ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — **Eugenio Beltrami** *in Roma*
Ulisse Dini *in Pisa.*

SERIE II - TOMO XXIV
(dal gennaio al settembre dell'anno 1896).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XXIV.° (SERIE II.ª)

Curve k-gonali di 1.ª e di 2.ª specie.

(Memoria II (*) (**) (***) *di* Federico Amodeo, *a Napoli.)*

Ut omnia candide legantur et defectus in materia tam difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum conatibus investigentur, et benigne suppleantur, enixe rogo.

Is. Newton. *Philosophiae naturalis Principia mathematica.*

§ 1. Curve k-gonali di 1.ª specie.

1. Le curve k-gonali tipiche, di cui si è trattato nella Memoria I, e che ora diremo pure curve k-gonali di *1.ª specie,* hanno l'ordine $m \geq k+1$, il genere $p=(k-1)m-\frac{1}{2}(k-1)(k+2)$, un solo punto multiplo $(m-k)$-uplo ed un sistema lineare ∞^{m-k-1} di curve aggiunte minime di ordine $m-k-1$

(*) Dopo spiacevole interruzione, dovuta ad una lunga e penosa malattia ed a un avvenimento lieto della mia vita, ho ripreso ora lo studio di questo argomento sul quale pubblicai in questi *Annali* la *Memoria I* (vol. 21, serie 2.ª, pag. 221-236, 1893). Ciò che qui pubblico, era già all'ingrosso preparato fin d'allora, oltre a molti altri teoremi che spero poter aver il tempo di pubblicare presto.

(**) *Errata-Corrige della Memoria I.*

Pag. 223, lin. 7 / » 224, » 16 dal basso, $\frac{(2k-2)!}{(k+1)!\,(k+2)!}$ si legga $\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,k!}$

e si noti che le applicazioni di detta formola sono esatte;

pag. 226, lin. 2 dal basso, *proiezione di* si legga *riferita univocamente ad*

» 229, lin. 13, 14, *una caratteristica delle curve k-gonali piane è la seguente* si legga *una caratteristica delle curve k-gonali piane provviste di curve aggiunte minime è la seguente,*

e fo notare che, richiamata la mia attenzione dal sig. Fano su questo punto, io stesso gli comunicai la correzione a farsi.

(***) Per non mettere altro tempo in mezzo rispondo qui al prof. Bertini, che in questi *Annali* (tomo 22, serie 2.ª, 1894) nella Memoria, *La geometria delle serie lineari* spezzate in $m-k-1$ rette. Possiamo rappresentare i caratteri di queste curve in funzione della *gonalità* k e della *dimensione* R del sistema di curve aggiunte minime; in tal caso l'ordine è $m=k+R+1$, il genere è $p=\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)$, il punto singolare è di multiplicità $R+1$, le curve aggiunte minime sono di ordine R spezzate in R rette.

---

sopra una curva piana secondo il metodo algebrico, fece una acerba critica alla Memoria I e a due mie Note pubblicate nei Rend. della R. Acc. dei Lincei del 1893 (*Curve aggiunte minime,* e *Serie residue nella serie canonica delle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$).

Ho già sopra mostrato a che si riducono gli emendamenti da farsi alla Memoria I [della quale il prof. Bertini (loc. cit., nota del n.° 44) segnalava altri errori, non esistenti, a pag. 222, 231, 232]. Ora esaminerò gli appunti fatti alle due pubblicazioni dei Lincei [loc. cit., nota (***) al n.° 17].

Non è il caso di scagionarmi dell'accusa di aver riportate per mie alcune dimostrazioni che, fatte in collaborazione dai sig.ⁱ Bertini e Segre e da essi esposte nei loro corsi, mi valsero ad enunciare teoremi più generali di quelli per i quali esse furon fatte; perchè quest'accusa snatura lo scopo della mia Nota, che, come dichiarai nella prefazione delle *Serie residue,* era di far conoscere la forma più generale (non data da altri prima di me) di teoremi noti ed importanti e non di dar per mie le dimostrazioni, che da anni le scuole di Pavia e di Torino, e certamente anche quelle di altre Università, conoscevano. Nè dall'analoga accusa di avermi voluto appropriare una dimostrazione di Bobek (che io ho la coscienza di avere espressamente citato); e di non aver citato come appartenente al Bertini stesso un caso particolare di un mio teorema enunciato alla fine del § 1 delle *Curve agg. minime.* E metterò da parte, come cosa di poco conto, la *improprietà* della parola *proiezione* usata per *corrispondenza univoca,* se le due curve di cui si tratta non sono dello stesso ordine.

Quindi restano due soli appunti.

1.° « *Delle due condizioni a principio del § 3 [Curve agg. minime] (sulla coesistenza delle quali l'Autore ritorna poco dopo) la seconda deve includere la prima.* » Fo notare che ciò non ha conseguenza alcuna sui risultati delle mie Note.

2.° « *Se* $\rho=\frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$ *si deve porre insieme necessariamente* $\alpha=0$; *e perciò il teorema del § 4 (Serie residue) è illusorio, e per la stessa ragione nell'ultimo teorema del § 3 (delle Curve aggiunte) deve porsi* $\alpha=0$. »

Qui il prof. Bertini ha preso una tripla svista; poichè:

a) È $\rho=\frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$ *per* $\alpha=0$ *e per* $p=\frac{m\alpha}{2}+1$, ed in prova di ciò io qui presento l'esistenza di infinite curve (quelle della prima colonna del quadro del § 2) rappresentate dal simbolo $C^{2k}_{(k-1)^2}$, per le quali $\alpha=k-2$, $m=2k$, $\rho=\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, cioè proprio $\rho=\frac{\alpha}{2}(m-3-\alpha)$ senza essere $\alpha=0$.

Tutte le curve k-gonali di 1.ª specie sono date dal simbolo

$$C^{k+R+1}_{\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)} \quad \text{con 1 punto } (R+1)\text{-uplo.}$$

Quì è da notarsi che R può prendere tutti i valori interi positivi compreso lo zero, e k tutti i valori interi positivi >1: però il valore di $k=1$, che noi abbiamo eliminato anche per la precedente Memoria, non forma eccezione, esso comprende tutte le curve razionali di ordine $R+2$, con un punto $(R+1)$-uplo, per le quali regge quanto diciamo per le altre curve k-gonali di 1.ª specie.

2. Fra queste curve sono particolarmente interessanti, per il seguito delle nostre ricerche, quelle che si hanno per $R=0$, cioè le curve $C^{k+1}_{\frac{1}{2}(k-1)k}$, che sono le curve di ordine $k+1$ prive di punti doppi, e sono pure le curve k-gonali di minimo ordine.

Già sappiamo che queste curve hanno ∞^1 g^1_k segate da fasci di raggi di 1.° ordine che hanno per centri i diversi punti della curva.

Qui noteremo altre loro proprietà che ci necessiteranno in seguito.

a) Ogni curva di ordine k, che passa per k punti per diritto di una C^{k+1} k-gonale, sega ulteriormente la curva in altri k^2 punti, che sono punti base di un fascio di C^k, che sega sulla C^{k+1} la serie g^1_k individuata dal primo gruppo.

Infatti il gruppo dei k^2 punti e il $(k+1)^{\text{esimo}}$ punto di C^{k+1} allineato col gruppo di k punti scelto ad arbitrio, sono corresiduali rispetto ad un gruppo della g^1_k.

Per $k=2$ si ha come caso particolare il notissimo teorema sulle cubiche riguardante il quadrangolo inscritto ed il suo punto opposto.

---

b) Il teorema del § 4 *(Serie residue)*, che il prof. Bertini dichiara illusorio, prende questa forma non priva d'interesse:

Per le serie residue g^r_n, $g^{r'}_{n'}$ rispetto alla serie canonica segata dalle C^{m-3} aggiunte si ha sempre

$$2(r-r') = n-n' \qquad \text{(teor. di Nöther);}$$

mentre per tutte le serie residue g^r_n, $g^{r'}_{n'}$ rispetto alla serie canonica segata dalle $C^{m-3-\alpha}$ aggiunte, per $\alpha>0$, si ha:

$$2(r-r') > (n-n').$$

c) Nel teorema ultimo del § 3 *(Curve agg. minime)* non deve farsi alcuna variazione.

b) Fissati sopra una curva $C^{k+1}_{\frac{1}{2}(k-1)k}$ *un punto O ed un gruppo arbitrario G di altri* $\frac{k(k+3)}{2} - k$ *punti, ogni curva* C^k *che passa per k punti per diritto con O, e per il gruppo G, passerà anche per altri* $\frac{(k-1)k}{2}$ *punti fissi della curva* C^{k+1}.

Perchè ciascuna di queste curve coincide con una curva del fascio di curve C^k del precedente teorema.

Fra i tanti corollarii cui possono dar luogo questi teoremi prescegliamo a titolo di esempio i seguenti:

1.° *Se per k punti per diritto di una* C^{k+1} *k-gonale si conducono k rette, queste segano ulteriormente la* C^{k+1} *in* k^2 *punti base di un fascio di* C^k.

2.° *Se si congiungono k punti per diritto con un punto O di una* C^{k+1} *k-gonale con un suo punto A, ogni curva* C^k, *condotta per A, per k punti per diritto con O e per un numero soddisfacente,* $\frac{k(k+1)}{2} - 1$, *dei rimanenti* $k(k-1)$ *punti d'intersezione delle rette condotte per A con la* C^{k+1}, *ha un contatto k-punto in A.*

3.° *In particolare per* $k = 3$, *ogni retta condotta per un flesso di una* C^4_3 *sega la curva in tre punti A, B, C, che sono punti base di un fascio di cubiche aventi con la* C^4_3 *un contatto di 2.° ordine in ciascuno di essi e che sega sulla* C^4_3 *terne di punti allineati col tangenziale del flesso.*

4.° *Se da un flesso* C^4_3 *si tira una tangente alla curva che tocchi in A e seghi in B la curva stessa, vi è un fascio di cubiche che ha un contatto di 5.° ordine in A ed uno di 2.° ordine in B, e sega la curva in terne di punti allineati col punto tangenziale del flesso.*

c) Ogni curva generale semplice di ordine $k+1$ *che passa per un gruppo di k punti di una* $C^{k+1}_{\frac{1}{2}(k-1)k}$ *per diritto con un suo punto O sega ulteriormente la curva in* $k(k+1)+1$ *punti, che costituiscono i punti base di una rete di curve* $C^{k+1}_{\frac{1}{2}(k-1)k}$, *ciascuna delle quali è segata dalle rimanenti in gruppi di k punti allineati con un suo punto fisso.*

Infatti il punto O e il gruppo di $k(k+1)+1$ punti sono corresiduali rispetto ad un gruppo della g^1_k segata dal fascio di centro O, e di più i $k(k+1)+1$ punti non possono stare sopra una curva di grado k, altrimenti la curva con la quale li abbiamo determinati si spezzerebbe nella retta che passa per O e nella C^k. Inoltre per ogni gruppo della g^1_k passa un fascio di C^{k+1}, quindi il sistema individuato dai punti base è una *rete,* la cui serie caratteristica è appunto la g_k^1, e questa, per essere le curve k-gonali di 1.ª specie, deve avere i suoi gruppi collineari.

Si noti che se dei $k(k+1)+1$ punti d'intersezione $k(k+1)$ stanno sopra una curva di ordine k, allora fra le curve C^{k+1} del fascio individuato da questi e da 2 dei punti presi per diritto ci sarebbe la curva C^{k+1} composta della C^k e di una retta, e quindi il rimanente punto si troverebbe per diritto con gli altri k; e viceversa.

d) Essendo $k(k+1)+1=\frac{(k+1)(k+4)}{2}-2+\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ risulta pure:

Se per k punti per diritto di una $C^{k+1}_{\frac{1}{2}(k-1)k}$ si conduce una curva dello stesso ordine, questa determina sulla curva data un gruppo di punti di cui $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ sono dipendenti dai rimanenti: in altri termini la rete precedente è di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

Viceversa, *se una rete di curve generali nell'ordine $k+1$, ha per punti base $k(k+1)+1$ punti doppi, ed è completa, e perciò deve essere di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, due curve della rete si segheranno in k punti per diritto.*

e) Dal noto teorema di Cayley, sulle curve di ordine n che si fanno passare per i punti d'intersezione di due curve di ordine m e p, entrambi minori di n, si deduce, pel caso di $m=p=k$ ed $n=k+1$, il teorema seguente:

Qualunque curva di ordine $k+1$ descritta per $k^2-\frac{(k-2)(k-3)}{2}$ punti base di un fascio di curve di ordine k passa anche per gli altri punti comuni a queste curve, se $k+1 \leqq 2k-3$, cioè se $k \geqq 4$.

Ma siccome per i punti base di un fascio di raggi, di coniche o di cubiche può sempre rispettivamente passare una conica, una cubica, una quartica, il teorema si può estendere anche al caso di $k=1, 2, 3$, e quindi possiamo dire in generale:

Qualunque curva di ordine $k+1$ descritta per $k^2-\frac{(k-2)(k-3)}{2}$ punti base di un fascio di curve di ordine k passa anche per gli altri punti base.

f) Tenendo conto inoltre che $k^2-\frac{(k-2)(k-3)}{2}=\frac{(k+1)(k+4)}{2}-5$ per ogni valore di $k>1$ abbiamo pure;

Per i punti base semplici di un fascio di curve di ordine k (per $k > 1$) passa un sistema ∞^5 di curve di ordine $k+1$. Il sistema è di sovrabbondanza $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$.

g) Dal teorema *e)* risulta ancora:

Ogni curva di ordine $k+1$ generale nel suo ordine che passa per i k^2 punti base semplici di un fascio di curve C^k è segata dal fascio in gruppi di k punti allineati con un punto fisso della C^{k+1} stessa.

Perchè la C^{k+1} è segata dal fascio in una g_k^1, e per essere essa una curva k-gonale, la g_k^1 deve avere i suoi gruppi collineari e l'inviluppo dei loro sostegni deve essere un punto della C^{k+1}.

h) Dal teorema di Jacobi, sulle curve di ordine n che passano per punti appartenenti a curva di ordine $p < n$, si ricava che delle $k(k-1)$ intersezioni di due curve C^k, C^{k-1}, di ordine k e $k-1$, sono indipendenti, per le curve C^k che passano per esse, soltanto $k(k-1) - \frac{(k-2)(k-3)}{2}$. Ed essendo questo numero $= \frac{k(k+3)}{2} - 3$ per $k > 1$ risulta il teorema:

Per i punti d'intersezione di una curva di ordine k con una curva di ordine $k-1$ passa un sistema triplo di curve C^k e questo è di sovrabbondanza $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$.

k) Le curve k-gonali di 1.ª specie, C^{k+1}, sono generate dall'intersezione di un fascio di raggi di 1.º ordine con un fascio ad esso proiettivo di curve di ordine k, a punti base semplici, nessuno dei quali deve coincidere col centro del fascio di raggio di 1.º ordine.

3. I precedenti teoremi si possono facilmente estendere alle curve k-gonali di 1.ª specie che si hanno per $R \geqq 1$; noi per brevità ci limiteremo ai seguenti:

a) Ogni curva di ordine $k+R$, che passa per k punti per diritto col punto $(R+1)$-uplo della curva $C^{k+R+1}_{\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)}$ e che abbia un punto R-uplo nel punto multiplo della precedente curva, sega la curva stessa in altri $k(k+2R)$ punti, che sono insieme al punto R-uplo punti base di un fascio di curve di ordine $k+R$, ciascuna delle quali sega la curva data in k punti per diritto col punto multiplo.

b) Siccome dei punti base semplici del fascio suddetto soltanto

$$k(k+2R) - \frac{(k+R-1)(k+R-2)}{2} = \frac{k(k+2R+3)}{2} - \frac{(R-1)(R-2)}{2} - k$$

sono arbitrarii ne risulta:

Dati sopra una curva $C^{k+R+1}_{\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)}$ *con 1 punto* $(R+1)$*-plo* $\frac{k(k+2R+3)-(R-1)(R-2)}{2}-k$ *punti arbitrarii, ogni curva di ordine* $k+R$ *che passa una volta per ciascuno di essi ed* R *volte pel punto multiplo della curva data, e passa inoltre per* k *punti della stessa curva per diritto col punto multiplo, passerà pure per altri* $\frac{(k+R-1)(k+R-2)}{2}+k-1$ *punti fissi della curva stessa.*

c) Una curva k-gonale tipica $C^{k+R+1}_{\frac{1}{2}(k-1)(k+2R)}$ *è generata dall'intersezione di un fascio di raggi di 1.º ordine con un fascio ad esso proiettivo di curve di ordine* $k+R$*, che abbia nel centro del primo fascio un punto base* R*-uplo e i rimanenti punti base tutti semplici.*

§ 2. Curve k-gonali di 2.ª specie. Caratteri generali.

