que deux points infiniment voisins soient représentés par des nombres infiniment peu différents.

Dans une étendue infiniment petite autour d'un point  $P$ , on peut confondre la surface avec son plan tangent et les courbes avec leurs tangentes; on est donc ramené, en chaque point, à un système de coordonnées rectilignes, mais obliques; la distance  $ds$  du point  $P$  à un point infiniment voisin  $P'$  est:

$$(583) \quad ds^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2$$

Si l'on s'est donnée les courbes  $u$  et  $v$ , on peut, en chaque point  $P$ , mesurer avec des règles les distances  $S'_1, S'_2, S'_3$  de trois points  $P', P'', P'''$ , extrêmement voisins de  $P$ , correspondant à des valeurs connues des  $S_u$  et  $S_v$ , ( $S'_3$  peut être confondu pratiquement avec  $ds$ , les  $S_u$  et  $S_v$  confondus avec les  $du$  et  $dv$ ). On a donc trois équations permettant de calculer les  $g$  qui sont ainsi déterminés par des mesures ordinaires d'arpentage.

Les  $g$  sont constants en chaque point, conformément à la géométrie euclidienne ordinaire; c'est-à-dire qu'ils sont indépendants des points  $P', P'', P'''$  choisis pour les opérations d'arpentage.

Mais, d'un point  $P$  à un autre, les  $g$  sont variables; ce sont des fonctions de  $u$  et de  $v$ .

C'est seulement dans le cas d'une surface euclidienne qu'on peut trouver des courbes  $u$  et  $v$  telles qu'on ait:

$$(584) \quad ds^2 = du^2 + dv^2 \quad g_{11} = g_{22} = 1 \quad g_{12} = 0$$

c'est ainsi que dans le plan on peut prendre pour  $u$  et  $v$  des droites rectangulaires.

Dans le cas général, les  $g$  étant en chaque point des fonctions de  $u$  et de  $v$ , l'arpentage permet de connaître ces fonctions. Gauss a montré que la géométrie de la surface est entièrement déterminée quand on connaît ces fonctions, et que les lois de cette géométrie s'expriment d'une façon indépendante des coordonnées

Les lignes de plus courte distance se nomment géodésiques. La distance de deux points  $P_1, P_2$  sur une ligne quelconque est

$\int_{P_1}^{P_2} ds$  Cette ligne sera minimum si la longueur des lignes infiniment voisines de la ligne considérée est constante, puisqu'une fonction est constante aux environs d'un minimum (ou d'un maximum); une géodésique rendra donc stationnaire la valeur de l'intégrale  $\int ds$ , ce qu'on écrira :

$$(585) \quad \delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0$$

En géométrie plane, les géodésiques sont des droites. En géométrie sphérique, non euclidienne, si l'on ne considère que les deux dimensions de la surface, ce sont des arcs de grand cercle.

D'une façon générale, si l'on exprime  $\delta \int ds = 0$ , on est conduit à une équation différentielle qui fait intervenir  $u, v, \frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$ .

Quand on change de système de coordonnées l'équation différentielle garde la même forme à condition que les  $g$  aient les nouvelles valeurs correspondant aux nouvelles coordonnées. Ses propriétés des géodésiques se trouvent donc exprimées sous une forme indépendante du système de coordonnées.

On peut aller plus loin et caractériser l'individualité de la surface; il existe, en effet,

un élément qui s'exprime au moyen des  $g$  et de leurs dérivées premières et secondes; cet élément est invariant, c'est-à-dire a une valeur numérique indépendante du système de référence employé. C'est la courbure totale.

$$R = \frac{1}{R_1 R_2}$$

$R_1$  et  $R_2$  étant les rayons de courbure principaux. La courbure totale caractérise la surface en chaque point.

Pour un plan, on a  $R = 0$   
Si  $R = C^{te} < 0$ , on obtient les lois de la géométrie de Lobatchewsky.

Si  $R = C^{te} > 0$ , on a la géométrie de Riemann (sphère).

### 395 - Les grands traits de la théorie d'Einstein

La compréhension de la théorie d'Einstein sera facilitée en indiquant dès le début les idées générales.

On peut étendre la théorie de Gauss à un nombre de dimensions plus grand. Avec deux dimensions de plus, ce qui est le cas de l'Univers, on pourra confondre, en chaque événement, dans un domaine infiniment petit, l'Univers réel avec l'Univers de Minkowski tangent, comme dans la géométrie des surfaces on confond localement la surface avec son plan tangent.

Dans l'Univers euclidien tangent, le principe de relativité restreint s'applique. Cet Univers tangent est celui de l'observateur du boulet de Jules Verne, en chute libre, pour qui la loi galiléenne d'inertie est localement exacte.

L'intervalle d'Univers entre deux événements infiniment voisins est mis sous la forme :

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + 2g_{13} dx_1 dx_3 + \dots + g_{44} dx_4^2.$$

Il n'y a plus ici ni longueurs, ni temps;  
 $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont quatre coordonnées d'Univers.

Les  $g$  sont les grandeurs caractéristiques du champ de gravitation, au sens généralisé, conformément au principe d'équivalence ; ce sont ces grandeurs, les dix potentiels de gravitation, qui doivent intervenir dans l'expression des lois des phénomènes pour conserver à ces lois leur forme quel que soit le système de référence (n° 392).

Dans l'Univers euclidien tangent, l'équation générale des géodésiques est, comme nous l'avons vu dans l'étude de l'Univers de Minkowski

$$(586) \quad \int ds = \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = 0$$

la géodésique étant l'équivalent de la droite en géométrie. L'équation (586) exprime la loi galiléenne d'inertie.

Dans l'Univers réel, une géodésique sera encore représentée par l'équation

$$\int ds = 0$$

qui exprime la loi d'action stationnaire.

Un champ de gravitation, au sens généralisé, comporte un certain arbitraire, puisqu'on peut le modifier à volonté par le choix des coordonnées ; néanmoins il y a un élément bien déterminé, la courbure de l'Univers en chaque événement ; c'est l'extension de la notion de courbure de la théorie des surfaces.

Puisque, dans un champ de gravitation, tous les corps tombent avec la même vitesse, malgré leurs poids différents, il faut porter son attention, non sur la force attractive qui est variable avec le corps, mais sur l'état de mouvement, c'est-à-dire sur la ligne d'Univers qui, étant la même pour tous les corps placés dans les mêmes conditions initiales, doit être une caractéristique de l'Univers lui-même.

Dès lors, il ne faut plus dire : la force de gravitation est une force attractive ; un corps abandonné à lui-même n'est pas libre et ne suit

pas la loi d'inertie, parce qu'il subit une force appliquée. Il faut dire: un corps abandonné à lui-même est toujours libre et se meut suivant la loi d'inertie, la loi d'action stationnaire; mais cette loi n'est plus celle de Galilée parce que la ligne d'Univers, qui est une géodésique de l'Univers non euclidien, est courbe.

Les propriétés et la forme de l'Espace - Temps sont liées à la présence de la matière et plus généralement de l'énergie. De la courbure imposée par la forme de l'Univers à la ligne géodésique du mobile libre résulte une force d'inertie qui nous donne l'illusion d'une force attractive appliquée, parce que, en fait, elle se traduit à nous par une telle apparence.

### 396 - Transformation des coordonnées -

Dans un système localement euclidien (chûte libre), le principe restreint est applicable dans un domaine suffisamment petit.

Soient  $X_1, X_2, X_3$  les coordonnées d'espace par rapport à des axes rectangulaires quelconques,  $X_4$  ( $X_4 = ct$ ) la coordonnée de temps. L'intervalle entre deux événements infiniment voisins:

$$(587) \quad ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$$

est indépendant de l'orientation des axes choisis, et est mesurable dans le système par des règles et des horloges.

$X_1, X_2, X_3, X_4$  sont des coordonnées galiléennes. Introduisons de nouvelles coordonnées  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

$$(588) \quad X_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad X_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \dots \text{etc.}$$

On a:

$$(589) \quad dX_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} dx_4$$

Substituant dans (587),  $ds^2$  prend la forme

d'une fonction quadratique des  $dx_\mu$ .

$$(590) \quad ds^2 = g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + g_{33} dx_3^2 + g_{44} dx_4^2 \\ + 2g_{12} dx_1 dx_2 + 2g_{13} dx_1 dx_3 + 2g_{14} dx_1 dx_4 + 2g_{23} dx_2 dx_3 + 2g_{24} dx_2 dx_4 \\ + 2g_{34} dx_3 dx_4$$

Les  $g$  sont des fonctions des coordonnées, dépendant de la transformation

$$g_{11} = -\left(\frac{\partial t_1}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial t_2}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial t_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial t_4}{\partial x_1}\right)^2 \\ g_{12} = -\frac{\partial t_1}{\partial x_1} \frac{\partial t_1}{\partial x_2} - \frac{\partial t_2}{\partial x_1} \frac{\partial t_2}{\partial x_2} - \frac{\partial t_3}{\partial x_1} \frac{\partial t_3}{\partial x_2} + \frac{\partial t_4}{\partial x_1} \frac{\partial t_4}{\partial x_2}$$

Les  $g$  peuvent être groupés dans le tableau :

$$(592) \quad \begin{cases} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{cases} \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Les seize  $g_{\mu\nu}$  se réduisent à dix, parce que  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . Dans le cas d'un système galiléen, on a :

$$(592)^{\text{bis}} \quad \begin{cases} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{cases}$$

Nous écrivons (590) sous la forme :

$$(591) \quad ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

Voici un exemple : faisons la transformation correspon.

dant à des axes qui, dans le système galiléen, tournent autour de  $Ox_3$  avec la vitesse angulaire  $\omega$ .

$$(593) \quad \begin{cases} X_1 = x_1 \cos \omega x_4 - x_2 \sin \omega x_4 \\ X_2 = x_1 \sin \omega x_4 + x_2 \cos \omega x_4 \\ X_3 = x_3 \\ X_4 = x_4 \end{cases}$$

On a:

$$(594) \quad \begin{cases} dX_1 = \cos \omega x_4 dx_1 - \sin \omega x_4 dx_2 - \omega(x_1 \sin \omega x_4 + x_2 \cos \omega x_4) dx_4 \\ dX_2 = \sin \omega x_4 dx_1 + \cos \omega x_4 dx_2 + \omega(x_1 \cos \omega x_4 - x_2 \sin \omega x_4) dx_4 \\ dX_3 = dx_3 \quad dX_4 = dx_4 \end{cases}$$

Substituant dans (587) :

$$(595) \quad ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + (1 - \omega^2(x_1^2 + x_2^2)) dx_4^2 + 2\omega x_2 dx_1 dx_4 - 2\omega x_1 dx_2 dx_4$$

$$(596) \quad \begin{cases} -1 & 0 & 0 & \omega x_2 \\ 0 & -1 & 0 & -\omega x_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \omega x_2 & -\omega x_1 & 0 & 1 - \omega^2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

Un point matériel, libre décrit dans le système euclidien une droite d'un mouvement uniforme, sa ligne d'Univers est  $\int ds = 0$

Son mouvement,  $\int ds$  n'est évidemment pas changé par le fait qu'on prend de nouvelles coordonnées  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , et l'on a toujours  $\int ds = 0$ . Mais dans le nouveau système, les  $g_{ij}$  ne sont plus des constantes, ce sont des fonctions des nouvelles coordonnées; il en résulte que dans le système des  $x_{\mu}$ , la ligne d'Univers devient courbe; le mouvement du point matériel n'est plus rectiligne et uniforme.

La courbure de la ligne d'Univers doit être attribuée à un champ de force, à un champ de gravitation qui se manifeste dans le nouveau système; ce champ est complètement défini par les  $g_{\mu\nu}$  puisque le mouvement du point matériel libre, indépendant de la nature de ce point matériel, ne dépend que de ces grandeurs. nous voyons que l'apparition d'un champ de gravitation est liée à la variation des  $g_{\mu\nu}$  dans l'espace-temps.

Dans l'exemple que nous avons choisi, nous remarquons que

$$g_{44} = 1 - 2\Omega$$

$$\text{où } \Omega = \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) \text{ est le potentiel}$$

de la force centrifuge. Par analogie, tous les  $g_{\mu\nu}$  sont regardés comme les composantes du potentiel généralisé du champ de gravitation.

Nous avons déjà fait remarquer (n° 395) que, dans une transformation arbitraire, les  $x_\mu$  ne sont plus ni des longueurs ni des temps; ce sont des "coordonnées d'Univers". Ainsi, dans l'exemple très particulier que nous venons de donner,  $x_4$  n'est pas "le temps" du système tournant; il n'y a pas de temps défini pour ce système, comme nous l'avons précédemment montré (n° 393).

On voit que la méthode suivie est calquée sur celle de Gauss, avec deux dimensions de plus. Au lieu des deux familles de courbes  $u$  et  $v$ , on a quatre familles d'espaces tridimensionnels  $x_1 x_2 x_3$ ,  $x_1 x_2 x_4$ ,  $x_1 x_3 x_4$ ,  $x_2 x_3 x_4$ ; en chaque point d'Univers, ou événement, se coupent quatre espaces.

Il ne faudrait pas croire qu'une pareille coordination n'ait pas de sens, les coordonnées ne signifiant plus rien dans le cas général au point de vue des longueurs et du temps. Nous avons en effet insisté sur le fait, qui est la base même de la généralisation du principe de relativité, que les réalités physiques correspondent aux rencontres des lignes d'Univers de points substantiels.

Ces rencontres s'expriment par des valeurs communes des coordonnées, quel que soit le choix de ces coordonnées ; tous les systèmes sont donc également bons pour représenter les lois de la Nature, et la description de l'Univers peut se faire en coordonnées arbitraires, tout comme la géométrie des surfaces ; peu importe que ces coordonnées ne soient ni des longueurs ni des temps. Le principe de relativité généralisé peut s'énoncer tous les systèmes de Gauss (étendus à 4 dimensions) sont équivalents pour formuler les lois de la Nature.

Vent-on cependant conserver les notions d'espace et de temps ? on peut le faire. Dans un système Galiléen, c'est-à-dire où n'existerait pas de champ de gravitation, on peut prendre un corps de référence rigide par rapport auquel on repère les longueurs, et des horloges synchrones qui mesurent le temps. Dans un champ de gravitation, il n'y a plus de corps rigides, ni d'horloges synchrones : on envisagera alors comme corps de référence des corps non rigides auxquels seront liées des horloges, ou si l'on veut un système formé d'un réseau à trois dimensions, avec des horloges aux nœuds du réseau pour donner l'heure dans chaque maille. De pareils corps de référence qui, non seulement sont en mouvement, mais changent de forme dans le champ de gravitation, sont les "mollusques" d'Einstein. Le mollusque est équivalent à un système de Gauss, mais on conserve l'espace et le temps, chaque point du mollusque étant considéré comme point d'espace, chaque point matériel immobile par rapport à lui étant considéré comme au repos, tant que ce mollusque sert de système de référence.

### § 3 - Théorie des tenseurs <sup>(1)</sup>

S'il est légitime d'employer des coordonnées

(1) d'après Einstein. Ann de Phys. 49, 1916 et Eddington Report on the relativity theory of gravitation (1920).

arbitraires, quelle peut être l'utilité de semblables transformations, et quel but poursuivons-nous ?

Nous cherchons comment, conformément au principe de relativité généralisé, la covariance des équations de la physique peut être obtenue ; et si, dans l'Univers réel, les potentiels de gravitation  $g_{\mu\nu}$  sont assujettis à certaines relations, ces relations expriment les lois générales de la gravitation.

Dans cette théorie, l'invariant  $ds$  (élément de ligne d'Univers) joue un rôle fondamental ; on est conduit, de plus, à envisager des êtres mathématiques appelés tenseurs, définis par un certain nombre de fonctions qui sont dites composantes d'un tenseur. Le "calcul différentiel absolu", créé par M.M. Ricci et Levi-Civita (antérieurement à la théorie de la relativité) donne les règles permettant de calculer les composantes d'un tenseur dans un nouveau système de coordonnées lorsqu'on connaît ces composantes pour un premier système et que la transformation qui relie les deux systèmes est donnée. Les tenseurs sont caractérisés par le fait que les équations de transformation de leurs composantes sont linéaires et homogènes : si toutes les composantes sont nulles dans un système, elles disparaissent aussi dans tous les autres systèmes. Une loi naturelle formulée par l'annulation de toutes les composantes d'un tenseur est covariante d'une façon générale ; elle est donc mise sous la forme exigée par le principe de relativité.

En cherchant les lois suivant lesquelles on peut former des tenseurs, nous obtenons les moyens d'exprimer les lois de la physique sous une forme intrinsèque, où tout système de coordonnées a disparu.

## 397 - Quadri-vecteurs contravariants et covariants -

Quadri-vecteurs contravariants . - L'élément de ligne

défini par quatre composantes  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$  est transformé par les relations :

$$dx'_1 = \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_4} dx_4$$

qu'on peut résumer sous la forme abrégée :

$$(597) \quad dx'_\sigma = \sum_{\nu} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu$$

$\sigma$  étant le même indice 1, ou 2, ou 3, ou 4, dans les deux membres, et la sommation étant faite, pour chaque indice  $\sigma$ , en remplaçant successivement  $\nu$  par 1, 2, 3, 4.

Tout quadrivecteur  $A^\nu$  (indice en haut) qui se transforme suivant la même loi, c'est-à-dire

$$(598) \quad A'^\sigma = \sum_{\nu} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu$$

est appelé quadrivecteur contravariant, ou tenseur contravariant de premier ordre.

Il est évident que si  $A^\sigma$  et  $B^\sigma$  sont les composantes de quadrivecteurs contravariants, il en est de même de  $(A^\sigma \pm B^\sigma)$  (même indice  $\sigma$  pour  $A$  et  $B$  dans chaque composante).

Quadrivecteurs covariants. — Quatre grandeurs  $A_\nu$  (indice en bas) sont appelées composantes d'un quadrivecteur, ou tenseur de premier ordre covariant, si,  $B^\nu$  étant un quadrivecteur contravariant arbitraire on a :

$$\sum_{\nu} A_\nu B^\nu = \text{invariant.}$$

La loi de transformation des quadrivecteurs covariants résulte immédiatement de cette définition. Dans le second membre de l'équation :

$$\sum_{\sigma} A'_\sigma B'^\sigma = \sum_{\nu} A_\nu B^\nu$$

remplaçons  $B^\nu$  par l'inversion de l'équation (598),

$$B^\nu = \sum_{\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B'^\sigma \quad \text{nous obtenons :}$$

$$\sum_{\sigma} B'^{\sigma} A'_{\sigma} = \sum_{\sigma} B'^{\sigma} \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu}$$

ou, comme les  $B'_{\sigma}$  sont arbitraires :

$$(599) \quad A'_{\sigma} = \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu}$$

Notation simplifiée. — On voit sur les équations qui précèdent que la sommation doit être faite en donnant successivement les valeurs 1, 2, 3, 4, à celui des indices qui figure deux fois sous le signe  $\Sigma$  et que la sommation ne doit être faite que par rapport à cet indice, qui se nomme l'indice muet.

Cette remarque permet de supprimer le signe  $\Sigma$  sans nuire à la clarté de la notation. Dans la généralisation que nous allons faire, nous n'écrirons plus le signe  $\Sigma$ .

### 398 — Tenseurs de second ordre et tenseurs d'ordre supérieur

Tenseurs contravariants. — Formons les 16 produits  $A^{\mu\nu}$  des composantes  $A^{\mu}$  et  $B^{\nu}$  de deux quadri-vecteurs contravariants :

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu}$$

D'après (598) la loi de transformation de ces produits est la suivante :

$$(600) \quad A'^{\sigma\tau} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu}$$

Les 16 produits ( $A^{\mu\nu}$  dans le premier système,  $A'^{\sigma\tau}$  dans le second système) constituent les composantes d'un tenseur contravariant de second ordre.

D'une façon générale, tout ensemble de 16 fonctions  $A^{\mu\nu}$  qui se transforment suivant la loi

précédente (600) forme un tenseur contrevariant de second ordre. Un tel tenseur n'est pas nécessairement constitué par le produit des composantes de deux quadrivecteurs, mais on démontre que les 16 composantes  $A^{\mu\nu}$  d'un tenseur sont les sommes des  $A^{\mu\nu}$  de quatre paires de quadrivecteurs convenablement choisis.

Il est clair qu'on peut généraliser et définir des tenseurs contrevariants de rang 3, 4, ..., n, un tenseur de rang n ayant  $4^n$  composantes; par exemple, les 64 expressions :

$$A'^{\sigma\tau\rho} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_\rho}{\partial x_\gamma} A^{\alpha\beta\gamma}$$

forment un tenseur contrevariant de rang 3.

Tenseurs covariants. — De même les 16 produits des composantes de deux quadrivecteurs covariants, et d'une façon générale les 16 expressions :

$$(601) \quad A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} A_{\mu\nu}$$

constituent un tenseur covariant de second ordre.

Les 64 expressions :

$$A'_{\sigma\tau\rho} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\tau} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\rho} A_{\alpha\beta\gamma}$$

sont les composantes d'un tenseur covariant d'ordre 3.

Tenseurs mixtes. — L'ensemble de  $4^{n'+n''}$  fonctions qui participent à la fois des deux modes précédents de transformation :

$$(602) \quad A'^{\alpha\beta\gamma\dots}_{\mu\nu\sigma\dots} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\gamma} \dots \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\sigma} \dots A^{abc\dots}_{mnp\dots}$$

n' étant le nombre des indices  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, n''$  le nombre des indices  $\mu, \nu, \sigma, \dots$  est un tenseur mixte d'ordre  $n = n' + n''$ , contrevariant d'ordre  $n'$  et covariant d'ordre  $n''$ .

Tenseurs symétriques. — Un tenseur (contrevariant ou covariant) est dit symétrique, quand les composantes obtenues par permutation de deux indices  $\mu$  et  $\nu$  sont égales :

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \quad \text{ou} \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$$

c'est-à-dire  $A^{12} = A^{21}$ ,  $A^{13} = A^{31}$  etc.....

Cette symétrie est une propriété indépendante du système de référence.

Tenseurs symétriques gauches. — On appelle ainsi des tenseurs dont les composantes sont égales mais de signes opposés quand on permute deux indices :

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}, \quad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} \dots\dots\dots$$

Si le tenseur est de second ordre, les 4 composantes  $A^{\mu\mu}$  sont nulles ; des 12 composantes qui restent, 6 seulement ont des valeurs différentes au signe près.

Un tenseur symétrique gauche d'ordre 3 n'a que 4 composantes différentes (au signe près), et un tenseur symétrique gauche d'ordre 4 n'a plus qu'une composante.

Bien entendu, dans tout ce qui précède, nous avons supposé une multiplicité à 4 dimensions. Dans une multiplicité à 3 dimensions seulement, un tenseur d'ordre  $n$  a  $3^n$  composantes au lieu de  $4^n$ .

### 399 — Multiplication des tenseurs —

Multiplication extérieure. — Si l'on multiplie deux à deux les composantes d'un tenseur d'ordre  $n$  et celles d'un tenseur d'ordre  $n'$ , on obtient  $4^{(n+n')}$  expressions. On déduit aisément des règles de transformation précédentes que ce sont les composantes d'un tenseur (ordre  $n+n'$ ). Par exemple les tenseurs  $T$  suivants sont les produits des tenseurs  $A$  et  $B$ .

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_{\sigma} ; T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta} ; T^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} B^{\delta\delta}$$

Contraction d'un tenseur mixte. — Avec un tenseur mixte, on peut former un tenseur de deux ordres inférieur, en égalant un indice de caractère covariant et un indice de caractère contravariant. Par exemple dans le tenseur mixte  $A^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$  égalons  $\tau$  et  $\sigma$ ; nous obtenons un tenseur  $A^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$ ; nous avons en effet:

$$(603) \quad A^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\rho}} \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\delta}} A^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$$

mais

$$\frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\rho}} = \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x_{\rho}} = 0 \text{ ou } 1 \text{ selon que}$$

$\gamma \neq \rho$  ou que  $\gamma = \rho$ .

$$\text{On a donc } \frac{\partial x_{\gamma}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\rho}} A^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = 0 + 0 + 0 + A^{\delta}_{\alpha\beta\delta}$$

Substituant dans (603):

$$A^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial x'_{\nu}} A^{\delta}_{\alpha\beta\delta}$$

$A^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$  est donc le tenseur d'ordre 2,  $A^{\delta}_{\alpha\beta\delta}$  donne par une première contraction le tenseur  $A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta}$  d'ordre 2,  $A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} = A^{\delta}_{\beta}$ , et ce dernier donne lui-même par contraction le tenseur d'ordre nul  $A = A^{\beta}_{\beta} = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$ . Un tenseur d'ordre nul est un invariant appelé aussi scalaire.

Multiplication intérieure et multiplication mixte. nous pouvons combiner la multiplication extérieure et la contraction.

Considérons, par exemple, le tenseur covariant d'ordre 2  $A_{\mu\nu}$ , et le tenseur contravariant de 1<sup>er</sup> ordre  $B^{\sigma}$ . Par multiplication extérieure nous formons le tenseur mixte:

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\sigma}$$

puis, par contraction, nous formons le quadrivecteur covariant :

$$D_{\mu} = D_{\mu\nu}^{\nu} = A_{\mu\nu} B^{\nu}$$

Nous appellerons ce quadrivecteur : produit intérieur des tenseurs  $A_{\mu\nu}$  et  $B^{\sigma}$ .

De même, soit  $D_{\mu\nu}^{\sigma\tau} = A_{\mu\nu} B^{\sigma\tau}$ . Par contraction,

nous formons

$$D_{\mu}^{\tau} = D_{\mu\nu}^{\nu\tau} = A_{\mu\nu} B^{\nu\tau}$$

c'est une opération mixte, car c'est une multiplication extérieure vis à vis de  $\mu$  et  $\tau$ , intérieure vis à vis de  $\nu$  et  $\sigma$ .

Nous sommes conduits à un théorème très utile pour reconnaître le caractère tensoriel.

$A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$  est un invariant lorsque  $A_{\mu\nu}$  et  $B^{\sigma\tau}$  sont des tenseurs ; nous pouvons dire aussi : lorsque  $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$  est un invariant, pour un choix arbitraire d'un tenseur  $B^{\mu\nu}$ ,  $A_{\mu\nu}$  possède le caractère tensoriel.

En effet, on a, par une substitution arbitraire :

$$A'_{\sigma\tau} B'^{\sigma\tau} = A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

Par inversion de (600), on obtient :

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} B'^{\sigma\tau}$$

transportant dans l'équation précédente :

$$(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} A_{\mu\nu}) B'^{\sigma\tau} = 0$$

Cette égalité devant avoir lieu quel que soit le choix de  $B'^{\sigma\tau}$ ,  $A_{\mu\nu}$  se transforme suivant la règle (601), ce qui démontre la proposition.

Ce théorème s'étend à des tenseurs d'ordres quelconques et de natures quelconques.

Soient  $B^{\mu}$  et  $C^{\nu}$  des quadrivecteurs arbitraires ; si le produit intérieur  $A_{\mu\nu} B^{\mu} C^{\nu}$  est un

invariant,  $A_{\mu\nu}$  est un tenseur covariant. Ce résultat est encore exact si, pour un quadri-vecteur quelconque  $B^\mu$ , le produit  $A_{\mu\nu} B^\mu B^\nu$  est un invariant et si  $A_{\mu\nu}$  est symétrique (c'est-à-dire  $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ ). En effet  $A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}$  a la caractéristique tensoriel, d'où il résulte, à cause de la symétrie, que  $A_{\mu\nu}$  est un tenseur. Enfin si  $A_{\mu\nu} B^\mu$  forme un tenseur de 1<sup>er</sup> ordre pour un choix arbitraire du quadri-vecteur  $B^\mu$ , on peut en conclure que  $A_{\mu\nu}$  est un tenseur de second ordre.

Ces résultats se généralisent et s'étendent à des tenseurs covariants contravariants ou mixtes d'ordre quelconque.

Ces notions succinctes suffisent pour comprendre ce qui suit.

#### 400 - Les tenseurs fondamentaux -

Le tenseur covariant fondamental. - Dans l'expression de l'invariant  $ds$

$$(604) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$dx^\mu$  joue le rôle d'un quadri-vecteur contravariant arbitraire. Comme  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , il résulte des considérations du numéro précédent que  $g_{\mu\nu}$  est un tenseur covariant symétrique de second ordre.

C'est le tenseur fondamental.

Le tenseur contravariant fondamental. - Si l'on forme le déterminant des  $g_{\mu\nu}$

$$(605) \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

puis le mineur de chaque  $g_{\mu\nu}$ , et si l'on divise ce dernier par le déterminant  $g$ , on obtient des

grandeurs  $g^{\mu\nu}$  qui constituent un tenseur contravariant, ainsi que nous allons le montrer.

D'après une propriété connue des déterminants, on a :

$$(606) \quad g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = g_{\mu}^{\nu} \quad \text{avec } g_{\mu}^{\nu} = 1 \text{ ou } 0, \text{ suivant que } \mu = \nu \text{ ou que } \mu \neq \nu.$$

Au lieu de l'expression (604) de  $ds^2$ , nous pouvons donc écrire :

$$ds^2 = g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} dx_{\mu} dx_{\nu} = g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} g^{\sigma\tau} dx_{\mu} dx_{\nu}$$

D'après les règles de multiplication, les grandeurs

$$d\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma} dx_{\mu}$$

forment un quadri-vecteur covariant, et puisque les  $dx_{\mu}$  peuvent être choisis arbitrairement, ce quadri-vecteur est arbitraire ; nous avons donc :

$$ds^2 = g^{\sigma\tau} d\xi_{\sigma} d\xi_{\tau}$$

Puisque  $ds^2$  est un invariant, que  $d\xi_{\sigma}$  est arbitraire, et que  $g^{\sigma\tau}$  est symétrique vis à vis des indices  $\sigma$  et  $\tau$ , il résulte des considérations du numéro précédent que  $g^{\sigma\tau}$  est un tenseur contravariant.

De (606) résulte aussi que  $g_{\mu}^{\nu}$  est un tenseur. C'est le tenseur mixte fondamental.