1. Chiameremo curve k-gonali di *2.ª specie*, quelle curve k-gonali nelle quali l'inviluppo delle rette che contengono i gruppi delle g^1_k, o delle g^1_k, che su di essa esistono, è di 2.ª classe.

L'ordine m di queste curve deve essere [M. I, § 5, c)] $\geqq 2k$, il loro genere è dato da $p=(k-1)(m-k-1)$, ed hanno un sistema lineare ∞^{m-2k} di curve aggiunte minime di ordine $m-k-1$, e di sovrabbondanza $\rho=\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

Noi supporremo che l'inviluppo delle rette che segano ogni g^1_k sia irreduttibile, e quindi che la curva non abbia punti multipli di multiplicità maggiore di 2, poichè in contrario vi sarebbero più di due tangenti dell'inviluppo che passerebbero per uno stesso punto.

Dalle curve che qui consideriamo è facile ricavare le altre che hanno punti multipli diversi dai punti doppi; noi ci asterremo di entrare in questa particolarità.

Il numero dei punti doppi delle curve k-gonali di 2.ª specie è $d=\frac{(m-1)(m-2k)}{2}+k(k-1)$, essi debbono essere necessariamente situati sopra curve di ordine $m-k-1$ e non sopra una curva di ordine minore, e soltanto $d-\rho=\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}-(k-1)$ fra essi sono arbitrarii.

In funzione della *gonalità* k, e della *dimensione* R del sistema di curve aggiunte minime i sopracitati caratteri sono esprimibili nel seguente modo:

$$m=2k+R \qquad d=\frac{R(R+2k-1)}{2}+k(k-1)=k(k+R-1)+\frac{R(R-1)}{2}$$

$$p=(k-1)(k+R-1) \qquad d-\rho=\frac{R(R+2k-1)}{2}+\frac{(k-1)(k+2)}{2}=\frac{(k+R)(k+R-1)}{2}-(k-1)$$

$$\rho=\binom{k-1}{2} \qquad \text{ord. delle curve agg. minime} = k+R-1,$$

dove R può prendere tutti i valori interi positivi compreso lo zero, e k tutti i valori interi positivi >1.

Fatta eccezione per le curve che hanno una sola curva aggiunta minima, $R=0$, tutte le altre hanno una serie canonica g_{kR}^{R} segata dalle curve agg. di ordine $k+R-1$, completa e composta mediante la g_k^1, e sono perciò rappresentabili mediante curve razionali normali di un S_R considerate come k-uple.

Diamo qui appresso, per comodità di chi voglia esaminare in particolare qualche curva k-gonale di 2.ª specie, il quadro di tutte queste curve.

2. Quadro delle curve k-gonali di 2.ª specie.

Curve k-gonali	$R=0$ $C^{2k}_{(k-1)^2}$	$R=1$ $C^{2k+1}_{(k-1)k}$	$R=2$ $C^{2k+2}_{(k-1)(k+1)}$	$R=3$ $C^{2k+3}_{(k-1)(k+2)}$	$R=4$ $C^{2k+4}_{(k-1)(k+3)}$	$R=5$ $C^{2k+5}_{(k-1)(k+4)}$	$R=6$ $C^{2k+6}_{(k-1)(k+5)}$	$R=7$ $C^{2k+7}_{(k-1)(k+6)}$	. . . .	R $C^{2k+R}_{(k-1)(k+R-1)}$
Curve iperellittiche	C^{4}_{1}	C^{5}_{2}	C^{6}_{3}	C^{7}_{4}	C^{8}_{5}	C^{9}_{6}	C^{10}_{7}	C^{11}_{8}	. . . .	C^{R+4}_{R+1}
Curve 3-gonali . .	C^{6}_{4}	C^{7}_{6}	C^{8}_{8}	C^{9}_{10}	C^{10}_{12}	C^{11}_{14}	C^{12}_{16}	C^{13}_{18}	. . . .	$C^{R+6}_{2(R+2)}$
Curve 4-gonali . .	C^{8}_{9}	C^{9}_{12}	C^{10}_{15}	C^{11}_{18}	C^{12}_{21}	C^{13}_{24}	C^{14}_{27}	C^{15}_{30}	. . . .	$C^{R+8}_{3(R+3)}$
Curve 5-gonali . .	C^{10}_{16}	C^{11}_{20}	C^{12}_{24}	C^{13}_{28}	C^{14}_{32}	C^{15}_{36}	C^{16}_{40}	C^{17}_{44}	. . . .	$C^{R+10}_{4(R+4)}$
Curve 6-gonali . .	C^{12}_{25}	C^{13}_{30}	C^{14}_{35}	C^{15}_{40}	C^{16}_{45}	C^{17}_{50}	C^{18}_{55}	C^{19}_{60}	. . . .	$C^{R+12}_{5(R+5)}$
Curve 7-gonali . .	C^{14}_{36}	C^{15}_{42}	C^{16}_{48}	C^{17}_{54}	C^{18}_{60}	C^{19}_{66}	C^{20}_{72}	C^{21}_{78}	. . . .	$C^{R+14}_{6(R+6)}$
Curve 8-gonali . .	C^{16}_{49}	C^{17}_{56}	C^{18}_{63}	C^{19}_{70}	C^{20}_{77}	C^{21}_{84}	C^{22}_{91}	C^{23}_{98}	. . . .	$C^{R+16}_{7(R+7)}$
Curve 9-gonali . .	C^{18}_{64}	C^{19}_{72}	C^{20}_{80}	C^{21}_{88}	C^{22}_{96}	C^{23}_{104}	C^{24}_{112}	C^{25}_{120}	. . . .	$C^{R+18}_{8(R+8)}$
Curve 10-gonali . .	C^{20}_{81}	C^{21}_{90}	C^{22}_{99}	C^{23}_{108}	C^{24}_{117}	C^{25}_{126}	C^{26}_{135}	C^{27}_{144}	. . . .	$C^{R+20}_{9(R+9)}$
Curve 11-gonali . .	C^{22}_{100}	C^{23}_{110}	C^{24}_{120}	C^{25}_{130}	C^{26}_{140}	C^{27}_{150}	C^{28}_{160}	C^{29}_{170}	. . . .	$C^{R+22}_{10(R+10)}$
Curve 12-gonali . .	C^{24}_{121}	C^{25}_{132}	C^{26}_{143}	C^{27}_{154}	C^{28}_{165}	C^{29}_{176}	C^{30}_{187}	C^{31}_{198}	. . . .	$C^{R+24}_{11(R+11)}$
Curve 13-gonali . .	C^{26}_{144}	C^{27}_{156}	C^{28}_{168}	C^{29}_{180}	C^{30}_{192}	C^{31}_{204}	C^{32}_{216}	C^{33}_{228}	. . . .	$C^{R+26}_{12(R+12)}$
Curve 14-gonali . .	C^{28}_{169}	C^{29}_{182}	C^{30}_{195}	C^{31}_{208}	C^{32}_{221}	C^{33}_{234}	C^{34}_{247}	C^{35}_{260}	. . . .	$C^{R+28}_{13(R+13)}$
Curve 15-gonali . .	C^{30}_{196}	C^{31}_{210}	C^{32}_{224}	C^{33}_{238}	C^{34}_{252}	C^{35}_{266}	C^{36}_{280}	C^{37}_{294}	. . . .	$C^{R+30}_{14(R+14)}$
ecc.										

§ 3. Teoremi generali.

1. Nelle curve k-gonali di 2.ª specie, ma per $k > 2$, ogni gruppo della g_k^1, mentre presenta una sola condizione ad ogni curva agg. di ord. $m-3$ che passa per il suo resto rispetto alla serie canonica g_{2p-2}^{p-1} delle C^{m-3} agg., vale invece $k-1$ condizioni per una arbitraria curva C^{m-3} agg.; quindi per $R+1$ gruppi della g_k^1 passano (pel teorema di Riemann e Roch) $\infty^{p-1-(k-1)(R+1)}$ curve C^{m-3} agg.; cioè per essi ne passa un sistema lineare di dimensione $k(k-3)+1$.

Assumiamo, nel piano della C_p^m k-gonale, $k-3$ rette $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{k-3}$ non appartenenti all'inviluppo della g_k^1 e su ciascuna di queste assumiamo k punti della C_p^m; questi saranno tutti indipendenti per ogni C^{m-3} agg. arbitraria e quindi *per l'insieme dei $k(k-3)$ punti presi sulle rette s e per $R+1$ gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_{R+1}$ della g_k^1 passa solo un fascio di C^{m-3} agg.*

Indichiamo con $t_1, t_2, \ldots, t_{R+1}$ le rette che sostengono i gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_{R+1}$, e con $C_{(i)}^{m-k-1}$ la curva agg. di ordine minimo che passa per R dei gruppi suddetti ottenuti con l'esclusione di G_i. Al fascio delle curve C^{m-3} agg. che passano per i punti delle rette s e per i gruppi G, apparterrà la curva $C_{(1)}^{m-3} \equiv s_1 s_2 \ldots s_{k-3} t_1 C_{(1)}^{m-k-1}$ e la curva $C_{(2)}^{m-3} \equiv s_1 s_2 \ldots s_{k-3} t_2 C_{(2)}^{m-k-1}$, quindi le rette $s_1, s_2, \ldots, s_{k-3}$ si staccano da tutte le curve del fascio. Dunque:

Il fascio delle curve C^{m-3} agg. che passa per $R+1$ gruppi della g_k^1 e per i $k(k-3)$ punti presi sulle rette s (o, che valeva lo stesso, sopra una C^{k-3} arbitraria del piano) si compone della curva fissa formata dalle $k-3$ rette s, e di un fascio di curve aggiunte di ordine $m-k$.

Essendo già dimostrato che per le curve iperellittiche, $k=2$, le curve C^{m-2} agg. che passano per $R+1$ gruppi della g_2^1 formano pure un fascio, possiamo enunciare in generale per tutte le curve k-gonali di 2.ª specie il teorema seguente.

Tutte le curve C^{m-k} agg. della C_p^m k-gonale di 2.ª specie, che passano per $R+1$ gruppi della g_k^1, formano un fascio che sega sulla curva una serie g_{m-k}^1 di dimensione una, e di ordine $m-k$ $(= R+k)$.

2. Al fascio di curve agg. C^{m-k} che passano per i gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_{R+1}$ appartengono le curve $C_{(1)}^{m-k} \equiv t_1 C_{(1)}^{m-k-1}$ e $C_{(2)}^{m-k} \equiv t_2 C_{(2)}^{m-k-1}$, le quali si segano nel punto $t_1 t_2 \equiv O$, dunque il punto O è un punto base del fascio.

Ogni altra curva $C_{(i)}^{m-k} \equiv t_i C_{(i)}^{m-k-1}$, per $i \neq 1, 2$, deve passare pel punto O, e siccome non ci passa la retta t_i, dovrà passarci la curva $C_{(i)}^{m-k-1}$, che è una curva agg. di ordine minimo che passa per i gruppi G_1, G_2. Dunque possiamo conchiudere il teorema:

Tutte le curve agg. C^{m-k-1} di ordine minimo della C_p^m k-gonale di 2.ª specie, che passano per 2 gruppi della g_k^1, passano anche pel punto d'intersezione dei sostegni rettilinei di questi gruppi.

3. Se è $R > 2$, ogni curva C^{m-k-1} agg. dovendo passare per R gruppi differenti delle g_k^1, si ha il teorema:

Ogni curva agg. minima C^{m-k-1} delle curve k-gonali di 2.ª specie passa per gli $\frac{R(R-1)}{2}$ vertici dell' R-latero piano completo formato dagli R sostegni dei gruppi che sono da essa segati.

4. I punti comuni a due C^{m-k-1} agg. sono $(m-k-1)^2$; se consideriamo due curve C^{m-k-1} agg. che passano per $R-1$ gruppi, esse hanno in comune d punti nei punti doppi della C_p^m k-gonale, $k(R-1)$ punti negli $R-1$ gruppi, ed inoltre $\frac{(R-1)(R-2)}{2}$ punti nei vertici dell' $(R-1)$-latero formato dai sostegni dei detti gruppi; ma

$$d + k(R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2} = k(k+R-1) + \frac{R(R-1)}{2} +$$

$$+ k(R-1) + \frac{(R-1)(R-2)}{2} = (k+R-1)^2 = (m-k-1)^2,$$

dunque:

Le curve aggiunte minime che passano per $R-1$ gruppi della g_k^1 costituiscono un fascio che sega la g_k^1 ed ha per punti base semplici soltanto i punti doppi della C_p^m, i punti dei gruppi comuni, e gli $\frac{(R-1)(R-2)}{2}$ vertici dell' $(R-1)$-latero piano completo formato dai sostegni di questi gruppi.

5. Ogni curva C^{m-k} agg. sega la curva C_p^m in $kR+m$ punti variabili, sicchè il resto di un gruppo della serie g_k^1 rispetto ad un gruppo della serie segata da tutte le C^{m-k} agg. è di $kR+(m-k)$ punti, e la serie g_k^1 può essere segata dalle C^{m-k} agg. che passano per uno di questi resti. Siccome una C^{m-k} agg. che passa per un gruppo della g_k^1 è formata dalla retta che lo sostiene e da una C^{m-k-1} agg. arbitraria, ne segue che:

Per R gruppi della g_k^1 e per il resto di un $(R+1)^{\text{esimo}}$ gruppo rispetto alla retta che lo sostiene passa un fascio di C^{m-k} agg. che sega la serie g_k^1.

6. Ma abbiamo pure visto che per $R+1$ gruppi della g_k^1 passa un fascio di C^{m-k} che sega una g_{m-k}^1; dunque:

Questa serie g^1_{m-k} è residua della serie g^1_k rispetto alla serie lineare completa di ordine m, segata da tutte le C^{m-k} agg. che passano per R gruppi della g^1_k, perciò la serie g^1_{m-k} è unica se è unica la g^1_k, ed ogni suo gruppo è per diritto con un determinato gruppo della g^1_k.

a) La serie g^1_k e la serie g^1_{m-k} hanno lo stesso inviluppo.

b) In particolare, per $R=0$, la serie residua della g^1_k è pure una g^1_k.

7. Consideriamo ora il sistema formato dalle curve aggiunte minime, ed avvertiamo espressamente che ora, per comodità, rappresenteremo i caratteri della curva k-gonale e del sistema di curve agg. minime in funzione di R e k (§ 2, n.° 1).

La curva k-gonale è dell'ordine $2k+R$, del genere $(k-1)(k+R-1)$, il suo sistema di curve aggiunte minime e di *dimensione* R, di *ordine* $k+R-1$, di *sovrabbondanza* $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, ha $k(k+R-1)+\frac{R(R-1)}{2}$ punti base semplici, ed è formato di curve generali nel loro ordine. Il grado del sistema è

$$(k+R-1)^2-\left[k(k+R-1)+\frac{R(R-1)}{2}\right]=k(R-1)+\frac{(R-1)(R-2)}{2},$$

e quindi:

La serie caratteristica del sistema di curve aggiunte minime di una curva k-gonale di 2.ª specie è una $g^{R-1}_{k(R-1)+\frac{(R-1)(R-2)}{2}}$ lineare completa.

8. Qui dimostreremo che:

La serie caratteristica del sistema ∞^R di curve agg. minime C^{k+R-1} della curva k-gonale $C^{2k+R}_{(k-1)(k+R-1)}$ è pure segata sopra ogni curva del sistema da un sistema ∞^{R-1} di curve C^{R-1} di ordine $R-1$ circoscritte all' R-latero completo formato dai sostegni degli R gruppi della g^1_k che sono segati da quella curva nella curva k-gonale.

Sia $C^{k+R-1}_{(0)}$ una determinata curva del sistema, e siano $G_1, G_2,\ldots, G_R$ gli R gruppi da essa segati sulla curva k-gonale, $t_1, t_2,\ldots, t_R$ i sostegni di questi gruppi.

Un gruppo della serie caratteristica segnata su questa curva è formato dai gruppi $G_1, G_2,\ldots, G_{R-1}$ e dagli $\frac{(R-1)(R-2)}{2}$ vertici dell' $(R-1)$-latero completo costituito dai loro sostegni $t_1, t_2,\ldots, t_{R-1}$; quindi i rimanenti $R-1$ vertici dell' R-latero $t_1 t_2\ldots t_{R-1} t_R$ sono punti di un gruppo corresiduale del gruppo dei punti base del sistema ∞^R di curve C^{k+R-1} per rispetto al gruppo suddetto della serie caratteristica. Ragionando analogamente per gli altri gruppi della serie caratteristica ottenuti sopprimendo dagli R gruppi $G_1, G_2,\ldots, G_{R-1}$,

G_R uno per volta i gruppi G_{R-1}, G_{R-2},... si perviene alla conseguenza che tutti i vertici dell' R-latero sono punti del gruppo corresiduale del gruppo dei punti base del sistema.

Inoltre essendo i precedenti gruppi della serie caratteristica g^{R-1} segati da una curva composta di $R-1$ rette, tutta la serie deve essere segata da curve di ordine $R-1$ che passano per quel gruppo.

2.ª Dim. Più brevemente potrebbesi ragionare così: Della serie caratteristica esistente sulla curva $C_{(0)}^{k+R-1}$, R gruppi sono segati dagli R $(R-1)$-lateri completi contenuti nell' R-latero $t_1 t_2 \ldots t_{R-1} t_R$, e questi costituiscono R curve composte, di ordine $R-1$ ed indipendenti fra loro; quindi il sistema ∞^{R-1} di curve che sega la serie caratteristica è un sistema di curve C^{R-1} di ordine $R-1$, che ha per punti base i vertici dell' R-latero.

§ 4. Curve k-gonali di 2.ª specie, per $R=0$, $C^{2k}_{(k-1)^2}$.

1. Queste curve sono dell'ordine $2k$, di genere $(k-1)^2$, ed hanno i loro $k(k-1)$ punti doppi distribuiti sopra una curva di ordine $k-1$, che è l'unica curva aggiunta di ordine minimo che esse posseggono. I punti doppi arbitrarii sono soltanto $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$, i rimanenti $\rho=\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ sono dipendenti da essi. In particolare per $k=2$ sono tutti arbitrarii; per $k=3$ 5 sono arbitrarii, il 6.° si può scegliere comunque sulla conica da essi individuata; per $k>3$, $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$ sono arbitrarii del tutto nel piano, $k-2$ sono arbitrarii sulla C^{k-1} individuata dai primi, gli altri $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$ rimanenti sono assegnati sulla C^{k-1}, pel noto teorema di Jacobi, dalle ulteriori intersezioni della C^{k-1} con una qualunque C^k che passa per essi, perchè per i $k(k-1)$ punti doppi della curva k-gonale passano, non solo la unica C^{k-1} agg., ma pure tutte le curve C^k aggiunte alla curva $C^{2k}_{(k-1)^2}$.

2. Dal teorema *h)* del § 1 si deduce che:

Il sistema lineare delle C^k agg. alla $C^{2k}_{(k-1)^2}$ k-gonale è di dimensione 3.

E siccome ogni curva C^k agg. sega la curva k-gonale in $2k$ punti variabili, ne risulta:

La serie lineare completa segata sulla $C^{2k}_{(k-1)^2}$ k-gonale dalle C^k agg. è una g^3_{2k} di dimensione 3 *e di ordine* $2k$.

E quindi pure:

La serie lineare segata dalle rette del piano sulla curva k-gonale $C^{2k}_{(k-1)^2}$ *è completa.*

3. Già sappiamo (§ 3) che la g^1_k, che è sempre formata di gruppi collineari per la esistenza della C^{k-1} agg., deve essere segata da un fascio di C^k agg. che passa per un gruppo della serie residua della g^1_k rispetto alla g^3_{2k} segata da tutte le C^k agg., e che per queste curve la serie residua della g^1_k è un altra g^1_k che ha lo stesso inviluppo della prima.

Dunque: *ogni gruppo della serie* g^1_k *vale soltanto due condizioni per ogni qualunque curva* C^k *agg. che passa per esso.* Nel caso particolare di $k=3$, le curve agg. C^k sono precisamente quelle di ordine $m-3$, e si ritrova che un gruppo della g^1_3 deve valere $3-1$ condizioni per la C^{m-3} che passa per esso.

Se $k=2$, la curva iperellittica (k-gonale) è la C^4_1, e di essa il sistema di C^k agg. è un sistema triplo di coniche. Ogni gruppo della g^1_2 rappresenta due condizioni per le coniche agg. che ci passano, e quindi una coppia qualunque di punti è sempre appartenente ad una g^1_k, perciò la C^4_1 ha infinite serie g^1_2, a due a due residue, e di ciascuna coppia il comune inviluppo è una conica.

Non è lo stesso per $k \geqq 3$; due punti qualunque della C^{2k} individuano un fascio di C^k, che avendo $k(k-1)$ punti base sopra una curva C^{k-1} avrà i rimanenti punti base sopra la retta individuata dai primi due e che in generale non apparterranno alla curva C^{2k}, se non nel caso che i primi due punti faccian parte di un gruppo di una g^1_k.

Le curve C^k che passano per uno di questi gruppi segano la g^1_k residua di quella individuata dal gruppo.

Le curve k-gonali $C^{2k}_{(k-1)^2}$ *hanno* ∞^1 g^1_k, *oppure due* g^1_k *l'una residua dell'altra e che inviluppano la stessa conica secondo che è* $k \gtreqless 2$.

4. Per costruire una $C^{2k}_{(k-1)^2}$ k-gonale di 2.ª specie, si prendano nel piano $\frac{(k-1)(k+3)}{2}$ punti arbitrarii, indi sulla curva C^{k-1} da essi individuata si prendano altri $k-2$ punti ad arbitrio, per questi e per i precedenti si faccia passare una curva C^k generale nel suo ordine e si determinino i loro rimanenti $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$ punti d'intersezione. Avremo così determinati $k(k-1)$ punti base di un sistema triplo di curve C^k, due delle quali si segano sempre in k punti per diritto.

Assunti nel sistema di curve C^k due fasci, $(C_{(1)}\,C_{(2)})$, $(C_{(3)}\,C_{(4)})$, senza alcuna curva comune, chè altrimenti sarebbero compresi in una rete che avrebbe un punto di base in più, e resi questi fasci proiettivi fra loro, si avrà dall'intersezione delle curve corrispondenti una curva di ordine $2k$, che ha per punti doppi i $k(k-1)$ punti base del sistema triplo comuni ai due fasci, e quindi del genere $(k-1)^2$, e sarà perciò la curva k-gonale cercata.

Una delle due serie g_k^1 è data gruppo per gruppo dalle intersezioni delle curve corrispondenti dei due fasci, all'altra appartengono i due gruppi di k punti per diritto che costituivano i punti base non comuni ai due fasci.

§ 5. Curve k-gonali di 2.ª specie, per $R=1$, $C^{2k+1}_{(k-1)k}$.

1. Queste curve sono dell'ordine $2k+1$ di genere $(k-1)k$, ed hanno i loro k^2 punti doppi nei punti base di un fascio di curve C^k, che sono le ∞^1 loro curve agg. minime: la sovrabbondanza del sistema di curve agg. minime è perciò soddisfatta, $\rho = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

La serie canonica segata su queste curve dalle curve C^k agg. è precisamente la g_k^1, che è perciò unica.

Dal teorema *f)* del § 1 si deduce che: *il sistema delle curve aggiunte di ordine* $k+1$ *delle curve* $C^{2k+1}_{(k-1)k}$ *k-gonali è di dimensione* 5, *e quindi la serie che esso sega sulla curva k-gonale è una serie lineare completa* g^5_{3k+1} *di dimensione* 5 *e di ordine* $3k+1$ $[=(2k+1)(k+1)-2k^2]$.

2. La serie lineare g_k^1 è anche segata sulla C^{2k+1} da un fascio di curve C^{k+1} agg., perchè, pel teorema *g)* del § 1, ogni curva C^{k+1} del sistema ∞^5 sega una qualunque curva del fascio di curve C^k in k punti per diritto; inoltre essendo dei punti base del fascio di C^k soltanto $\frac{(k+1)(k+4)}{2}-5$ indipendenti per le C^{k+1}, ogni C^{k+1} che passi per altri due punti arbitrarii di C^k, avrà $\frac{(k+1)(k+4)}{2}-3$ intersezioni sue con essa indipendenti e quindi passerà, oltre che per tutti i punti base, per altri $k-2$ punti di C^k dipendenti dai primi.

Dunque conchiudiamo che, se per due punti di un gruppo della serie g_k^1 conduciamo le ∞^3 C^{k+1}, queste passeranno pure per gli altri $k-2$ rimanenti punti del gruppo. Cioè:

Ogni gruppo della serie g_k^1 *presenta due condizioni soltanto alle curve* C^{k+1} *agg. che passano per esso.*

E quindi si ha pure:

La serie residua della g_k^1 *rispetto alla* g_{3k+1}^5 *segata dalle* C^{k+1} *agg. è una* g_{2k+1}^3.

Siccome la C^{k+1} che passa per un gruppo delle g_k^1 può pure spezzarsi in una C^k ed in una retta arbitraria del piano.

La serie lineare g_{2k+1}^2 *segata da tutte le rette del piano sulla* $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ *k-gonale è incompleta.*

Dal teorema 1 del § 3 si ha:

Per due gruppi della serie lineare g_k^1 *passa un fascio di curve* C^{k+1} *che sega sulla* $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ *k-gonale una serie lineare* g_{k+1}^1, *residua della* g_k^1 *rispetto alla* g_{2k+1}^2 *segata dalle rette del piano, e che ha per inviluppo lo stesso inviluppo della* g_k^1.

Per un gruppo delle g_k^1 *e per un gruppo della* g_{k+1}^1, *non collineare col primo, passa un fascio di* C^{k+1} *che sega sulla curva* C^{2k+1} *la serie lineare* g_k^1.

3. Per costruire una curva $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ k-gonale, si stabilisca una corrispondenza proiettiva fra un fascio di curve C^k a punti base semplici, e un fascio di raggi di 2.° ordine, il luogo dei punti d'intersezione degli elementi corrispondenti sarà una curva di ordine $2k+1$, che avrà per punti doppi i punti base del fascio di C^k e per tangenti in ciascuno di essi i due raggi dell'inviluppo che ci passano, ed è perciò la curva k-gonale richiesta.

Si può anche costruire la $C_{(k-1)k}^{2k+1}$ k-gonale nel seguente modo. Si stabilisca una proiettività fra un fascio qualunque di curve C^k a punti base semplici e un fascio di curve C^{k+1} che abbia per punti base i punti base del primo fascio e altri $2k+1$ punti semplici del piano, di cui però 4 soltanto sono indipendenti, il luogo delle intersezioni delle curve corrispondenti è una curva C^{2k+1} che avrà per punti doppi i k^2 punti comuni ai due fasci e quindi sarà la curva cercata.

Tanto nell'una che nell'altra costruzione la serie g_k^1 è data gruppo per gruppo dall'intersezione degli elementi corrispondenti.

§ **6**. Curve k-gonale di **2.**ª specie, per $R=2$, $C_{(k-1)(k+1)}^{2k+2}$.

Queste curve sono dell'ordine $2k+2$, del genere $(k-1)(k+1)$, hanno una rete di C^{k+1} aggiunte minime di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, che ha per punti base semplici i loro $k(k+1)+1$ punti doppi.

La serie canonica segata dalle C^{k+1} sulla curva C^{2k+2} è una g^2_{2k} lineare completa e composta mediante la g^1_k, che è unica.

La serie caratteristica della rete di C^{k+1} agg. è pure una serie lineare g^1_k, i cui gruppi sono collineari ed allineati con un punto fisso della curva, e ciò perchè la curva generale della rete, essendo priva di punti doppi, è k-gonale anch'essa. Però è da tener presente che la g^1_k della curva C^{2k+2} avendo per inviluppo una conica, e quella di ciascuna sua curva agg. minima avendo per inviluppo un punto, le due serie hanno soltanto due gruppi comuni e questi gruppi hanno i sostegni che si segano in un punto della C^{k+1} agg. che li contiene; ciò conferma un teorema precedente (§ 3, n.° 3).

La rete delle C^{k+1} agg. minime di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ è quella indicata dal teor. *d)* del § 1.

Per costruire una curva $C^{2k+2}_{(k-1)(k+1)}$ k-gonale, per k punti per diritto si facciano passare due arbitrarie C^{k+1} semplici prive di punti doppi; queste si segheranno in altri $k(k+1)+1$ punti semplici, di cui (§ 3, 3) $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$ sono dipendenti dai rimanenti, e questi certamente non appartengono ad una curva di grado inferiore, e individuano una rete di curve C^{k+1} generali nel loro ordine.

Di questa rete si considerino tre curve $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, $C_{(3)}$ non appartenenti allo stesso fascio, e si riferiscano proiettivamente fra loro i fasci $(C_{(1)}, C_{(2)})$, $(C_{(2)}, C_{(3)})$ ed in modo che $C_{(2)}$ non sia curva unita. Due curve corrispondenti si segheranno in k punti per diritto, il luogo di questi gruppi è una curva di ordine $2k+2$, che avrà per punti doppi i $k(k+1)+1$ punti base della rete, e perciò sarà del genere $(k-1)(k+1)$; essa è quindi la curva $C^{2k+2}_{(k-1)(k+1)}$ k-gonale cercata.

§ 7. Curve k-gonali di 2.ª specie, per $R-3$, $C^{2k+3}_{(k-1)(k+2)}$.

1. Queste curve sono dell'ordine $2k+3$, di genere $(k-1)(k+2)$, hanno un sistema triplo di curve agg. minime C^{k+2} dell'ordine $k+2$ e di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, che ha per punti base semplici i loro $k(k+2)+3$ punti doppi.

La serie canonica segata dalle C^{k+2} agg. sulla curva $C^{2k+3}_{(k-1)(k+2)}$ k-gonale è una serie g^3_{3k} lineare completa e composta mediante la g^1_k che è unica.

La serie caratteristica del sistema triplo di C^{k+2} agg. alla curva k-gonale $C^{2k+3}_{(k-1)(k+2)}$ è una serie g^2_{2k+1} lineare e completa, che è pure segata su ciascuna di esse da una rete di coniche, che ha per punti base i vertici del trilatero $t_1 t_2 t_3$ che sostiene i gruppi G_1, G_2, G_3 della g^1_k segati da quella curva agg. sulla curva k-gonale.

2. Per costruire una curva $C^{2k+3}_{(k-1)(k+2)}$ k-gonale, sopra un'arbitraria curva $C^{k+2}_{(0)}$ priva di punti doppi si prendano ad arbitrio tre punti non per diritto L, M, N, per essi si faccia passare una conica, e per i $2k+1$ punti rimanenti comuni alla conica ed alla $C^{k+2}_{(0)}$ si faccia passare un'altra curva $C^{k+2}_{(1)}$ di ordine $k+2$ e generale nel suo ordine. Le curve $C_{(0)}$, $C_{(1)}$ si segheranno ulteriormente in un gruppo di $k(k+2)+3$ punti semplici, che, essendo corresiduali del triangolo LMN rispetto ai $2k+1$ punti della conica, sono i punti base di un sistema triplo di C^{k+2} di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$. Si potrebbe anche fare a meno di costruire una conica non degenere per i punti LMN; basterebbe la conica composta delle rette LM, LN, ed allora il gruppo dei $2k+1$ punti è formato del punto L e dei rimanenti $2k$ punti di intersezione di queste rette con la $C^{k+2}_{(0)}$.