D'après la multiplication des déterminants on a :

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}| |g^{\alpha\nu}|$$

comme on a aussi

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu}^{\nu}| = 1$$

on voit que :

$$(607) \quad |g_{\mu\nu}| |g^{\mu\nu}| = 1$$

## 401 - Expression invariante de l'hypervolume. -

Cherchons d'abord la loi de transformation du déterminant (605)  $g = |g_{\mu\nu}|$ .  
D'après (601), on a :

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right|$$

ou

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \left| \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} \right| |g_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right|^2 g$$

$$(608) \quad \sqrt{-g'} = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \sqrt{-g} \quad (\text{nous}$$

prenons  $\sqrt{-g}$  parce que  $g$  est négatif).  
D'autre part, la loi de transformation de :  
 $d\omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$   
est, d'après un théorème connu de Jacobi

$$(609) \quad d\omega' = \left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| d\omega$$

multipliant (608) et (609), il vient :

$$(610) \quad \sqrt{-g'} d\omega' = \sqrt{-g} d\omega$$

Dans l'Univers euclidien tangent, l'élément d'hypervolume est :

$$d\omega_0 = dX_1 dX_2 dX_3 dX_4$$

( $X_1, X_2, X_3$  coordonnées rectangulaires d'espace ;  $X_4 = ct$ )  
On a donc,  $g$  étant égal à  $-1$  pour l'Univers euclidien

$$(611) \quad d\omega_0 = \sqrt{-g} d\omega = \sqrt{-g'} d\omega' = \text{invariant.}$$

## 402 - Différentiation covariante. -

Formules auxiliaires. - Dans la suite nous ferons usage des symboles de Christoffel :

$$(612) \quad \left[ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \lambda \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \right) \text{ sans sommation}$$

$$(613) \quad \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} = g^{\lambda\alpha} \left[ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \alpha \end{matrix} \right] \text{ sommation par rapport à } \alpha$$

Le tenseur des  $g_{\mu\nu}$  étant un tenseur covariant, on a :

$$(614) \quad g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g_{\alpha\beta}$$

et par dérivation :

$$(615) \quad \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'_\lambda} = g_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu \partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} \right] + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}$$

Dans le second terme du crochet les indices  $\alpha$  et  $\beta$  ont été interchangés, ce qui est légitime puisque ce sont des indices muets.

Dans le dernier terme nous avons écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\gamma}$$

Nous avons, de même :

$$(616) \quad \frac{\partial g'_{\nu\lambda}}{\partial x'_\mu} = g_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\nu \partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \right] + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\mu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}$$

$$(617) \quad \frac{\partial g'_{\mu\lambda}}{\partial x'_\nu} = g_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\lambda \partial x'_\nu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\mu} \right] + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}$$

nous avons interchangé dans les derniers termes les indices muets  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Ajoutons ces deux équations (616) et (617), et retranchons (615)

nous obtenons :

$$(618) \quad \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \lambda \end{bmatrix}' = g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\lambda} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

et, en multipliant les deux membres par  $g^{\lambda\rho} \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho}$

$$(619) \quad \begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ \rho \end{Bmatrix} \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} = \left( g^{\lambda\rho} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} \right) g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} + \left( g^{\lambda\rho} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial x'_\rho} \right) \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= g^{\beta\varepsilon} g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g^{\delta\varepsilon} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon \end{Bmatrix}$$

Dérivée covariante. — Soit  $A_\mu$  un quadrivecteur covariant ; on a :

$$A'_\mu = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} A_\sigma$$

et en différentiant :

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\tau} + \frac{\partial^2 x_\sigma}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu} A_\sigma$$

Remplaçant  $\frac{\partial^2 x_\sigma}{\partial x'_\mu \partial x'_\nu}$  par sa valeur tirée de (619), nous avons :

$$(620) \quad \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ \rho \end{Bmatrix} A'_\rho = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\tau} - \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{Bmatrix} A_\sigma$$

Or  $A_\sigma \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\rho} = A'_\rho$ , et nous pouvons dans le dernier terme remplacer les indices muets  $\alpha, \beta, \sigma$  par  $\sigma, \tau, \rho$ . En posant alors :

$$(621) \quad A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x'_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ \rho \end{Bmatrix} A_\rho$$

l'équation (620) s'écrit :

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} A_{\sigma\tau}$$

$A'_{\mu\nu}$  défini par (621) est donc un tenseur. C'est la dérivée covariante du quadri-vecteur  $A_\mu$  ; on l'appelle aussi extension du vecteur  $A_\mu$ .

On peut généraliser l'opération et former la dérivée covariante ou extension d'un tenseur covariant d'ordre plus élevé. Nous nous bornerons au cas d'un tenseur d'ordre 2.

Tout tenseur de second ordre peut être envisagé comme la somme de tenseurs du type  $A_\lambda B_\mu$ . Il sera donc suffisant de donner l'expression de l'extension pour le tenseur  $A_\lambda B_\mu$ . D'après (621), les expressions :

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda & \nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A_\varepsilon ; \quad \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} B_\varepsilon$$

ont le caractère tensoriel. Multipliant la première par  $B_\mu$ , la seconde par  $A_\lambda$ , nous obtenons des tenseurs d'ordre 3, dont l'addition donne le tenseur :

$$(622) \quad A_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda & \nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A_{\varepsilon\mu} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} A_{\lambda\varepsilon}$$

En posant  $A_{\lambda\mu} = A_\lambda B_\mu$ . Comme le second membre est linéaire et homogène relativement aux  $A_\lambda$  et à leurs dérivées premières, cette formation reste la même pour une somme de tenseurs tels que  $A_\lambda B_\mu$ , c'est-à-dire pour un tenseur de second rang quelconque.  $A_{\lambda\mu\nu}$  est la dérivée covariante ou extension de  $A_{\lambda\mu}$ .

### 403 — Le tenseur de Riemann-Christoffel.

Nous nous proposons maintenant de chercher les tenseurs qu'on peut obtenir par différentiation à partir du tenseur fondamental des  $g_{\mu\nu}$  seul.

La solution paraît évidente, il semble qu'il suffise de former l'extension du tenseur  $g_{\mu\nu}$  ; mais on

constate, en remplaçant dans (622)  $A_{\mu\nu}$  par  $g_{\mu\nu}$  que le tenseur ainsi obtenu est identiquement nul.

On arrive cependant au but de la façon suivante :  
Formons la dérivée seconde covariante d'un vecteur arbitraire  $A_\mu$  ; d'après les formules (622) et (621) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu\sigma} &= \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left[ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} A_\rho \right] - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left[ \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \varepsilon\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} A_\rho \right] - \left\{ \begin{matrix} \nu\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left[ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\varepsilon} - \left\{ \begin{matrix} \mu\varepsilon \\ \rho \end{matrix} \right\} A_\rho \right] \\ &= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \nu\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\varepsilon} \\ &\quad + \left\{ \begin{matrix} \nu\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mu\varepsilon \\ \rho \end{matrix} \right\} A_\rho + \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} A_\rho - A_\rho \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

Formons le tenseur  $A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}$  ; dans cette différence, les termes symétriques en  $\sigma$  et  $\nu$  disparaissent ; dans le second terme nous pouvons remplacer  $\rho$  par  $\varepsilon$  et il vient finalement :

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} A_\rho$$

$$(623) \quad R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\}$$

Puisque  $A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}$  est un tenseur, et que  $A_\rho$  est un quadrivecteur covariant arbitraire, il résulte des règles précédemment données que  $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$  est un tenseur.

C'est le tenseur de Riemann-Christoffel (!)

Par contraction nous obtenons le tenseur covariant d'ordre 2 :  $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\rho} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu\rho \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\varepsilon \\ \rho \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu\rho \\ \rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \varepsilon \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon\rho \\ \rho \end{matrix} \right\}$$

(1) Désigné dans certains ouvrages par  $B_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ . Le tenseur contracté est souvent appelé  $G_{\mu\nu}$ .

Les deux derniers termes se simplifient; en effet:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu & \rho \\ \rho & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\varepsilon} \left( \frac{\partial g_{\mu\varepsilon}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial g_{\rho\varepsilon}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x_\varepsilon} \right) = \frac{1}{2} g^{\rho\varepsilon} \frac{\partial g_{\rho\varepsilon}}{\partial x_\mu}$$

les autres termes se détruisant dans la sommation.

D'autre part,  $g^{\rho\varepsilon} g$  est le mineur de l'élément  $g_{\rho\varepsilon}$  dans le déterminant  $g$ , on a donc:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu & \rho \\ \rho & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial x_\mu}$$

Le tenseur contracté s'écrit donc:

$$(624) \quad R_{\mu\nu} = - \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \rho & \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu & \rho \\ \rho & \varepsilon \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu & \varepsilon \\ \rho & \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \varepsilon & \end{matrix} \right\} \frac{\partial \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial x_\varepsilon}$$

Si nous choisissons les coordonnées de manière que  $\sqrt{-g} = 1$ ,  $R_{\mu\nu}$  se simplifie beaucoup, par disparition des deux derniers termes.

Le tenseur de Riemann - Christoffel et surtout le tenseur contracté jouent un rôle capital dans la théorie de la gravitation.

## § 4 - Loi de la gravitation dans le vide -

404 - Loi générale de la gravitation dans une région vide de matière et d'énergie électro-magnétique. -

Un champ de gravitation (au sens généralisé: champ de force) peut être modifié par un changement du système de coordonnées, mais il n'en est pas moins vrai que la matière modifie l'espace-temps d'une manière absolue; en d'autres termes, le champ de force est relatif, mais la courbure imposée à l'univers par la matière est absolue.

Nous devons alors nous demander si la Nature peut, dans les régions vides de matière, nous offrir, par une distribution convenable de la matière environnante, tous les genres théoriquement possibles d'Espace-Temps, c'est-à-dire si les dix potentiels  $g_{\mu\nu}$  peuvent réellement, dans la Nature, prendre des valeurs complètement arbitraires.

Evidemment non. L'Univers a une structure déterminée par la matière présente; en termes plus précis, sa structure dépend des lignes d'Univers de toutes les portions de matière et d'énergie existantes, puisque nous savons que celles-ci produisent un champ de gravitation.

Dans un système de coordonnées, les valeurs des  $g_{\mu\nu}$  dépendent, non seulement du choix des coordonnées, mais aussi de la forme absolue de l'Espace-Temps. Si nous changeons de coordonnées, les nouvelles valeurs des  $g_{\mu\nu}$  doivent être compatibles avec la même structure de l'Univers. Par conséquent, bien que le choix du système de coordonnées soit arbitraire, les  $g_{\mu\nu}$  doivent être assujettis à certaines liaisons, imposées par la structure de l'Espace-Temps :

les équations qui expriment ces liaisons doivent être, comme toutes les lois physiques, des équations intrinsèques indépendantes de tout choix particulier de coordonnées, des relations tensorielles.

Ces relations expriment la loi de la gravitation.

Pour solutionner ce problème, Einstein n'a eu que les deux indications suivantes :

- 1°/ Ses formules qui expriment les conditions générales auxquelles doivent satisfaire les dix potentiels  $g_{\mu\nu}$  du champ de gravitation sont des relations tensorielles.
- 2°/ A distance infinie de toute matière, l'Espace-Temps est euclidien.

Il est remarquable que ces conditions aient suffi pour déterminer la loi générale de la gravitation.

Lorsque l'Espace-Temps est euclidien, on peut choisir les coordonnées de manière que les  $g_{\mu\nu}$  soient constants : c'est le cas de la relativité restreinte.

Pour des valeurs constantes des  $g_{\mu\nu}$  tous les symboles de Christoffel  $\Gamma$  disparaissent, et toutes les composantes du tenseur de Riemann - Christoffel s'annulent; mais alors ces composantes s'annulent aussi dans tout autre système, (propriété fondamentale du caractère tensoriel).

Ses équations

$$(625) \quad R_{\mu\nu\rho}^{\rho} = 0$$

au nombre de 256 (tenseur de rang 4), mais qui se réduisent à 20 équations indépendantes, expriment que l'Espace - Temps est euclidien; cette condition est nécessaire; on montrerait aussi qu'elle est suffisante.

La loi  $R_{\mu\nu\rho}^{\rho} = 0$  n'est évidemment pas la loi de gravitation cherchée, car elle est beaucoup trop restreinte. Si c'était une loi naturelle, il ne pourrait y avoir qu'un Espace - Temps euclidien dans son ensemble, et il n'y aurait pas de champ de gravitation permanent: la matière ne produirait pas un champ de gravitation.

C'est seulement un cas particulier, celui où toute masse serait rejetée à l'infini.

Il faut donc chercher une relation tensorielle plus générale, comportant la précédente comme cas particulier. Il faut évidemment faire intervenir le tenseur de Riemann - Christoffel contracté.

On peut écrire:

$$\left. \begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 0 \\ R_{\mu}^{\alpha} &= g^{\alpha\nu} R_{\mu\nu} = 0 \\ R^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\nu} g^{\nu\beta} R_{\mu\nu} = 0 \\ R_{\mu\nu} + \lambda g_{\nu}^{\rho} (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ même solution } R_{\mu\nu} = 0$$

scalaire

Quant à l'annulation du scalaire  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0$ , ce serait une condition trop générale. On est donc conduit à la loi:

$$(626) \quad R_{uv} = 0$$

Mais cette loi est-elle la seule possible ?  
 Oui, si l'on admet, ce qui a d'ailleurs été le point de départ, que l'Univers est infini, qu'il peut y avoir des régions à l'infini de toute masse, et que par suite  $R_{uv} = 0$  doit être une solution particulière.

Mais si l'Univers est courbe dans son ensemble et fermé, il n'est plus nécessaire de conserver  $R_{uv} = 0$  comme cas particulier et la covariance est respectée si l'on pose :

$$(627) \quad R_{uv} - \lambda g_{uv} = 0$$

$\lambda$  étant une constante, d'ailleurs inconnue. C'est la seule expression générale d'un tenseur de second ordre, fonction seulement des  $g_{uv}$  et de leurs dérivées, ne contenant pas de dérivées d'ordre supérieur à 2, et linéaire par rapport aux dérivées secondes.

La loi  $R_{uv} = 0$  a d'abord été adoptée par Einstein. Puis Einstein a été conduit plus tard à introduire le terme correctif  $-\lambda g_{uv}$  parce qu'il y a, ainsi que nous le verrons, des difficultés insurmontables dans la conception d'un espace infini. Cependant, comme l'Univers est immense, que loin de toute matière le champ permanent de gravitation est pratiquement nul, la constante  $\lambda$  est certainement très petite et le terme additionnel  $-\lambda g_{uv}$  peut être négligé dans les applications aux mouvements des astres.

Pour être acceptée, la loi d'Einstein doit recevoir la confirmation de l'expérience. Elle doit comporter en première approximation la loi de Newton ; elle doit, de plus, si on la combine aux équations du mouvement (que nous allons établir) rendre compte d'un écart connu à la loi de Newton, le déplacement du périhélie de la planète Mercure.

Nous verrons que la loi d'Einstein satis

fait pleinement à ces conditions.

Le tenseur  $R_{uv}$  étant symétrique, l'annulation des composantes, donne dix équations; six seulement de ces équations sont indépendantes. C'était à prévoir, puisque dix équations indépendantes, auxquelles on joindrait les conditions aux limites, détermineraient tous, les  $g_{uv}$  dans l'expression de  $ds^2$ , et par conséquent spécifieraient non seulement la géométrie particulière du champ de gravitation, mais encore le système de coordonnées d'Univers.

Le système de coordonnées doit rester arbitraire; il est quatre fois indéterminé, ce qui correspond à quatre relations identiques entre les  $g_{uv}$ .

La loi de gravitation, dans le vide, comporte donc six conditions. C'est une restriction considérable imposée à toutes les géométries possibles de l'Univers.

Le principe d'équivalence.<sup>(1)</sup> — La différence entre un espace-temps où règne un champ de gravitation permanent et un espace-temps euclidien est que dans le premier  $R_{uv} = 0$ , alors que dans le second  $R_{uv} = 0$ . Or ces deux groupes d'équations déterminent les dérivées secondes des  $g_{uv}$  en fonction des  $g_{uv}$  et de leurs dérivées premières; nous pouvons donc toujours trouver, en tout point-événement du champ, de gravitation, un Univers euclidien caractérisé par des fonctions  $g_{uv}$  ayant, en ce point, des valeurs respectivement égales aux  $g_{uv}$  de l'Univers réel, et telles que les dérivées premières  $\frac{\partial g_{uv}}{\partial x_s}$  soient aussi, au même point, respectivement égales aux dérivées premières des  $g_{uv}$  de l'Univers réel. C'est seulement à partir des dérivées secondes que les deux Univers différencieront.

C'est l'Univers euclidien ainsi défini qui est l'Univers tangent à l'Univers réel au

---

(1) D'après une note de M. Jacques Rossignol.

point-événement considéré. Ces deux Univers admettent un contact du 1<sup>er</sup> ordre en ce point. Le principe d'équivalence n'est autre chose que l'affirmation de l'existence d'un Univers tangent en tout point de l'Univers réel. De ce principe il résulte que toutes les lois relatives à des phénomènes se passant dans un Univers euclidien et qui ne dépendront que des  $g_{\mu\nu}$  et de leurs dérivées premières seront également valables dans un champ de gravitation permanent. À ce point de vue, un champ de force "géométrique", c'est-à-dire un champ où la force n'est que la manifestation de l'emploi d'un système de référence non galiléen, est entièrement équivalent à un champ de gravitation permanent, c'est-à-dire à un champ dont la force ne peut disparaître par un choix convenable du système de coordonnées. et qui est, pour ainsi dire, la marque de l'existence de matière ou d'énergie.

Par contre, pour les lois faisant intervenir les dérivées secondes, il n'y a plus nécessairement équivalence entre un champ de force géométrique dans un Univers euclidien et un champ de gravitation permanent.

On voit que le principe d'équivalence est fondé sur le choix des lois de la gravitation. C'est un principe et non un axiome.

#### 405 - Equations des géodésiques (trajectoires des mobiles libres). Expression des composantes du champ de gravitation -

Puisque l'élément de ligne  $ds$  est une grandeur indépendante du système de coordonnées, l'intervalle entre deux points (événements)  $P_1, P_2$  de l'Espace-Temps, sur la ligne pour laquelle  $\int_{P_1}^{P_2} ds$  est stationnaire, a aussi une signification indépendante du système de référence.

L'équation de cette ligne est :

$$\int ds = 0$$

dans tout système de coordonnées.

On pourrait exprimer cette condition d'action stationnaire par le calcul des variations, mais les formules de dérivation nous conduiront immédiatement au résultat :

Soit  $A^\sigma$  le vecteur contrevariant  $\frac{dx_\sigma}{ds}$ . La dérivée covariante s'obtient par un calcul semblable à celui donné précédemment pour un vecteur covariant et l'on a :

$$A^\sigma_{;\alpha} = \frac{D}{Dx_\alpha} \left( \frac{dx_\sigma}{ds} \right) + \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\beta}{ds}$$

Multiplions par  $\frac{dx_\alpha}{ds}$ , nous obtenons :

$$A^\alpha A^\sigma_{;\alpha} = \frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}$$

Puisque le premier membre est un tenseur, il en est de même du second membre, et si ce tenseur s'annule dans un système de coordonnées, il s'annule dans tous les autres systèmes. Or, en coordonnées galiléennes  $\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} = 0$ , et  $\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = 0$  donne les équations de la géodésique, qui est une droite d'univers; par conséquent :

$$(628) \quad \boxed{\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ équations pour } \sigma = 1, 2, 3, 4 \\ \text{Dans chaque équation, somma-} \\ \text{tion par rapport à } \alpha \text{ et somma-} \\ \text{tion par rapport à } \beta \end{array} \right.$$

sont les équations générales d'une géodésique c'est-à-dire les équations de la trajectoire du point matériel libre dans un système quelconque de coordonnées.

Ces équations restent exactes dans un champ de gravitation permanent, d'après la remarque du n° 404, puisqu'elles ne font intervenir que les dérivées premières

des  $g_{uv}$ . Ses équations (628) sont donc les équations fondamentales du mouvement du point libre; elles sont covariantes pour toute transformation; le champ de gravitation, y figure par les  $g_{uv}$ .  
Sa trajectoire d'un point matériel libre dans un champ de gravitation ne dépend pas de la masse de ce point; elle ne dépend que des  $g$  et de leurs variations, c'est-à-dire de la structure de l'Espace-Temps.

Ses  $\{^{\alpha}_{\sigma}\}$ , qui disparaissent dans le cas du mouvement de translation uniforme, déterminent l'écart au mouvement rectiligne et uniforme. Einstein les a appelées "composantes du champ".

#### 406 - Extension des équations de Lagrange -

Choisissons les coordonnées de manière que  $\sqrt{-g} = 1$ . Le tenseur de Riemann-Christoffel contracté s'écrit :

$$(629) \quad R_{uv} \equiv - \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} uv \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} u\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} v\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$$

Nous pouvons considérer  $g^{uv}$  comme une coordonnée généralisée  $q$  et  $x_1, x_2, x_3, x_4$  comme quatre variables indépendantes qui vont jouer le rôle que joue le temps dans les équations de Lagrange en mécanique ordinaire. La "vitesse généralisée" sera

$$\dot{q} = \dot{g}^{uv} = \frac{\partial g^{uv}}{\partial x_{\alpha}}$$

Nous allons montrer que  $R_{uv}$  s'écrit sous une forme semblable à celle des équations de Lagrange:

$$(630) \quad R_{uv} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{g}^{uv}} \right) - \frac{\partial L}{\partial g^{uv}}$$

en posant:

$$(631) \quad L = g^{mn} \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$$

Calculons en effet la variation de  $L$ . Nous avons:

$$(632) \quad \delta L = \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \delta g^{mn} + 2g^{mn} \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \delta \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$$

puisque dans le dernier terme,  $m$  et  $n$  sont des indices muets, ou encore:

$$(633) \quad \delta L = - \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \delta g^{mn} + 2 \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \delta \left( g^{mn} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \right)$$

Nous avons d'ailleurs:

$$(634) \quad \delta \left( g^{mn} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \right) = \frac{1}{2} \delta \left[ g^{mn} g^{\beta\lambda} \left( \frac{\partial g_{n\lambda}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_n} - \frac{\partial g_{\alpha n}}{\partial x_\lambda} \right) \right]$$

expression qui se simplifie beaucoup: d'abord les deux derniers termes de la parenthèse disparaissent après multiplication par  $\left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\}$ , car  $m$  et  $\beta$ ,  $n$  et  $\lambda$  sont simultanément interchangeable. D'autre part, on a:

$$(635) \quad g^{mn} g^{\beta\lambda} \frac{\partial g_{n\lambda}}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial g^{m\beta}}{\partial x_\alpha}$$

En effet  $g^{\beta\lambda} g_{n\lambda} = 0$  ou  $1$

$$g^{\beta\lambda} dg_{n\lambda} + g_{n\lambda} dg^{\beta\lambda} = 0$$

multipliant par  $g^{mn}$  on obtient:

$$g^{mn} g^{\beta\lambda} dg_{n\lambda} = - dg^{m\beta} \text{ d'où l'équation (635)}$$

On a donc finalement:

$$(636) \quad \delta L = - \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \delta g^{mn} - \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \delta g^{m\beta}$$

et par suite:

$$(637) \quad \frac{\partial L}{\partial g^{m\beta}} = - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\}$$

$$(638) \quad \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = - \left\{ \begin{matrix} \mu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$$

ce qui démontre que  $R_{\mu\nu}$  s'écrit bien sous la forme (630).  
 La loi de la gravitation dans le vide s'exprimant par  $R_{\mu\nu} = 0$  (en supposant nul le terme complémentaire  $\lambda g_{\mu\nu}$  de la formule (627)) les équations

$$(639) \quad R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (q = g^{\mu\nu}, \dot{q} = \dot{g}_a^{\mu\nu})$$

sont, comme en dynamique classique, équivalentes à

$$(640) \quad \int L d\omega \text{ stationnaire} \quad (d\omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4)$$

pour les variations des  $g^{\mu\nu}$  et des  $\dot{g}^{\mu\nu}$ . Il faut noter que cette équation est soumise à la restriction  $\sqrt{-g} = 1$ .

#### 40% - Énergie du champ de gravitation -

Prenons encore des coordonnées telles que  $\sqrt{-g} = 1$  et multiplions (630) par  $g_\beta^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta}$ , nous avons:

$$(641) \quad g_\beta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g_\beta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_a^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta}$$

or on peut écrire:

$$(642) \quad \frac{\partial L}{\partial x_\beta} = \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_a^{\mu\nu}} \frac{\partial \dot{g}_a^{\mu\nu}}{\partial x_\beta}$$

et

$$(643) \quad \frac{\partial \dot{g}_a^{\mu\nu}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta \partial x_a} = \frac{\partial g_\beta^{\mu\nu}}{\partial x_a}$$

On obtient donc, en ajoutant (641) et (642)

$$(644) \quad g_\beta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_a} \left( g_\beta^{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_a^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\beta} = -2\chi \frac{\partial t_\beta^a}{\partial x_a}$$

en posant:

$$(645) \quad -2\chi t_\beta^a = g_\beta^{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_a^{\mu\nu}} - g_\beta^a L \quad g_\beta^a = g_{\mu\beta} g^{\mu a}$$

$\kappa$  étant une constante universelle que nous déterminerons plus tard en fonction de la constante newtonienne. La quantité  $t_{\beta}^{\alpha}$  n'est pas un tenseur, mais elle est l'analogue de l'expression hamiltonienne de l'énergie  $\sum \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$ . Dans l'espace vide,  $R_{uv} = 0$ ; les équations (644) deviennent:

$$(646) \quad \frac{\partial t_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0$$

elles expriment la conservation de  $t_{\beta}^{\alpha}$ . En effet, choisissons une des coordonnées  $x_{\alpha}$  par exemple, comme variable indépendante et intégrons (646) dans un volume tridimensionnel déterminé par les autres coordonnées, nous obtenons:

$$(647) \quad \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \iiint t_{\beta}^{\alpha} dx_1 dx_2 dx_3 = - \iiint \left( \frac{\partial t_{\beta}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{\beta}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{\beta}^3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ = \iint (t_{\beta}^1 a_1 + t_{\beta}^2 a_2 + t_{\beta}^3 a_3) dS$$

$a_1, a_2, a_3$  étant les cosinus directeurs de la normale (intérieure) à l'élément  $dS$  de la surface qui limite le domaine d'intégration (au sens de la géométrie euclidienne). Si  $t_{\beta}^{\alpha}$  s'annule sur la surface, l'intégrale de volume de  $t_{\beta}^{\alpha}$  reste constante lorsque  $x_{\alpha}$  varie (constante dans le temps si  $x_{\alpha}$  est une coordonnée temps).<sup>(1)</sup>

Les grandeurs  $t_{\beta}^{\alpha}$  ont été appelées par Einstein "composantes d'énergie" du champ de gravitation.

Nous pouvons maintenant donner à la loi de gravitation  $R_{uv} = 0$  une forme qui sera utile dans la suite. Multiplions par  $\gamma^{\nu\alpha}$  les termes de cette

(1) Ce résultat est purement théorique, car dans un domaine tel que  $t_{\beta}^{\alpha}$  s'annule sur la surface, il y a nécessairement de la matière, et les équations  $\frac{\partial t_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0$  ne sont pas valables dans la matière. Nous verrons plus loin que la loi réelle de conservation est  $\frac{\partial (t_{\beta}^{\alpha} + T_{\beta}^{\alpha})}{\partial x_{\alpha}} = 0$ ,  $T_{\beta}^{\alpha}$  étant le tenseur impulsion-énergie de la matière.

équation  
(648) 
$$g^{r\sigma} \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} = g^{r\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$$

Le premier membre s'écrit :

$$g^{r\sigma} \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_a} \left( g^{r\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right) - \frac{\partial g^{r\sigma}}{\partial x_a} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\}$$

ou encore :

$$(649) \quad \frac{\partial}{\partial x_a} \left( g^{r\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right) + g^{r\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + g^{\sigma\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta\alpha \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\}$$

parce qu'on a :

$$\frac{\partial g^{r\sigma}}{\partial x_a} = - \left( g^{r\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta\alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} + g^{\sigma\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta\alpha \\ r \end{matrix} \right\} \right)$$

En changeant la désignation des indices, (649) s'écrit :

$$(650) \quad \frac{\partial}{\partial x_a} \left( g^{\sigma\beta} \left\{ \begin{matrix} \mu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right) + g^{mn} \left\{ \begin{matrix} m\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n\mu \\ \beta \end{matrix} \right\} + g^{r\sigma} \left\{ \begin{matrix} \mu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\}$$

Cette expression est le 1<sup>er</sup> membre de l'équation (648), son troisième terme annule le second membre de l'équation ; son deuxième terme est égal à

$$- \chi \left( t_{\mu}^{\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\sigma} t \right) \quad (t = t_a^{\alpha})$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier d'après (645), (635), (631).

On obtient donc finalement la loi de la gravitation dans le vide sous la forme :

$$(651) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( g^{\sigma\beta} \left\{ \begin{matrix} \mu\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right) = \chi \left( t_{\mu}^{\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\sigma} t \right) \\ \sqrt{-g} = 1 \end{array} \right.$$

qui a l'avantage d'expliciter les composantes de l'énergie de gravitation.

## § 5 - Loi générale de la gravitation -

Il reste à résoudre un problème fondamental. Ses équations  $R_{uv} = 0$  expriment seulement la loi de la gravitation dans une région vide de matière ou d'énergie électromagnétique.

Ces équations remplacent l'équation de Laplace :

$$(652) \quad \Delta \Omega = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$\Omega$  étant le potentiel newtonien.

Il s'agit maintenant de déterminer la loi qui doit remplacer la loi d'attraction proportionnelle à la masse et en raison inverse du carré de la distance, loi traduite analytiquement par l'équation de Poisson :

$$(653) \quad \Delta \Omega = 4 \pi G \rho$$

$G$  étant la constante newtonienne de la gravitation,  $\rho$  la densité de la matière au point considéré.

La relativité restreinte a montré que la masse s'identifie avec l'énergie et que l'énergie est la composante de temps de l'impulsion d'Univers.

Or l'impulsion trouve son expression la plus complète dans un tenseur, qui précisément se réduit à la densité dans le cas de la matière au repos dans un Univers euclidien. Puisque toutes les lois doivent, d'après le principe de relativité généralisé, s'exprimer sous une forme tensorielle, il est à peu près évident que le tenseur impulsion - énergie va remplacer la densité.