Indicando ora con G_1, G_2, G_3 i tre gruppi della $C^{k+2}_{(0)}$, di k punti ciascuno, esistenti sui lati $MN \equiv t_1$, $NL \equiv t_2$, $LM \equiv t_3$ del triangolo LMN, consideriamo che per un solo di questi gruppi, per es. G_3, passa una rete di C^{k+2}, che avrà in tutto per punti base $k(k+2)+3+k=(k+1)(k+2)+1$ punti $\left(\text{dei quali sono dipendenti dai rimanenti } \frac{(k-1)k}{2}\right)$ quindi [§ 1, *d)*] deve avere per serie caratteristica una g^1_{k+1} di gruppi collineari allineati con un punto fisso. Sulla $C^{k+2}_{(0)}$ (che appartiene alla rete) la serie g^1_{k+1} ha per punto fisso il punto $L \equiv t_1 t_2$, poichè già due gruppi sono sulle rette t_1 e t_2. Dei gruppi della g^1_{k+1} solo quelli che stanno sulle rette t_1, t_2 hanno un punto sulla t_3, gli altri li hanno tutti fuori di questa retta, altrimenti la $C^{k+2}_{(0)}$ si spezzerebbe in una $C^{k+1}_{(0)}$ e una retta.

Consideriamo del sistema ∞^3 di C^{k+2} i fasci di curve individuati dalle coppie di gruppi $G_1 G_3$, $G_2 G_3$, ed osserviamo che due curve di questi fasci si debbono segare in un gruppo di $k+1$ punti collineari variabili, e che ciascun fascio determina sulla retta t_3 del gruppo G_3 ad essi comune una punteggiata di 1.° ordine prospettiva al fascio. Se noi riferiamo proiettivamente i due fasci fra loro in modo da essere corrispondenti quelle curve che si segano nello stesso punto della t_3, otterremo che il luogo delle intersezioni è una curva C^{2k+4} che si spezza nella retta t_3 e in una curva C^{2k+3} di ordine $2k+3$, che ha per punti doppi i $k(k+2)+3$ punti base del sistema ∞^3 di C^{k+2} e quindi è la curva k-gonale cercata.

Se di questa curva si considera il solo fascio $(G_1 G_3)$ di curve agg. C^{k+2}, si trova che il fascio sega i sostegni t_1, t_3 dei gruppi base in due punteggiate proiettive di 1.° ordine, di cui la retta che congiunge una coppia di punti corrispondenti è il sostegno del gruppo di k punti della C^{2k+3} segato su essa dalla curva che determina quei punti della punteggiata, quindi si conferma che l'inviluppo della g_k^1 della C^{2k+3} costruita è una conica.

§ 8. Curve k-gonali di 2.ª specie, per $R=4$, $C^{2k+4}_{(k-1)(k+3)}$.

1. Queste curve sono dell'ordine $2k+4$, del genere $(k-1)(k+3)$ ed hanno un sistema ∞^4 di curve agg. minime C^{k+3} dell'ordine $k+3$ e di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$, che ha per punti base semplici i loro $k(k+3)+6$ punti doppi.

La serie canonica segata dalle C^{k+3} agg. sulla curva $C^{2k+4}_{(k-1)(k+3)}$ k-gonale è una serie g^4_{4k} lineare completa e composta mediante la g^1_k, che è unica.

La serie caratteristica del sistema ∞^4 di C^{k+3} agg. alla curva $C^{2k+4}_{(k-1)(k+3)}$ è una serie g^3_{3k+3} lineare e completa, che è pure segata su ciascuna di esse da un sistema triplo di cubiche che ha per punti base i vertici del quadrilatero $t_1 t_2 t_3 t_4$ che sostiene i gruppi G_1, G_2, G_3, G_4 della g^1_k segati da quella curva sulla curva k-gonale.

2. Per costruire una $C^{2k+4}_{(k-1)(k+3)}$ k-gonale, per i vertici di un quadrilatero piano completo $t_1 t_2 t_3 t_4$ si faccia passare una curva $C^{k+3}_{(0)}$ generale nel suo ordine ed una cubica, e per gli ulteriori $3k+3$ punti d'intersezione di queste due curve si faccia passare un'altra curva $C^{k+3}_{(1)}$ di ordine $k+3$ e generale nel suo ordine. Le curve $C_{(0)}$, $C_{(1)}$ si segheranno ulteriormente in un gruppo di $k(k+3)+6$ punti semplici, che essendo sulla $C_{(0)}$ corresiduali dei vertici del quadrilatero, rispetto ai $3k+3$ punti della cubica, sono i punti base di un sistema ∞^4 di C^{k+3} di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

Si potrebbe anche fare a meno di costruire una cubica non degenere circoscritta al quadrilatero, basterebbe la cubica composta delle tre rette $t_1 t_2 t_3$, ed in tal caso il gruppo dei $3k+3$ punti è dato dai vertici del trilatero $t_1 t_2 t_3$ e dai rimanenti $3k$ punti d'intersezione dei suoi lati con la $C_{(0)}^{k+3}$.

3. Indicando ora con G_1, G_2, G_3, G_4 i quattro gruppi della $C_{(0)}^{k+3}$ di k punti ciascuno esistenti sulle rette t_1, t_2, t_3, t_4, consideriamo che, mentre per un punto qualunque della $C_{(0)}^{k+3}$ passa ∞^3 C^{k+3} che segano sulla $C_{(0)}^{k+3}$ una g_{3k+2}^{2}, per un punto del gruppo G_1 ne passano ∞^3, che passano pure per i rimanenti punti del gruppo e che segano una g_{2k+3}^{2}.

Questo sistema triplo di C^{k+3} che passa pel gruppo G_1 ha $k(k+3)+6+k=(k+1)(k+3)+3$ punti base ed è di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+k-1=\frac{k(k-1)}{2}$, quindi è una rete del tipo costruito nel paragrafo precedente, ottenuta cambiando k in $k+1$, la cui serie caratteristica è pure segata dalle coniche circoscritte al trilatero $t_2 t_3 t_4$.

Sicchè delle curve di questa rete, quelle che passano per un punto del gruppo G_2, passano per i rimanenti punti del gruppo e pel punto $t_1 t_2$ e segano sulla $C_{(0)}^{k+3}$ una g_{k+2}^{1} di punti collineari ed allineati col punto fisso $t_3 t_4$.

E quindi possiamo conchiudere che: *del sistema ∞^4 di curve C^{k+3} sopra costruito, le curve che passano per due gruppi G passano pure per il punto comune ai loro sostegni e determinano una rete di cui due curve si segano in $k+2$ punti per diritto.*

4. Consideriamo la rete determinata dai gruppi $G_1 G_2$, e in essa due curve che si segano in un punto M della retta t_1, queste si segheranno in altri $k+1$ punti allineati con M su una retta t_i, e appartenendo i punti comuni alle due curve ad una cubica spezzata in tre rette, esse devono segarsi anche nel punto $t_2 t_i$, cioè uno dei $k+1$ punti sta su t_2.

Cosicchè: *nella rete $(G_1 G_2)$ due curve che si segano sopra un punto variabile di t_1 si segano pure in un punto variabile della retta t_2.*

5. Finalmente consideriamo del sistema ∞^4 di C^{k+3} i fasci di curve individuati dai gruppi $G_1 G_2 G_3$, $G_1 G_2 G_4$, e riferiamo fra loro univocamente i due fasci in modo che siano corrispondenti due curve che si segano in un stesso punto della retta t_1, essi saranno proiettivi e il luogo delle intersezioni è una curva C^{2k+6}, che si spezza nelle due rette t_1, t_2 e in una C^{2k+4} che ha per punti doppi i $k(k+3)+6$ punti base del sistema, e quindi è la curva k-gonale cercata.

Anche qui è facile confermare che l'inviluppo delle rette t che sostengono i gruppi di k punti è una conica.

§ 9. Curve k-gonali di 2.ª specie, per R qualunque > 1, $C^{2k+R}_{(k-1)(k+R-1)}$.

1. Chiuderemo questa Memoria col dare uno sguardo alla curva generica fra le curve k-gonali di 2.ª specie, per R qualunque, ma superiore ad 1, essendo che per $R=0$, $R=1$, come abbiam visto, si hanno a fare delle particolari considerazioni.

Ogni curva $C^{2k+R}_{(k-1)(k+R-1)}$ k-gonale, è dell'ordine $2k+R$, di genere $(k-1)(k+R-1)$, ha un sistema ∞^R di curve agg. minime C^{k+R-1} di ordine $k+R-1$, che ha per punti base semplici i $k(k+R-1)+\frac{R(R-1)}{2}$ punti doppi della curva k-gonale ed è di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

La serie canonica segata da questo sistema sulla curva k-gonale è una g^R_{Rk} lineare completa e composta mediante i gruppi di una g^1_k unica.

La serie caratteristica del sistema stesso è una $g^{R-1}_{k(R-1)+\frac{(R-1)(R-2)}{2}}$ segata pure da un sistema ∞^{R-1} di curve di ordine $R-1$ (§ 3, 7 e 8).

2. Per costruire una $C^{2k+R}_{(k-1)(k+R-1)}$ k-gonale si costruisca sul piano, con R tangenti $t_1 t_2 \ldots t_{R-1} t_R$ di una arbitraria conica (se $R > 5$) un R-latero completo e si facciano passare per i suoi vertici una $C^{k+R-1}_{(0)}$ di ordine $k+R-1$ e generale nel suo ordine ed una C^{R-1} di ordine $R-1$ (questa può essere anche spezzata in $R-1$ lati del R-latero); queste due curve si segheranno in un gruppo H di $k(R-1)+\frac{(R-1)(R-2)}{2}$ punti. Una seconda curva $C^{k+R-1}_{(1)}$, generale nel suo ordine $k+R-1$, fatta passare per questo gruppo H di punti, segherà la $C_{(0)}$ in $k(k+R-1)+\frac{R(R-1)}{2}$ punti semplici, che saranno i punti base di un sistema ∞^R di curve C^{k+R-1} di sovrabbondanza $\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

3. Indicando con $G_1, G_2, \ldots, G_{R-1}, G_R$ gli R gruppi della $C^{k+R-1}_{(0)}$ di k punti ciascuno esistenti sulle rette $t_1, t_2, \ldots, t_{R-1}, t_R$ fuori dei vertici dell'R-latero, consideriamo che per un punto del gruppo G_R passano ∞^{R-1} C^{k+R-1} che passano per tutti i punti del gruppo e segano sulla $C^{k+R-1}_{(0)}$ una $g^{R-2}_{k(R-2)+\frac{(R-1)(R-2)}{2}}$.

Questo sistema ∞^{R-1} di C^{k+R-1} che passa pel gruppo G_1 ha $k(k+R-1)+\frac{R(R-1)}{2}+k=(k+1)(k+R-1)+\frac{(R-1)(R-2)}{2}$ punti base ed è di sovrabbondanza $\frac{k(k-1)}{2}$, quindi è un sistema di curve del tipo appartenente alla precedente colonna del quadro, e per k aumentato di una unità, la cui serie caratteristica è pure segata da un sistema ∞^{R-2} di curve C^{R-2} circoscritte ad un $(R-1)$-latero. Sicchè con ragionamento analogo a quello fatto nel paragrafo precedente ed esteso a due, tre,... gruppi G, si perviene a questo:

Nel sistema ∞^R di curve C^{k+R-1} costruito nel numero precedente le curve che passano per $R-2$ gruppi G passano per tutti i punti comuni ai sostegni di questi gruppi e determinano una rete di curve di cui due curve si segano in $k+R-2$ punti per diritto.

4. *Se due curve di ognuna di queste reti si segano in un altro punto di una delle rette che sostengono i loro gruppi comuni, altri $R-3$ dei rimanenti loro punti comuni, per diritto con quello, apparterranno ognuno ad una delle $R-3$ rette che sostengono i rimanenti gruppi comuni, e gli altri k punti staranno nel piano fuori di queste rette.*

5. Nella rete individuata dai gruppi $G_3,\ldots, G_{R-1}, G_R$ consideriamo i due fasci che hanno per gruppi comuni $G_1 G_3 \ldots G_{R-1} G_R$ e $G_2 G_3 \ldots G_{R-1} G_R$, e riferiamo fra loro univocamente le loro curve in modo che siano corrispondenti quelle che si segano in un medesimo punto della retta t_R, essi saranno proiettivi e il luogo delle loro intersezioni sarà una curva $C^{2k+2R-2}$, che si spezza nelle $R-2$ rette $t_3,\ldots, t_{R-1}, t_R$ e in una curva C^{2k+R}, che ha per punti doppi i $k(k+R-1)+\frac{R(R-1)}{2}$ punti base del sistema, e quindi è la curva k-gonale cercata.

Napoli, agosto 1895.

Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni ϑ ellittiche per argomento zero.

(Di Ernesto Pascal, *a Pavia.)*

Una delle relazioni notissime fra i valori delle ϑ e delle loro derivate per argomento zero è quella che esprime la derivata della funzione dispari $\vartheta'_1(0)$ per mezzo del prodotto delle tre funzioni ϑ pari per argomento zero, cioè:

$$\vartheta'_1(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0).$$

Scopo di questa Nota è di far conoscere due relazioni la cui formazione, da un certo punto di vista, può ritenersi analoga alla formazione di quest'ultima, cioè, nel primo membro compariscono le derivate successive (sino alla *settima*) della sola funzione *dispari* ϑ_1, e nel secondo membro compariscono le sole funzioni *pari* non affette da indici di derivazione.

La formazione poi del secondo membro non è affatto casuale, ma invece i due secondi membri, a meno di fattori dipendenti dai moduli di periodicità, corrispondono ai due noti invarianti g_2, g_3, nello stesso modo con cui il secondo membro della citata relazione di sopra corrisponde al cosiddetto discriminante Δ.

Le due relazioni che mi propongo di dimostrare sono propriamente le seguenti:

$$-3\,\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta_1'} + 5\,\frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^2} = \vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 \tag{A}$$

$$-9\,\frac{\vartheta_1^{\mathrm{VII}}}{\vartheta_1'} + 63\,\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta_1'}\,\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - 70\,\frac{\vartheta_1'''^3}{\vartheta_1'^3} = -8(\vartheta^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4)(\vartheta_2^4 - \vartheta^4). \tag{B}$$

Nei primi membri gli indici superiori rappresentano *ordini* di derivazione. Ho detto che i secondi membri di queste formole hanno relazione cogli invarianti g_2, g_3; infatti basta ricordare le formole che esprimono g_2, g_3 per mezzo delle ϑ pari con argomento zero, cioè propriamente:

$$g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4 (\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8)$$

$$g_3 = -\frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6 (\vartheta^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4)(\vartheta_2^4 - \vartheta^4).$$

Passiamo ora alla dimostrazione delle due formole (*A*), (*B*).

§ 1. Riassunto di alcune formole preliminari.

Partendo dalla formola $\vartheta_1' = \vartheta\vartheta_2\vartheta_3$, prendendo i logaritmi dei due membri e poi le derivate rispetto al modulo $\log q$, e poi servendosi dell'equazione differenziale cui soddisfanno tutte le ϑ insieme a tutte le loro derivate, si ha subito la nota formola:

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}. \tag{1}$$

Su questa ripetendo la derivazione rispetto a $\log q$ e servendosi poi ancora dell'equazione differenziale delle ϑ, si ha:

$$\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^2} = \left(\frac{\vartheta^{\mathrm{IV}}}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2^{\mathrm{IV}}}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3^{\mathrm{IV}}}{\vartheta_3}\right) - \left(\frac{\vartheta''^2}{\vartheta^2} + \frac{\vartheta_2''^2}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3}\right). \tag{2}$$

E ripetendo infine su quest'ultima le stesse operazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\vartheta_1^{\mathrm{VII}}}{\vartheta_1'} + 3\,\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta_1'}\,\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - 2\,\frac{\vartheta_1'''^3}{\vartheta_1'^3} = -\sum_i \frac{\vartheta_i^{\mathrm{VI}}}{\vartheta_i} &+ \\ + 3\sum_i \frac{\vartheta_i^{\mathrm{IV}}}{\vartheta_i}\,\frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} &- \\ - 2\sum_i \frac{\vartheta_i''^3}{\vartheta_i^3}&, \end{aligned} \tag{3}$$

dove nel secondo membro abbiamo per brevità introdotto il segno sommatorio, il quale si intende preso per gli indici $i = 0, 2, 3$, cioè esteso alle tre ϑ *pari*.

Partiamo ora dalle formole note per le derivate dei rapporti $\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)}$, $\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$, $\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_2(x)}$ espresse mediante le ϑ stesse, deriviamo primo e secondo membro un'altra volta rispetto all'argomento x e poi poniamo $x = 0$.