### 408 - Le tenseur impulsion - énergie, ou tenseur matériel -

Dans une matière supposée continue <sup>(1)</sup> isolons

---

(1) Les considérations qui vont suivre s'appliqueront donc à l'aspect macroscopique des phénomènes.

une portion infiniment petite de densité propre  $\rho_0$  (densité qui serait mesurée dans un système euclidien lié à la portion de matière). Nous pouvons former le tenseur:

$$(654) \quad T_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\sigma} \rho_0 \frac{dx_{\sigma}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds}$$

$ds$  étant l'élément de ligne d'Univers de la portion de matière considérée.

Ses 16 composantes de ce tenseur s'expriment aisément en l'absence d'un champ de gravitation si l'on prend des coordonnées galiléennes.

Nous obtenons, en effet:

$$(655) \quad ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \quad dX_4 = c dt$$

$$(656) \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad ; \quad g_{44} = +1 \quad g_{\mu\sigma} = 0 \text{ pour } \mu \neq \sigma$$

$$\sqrt{-g} = 1$$

Posons, comme en relativité restreinte  $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ,  $v$  étant la vitesse de la portion de matière dans le système galiléen; nous avons:

$$v_{X_1} = \frac{dX_1}{dt} = c \frac{dX_1}{dX_4} \dots \dots \quad ds = \alpha dX_4 \quad \rho_0 = \rho \alpha^2$$

$\rho$  étant la densité mesurée dans le système considéré. Le tenseur s'écrit alors:

$$(657) \quad T_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\sigma} \rho \frac{dX_{\sigma}}{dX_4} \frac{dX_{\nu}}{dX_4}$$

ou, en donnant aux  $g_{\mu\sigma}$  les valeurs galiléennes (656):

$$(658) \quad T_{\mu}^{\nu} = \begin{array}{cccc} -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_1}^2 & -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_2} v_{X_1} & -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_3} v_{X_1} & \frac{1}{c} \rho v_{X_1} \\ -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_1} v_{X_2} & -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_2}^2 & -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_3} v_{X_2} & \frac{1}{c} \rho v_{X_2} \\ -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_1} v_{X_3} & -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_2} v_{X_3} & -\frac{1}{c^2} \rho v_{X_3}^2 & \frac{1}{c} \rho v_{X_3} \\ -\frac{1}{c} \rho v_{X_1} & -\frac{1}{c} \rho v_{X_2} & -\frac{1}{c} \rho v_{X_3} & \rho \end{array}$$

Ses composantes  $T^{\mu}_{\nu}$  (multipliées par  $c$ ) sont les composantes de l'impulsion d'Univers.

Lorsque la vitesse  $v$  est petite par rapport à la vitesse de la lumière, les composantes du tenseur autres que  $T^4_4$  sont négligeables, de sorte que le tenseur se réduit, en première approximation, à la densité  $T^4_4 = \rho$ , très voisine de  $\rho_0$ . Le scalaire densité, au repos  $\rho_0$  n'est autre chose que le tenseur contracté  $T^{\mu}_{\mu}$ ; on a en effet:

$$\begin{aligned} T^{\mu}_{\mu} &= g_{\mu\sigma} \rho \frac{dX_{\sigma}}{dX_4} \frac{dX_{\mu}}{dX_4} = g_{11} \rho \left(\frac{dX_1}{dX_4}\right)^2 + g_{22} \rho \left(\frac{dX_2}{dX_4}\right)^2 + g_{33} \rho \left(\frac{dX_3}{dX_4}\right)^2 + g_{44} \rho \\ &= \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \alpha^2 \rho = \rho_0. \end{aligned}$$

Une remarque intéressante est la suivante: l'équation de conservation

$$\frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial X_{\nu}} = 0$$

dans un milieu euclidien, en coordonnées galiléennes donne l'équation de continuité de l'hydrodynamique, si l'on fait  $\mu = 4$

$$\frac{\partial(\rho v_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_{x_3})}{\partial x_3} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

#### 409 - Ses équations de la gravitation dans la matière -

Le tenseur  $T^{\nu}_{\mu}$  doit remplacer la densité dans l'expression de la loi de la gravitation. Il nous suffit de nous reporter à la loi dans le vide, sous la forme (651) où l'énergie de gravitation est mise en évidence, pour comprendre comment il faut introduire le tenseur matériel. Nous devons penser que l'énergie de gravitation est équivalente à toute autre forme d'énergie: donnant alors à la constante  $\chi$  (équations (651)) des dimensions telles que  $t^{\mu}_{\nu}$  représente une densité (énergie par unité de volume, divisée par  $c^2$ ),

c'est-à-dire telles que  $t_u^\sigma$  ait mêmes dimensions que  $T_u^\sigma$ , nous sommes logiquement conduits à ajouter les composantes d'énergie et d'impulsion de la matière aux composantes de l'énergie de gravitation. Nous remplaçons donc  $t_u^\sigma$  par  $t_u^\sigma + T_u^\sigma$  et  $t$  par  $t + T$  ( $T = T_u^\mu = \rho_0$ )  
 Nous obtenons ainsi l'équation tensorielle (remplaçant l'équation (651))

$$(659) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{-g}} (g^{\rho\sigma} \{^{\sigma\rho}_{\mu\nu}\}) = \kappa \left[ (t_u^\sigma + T_u^\sigma) - \frac{1}{2} g_u^\sigma (t + T) \right] \\ \sqrt{-g} = 1 \end{array} \right.$$

qui s'écrit, d'après (629) (648) (651)

$$g^{\nu\sigma} R_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu}^\sigma - \frac{1}{2} g_{\mu}^\sigma T \right)$$

D'où:  
(660)

$$\boxed{R_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)} \quad \text{avec } T_{\mu\nu} = g_{\nu\sigma} T_u^\sigma$$

C'est la loi cherchée, qui remplace l'équation de Poisson. Sous cette dernière forme, la restriction  $\sqrt{-g} = 1$  est levée, car (660) est une équation covariante, qui est exacte dans tous les systèmes de coordonnées imaginables si elle est vraie dans un système particulier.

La loi de la gravitation peut encore s'écrire sous une autre forme en introduisant le scalaire  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  (1). Multiplions (660) par  $g^{\mu\nu}$  il vient.

$$g^{\nu\sigma} R_{\mu\nu} = -\kappa \left( g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} T \right)$$

$$\text{ou (661) } R = \kappa T = \kappa \rho_0$$

$$\text{car } g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T \quad \text{et} \quad g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$$

Remplaçant  $\kappa T$  par  $R$  dans (660) nous obtenons la loi sous la forme suivante :

(1) Nous verrons plus loin que ce scalaire est la courbure totale.

(662)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\chi T_{\mu\nu}$$

L'introduction, telle qu'elle vient d'être faite, du tenseur matériel, n'est pas exigée par le principe de relativité seul; nous avons admis, en outre, que l'énergie du champ de gravitation et l'énergie de la matière ont même action gravifique. Nous allons maintenant donner la meilleure justification de la loi (660 ou 662) en montrant qu'elle implique la conservation de l'impulsion et de l'énergie.

#### 410 - La conservation de l'impulsion et de l'énergie -

Formons la dérivée covariante de  $T_{\mu}^{\nu}$  et contractons la :

$$(663) \quad \dot{T}_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{\partial T_{\mu}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} - \left\{ \begin{matrix} \nu & \mu \\ \beta & \end{matrix} \right\} T_{\beta}^{\nu} + \left\{ \begin{matrix} \beta & \nu \\ \nu & \end{matrix} \right\} T_{\mu}^{\beta}$$

Nous allons montrer d'abord que la loi de gravitation a pour conséquence que cette dérivée covariante est nulle.

$$T_{\mu\nu}^{\nu} = 0$$

En effet, multiplions par  $g^{\sigma\nu}$  l'équation

$$R_{\mu\tau} - \frac{1}{2} g_{\mu\tau} R = -\chi T_{\mu\tau}$$

qui exprime la loi d'Einstein (équation (662) où  $\nu$  a été remplacé par  $\tau$ ), nous obtenons :

$$(664) \quad R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R = -\chi T_{\mu}^{\nu}$$

Formons la dérivée covariante des deux membres et contractons; il vient :

$$(665) \quad R_{\mu\nu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} \frac{\partial R}{\partial x_{\nu}} = -\chi T_{\mu\nu}^{\nu}$$

Le premier membre est identiquement nul : c'est en effet

$R_{uv}^v - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_u}$ , puisque  $g_u^u = 1$  pour  $u = v$  et  $g_u^v = 0$  pour  $u \neq v$ ; or on a identiquement :

$$(666) \quad R_{uv}^v \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_u}$$

ainsi qu'il est facile de le vérifier d'après l'expression qui définit le tenseur  $R_{uv}^v$ . Le premier membre de l'équation (665) étant nul identiquement, cette équation donne  $T_{uv}^v = 0$

Il convient de remarquer que les identités (666) donnent, pour  $u = 1, 2, 3, 4$ , quatre relations entre les dix équations qui expriment la loi de la gravitation dans le vide, ce qui réduit à six le nombre des conditions, ainsi que nous l'avons précédemment annoncé.

Revenons à  $T_{uv}^v = 0$  et à son expression (663). Le second membre de (663) est donc nul : nous allons exprimer autrement les deux derniers termes. Nous avons :

$$(667) \quad \left\{ \begin{matrix} \beta & v \\ v & \mu \end{matrix} \right\} T_{\mu}^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\beta})}{\partial x_{\beta}} \quad (\text{voir n}^{\circ} 403)$$

$$(668) \quad - \left\{ \begin{matrix} v & \mu \\ \beta & \mu \end{matrix} \right\} T_{\beta}^{\nu} = - \left[ \begin{matrix} v & \mu \\ \varepsilon & \mu \end{matrix} \right] g^{\varepsilon\beta} g^{\nu\alpha} T_{\alpha\beta} = - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x_{\mu}} g^{\varepsilon\beta} g^{\nu\alpha} T_{\alpha\beta}$$

les 2 autres termes disparaissent dans la sommation

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} T_{\alpha\beta} \quad (1)$$

Par conséquent,  $T_{uv}^v = 0$  s'écrit en portant les valeurs (667) (668) dans le second membre de (663) :

$$(669) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu})}{\partial x_{\nu}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} T_{\alpha\beta}$$

(1) Ceci résulte des équations  $g^{\nu\alpha} g_{\nu\varepsilon} = 0$  ou 1  $g^{\nu\alpha} dg_{\nu\varepsilon} + g_{\nu\varepsilon} dg^{\nu\alpha} = 0$  multipliant par  $g^{\varepsilon\beta}$  on obtient  $g^{\varepsilon\beta} g^{\nu\alpha} dg_{\nu\varepsilon} = - dg^{\alpha\beta}$

$\beta$  ayant été remplacé par  $\nu$  dans le premier membre de cette équation.

Choisissons les coordonnées de manière que  $\sqrt{-g} = 1$ , l'équation précédente se simplifie et devient :

$$(670) \quad \frac{\partial T_{\mu}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} T_{\alpha\beta}$$

Cette expression étant établie, conservons toujours la restriction  $\sqrt{-g} = 1$  et reportons nous à l'expression (644) n° 407 par laquelle nous avons défini  $t_{\beta}^{\alpha}$ , c'est-à-dire :

$$g^{\alpha\nu} R_{\mu\nu} = -2\kappa \frac{\partial t_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}$$

Deux cas sont à considérer :

1°/ Il n'y a pas de matière au point  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ; alors  $R_{\mu\nu} = 0$  et par suite  $\frac{\partial t_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} = 0$  ; c'est le cas

déjà indiqué au n° 407

2°/ Il y a de la matière présente ; on peut alors écrire :

$$2\kappa \frac{\partial t_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial g^{\alpha\nu}}{\partial x_{\mu}} R_{\nu\mu} = \frac{\partial g^{\alpha\nu}}{\partial x_{\mu}} (R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} g_{\nu\mu} R)$$

car lorsque  $g = -1$ ,  $g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = 0$ .

Appliquons maintenant la loi de la gravitation dans la matière, en remplaçant  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$  par  $-T_{\mu\nu}$  ; nous obtenons :

$$\frac{\partial t_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\nu}}{\partial x_{\mu}} T_{\nu\mu}$$

c'est à dire, d'après l'équation que nous venons d'établir (670)

$$\frac{\partial t_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} = \frac{\partial T_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\mu}}$$

ou

(671)

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (T_{\beta}^{\alpha} + t_{\beta}^{\alpha}) = 0$$

Ces quatre équations ( $\beta = 1, 2, 3, 4$ ) expriment la loi gé-

nérale de conservation de l'impulsion et de l'énergie quand il y a action réciproque de la matière et du champ de gravitation (même raisonnement qu'au n° 407).

ainsi  $\frac{\partial T_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0$ , dans le vide, donnerait la conservation de  $\frac{\partial T_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$  l'énergie de gravitation, mais c'est un cas fictif, comme nous l'avons dit précédemment.

$\frac{\partial T_{\beta}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0$  exprime la conservation de l'énergie et de l'impulsion si l'on néglige le champ de gravitation. Nous avons vu que ces équations conduisent, pour  $\beta = 4$ , en coordonnées galiléennes (espace-temps euclidien, par conséquent), à l'équation de continuité de l'hydrodynamique. Pour  $\beta = 1, 2, 3$  on obtient les trois autres équations fondamentales de l'hydrodynamique, le champ de force étant supposé nul.

La loi complète est (671). Il est vrai qu'elle est soumise, sous cette forme, à la restriction  $\sqrt{-g} = 1$ , mais il est essentiel de remarquer que la condition  $\sqrt{-g} = 1$  n'est pas une restriction à la loi elle-même : le choix de coordonnées, telles que  $\sqrt{-g}$  soit égal à 1, a simplement pour objet d'interpréter l'équation covariante  $T_{\mu\nu}^{\nu} = 0$  (1), qui est l'expression générale de la loi, et de comprendre ce qu'elle signifie.

Revenons maintenant aux équations (669) qui, simplifiées par la restriction  $\sqrt{-g} = 1$  s'écrivent (670) :

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} T_{\alpha\beta}$$

ou encore :

$$(672) \quad \frac{\partial T_{\mu}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = \left\{ \begin{matrix} \nu & \mu \\ \beta & \end{matrix} \right\} T_{\beta}^{\nu}$$

Elles constituent l'expression de la loi d'impulsion et d'énergie pour la matière ; le second membre, où les  $g^{\mu\nu}$  et les dérivées premières des  $g_{\mu\nu}$  interviennent dans le symbole de Christoffel, représente  $\chi_{\mu\nu}$  l'influence énergétique de la gravitation sur la matière, c'est-à-dire détermine l'impulsion et l'énergie communiquées à la matière par le champ de force (champ de gravitation permanent, ou

(1) dont la forme dégénérée, en coordonnées galiléennes, est  $\frac{\partial T_{\mu\nu}^{\nu}}{\partial x_{\nu}} = 0$

champ de force géométrique).

Ces équations (672) constituent quatre conditions (pour  $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) auxquelles le tenseur matériel doit satisfaire.

En première approximation, on peut ne conserver au second membre que  $T^{\mu}_{\mu} = \rho$ , les autres  $T^{\nu}_{\mu}$  étant considérablement plus petits, et poser  $g_{\mu\nu} = 1 - 2\Omega_{\mu\nu}$ ,  $\Omega$  étant le potentiel du champ de force (le potentiel de la mécanique classique). Ses équations (672), dégénérées et simplifiées, deviennent les équations connues de l'hydrodynamique dans un champ de force, et pour les milieux supposés dépourvus de frottement.

411 - Les équations du mouvement du point matériel, en mécanique classique, déduites, en première approximation, des équations de la géométrie -

Dans un Univers supposé euclidien, on peut choisir des coordonnées galiléennes de manière à avoir :

$$(673) \quad \begin{cases} ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 & dx_4 = c dt \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 & g_{44} = +1 & g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

c'est la suppression totale du champ de force.

Dans la réalité, il y a toujours un champ de gravitation permanent, mais l'Univers est très peu déformé. Au champ permanent, on peut superposer un champ de gravitation "géométrique" par l'introduction d'un système de référence en mouvement accéléré. Nous obtiendrons une première approximation en considérant le cas où les  $g_{\mu\nu}$  diffèrent très peu des valeurs (673) ; nous négligerons pour cela les quantités du 2<sup>ème</sup> ordre, et nous supposons que les  $g_{\mu\nu}$  tendent vers les valeurs précédentes si l'on s'éloigne indéfiniment de toute matière et si l'on adopte en même temps un système de référence en translation uniforme.

$x_1, x_2, x_3$  étant les coordonnées ordinaires d'espace et  $x_4$  le temps multiplié par  $c$ , la vitesse :

$$v = c \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2}$$

peut théoriquement prendre toutes les valeurs inférieures à  $c$ , mais dans la réalité les vitesses sont toujours très petites par rapport à  $c$ , de sorte que les composantes d'espace  $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}$  du quadri-vecteur du mouvement sont toujours très petites par rapport à la composante de temps  $\frac{dx_4}{ds}$ ; cette dernière peut être prise égale à 1, aux quantités du second ordre près.

Les grandeurs  $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\}$  sont très petites, du 1<sup>er</sup> ordre. Soient alors les équations d'une géodésique (628) :

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = - \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}$$

nous pouvons nous contenter de considérer les termes pour lesquels  $\alpha = \beta = 4$ , et nous pouvons remplacer  $ds$  par  $dx_4$ , les  $g_{\mu\nu}$  par les valeurs galiléennes (673). Nous obtenons ainsi :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x_\sigma}{dt^2} = \left[ \begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ \sigma \end{smallmatrix} \right] \quad \sigma = 1, 2, 3$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x_4}{dt^2} = - \left[ \begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 4 \end{smallmatrix} \right]$$

Lorsque le champ de gravitation est quasi-statique, c'est-à-dire lorsqu'on n'envisage que le cas où le champ engendré par la matière n'est animé que d'une faible vitesse, on peut négliger les dérivées des  $g_{\mu\nu}$  par rapport à  $x_4$ , vis à vis de celles par rapport aux coordonnées d'espace, et l'on obtient simplement :

$$(674) \quad \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x_\sigma}{dt^2} = - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_\sigma} \quad \sigma = 1, 2, 3$$

Ce sont bien les équations du mouvement de la mécanique classique, à condition d'identifier, à une

constante près,  $\frac{c^2}{2} g_{44}$  avec le potentiel de la force.  
 On a donc  $\frac{c^2}{2} g_{44} \Omega$  étant le potentiel, au sens de la mécanique ordinaire :

$$(675) \quad \boxed{\Omega = \frac{c^2}{2} g_{44} + C =}$$

Il est remarquable que la composante  $g_{44}$  du tenseur fondamental donne, à elle seule, en 1<sup>ère</sup> approximation, le mouvement du point matériel.

412 - La loi de Newton déduite, en première approximation de la loi d'Einstein -

La loi d'Einstein s'écrit (n° 410, formule 660)

$$(676) \quad - \frac{\partial \{ \mu \nu \}}{\partial x_\alpha} + \{ \mu \beta \} \{ \nu \alpha \} = -\chi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

sous la restriction  $\sqrt{-g} = 1$

Le tenseur matériel, est presque exclusivement déterminé par la densité  $\rho$  et se réduit en première approximation à :

$$T_{44} = T = \rho$$

Dans le premier membre de l'équation (676), le deuxième terme est du second ordre ; nous le négligeons donc, et nous obtenons, en développant le premier terme :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \begin{bmatrix} \mu \nu \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{bmatrix} \mu \nu \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{bmatrix} \mu \nu \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_4} \begin{bmatrix} \mu \nu \\ 4 \end{bmatrix} = -\chi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \rho \right)$$

ce qui donne pour  $\mu = \nu = 4$ , en négligeant les dérivées par rapport à  $x_4$

$$- \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2} \right) = -\frac{1}{2} \chi \rho$$

ou  $\Delta g_{44} = \chi \rho$        $\Delta = \text{opérateur } \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

D'après (675), on a :

756

$$\Delta g_{44} = \frac{2}{c^2} \Delta \Omega$$

par suite  
(677)

$$\Delta \Omega = \frac{c^2}{2} \chi \rho = 4\pi \rho G$$

en posant

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^2}$$

C'est la formule de Poisson.

Cette formule est, comme on le sait, l'expression analytique de la loi de Newton; elle caractérise un champ de force proportionnelle à la masse et en raison inverse du carré de la distance.

De plus, la constante d'Einstein se trouve maintenant déterminée en fonction de la constante connue de la gravitation newtonienne; elle a pour valeur:

$$\chi = \frac{4\pi G}{c^2} = \frac{4\pi \cdot 6,7 \cdot 10^{-8}}{9 \cdot 10^{20}} = 1,87 \cdot 10^{-27} \text{ unité C.G.S.}$$

## § 7 - Le champ électromagnétique -

### 413 - Généralisation des équations de Maxwell-Lorentz -

Les équations fondamentales de l'électromagnétisme peuvent être considérées comme établies dans un Univers euclidien (l'Univers tangent) et elles ont été vérifiées expérimentalement par des mesures d'une extrême précision. Nous nous proposons de les exprimer toujours dans un Univers euclidien, en prenant des coordonnées arbitraires, c'est-à-dire de les généraliser en introduisant un champ de force, ou champ de gravitation "géométrique".

D'après le principe d'équivalence, le résultat obtenu sera exact dans un champ de gravitation permanent, c'est-à-dire dans l'Univers réel, non euclidien.

Dans la théorie ordinaire, on considère

un potentiel vecteur  $G_1, G_2, G_3$ , et un potentiel scalaire  $\psi$ .

Exprimons toutes les grandeurs en unités électromagnétiques; soient  $X, Y, Z$  les composantes de la force électrique,  $L, M, N$ , celles de la force magnétique au point d'espace  $x, y, z$  (coordonnées galiléennes). On a, comme on le sait:

$$(678) \quad \begin{cases} X = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial t} & L = \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ Y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial t} & M = \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ Z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial t} & N = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \end{cases}$$

Posons  $x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = ct$

$$(679) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= -cG_1 & \varphi_2 &= -cG_2 & \varphi_3 &= -cG_3 & \varphi_4 &= \psi \\ \alpha &= cL & \beta &= cM & \gamma &= cN \end{aligned}$$

Les équations (678) s'écrivent:

$$(680) \quad \begin{cases} X = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1} & \alpha = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \\ Y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_2} & \beta = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \\ Z = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_3} & \gamma = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \end{cases}$$

Écrivons maintenant les équations de Maxwell - Lorentz. L'unité de charge étant choisie de manière que le facteur  $4\pi$  disparaisse, soient  $u, v, w$  les composantes du courant divisées par  $c$  (1), et  $P$  la densité de charge.

(1) Beaucoup d'auteurs simplifient toutes les formules en prenant pour unités naturelles la vitesse de la lumière et la constante  $G$  de la gravitation newtonienne. Cela est évidemment rationnel, mais on est conduit à des formules étranges dans lesquelles la masse d'un corps, par exemple, est mesurée en centimètres. Nous avons préféré conserver l'homogénéité habituelle des formules.

Les équations bien connues s'écrivent : (1)

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial X}{\partial t} + cu \right) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

c'est-à-dire :

$$(681) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \alpha}{\partial x_4} = \frac{\partial Z}{\partial x_2} - \frac{\partial Y}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial \beta}{\partial x_4} = \frac{\partial X}{\partial x_3} - \frac{\partial Z}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \gamma}{\partial x_4} = \frac{\partial Y}{\partial x_1} - \frac{\partial X}{\partial x_2} \end{array} \right. \quad (683) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial x_4} + u = \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_3} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_4} + v = \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} - \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Z}{\partial x_4} + w = \frac{\partial \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \end{array} \right.$$

$$(682) \operatorname{Div}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma}{\partial x_3} = 0 \quad (684) \operatorname{Div}(X, Y, Z) = \frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_2} + \frac{\partial Z}{\partial x_3} = P$$

Ceci posé, soient  $\varphi_\mu$  les composantes d'un quadri-ve-  
cteur covariant (arbitraire pour le moment); nous pouvons  
former sa dérivée covariante :

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ \begin{array}{l} \mu \nu \\ \rho \end{array} \right\} \varphi_\rho$$

$\varphi_{\mu\nu}$  étant un tenseur covariant, les expressions :

$$(685) \quad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu} = F_{\mu\nu}$$

sont les composantes d'un nouveau tenseur covariant  
d'ordre 2.

Ce tenseur  $F_{\mu\nu}$  est symétrique gauche, car on a  
 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ .

D'après la formation du tenseur  $F_{\mu\nu}$ , on a les identités :

$$(686) \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

(1) ne pas oublier que nous employons le système  
d'unités électromagnétiques.

Donnons à  $\mu, \nu, \sigma$  les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{l} \mu \quad 2, 3, 4, 1 \\ \nu \quad 3, 4, 1, 2 \\ \sigma \quad 4, 1, 2, 3 \end{array}$$

Nous obtenons les quatre identités :

$$(687) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} \equiv 0 \\ \frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} \equiv 0 \\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} \equiv 0 \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} \equiv 0 \end{array} \right.$$

Le tenseur  $F_{\mu\nu}$ , étant symétrique gauche, a quatre composantes nulles, et les douze autres sont deux à deux égales et de signes contraires. Posons :

$$\begin{array}{ll} F_{14} = -F_{41} = X & F_{23} = -F_{32} = \alpha \\ F_{24} = -F_{42} = Y & F_{31} = -F_{13} = \beta \\ F_{34} = -F_{43} = Z & F_{12} = -F_{21} = \gamma \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{les autres} \\ \text{composantes} \\ \text{étant nulles.} \end{array}$$

Les premiers membres des identités (687) sont précisément les premiers membres des équations (684-685) de Maxwell. De plus, les composantes du champ électrique et celles du champ magnétique (multipliées par  $c$ ) sont formées à partir du potentiel vecteur (multiplié par  $c$  et changé de signe) et du potentiel scalaire (voir 680) exactement comme les composantes du tenseur  $F_{\mu\nu}$  sont formées à partir du quadrivecteur  $\mathcal{Q}_\mu$ , d'après (685)

Nous voyons ainsi que le premier groupe (681-682) des équations de Maxwell exprime que les composantes des champs électrique et magnétique constituent un tenseur symétrique gauche  $F_{\mu\nu}$

du 2<sup>ème</sup> ordre, formé lui-même à partir d'un quadrivecteur potentiel  $\varphi_\mu$  dont les composantes d'espace sont les composantes du potentiel vecteur et dont la composante de temps est le potentiel scalaire de la théorie ordinaire. Ce potentiel est un quadrivecteur covariant.

Le tenseur  $F_{\mu\nu}$  des forces électrique et magnétique est donc le suivant :

$$(688) \quad F_{\mu\nu} = \begin{array}{cccc} \begin{array}{l} \rightarrow \mu \\ \downarrow \nu \end{array} & = & \begin{array}{cccc} 0 & -\gamma & \beta & -X \\ \gamma & 0 & -\alpha & -Y \\ -\beta & \alpha & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{array} \end{array}$$

Le tenseur contravariant associé va nous permettre d'exprimer le second groupe d'équations de Maxwell. Ce tenseur est, en coordonnées galiléennes :

$$(689) \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{array}{cccc} \begin{array}{l} \rightarrow \mu \\ \downarrow \nu \end{array} & = & \begin{array}{cccc} 0 & -\gamma & \beta & X \\ \gamma & 0 & -\alpha & Y \\ -\beta & \alpha & 0 & Z \\ -X & -Y & -Z & 0 \end{array} \end{array}$$

Le second groupe de Maxwell (683-684) s'écrit ainsi :

$$(690) \quad \begin{array}{l} \frac{\partial F^{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x_4} = u \quad \text{posons } u = J^1 \\ \frac{\partial F^{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x_4} = v \quad \text{" } v = J^2 \\ \frac{\partial F^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{34}}{\partial x_4} = w \quad \text{" } w = J^3 \\ \frac{\partial F^{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^{43}}{\partial x_3} = P \quad \text{" } P = J^4 \end{array}$$

Les premiers membres de ces quatre équations

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$$

constituent les quatre composantes d'un quadrivecteur contrevariant, car  $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$  est la forme dégénérée, en coordonnées galiléennes (avec lesquelles les symboles de Christoffel sont nuls) de la dérivée covariante contractée  $F^{\mu\nu}$  qui est un quadrivecteur contrevariant.

Par conséquent les seconds membres  $u, v, w, P$  sont les composantes d'un quadrivecteur "courant" dont les composantes d'espace (divisées par  $c$ ) constituent le courant de convection et dont la composante de temps est la densité de charge.

On peut d'ailleurs voir directement que  $u = J^1, v = J^2, w = J^3, P = J^4$  sont les composantes d'un quadrivecteur contrevariant, car on a

$$(u, v, w, P) = \sum e \left( \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{dx_4}{ds} \right) \text{ par unité de volume. (1)}$$

$J^\mu$  se transforme donc comme  $dx_\mu$ ; c'est par conséquent un quadrivecteur contrevariant.

En résumé, les équations de Maxwell s'écrivent.

$$1^{\text{er}} \text{ groupe (681-682)} \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{ou } F_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}$$

$$2^{\text{e}} \text{ groupe (683-684)} \quad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J^\mu$$

Jusqu'à présent, nous avons des coordonnées galiléennes. Il s'agit de trouver les relations générales valables dans un système de coordonnées arbitraires et se réduisant aux précédentes pour un système galiléen. La généralisation est immédiate: la

(1) L'introduction de  $ds$  au lieu de  $dx_4 = c dt$  au dénominateur résulte de la contraction de Lorentz  $\frac{1}{\alpha} = \frac{dx_4}{ds}$  dont il faut tenir compte, car l'unité de volume n'est pas la même pour l'observateur immobile et pour l'observateur en mouvement relativement à la charge.

première équation est covariante; quant à la seconde, c'est la forme dégénérée dans le cas de coordonnées galiléennes, de  $F_{\nu}^{\mu} = J^{\mu}$ : il suffit, pour avoir la relation tensorielle générale, de remplacer  $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}$  par la dérivée covariante contractée  $F_{\nu}^{\mu}$ .

Les équations générales de l'électromagnétisme

sont donc les suivantes:

$$(691) \quad \boxed{\begin{aligned} F_{\nu}^{\mu} &= \frac{\partial \varphi_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \varphi_{\nu}}{\partial x_{\mu}} \\ F_{\nu}^{\mu} &= J^{\mu} \end{aligned}}$$

$\varphi_{\mu}$  quadri vecteur potentiel  
 $J$  quadri vecteur densité de courant  
- densité de charge

C'est la généralisation des équations de Maxwell-Lorentz.

Ces équations sont valables dans un champ de gravitation permanent (Univers réel, non euclidien) parce que les conditions d'application du principe d'équivalence sont remplies.

L'expression  $F_{\nu}^{\mu}$  peut se simplifier par un calcul analogue à celui du n° 410 (relatif à  $T_{\mu\nu}^{\nu}$ ); à cause du caractère symétrique gauche de  $F^{\mu\nu}$ , le terme correspondant au second membre de (669) disparaît. L'équation  $F_{\nu}^{\mu} = J^{\mu}$  s'écrit:

$$(692) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}} = J^{\mu}$$

#### 414 - Le tenseur d'énergie électromagnétique -

Revenons aux coordonnées galiléennes. Exprimons les composantes de la force mécanique d'exercant dans un champ  $X, Y, Z$ :

$L = \frac{d}{c}$ ,  $M = \frac{\beta}{c}$ ,  $N = \frac{\gamma}{c}$ , sur l'unité de volume contenant des charges (densité de charge  $P$ ).

$$(693) \quad \begin{cases} K_1 = PX + \gamma v - \beta w \\ K_2 = PY + \alpha w - \gamma u \\ K_3 = PZ + \beta u - \alpha v \end{cases}$$

D'autre part, le travail pendant l'unité de temps (temps  $t$ ) est :

$$(694) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = X \cdot cu + Y \cdot cv + Z \cdot cw$$

( $cu, cv, cw$  étant les composantes de la densité de courant, au sens habituel). Posons :

$$(695) \quad K_v = - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_v} = -Xu - Yv - Zw$$

D'après la définition du tenseur  $F_{\mu\nu}$  (688) et celle du quadrivecteur  $J^\mu$  les équations (693) et (695) se résument ainsi :

$$(696) \quad \begin{aligned} -K_v &= F_{\mu\nu} J^\mu \\ &= F_{\mu\nu} F^{\mu\sigma} \end{aligned}$$

On voit que  $K_v$  est un quadrivecteur. Ses composantes d'espace sont les composantes de la force (mécanique) s'exerçant sur l'unité de volume ; sa composante de temps (coordonnée  $x_4$ ) est la variation d'énergie par unité de volume (divisée par  $c$ ).

Ce quadrivecteur représente ainsi la variation de l'impulsion-énergie de l'unité de volume, et la loi de conservation s'écrit, en coordonnées galiléennes :

$$(697) \quad -c^2 \frac{\partial T_v^\alpha}{\partial x_\alpha} = K_v$$

$T_v^\alpha$  étant le tenseur matériel (dont les composantes sont homogènes à une densité).

S'il existe un tenseur analogue à  $T_v^\alpha$  pour le champ électromagnétique, la loi de conservation ne peut être satisfaite que si  $E_v^\alpha$  varie comme  $T_v^\alpha$ , mais en sens opposé ; on doit donc avoir :

$$(698) \quad -c^2 \frac{\partial T_v^\alpha}{\partial x_\alpha} = c^2 \frac{\partial E_v^\alpha}{\partial x_\alpha} = K_v$$

Ce tenseur existe effectivement ; on peut le calculer d'après l'expression (696) de  $K_v$ , et l'on trouve :

$$(699) \quad E_v^\alpha = \frac{1}{c^4} \left( -F_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} g_\nu^\alpha F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \right)$$

Passons au cas de coordonnées arbitraires,  $\frac{\partial T_{\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$  et  $\frac{\partial E_{\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$  étant la forme dégénérée des dérivées covariantes  $T_{\nu}^{\alpha}$  et  $E_{\nu}^{\alpha}$ , la généralisation des équations (698) est nécessairement :

$$(700) \quad \boxed{-T_{\nu}^{\alpha} = E_{\nu}^{\alpha} = \frac{K_{\nu}}{c^2}}$$

Ces équations sont valables dans un champ de gravitation permanent, d'après le principe d'équivalence.

En l'absence de champ électromagnétique au point d'Univers considéré on a  $T_{\nu}^{\alpha} = 0$ . (démontré au n° 410); en l'absence de matière, on a évidemment aussi  $T_{\nu}^{\alpha} = 0$ ; par suite s'il y a un champ électromagnétique sans matière on a  $E_{\nu}^{\alpha} = 0$  (d'après 700). On en déduit pour  $E_{\nu}^{\alpha}$  la relation précédemment démontrée pour  $T_{\nu}^{\alpha}$  (669-672):

$$\frac{\partial E_{\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\nu}} = \left\{ \begin{matrix} \nu & \mu \\ \beta & \end{matrix} \right\} E_{\beta}^{\alpha} \quad \text{si } \sqrt{-g} = 1$$

qui exprime l'action énergétique du champ de gravitation sur l'énergie électromagnétique.

S'il y a de la matière et de l'énergie électromagnétique, on n'a plus ni  $T_{\nu}^{\alpha} = 0$  ni  $E_{\nu}^{\alpha} = 0$ , mais les identités (666) et les équations (700) permettent d'écrire :

$$(701) \quad R_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} \frac{\partial R}{\partial x_{\alpha}} \equiv 0 = -\kappa (T_{\nu}^{\alpha} + E_{\nu}^{\alpha})$$

puisque  $-T_{\nu}^{\alpha} = E_{\nu}^{\alpha}$

Intégrant, l'équation (664) se trouve remplacée par :

$$(702) \quad R_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} R = -\kappa (T_{\nu}^{\alpha} + E_{\nu}^{\alpha})$$

Le tenseur d'énergie électromagnétique s'ajoute simplement au tenseur matériel et l'énergie électromagnétique, qui subit l'action du champ de gravitation, exerce aussi une action gravifique.

Pour  $\sqrt{-g} = 1$  la loi générale de conservation s'exprime par les équations :

$$(703) \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (T_\nu^\alpha + E_\nu^\alpha + t_\nu^\alpha) = 0$$

Il est intéressant de résumer en un tableau les quadrivecteurs d'Univers dont nous avons fait usage. L'union des vecteurs de l'espace tridimensionnel et des scalaires de la théorie ordinaire (qui sont orientés suivant le temps) est une simplification qui éclaire toutes les théories de la mécanique et de la physique.

Nous prenons ici comme unité naturelle la vitesse de la lumière ( $c = 1$ ).

Quadrivecteurs	Composantes d'espace	Composante de temps
$T_\mu^\alpha$	quantité de mouvement (changée de signe)	énergie (masse)
$T_\mu^{\alpha, \text{ou } 3}$	flux de la quantité de mouvement	flux d'énergie
$K_\mu$	force	variation de travail
$\varphi_\mu$	potentiel vecteur (changé de signe)	potentiel scalaire électrostatique
$J^\mu$	densité de courant de convection	densité de charge électrostatique

## § 8 - Applications et vérifications de la loi d'Einstein -

### 415 - Le champ de gravitation d'un centre matériel -

L'application la plus directe de la loi d'Einstein est l'expression du champ de gravitation

d'un point matériel.

Dans un Univers euclidien, c'est-à-dire en l'absence de champ de gravitation, si l'on prend des coordonnées polaires :

l'élément de ligne d'Univers est représenté par :

$$(704) \quad ds^2 = -dr^2 - \underbrace{(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)}_{\text{élément d'arc de sphère de rayon } r} + c^2 dt^2$$

S'il y a un point matériel à l'origine des coordonnées ( $r=0$ ) l'expression de  $ds^2$  sera modifiée, tout en restant peu différente de la précédente car l'Espace-Temps reste très voisin d'un Espace-Temps euclidien. Nous poserons :

$$(705) \quad ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dx_4^2 \quad \left( dx_4 = c dt \right)$$

$r, \theta, \varphi, x_4$  étant quatre variables dont nous précisons plus tard la signification ;  $\lambda, \mu, \nu$  sont des fonctions de  $r$  et non de  $\theta, \varphi, t$  ; il s'agit de les déterminer de manière que la loi de la gravitation  $R_{\sigma\tau} = 0$  soit satisfaite.

L'absence des termes produits  $dr d\theta, dr d\varphi, d\theta d\varphi$  est due à la symétrie des coordonnées polaires. Il n'y a pas non plus de termes en  $dr dt, d\theta dt, d\varphi dt$  car, par rapport au point matériel qui est pris comme origine des coordonnées, le champ ne varie pas avec le temps.

Nous pouvons simplifier l'expression en posant  $r^2 = \tilde{r}^2 e^\mu$  supprimant l'indice et prenant une nouvelle fonction  $\lambda$ . Nous écrivons alors :

$$(706) \quad ds^2 = -e^\lambda dr^2 - \tilde{r}^2 d\theta^2 - \tilde{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dx_4^2$$

Ses potentiels de gravitation  $g_{\sigma\tau}$  ont ainsi les valeurs suivantes :

$$(707) \quad g_{11} = -e^\lambda \quad g_{22} = -\tilde{r}^2 \quad g_{33} = -\tilde{r}^2 \sin^2 \theta \quad g_{44} = e^\nu \quad g_{\sigma\tau} = 0 \text{ lors.}$$

que  $\sigma \neq \tau$

Le déterminant  $g$  se réduit à :

$$(708) \quad -g = e^{\lambda+\nu} r^4 \sin^2 \theta \quad \text{et l'on a } g^{\sigma\sigma} = \frac{1}{g_{\sigma\sigma}}$$

Les potentiels doivent satisfaire les équations :

$$(709) \quad R_{\sigma\tau} \equiv -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma\alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \frac{\partial^2 \text{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma \partial x_\tau} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \frac{\partial \text{Log}\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} = 0$$

Nous allons calculer les symboles de Christoffel :

$$(710) \quad \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\beta} \right)$$

Puisque les  $g_{\alpha\beta}$  sont nuls sauf quand les deux indices sont les mêmes, la sommation disparaît et l'on a :

$$(711) \quad \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \left( \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\alpha} \right) \text{ sans sommation}$$

Les cas possibles sont les suivants,  $\sigma, \tau, \rho$  désignant des indices différents :

$$(712) \quad \left\{ \begin{matrix} \sigma\sigma \\ \sigma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \text{Log} g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\sigma} ; \quad \left\{ \begin{matrix} \sigma\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{\tau\tau}} \frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x_\tau}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \tau \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \text{Log} g_{\tau\tau}}{\partial x_\sigma} ; \quad \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \rho \end{matrix} \right\} = 0$$

Nous obtenons ainsi, en désignant par  $\lambda'$  et  $\nu'$  les dérivées par rapport à  $r$  des exposants  $\lambda$  et  $\nu$  (équations 706-707)

$$(713) \quad \left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \lambda' \quad \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r} \quad \left\{ \begin{matrix} 1\ 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r} \quad \left\{ \begin{matrix} 1\ 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \nu'$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -re^{-\lambda} \quad \left\{ \begin{matrix} 2\ 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \cotg \theta \quad \left\{ \begin{matrix} 3\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \quad \left\{ \begin{matrix} 3\ 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 4\ 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu'$$

Les autres symboles sont nuls. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que

$$\left\{ \begin{matrix} 2\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}$$

Nous allons maintenant écrire explicitement les équations  $R_{\sigma\tau} = 0$  qui expriment la loi de gravitation. Ces dix équations se réduisent ici à quatre :  $R_{11} = 0$   $R_{22} = 0$   $R_{33} = 0$   $R_{44} = 0$

$$R_{11} \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 4 \end{Bmatrix} \\ + \frac{\partial^2 \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial r^2} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial r} = 0$$

$$R_{22} \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 & 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 3 \\ 3 \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial \theta^2} \\ - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial r} = 0$$

$$R_{33} \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 2 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 3 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \\ - \begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial r} - \begin{Bmatrix} 3 & 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial \theta} = 0$$

$$R_{44} \equiv -\frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} 4 & 4 \\ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 4 & 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 4 & 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \text{Log} \sqrt{-g}}{\partial r} = 0$$

En substituant la valeur de  $-g$  (703) et les valeurs des symboles (713), puis réduisant, ces équations deviennent :

$$(714) \begin{cases} R_{11} \equiv \frac{1}{2} v'' - \frac{1}{4} \lambda' v' + \frac{1}{4} v'^2 - \frac{\lambda'}{r} = 0 \\ R_{22} \equiv e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r (v' - \lambda') \right) - 1 = 0 \\ R_{33} = \sin^2 \theta \cdot e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r (v' - \lambda') \right) - \sin^2 \theta = 0 \\ R_{44} = e^{v-\lambda} \left( -\frac{1}{2} v'' + \frac{1}{4} \lambda' v' - \frac{1}{4} v'^2 - \frac{v'}{r} \right) = 0 \end{cases}$$

De la première et de la dernière équation résulte  $\lambda' = -v'$  et comme  $\lambda$  et  $v$  doivent tendre vers zéro quand  $r$  croît indéfiniment  $\lambda = -v$ .

La seconde et la troisième équation sont identiques; elles donnent:

$$e^{\nu} (1 + r\nu') = 1$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$e^{\nu} = \gamma \quad \gamma + r\gamma' = 1$$

nous obtenons

$$(715) \quad \gamma = e^{\nu} = 1 - \frac{A}{r}$$

A étant la constante d'intégration. Cette constante est arbitraire dans le calcul, mais, physiquement, pour une particule donnée elle est évidemment déterminée et elle caractérise la particule au point de vue gravifique, car la particule produit un champ déterminé.

Nous poserons:

$$(716) \quad A = \frac{2GM}{c^2} \quad \gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

G étant la constante newtonienne de la gravitation; M est une constante que nous identifierons plus loin avec la masse de la particule. Remplaçons dans (706)  $e^{\nu}$  par  $1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ , nous obtenons finalement:

$$(717) \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2$$

Cherchons la signification des coordonnées  $r, \theta, \phi, t$ . En un point fixe par rapport au centre matériel, ( $dr = 0, d\theta = 0, d\phi = 0$ ), l'intervalle de temps mesuré entre deux événements infiniment rapprochés est  $d\tau = \frac{ds}{c}$  et d'après (717) cet intervalle est égal à  $\sqrt{\gamma} dt$ . Comme  $\sqrt{\gamma} = 1$  lorsque  $r$  est infini, on voit que  $t$  est le temps à une distance infinie de la particule.

Faisons maintenant  $dt = 0$ . Dans l'expression de  $ds^2$ , le terme d'espace, représentant le carré de la distance de deux points infiniment voisins est:

$$(718) \quad dl^2 = \frac{1}{\gamma} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Dans les champs les plus intenses que nous connaissons,  $\gamma$  reste toujours extrêmement voisin de 1, de sorte que l'espace est très peu différent d'un espace euclidien. Supposons d'abord que nous portions transversalement ( $dr = 0$ ) une règle extrêmement courte  $dl$ ; nous aurons

$$dl^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

l'expression de  $dl$  est la même que celle d'un arc de sphère en géométrie euclidienne,  $r$  étant le rayon vecteur,  $\theta$  l'angle de deux rayons et  $\varphi$  l'angle azimutal.

Supposons maintenant que la règle très courte soit portée radialement ( $d\theta = 0$ ,  $d\varphi = 0$ ) de manière que, partant d'un point éloigné de la particule, on s'en rapproche peu à peu. Nous avons  $dr = \sqrt{\gamma} dl$ ;  $\sqrt{\gamma}$  et par suite  $dr$  diminuent à mesure qu'on s'approche de la particule, et  $r$  tend vers une valeur limite  $r_1$  que nous obtenons en faisant  $\gamma = 0$ , d'où  $r_1 = \frac{2GM}{c^2}$ . C'est là d'ailleurs un cas purement théorique qui ne se présente que si nous supposons un point matériel sans dimensions; la valeur de  $r_1$  est excessivement petite et ne correspond à aucune réalité car la matière occupe toujours un volume trop grand pour qu'on puisse atteindre cette limite, qui par conséquent n'a pas de signification physique.

On voit, en tous cas, que les valeurs de  $dr$  mesurées transversalement et radialement avec la même règle sont d'autant plus inégales, que le champ de gravitation est plus intense.

On voit aussi que le rapport de la circonférence au diamètre n'est pas égal à  $\pi$ , mais l'écart est faible: si une masse de 1 tonne était à l'intérieur d'un cercle de 5 mètres de rayon, c'est seulement la 24<sup>e</sup> décimale qui serait changée.

On pourrait exprimer l'élément de ligne  $ds$  avec d'autres coordonnées, mais celles que nous avons utilisées, d'après M. Schwarzschild, sont celles qui se rapprochent le plus de coordonnées polaires euclidiennes.

Pratiquement,  $r$  et  $t$  sont "la distance" et "le temps".

La quantité  $\gamma$ , nous l'avons dit, est extrêmement peu différente de l'unité, et c'est pourtant ce faible écart qui détermine tous les phénomènes de gravitation.  $\gamma$  intervient dans deux termes, le terme en  $dr$  et le terme en  $dt$ : il est évident que pour la mesure d'un intervalle d'univers  $ds$ , c'est surtout par le terme en  $dt$  que l'influence de  $\gamma$  se manifeste, puisque ce terme contient le facteur  $c^2$ .

#### 416 - Le mouvement d'un point matériel dans le champ de gravitation produit par un centre -

Un point matériel libre suit une géodésique, dont les équations sont (n° 405 eq. (628))

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

Dans le cas du champ de gravitation d'un centre, il est facile d'écrire ces équations: les valeurs des symboles de Christoffel ont été calculées précédemment (n° 415 eq. (713)). Faisons d'abord  $\sigma = 2$ , nous obtenons:

$$(719) \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} - \cos \theta \sin \theta \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0$$

Nous pouvons choisir les coordonnées de manière que la vitesse initiale du mobile soit dans le plan  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; comme nous avons initialement  $\frac{d\theta}{ds} = 0$  et  $\cos \theta = 0$ , il en résulte que  $\frac{d^2 \theta}{ds^2} = 0$ : la trajectoire reste dans un plan. Pour  $\sigma = 1, 3, 4$ , nous avons les équations:

$$(720) \quad \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \lambda' \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - r e^{-\lambda} \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \left( \frac{dx_4}{ds} \right)^2 = 0$$

$$(721) \quad \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (x_4 = ct)$$

$$(722) \quad \frac{d^2 x_4}{ds^2} + \nu' \frac{dr}{ds} \frac{dx_4}{ds} = 0$$

L'intégration des deux dernières équations donne :

$$(723) \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h$$

$$(724) \quad \frac{dx_4}{ds} = K e^{-v} = \frac{K}{\gamma}$$

$h$  et  $K$  étant deux constantes d'intégration.

Au lieu de chercher à intégrer (720), il est plus simple de déduire de l'expression de  $ds^2$  (717) l'équation :

$$(725) \quad \gamma^{-1} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \gamma \left( \frac{dx_4}{ds} \right)^2 = -1 \quad \begin{array}{l} \text{car } d\theta = 0 \\ \text{Sin}\theta = 0 \end{array}$$

Des trois équations précédentes (723) (724) (725) nous déduisons :

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + (\gamma - 1) \frac{h^2}{r^2} - K^2 = -\gamma$$

et par substitution de la valeur de  $\gamma$ ,  $\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$

$$(726) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = (K^2 - 1) + \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{2GM}{c^2} \frac{h^2}{r^3} \\ r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h \end{array} \right.$$

Les équations du mouvement elliptique résultant de la loi newtonienne sont les suivantes :

$$(727) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{a} + \frac{2GM}{r} \quad \begin{array}{l} a \text{ étant le de-} \\ \text{mi grand axe de l'orbite} \end{array} \\ r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h_0 \end{array} \right.$$

Comparons ces équations newtoniennes à celles qu'on déduit de la théorie d'Einstein :

La première des équations (726) contient un terme supplémentaire  $\frac{2GM}{c^2} \frac{h^2}{r^3}$  que ne prévoyait pas l'ancienne théorie. Dans (726),  $ds = c d\tau$

$d\tau$  étant le temps propre dans le champ de gravitation, et  $r$  peut être confondu pratiquement avec la distance, au sens euclidien ; donc, à part le terme supplémentaire, on peut identifier les équations.

tions (726) et (727) en posant  $K^2 = 1 - \frac{GM}{c^2 a}$ . De plus, la quantité  $M$ , qui avait été introduite  $\frac{GM}{c^2 a}$  comme constante d'intégration, est la masse de la particule attirante.

A grande distance du centre, le terme supplémentaire est négligeable et l'on retrouve le mouvement prévu par la loi de Newton.

#### 417 - Première vérification de la loi d'Einstein - Le déplacement du périhélie de la planète Mercure - -

Les calculs qui précèdent s'appliquent au mouvement des planètes ou de leurs satellites. Des équations (726), on déduit immédiatement:

$$\left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = (K^2 - 1) + \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{2GMh^2}{c^2 r^3}$$

ou, en posant  $u = \frac{1}{r}$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{K^2 - 1}{h^2} + \frac{2GM}{c^2 h^2} u + \frac{2GM}{c^2} u^3$$

Par dérivation, il vient:

$$(728) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{c^2 h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2$$

Dans le système solaire,  $h^2 u^2$  est de l'ordre de  $10^{-9}$ . nous pouvons d'abord négliger le terme en  $u^2$ . Nous obtenons la solution approchée:

$$(729) \quad u = \frac{GM}{c^2 h^2} (1 + e \cos(\varphi - \omega)) \quad \text{e étant l'excentricité}$$

comme en mécanique céleste newtonienne.

Une seconde approximation s'obtient en substituant la valeur (729) de  $u$  dans le terme  $\frac{3GM}{c^2} u^2$ ; l'équation (728) devient:

$$(730) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{c^2 h^2} + \frac{3GM^3}{c^6 h^4} + \frac{6GM^3}{c^6 h^4} e \cos(\varphi - \omega) + \frac{3GM^3 e^2}{2c^6 h^4} (1 + \cos \dots)$$

774

Parmi les termes additionnels ainsi obtenus, le seul qui donne un effet appréciable est le terme en  $\cos \varphi$  parce qu'il constitue une solution de l'équation sans second membre (effet de résonance).

On sait qu'une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = A \cos \varphi$$

est

$$u = \frac{1}{2} A \varphi \sin \varphi$$

Il en résulte pour  $u$  un terme :

$$u_1 = \frac{3G^3 M^3 e}{c^6 h^4} \varphi \sin(\varphi - \omega)$$

qui vient s'ajouter au terme (729), de sorte que, finalement, on obtient, en seconde approximation :

$$\begin{aligned} u &= \frac{GM}{c^2 h^2} \left( 1 + e \cos(\varphi - \omega) + \frac{3G^2 M^2 e}{c^4 h^2} \varphi \sin(\varphi - \omega) \right) \\ &= \frac{GM}{c^2 h^2} \left( 1 + e \cos(\varphi - \omega - \delta\omega) \right) \end{aligned}$$

en posant  $\delta\omega = \frac{3G^2 M^2}{c^4 h^2} \varphi$  et négligeant  $(\delta\omega)^2$

La planète décrit une courbe non fermée, mais voisine d'une ellipse dont le périhélie avance proportionnellement à  $\varphi$ , c'est-à-dire tourne pendant une période d'une fraction de tour  $\frac{\delta\omega}{\varphi}$

$$(731) \quad \frac{\delta\omega}{\varphi} = \frac{3GM^2}{c^4 h^2}$$

$h^2$  se calcule aisément d'après (726) en remplaçant  $K^2 - 1$  par sa valeur  $-\frac{GM}{c^2 a}$ , négligeant le terme en  $\frac{h^2}{r^3}$  et remarquant que lorsque le rayon vecteur coïncide avec le grand axe  $\frac{dr}{ds} = 0$ , on trouve  $h^2 = \frac{GM}{c^2} a(1 - e^2)$  la rotation du périhélie, exprimée en fraction de tour par période est :

$$(732) \quad \frac{\delta\omega}{\varphi} = \frac{3GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

Le périhélie des planètes doit donc posséder un lent mouvement de rotation. Le calcul numérique, par application de la formule qui vient d'être établie, montre que pour les planètes autres que Mercure, l'écart entre les prévisions conformes à la loi de Newton et celles qui résultent de la loi d'Einstein est de l'ordre des erreurs d'observation.

Par contre, pour Mercure, en donnant aux constantes les valeurs suivantes :

$$\frac{GM}{c^2} = 1,47 \cdot 10^5 \quad (M \text{ masse du Soleil}) \quad a = 5,85 \cdot 10^{12} \quad e = 0,21$$

et prenant 88 jours pour la durée de révolution, on obtient d'après la formule une rotation de  $42''$  par siècle.

Il y a bientôt un siècle que Leverrier a établi la théorie de Mercure, en tenant compte des perturbations dues aux autres planètes, à Vénus en particulier. Le désaccord entre les prévisions de la mécanique newtonienne et les observations est  $43''$  par siècle. On n'avait pas réussi à expliquer cet écart.

La nouvelle mécanique céleste, fondée sur l'emploi de la formule (717) et sur la loi d'inertie  $\int ds = 0$  se développe actuellement : elle semble devoir combler les lacunes qui subsistaient dans la théorie de la lune.

#### 418 - Seconde vérification de la loi d'Einstein -

##### La déviation des rayons lumineux -

La ligne d'Univers d'un rayon lumineux est une géodésique de longueur nulle. Faisant  $ds = 0$  dans l'équation (717), nous obtenons pour le mouvement dans un plan ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) :

$$(733) \quad \frac{1}{\gamma} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = c^2 \gamma$$

Pour une propagation radiale,  $d\varphi = 0$

$$\frac{dr}{dt} = c\gamma = c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right).$$

La vitesse, dans le système de coordonnées choisi, diminue à mesure que l'onde se rapproche du centre qui produit le champ de gravitation; il y a en réalité répulsion de la lumière par ce centre: il est donc, au fond, inexact de qualifier le centre matériel de "masse attirante".

La matière est un centre de déformation de l'Espace-Temps et l'effet produit sur un mobile nous apparaît, selon la grandeur et l'orientation de la vitesse, soit sous l'aspect d'une attraction, soit sous l'aspect d'une répulsion.

Pour une propagation transversale,  $dr = 0$ ,  $\frac{r d\phi}{dt} = c\sqrt{\gamma}$ : la vitesse de la lumière n'est pas la même que dans le cas de la propagation radiale.

Il est essentiel de remarquer que ces vitesses radiale et transversale sont définies à l'aide des coordonnées que nous avons choisies. Il n'en reste pas moins vrai que localement, un observateur placé en un point quelconque du champ de gravitation, faisant avec des règles et des horloges la mesure de la vitesse de la lumière dans son voisinage immédiat, c'est-à-dire confondant l'Univers réel avec l'Univers euclidien tangent, trouverait toujours, dans toutes les directions, une vitesse égale à la constante universelle  $c$ . Le résultat qui précède est valable seulement pour celui qui introduira les coordonnées quasi euclidiennes  $r$ ,  $\phi$  et  $t$  et observera un long parcours du rayon lumineux: ce seront précisément ces coordonnées qu'utilisera un observateur terrestre, situé dans une région où le champ de gravitation est faible comparativement au champ dans le voisinage du soleil, et pour qui l'Univers est presque euclidien.

La déviation d'un rayon lumineux dans le champ de gravitation se conçoit aisément: soit un rayon passant dans le voisinage du Soleil; considérons le front de l'onde. Ses parties les plus rapprochées du Soleil se propagent moins vite que les parties plus éloignées, le front d'onde

pivote, et la direction de propagation est déviée.  
On peut comparer ce phénomène au pivotement du front des ondes de la mer, lorsque celles-ci arrivent obliquement sur le rivage et que les parties les plus voisines de la rive sont ralenties.

Avant d'aborder la théorie, considérons l'expression de  $ds^2$  (717) ; l'effet de gravitation sur un mobile est déterminé par deux termes, celui en  $dx$  et celui en  $dt$ . C'est ce dernier terme qui détermine la force newtonienne de gravitation et, comme nous l'avons déjà fait remarquer, pour une masse matérielle c'est presque uniquement l'effet de ce terme qui se manifeste, parce que  $c dt$  est très grand vis à vis de  $dx$  ; en d'autres termes, le caractère non euclidien de l'espace considéré indépendamment du temps n'a que peu d'influence.

Mais, pour la lumière, les deux termes ont même importance et nous devons nous attendre à un résultat très différent de celui qu'on obtiendrait en calculant le poids de la lumière d'après la loi de Newton. Nous allons effectivement trouver une déviation double de celle que donnerait la loi newtonienne.

Soit  $c$  la vitesse de la lumière dans une direction faisant un angle  $\alpha$  avec le rayon vecteur ; d'après (733) on a :

$$(734) \quad c^2 \left( \frac{1}{\gamma} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) = c^2 \gamma$$

Pour ne pas avoir une vitesse variable avec la direction, changeons de coordonnées en posant :

$$(735) \quad r = r_1 + \frac{GM}{c^2}$$

ce qui revient, dans le cas du Soleil, à diminuer toutes les distances de la très petite quantité  $\frac{GM}{c^2} = 1,47$  Kilomètre.  
Nous obtenons, en négligeant le carré de  $\frac{GM}{c^2 r_1}$

$$r^2 = r_1^2 \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r_1} \right) = \text{sensiblement } \frac{1}{\gamma} r_1^2$$

L'équation (733) peut alors s'écrire :

778

$$\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \left(r_1 \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2 \gamma^2$$

et la vitesse, avec ces coordonnées, est la même dans toutes les directions :

$$(736) \quad c_1 = c\gamma = c\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) = \text{sensiblement } c\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)$$

Mais cette vitesse dépend de la distance  $r_1$ . Le trajet du rayon lumineux est déterminé par la condition de temps minimum (condition de Fermat) : tout se passe comme si l'espace était euclidien, et rempli d'une matière ayant un indice de réfraction :

$$(737) \quad n = \frac{c}{c_1} = 1 + \frac{2GM}{c^2 r_1}$$

La trajectoire du rayon lumineux dans un milieu réparti en couches concentriques satisfait à la condition :

$$(738) \quad nr = c^2$$

$r$  étant la distance du centre à la tangente.