Si hanno allora le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} &= \vartheta^4 \\
\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} &= \vartheta_2^4 \\
\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta''}{\vartheta} &= -\vartheta_3^4.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ci occorre finalmente trovare un'altra categoria di formole che si ricavano da quelle relative alle derivate logaritmiche delle funzioni ϑ. Le derivate logaritmiche delle ϑ, a cominciare dal secondo ordine in poi, si esprimono mediante le ϑ stesse; le formole relative si possono facilmente trovare; noi ci serviremo delle tabelle contenute in un lavoro di un mio scolaro, il dott. Bertolani (Giorn. di Batt., vol. 33). Dalle formole per le derivate logaritmiche quarte e seste, ponendo l'argomento x eguale a zero, si hanno le altre (*):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta} - 3\frac{\vartheta''^2}{\vartheta^2} &= -2\vartheta_2^4\vartheta_3^4 \\
\frac{\vartheta_2^{IV}}{\vartheta_2} - 3\frac{\vartheta_2''^2}{\vartheta_2^2} &= -2\vartheta_3^4\vartheta^4 \\
\frac{\vartheta_3^{IV}}{\vartheta_3} - 3\frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3^2} &= +2\vartheta^4\vartheta_2^4
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta^{VI}}{\vartheta} - 15\frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta}\frac{\vartheta''}{\vartheta} + 30\frac{\vartheta''^3}{\vartheta^3} &= +8\vartheta_2^4\vartheta_3^4(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) \\
\frac{\vartheta_2^{VI}}{\vartheta_2} - 15\frac{\vartheta_2^{IV}}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + 30\frac{\vartheta_2''^3}{\vartheta_2^3} &= -8\vartheta^4\vartheta_3^4(\vartheta_3^4 + \vartheta^4) \\
\frac{\vartheta_3^{VI}}{\vartheta_3} - 15\frac{\vartheta_3^{IV}}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + 30\frac{\vartheta_3''^3}{\vartheta_3^3} &= +8\vartheta_2^4\vartheta^4(\vartheta_2^4 - \vartheta^4).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(*) Occorre notare che nelle citate formole del dott. Bertolani (vol. 33; Giorn. di Batt.) comparisce un disgraziato errore di stampa (nella tabella III) corretto dallo stesso Autore in un lavoro posteriore nel medesimo periodico.

§ 2. Dimostrazione della formola (A).

Mediante le formole stabilite nel paragrafo precedente possiamo facilmente dimostrare le due formole fondamentali (A), (B).

Combinando (1), (2) possiamo avere:

$$-3\frac{\vartheta_1^{V}}{\vartheta_1'} + 5\frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^2} = -3\sum_i \frac{\vartheta_i^{IV}}{\vartheta_i} + 5\sum_i \frac{\vartheta_i''^2}{\vartheta_i^2}$$
$$+ 4\sum_{ij}\frac{\vartheta_i''\,\vartheta_j''}{\vartheta_i\vartheta_j},$$

dove le $\sum$ si intendono estese al solito in modo da comprendere le tre ϑ pari, e il $\sum_{ij}$ s'intende comprendente sei termini corrispondenti alle sei combinazioni degli indici $i, j, = 0, 2, 3$.

Ma quadrando e sommando le (4), e inoltre sommando le (5), e tenendo conto della relazione nota:

$$\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 = 2\vartheta_3^4\vartheta^4 + 2\vartheta_2^4\vartheta_3^4 - 2\vartheta^4\vartheta_2^4,$$

si ha:

$$\sum_i \frac{\vartheta_i''^2}{\vartheta_i^2} - \sum_{ij}\frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i}\,\frac{\vartheta_j''}{\vartheta_j} = \frac{1}{2}(\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8)$$

$$\sum_i \frac{\vartheta_i^{IV}}{\vartheta_i} - 3\sum_i \frac{\vartheta_i''^2}{\vartheta_i^2} = -(\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8),$$

onde combinando colla precedente si ha subito la relazione (A).

§ 3. Dimostrazione della formola (B).

Tenendo presenti le (1), (2), (3) e formando la combinazione:

$$9(3) + 36(1)(2) - 16(1)^3,$$

e riducendo si ha:

$$-9\frac{\vartheta_1^{VII}}{\vartheta_1'} + 63\frac{\vartheta_1^{V}}{\vartheta_1'}\,\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} - 70\frac{\vartheta_1'''^3}{\vartheta_1'^3} = -9\sum_i\frac{\vartheta_i^{VI}}{\vartheta_i} + 63\sum_i\frac{\vartheta_i^{IV}}{\vartheta_i}\,\frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} -$$
$$-70\sum_i\frac{\vartheta_i''^3}{\vartheta_i^3} + 36\sum_{ij}\frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i}\,\frac{\vartheta_j^{IV}}{\vartheta_j} - 84\sum_{ij}\frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i}\,\frac{\vartheta_j''^2}{\vartheta_j^2} - 96\frac{\vartheta''}{\vartheta}\,\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}.$$

Ora in primo luogo sommiamo le (6) e abbiamo:

$$\sum_i \frac{\vartheta_i^{VI}}{\vartheta_i} - 15 \sum_i \frac{\vartheta_i^{IV}}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} + 30 \frac{\vartheta_i''^3}{\vartheta_i^3} = 8(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4)(\vartheta_2^4 - \vartheta^4)(\vartheta^4 + \vartheta_3^4).$$

Moltiplichiamo inoltre la 2.ª delle (4) colla 1.ª delle (5) e così la 3.ª e 1.ª delle (4) colla 2.ª e 3.ª delle (5) rispettivamente, e sommiamo; d'altra parte moltiplichiamo rispett. la 3.ª, 1.ª, 2.ª delle (4) colla 1.ª, 2.ª, 3.ª delle (5) e sommiamo; sottragghiamo poi fra loro membro a membro le due relazioni ottenute, e si ha:

$$2\sum_i \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_i^{IV}}{\vartheta_i} - \sum_{ij} \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_j^{IV}}{\vartheta_j} - 6 \sum_i \frac{\vartheta_i''^3}{\vartheta_i^3} + 3 \sum_{ij} \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_j''^2}{\vartheta_j^2} =$$
$$= -2(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4)(\vartheta_2^4 - \vartheta^4)(\vartheta^4 + \vartheta_3^4).$$

Infine sottraendo a due a due le (4) e poi moltiplicando fra loro le tre differenze, si ha:

$$2\sum_i \frac{\vartheta_i''^3}{\vartheta_i^3} - 3 \sum_{ij} \frac{\vartheta_i''}{\vartheta_i} \frac{\vartheta_j''^2}{\vartheta_j^2} + 12 \frac{\vartheta''}{\vartheta} \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} =$$
$$= (\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4)(\vartheta_2^4 - \vartheta^4)(\vartheta^4 + \vartheta_3^4).$$

Combinando opportunamente fra loro le quattro ultime relazioni ottenute si ha finalmente la formola (B).

§ 4. Cenno su di una dimostrazione indiretta delle due formole (A), (B).

Le dimostrazioni dei paragrafi precedenti hanno il vantaggio di essere delle dimostrazioni dirette delle due formole (A), (B); una dimostrazione indiretta di esse è data nel seguente modo.

Consideriamo quella cosiddetta operazione D che si introduce nella teoria delle funzioni ellittiche (vedi Halphen, *Fonct. ellipt.*, vol. I, cap. IX) e che è definita nella doppia maniera:

$$D = -2\eta \frac{\partial}{\partial \omega} - 2\eta' \frac{\partial}{\partial \omega'} = 12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

ed eseguiamo successivamente questa operazione sulla quantità η (primo semiperiodo dell'integrale di 2.ª specie).

Si sa per altre vie che il risultato di una tale operazione è:

$$D\eta = \frac{1}{6} g_2 \omega$$

$$D D\eta = -\frac{1}{3} g_2 \eta + 2 g_3 \omega.$$

Se ora esprimiamo tutto mediante le ϑ tenendo conto delle formole (vedi Halphen, cit.):

$$\eta = -\frac{1}{12} \frac{\pi^2}{\omega} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}$$

$$D \log q = -\frac{\pi^2}{\omega^2}$$

$$D \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{d}{d \log q} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} D \log q$$

ecc. ecc.

giungiamo per questa via alle stesse formole sopra dimostrate.

Pavia, ottobre del 1895.

Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici.

(Del prof. Vito Volterra, *a Torino.)*

1. In alcuni lavori precedentemente pubblicati (*) ho studiato la rotazione di un corpo nel cui interno esistono moti stazionarii e ne ho data la soluzione mediante funzioni ellittiche. Nei detti studi ho supposto, fin da principio, che i moti interni venissero conservati stazionarii mediante l'azione di *forze* interne.

Vogliamo ora approfondire l'esame dell'effetto di queste forze interne, della loro necessità onde conservare stazionarii i moti interni e di ciò che avviene quando esse non siano tali da soddisfare a questa condizione. Queste considerazioni formeranno il soggetto della presente Memoria e ci condurranno ad allargare il campo delle nostre ricerche e delle loro applicazioni al problema della rotazione terrestre.

2. Cominciamo dalla determinazione della forza viva di un sistema girevole attorno ad un punto fisso.

Sia ξ, η, ζ un sistema di assi mobili coll'origine in questo punto, e denotiamo con u, v, w le componenti secondo queste direzioni della velocità *relativa* agli assi stessi del punto del sistema di coordinate ξ, η, ζ. Siano p, q, r le componenti della velocità angolare di rotazione nelle direzioni ξ, η, ζ di questi assi. Le componenti della velocità assoluta del punto (ξ, η, ζ) re-

(*) *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* Astr. Nachr., Bd. 138, n.[i] 3291-2. — *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* Atti della R. Acc. di Torino, 3 febbr., 1895. — *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii.* Id., 3 marzo, 1895. — *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* Id., 31 marzo, 1895. — *Un teorema sulla rotazione dei corpi,* ecc. Id., 5 maggio, 1895. — *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii.* Annali di Matematica, tomo 23.

sulteranno:

$$u + q\zeta - r\eta, \qquad v + r\xi - p\zeta, \qquad w + p\eta - q\xi.$$

Quindi, chiamando ρ la densità del sistema S, la sua forza viva sarà:

$$T = \frac{1}{2}\int_S \rho\left\{(u + q\zeta - r\eta)^2 + (v + r\xi - p\zeta)^2 + (w + p\eta - q\xi)^2\right\} dS,$$

da cui segue, denotando con A, B, C i momenti d'inerzia del sistema rispetto agli assi ξ, η, ζ; D, E, F i momenti misti d'inerzia rispetto alle coppie di assi η, ζ; ζ, ξ; ξ, η,

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq) + \\ + m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0, \tag{1}$$

in cui si è posto:

$$m_1 = \int \rho(w\eta - v\zeta) dS, \qquad m_2 = \int \rho(u\zeta - w\xi) dS, \qquad m_3 = \int \rho(v\xi - u\eta) dS$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\int_S \rho(u^2 + v^2 + w^2) dS.$$

m_1, m_2, m_3 sono cioè le componenti della coppia di quantità di moto del moto relativo agli assi ξ, η, ζ e T_0 è la forza viva del moto relativo stesso.

Chiamiamo i detti moti relativi *moti interni del sistema* e supponiamo dapprima che essi non alterino la forma e la distribuzione di densità del sistema. In tale ipotesi dovremo avere soddisfatta la condizione:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial \zeta} = 0,$$

e lungo una superficie di discontinuità:

$$\rho(u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) = \rho'(u' \cos nx + v' \cos ny + w' \cos nz),$$

denotando con n la normale alla superficie di discontinuità e ρ, u, v, w; ρ', u', v', w' i rispettivi valori della densità e delle componenti della velocità dalle due parti della superficie stessa. Nella detta ipotesi A, B, C, D, E, F saranno costanti, e scegliendo per assi ξ, η, ζ gli assi principali d'inerzia potremo supporre nulle le tre ultime di queste sei quantità.

Le quantità m_1, m_2, m_3, T_0 saranno in generale funzioni del tempo, ma se oltre al non alterare la forma e la densità del sistema i moti interni saranno *stazionarii*, ne seguirà che m_1, m_2, m_3, T_0 dovranno considerarsi costanti.

3. Nella ipotesi che i moti interni siano stazionarii ed il sistema non sia sollecitato da forze esterne, abbiamo trovato (*), scegliendo per assi quelli principali d'inerzia, che le equazioni differenziali del moto:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr + m_3 q - m_2 r &= 0 \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp + m_1 r - m_3 p &= 0 \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq + m_2 p - m_1 q &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ammettono i due integrali:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{cost.}, \qquad (3)$$

$$(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = \text{cost.} \qquad (3')$$

Se T fosse costante, a cagione del primo dei due precedenti integrali e della condizione $T_0 = \text{cost.}$, seguirebbe:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = g = \text{cost.} \qquad (3'')$$

Cerchiamo ora le condizioni affinchè resulti soddisfatta la equazione precedente, comunque si scelgano le condizioni iniziali del moto.

Derivandola rispetto a t otteniamo:

$$m_1\frac{dp}{dt} + m_2\frac{dq}{dt} + m_3\frac{dr}{dt} = 0,$$

onde moltiplicando respettivamente le (2) per $\frac{m_1}{A}$, $\frac{m_2}{B}$, $\frac{m_3}{C}$ e sommando si avrà:

$$\frac{m_1}{A}(B-C)qr + \frac{m_2}{B}(C-A)rp + \frac{m_3}{C}(A-B)pq - m_2 m_3\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)p -$$
$$- m_3 m_1\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)q - m_1 m_2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)r = 0.$$

Affinchè questa equazione sia soddisfatta da un sistema qualunque di valori di p, q, r, dovrà essere o:

$$A = B = C,$$

(*) Vedi: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* Atti della R. Accad. di Torino, 3 febbraio, 1895.

oppure:

$$B = C, \qquad m_2 = m_3 = 0,$$

ovvero:

$$C = A, \qquad m_3 = m_1 = 0,$$

o finalmente:

$$A = B, \qquad m_1 = m_2 = 0.$$

Reciprocamente se uno di questi sistemi di condizioni sarà soddisfatto, ne verrà come conseguenza che la forza viva si manterrà costante comunque siano le condizioni iniziali del moto. Possiamo dunque enunciare il teorema:

Affinchè la forza viva del sistema si mantenga costante comunque siano le condizioni iniziali del moto, è necessario e sufficiente che l'ellissoide d'inerzia sia una sfera, oppure sia di rivoluzione attorno all'asse dei moti interni.

Però si può spingere la ricerca più innanzi e si può chiedere se specializzando le condizioni iniziali del moto possa la forza viva mantenersi costante anche in casi diversi dai precedenti. Intanto si può osservare che ciò avverrà evidentemente quando la rotazione del sistema sarà permanente; le condizioni affinchè le rotazioni del sistema siano tali furono da noi esposte già in due Memorie (*) ed in esse furon trovati dei casi che non rientrano nei precedenti. Ma ci si può domandare se essi sono i soli. La questione si riconduce a esaminare quando le equazioni (3), (3'), (3'') hanno infinite radici comuni. Eliminando p si trovano le due equazioni:

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 + 2(B-A)m_2 q + 2(C-A)m_3 r = \text{cost.}$$

$$(Am_2^2 + Bm_1^2)q^2 + (Am_3^2 + Cm_1^2)r^2 + 2Am_2m_3qr - 2Agm_2q - \\ - 2Agm_3r = \text{cost.}$$

Affinchè esistano infinite radici comuni, la resultante di queste equazioni dovrà avere nulli tutti i coefficienti. Eguagliando a zero quello del termine di quarto grado si trova la condizione:

$$\{m_1^2BC(B-C) + m_2^2CA(C-A) + m_3^2AB(A-B)\}^2 + \\ + 4ABC\{m_2^2m_3^2A(B-A)(C-A) + m_3^2m_1^2B(C-B)(A-B) + \\ + m_1^2m_2^2C(A-C)(B-C)\} = 0,$$

(*) Vedi: *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* Astr. Nachr., Bd. 138. — *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii.* Annali di Matem., tomo 23.

la quale non può verificarsi se non si ha $A = B = C$, oppure non si annulla qualcuna delle m_1, m_2, m_3, giacchè essa può scriversi:

$$\begin{aligned}
&\{m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B)\}^2 + \\
&\qquad\qquad + 4A^2 BC m_2^2 m_3^2 (B-A)(C-A) = \\
&= \{m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C)\}^2 + \\
&\qquad\qquad + 4B^2 CA m_3^2 m_1^2 (C-B)(A-B) = \\
&= \{m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A)\}^2 + \\
&\qquad\qquad + 4C^2 AB m_1^2 m_2^2 (A-C)(B-C) = 0.
\end{aligned}$$

Ne verrebbe dunque che se T fosse costante p, q, r sarebbero pure costanti, a meno che non si avesse $A = B = C$, oppure non fosse nulla qualcheduna delle m_1, m_2, m_3.