D'autre part, d'après (737), nous avons approximativement :

$$(739) \quad n^2 = 1 + \frac{4GM}{c^2 r_1}$$

(738) et (739) sont l'intégrale des aires et l'intégrale de l'énergie dans le mouvement, suivant la loi de Newton, d'une particule de vitesse  $\frac{c}{n}$  attirée par une masse  $2M$ .  
L'orbite est une hyperbole dont le demi-axe est  $a = \frac{2GM}{c^2}$  : cette hyperbole est la trajectoire de la lumière.  
Si la distance du sommet au foyer est  $R$ , nous avons :

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

$$a(e-1) = R$$

et par suite

$$e = 1 + \frac{c^2 R}{2GM} = \text{sensiblement } \frac{c^2 R}{2GM}$$

le très petit angle des asymptotes est :

$$\frac{2}{\sqrt{e^2-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{e} \quad \text{ou} \quad \frac{4GM}{c^2 R}$$

Pour un rayon venant de très loin ( $-\infty$ ) et parvenu à grande distance du centre ( $+\infty$ ) après être passé à la distance minimum  $R$  de ce centre, la déviation totale est donnée précisément par l'angle des asymptotes ; elle est égale à :

$$(740) \quad \alpha = \frac{4GM}{c^2 R}$$

Cette déviation est double de celle qu'on calculerait par la loi de Newton.

Pour un rayon passant tangentiellement au bord du Soleil, on a  $\frac{GM}{c^2} = 1,47$  Kilomètre,  $R =$  rayon du Soleil  $= 697\,000$  Kilomètres  
par suite  $\alpha = 1",74$

La déviation de la lumière constitue l'"*experimentum crucis*" permettant de décider entre la loi d'Einstein et celle de Newton. Si une étoile vue près du bord du Soleil, est déviée vers l'extérieur du Soleil de  $1",74$  à partir de sa position normale sur la sphère céleste, la théorie de Newton doit être abandonnée, et le résultat est favorable à la théorie d'Einstein.

Les astronomes de Greenwich et d'Oxford ont vérifié l'exactitude du résultat d'Einstein en profitant de l'éclipse totale de Soleil du 29 Mai 1919.

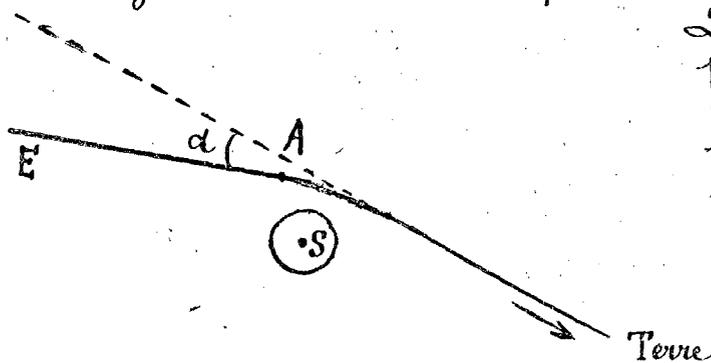
La zone de totalité traversait l'Atlantique au voisinage de l'équateur, commençant au Brésil et finissant en Afrique. Les conditions étaient favorables, plusieurs étoiles brillantes devant être voisines du Soleil pendant l'éclipse.

Une première expédition (M<sup>m</sup>. Crommelin et Davidson) se rendit à Sobral, au Brésil, et prit une dizaine de photographies pendant les 5 minutes que dura la totalité de l'éclipse. Deux mois après, la même région du ciel fut visible de nuit et fut photographiée avec les mêmes appareils pour permettre la comparaison. Le déplacement moyen fut ramené au bord du Soleil (déplacement inversement proportionnel à  $R$  d'après la formule (740)) et trouvé égal à  $1",98$ .

L'autre expédition (M<sup>m</sup>. Eddington et Cottingham), installée dans l'île du Prince (golfe de Guinée), a trouvé une moyenne de  $1",60$ .

La moyenne entre les deux résultats,  $1",79$ , concorde remarquablement avec la valeur prévue par la loi d'Einstein. L'accord existe, non seulement en moyenne, mais dans les déplacements individuels des diverses étoiles : ces déplacements varient en raison inverse de la distance au centre du Soleil.

La déviation observée ne peut d'ailleurs pas être attribuée à une atmosphère ou à de la matière cosmique entourant le Soleil et s'étendant jusqu'aux distances pour lesquelles les mesures ont été faites. Le calcul indique, en effet, que la densité d'une telle atmosphère serait assez grande pour affaiblir notablement, par diffusion de la lumière, l'éclat des étoiles. D'autre part, des comètes ont été suivies dans ces régions et n'ont manifesté aucun ralentissement.



La figure ci-contre fait comprendre que la déviation d'un rayon lumineux ne peut être appréciable que si la lumière vient d'une source E extrêmement éloignée de l'astre S qui produit le champ de gravitation. Si la source était

en A, elle serait vue dans une direction extrêmement voisine de sa direction réelle; tel serait le cas pour une étoile double A-S.

#### 419 - Troisième vérification de la loi d'Einstein. Le champ de gravitation modifie le cours du temps -

Pour une particule immobile dans un champ de gravitation, on a  $dr=0$   $d\theta=0$   $d\phi=0$ , de sorte que la formule (717) se réduit à :

$$ds = c \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dt$$

Considérons une particule sur le Soleil : l'intervalle de temps entre deux événements infiniment voisins, concernant cette particule, est  $dt$  dans un système de référence lié au Soleil, mais en dehors du champ de gravitation. D'autre part l'intervalle de temps propre  $d\tau$  de la particule, c'est-à-dire le temps qui serait mesuré par une horloge sur le Soleil même, dans le même champ de gravitation que la particule, est :

$$(741) \quad d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} dt, \quad R \text{ étant le rayon du Soleil}$$

La Terre ayant, par rapport au Soleil, une faible vitesse, le champ de gravitation sur la Terre étant, d'autre part, faible vis à

vis du champ à la surface du Soleil,  $d_t$  est pratiquement le temps mesuré par l'observateur terrestre.

$d_t$  est plus grand que  $d$ . Par conséquent la période des ondes lumineuses doit nous paraître plus longue si la source est sur le Soleil; les raies spectrales solaires doivent nous paraître déplacées vers le rouge.

La confirmation expérimentale a été donnée par M. Pérot (1). La vérification était difficile, car les raies spectrales sont modifiées par la pression et par l'effet Doppler dû, non seulement au mouvement relatif de la Terre et du Soleil (dont on tient compte aisément), mais au mouvement des vapeurs dans l'atmosphère solaire.

Par une méthode interférentielle (étalons de Pérot et Fabry), M. Pérot a d'abord étudié, au laboratoire, l'influence de la pression sur des raies (têtes de bandes de cyanogène) jusqu'alors considérées comme insensibles à la pression.

Il a reconnu que ces raies ont une longueur d'onde légèrement plus grande lorsque la source est dans le vide.

L'observation de la raie (tête de bande) 4197 Angstr. du cyanogène a été faite par la même méthode interférentielle, dans le spectre d'absorption de l'atmosphère solaire, la région absorbante étant, d'après ce qu'on sait actuellement de la constitution du Soleil, dans les régions hautes de cette atmosphère, régions où la pression est faible. La longueur d'onde solaire a été comparée à la longueur d'onde terrestre à basse pression. Après correction de l'effet du mouvement relatif de la Terre, la longueur d'onde solaire est plus grande que la longueur d'onde terrestre, leur différence est 0,009 unité angström. En faisant la correction du mouvement de chute des centres absorbants, on obtient 0,007.

Le nombre d'Einstein est compris entre le nombre brut et le nombre corrigé.

Dans un travail plus récent (2) M. Pérot a comparé la longueur d'onde de la raie  $b_1$  du magnésium dans l'atmosphère solaire à la longueur d'onde de cette même raie au laboratoire. La raie  $b_1$  et la raie  $b_2$  ne subissant pas la même variation de longueur d'onde sous l'influence

(1) A. Pérot. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 26 Avril et 26 Juillet 1920.

(2) A. Pérot. Comptes rendus de l'Ac. des Sc. 7 mars 1921.

de la pression, le rapport de leurs longueurs d'onde, permet de mesurer la pression: les mesures ont prouvé que sur le Soleil, dans la couche d'absorption des raies  $b$ , la pression est pratiquement nulle. On peut donc comparer la longueur d'onde de  $b_1$  solaire à la longueur d'onde de  $b_1$  terrestre à très basse pression; la différence est dans les limites d'approximation des mesures, celle qui résulte de la formule d'Einstein.

La loi de la gravitation a donc reçu de remarquables confirmations dans deux domaines différents: mouvement d'un mobile (astre ou onde lumineuse), influence de la gravitation sur la mesure du temps.

#### 420 - Remarques sur la loi de la gravitation -

La loi de la gravitation dans le vide,  $R_{\mu\nu} = 0$ , constitue, nous l'avons déjà dit, une restriction considérable imposée aux géométries de l'Espace-Temps. Par contre, dans la matière, supposée continue c'est-à-dire envisagée sous l'aspect macroscopique, tous les genres d'Espace-Temps deviennent théoriquement possibles: nous pouvons, en effet, nous donner arbitrairement les dix potentiels  $g_{\mu\nu}$ , et déterminer par les dix équations

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\chi T_{\mu\nu}$$

les conditions que doit remplir la matière pour produire ces potentiels. Il importe toutefois d'observer qu'on peut se trouver ainsi conduit à une distribution physiquement impossible, la densité pouvant être excessive, ou au contraire négative, ce qui n'a plus aucun sens.

Dans le vide, les équations  $R_{\mu\nu} = 0$  se réduisent à six conditions, à cause des quatre identités

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_{\mu}} \equiv 0 \quad (\text{n}^{\circ} 409, \text{ identités (666)})$$

qui correspondent à la quadruple indétermination des coordonnées.

Quand il y a de la matière présente, ces quatre identités se transforment en quatre équations

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_{\mu}} \equiv 0 = -\chi T^{\nu}_{\mu} \quad (\text{n}^{\circ} 409)$$

entre les grandeurs qui forment le tenseur matériel.

La loi de la gravitation impose donc des conditions matérielles en nombre égal au nombre des dimensions de l'Univers. Ces quatre conditions constituent la loi de conservation de l'impulsion et de l'énergie.

À la question "la nouvelle loi de la gravitation est-elle bien conforme aux lois de la mécanique?" il faut répondre: "c'est elle qui résume la mécanique toute entière." La loi de la gravitation est la loi de l'inertie, car gravitation et inertie sont deux aspects d'une même qualité de la matière; c'est aussi la loi de conservation de l'impulsion, de l'énergie et de la masse.

Dans une région contenant de la matière, une grandeur fondamentale est la densité en chaque point: la densité multipliée par le volume est la masse, ou, ce qui revient au même, l'énergie ( $W = m C^2$ ). Mais l'énergie ne fait intervenir que le volume tridimensionnel d'espace et l'on voit qu'une grandeur plus fondamentale que l'énergie est celle qui fait intervenir le quadrivolume d'Univers, l'invariant  $\sqrt{-g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ . Cette grandeur est l'action, produit d'une énergie par un temps.

Le scalaire  $R$  étant égal à  $\chi \rho$  (n° 409 eq. (661)), ce scalaire est proportionnel à la densité d'action gravifique. Nous allons montrer qu'il représente aussi la courbure de l'Univers.

## § 9 - La courbure de l'espace et du temps

### Hypothèses sur la forme de l'Univers -

#### 421 - Le scalaire courbure totale -

Imaginons un hyperspace à quatre dimensions limitant un hypervolume dans un hyperspace euclidien à cinq dimensions, comme une surface courbe à deux dimensions limite un volume à trois dimensions.

Par extension d'une formule connue pour les surfaces, l'équation de l'hyperspace, rapportée aux lignes

de courbure et à la normale ( $z$ ) en un point peut s'écrire :

$$(742) \quad 2z = \frac{x_1^2}{R_1} + \frac{x_2^2}{R_2} + \frac{x_3^2}{R_3} + \frac{x_4^2}{R_4} + \text{termes de puissances supérieures.}$$

$R_1, R_2, R_3, R_4$  sont les rayons principaux de courbure.

D'autre part, l'hyperespace à cinq dimensions étant euclidien, on peut poser :

$$(743) \quad ds^2 = -dz^2 - \sum_{\mu} dx_{\mu}^2$$

Éliminant  $z$  entre (742) et (743) nous obtenons l'expression de  $ds^2$  pour l'hyperespace à quatre dimensions :

$$(744) \quad ds^2 = -\left(1 + \frac{x_1^2}{R_1^2}\right) dx_1^2 - \dots - \frac{2x_1 x_2}{R_1 R_2} dx_1 dx_2 - \dots$$

Dans le cas de l'Espace-Temps,  $ds$  est un intervalle d'Univers si nous regardons les  $x_{\mu}$  comme des variables d'espace ; il y a alors une coordonnée imaginaire (le temps peut être considéré comme une longueur imaginaire).

à l'origine, on a :

$$g_{\mu\mu} = -1 ; g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu) ; \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\rho}} = 0$$

Les seuls termes qui subsistent dans l'invariant  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  sont :

$$-g^{\mu\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\rho}} \left\{ \begin{matrix} \mu\mu \\ \rho \end{matrix} \right\} + g^{\mu\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left\{ \begin{matrix} \mu\rho \\ \rho \end{matrix} \right\}$$

Calculant les symboles de Christoffel, on trouve :

$$(745) \quad R = -2 \left( \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_1 R_4} + \frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_2 R_4} + \frac{1}{R_3 R_4} \right)$$

$\frac{R}{2}$  est donc la généralisation de la courbure de Gauss  $\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)$  dans la théorie des surfaces. Nous appellerons le scalaire  $\frac{R}{2}$  "courbure totale".

#### 422 - Le principe de moindre action<sup>(1)</sup>

L'action considérée par Lorentz a une expression de la forme :

$$\int (H_1 + H_2 + H_3) \sqrt{-g} d\omega$$

$\sqrt{-g} d\omega$  étant l'élément de quadrivolume (invariant)  $H_1$  est une fonction, se rapportant à la matière, dépendant

(1) Résumé par M. Jacques Bossignol

explicitement des  $x^\mu$ , des  $g^{\mu\nu}$  et de leurs dérivées.

$H_2$  est une fonction se rapportant au champ électromagnétique; c'est une fonction des  $g^{\mu\nu}$ , des  $\varphi_\mu$  et de leurs dérivées ( $\varphi_\mu$  sont les composantes du quadri-vecteur potentiel).

Enfin  $H_3$  est le terme de gravitation. Il dépend des  $g^{\mu\nu}$  et de leurs dérivées  $\left( g_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} ; g_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)$

Ce terme  $H_3$  dépend linéairement des  $g_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ , les coefficients n'étant fonctions que des  $g^{\mu\nu}$ .

L'intégration est étendue à un domaine quadridimensionnel, et l'on suppose que les fonctions ont des variations nulles aux limites de ce domaine.

Le terme de gravitation  $H_3$  est un invariant par rapport aux transformations de coordonnées admettant pour invariant fondamental la forme quadratique

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \text{ Posons } \mathcal{H}_3 = H_3 \sqrt{-g} \text{ et intégrons par}$$

parties l'expression  $\int \mathcal{H}_3 d\omega$ , les  $g^{\mu\nu}$ ,  $g_{\alpha}^{\mu\nu}$ ,  $g_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$  variant; d'après l'hypothèse que nous avons faite sur la manière dont  $H_3$  dépend des  $g_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ , nous obtenons une expression de la forme:

$$\int \mathcal{H}_3' d\omega + F$$

$\mathcal{H}_3'$  ne dépendant plus que des  $g^{\mu\nu}$  et des  $g_{\alpha}^{\mu\nu}$ ; quant à  $F$ , c'est la partie tout intégrée: elle est nulle, puisque les  $\int \partial g^{\mu\nu}$ ,  $\int \partial g_{\alpha}^{\mu\nu}$ , ... sont supposés s'annuler aux limites du domaine  $\int d\omega$  d'intégration.

$\frac{\mathcal{H}_3'}{\sqrt{-g}}$  est donc un invariant contenant les  $g^{\mu\nu}$ ,  $g_{\alpha}^{\mu\nu}$ ; c'est nécessairement, à un facteur constant près, la courbure d'Univers  $R$ , puisque  $R$  est le seul invariant ne faisant intervenir que les  $g^{\mu\nu}$  et les  $g_{\alpha}^{\mu\nu}$ , pour le groupe de transformations dont la forme quadratique fondamentale est  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ .

Nous pouvons donc poser:

$$\mathcal{H}_3' = \frac{1}{\chi} R \sqrt{-g} \quad \chi \text{ étant une constante}$$

et nous obtenons:

$$\int H_3 \sqrt{-g} d\omega = \int \frac{1}{\chi} R \sqrt{-g} d\omega$$

Pour l'action matérielle, Lorentz a pris

$$c \int \sqrt{g_{\mu\nu} W^\mu W^\nu} d\omega$$

où  $W^\mu = \rho_0 \frac{dx^\mu}{dx^4}$ ,  $\rho_0$  étant la densité (au repos) de la matière au point considéré. En particulier, si le domaine envisagé ne contient qu'une particule de masse au repos  $m_0$ , le terme relatif à  $H_1$  se réduit à

$$m_0 c \int ds = m_0 c^2 \int dt. \text{ On a donc bien une}$$

"action" au sens mécanique du mot, c'est-à-dire le produit d'une énergie ( $m_0 c^2$ ) par un temps. La loi d'inertie  $\int ds = 0$  n'est autre que la loi d'action stationnaire.

Nous devons remarquer que, pour un espace ne contenant que du rayonnement,  $H_1 = 0$  puisque la masse au repos de l'énergie rayonnante est inexistante.

C'est en ce fait que réside la plus grosse différence entre matière et rayonnement, c'est-à-dire entre énergie liée et énergie libre.

Méthode de MM. Hilbert et Lorentz. — On peut partir du principe d'action stationnaire

$$\int H \sqrt{-g} d\omega = 0,$$

admis à priori.

Explicitant l'équation et remarquant que les variations portent sur les  $x_\mu$ ,  $g^{\mu\nu}$ , et  $\varphi_\mu$  ainsi que sur leurs dérivées,

1° si l'on annule les coefficients des  $\delta x_\mu$  sous le signe  $\int$ , on obtient les équations des géodésiques d'Univers.

2° si l'on annule les coefficients des  $\delta g^{\mu\nu}$ , on obtient les dix équations  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\chi (T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu})$  qui expriment la loi de la gravitation.

3° les termes en  $\delta \varphi_\mu$  donnent quatre équations permettant de déterminer les potentiels  $\varphi_\mu$ . Ces équations sont équivalentes aux équations de Maxwell généralisées.

Sur les 14 équations (2° et 3°), 10 seulement sont indépendantes, le quadruple degré d'arbitraire correspondant à l'indétermination du système de coordonnées.

L'équation

$$\int H \sqrt{-g} d\omega = 0$$

est l'expression

la plus générale des lois de la Nature.

423 - La substance présente dans l'Univers doit être limitée et l'Univers ne doit pas être infini dans toutes ses dimensions -

Il est un fait démontré : l'Univers n'est pas euclidien dans son ensemble. Il possède en chaque point - événement des courbures connexes du champ de gravitation, courbures auxquelles contribue toute substance<sup>(1)</sup> existante. Ce n'est plus seulement, comme en relativité restreinte, l'union de l'espace et du temps, c'est l'union de l'espace, du temps, et de la substance.

Il est donc impossible de conserver l'ancienne conception de l'Univers, qui comportait d'ailleurs des difficultés connues depuis longtemps et que nous allons brièvement résumer. L'espace de Newton est infini : prenant comme unité de volume un volume suffisamment grand, une première hypothèse est que la matière est répandue partout avec une même densité moyenne  $\rho$  ; la quantité de matière est alors infinie comme l'espace. D'après la théorie de Newton, il aboutit à une masse  $m$  des lignes de force, venant de l'infini, dont le nombre est proportionnel à  $m$  ; une sphère de volume  $V$  contient, en moyenne, une masse  $\rho V$  ; par conséquent le nombre des lignes de force qui entrent dans la sphère est proportionnel à  $\rho V$ , et, par unité de surface, il entre un nombre de lignes de force proportionnel à  $\frac{\rho V}{S}$ , c'est-à-dire proportionnel au rayon de la sphère considérée. L'intensité du champ à la surface de la sphère augmenterait donc indéfiniment avec un rayon croissant, résultat qui n'a aucun sens puisqu'un point quelconque peut être considéré comme étant sur la surface d'une sphère de rayon arbitraire.

La loi de Newton n'est pas la loi exacte, mais si l'on admet que l'espace est infini, et que la densité moyenne de la matière est partout la même, la loi d'Einstein conduit à la même contradiction.

Doit-on alors supposer que l'Univers a une sorte de centre autour duquel la densité de la matière

(1) Le mot substance désignant toute portion d'Univers où l'un des tenseurs  $T_{\mu\nu}$  et  $E_{\mu\nu}$  n'est pas identiquement nul.

est maximum et que la matière se raréfie jusqu'au vide complet? La matière formerait une île dans l'espace infini. Mais, s'il en était ainsi, toute énergie rayonnante sortie de cette île se propagerait à l'infini, sans retour, et se dissiperait; la matière elle-même se disperserait, comme l'atmosphère d'un astre qui s'évapore peu à peu dans l'espace. Il faudrait alors admettre que, puisque l'Univers n'est pas mort, la matière n'existe que depuis un temps limité, ce qui recule toutes les difficultés et n'en résout aucune.

Pour un homme intelligent, laissé dans l'ignorance de la forme de la Terre, la disparition progressive d'un navire sous l'horizon serait une révélation; ayant constaté que la surface est courbe, cet homme envisagerait la possibilité d'une surface finie. Pareille révélation nous est donnée par la théorie d'Einstein, par le simple fait qu'un rayon lumineux peut ne pas se propager en ligne droite dans le vide. Nous sommes amenés à penser que l'Univers peut n'être pas infini dans toutes ses dimensions. Il est même possible, — et c'est l'hypothèse d'Einstein — que l'espace soit fini bien qu'illimité comme la surface d'une sphère qui ne comporte pas de bornes puisqu'on peut en faire le tour indéfiniment. Le temps seul resterait infini.

Nous allons maintenant exposer les raisons profondes qui conduisent à la conception d'un espace fini.

424 — La théorie électronique de la matière conduit à envisager l'Univers comme possédant une courbure totale constante dans le vide —

Jusqu'à présent, nous avons adopté comme loi de gravitation dans le vide, les équations :

$$(746) \quad R_{uv} = 0$$

loi nécessaire si l'Univers est infini et s'il est euclidien à l'infini, puisqu'alors la loi doit comporter comme cas particulier  $R_{uv} = 0$ .

Partant de cette loi, nous avons été conduits à prendre comme loi de la gravitation en tout.

point où se trouvent de la matière et de l'énergie électromagnétique :

$$(747) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\chi (T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu})$$

$T_{\mu\nu}$  et  $E_{\mu\nu}$  étant les tenseurs covariants matériel et électromagnétique. Les lois précédentes entraînent les conséquences suivantes :

1° Dans le vide,  $R_{\mu\nu} = 0$  et a fortiori la courbure totale

2°  $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R$  est nulle. (1)

En toute région où se trouve de l'énergie électromagnétique, sans matière,  $R_{\mu\nu} \neq 0$  mais la courbure totale est encore nulle, parce que le scalaire  $g^{\mu\nu} E_{\mu\nu}$  du tenseur d'énergie électromagnétique est nul, en faisant  $T_{\mu\nu} = 0$  dans l'équation (747) et prenant les scalaires des deux membres, on a bien, en effet,  $R = 0$ .

3° S'il y a de la matière, en prenant les scalaires on obtient :

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = -\chi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

Or  $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R$  ;  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$  ;  $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \rho$  ; on a donc :

$$R = \chi \rho \quad (\rho \text{ densité propre}) \quad (\text{relation déjà indiquée au n}^\circ 409)$$

Pour le moment, aucune contradiction ne se présente. Mais il importe d'insister sur le fait que les équations "matérielles", où figure  $T_{\mu\nu}$  représentent l'aspect macroscopique des phénomènes : l'introduction de la densité implique que la matière est considérée comme continue.

Cherchons à pénétrer plus loin en envisageant maintenant l'aspect microscopique. Il surgit une difficulté insurmontable si l'on conserve les lois précédentes.

Le développement de la théorie électronique a, en effet, conduit à considérer l'énergie matérielle comme étant d'origine électromagnétique. Nous ne devons donc plus, dans l'équation (747), séparer la matière et le champ électromagnétique ; nous devons supprimer le tenseur  $T_{\mu\nu}$

(1) Ce qui ne signifie pas que l'espace-temps est partout euclidien.

La courbure totale peut être nulle sans que toutes les courbures principales soient nulles.

et ne conserver que le tenseur  $E_{\mu\nu}$  : celui-ci n'est plus seulement le tenseur électromagnétique pour les phénomènes envisagés à notre échelle, il englobe l'énergie de la matière elle-même.

La loi générale devient :

$$(748) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\chi E_{\mu\nu}$$

Mais alors, formant les scalaires des deux membres, nous obtenons  $R = 0$  en tout point, même s'il y a de la matière présente. Ce résultat est absurde, car si  $R$  était toujours nul, sa valeur moyenne serait nulle, et  $R = \chi \rho_0$  serait nul aussi dans l'aspect macroscopique.

Einstein a présenté la question sous une forme un peu différente : la dérivée covariante contractée du premier membre de l'équation

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} R = -\chi E_{\mu}^{\nu}$$

étant nulle, (se reporter au n° 410), il en est de même de  $E_{\mu}^{\nu}$ . En faisant usage des équations de l'électromagnétisme, on obtient, après calcul :

$$(749) \quad F_{\sigma\alpha} J^{\alpha} = 0 \quad \left( F_{\sigma\alpha} = \frac{\partial \phi_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}} ; \phi_{\mu} \text{ quadrivecteur potentiel} \right)$$

La densité de courant devrait être nulle en tout point, c'est-à-dire qu'il n'y aurait nulle part ni courant de convection ni densité de charge.

Nous sommes donc forcés de choisir entre les deux alternatives suivantes : ou bien conserver les lois (746-747) et renoncer à une théorie purement électronique de la matière, ou bien modifier les lois de la gravitation de façon à satisfaire la théorie électronique : c'est évidemment cette dernière solution qui est la meilleure.

Nous pouvons alors, comme nous l'avons déjà indiqué (n° 404), adopter comme loi de gravitation dans le vide :

$$(750) \quad R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0$$

$\lambda$  étant une constante universelle. Prenant le scalaire, nous voyons que l'Univers possède une courbure totale

$$(751) \quad R_0 = 4\lambda$$

partout où il n'y a ni matière ni énergie électromagnétique, c'est-à-dire dans le vide.

(on a en effet,  $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \lambda g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 0$  ou  $R - 4\lambda = 0$ )

La loi générale de gravitation s'obtient en remplaçant l'équation (748) par une équation pour laquelle le scalaire du 1<sup>er</sup> membre est nul :

$$(752) \quad \boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R = -\chi E_{\mu\nu}}$$

Le terme  $\frac{1}{4} g_{\mu\nu} R$ , au lieu de  $\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ , s'impose, car autrement le scalaire du premier membre ne serait pas nul, et comme le scalaire de  $E_{\mu\nu}$  est nul il faudrait ajouter au tenseur  $E_{\mu\nu}$  un autre tenseur : la théorie purement électromagnétique de la matière ne serait pas satisfaite.

Si l'on forme la dérivée covariante contractée des deux membres de l'équation :

on trouve, au lieu de (749)  $R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{4} g^{\nu}_{\mu} R = -\chi E^{\nu}_{\mu}$

$$(753) \quad F_{\sigma\alpha} J^{\alpha} + \frac{1}{4\chi} \frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}} = 0$$

Partout où  $J^{\alpha} = 0$ , c'est-à-dire en dehors des lignes d'Univers des charges électriques, la courbure totale est constante ( $R = R_0$ ). La courbure totale est la même dans le vide et dans les régions où se trouve seulement de l'énergie libre. (1)

La pression de Poincaré. (2) aux points d'Univers où sont présentes des charges électriques, posons :

$$J^{\sigma} = p \frac{dx_{\sigma}}{ds}$$

Multipliant l'équation (753) par  $J^{\sigma}$  (multiplication intérieure), et remarquant que  $F_{\sigma\alpha}$  étant symétrique gauche,  $J^{\alpha} J^{\sigma} F_{\sigma\alpha} = 0$ , nous obtenons :

$$(754) \quad \frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}} \frac{dx_{\sigma}}{ds} = 0$$

(1)  $J^{\alpha}$  représente le courant de convection et la densité de charge, mais non le courant de déplacement de Maxwell.

(2) Voir le n° 378.

La courbure totale  $R$  est donc constante sur chaque ligne d'Univers d'une charge, mais elle a une valeur différente de la courbure  $R_0$  dans le vide. Les lignes d'Univers des électrons constituent des sortes de rides où la courbure  $R$  est modifiée.

Einstein a suggéré, que la courbure totale  $R$  joue le rôle d'une pression négative, qui en dehors du corpuscule a une valeur constante  $R_0$ ; à l'intérieur de chaque corpuscule règne une pression différente. C'est la variation de courbure  $R - R_0$  qui empêche la dissipation de la charge de l'électron. La courbure (moyenne) à l'intérieur de l'électron est constante dans le temps.