Perciò avremo il teorema: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè sia costante la forza viva di un sistema sottratto a forze esterne e nel cui interno sussistono moti stazionarii quando A, B, C sono diversi fra loro e m_1, m_2, m_3 sono diversi da zero, è che la rotazione del sistema sia permanente.*

Supponiamo ora $m_2 = 0$; in tale ipotesi l'ultima condizione trovata diviene:

$$m_1^2 C(B-C) - m_3^2 A(A-B) = 0,$$

ovvero:

$$\frac{m_1}{m_3} = \pm\sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}},$$

B dovrà dunque essere compreso fra A e C. Supposto $A > B > C$ potremo porre:

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)}, \qquad m_3 = \pm\,\varepsilon\sqrt{C(B-C)},$$

con ε costante reale; onde le (3) e (3') diverranno:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{cost.}$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\,p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\,r = \text{cost.}$$

ed eliminando q fra queste equazioni avremo:

$$A(A-B)p^2 + C(C-B)r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\,p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\,r = \text{cost.},$$

che può anche scriversi:

$$[\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C)]\,[\sqrt{A(A-B)}\,p \mp \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A+C)] = \text{cost.} \quad (4)$$

Supponiamo di prendere i valori iniziali di p ed r tali che il primo fattore della precedente equazione sia nullo; ne seguirà che lo stesso fattore *si conserverà sempre nullo.* Infatti, se i valori iniziali scelti per p ed r non annullano anche il secondo fattore ciò è evidente; se lo annullassero dovremmo avere:

$$p = \frac{-\varepsilon A}{\sqrt{A(A-B)}} = \frac{m_1}{B-A}, \qquad r = \frac{\pm \varepsilon C}{\sqrt{C(B-C)}} = \frac{\pm \varepsilon\sqrt{C(B-C)}}{B-C} = \frac{m_3}{B-C},$$

quindi il moto sarebbe permanente (vedi Mem. citata negli Annali di Mat., § 8, II caso) e perciò p ed r si conserverebbero costanti, onde il primo fattore si manterebbe nullo. Ora l'annullarsi di questo fattore porta alla condizione ($3''$), possiamo dunque concludere che *la forza viva si conserverà costante quando sia:*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)}, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = \pm\, \varepsilon\sqrt{C(B-C)},$$

e le condizioni iniziali del moto sono tali che:

$$\sqrt{A(A-B)}p \pm \sqrt{C(B-C)}r + \varepsilon(A-C) = 0,$$

q essendo qualunque.

Reciprocamente se la condizione ($3''$) deve essere soddisfatta o essa deve coincidere coll'annullarsi del primo fattore della (4), o altrimenti dovrà essere costante anche l'altro fattore e quindi p, q, r dovranno essere costanti ed il moto permanente.

Osserviamo finalmente che se si suppone oltre m_2, anche m_1 oppure m_3 costante deve aversi $B = A$, oppure $B = C$ e si ricade nelle condizioni stabilite da principio.

Riassumendo l'analisi fatta può concludersi.

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forza viva del sistema si conservi costante si riducono ad uno dei gruppi seguenti:

1.° *che il moto di rotazione del sistema sia permanente;*

2.° *che sia:*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)}, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = \pm\, \varepsilon\sqrt{C(B-C)}, \qquad A > B > C,$$

e le condizioni iniziali del moto tali che:

$$\sqrt{A(A-B)}p \pm \sqrt{C(B-C)}r + \varepsilon(A-C) = 0;$$

3.° *che l'ellissoide d'inerzia sia di rivoluzione intorno all'asse dei moti interni;*

4.° *che l'ellissoide d'inerzia sia una sfera.*

Negli ultimi due casi le condizioni iniziali del moto possono essere qualunque.

Esclusi questi casi ora discussi, la forza viva del sistema varierà col tempo; e per conseguenza onde mantenere stazionarii i moti interni occorreranno delle forze interne; o in altri termini se non esistessero queste forze i moti interni cesserebbero di essere stazionarii. Dunque, come i moti interni alterano il moto d'insieme del sistema, così il moto d'insieme tende ad alterare i moti interni.

Nel caso in cui i moti interni sono stazionarii è facile calcolare la forza viva T del sistema in funzione del tempo giovandosi delle formule che abbiamo date nelle Memorie precedenti.

Abbiamo trovato (*):

$$p = m_1 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma}$$

$$q = m_2 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma}$$

$$r = m_3 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma},$$

quindi:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

in cui per simmetria si è sostituito σ_4 a σ. Abbiamo ora:

$$\lambda_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right) - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) =$$

$$= \frac{A m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{B m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{C m_3^2}{\lambda_i - C} = -2h\lambda_i + K_1,$$

(*) *Un teorema sulla rotazione dei corpi,* ecc. Atti della R. Accad. di Torino, 5 maggio, 1895.

giacchè le λ_i sono le radici dell'equazione (*):

$$\frac{Am_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda_i - C} + 2h\lambda_i - K_1 = 0,$$

quindi (**) poichè:

$$K_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = K^2,$$

sarà:

$$\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C} = \frac{K^2}{\lambda_i} - 2h,$$

e per conseguenza:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4 M_i \left(\frac{K^2}{\lambda_i} - 2h\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i \sigma_i} = K^2 \frac{\sum_1^4 \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i \sigma_i} - 2h.$$

Dunque, poichè:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h,$$

si avrà:

$$T = K^2 \frac{\sum \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum M_i \sigma_i} - h + T_0.$$

4. Procediamo ora alla ricerca delle alterazioni prodotte nei moti interni dal moto d'insieme del sistema quando manchino le forze interne capaci di conservarli stazionarii.

Per fissare le idee immaginiamo dapprima un caso particolare, e cioè che i moti interni consistano nel moto di rotazione di un toro di rivoluzione omogeneo attorno al proprio asse fisso nell'interno del corpo. Chiamiamo ω la velocità angolare di rotazione; α, β, γ i coseni degli angoli che l'asse del toro forma con gli assi ξ, η, ζ; μ il momento d'inerzia del toro rispetto al proprio asse. Le componenti nelle direzioni ξ, η, ζ della coppia di quantità di moto dovuta ai moti interni saranno:

$$m_1 = \mu\omega\alpha, \qquad m_2 = \mu\omega\beta, \qquad m_3 = \mu\omega\gamma,$$

(*) *Sul moto di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii.* Atti R. Acc. di Torino, 3 marzo, 1895 (vedi § 2).

(**) Ibid, § 2.

mentre la forza viva dei moti interni sarà:

$$T_0 = \frac{1}{2} \mu \omega^2.$$

Quindi la forza viva totale del sistema, la cui forma e distribuzione di densità non si altererà, verrà data da [vedi (1)]:

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2} \mu\omega^2.$$

Se ammettiamo che nessuna forza esterna si eserciti sopra il sistema, le equazioni del moto resulteranno (*):

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + \mu\omega(q\gamma - r\beta) + \mu\alpha\frac{d\omega}{dt} = 0 \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + \mu\omega(r\alpha - p\gamma) + \mu\beta\frac{d\omega}{dt} = 0 \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq + \mu\omega(p\beta - q\alpha) + \mu\gamma\frac{d\omega}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Ammettiamo ora che il toro di rivoluzione nella rotazione attorno al proprio asse non sia sollecitato da alcuna forza.

Avremo allora pel principio delle forze vive:

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2} \mu\omega^2 = \text{cost.} \qquad (1')$$

Abbiamo dunque ottenute quattro equazioni: le (2') e (1'), ove compariscono come funzioni incognite p, q, r, ω. Di queste quantità le prime tre individueranno il moto d'insieme del sistema, e l'ultima individuerà il moto interno.

Derivando la (1') rispetto a t otterremo:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu\omega\left(\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt}\right) +$$
$$+ \mu\frac{d\omega}{dt}(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \mu\omega\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Moltiplicando le (2') per p, q, r respettivamente, e sommando avremo:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu(p\alpha + q\beta + r\gamma)\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

(*) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*, Atti R. Acc. di Torino, 3 febbraio, 1895. Vedi le equazioni (6).

quindi:

$$\alpha \frac{dp}{dt} + \beta \frac{dq}{dt} + \gamma \frac{dr}{dt} + \frac{d_1\omega}{dt} = 0,$$

e integrando:

$$\alpha p + \beta q + \gamma r + \omega = \text{cost.} \tag{5}$$

Esiste dunque una relazione lineare a coefficienti costanti fra p, q, r ed ω. Eliminando ω nelle (2′) mediante questa relazione, otterremo tre equazioni differenziali in p, q, r dalle quali potremo determinare queste quantità; e quindi dalla (5) ricaveremo ω. Ora è facile vedere che in questo caso il problema si riconduce alle quadrature e può risolversi mediante funzioni ellittiche. Infatti, oltre l'integrale (1′), le (2′) ammettono l'integrale delle aree dato da (*):

$$(Ap + \mu\omega\alpha)^2 + (Bq + \mu\omega\beta)^2 + (Cr + \mu\omega\gamma)^2 = \text{cost.}$$

Se in (1′) e nella equazione precedente sostituiamo ad ω il valore ricavato dalla (5) i primi membri di questi due integrali diventano funzioni di 2.° grado in p, q, r, e perciò queste quantità potranno esprimersi come funzioni ellittiche di un parametro che si otterrà espresso mediante il tempo con una quadratura (**); e dalla (5) segue che anche ω sarà suscettibile di una analoga espressione. Noi non staremo ad approfondire la soluzione di questo caso particolare seguendo questa via, giacchè potremo ottenere la soluzione, anche più semplicemente, nel caso generale, per altro mezzo.

5. Il caso che abbiamo esaminato di un toro di risoluzione girevole attorno al proprio asse non è altro che il caso tipo di un *sistema monociclico* di Helmholtz (***) in cui ω rappresenta l'intensità ciclica del sistema (****). Quindi l'analisi fatta nel paragrafo precedente è evidentemente estensibile senz'altro al caso della rotazione di un corpo nel cui interno esiste un sistema monociclico i cui parametri si suppongono costanti.

Ma immaginiamo in generale di avere un corpo girevole attorno al proprio baricentro nel cui interno esista un *sistema policiclico* qualunque. Siano $p_1, p_2, \ldots p_n$ le coordinate cicliche del sistema; ϖ_1, ϖ_2, $\varpi_3, \ldots \varpi_m$ ne siano i parametri. La forza viva dei moti interni si potrà prendere allora sotto la

(*) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* Atti R. Acc. di Torino, 3 febbraio, 1895.

(**) Cfr. la Nota: *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii.* Atti R. Acc. di Torino, 3 marzo, 1895.

(***) Crelle's Journal, Bd. 97.

(****) Vedi Hertz: *Die prinzipien der Mechanik.* Zweiter Buch. Abschnitt 5, forma:

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \, a_{is} \frac{d p_i}{d t} \frac{d p_s}{d t} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_s a_{is} \, \omega_i \, \omega_s,$$

chiamando $\omega_i = \frac{d p_i}{d t}$ le intensità cicliche del sistema. Nella precedente espressione dovremo ritenere che le a_{is} siano funzioni dei soli parametri ϖ_h. Le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni saranno della forma:

$$\left.\begin{aligned}
m_1 &= \sum_1^n{}_i \, a_i \frac{d p_i}{d t} + \sum_1^m{}_h \, e_h \frac{d \varpi_h}{d t} = \sum_1^n{}_i \, a_i \, \omega_i + \sum_1^m{}_h \, e_h \frac{d \varpi_h}{d t} \\
m_2 &= \sum_1^n{}_i \, b_i \frac{d p_i}{d t} + \sum_1^m{}_h \, f_h \frac{d \varpi_h}{d t} = \sum_1^n{}_i \, b_i \, \omega_i + \sum_1^m{}_h \, f_h \frac{d \varpi_h}{d t} \\
m_3 &= \sum_1^n{}_i \, c_i \frac{d p_i}{d t} + \sum_1^m{}_h \, g_h \frac{d \varpi_h}{d t} = \sum_1^n{}_i \, c_i \, \omega_i + \sum_1^m{}_h \, g_h \frac{d \varpi_h}{d t},
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

in cui a_i, b_i, c_i; e_h, f_h, g_h sono funzioni dei soli parametri ϖ_r, dei quali parametri potremo ammettere anche che siano funzioni i momenti d'inerzia A, B, C ed i momenti misti D, E, F.

La forza viva del sistema resulterà dunque:

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2 D q r - 2 E r p - 2 F p q) + \\
+ m_1 p + m_2 q + m_3 r + \frac{1}{2} \sum_i \sum_s a_{is} \, \omega_i \, \omega_s.
\end{aligned} \tag{7}$$

Uno spostamento virtuale sarà inviduato dalle componenti $\delta \varpi$, $\delta \chi$, $\delta \rho$ di una rotazione infinitesima e dalle δp_i e $\delta \varpi_i$.

Poniamo il lavoro virtuale delle forze interne ed esterne agenti sul sistema sotto la forma:

$$U = M_\xi \delta \varpi + M_\eta \delta \chi + M_\zeta \delta \rho + \sum_1^n{}_i \, P_i \, \delta p_i + \sum_1^m{}_h \, \Pi_h \, \delta \varpi_h.$$

Chiameremo M_ξ, M_η, M_ζ le componenti della coppia di rotazione; P_i le forze relative alle coordinate cicliche p_i, e Π_h le forze relative ai parametri ϖ_h.

Note relazioni cinematiche ci dànno:

$$\begin{aligned}
\delta p &= \frac{d}{dt} \delta \varpi + q \, \delta \rho - r \, \delta \chi \\
\delta q &= \frac{d}{dt} \delta \chi + r \, \delta \varpi - p \, \delta \rho \\
\delta r &= \frac{d}{dt} \delta \rho + p \, \delta \chi - q \, \delta \varpi,
\end{aligned}$$

onde l'applicazione del principio di Hamilton ci condurrà all'equazione:

$$0=\int_{t_0}^{t}(\delta T+U)dt=\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{d}{dt}\delta\varpi+q\delta\rho-r\delta\chi\right)+\frac{\partial T}{\partial q}\left(\frac{d}{dt}\delta\chi+r\delta\varpi-p\delta\rho\right)+$$

$$+\frac{\partial T}{\partial r}\left(\frac{d}{dt}\delta\rho+p\delta\chi-q\delta\varpi\right)+\sum_1^n(a_ip+b_iq+c_ir+\sum_s a_{is}\omega_s)\frac{d}{dt}\delta p_i+$$

$$+\sum_1^m{}_h(e_hp+f_hq+g_hr)\frac{d}{dt}\delta\varpi_h+\sum_1^m{}_h\frac{\partial T}{\partial\varpi_h}\delta\varpi_h+M_\xi\delta\varpi+M_\eta\delta\chi+M_\zeta\delta\rho+$$

$$+\sum_1^n{}_i P_i\delta p_i+\sum_1^m{}_h\Pi_h\delta\varpi_h\Big\}dt,$$

in cui dovremo supporre nulli $\delta\varpi$, $\delta\chi$, $\delta\rho$, δp_i, $\delta\varpi_h$ ai tempi estremi t_0 e t_1.

Mediante integrazioni per parti avremo le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{dp}+q\frac{\partial T}{\partial r}-r\frac{\partial T}{\partial q}=M_\xi\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial p}-p\frac{\partial T}{\partial r}=M_\eta\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}+p\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial p}=M_\zeta\\
&\frac{d}{dt}(a_ip+b_iq+c_ir+\sum_1^n{}_s a_{is}\omega_s)=P_i\\
&\frac{d}{dt}(e_hp+f_hq+g_hr)-\frac{\partial T}{\partial\varpi_h}=\Pi_h,
\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

le quali ci individuano il moto del sistema.