Revenons maintenant à l'aspect macroscopique de la matière; c'est-à-dire introduisons de nouveau le tenseur matériel  $T_{\mu\nu}$ ; la loi de gravitation devient:

$$(755) \quad R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\chi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

$R_{\mu\nu}$  de la formule (660) étant simplement remplacé par  $R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}$ . Formant les scalaires des deux membres, remplaçant  $\lambda$  par  $\frac{R_0}{4}$  ( $R_0$  courbure dans le vide) et  $T$  par  $\rho_0$  ( $\rho_0$  densité propre de la matière), il vient:

$$(756) \quad R - R_0 = \chi \rho_0$$

au lieu de  $R = \chi \rho_0$  (n° 409)

Dans l'aspect microscopique,  $(R - R_0)$  détermine la pression de Poincaré; dans l'aspect macroscopique  $(R - R_0)$  représente la densité (divisée par  $\chi$ ),  $R$  étant alors la courbure moyenne. Cette modification de la loi de la gravitation:

$$(757) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\chi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \\ \text{ou} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R - 2\lambda) = -\chi T_{\mu\nu} \\ \text{ou encore} \quad R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R' = -\chi T_{\mu\nu} \end{array} \right.$$

n'entraîne aucun changement dans les conclusions qui précèdent (1):

(1) Ses équations du mouvement du point matériel (mouvement des planètes) restent pratiquement les mêmes, le terme  $\lambda g_{\mu\nu}$  étant très petit et pouvant être négligé.

il suffit de remplacer  $R_{uv}$  par  $R'_{uv}$ ,  $R$  par  $R'$ . La loi corrigée a pour conséquence, comme la loi primitive, la conservation de l'impulsion et de l'énergie. Enfin les équations (757) peuvent être déduites du principe de moindre action en écrivant

$$H = \int \sqrt{-g} (R - 4\lambda) d\omega.$$

## 425 - L'espace fermé -

Les vitesses relatives des astres sont toujours très-petites par rapport à la vitesse de la lumière. Cette remarque nous permet d'envisager un système de référence relativement auquel la matière est, en moyenne, au repos, et dans lequel les vitesses individuelles sont faibles. Considérant l'aspect du Monde, non plus seulement sous l'aspect macroscopique, mais sous l'aspect ultra-macroscopique ou "cosmique", nous pouvons imaginer un grand volume d'espace (par exemple 1000 parsecs-cubes)<sup>(1)</sup> dans lequel nous envisagerons une densité moyenne  $\rho$ . Supposons que cette densité moyenne soit constante dans l'Univers, ce qui est la seule hypothèse logique, car la matière doit se répandre également partout; nous pouvons, toujours dans l'aspect ultra-macroscopique, ne tenir compte que de la distribution générale de la matière, faire abstraction des irrégularités locales peu importantes dans l'ensemble et des champs de gravitation locaux<sup>(2)</sup>, négliger les pressions et autres forces internes dans la matière.

Le tenseur  $T_{uv}$  se réduit alors sensiblement à la composante

$$T_{44} = g_{44} \rho$$

et les équations (757) s'écrivent:

$$(758) \begin{cases} R_{uv} - (\lambda + \frac{1}{2}\chi\rho) g_{uv} = 0 & \text{si } u \text{ et } v \text{ ne sont pas tous} \\ & \text{deux égaux à } 4. \\ R_{44} - (\lambda + \frac{1}{2}\chi\rho) g_{44} = -\chi g_{44} \rho \end{cases}$$

(1) Le "parsec" est la distance à laquelle la parallaxe est 1".  
1 parsec =  $3 \cdot 10^{13}$  Km ou 3,2 années de lumière.

(2) Bien faibles, en somme, si l'on remarque qu'un rayon lumineux passant tangentiellement au bord du Soleil est dévié seulement de 1",74.

Prenant la position de l'observateur comme origine des coordonnées et adoptant des coordonnées sphériques, une première solution des équations (758) donne les  $g_{uv}$  de l'expression suivante pour  $ds^2$ .

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + c^2 dt^2$$

$$\text{avec } \rho = 0 \quad \lambda = 0$$

C'est la solution de la théorie primitive; l'espace-temps infini et presque euclidien, c'est-à-dire euclidien s'il n'y avait pas des condensations locales que précisément nous négligeons. Cette solution ( $\lambda = 0$ ) est justement celle que nous rejetons, pour les raisons précédemment exposées.

Mais il y a deux autres solutions.

Solution d'Einstein :

$$(759) \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = -dr^2 - U^2 \sin^2 \frac{r}{U} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + c^2 dt^2 \\ \text{avec } \chi\rho = 2\lambda \quad \lambda = \frac{1}{U^2} \end{array} \right.$$

Solution de de Sitter :

$$(760) \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = -dr^2 - U^2 \sin^2 \frac{r}{U} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \cos^2 \frac{r}{U} c^2 dt^2 \\ \text{avec } \rho = 0 \quad \lambda = \frac{3}{U^2} \end{array} \right.$$

Posons  $r = U\chi$   
L'élément de ligne  $\chi$  d'Univers s'écrit :

Solution d'Einstein :

$$(761) \quad ds^2 = -U^2 \left[ d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] + c^2 dt^2$$

Solution de de Sitter :

$$(762) \quad ds^2 = -U^2 \left[ d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] + \cos^2\chi c^2 dt^2$$

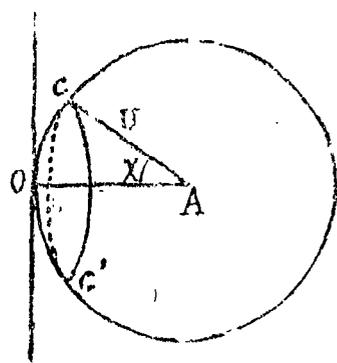
Dans les deux cas, la "coupe à temps constant" ( $dt=0$ ) est un espace à courbure constante positive, de rayon  $U$  : l'espace est fermé.

426 - Hypothèse d'Einstein - L'espace sphérique ou elliptique - Le temps d'Univers rectiligne -

Pour mieux concevoir la solution d'Einstein (759-761), supprimons une des dimensions de l'espace.

Imaginons des êtres infiniment plats, entourés d'objets à deux dimensions, assujettis à vivre sur une surface sphérique sans avoir la perception d'une troisième dimension d'espace. Confondant la surface de la sphère avec le plan tangent, ils imagineront la géométrie plane (euclidienne) et penseront d'abord que leur univers s'étend à l'infini. Ils appelleront "ligne droite" le plus court chemin d'un point à un autre. S'ils partent autour d'un même point, dans toutes les directions, des longueurs égales, ils construiront un cercle, et tant que le rayon sera petit, ils trouveront que le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre indépendant du rayon, le nombre  $\pi$ . Cependant, s'ils traacent des cercles de rayons de plus en plus grands - ce qu'ils appellent rayon étant un arc de grand cercle puisqu'ils restent sur la surface - ils constateront que le rapport de la circonférence au diamètre devient inférieur à  $\pi$ , et diminue à mesure que le rayon augmente; finalement le cercle se réduira à un point, le point antipode. Ses mathématiciens de ce monde comprendront que leur univers est à courbure constante positive et est, non pas un plan, mais une surface finie, bien qu'illimitée, limitant un "hypercercle" à trois dimensions, dont ils détermineront le rayon par leurs mesures d'arpentage.

Soient  $O$  l'origine des coordonnées, prise en un point de la surface sphérique,  $A$  le centre,  $\chi$  l'angle  $OAC$ ,  $\theta$  l'angle azimutal du plan  $OAC$ . L'élément de longueur en  $C$  est :



$$dl^2 = U^2 d\chi^2 + U^2 \sin^2 \chi d\theta^2 \quad U \text{ étant le rayon}$$

et l'élément de ligne d'Univers a pour expression :

$$(763) \quad ds^2 = -U^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2) + c^2 dt^2$$

Revenant aux trois dimensions d'espace, nous avons l'Univers à courbure constante d'Einstein, la formule (761)

- étant l'extension de (763) avec une dimension supplémentaire mesurée par  $\varphi$ .

Faisant  $dt = 0$ , dans la formule (761), nous obtenons l'élément de longueur d'espace :

$$(764) \quad dl^2 = U^2 \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

L'espace à courbure constante positive a deux formes possibles : l'espace sphérique de Riemann et l'espace elliptique de Newcomb, tous deux représentés par l'équation (764).

Nous nous bornerons à étudier l'espace sphérique.

L'espace sphérique est difficile à se représenter : il n'a absolument rien de commun avec l'intérieur d'une sphère tridimensionnelle ; cet espace limite une hypersphère à quatre dimensions, comme une surface sphérique limite une sphère.

Sur la figure ci-contre, représentant une sphère tridimensionnelle, si nous portons sur la surface, à partir du point  $O$ , des longueurs égales  $OC = OX$ , nous obtenons un cercle  $CC'$  dont la circonférence a pour longueur  $2\pi U \sin \chi$ , et dont le rayon mesuré sur la surface est  $OC = r = U \chi$ .

De même, dans l'espace courbe qui limite l'hypersphère, si nous portons à partir d'un point des longueurs égales, nous obtenons une sphère de rayon  $U \chi$  (mesuré dans l'espace sphérique tridimensionnel) et de surface  $4\pi U^2 \sin^2 \chi$ . Portons des longueurs de plus en plus grandes, nous obtenons des sphères de surfaces croissantes jusqu'au rayon  $\frac{1}{2} \pi U$  ; ensuite les sphères décroissent jusqu'à se réduire à un point, le point antipode à la distance  $\pi U$ . Le volume total de l'espace sphérique est  $2\pi^2 U^3$  (l'espace elliptique de Newcomb a un volume  $\pi^2 U^3$ )

La masse totale de la matière est :

$$(765) \quad M = 2\pi^2 U^3 \rho$$

et comme l'on a :  $\rho = \frac{2\lambda}{x}$  ;  $\lambda = \frac{1}{U^2}$  (équations (759))

nous obtenons les relations suivantes :

$$(766) \quad U = \sqrt{\frac{2}{x\rho}} \quad ; \quad U = \frac{x}{4\pi^2} M \quad ; \quad M = \sqrt{\frac{32\pi^2}{x^3\rho}}$$

On voit que dans l'hypothèse d'Einstein, la courbure

d'ensemble de l'Univers est déterminée par la matière mondiale.

Il est difficile de dire si cette conception est exacte. On a cherché à estimer la masse de la matière connue. On pense que la masse du système stellaire est de l'ordre de  $10^9$  fois celle du Soleil ; admettons qu'il y ait 100.000 nébuleuses ayant la même masse que le système stellaire ; on obtiendrait ainsi (2<sup>e</sup> formule (766)) un rayon de  $10^{15}$  kilomètres, et le tour de l'Univers  $2\pi R$  serait de l'ordre de  $10^{15}$  à  $10^{16}$  Km., ce qui représente 100 à 1.000 années de lumière ; ce résultat est absurde, car la distance moyenne des étoiles visibles à l'œil nu est plus grande. On serait donc conduit à admettre l'existence d'énormes quantités de matière non découvertes, ce qui est parfaitement possible car seule la matière lumineuse se révèle à nous. Nous ne connaissons pas les mondes obscurs, c'est-à-dire d'une part les amas peu condensés, d'autre part les étoiles éteintes qui peuvent être très nombreuses ; de plus, il se peut que la lumière émanée des astres très lointains soit trop absorbée pour parvenir jusqu'à nous.

On peut aborder autrement la question en cherchant à évaluer la densité moyenne. Si l'on admet, avec Kapteyn, que la masse contenue dans 1000 parsecs-cubes est, en moyenne, 80 fois la masse du Soleil, on trouve un rayon  $R = \sqrt{\frac{2}{\rho}}$  de l'ordre de  $10^{20}$  Km ; mais ce chiffre est bien incertain  $\propto P$  d'autant plus que s'il y a de la matière obscure, la densité moyenne est plus forte et le rayon moins grand.

Ce qu'il y a de plus remarquable dans l'hypothèse d'Einstein, c'est qu'elle constitue un retour à l'espace absolu et au temps absolu.

Einstein a rétabli la séparation entre l'espace et le temps, en admettant un Univers cylindrique, la direction des génératrices donnant un temps absolu. Mais c'est un absolu dont nous n'avons pas connaissance, car, pour nous l'espace et le temps restent unis suivant la conception de Minkowski : le temps que nous mesurons, variable d'un système à l'autre, variable d'un point à un autre dans un champ de gravitation, n'est pas le temps d'Univers absolu. Toutefois, puisque les vitesses relatives des mobiles

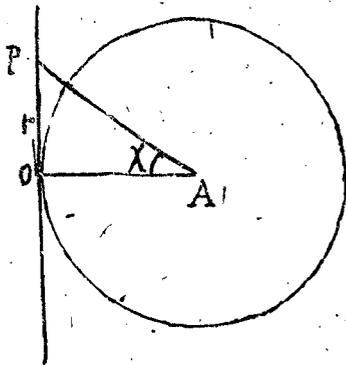
naturels sont toujours très petites par rapport à la vitesse de la lumière, que les champs de gravitation ne déforment que bien peu l'espace et le temps, si l'on peut choisir un système de référence où le temps est absolu et où la matière est quasi-stationnaire, les temps mesurés dans les différents systèmes naturels sont bien voisins du temps d'Univers : l'écart ne serait notable que si l'on parvenait à réaliser des vitesses considérables.

Les géodésiques de l'hyperosphère émancées d'un même point se coupent au point antipode et reviennent au point de départ (comme les grands cercles d'une sphère). Ses rayons lumineux pourraient donc revenir après avoir fait le tour de l'Univers (trajet  $2\pi U$ ).

On a alors fait l'objection suivante : on devrait voir un anti-soleil au point du ciel opposé au Soleil. Cet anti-soleil aurait même diamètre apparent que le Soleil ; la face qu'on verrait ainsi serait la face opposée à la Terre et, s'il n'y avait pas d'absorption, l'anti-soleil serait aussi brillant que le Soleil lui-même. Ce n'est pas une objection sérieuse, car ce raisonnement suppose un retour rapide des ondes lumineuses, c'est-à-dire admet un rayon d'Univers relativement petit, ce qui est certainement faux. On devrait voir le Soleil tel qu'il était au moment du départ des ondes lumineuses, à une époque où il se trouvait fort loin de sa position actuelle ; l'anti-soleil, ou serait invisible, ou aurait l'aspect d'une étoile.

Quant aux étoiles, elles pourraient être vues en double, ou même en triple après deux tours d'Univers des rayons lumineux ; beaucoup d'étoiles ne seraient donc que des fantômes d'un passé très reculé. Mais ceci suppose que les géodésiques se ferment exactement et que, de plus, la lumière puisse faire le tour de l'Univers sans être trop absorbée, ce qui est peu vraisemblable car il doit y avoir de la matière disséminée dans l'espace. Bien que très rare, cette matière empêcherait probablement le retour des rayons lumineux.

Figurons une sphère tridimensionnelle, et soit  $O$  un point de la surface. Du centre  $A$ , on peut faire la projection conique de la surface sur le plan tan-



gent en O. De même projetons l'espace sphérique sur l'espace euclidien tangent au point O où se trouve l'observateur. Soit  $r$  la distance OP de ce point origine à la projection P d'un point de l'espace sphérique; nous remplaçons la coordonnée  $X$  (ou  $x$ ) par la coordonnée  $r$  :

$$(767) \quad r = U \operatorname{tg} X$$

L'expression de l'élément de ligne d'U-  
nivers devient:

$$(768) \quad ds^2 = -\frac{dr^2}{(1+\varepsilon r^2)^2} - \frac{r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}{1+\varepsilon r^2} + c^2 dt^2$$

en posant  $\varepsilon = \frac{1}{U^2}$

Il semble bien que cette projection sur l'espace tangent représente l'aspect de l'Univers pour l'observateur.

Pour un sur-observateur qui posséderait quatre dimensions d'espace, l'Univers d'Einstein apparaît trait comme sphérique dans un hyperespace quadridimensionnel euclidien (1). (L'expression (764) de  $dl^2$  est euclidienne dans hyperespace quadridimensionnel). Mais l'homme, qui ne possède que trois dimensions, n'a pas la perception directe de la courbure suivant une quatrième dimension; tout rayon lumineux lui arrivant dans l'espace tangent, c'est dans cet espace que toutes choses lui apparaissent: il a donc l'illusion d'un espace euclidien infini, et rapporte tout objet à cet espace en faisant la projection exprimée par la formule (768).

Cherchons les équations du mouvement d'un point matériel dans l'espace sphérique: les équations différentielles à une géodésique sont les suivantes (n° 405) :

$$\frac{d^2 x_\sigma}{ds^2} = - \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}$$

(1) Nous continuons à négliger les perturbations locales dues aux champs de gravitation. Nous n'envisageons que l'aspect d'ensemble.

ou 
$$\frac{d^2 x_\sigma}{c^2 dt^2} = - \left[ \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ 4 \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{c dt} \frac{dx_\beta}{c dt} \right] \frac{dx_\alpha}{c dt} \frac{dx_\beta}{c dt}$$

et, en nous restreignant aux systèmes de référence dans lesquels les  $g_{\mu\nu}$  ne dépendent pas de  $x_4 = ct$  :

$$(769) \quad \frac{d^2 x_\sigma}{c^2 dt^2} = - \left\{ \begin{matrix} 44 \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{c dt} \frac{dx_\beta}{c dt} + 2 \left\{ \begin{matrix} \alpha 4 \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{c dt} \frac{dx_4}{c dt}$$

Avec les coordonnées (form (759))

$r$  ( $\chi = \frac{r}{U}$ ),  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $ct$ , les symboles de Christoffel non nuls sont les suivants :

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -U \sin \chi \cos \chi, \quad \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -U \sin \chi \cos \chi \sin^2 \theta, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 31 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{U} \cot \theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\sin \theta \cos \theta \quad \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 32 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \cot \theta$$

Nous obtenons :

$$(770) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 r}{c^2 dt^2} = U \sin \chi \cos \chi \left[ \left( \frac{d\theta}{c dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{c dt} \right)^2 \right] \\ \frac{d^2 \theta}{c^2 dt^2} = -\frac{2}{R} \cot \theta \frac{dr}{c dt} \frac{d\theta}{c dt} + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{c dt} \right)^2 \\ \frac{d^2 \varphi}{c^2 dt^2} = -\frac{2}{R} \cot \theta \frac{dr}{c dt} \frac{d\varphi}{c dt} - 2 \cot \theta \frac{d\theta}{c dt} \frac{d\varphi}{c dt} \end{array} \right.$$

Nous pouvons prendre  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $\frac{d\theta}{dt} = 0$  ; les intégrales des aires et de l'énergie sont alors :

$$(771) \quad \left\{ \begin{array}{l} U^2 \sin^2 \chi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) = h \\ U^2 \sin^2 \chi \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = K \end{array} \right. \quad (h \text{ et } K \text{ constantes d'intégration})$$

Éliminant  $dt$ , nous obtenons l'équation différentielle de l'orbite

$$(772) \quad \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + U^2 \sin^2 \chi = \frac{K}{h^2} U^4 \sin^4 \chi$$

dont l'intégrale est :

$$(773) \quad \operatorname{tg} \chi \cos (\varphi - \varphi_0) = \frac{h}{K U^2 - h}$$

c'est l'équation de la géodésique dans l'espace sphérique<sup>5</sup> (ou elliptique).

La seconde des formules (771) montre que le mobile suit cette géodésique avec la vitesse constante  $\sqrt{K}$ .

Si la vitesse de la lumière est  $c$ , ainsi qu'on le voit directement en faisant  $ds = 0$  dans l'expression (759).

Ces résultats correspondent au point de vue du sur-observateur quadridimensionnel.

Mais tout autre est le point de vue de l'observateur tridimensionnel, qui projette le mobile sur l'espace euclidien tangent. Pour lui, la coordonnée distance est, non plus la coordonnée curviligne  $r = U \chi$ , mais la coordonnée rectiligne  $r = U \operatorname{tg} \chi$ . Adoptant la coordonnée  $r$ , on obtient, en posant  $\varepsilon = \frac{1}{U^2}$  :

$$\frac{dr}{dt} = \cos^2 \chi \frac{d\chi}{dt}, \quad \cos^2 \chi = \frac{1}{1 + \varepsilon r^2}, \quad \sin^2 \chi = \frac{\varepsilon r^2}{1 + \varepsilon r^2}$$

Les formules (771) deviennent :

$$(774) \quad \begin{cases} \frac{r^2}{1 + \varepsilon r^2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) = h \\ \frac{1}{(1 + \varepsilon r^2)^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r^2}{1 + \varepsilon r^2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = K \end{cases}$$

D'où l'on tire facilement l'expression du carré de la vitesse :

$$(775) \quad v^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = (1 + \varepsilon r^2)^2 (K - \varepsilon h^2)$$

Tant que  $r$  est très petit la vitesse observée est encore sensiblement  $\sqrt{K}$  ( $\varepsilon h^2$  étant très petit), mais à mesure que  $\chi$  approche de  $\pm \frac{\pi}{2}$  c'est-à-dire à mesure que le mobile paraît à l'observateur s'éloigner à l'infini, toutes les vitesses apparentes croissent indéfiniment, quelque petites que soient les vitesses réelles ( $\sqrt{K}$ ) dans l'espace sphérique.

Dans la seconde des équations (774) remplaçons  $\frac{d\varphi}{dt}$  par sa valeur  $\frac{h(1 + \varepsilon r^2)}{r^2}$  tirée de la première équation, nous obtenons l'expression du carré de la vitesse radiale (qu'on mesure par l'effet Doppler) :

$$(776) \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (1 + \epsilon r^2)^2 \left(K - \frac{1 + \epsilon r^2}{r^2} h^2\right)$$

Étudions particulièrement le cas de la lumière. Faisant  $ds = 0$  dans l'expression (768), nous obtenons :

$$(777) \quad \frac{1}{(1 + \epsilon r^2)^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{1 + \epsilon r^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = c^2$$

Soient  $c_1$  la vitesse de la lumière,  $\alpha$  l'angle de la tangente au rayon lumineux et du rayon vecteur, on a pour les composantes radiale et transversale de la vitesse :

$$\frac{dr}{dt} = c_1 \cos \alpha, \quad r \frac{d\phi}{dt} = c_1 \sin \alpha$$

L'expression (777) s'écrit donc :

$$\frac{\cos^2 \alpha}{(1 + \epsilon r^2)^2} c_1^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \epsilon r^2} c_1^2 = c^2$$

d'où l'on tire :

$$(778) \quad c_1 = c \frac{1 + \epsilon r^2}{\sqrt{1 + \epsilon r^2 \sin^2 \alpha}}$$

On pourrait aussi démontrer que l'équation du rayon lumineux est

$$\sin \alpha = \frac{A}{r} \quad (A \text{ étant une constante})$$

c'est-à-dire que, pour l'observateur, la lumière se propage en ligne droite (1), mais avec une vitesse apparente  $c_1$  d'autant plus grande que l'onde lumineuse est plus éloignée.

Il résulte de ce qui précède que pour les astres les plus lointains (qui n'ont certainement pas dépassé la région  $\chi = \frac{\pi}{2}$ ), on peut s'attendre à trouver en moyenne des vitesses radiales plus grandes que les vitesses des étoiles voisines de notre système.

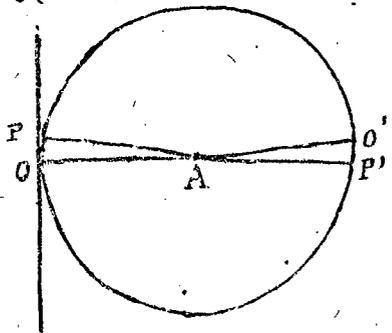
Précisément, celles des nébuleuses spirales que les astronomes considèrent comme situées à des distances formidables ont, en général, de grandes vitesses radiales :

(1) Il ne faut pas oublier que nous négligeons les perturbations locales dues aux champs de gravitation.

Nébuleuse d'Andromède	- 311 Km/sec	(rapprochement)	} mesuré par l'effet Doppler
N. G. C. 1068	+ 925 Km/sec	(éloignement)	
N. G. C. 4594	+ 1185 Km/sec	(éloignement)	

Ces vitesses sont beaucoup plus grandes que les vitesses observées pour les étoiles rapprochées. Il est bien possible que ces grandes valeurs soient la manifestation de la courbure de l'espace, déjà sensible pour de si grandes distances.

Les points de la région  $\chi = \frac{\pi}{2}$  se projettent à l'infini; par contre les points tels que  $P'$  situés près du point antipode  $O'$  ( $\chi = \pi$ ) se projettent près de l'observateur<sup>(1)</sup>. Les astres en réalité les plus éloignés ( $r = \pi U$ ) pourraient donner l'illusion d'astres rapprochés, ils nous apparaîtraient à l'antipode de la position qu'ils occupaient, il y a des milliards d'années peut-être, lorsque la lumière en est partie.



Mais nous avons dit que la lumière est probablement absorbée dans un si long parcours.

427 - Hypothèse de de Sitter.<sup>(2)</sup> - La courbure du temps - L'Espace - Temps hyperbolique - Etudions maintenant la solution de de Sitter (formules (760) et (762))

$$(779) \quad ds^2 = -U^2 \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] + \cos^2 \chi c^2 dt^2$$

$$\chi = \frac{r}{U}$$

La différence avec la solution d'Einstein porte uniquement sur le dernier terme, le temps  $t$  étant multiplié par  $\cos \chi$ : il en résulte une profonde modification dans la concep-

(1) Ceci n'est exact que pour l'espace sphérique dont la projection couvre deux fois l'espace euclidien. La projection de l'espace elliptique ne couvre qu'une fois l'espace tangent.  
 (2) De Sitter Monthly Notices novembre 1917.

1920-1921.

---

Physique  
1<sup>ère</sup> Division.

---

## Erratum.

---

N<sup>o</sup> 426. — L'hypothèse d'Einstein sur la structure de l'Univers (Espace sphérique et temps d'Univers absolu) n'a pas pour conséquence que l'effet Doppler doit être, en moyenne, plus grand pour les astres très éloignés que pour les astres les plus voisins de notre système. Il résulte en effet des formules du n<sup>o</sup> 426 que le rapport entre la vitesse d'un mobile libre, dirigé radialement, et la vitesse de la lumière est indépendante de la distance de ce mobile.

Par contre, dans la théorie de de Sitter, la courbure du temps a pour conséquence une augmentation de l'effet Doppler pour les astres très éloignés, en même temps qu'un déplacement systématique des raies spectrales vers le rouge. Ses conclusions du n<sup>o</sup> 427 sont exactes.

---



tion de l'Univers.

La "coupe à temps constant" ( $dt = 0$ ) est (comme dans l'hypothèse d'Einstein) un espace sphérique (ou elliptique)

$$(780) \quad dl^2 = U^2 \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

mais il y a aussi une courbure du temps.

On voit mieux ce que représente l'équation (779) en faisant le changement de coordonnées suivant :

$$(781) \quad \begin{cases} \sin \chi = \sin \zeta \sin \omega \\ \operatorname{tg} \frac{ict}{U} = \cos \zeta \operatorname{tg} \omega \end{cases} \quad i = \sqrt{-1}$$

On obtient alors :

$$(782) \quad ds^2 = -U^2 \left[ d\omega^2 + \sin^2 \omega (d\zeta^2 + \sin^2 \zeta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \right]$$

ce qui peut être interprété, comme étant l'équation en coordonnées sphériques ( $U, \omega, \zeta, \theta, \varphi$ ) d'une hypersphère dans une multiplicité à cinq dimensions. L'Espace-Temps quadridimensionnel est l'analogue de l'espace tridimensionnel du système d'Einstein : il limite l'hypersphère à cinq dimensions.

En changeant l'azimut de  $\zeta$  on fait une opération correspondant à la rotation de l'axe du temps dans la théorie de Minkowski (n° 370). Il n'y a plus de temps d'Univers absolu : l'espace et le temps restent unis ; à ce point de vue, le principe de relativité est mieux satisfait que dans l'hypothèse d'Einstein.

L'Espace-Temps n'apparaît sphérique que par introduction d'un temps imaginaire. Si l'on veut garder le temps réel, la forme est celle d'un hyperboloïde dans une multiplicité à cinq dimensions.

Posons, en effet,  $\omega = i\omega'$   $\zeta = i\zeta'$  nous obtenons :

$$ds^2 = U^2 \left[ d\omega'^2 - \operatorname{sh}^2 \omega' (d\zeta'^2 + \operatorname{sh}^2 \zeta' (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \right]$$

Faisons le changement de coordonnées :

$$r = U \operatorname{sh} \omega' \operatorname{sh} \zeta' \quad z = r \cos \varphi$$

$$x = r \sin \psi \sin \varphi, \quad t = U \operatorname{sh} \omega' \operatorname{ch} \zeta'$$

$$y = r \sin \varphi \cos \varphi, \quad u = U \operatorname{ch} \omega'$$

nous obtenons  $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2 + dt^2$

$$(783) \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - t^2 = U^2$$

ce qui est l'équation d'un hyperboloïde.

Ses  $g_{\mu\nu}$  de l'équation (782) vérifient les équations de la loi de gravitation (757-758) sous les conditions  $\rho = 0, \lambda = \frac{3}{U^2}$ ,  $\rho$  étant la densité moyenne de la matière.

À première vue, la condition  $\rho = 0$  peut paraître inadmissible, puisqu'il y a de la matière dans l'espace, et que l'espace ( $dt = 0$ ) est fini. Voici l'interprétation : nous avons considéré l'aspect ultra-macroscopique, la forme d'ensemble de l'Univers, abstraction faite des condensations et irrégularités locales. Ses conditions précédentes signifient que l'Univers a une courbure naturelle qui n'est pas déterminée par la matière mondiale. La matière interviendrait seulement pour modifier localement la courbure, sans changer la courbure d'ensemble et sans modifier le rayon U. En d'autres termes, l'Espace-Temps a une existence indépendante de la matière qu'il contient. Cette matière viendrait à être détruite, l'Espace-Temps subsisterait avec le même rayon. Seules les rides disparaîtraient.

La différence avec la conception d'Einstein est radicale : dans l'hypothèse d'Einstein ( $\chi\rho = 2\lambda, \lambda = \frac{1}{U^2}$ ) c'est la matière mondiale qui détermine la courbure de l'espace (de l'espace seul, puisque le temps est rectiligne). L'hypothèse d'Einstein nécessite l'existence de quantités de matière de beaucoup supérieures à celles que nous connaissons (ce qui n'a d'ailleurs rien d'in vraisemblable) ; l'hypothèse de de Sitter ne conduit plus à cette nécessité.

Conséquences de la courbure du temps. — Revenons à la formule (779), la position de l'observateur étant prise pour origine des  $x = U\chi$ . Pour un point fixe dans l'espace, on a  $d\chi = 0, d\theta = 0, \dots, d\varphi = 0$  : la formule se réduit à

$$ds = \cos \chi c dt, \text{ ou } dt = \frac{ds}{c} \frac{1}{\cos \chi} = \frac{d\tau}{\cos \chi}$$

Près de l'observateur,  $\chi = 0$  et  $dt = d\tau$ ;  $dt$  est donc le temps de l'observateur, qui trouve d'ailleurs près de lui un espace-temps galiléen.

Si le point observé est loin de l'observateur, le temps propre en ce point est  $d\tau = \frac{ds}{c}$ , alors que le temps de l'observateur est toujours  $dt$ , c'est-à-dire  $\frac{dt}{d\tau}$ . On voit que  $dt$  est d'autant plus grand par rapport  $\cos \chi$  à  $d\tau$  que  $\cos \chi$  est plus petit: le temps qui s'écoule en un même point d'espace entre deux événements paraît donc à l'observateur d'autant plus long que la région qu'il observe est plus voisine de la zone  $\chi = \frac{\pi}{2}$ , à la distance  $r = \frac{1}{2} \pi U$ .

Dans la zone  $\chi = \frac{\pi}{2}$ , le temps est stationnaire pour l'observateur, car  $dt$  est infiniment grand par rapport à  $ds$ .

Mais ceci n'est qu'un point de vue relatif à l'observateur et ne signifie pas que le cours du temps soit arrêté dans la région  $\chi = \frac{\pi}{2}$ ; si l'observateur se transportait dans cette zone, il trouverait que la Nature y est aussi active que partout ailleurs et c'est son ancienne demeure qui lui paraîtrait immobilisée dans un repos éternel.

Cette apparence est due à l'orthogonalité des temps propres aux deux endroits considérés. Nous allons préciser l'influence de la courbure du temps en étudiant le mouvement d'un point matériel.

Il nous faut considérer les deux systèmes de coordonnées  $r = U\chi$ ,  $\theta, \phi, ct$  et  $r = U \operatorname{tg} \chi$ ,  $\theta, \phi, ct$ .

Si nous adoptons le premier système, avec la coordonnée curviligne  $r$ , l'expression de  $ds^2$  s'écrit (d'après (760) ou (779))

$$(784) \quad ds^2 = -dr^2 - U^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \cos^2 \chi c^2 dt^2$$

Appliquant les équations du mouvement (769), calculant les symboles de Christoffel d'après (784), on trouve pour les intégrales des aires et de l'énergie:

$$(785) \quad \left\{ \begin{array}{l} U^2 \operatorname{tg}^2 \chi \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = h \\ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + U^2 \sin^2 \chi \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = c^2 \sin^2 \chi \cos^2 \chi + (K + \epsilon h^2) \cos^4 \chi \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} h \text{ et } K \\ \text{constantes} \\ \text{d'intégration} \\ \epsilon = \frac{1}{U^2} \end{array} \right.$$

en supposant, comme précédemment  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $\frac{d\theta}{dt} = 0$

Le premier membre de la seconde équation est le carré de la vitesse; on voit que pour l'observateur qui adopterait la coordonnée distance  $r$ , la vitesse d'un mobile libre ne reste pas constante. Près de l'observateur ( $\chi=0$ ) la vitesse est sensiblement  $\sqrt{K}$ ; puis à mesure que le mobile s'éloigne,  $\chi$  augmente, et si  $\sqrt{K}$  est petit par rapport à  $C$  (ce qui est toujours le cas des masses matérielles), le premier terme du second membre devient prépondérant; la vitesse croît jusque dans la région  $\chi = \frac{\pi}{4}$  où elle devient à peu de chose près  $\frac{C}{2}$ . Ensuite, le mobile continuant à s'éloigner, sa vitesse décroît et tend vers zéro à mesure que le mobile s'approche de la zone  $\chi = \frac{\pi}{2}$  ( $r = \frac{\pi U}{2}$ ): dans cette zone, tout est immobile. La lumière elle-même y est arrêtée: reportons-nous à l'expression (784) et faisons  $ds = 0$  (et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $d\theta = 0$ ), nous obtenons:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U^2 \sin^2 \chi \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \cos^2 \chi C^2$$

La vitesse de la lumière  $C \cos \chi$  décroît de  $C$  à  $0$  lorsque  $\chi$  augmente de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$ .

Nous pouvons imaginer qu'un sur-observateur à quatre dimensions d'espace, placé en  $O$ , ayant la perception directe de la courbure de l'espace, utiliserait la coordonnée curviligne  $r$ , pour lui, la distance serait  $r$ , et il envisagerait les choses sous l'aspect qui vient d'être indiqué.

Mais l'homme tridimensionnel va projeter l'Univers réel sur l'Univers tangent; il adoptera pour la distance la coordonnée  $r = U \operatorname{tg} \chi$ ; l'expression de  $ds^2$  devient:

$$(786) \quad ds^2 = -\frac{dr^2}{(1+\epsilon r^2)^2} - \frac{r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{(1+\epsilon r^2)} + \frac{c^2 dt^2}{(1+\epsilon r^2)}$$

$$\text{On a } r = U \chi \quad r = U \operatorname{tg} \chi \quad \frac{dr}{dt} = \cos^2 \chi \frac{dr}{dt}$$

de sorte que les équations (785) sont remplacées par les suivantes:

$$(786) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 \frac{d\phi}{dt} = h \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = c^2 \epsilon r^2 + K \end{array} \right.$$

Si le mobile s'éloigne, c'est-à-dire si  $\chi$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , la

vitesse croît indéfiniment.

Dans le cas de la lumière  $ds = 0$ , on a donc (pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $d\theta = 0$ ):

$$(788) \quad \frac{1}{(1+\epsilon r^2)^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{1+\epsilon r^2} \left(r \frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{1+\epsilon r^2}$$

$\alpha$  étant l'angle du rayon vecteur et de la tangente au rayon lumineux, on a  $\frac{dr}{dt} = c_1 \cos \alpha$ ,  $r \frac{d\phi}{dt} = c_1 \sin \alpha$  et l'équation précédente donne  $\frac{dr}{dt}$  pour la vitesse  $c_1$  de la lumière, l'expression:

$$(789) \quad c_1 = c \sqrt{\frac{1+\epsilon r^2}{1+\epsilon r^2 \sin^2 \alpha}}$$

La vitesse de la lumière est infinie pour  $r = \infty$ , ( $\chi = \frac{\pi}{2}$ )  
La trajectoire du rayon lumineux (trajectoire pour l'observateur) est

$$\sin \alpha = \frac{A}{r(1+\epsilon r^2)}$$

ce n'est plus une ligne droite, sauf dans le cas d'une propagation radiale ( $A=0$ ,  $\alpha=0$ ); pour une propagation radiale, la vitesse de la lumière est  $c\sqrt{1+\epsilon r^2}$ .

Imaginons maintenant une onde lumineuse partant du lieu où se trouve l'observateur; sa vitesse, (vitesse radiale) croît indéfiniment suivant la loi précédente. Cependant pour que la lumière parvienne à la zone  $\chi = \frac{\pi}{2}$  (à l'infini pour l'observateur) il faut un temps infini.

$$T = \frac{U}{c} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec \chi d\chi = \infty$$

A fortiori un mobile matériel demandera un temps infini pour atteindre la zone  $\chi = \frac{\pi}{2}$ .

Alors, plus d'anti-soliel, plus d'anti-étoiles, car dans la zone  $\chi = \frac{\pi}{2}$  il y a la barrière du temps: pour l'observateur, jamais un mobile, jamais un rayon de lumière ne franchiront cette barrière, jamais ils ne reviendront. Et pourtant, si à mesure qu'un mobile s'éloigne, on déterminait sa vitesse, on trouverait qu'elle croît indéfiniment. C'est, pour l'homme, l'illusion complète d'un espace infini.

Si l'hypothèse de de Sitter est exacte, les raies spectrales des astres doivent avoir deux causes de déplacement.

1° Il doit se produire un déplacement vers le rouge,

dû au ralentissement apparent du temps, la période observée  $\mathcal{P}t$  étant plus longue que la période propre  $\mathcal{P}\tau$ .

2°/ A partir de la position de la raie, modifiée par la cause précédente, il doit se produire un déplacement par effet Doppler, soit vers le rouge (vitesse d'éloignement), soit vers le violet (vitesse de rapprochement), et cet effet doit être, en moyenne, d'autant plus grand que les astres sont plus éloignés, puisque les vitesses radiales apparentes augmentent avec la distance.

En raison de la première cause, et si l'on admet que les vitesses radiales n'ont pas de préférence de sens, on doit, en moyenne, observer un déplacement des raies vers le rouge.

Il semble que le fait soit exact pour les nébuleuses spirales. Si un déplacement systématique vers le rouge était établi avec certitude, l'hypothèse de de Sitter devrait être préférée à celle d'Einstein. Pour le moment, il convient de rester dans l'expectative.

#### 428 - Les conditions à l'infini -

Dans l'Univers tangent, prenons des coordonnées cartésiennes rectangulaires

$$\begin{aligned} X_1 &= r \sin \theta \sin \varphi \\ X_2 &= r \sin \theta \cos \varphi \\ X_3 &= r \cos \theta \\ X_4 &= ct \end{aligned}$$

Si l'on effectue cette transformation dans les formules

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{(1+\epsilon r^2)^2} - \frac{r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{1+\epsilon r^2} + c^2 dt^2 \quad (\text{Univers d'Einstein})$$

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{(1+\epsilon r^2)^2} - \frac{r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{1+\epsilon r^2} + \frac{c^2 dt^2}{1+\epsilon r^2} \quad (\text{Univers de de Sitter})$$

on trouve que pour  $r=0$ , c'est-à-dire dans le voisinage immédiat de l'observateur, les  $g_{\mu\nu}$  ont les valeurs galiléennes

$$(790) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} & \text{Galilée} & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right. \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}$$

mais qu'à l'infini ( $r=\infty$ ) (1), les  $g_{\mu\nu}$  dégénèrent et prennent

(1) à l'infini pour l'observateur qui projette l'Univers réel sur l'Univers tangent.

les valeurs suivantes :

$$(791) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Einstein} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right. \quad (792) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \text{De Sitter} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

Est-ce là une objection à ces théories ? Non, bien au contraire, le résultat est très satisfaisant, comme nous allons le montrer.

Les équations qui expriment la loi de gravitation sont des équations différentielles qui ne déterminent les  $g_{\mu\nu}$  qu'à des fonctions près, et ces fonctions sont elles-mêmes déterminées par les conditions aux limites, c'est-à-dire par les conditions à l'infini (à l'infini pour l'observateur,  $r = \infty$ ).

Revenons, pour un instant, à la loi primitive d'Einstein ( $\lambda = 0$ ); l'Espace-Temps est supposé euclidien à distance infinie de toute matière. Admettons que l'observateur puisse choisir un système de référence dans lequel, en coordonnées rectangulaires, les  $g_{\mu\nu}$  aient, à l'infini, les valeurs galiléennes (790) (comme dans son voisinage s'il n'est pas dans un champ de gravitation). Si maintenant l'observateur change de système de référence, en rapportant les événements à un système accéléré par rapport au premier, les valeurs limites des  $g_{\mu\nu}$  ne restent pas invariantes. L'observateur peut donc distinguer les divers systèmes par les valeurs limites des  $g_{\mu\nu}$ , et les systèmes pour lesquels les  $g_{\mu\nu}$  ont les valeurs galiléennes apparaissent comme plus fondamentaux que les autres, parce que les valeurs aux limites sont les plus simples.

Mais cette variabilité des conditions aux limites à distance infinie de toute matière est inadmissible, car dans l'espace vide rien ne peut distinguer un système d'un autre. Il est nécessaire que les valeurs limites des  $g_{\mu\nu}$  soient indépendantes du système d'axes de coordonnées.

Cette condition d'invariance est la raison profonde pour laquelle Einstein a modifié la loi qu'il avait d'abord donnée; elle l'a conduit à introduire le terme  $\lambda g_{\mu\nu}$  et à émettre l'hypothèse de l'espace fermé. Ses considérations basées sur les propriétés du tenseur d'énergie électromagnétique n'ont été données que plus tard par Einstein.

On peut envisager la question sous un

autre aspect. Il n'y a pas de différence essentielle entre la gravitation et l'inertie : leurs effets combinés se traduisent par l'existence du tenseur fondamental  $g_{\mu\nu}$ .

Nous savons qu'au voisinage d'une masse matérielle, les  $g_{\mu\nu}$  sont légèrement modifiés. mais, dans les valeurs totales des  $g_{\mu\nu}$ , doit-on faire la part de l'effet de la matière mondiale et de quelque chose qu'on peut appeler de l'"inertie pure" ? cette dernière part serait donnée par les valeurs des  $g_{\mu\nu}$  à l'infini.

Comme dit Einstein : "dans une théorie logique de la relativité, il ne peut y avoir une inertie relativement à "l'espace" ; il n'y a qu'une inertie des masses par rapport aux autres masses. Si l'on éloignait une masse à distance infinie des autres masses de l'Univers, son inertie devrait s'annuler."

D'après ce postulat de la relativité de l'inertie, les  $g_{\mu\nu}$  doivent s'annuler à l'infini.

La solution de de Sitter (792) répond seule à cette condition, du moins d'une façon complète. C'est la relativité dans toute sa plénitude. Ses valeurs limites des  $g_{\mu\nu}$  sont nulles pour toutes les transformations.

Dans la solution d'Einstein (791) les valeurs limites des  $g_{\mu\nu}$  sont invariantes pour toutes les transformations pour lesquelles (à l'infini)  $t' = t$ . Le système d'Einstein ne satisfait au postulat de la relativité que si ce postulat est appliqué à l'espace tridimensionnel. En d'autres termes, si nous concevons qu'un espace  $(x_1, x_2, x_3)$ , avec de la matière mondiale, soit en mouvement dans un espace absolu, ce mouvement ne peut pas être décelé ; tous les mouvements observables sont relatifs à l'espace  $(x_1, x_2, x_3)$  avec sa matière mondiale, et non relatifs à l'espace absolu. La matière mondiale vient ainsi remplacer l'espace absolu de la théorie de Newton et constitue un "système d'inertie." Sa relativité de l'inertie n'est obtenue qu'en envisageant un "temps d'Univers absolu". Quant au temps mesuré, il diffère plus ou moins de ce temps absolu, selon l'état de mouvement de l'observateur par rapport au système d'inertie.

#### 429 - L'accélération et la rotation -

Nous avons, dès le début de la théorie de la relativité, signalé le fait que toute accélération semble posséder un

caractère absolu. Alors qu'on ne peut pas mettre en évidence un mouvement de translation uniforme de la Terre dans l'espace, le compas gyroscopique permet de déterminer les pôles de la Terre, l'expérience de Foucault permet de mesurer sa rotation, et cette rotation est la même que celle qu'on observe d'après le mouvement apparent des étoiles.

L'explication est la suivante : les lignes d'Univers naturelles ou géodésiques ont une signification absolue dans l'Espace-Temps ; elles sont déterminées par la structure géométrique de l'Univers. En tout point-événement d'Univers il existe un Univers tangent, l'Univers euclidien de l'observateur en chute libre ; dans un système de référence lié à cet observateur, ou dans un système en translation uniforme par rapport à lui, les géodésiques sont, à très peu près, des droites d'Univers dans une grande étendue. Le mouvement de translation uniforme n'a aucun caractère absolu, parce qu'il conserve aux géodésiques leur forme rectiligne : il ne peut pas être déterminé par rapport aux géodésiques. Au contraire, toute accélération ou rotation par rapport à ces lignes d'Univers est une réalité objective : c'est cette réalité qui est mesurée par le pendule de Foucault dans le cas de la Terre.

La vitesse est le rapport de certaines composantes des  $T_{\mu\nu}$  deux à deux ; elle n'existe que si  $T_{\mu\nu}^4$  (ou  $T_{\mu\nu}^1$ ) n'est pas nul. La matière (ou l'énergie électromagnétique) est donc la seule chose qui puisse avoir de la vitesse par rapport au système de référence. La vitesse de la "structure d'Univers", c'est-à-dire des régions où  $T_{\mu\nu} = 0$ , est de la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ . Au contraire, l'accélération et la rotation sont définies par les  $g_{\mu\nu}$  ; elles existent partout, et un système de référence a une accélération et une rotation bien déterminées par rapport à la structure d'Univers. Si cette structure est entièrement fixée par la matière mondiale, c'est-à-dire si cette matière détermine les  $g_{\mu\nu}$ , on peut dire que l'accélération et la rotation sont relatives à cette matière, relatives au "système d'inertie."

On voit que l'accélération est une entité plus simple et d'un caractère bien plus universel que la vitesse ; l'accélération peut être définie partout, la vitesse ne se rencontre que dans les régions où la présence de matière vient

compliquer la structure.

#### 430 - La structure d'Univers et l'éther -

L'Univers possède une structure géométrique qui dépend de la matière, puisque le champ de gravitation qui règne au voisinage de la matière n'est autre chose qu'une déformation de l'espace et du temps. Dans la matière, (envisagée sous l'aspect macroscopique), la variation de courbure est proportionnelle à la densité ( $R - R_0 = \chi \rho$ ); dans le vide l'espace et le temps sont modifiés par le voisinage de la matière, bien que la courbure totale soit partout la même ( $R = R_0$ )

Si l'on cherche à préciser la relation qui doit exister entre la structure de l'Espace-Temps et la matière, deux points de vue opposés peuvent être envisagés.

1° On peut attribuer à la matière, ou, plus exactement, aux électrons qui la composent, un rôle primordial. C'est la conclusion nécessaire si l'Univers d'Einstein est l'Univers réel. En effet, dans cette hypothèse le rayon d'Univers est déterminé par la quantité totale de matière existante (n° 426 form. (766)):

$$U = \frac{\chi}{4\pi^2} M$$

de sorte que, si de la matière venait à être créée dans l'espace existant, le volume de l'espace augmenterait; la matière crée, en quelque sorte, l'espace qui la contient et s'il n'y avait pas de matière il n'y aurait pas d'Univers. L'influence de la matière est probablement plus compliquée, qu'il ne semble à première vue d'après la formule précédente, car  $\chi$  dépend sans doute de  $M$ .

2° Une autre théorie, soutenue par Eddington<sup>(1)</sup> est la suivante: "je préfère, dit M. Eddington, regarder la matière et l'énergie, non pas comme des facteurs produisant les différents degrés de courbure de l'espace, mais comme des éléments de perception de cette courbure."

Cette manière de voir est conforme à la solution de de Sitter, puisque  $\rho = 0$  signifie que la matière existante n'intervient en rien pour déterminer la courbure totale dans toute région vide, et n'influe pas sur la forme

(1) Space, Time and Gravitation. Traduction française par M. Jacques Rozziol.

d'ensemble ni sur les dimensions de l'Univers. Sa matière produit, localement, des sortes de montagnes ou de rides, mais, dans son ensemble, l'hypersphère est bien moins altérée par les irrégularités locales que ne l'est la Terre par le relief du sol. D'après cette théorie on pourrait imaginer l'Univers vide de matière.

Dans cette hypothèse, si la courbure totale est  $R_0$  ( $R_0 = \frac{12}{U^2}$ ) et si, de plus,  $R_{uv} - \frac{1}{4} R_0 g_{uv} = 0$ , nous disons qu'il y a le vide.

Si la courbure totale est encore  $R_0$ , mais si  $R_{uv}$  n'est plus égal à  $\frac{1}{4} R_0 g_{uv}$ , nous disons qu'il y a de l'énergie libre (électromagnétique); enfin, si dans une région la courbure totale  $R$  est différente de la courbure  $R_0$  du vide, nous exprimons nos sensations en disant que la région considérée est remplie de matière, et nous trouvons à cette matière une densité propre

$$\rho_0 = \frac{1}{x} (R - R_0).$$

« La matière est un indice, dit M. Eddington, et non une cause..... La matière et le mouvement sont des aspects de la courbure d'Univers ».....

« La loi de gravitation (dans le vide) n'est pas une loi, si l'on entend par ce mot une limitation de la manière dont peut se comporter le substratum universel; ce n'est simplement qu'une définition du vide. Nous n'avons pas besoin de considérer la matière comme une entité étrangère, cause de perturbations dans le champ de gravitation; la perturbation, c'est la matière elle-même. »

Le rôle primordial est donc attribué à l'Espace-Temps, dont les divers degrés de courbure nous apparaissent sous des aspects que nos sens perçoivent, et auxquels nous avons donné les noms de vide, rayonnement, matière.

C'est un retour à l'hypothèse d'un "substratum universel" de l'éther, mais combien cet éther est différent de celui des anciennes théories!

On avait admis autrefois que l'espace était rempli d'un milieu qui propageait la lumière par déformation élastique, comme la matière propage le son. On avait été conduit à attribuer à l'éther des propriétés quasi-matérielles. Cependant personne ne réussit à imaginer, avec l'hypothèse de l'éther, un modèle mécanique capable de fournir une interprétation satisfaisante des lois du champ électromagnétique. Comme le dit

Einstein (1) "les lois étaient claires et simples, les interprétations mécaniques lourdes et contradictoires."

Avec Hertz, la matière apparaît non seulement comme substratum des propriétés mécaniques, mais comme substratum des champs électromagnétiques. Mais, les champs électromagnétiques se manifestant aussi dans le vide, l'éther lui aussi apparaît comme substratum de champs électromagnétiques. Il n'y a plus guère de distinction entre la matière et l'éther, doués tous deux à la fois de propriétés mécaniques et de propriétés électromagnétiques.

H.A. Lorentz réalisa un progrès considérable en "dépouillant l'éther de ses propriétés mécaniques et la matière de ses propriétés électromagnétiques. Non seulement dans l'espace vide, mais aussi à l'intérieur de la matière, l'éther seul est le siège des champs électromagnétiques." Ses particules élémentaires qui composent la matière sont seules capables de se mouvoir; leurs mouvements constituent les courants de convection. Lorentz réussit à représenter toute action électromagnétique par les équations des champs dans le vide, établies par Maxwell, en ajoutant simplement le courant de convection au courant de déplacement (n° 375, eq: (554)).

On peut dire, avec Einstein, que l'immobilité est la seule propriété mécanique que Lorentz ait laissée à l'éther.

Sa théorie de la relativité restreinte a enlevé à l'éther cette dernière propriété. Si l'éther immobile existe, un système de référence qui lui est lié n'a aucune propriété particulière, ne se distingue en rien d'un autre système en mouvement non accéléré. L'éther n'a donc plus aucune propriété mécanique. L'hypothèse de son existence n'est pas nécessaire, car on peut admettre que les champs électromagnétiques ne représentent pas l'état d'un milieu, qu'ils sont des réalités irréductibles à quelque chose de plus simple, réalités qui ne sont liées à aucun substratum, comme les atomes de la matière. Comme la matière, en effet, le rayonnement est doué de quantité de mouvement et transporte de l'énergie.

Cependant, dans la négation absolue de l'existence de l'éther, il y a un danger: celui de faire croire.

---

(1) A. Einstein. l'éther et la théorie de la relativité - traduction française par M. Solovine - Gauthier-Villars éditeur. (1921)

que l'espace vide est dénué de toute propriété physique. Tant que le principe de relativité avait été restreint au mouvement de translation uniforme, on pouvait le penser; mais la réalité de l'accélération et de la rotation n'est pas d'accord avec cette conception: la relativité généralisée établit nettement que l'espace vide de matière n'est pas amorphe. L'Univers possède des propriétés métriques en relation avec la matière présente ou avec la matière avoisinante. Ces propriétés sont précisées, dans chaque système de référence, par les valeurs des dix potentiels de gravitation  $g_{\mu\nu}$ , et en chaque point-événement, l'Univers est caractérisé par deux invariants, l'élément d'intervalle  $ds$  et la courbure totale  $R$ .

On doit donc, aussi bien dans l'hypothèse d'Einstein que dans celle de de Sitter, écarter la conception que l'espace serait physiquement vide au sens du néant absolu, et par cela la notion de l'éther prend une forme nouvelle. Mais il faut bien se garder de confondre: l'éther de la relativité n'a rien de commun avec l'éther de la théorie de Fresnel (1): "c'est un milieu privé de toutes les propriétés mécaniques et cinématiques mais qui détermine les phénomènes mécaniques et électromagnétiques." (Einstein)

D'après les idées actuelles d'Einstein, l'éther  
 "détermine les relations métriques dans le continuum spatio-temporel, par exemple les possibilités de configuration des  
 "corps solides aussi bien que les champs de gravitation;  
 "mais nous ne savons pas s'il joue un rôle essentiel dans  
 "la formation des particules élémentaires de l'électricité qui  
 "constituent la matière."

D'après Einstein, il semble exister entre le champ de gravitation et le champ électromagnétique une différence capitale: il n'y a aucune portion d'Univers sans potentiels de gravitation, car ceux-ci lui confèrent ses propriétés; par contre, on peut imaginer une portion d'Univers sans champ électromagnétique.

Comme les particules élémentaires de la matière sont, dans la conception moderne, des "condensations du champ électromagnétique", nous reconnaissons actuellement

---

(1) Il serait préférable, pour éviter toute confusion, de le désigner par un autre nom. Le mot éther évoque trop l'idée des anciennes théories.

deux réalités différentes pouvant cependant agir l'une sur l'autre, l'éther gravitatif et le champ électromagnétique, ou encore l'espace et la substance.

L'espace est-il créé par la substance, ou au contraire la substance est-elle, comme le pense Eddington, une manifestation de la courbure de l'espace : les deux hypothèses sont actuellement permises.

Ce serait un progrès considérable si l'on pouvait unir le champ de gravitation et le champ électromagnétique. Des tentatives remarquables, qui semblent devoir aboutir, sont faites dans cette voie par le mathématicien H. Weyl (1) et l'astronome Eddington (2).

En résumé l'espace possède des propriétés physiques, et l'on peut exprimer ce fait en disant qu'un éther existe. Mais "cet éther ne doit pas être conçu comme étant doué de la propriété qui caractérise les milieux pondérables, c'est-à-dire comme constitué de parties pouvant être suivies dans le temps : la notion de mouvement ne doit pas lui être appliquée." (Einstein).

On peut dire encore que l'éther est incapable de créer une division de l'Univers en espace et en temps (Eddington)

## - Conclusions -

La théorie de la relativité laisse dans l'ombre la cause première des phénomènes, elle ne fait pas connaître la nature des choses. Ce n'est pas une "explication", c'est une "description", dans le langage mathématique, des lois de l'Univers.

Cependant la loi générale de la gravitation est maintenant connue : elle englobe toute la mécanique et bouleverse les anciennes conceptions. L'espace n'est, ni un vide amorphe, ni l'éther quasi-matériel de l'ancienne physique. L'Univers est caractérisé, en chaque point-événement, par ses propriétés géométriques, liées à la présence ou au voisinage de la matière, et l'espace est, presque

(1) Raum, Zeit, Materie. 4<sup>e</sup> édition. Springer éditeur (Berlin).

(2) Space, Time and gravitation. partie théorique de l'édition française. (Hermann éditeur)

certainement, de dimensions finies.

Le temps est l'aspect d'une des dimensions de l'Univers ; il reste quelque chose de mystérieux. S'il existe un système de référence privilégié auquel est lié un " temps d'Univers absolu " (hypothèse d'Einstein), ce temps absolu n'est pas celui que nous percevons et que nous pouvons mesurer dans l'Univers tangent. Pour nous, suivant la conception de Minkowski, il y a toujours union de l'espace et du temps : la division de l'Univers en espace et en temps est relative à l'observateur.

Mais il y a des réalités absolues que la Science peut atteindre. Ces réalités sont déterminées par des coïncidences absolues dans l'Espace-Temps, des intersections de lignes d'Univers. Les lois de la Nature, qui sont la traduction de ces réalités, peuvent s'exprimer dans le langage mathématique, à l'aide d'équations intrinsèques, de relations tensorielles où tout système de coordonnées a disparu.

Quelle que puisse être, dans l'avenir, l'évolution des idées, l'union de l'espace et du temps dans les phénomènes que nous pouvons observer, les lois générales de l'électromagnétisme, la dynamique de la relativité, l'inertie et la pesanteur de l'énergie, la loi de la gravitation, la courbure de l'Univers, sont des résultats presque tous dus au génie d'Einstein, qui resteront acquis à la Science.

La théorie actuelle pourra être retouchée ; elle sera certainement complétée, en particulier en ce qui concerne la théorie de l'électricité et les hypothèses cosmogoniques. Mais ce qu'on peut affirmer, c'est qu'un retour en arrière, vers les idées encore enracinées dans bien des esprits, est une chose impossible.