6. Supponiamo nulla la coppia di rotazione. In tale ipotesi moltiplicando le prime tre equazioni per $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial q}$, $\frac{\partial T}{\partial r}$ e sommando avremo:

$$\frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial T}{\partial q}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial r}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}=0,$$

ed integrando:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2=K^2.\qquad(8)$$

Se ora immaginiamo una terna di assi x, y, z fissi nello spazio e rappresentiamo colla seguente tabella i coseni di direzione che essi formano con gli assi x, y, z

	ξ	η	ζ
x	α_1,	α_2,	α_3
y	β_1,	β_2,	β_3
z	γ_1,	γ_2,	γ_3

dalle prime tre equazioni (a) seguirà, applicando le formule del Poisson,

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$

onde integrando avremo:

$$\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{cost.}$$

$$\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{cost.}$$

$$\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{cost.},$$

i quali sono gli integrali delle aree e da cui si deduce immediatamente l'integrale (8).

Supponendo di scegliere per piano invariabile il piano x, y nelle equazioni precedenti si annulleranno le due prime costanti e la terza si ridurrà eguale a K, onde:

$$\gamma_1=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial p},\qquad \gamma_2=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial q},\qquad \gamma_3=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial r}. \tag{9}$$

Dalle (a) segue:

$$p\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_1^{\nu}{}_i\,\omega_i\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_i}+$$

$$+\sum_1^{m}{}_h\frac{d\varpi_h}{dt}\frac{d}{dt}(e_h p+f_h q+g_h r)-\sum_1^{m}{}_h\frac{\partial T}{\partial \varpi_h}\frac{d\varpi_h}{dt}=$$

$$=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^{\nu}{}_i P_i\omega_i+\sum_1^{m}{}_h\Pi_h\frac{d\varpi_h}{dt},$$

ovvero:

$$\frac{d}{dt}\left\{p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_1^{\nu}{}_i\,\omega_i\frac{\partial T}{\partial \omega_i}+p\sum_1^m{}_h e_h\frac{d\varpi_h}{dt}+q\sum_1^m f_h\frac{d\varpi_h}{dt}+r\sum_1^m g_h\frac{d\varpi_h}{dt}\right\}-$$

$$-\left\{\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\sum_1^{\nu}{}_i\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}+\sum_1^m{}_h\left[\frac{\partial T}{\partial \varpi_h}\frac{d\varpi_h}{dt}+(e_hp+f_hq+g_hr)\frac{d^2\varpi_h}{dt^2}\right]\right\}=$$

$$=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^{\nu}{}_i P_i\omega_i+\sum_1^m \Pi_h\frac{d\varpi_h}{dt}.$$

Ora si ha:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\sum_1^n\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}+$$

$$+\sum_1^m{}_h\left[\frac{\partial T}{\partial \varpi_h}\frac{d\varpi_h}{dt}+(e_hp+f_hq+g_hr)\frac{d^2\varpi_h}{dt^2}\right]$$

$$2T=p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_1^n{}_i\,\omega_i\frac{\partial T}{\partial \omega_i}+p\sum{}_h e_h\frac{d\varpi_h}{dt}+q\sum{}_h f_h\frac{d\varpi_h}{dt}+r\sum{}_h g_h\frac{d\varpi_h}{dt},$$

quindi l'equazione precedente diverrà:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^n{}_i\,\omega_i\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^{\nu}P_i\omega_i+\sum_1^m\Pi_h\frac{d\varpi_h}{dt}-\sum_{\nu+1}^n\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}.$$

Ammettiamo che le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \dots \omega_n$ si conservino costanti, avremo allora:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^n\omega_i\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^{\nu}P_i\omega_i+\sum_1^m{}_h\,\Pi_h\frac{d\varpi_h}{dt}.$$

Se esiste la *funzione delle forze* Φ del sistema ciclico (*) sarà:

$$\sum_1^m{}_h\,\Pi_h\frac{d\varpi_h}{dt}=\frac{d\Phi}{dt},$$

quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^n{}_i\,\omega_i\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_1^{\nu}{}_i\,P_i\omega_i+\frac{d\Phi}{dt}.$$

Moltiplicando per dt e integrando, avremo:

$$T-\sum_{\nu+1}^n{}_i\,\omega_i\frac{\partial T}{\partial \omega_i}=\int^t(M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r)dt+\sum_1^{\nu}{}_i\int^t P_i\omega_i dt+\Phi+h, \quad (10)$$

denotando con h una costante. Se i moti interni sono *isociclici* cioè tutte le

(*) Vedi HERTZ, Op. cit., pag. 240.

intensità cicliche sono costanti, l'integrale precedente diverrà:

$$T - \sum_1^n {}_i\,\omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \int^t (M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r)\,dt + \Phi + h, \qquad (10')$$

mentre se nessuna delle ω_i è costante sarà:

$$T = \int^t (M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r)\,dt + \sum_1^n {}_i \int^t P_i \omega_i\,dt + \Phi + h. \qquad (10'')$$

7. Il caso più importante da esaminarsi è quello in cui le forze relative alle coordinate cicliche sono nulle. Supponendo infatti $P_i = 0$, avremo:

$$\frac{d}{dt}(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_s\, a_{is}\,\omega_s) = 0,$$

ed integrando:

$$a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_s\, a_{is}\,\omega_s = K_i, \qquad (11)$$

in cui K_i denotano delle costanti.

Mediante gli integrali ora ottenuti potremo eliminare le intensità cicliche del sistema. Siano A_{is} i rapporti degli elementi aggiunti alle $a_{is} = a_{si}$ nel determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

al determinante stesso.

Dalle equazioni precedenti seguirà:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_1^n a_{is}\,\omega_s = K_i - a_i p - b_i q - c_i r \qquad (12)$$

$$\omega_i = \sum_s A_{is} K_s - p \sum_s A_{is} a_s - q \sum_s A_{is} b_s - r \sum_s A_{is} c_s, \qquad (13)$$

quindi:

$$2\,T_0 = \sum_i \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i}\,\omega_i =$$

$$= \sum_i (K_i - a_i p - b_i q - c_i r)(\sum_s A_{is} K_s - p \sum_s A_{is} a_s - q \sum_s A_{is} b_s - r \sum_s A_{is} c_s).$$

Si ponga:

$$a = \sum_i \sum_s A_{is} a_i a_s, \qquad b = \sum_i \sum_s A_{is} b_i b_s, \qquad c = \sum_i \sum_s A_{is} c_i c_s$$

$$d = \sum_i \sum_s A_{is} c_i b_s, \qquad e = \sum_i \sum_s A_{is} a_i c_s, \qquad f = \sum_i \sum_s A_{is} b_i a_s,$$

avremo allora:

$$T_0 = \frac{1}{2}(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2dqr + 2erp + 2fpq) - p\sum_i\sum_s A_{is}K_i a_s -$$
$$- q\sum_i\sum_s A_{is}K_i b_s - r\sum_i\sum_s A_{is}K_i c_s + \frac{1}{2}\sum_i\sum_s A_{is}K_i K_s.$$

Dalle (6) segue:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \sum_i\sum_s A_{is}K_i a_s - ap - fq - er + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\varpi_h}{dt} \\ m_2 &= \sum_i\sum_s A_{is}K_i b_s - fp - bq - dr + \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\varpi_h}{dt} \\ m_3 &= \sum_i\sum_s A_{is}K_i c_s - ep - dq - cr + \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\varpi_h}{dt} \end{aligned}\right\}$$

quindi:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = -(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2dqr + 2erp + 2fpq) +$$
$$+ p\sum_i\sum_s A_{is}K_i a_s + q\sum_i\sum_s A_{is}K_i b_s + r\sum_i\sum_s A_{is}K_i c_s +$$
$$+ p\sum_1^m{}_h e_h \frac{d\varpi_h}{dt} + q\sum_1^m{}_h f_h \frac{d\varpi_h}{dt} + r\sum_1^m{}_h g_h \frac{d\varpi_h}{dt},$$

e finalmente:

$$(T) = \frac{1}{2}\left\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\right\} +$$
$$+ p\sum_1^m{}_h e_h \frac{d\varpi_h}{dt} + q\sum_1^m{}_h f_h \frac{d\varpi_h}{dt} + r\sum_1^m g_h \frac{d\varpi_h}{dt} + \frac{1}{2}\sum_i\sum_s A_{is}K_i K_s.$$

Noi scriviamo qui (T) invece di T per denotare la espressione della forza viva in cui furono eliminate le intensità cicliche del sistema.

Cerchiamo ora come si trasformano le equazioni (a) per la eliminazione delle stesse quantità.

A tal fine osserviamo che si ha:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\delta r + \sum_1^n{}_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\delta\omega_i + \sum_1^m{}_h \frac{\partial T}{\partial \varpi_h}\delta\varpi_h,$$

supponendo nulle le $\delta\frac{d\varpi_h}{dt}$. Ora a cagione delle (11) segue:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = K_i,$$

e per le (13):

$$\delta\omega_i = \sum_1^m{}_h \frac{\partial}{\partial\varpi_h}\left[\sum_s A_{is}K_s - p\sum_s A_{is}a_s - q\sum_s A_{is}b_s - r\sum_s A_{is}c_s\right]\delta\varpi_h -$$
$$- \sum_s A_{is}a_s\cdot\delta p - \sum_s A_{is}b_s\cdot\delta q - \sum_s A_{is}c_s\cdot\delta r.$$

Quindi, posto:

$$\sum_i \sum_s A_{is} K_i a_s = l_1, \qquad \sum_i \sum_s A_{is} K_i b_s = l_2, \qquad \sum_i \sum_s A_{is} K_i c_s = l_3,$$

avremo:

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \delta \omega_i = \sum_h \frac{\partial}{\partial \varpi_h} [\sum_i \sum_s A_{is} K_i K_s - l_1 p - l_2 q - l_3 r] \delta \varpi_h -$$
$$- l_1 \delta p - l_2 \delta q - l_3 \delta r,$$

e perciò:

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p} - l_1\right)\delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial q} - l_2\right)\delta q + \left(\frac{\partial T}{\partial r} - l_3\right)\delta r +$$
$$+ \sum_1^m {}_h \left\{ \frac{\partial T}{\partial \varpi_h} + \frac{\partial}{\partial \varpi_h} [\sum_i \sum_s A_{is} K_i K_s - l_1 p - l_2 q - l_3 r] \right\} \delta \varpi_h .$$

Abbiamo ora:

$$\delta (T) = \frac{\partial (T)}{\partial p} \delta p + \frac{\partial (T)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial (T)}{\partial r} \delta r + \sum_1^m {}_h \frac{\partial (T)}{\partial \varpi_h} \delta \varpi_h ,$$

quindi confrontando le due precedenti espressioni differenziali troveremo:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial (T)}{\partial p} + l_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial (T)}{\partial q} + l_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial (T)}{\partial r} + l_3 \\ &\frac{\partial T}{\partial \varpi_h} = \frac{\partial \{(T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \sum_i \sum_s A_{is} K_i K_s\}}{\partial \varpi_h} . \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Le (a) dunque divengono, mediante la eliminazione delle intensità cicliche del sistema,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) + q\left(\frac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) - r\left(\frac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) = M_\xi \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) + r\left(\frac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) - p\left(\frac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) = M_\eta \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) + p\left(\frac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) - q\left(\frac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) = M_\zeta \\ &\frac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \frac{\partial}{\partial \varpi_h}\left\{(T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \sum_i \sum_s A_{is} K_i K_s\right\} = \Pi_h . \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Queste equazioni possono mettersi ancora sotto una forma più simmetrica. Si ponga perciò:

$$\Theta = (T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \sum_i \sum_s A_{is} K_i K_s =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq \right\} +$$

$$+ p\left(l_1 + \sum_1^m {}_h e_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right) + q\left(l_2 + \sum_1^m {}_h f_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right) + r\left(l_3 + \sum_1^m {}_h g_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_i \sum_s A_{is} K_i K_s. \tag{15}$$

Le (14) potranno scriversi:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \Theta}{\partial p}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \Theta}{\partial q}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varpi_h} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varpi_h},$$

quindi le (*b*) assumeranno la forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial p} + q\frac{\partial \Theta}{\partial r} - r\frac{\partial \Theta}{\partial q} = M_\xi \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q} + r\frac{\partial \Theta}{\partial p} - p\frac{\partial \Theta}{\partial r} = M_\eta \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + p\frac{\partial \Theta}{\partial q} - q\frac{\partial \Theta}{\partial p} = M_\zeta \\
&\frac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \frac{\partial \Theta}{\partial \varpi_h} = \Pi_h.
\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

8. Supponiamo ora che i parametri del sistema ciclico possano ritenersi costanti, allora spariscono le ultime fra le equazioni precedenti e potrà prendersi:

$$\Theta = \frac{1}{2} \left\{ (A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq \right\} +$$

$$+ l_1 p + l_2 q + l_3 r, \tag{16}$$

in cui i coefficienti dei termini di 1.° e 2.° grado in p, q, r saranno costanti. L'equazioni (*c*) corrispondono quindi in questo caso al moto di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii, ammettendo che il sistema abbia per momenti d'inerzia rispetto agli assi ξ, η, ζ

$$A - a, \qquad B - b, \qquad C - c,$$

per momenti misti d'inerzia rispetto alle coppie di assi η, ζ; ζ, ξ; ξ, η

$$D + d, \qquad E + e, \qquad F + f,$$

e le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni siano:

$$l_1, \qquad l_2, \qquad l_3.$$

Avremo dunque il teorema:

Un corpo, di cui è costante la forma e la distribuzione di densità, nell'interno del quale esiste un sistema policiclico i cui parametri possono ritenersi invariabili e sulle cui coordinate cicliche non agisce alcuna forza, ruota, sotto l'azione di una coppia motrice, attorno ad un punto fisso, come un altro corpo in cui esistono moti interni stazionarii e che è sollecitato dalla stessa coppia motrice. Le intensità cicliche dipendono in ogni istante dalla rotazione del corpo.

Da questo teorema segue che, *se la coppia motrice è nulla, potremo esprimere le componenti della rotazione e le intensità cicliche del sistema come funzioni ellittiche del tempo e potremo esprimere i nove coseni degli angoli che gli assi mobili formano con gli assi fissi mediante funzioni uniformi del tempo* (*).

Quando la coppia motrice è nulla la soluzione del problema può dunque ottenersi riconducendola a quella già eseguita del moto di un sistema in cui esistono moti stazionarii. Senonchè, volendo operare in questo modo, dovremmo prima ricondurre le equazioni differenziali alla forma (a) della mia Nota: *Sui moti del polo terrestre* (**) e poi dovremmo eseguirne la integrazione. È facile però vedere che la soluzione può ottenersi direttamente con maggiore facilità.

Le (c) infatti prendono la forma:

$$\left.\begin{aligned}
(A-a)\frac{dp}{dt} - (F+f)\frac{dq}{dt} - (E+e)\frac{dr}{dt} &= \begin{vmatrix} \varphi_2, & \varphi_3 \\ q, & r \end{vmatrix} \\
-(F+f)\frac{dp}{dt} + (B-b)\frac{dq}{dt} - (D+d)\frac{dr}{dt} &= \begin{vmatrix} \varphi_3, & \varphi_1 \\ r, & p \end{vmatrix} \\
-(E+e)\frac{dp}{dt} - (D+d)\frac{dq}{dt} + (C-c)\frac{dr}{dt} &= \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ p, & q \end{vmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(*) Vedi la Nota: *Un teorema sulla rotazione dei corpi,* ecc. Atti R. Acc. di Torino, 5 maggio, 1895.