---



# Table des Matières du Cours de Physique (1<sup>ère</sup> Division)

M. Jean Becquerel  
Professeur.

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
	<u>Introduction.</u>	1
	<b>Livre I.- Electricité énergétique</b>	6
	<b>Chapitre I.- Préliminaires. Notions de calcul vectoriel - Théorèmes généraux - §. 1.</b>	
	<u>Les vecteurs et leur flux.</u>	6
1	Vecteurs et cycles. Leur correspondance,	6
2	Multipliation des vecteurs.	9
3	Dérivée d'un produit de deux vecteurs.	14
4	Circulation d'un vecteur.	14
5	Champs de scalaires et de vecteurs.	16
6	Flux d'un vecteur.	18
7	Représentation schématique de l'intensité d'un champ vectoriel.	19
	<b>§ 2.- Théorèmes généraux concernant les flux.</b>	
8	1 <sup>er</sup> théorème de Gauss.	20
9	Condition solénoïdale - Distribution solénoïdale.	24
10	Théorème de Green.	25
11	Théorème de Stokes. Vecteur tourbillon.	26
	<b>§ 3.- Champs newtoniens. Théorèmes généraux.</b>	
12	Champ de force. Intensité du champ.	30
13	Potentiel d'un champ newtonien - Potentiel d'une masse ponctuelle.	32

## II

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
14	2 <sup>e</sup> Théorème de Gauss. _____	34
15	Equations de Poisson et de Laplace _____	36
16	Une couche sphérique homogène n'exerce aucune action sur un point intérieur. _____	37
17	Action d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur. _____	38
18	Action d'une sphère homogène sur un point intérieur. _____	38
 <b>Chapitre II: Le courant électrique.</b>  		
<b>§ 1. Généralités sur les installations électri-</b>		
<b>ques.</b>		
19	Comparaison, au point de vue énergétique des installations électriques et des installations mécani- ques. _____	39
20	Générateurs et récepteurs. _____	40
<b>§ 2. Régime constant dans un circuit fixe.</b>		
<b>Loi de l'équivalence.</b>		
21	Conservation de l'énergie le long du circuit - Expéri- ences de Favre. _____	43
22	Rendement de la pile. _____	47
23	Energie chimique et énergie voltaïque. _____	48
<b>§ 3. Déplacements électrochimiques - Loi</b>		
<b>de Faraday.</b>		
24	Piles et électrolytes. _____	49
25	Loi de Faraday. _____	51
26	Déplacement électrique et intensité du courant. _____	56
27	Un circuit formé de générateurs et récepteurs chimiques est un système à liaisons complètes. _____	59
28	L'atome d'électricité. _____	60
<b>§ 4. Forces électromotrices et forces contre-</b>		
<b>électromotrices.</b>		
29	Définition de la force électromotrice. _____	62
30	Loi de Joule - Force contre-électromotrice d'une résis- tance. _____	63
31	Addition des forces contre-électromotrices. _____	65
32	Rendement de la pile - Loi de Pouillet. _____	66

III

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
33	Force électromotrice, et résistance intérieure d'une pile	67
34	Interprétations mécaniques - Généralité de l'idée de force et de la loi des travaux virtuels d'après Galilée, Bernouilli et Maxwell.	69
35	Méthode générale des travaux virtuels pour l'étude des phénomènes naturels.	71
<b>§. 5 - Actions chimiques des courants.</b>		
36	Réactions secondaires dans l'électrolyse	72
37	Dégagement d'électricité dans les actions chimiques. Expériences de A. C. Becquerel.	75
38	Polarisation des électrodes. - Courants secondaires. Réversibilité des récepteurs chimiques.	76
39	Causes d'affaiblissement de la pile de Volta	77
40	Piles à courant constant. (A. C. Becquerel)	78
41	Piles secondaires. Accumulateurs.	83
42	Force électromotrice minimum nécessaire pour produire une électrolyse déterminée.	85
<b>Chapitre III - Distribution des courants et des forces électromotrices.</b>		
<b>§. 1 - Théorèmes de Kirckhoff.</b>		
43	Problème de la distribution des courants dans un réseau de conducteurs.	87
44	Extension de la loi de Faraday - Premier théorème de Kirckhoff.	88
45	Degré de liberté du réseau - Choix des coordonnées	90
46	Deuxième théorème de Kirckhoff - Equilibre des forces électromotrices sur tout contour fermé.	92
47	Accouplement des piles d'une Batterie, en série et en surface.	93
<b>§. 2 - Etude de résistances.</b>		
48	Unité - Boîtes de résistance	95
49	Comparaison des résistances - Galvanomètre de A. C. Becquerel.	97
50	Méthode du pont de Wheatstone.	98
51	Résistance intérieure d'une pile - Résistance d'un galvanomètre - Méthodes dites du faux zéro	100

N <sup>o</sup>	Sommaire	Pages
52	Résistances en dérivation - Conductance . . . . .	102
53	Lois d'Ohm . . . . .	104
54	Expériences de Pouillet . . . . .	105
55	Résistivité des différents corps . . . . .	106
56	Thermomètre basé sur la variation de résistivité du platine . . . . .	109
57	Conduction dans les fils composés - Densité de cou- rant . . . . .	110
58	Voltmètre . . . . .	111
59	Méthode de compensation de Poggendorf . . . . .	112
60	Potentiomètre . . . . .	113
	§ 3. - Forces électromotrices de contact. Phénomènes thermo-électriques.	
61	Phénomène de Peltier . . . . .	115
62	Phénomène de Thomson . . . . .	117
63	Force électromotrice de contact - Lois de Volta . . . . .	118
64	Variation de la force électromotrice de contact avec la température - Courants thermo-électriques . . . . .	122
65	Lois de A. G. Becquerel . . . . .	124
66	Diagramme thermo-électrique de Sait . . . . .	125
67	Piles thermo-électriques . . . . .	128
68	Thermomètre électrique de A. G. Becquerel . . . . .	129
69	Phénomènes thermo-électriques au contact des liqui- des . . . . .	130
70	Chimie thermodynamique des phénomènes thermoélec- triques . . . . .	131
71	Application des principes de la thermodyna- mique aux piles réversibles . . . . .	134
72	Phénomènes électro-capillaires - Electromètre de M. Lippmann . . . . .	137
	§ 4. - Extension des théorèmes de Kirchhoff	
73	Vecteur courant - Extension du 1 <sup>er</sup> théorème . . . . .	139
74	Potentiel - Vecteur force électrique . . . . .	142
75	Force électromotrice de l'effet Peltier et de l'effet Thomson . . . . .	146
76	Extension du 2 <sup>e</sup> théorème de Kirchhoff . . . . .	148
77	Chaleur dégagée dans un volume . . . . .	149

No	Sommaire	Pages
78	Analogie entre les lois de la conductibilité électrique et les lois de la conductibilité calorifique.	150
79	Expression analytique des lois de Kirchoff.	151
	<b>Chapitre IV. - Electromagnétisme</b>	153
	<b>§. 1. Loi fondamentale de l'électromagnétisme.</b>	
80	Le champ magnétique (aimants, galvanomètres, etc.)	154
81	Loi fondamentale. Action d'un champ magnétique sur un élément de courant.	162
82	L'action électrodynamique sur la matière du conducteur est une action indirecte.	166
83	Phénomène de Hall.	168
84	La force électrique est un vecteur polaire et la force magnétique est un vecteur axial.	170
85	La force électrodynamique est une force d'inertie.	171
	<b>§. 2. - Mesure électromagnétique de l'intensité.</b>	
86	Vecteur moment magnétique.	172
87	Boussole des tangentes et boussole des sinus (Pouillet).	174
88	Loi de Pouillet.	176
89	Unité d'intensité C. G. S.	177
	<b>§. 3. - Le champ magnétique des courants.</b>	
90	Loi des courants sinusoïdaux.	180
91	Champ d'un courant.	180
92	Champ magnétique d'un courant rectiligne	182
93	Expériences de Biot et Savart.	183
94	Loi du flux de la force magnétique.	186
	<b>§. 4. - Travail et fonction des forces électrodynamiques - Fonction des forces magnétiques.</b>	
95	Travail élémentaire des forces électrodynamiques	187

## VI

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
96	Expression fondamentale du travail - Fonction des forces électrodynamiques.	188
97	Méthode générale de calcul des forces électrodynamiques.	189
98	Application - Moment magnétique d'un circuit.	190
99	Fonction des forces magnétiques produites par un courant - Potentiel magnétique.	191
100	Pôles magnétiques; inexistence des fluides magnétiques.	193
101	Circulation de la force magnétique le long d'un contour fermé.	194
	<u>§. 5. - Applications - Circuit circulaire et solénoïde.</u>	
102	Fonction des forces et champ d'un circuit circulaire le long de son axe.	197
103	Solénoïdes fermés - Règle des ampères-tours.	198
104	Solénoïde ouvert.	199
	<u>§. 6. - Action des courants sur les courants.</u>	
105	Généralités et exemples.	201
106	Coefficient d'induction mutuelle et coefficient de self induction.	202
107	Formule de Neumann.	203
108	Travail correspondant au déplacement et à la déformation de plusieurs circuits.	206
109	Travail de self induction.	208
110	Self d'un circuit filiforme bien calibré.	209
	<u>§. 7. - Galvanomètres et électrodynamomètres.</u>	
111	Mesure des déviations.	211
112	Galvanomètre normal - Expériences de Gauss - Galvanomètre de Helmholtz.	212
113	Galvanomètres de Thomson, Pierre Weiss, André Broca.	214
114	Galvanomètre Deprez - d'Arsonval.	216

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
115	Construction d'un galvanomètre de sensibilité convenable. _____	217
116	Electrodynamomètre absolu de Pellat. _____	218
117	Electrodynamomètre industriel de Siemens. _____	219
118	Wattmètres. _____	220
119	Ampèremètres et voltmètres, appareils caloriques. _____	221
120	Impulsion magnétique produite par un courant de courte durée, galvanomètre balistique. _____	223
<b>Chapitre V.- Induction électromagnétique.</b>		
<b>§ 1.- Courants induits.</b>		
121	Découverte de Faraday - Loi de Lenz. _____	228
122	Loi de la force électromotrice induite par déplacement. _____	231
123	Equation de l'énergie d'après Helmholtz. _____	233
124	Flux d'induction et impulsion totale de la force électromotrice. _____	235
125	Inertie d'un courant - Self induction. _____	236
126	Expérience d'Edlund. _____	238
127	Equation du courant induit dans un circuit sans pile. _____	242
128	Application à la mesure des champs magnétiques. _____	242
129	Vecteur induction magnétique. _____	243
130	Pénétrabilité magnétique, Force magnétiques. _____	246
<b>§ 2.- Énergie électrocinétique.</b>		
131	Énergie propre d'un courant. _____	247
132	Énergie électrocinétique d'un système de courants. _____	250
133	Courants en régime variable - Interprétations mécaniques. _____	251
134	Les équations des courants mises sous la forme des équations de Lagrange. _____	253
135	Recherches de Maxwell sur l'énergie cinétique des courants mobiles. _____	257

Nos	Sommaire	Pages
	<u>§. 3. - Les aimants.</u>	
136	Constitution des aimants - Vecteur aimantation.	259
137	Potentiel et champ d'un aimant infiniment petit.	261
138	Potentiel d'un aimant quelconque.	263
139	Vecteur induction - Conservation du flux d'induction.	264
140	Solénoides magnétiques.	266
141	Potentiel vecteur de l'induction magnétique	267
142	aimantation induite. - Susceptibilité magnétique	269,
143	Energie électrocinétique des aimants permanents	271
144	Méthode de Gauss pour la détermination du moment magnétique d'un aimant et la mesure d'un champ constant et uniforme.	274
	<u>§. 4. - Le circuit magnétique.</u>	
145	Lois de l'induction magnétique	275
146	Analogie des circuits magnétiques avec les circuits électriques.	276
147	Dispersion magnétique.	279
148	Coefficients d'Hopkinson.	280
149	Force portante d'un électro-aimant	283
150	Mesure de la perméabilité du fer.	283
	<u>§. 5. - Hystérésis.</u>	
151	Courbes d'hystérésis.	285
152	Energie électrocinétique localisée dans le champ.	287
153	Energie dégradée par l'aimantation.	288
154	Formule de Steinmetz - Hystérésimètre.	290
155	Diagramme de l'aimantation.	291
156	Influence de la température sur l'aimantation.	293
	<u>§. 6. - Courants variables. - Courants périodiques.</u>	
157	Charge et décharge d'un condensateur.	294
158	Force électromotrice d'un condensateur - équation du courant variable.	296
159	Application à la mesure des résistances très grandes.	299
160	Courant périodique - Circuit doué de self sans capacité.	300

## IX

Nros	Sommaire	Pages
161	Circuit doué de self et capacité. _____	302
162	Self et capacité en parallèle. _____	304
163	Effet Joule. _____	305
164	Intensité efficace et force électromotrice efficace _____	306
165	Puissance moyenne du courant alternatif. _____	308
166	Courant Watté et courant déwatté. _____	309
167	Courant alternatif non sinusoïdal. _____	310
<b>Chapitre VI. Applications des phénomènes d'induction.</b>		
<b>§. 1. Machines à courant continu.</b>		
168	Courants de Foucault. _____	312
169	Machine magnéto-électrique de Gramme. _____	314
170	Machines dynamo-électriques. _____	317
171	Réversibilité des machines à courant continu. _____	320
<b>§. 2. Alternateurs et transformateurs.</b>		
172	Alternateurs. _____	322
173	Transformateurs. _____	323
174	Transformateurs industriels. _____	325
175	Bobine d'induction. _____	326
176	Courant de haute fréquence. _____	330
<b>§. 3. Courants polyphasés.</b>		
177	Utilisation des courants alternatifs pour la production d'énergie mécanique - Moteurs synchrones. _____	331
178	Accrochage des moteurs synchrones. _____	333
179	Courants polyphasés - Moteurs à champ tournant. _____	335
180	Distribution des courants polyphasés. _____	337
181	Puissance transmise par un système polyphasé. _____	339
182	Commutatrices. _____	340
183	Etude expérimentale d'une force électromotrice alternative - résonance. _____	341
184	Oscillographes. _____	342

17 <sup>es</sup>	Sommaire	Pages
	<b>Chapitre VII.- Electrostatique.-</b>	
	§. 1.- <u>Les diélectriques.</u>	
185	Courant de déplacement et force électrique. _____	343
186	Capacité spécifique et constante diélectrique. _____	346
187	Condensateur complexe. _____	347
188	Rigidité électrique. _____	348
189	Resistivité des diélectriques. _____	349
	§. 2.- <u>Energie potentielle du champ électro-</u>	
	<u>statique.</u>	349
190	Partage de l'énergie de la pile entre la chaleur de joule et l'énergie du condensateur. _____	350
191	Tension électrostatique. _____	351
192	Conversion électrique. _____	353
193	Charges électriques. _____	354
	§. 3.- <u>Extension des théorèmes de Kirchhoff.</u>	
194	Champ électrostatique - Lignes de force. _____	355
195	Extension du 1 <sup>er</sup> théorème de Kirchhoff. _____	356
196	Induction électrostatique - Cylindre de Faraday _____	358
197	Ecrans électrostatiques. _____	359
198	Extension du 2 <sup>e</sup> théorème de Kirchhoff. _____	359
199	Corps isolés. - Le champ d'une sphère électri- sée est newtonien. _____	361
	§. 4.- <u>Loi de Coulomb.- Unités électrosta-</u>	
	<u>tiques.</u>	
200	Champ newtonien des charges électriques - Energie localisée dans le champ. _____	362
201	Unités électrostatiques. _____	366
202	Vecteur induction. _____	367
203	Polarisation des diélectriques. _____	367
204	Capacités des conducteurs. _____	369
205	Applications du théorème de Gauss. _____	370
206	Capacité d'un condensateur plan et d'un condensateur sphérique. _____	372
207	Groupement de condensateurs. _____	374
	§. 5.- <u>Notions générales d'électrométrie.</u>	
208	Electroscope condensateur de Volta. _____	375
209	Electromètre symétrique heterostatique. _____	376

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
210	Electromètre à quadrants de W. Thomson.	377
211	Applications des électromètres.	379
212	Détermination du rapport C des unités électromagnétiques et électrostatiques.	380
<b>Chapitre VIII. - Equations générales de l'électromagnétisme dans les milieux en repos par rapport à l'observateur.</b>		
213	Premier groupe d'équations de Maxwell.	381
214	Second groupe d'équations de Maxwell.	383
215	Equations du passage d'un milieu à un autre	386
216	Equations du courant, de la force électrique et de la force magnétique.	387
217	Energie du champ électromagnétique.	389
218	Expression du flux d'énergie sortant d'un domaine. Théorème de Poynting.	393
<b>Chapitre IX. - Théorie électromagnétique de la lumière.</b>		
<b>§. 1. - Les ondes électromagnétiques et la lumière.</b>		
219	Propagation des perturbations électriques et magnétiques.	396
220	Propagation par ondes planes. Transversalité.	397
221	Ondes planes sinusoïdales. Ondes stationnaires.	400
222	Production des ondes électromagnétiques. Expériences de Hertz.	402
222 <sup>bis</sup>	Expérience des ondes stationnaires.	405
222 <sup>ter</sup>	Rayonnement électromagnétique. Reflexion, réfraction, polarisation.	406
223	Propagation le long d'un fil métallique.	408
224	Détermination directe de la vitesse de propagation d'une perturbation.	410
225	Principe de la télégraphie sans fil.	411
226	Identité des ondes lumineuses et des ondes électromagnétiques.	415

## XII

N <sup>os</sup>	Sommaire	Page
	<u>§. 2.- Réflexion et réfraction par les corps isotropes.</u>	
227	Conditions aux limites. _____	416
228	Equations des ondes incidente, réfléchie et réfractée. _____	417
229	Lois de Descartes. _____	420
230	Réflexion et réfraction. Formules de Fresnel. _____	420
231	Loi de Brewster. _____	421
232	Intensité de la lumière réfléchie. Polarisation par réflexion. _____	422
233	Polarisation par réfraction. _____	424
234	Vérification expérimentale de la théorie. _____	424
235	Polarisation elliptique de la lumière réfléchie. _____	425
	<u>§. 3.- Propagation de la lumière dans les corps anisotropes.</u>	
236	Equations fondamentales dans les cristaux. _____	426
237	Loi des vitesses de Fresnel. _____	428
238	Les deux ondes sont polarisées à angle droit. _____	430
239	Ellipsoïde de Fresnel. _____	430
	<u>§. 4.- Réflexion métallique.</u>	
240	Lois expérimentales de la réflexion métallique. _____	433
241	Théorie de la réflexion métallique. _____	434
242	Comparaison de la théorie avec l'expérience. _____	441
243	Constantes optiques des métaux. _____	443
244	Couleur superficielle produite par la réflexion métallique. _____	445
	<u>Livre II.</u>	
	<u>Notions sur la théorie électronique.</u>	
	<u>Chapitre I. Electrons et ions.</u>	
	<u>§. 1.- Propriétés d'une charge en mouvement.</u>	
246	Expérience de Rowland. _____	448
246	Champ magnétique produit par le mouvement d'un corpuscule chargé. _____	451

XIII.

Nos	Sommaire	Pages
247	Inertie d'une charge. - Masse électromagnétique	453
247	Sillage électromagnétique, accroissement de la masse aux grandes vitesses.	454
248	Onde d'accélération et le rayonnement.	456
249	La force électrodynamique, extension de la formule de Biot et Savart.	462
250	§. 2. - Les rayons cathodiques et l'élection	464
251	Décharges dans les gaz raréfiés.	467
252	Les rayons cathodiques sont électrisés - Expérience de M. Jean Perrin.	469
253	Les particules cathodiques.	470
254	L'électron.	474
255	Formation des rayons cathodiques - afflux positif.	475
256	Rayons de Lenard.	477
257	Effet photo-électrique.	478
258	Effet Edison.	481
259	§. 3. - Rayons d'électricité positive	483
260	Les rayons canaux.	488
261	Les rayons anodiques.	489
262	Conclusions.	489
262	§. 4 - Ionisation.	489
264	Phénomène de l'ionisation.	490
264	Mesure directe de la charge élémentaire (atome d'électricité).	492
265	Démonstration expérimentale de la structure discontinue de l'électricité - Expériences de M. Millikan	494
266	Caractères de l'ionisation.	496
	Phénomènes cosmiques et météorologiques.	
	<b>Chapitre II - Radioactivité.</b>	
267	§. 1 - Les rayons Becquerel.	498
268	Découverte de la radioactivité.	500
269	Propriétés générales des rayons Becquerel.	501
270	Les rayons $\beta$ .	502
	Expériences de M. Bucherer - Vérification de la loi Lorentz - Einstein.	

Nos	Sommaire	Pages
271	Rayons $\alpha$ .	503
272	Rayons $\gamma$ .	507
273	Rayons secondaires.	507
	§ 2.- <u>L'évolution radioactive.</u>	
	La radioactivité induite.	508
275	Les émanations radioactives.	508
276	Constante radioactive - Période - Vie moyenne	509
277	Exemples de transformations radioactives.	510
278	Constatacion directe de la formation de l'hélium	512
279	Equilibre radioactif.	513
280	Chaleur dégagée par les corps radioactifs.	513
281	Origine du radium.	514
282	Sue d'ensemble des corps radioactifs.	516
283	Les corps isotopes	516
	§ 3.- <u>Idées générales sur l'évolution de la matière.</u>	
284	Signification de la loi exponentielle des transformations.	518
	<b>Chapitre III.- L'émission et l'absorption de la lumière.-</b>	
285	Les particules électrisées sources de lumière.	521
	§ 1.- <u>Luminescence.</u>	
286	Phénomènes généraux.	522
287	Photoluminescence.- Excitation, émission, extinction.	524
288	Radioluminescence.	525
289	Thermoluminescence.	526
290	Tribooluminescence.- Luminescence par actions chimiques.	527
291	Constitution des corps solides phosphorescents.	527
292	Sels d'uranyle.	529
	§ 2.- <u>Les rayons X.</u>	
293	Production et propriétés des rayons X.	530
294	Rayons secondaires.	531
295	Nature des rayons X.	532
296	Diffraction des rayons X par les réseaux cristallins.	533

XV

Nos	Sommaires	Pages
297	Réflexion des rayons X sur une face cristalline	534
298	Spectre des rayons X - Mesure des longueurs d'onde.	535
299	Loi de Moseley.	536
300	Les rayons X.	539
301	Justification de la théorie des quanta.	540
	§ - 3.- Absorption et dispersion de la lumière.	
302	Théorie de la dispersion dans les diélectriques.	542
303	Comparaison de la théorie avec l'expérience.	545
304	Dispersion dans les métaux.	549
305	La pression de la lumière.	550
	<b>Chapitre IV.- Magnéto-optique et magnétisme.</b>	
	§ 1.- Polarisation rotatoire magnétique.	
306	Découverte de Faraday.	551
307	Loi de Verdet. - Mesure de la constante de Verdet	552
308	Pouvoir rotatoire magnétique des métaux ferromagnétiques.	554
309	Dispersion rotatoire magnétique.	555
	§ 2.- Phénomène de Zeeman.	
310	Action d'un champ magnétique sur l'émission et sur l'absorption de la lumière.	555
311	Théorie élémentaire de Lorentz.	556
312	Conditions d'observation de l'effet Zeeman	558
313	L'électron source de la lumière	558
314	Divers types de décomposition des raies.	559
315	Phénomènes liés à l'effet Zeeman (Polarisation rotatoire magnétique).	560
	§ 3.- Changements magnétiques des bandes d'absorption des solides - L'effet positif.	561
316	Action du champ magnétique sur les bandes d'absorption des cristaux de terres rares. L'effet positif.	562
317	Extension du phénomène observé dans les cristaux et de l'effet positif.	564

N <sup>o</sup>	Sommaire	Pages
318	Polarisation rotatoire magnétique. _____	564
	§. 4 - <u>Motions élémentaires sur la théorie du magnétisme.</u>	
319	Le diamagnétisme - théorie de Langevin. _____	565
320	Le paramagnétisme - théorie de Langevin. _____	567
321	Le ferromagnétisme - théorie de Pierre Weiss. _____	568
322	Le magnéton. _____	571
	<b>Chapitre V. - Théorie électronique des métaux.</b>	
	§. 1. <u>Conductibilité.</u>	573
323	Conductibilité thermique. _____	574
324	Conductibilité électrique. Lois d'Ohm et de Joule. _____	575
325	Loi de Wiedemann et Franz. _____	576
	§. 2. <u>Electricité de contact - Phénomènes thermo-électriques.</u>	
326	Force électromotrice de contact - Effet Peltier. _____	578
327	Effet Thomson. _____	579
328	Courants thermo-électriques. _____	581
	§. 3. <u>Effets galvanomagnétiques et thermo-magnétiques.</u>	
329	Phénomènes généraux. _____	582
330	Phénomène de Hall. _____	583
	<b>Chapitre VI. - La structure de l'atome.</b>	586
	§. 1. <u>Concentration de la masse atomique.</u>	587
331	Le passage des particules $\alpha$ à travers les atomes	587
332	L'atome de Rutherford. _____	590
	§. 2. <u>Théorie de Niels Bohr.</u>	
333	Forme canonique des équations du mouvement.	592
334	Oscillateur linéaire et oscillateur en mouvement de révolution. _____	594
335	Le spectre de l'hydrogène. Première application de la théorie des quanta. _____	597
336	L'entraînement du noyau. _____	602
337	Le spectre de l'hélium ionisé. _____	603
338	Spectres d'arc et spectres d'étincelle. _____	604

Nos	Sommaire	Pages
339	L'origine des rayons X. Explication de la loi de Moseley.	605
340	Extension de la théorie.	607
341	Explication des résultats de Whiddington.	607
342	Phénomène de Zeeman.	608
<b>Table III.</b>		
<b>Le Principe de Relativité.</b>		
Chapitre I: La relativité restreinte		
§. 1. Les notions anciennes d'espace et de temps.		
343	Groupes de transformations de coordonnées	613
344	Les invariants fondamentaux de l'ancienne conception de l'Univers. Le temps et l'espace absolu.	614
345	Distance dans l'espace de deux événements non simultanés.	617
346	La dynamique newtonienne.	618
347	Le caractère relatif du mouvement de translation uniforme et le caractère absolu de l'accélération.	619
§. 2. La recherche du mouvement absolu.		
348	L'expérience de Fizeau, dite « entraînement des ondes lumineuses par la matière ».	620
349	L'expérience fondamentale de Michelson.	622
350	La contraction de Fitz-Gerald - Lorentz.	626
351	Le point de vue de Lorentz.	627
352	Le point de vue d'Einstein - Principe de relativité.	627
§. 3. Le groupe de transformation de Lorentz.		
353	Formules de Lorentz.	628
354	Le temps local de Lorentz.	630

XVIII.

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
	<u>§. 4. - L'invariance de la vitesse de la lumière</u>	
355	La notion de temps. Définition de la simultanéité.	630
356	La vitesse de la lumière est une constante universelle.	633
357	Le groupe de Lorentz déduit de l'invariance de la vitesse de la lumière.	634
358	La mécanique doit être soumise aux lois de l'électromagnétisme.	637
	<u>§. 5. - Relativité de l'espace et du temps.</u>	
359	L'espace et le temps relatifs.	640
360	Loi de composition des vitesses.	641
361	Explications de l'expérience de Fizeau dite "entraînement des ondes".	642
	<u>§. 6. - L'Univers de Minkowski.</u>	
362	L'invariant "Intervalle d'Univers" - Union de l'espace et du temps.	643
363	Propriétés des couples d'événements (P. Langevin)	645
364	La contraction des longueurs.	647
365	La dilatation du temps (Einstein)	648
366	Les lignes d'Univers (Minkowski)	649
367	Le temps propre - (Minkowski)	650
368	La loi d'inertie.	653
369	La géométrie de Minkowski. (Géométrie des événements).	654
370	L'équivalence du temps et d'une longueur imaginaire.	659
	<u>§. 7. - Phénomènes optiques dans les systèmes en mouvement relatif.</u>	
371	L'effet Doppler - Fizeau.	662
372	L'aberration de la lumière.	663
373	Effet Doppler, aberration et entraînement des ondes.	665
	<u>§. 8. - Le champ électromagnétique</u>	
374	Transformation des équations de Maxwell dans l'espace vide.	667
375	Equations de Maxwell dans le cas d'un courant par convection.	670

XIX

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
	<u>§. 9.- Dynamique de la relativité.</u>	
376	La masse est fonction de la vitesse. _____	672
377	Le vecteur impulsion et la masse marpertuisienne. _____	675
378	L'inertie de l'énergie. _____	676
379	Quelques conséquences de l'inertie de l'énergie. _____	682
380	La matière réservoir d'énergie. _____	684
381	Le principe de la conservation de la masse se confond avec le principe de la conservation de l'énergie. _____	685
382	Les quadri-vecteurs de l'Espace-Temps. _____	685
383	Unification des principes de la conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. Conservation de l'impulsion d'Univers. _____	689
	<u>§. 10.- Vérifications expérimentales.</u>	
384	Les électrons des rayons $\beta$ ont des vitesses qui convergent vers la vitesse de la lumière. _____	690
385	Vérification de la loi $m = \frac{m_0}{\dots}$ . _____	690
386	La structure des raies de l'hydrogène et des spectres de rayons X. _____	691
387	La signification de l'expérience de Michelson. _____	692
	<u>Chapitre II.- La relativité généralisée et la gravitation.</u>	
	<u>§. 1.- Le champ de gravitation.</u>	
388	Conditions d'application du principe de relativité restreint. _____	694
389	La pesanteur de l'énergie. _____	695
390	La généralisation du principe de relativité. _____	697
391	L'équivalence entre un champ de gravitation et un champ de force dû à un état de mouvement accéléré. _____	700
392	L'Univers n'est pas euclidien. _____	704
	<u>§. 2.- La théorie des surfaces de Gauss et son extension à une multiplicité possédant quatre dimensions.</u>	
		705

Nos	Sommaire	Pages
393	Les longueurs et le temps dans un champ de gravitation. _____	706
394	Les surfaces et les coordonnées de Gauss. _____	709
395	Les grands traits de la théorie d'Einstein. _____	712
396	Transformation des coordonnées _____	714
	§. 3. - <u>Théorie des tenseurs</u>	
397.	Quadrivecteurs contravariants et covariants. _____	719
398	Tenseurs de second ordre et tenseurs d'ordre supérieur. _____	721
399	Multiplication des tenseurs. _____	723
400	Les tenseurs fondamentaux. _____	726
401	Expression invariante de l'hypervolume. _____	728
402	Différentiation covariante _____	729
403	Le tenseur de Riemann. Christoffel. _____	731
	§. 4. - <u>Loi de la gravitation dans le vide.</u>	
404	Loi générale de la gravitation dans une région vide de matière et d'énergie électromagnétique. _____	733
405	Equations des géodésiques (trajectoires des mobiles libres). - Expression des composantes du champ de gravitation. _____	738
406	Extension des équations de Lagrange. _____	740
407	Energie du champ de gravitation. _____	742
	§. 5. - <u>Loi générale de la gravitation</u>	
408	Le tenseur impulsion-énergie, ou tenseur matériel. _____	745
409	Les équations de la gravitation dans la matière _____	747
410	La conservation de l'impulsion et de l'énergie. _____	749
411	Les équations du mouvement du point matériel, en mécanique classique, déduites, en première approximation des équations de la géodésique. _____	753
412	La loi de Newton déduite, en première approximation de la loi d'Einstein. _____	753
	§. 7. - <u>Le champ électromagnétique.</u>	
413.	Lorentz. Généralisation des équations de Maxwell. _____	756
414	Le tenseur d'énergie électromagnétique. _____	762

XXI

N <sup>os</sup>	Sommaire	Pages
	<u>§. 8.- Applications et vérifications de la loi d'Einstein.</u>	
415	Le champ de gravitation d'un centre matériel.	765
416	Le mouvement d'un point matériel dans le champ de gravitation produit par un centre. —	771
417	Première vérification de la loi d'Einstein - Le déplacement du périhélie de la planète Mercure.	773
418	Seconde vérification de la loi d'Einstein - La déviation des rayons lumineux. —	775
419.	Troisième vérification de la loi d'Einstein - Le champ de gravitation modifie le cours du temps. —	780
420	Remarques sur la loi de la gravitation. —	782
	<u>§. 9.- La courbure de l'espace et du temps. - Hypothèses sur la forme de l'Univers</u>	
421	Le scalaire courbure totale. —	783
422.	Le principe de moindre action. —	784
423	La substance présente dans l'Univers doit être limitée et l'Univers ne doit pas être infini dans toutes ses dimensions. —	787
424	La théorie électronique de la matière conduit à envisager l'Univers comme possédant une courbure totale constante dans le vide. —	788
425	L'espace fermé. —	793
426	Hypothèse d'Einstein - L'espace sphérique ou elliptique. Le temps d'Univers rectiligne. —	795
427	Hypothèse de de Sitter - La courbure du temps. - L'espace temps hyperbolique. —	803
428	Les conditions à l'infini. —	809
429	L'accélération et la rotation - —	811
430	La structure d'Univers et l'éther. —	813
	Conclusions. —	817

Fin de la Table des Matières.