(**) Atti R. Acc. di Torino, 3 febbraio, 1895.

avendo posto:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \quad (A-a)p-(F+f)q-(E+e)r+l_1\\
\varphi_2 &= -(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r+l_2\\
\varphi_3 &= -(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r+l_3.
\end{aligned}$$

Risolvendo le (17) rispetto a $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ otteniamo:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{\Delta}\left\{\begin{vmatrix}\varphi_2, & \varphi_3\\ q, & r\end{vmatrix}\begin{vmatrix}B-b, & -(D+d)\\ -(D+d), & C-c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi_3, & \varphi_1\\ r, & p\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-(D+d), & C-c\\ -(F+f), & -(E+e)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi_1, & \varphi_2\\ p, & q\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-(F+f), & -(E+e)\\ B-b, & -(D+d)\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left\{\left\|\begin{matrix}\varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3\\ p, & q, & r\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-(F+f), & B-b, & -(D+d)\\ -(E+e), & -(D+d), & C-c\end{matrix}\right\|\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}-(F+f)\varphi_1+(B-b)\varphi_2-(D+d)\varphi_3, & -(E+e)\varphi_1-(D+d)\varphi_2+(C-c)\varphi_3\\ -(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r, & -(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial q}+\varphi_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial q}, & \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}+\varphi_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\\ -(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r, & -(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r\end{vmatrix},$$

in cui si è preso:

$$\Delta=\begin{vmatrix}A-a, & -(F+f), & -(E+e)\\ -(F+f), & B-b, & -(D+d)\\ -(E+e), & -(D+d), & C-c\end{vmatrix}$$

In modo analogo si ottengono $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, per cui ponendo:

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\Big\{[(A-a)p-(F+f)q-(E+e)r+l_1]^2+\\
&\quad+[-(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r+l_2]^2+\\
&\quad+[-(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r+l_3]^2\Big\}\\
F_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\Big\{(A-a)p^2+(B-b)q^2+(C-c)r^2-\\
&\quad-2(D+d)qr-2(E+e)rp-2(F+f)pq\Big\}\cdot
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

le (17) si trasformeranno nelle equazioni seguenti:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d(F_1,\ F_2)}{d(q,\ r)},\qquad \frac{dq}{dt}=\frac{d(F_1,\ F_2)}{d(r,\ p)},\qquad \frac{dr}{dt}=\frac{d(F_1,\ F_2)}{d(p,\ q)},\tag{19}$$

la cui integrazione ha formato il soggetto di una precedente Memoria nella quale essa fu ricondotta a dipendere dalla risoluzione di una equazione del quarto grado (*).

Questa equazione nel nostro caso si costruisce immediatamente partendo dalla (12) della Memoria ora citata. In tal modo otterremo le componenti della rotazione del sistema e tutte le intensità cicliche espresse mediante funzioni ellittiche dalle formule seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
p &= \frac{N_1^{(1)}\sigma_1 u + N_1^{(2)}\sigma_2 u + N_1^{(3)}\sigma_3 u + N_1^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}\\
q &= \frac{N_2^{(1)}\sigma_1 u + N_2^{(2)}\sigma_2 u + N_2^{(3)}\sigma_3 u + N_2^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}\\
r &= \frac{N_3^{(1)}\sigma_1 u + N_3^{(2)}\sigma_2 u + N_3^{(3)}\sigma_3 u + N_3^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}\\
\omega_i &= \frac{L_i^{(1)}\sigma_1 u + L_i^{(2)}\sigma_2 u + L_i^{(3)}\sigma_3 u + L_i^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u},
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

in cui le $L_i^{(h)}$, $M_i^{(h)}$, $N_i^{(h)}$ sono quantità costanti. Introducendo le quantità $\alpha_{ir}^{(h)}$ usate nella Memoria ora citata, avremo:

$$\left.\begin{aligned}
N_i^{(h)} &= M^{(h)}\cdot\frac{\alpha_{i4}^{(h)}}{\alpha_{44}^{(h)}}\\
L_i^{(h)} &= M^{(h)}\cdot\frac{\sum_s(-a_s\alpha_{14}^{(h)} - b_s\alpha_{24}^{(h)} - c_s\alpha_{34}^{(h)} + K_s\alpha_{44}^{(h)})A_{is}}{\alpha_{44}^{(h)}}.
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

La u sarà legata al tempo t dalla relazione lineare:

$$u=\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)}{(e_1-e_3)D}}\qquad(t-t_0),\tag{22}$$

essendo t_0 una costante arbitraria e λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 le radici della equazione di quarto grado.

(*) Vedi: *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* Atti R. Accadem. di Torino, 31 marzo, 1895.

Per ottenere i coseni di direzione che gli assi fissi formano con quelli mobili, basterà cominciare dal determinare γ_1, γ_2, γ_3 mediante le (9) le quali nel nostro caso si riducono a

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{K}\Big[(A-a)p-(F+f)q-(E+e)r+l_1\Big]\\ \gamma_2 &= \frac{1}{K}\Big[-(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r+l_2\Big]\\ \gamma_3 &= \frac{1}{K}\Big[-(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r+l_3\Big],\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

e quindi, applicando il metodo indicato nella mia Nota: *Un teorema sulla rotazione* ecc. (*), otterremo le espressioni dei rimanenti sei coseni.

9. Il caso che abbiamo trattato nelle Memorie precedenti corrisponde a quello in cui i parametri del sistema ciclico e le intensità cicliche sono costanti. Infatti quando ambedue queste condizioni sono soddisfatte i moti interni sono evidentemente stazionarii. Il detto caso corrisponde quindi a quello in cui il moto interno è *isociclico.*

Nel caso trattato nel paragrafo precedente le intensità cicliche sono variabili, ma sono nulle tutte le forze, tanto la coppia di rotazione, quanto le forze relative alle coordinate cicliche. Questo moto possiamo chiamarlo un moto *adiabatico* dell'intero sistema; non però un moto adiabatico pel sistema ciclico. Infatti esaminando il moto ciclico relativo agli assi ξ, η, ζ abbiamo che i momenti ciclici sono dati da:

$$q_i = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_1^n {}_s a_{is}\,\omega_s = K_i - a_i p - b_i q - c_i r,$$

e quindi non sono costanti ma variano linearmente rispetto alle componenti della rotazione del sistema (**).

In ambedue i casi in cui, essendo costanti i parametri, il moto dell'intero sistema è isociclico o adiabatico, abbiamo ottenuto la soluzione per mezzo di funzioni ellittiche.

Noi vogliamo ora trattare un caso che li comprende ambedue e in cui pure la soluzione può ottenersi nella stessa maniera.

Ritorniamo perciò alle equazioni generali (a) e supponiamo che non tutte le forze relative alle coordinate cicliche, ma solo le prime ν siano nulle.

(*) Atti R. Acc. di Torino, 5 maggio, 1895.

(**) Cfr. Hertz, Op. cit. sopra, pag. 239.

Allora avremo soltanto ν integrali della forma (11), cioè quelli che corrispondono agli indici $i=1, 2,\dots \nu$. Se poniamo:

$$v_i = \sum_{\nu+1}^{n} {}_r\, a_{ir}\,\omega_r\,,$$

essi potranno scriversi:

$$a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^{\nu} {}_s\, a_{is}\,\omega_s - K_i - v_i.$$

Denotiamo con A'_{is} gli elementi aggiunti a quelli del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12},\dots & a_{1\nu} \\ a_{21}, & a_{22},\dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1}, & a_{\nu 2},\dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

avremo:

$$\omega_i = -p\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}a_s - q\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}b_s - r\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}c_s + \sum_1^{\nu}{}_s A_{is}(K_i - v_i)$$

$$(i=1,\ 2,\dots\ \nu),$$

e mediante queste formule potremo eliminare dalle equazioni del moto le ω_1, $\omega_2,\dots \omega_\nu$. A tal fine basterà ripetere un calcolo analogo a quello fatto precedentemente.

Se poniamo:

$$\tau = \frac{1}{2}\sum_{\nu+1}^{n}{}_r \sum_{\nu+1}^{n}{}_s\, a_{rs}\,\omega_r\,\omega_s\,,$$

avremo:

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_1^{\nu}{}_i \sum_1^{\nu}{}_s\, a_{is}\,\omega_i\,\omega_s + \sum_1^{\nu} v_i\,\omega_i + \tau,$$

quindi eliminando le ω_1, $\omega_2,\dots \omega_\nu$ otterremo:

$$T_0 = \frac{1}{2}(a'p^2 + b'q^2 + c'r^2 + 2d'qr + 2e'rp + 2f'pq) - p\sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}a_iK_s -$$

$$-q\sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}b_iK_s - r\sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}c_iK_s + \frac{1}{2}\sum{}_i\sum{}_s A'_{is}K_iK_s - \sum{}_i\sum{}_s A'_{is}v_iv_s + \tau,$$

in cui:

$$a' = \sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}a_ia_s, \qquad b' = \sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}b_ib_s, \qquad c' = \sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}c_ic_s$$

$$d' = \sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}b_ic_s, \qquad e' = \sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}c_ia_s, \qquad f' = \sum_1^{\nu}{}_i\sum_1^{\nu}{}_s A'_{is}a_ib_s.$$

Facciamo:

$$\sum_{\nu+1}^{n} {}_r a_r \omega_r = m_1', \qquad \sum_{\nu+1}^{n} {}_r b_r \omega_r = m_2', \qquad \sum_{\nu+1}^{n} {}_r c_r \omega_r = m_3',$$

resulterà:

$$m_1 = m_1' + \sum_1^{\nu} {}_i a_i \omega_i + \sum_1^{m} {}_h e_h \frac{d\varpi_h}{dt}, \qquad m_2 = m_2' + \sum_1^{\nu} b_i \omega_i + \sum_1^{m} {}_h f_h \frac{d\varpi_h}{dt},$$

$$m_3 = m_3' + \sum_1^{\nu} {}_i c_i \omega_i + \sum_1^{m} {}_h g_h \frac{d\varpi_h}{dt}.$$

Quindi dalla espressione (7) della forza viva, otterremo questa quantità in cui sono eliminate le ω_i $(i = 1, 2, \ldots \nu)$ data dalla formula:

$$(T') = \frac{1}{2}\left\{(A-a')p^2 + (B-b')q^2 + (C-c')r^2 - 2(D+d')qr - 2(E+e')rp - 2(F+f')pq\right\}$$

$$+ p\left[m_1' - \sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} a_i v_r + \sum_1^{m} {}_h e_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right] + q\left[m_2' - \sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} b_i v_s + \sum_1^{m} f_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right] +$$

$$+ r\left[m_3' - \sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} c_i v_s + \sum_1^{m} g_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right] + \frac{1}{2} \sum {}_i \sum {}_s A_{is}(K_i K_s - v_i v_s) + \tau.$$

Calcolando ora il δT, eliminandovi le $\delta\omega_i$ ricavate dalle espressioni precedenti di ω_i, e confrontando la espressione che si ottiene con $\delta(T')$, abbiamo:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial (T')}{\partial p} + \sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} a_s K_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial (T')}{\partial q} + \sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i b_s,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial (T')}{\partial r} + \sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i c_s$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_r} = \frac{\partial (T')}{\partial \omega_r} + \sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i a_{sr} \qquad (r = \nu+1, \nu+2, \ldots n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varpi_h} = \frac{\partial}{\partial \varpi_h}\left[(T') + p\sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i a_s + q\sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i b_s + r\sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i c_s - \right.$$

$$\left. - \sum_1^{\nu} \sum_1^{\nu} A'_{is} K_i (K_s - v_s)\right],$$

onde ponendo:

$$\Omega = (T') + p\sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i a_s + q\sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i b_s + r\sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i c_s -$$

$$- \sum_1^{\nu} {}_i \sum_1^{\nu} {}_s A'_{is} K_i (K_s - v_s),$$

avremo:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \Omega}{\partial p}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \Omega}{\partial q}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_r} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi_r} \qquad (r = \nu + 1, \ldots n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varpi_h} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varpi_h},$$

e le equazioni (a) del moto diverranno:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial p} + q\frac{\partial \Omega}{\partial r} - r\frac{\partial \Omega}{\partial q} = M_\xi \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial q} + r\frac{\partial \Omega}{\partial p} - p\frac{\partial \Omega}{\partial r} = M_\eta \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega}{\partial r} + p\frac{\partial \Omega}{\partial q} - q\frac{\partial \Omega}{\partial p} = M_\zeta \\
&\frac{d}{dt}(a_r p + b_r q + c_r r + \sum_1^n {}_s\, a_{rs}\omega_s) = P_r \qquad (r = \nu + 1,\ \nu + 2, \ldots n) \\
&\frac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \frac{\partial T}{\partial \varpi_h} = \Pi_h,
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

in cui si ha:

$$\Omega = \frac{1}{2}\Big\{(A - a')p^2 + (B - b')q^2 + (C - c')r^2 - 2(D + d')qr - 2(E + e')rp - 2(F + f')pq\Big\}$$

$$+ p\left[m_1' + \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} a_i (K_s - v_s) + \sum_1^m {}_h e_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right] +$$

$$+ q\left[m_2' + \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} b_i (K_s - v_s) + \sum_1^m {}_h f_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right] +$$

$$+ q\left[m_3' + \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} a_i (K_s - v_s) + \sum_1^m {}_h g_h \frac{d\varpi_h}{dt}\right] - \frac{1}{2}\sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is}(K_i - v_i)(K_s - v_s) + \tau,$$

e

$$m_1' = \sum_{\nu+1}^n {}_r\, a_r \omega_r \qquad v_i = \sum_{\nu+1}^n {}_r\, a_r \omega_r$$

$$m_2' = \sum_{\nu+1}^n b_r \omega_r \qquad \tau = \frac{1}{2}\sum_{\nu+1}^n {}_r \sum_{\nu+1}^n {}_s\, a_{rs}\omega_r \omega_s$$

$$m_3' = \sum_{\nu+1}^n c_r \omega_r .$$

Se i parametri del sistema sono costanti e le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+2}, \dots \omega_n$ sono pure costanti, allora spariscono le ultime equazioni (d) e in Ω i coefficienti di p, q, r, p^2, q^2, r^2, qr, rp, pq divengono costanti, onde *il teorema del* § 8 *si estende immediatamente al caso in cui sopra alcune coordinate cicliche non agisce alcuna forza e le intensità cicliche corrispondenti alle rimanenti coordinate cicliche sono costanti.*

Supponendo poi che la coppia di rotazione sia nulla la rotazione si otterrà per mezzo di funzioni ellittiche; infatti le prime tre equazioni (d) si ridurranno alla forma (19):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(F_1', F_2')}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d(F_1', F_2')}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{d(F_1', F_2')}{d(p, q)},$$

in cui:

$$\left.\begin{aligned} F_1' = \frac{1}{2\sqrt{\Delta'}} \Big\{ & [(A-a')p-(F+f')q-(E+e')r+l_1']^2 + \\ & +[-(F+f')p+(B-b')q-(D+d')r+l_2']^2 + \\ & +[-(E+e')p-(D+d')q+(C-c')r+l_3']^2 \Big\} \\ F_2' = \frac{1}{2\sqrt{\Delta'}} \Big\{ & (A-a')p^2+(B-b')q^2+(C-c')r^2 - \\ & -2(D+d')qr-2(E+e')rp-2(F+f')pq \Big\}, \end{aligned}\right\}$$

essendo:

$$l_1' = m_1' + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} a_i (K_s - v_s)$$

$$l_2' = m_2' + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} b_i (K_s - v_s)$$

$$l_3' = m_3' + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} c_i (K_s - v_s)$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A-a', & -(F+f'), & -(E+e') \\ -(F+f'), & B-b', & -(D+d') \\ -(E+e'), & -(D+d'), & C-c' \end{vmatrix}$$

quindi p, q, r; ω_1, $\omega_2, \dots \omega_\nu$ assumeranno la forma (20). Per ottenere le forze $P_{\nu+1}, \dots P_n$ che conservano costanti le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}, \dots \omega_n$, basterà ricorrere alla formula:

$$P_r = \frac{d}{dt}(a_r p + b_r q + c_r r + \sum_1^n{}_s a_{rs}\omega_s) = \frac{d}{dt}(a_r p + b_r q + c_r r + \sum_1^\nu{}_i a_{ri}\omega_i) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{a_r p + b_r q + c_r r + \sum_1^\nu{}_i a_{ri}(-p\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_s - q\sum_1^\nu{}_s A'_{is}b_s - r\sum_1^\nu{}_s A'_{is}c_s)\right\}$$

$$= (a_r - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}a_s)\frac{dp}{dt} + (b_r - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}b_s)\frac{dq}{dt} + (c_r - \sum_1^\nu A'_{is}c_{ri}c_s)\frac{dr}{dt}$$

$$= (a_r - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}a_s)\frac{d(F_1', F_2')}{d(q, r)} + (b_r - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}b_s)\frac{d(F_1', F_2')}{d(r, p)} +$$

$$+ (c_r - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}c_s)\frac{d(F_1', F_2')}{d(p, q)}.$$

Poniamo perciò:

$$F_0^{(r)} = (a_r - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}a_s)p + (b_r - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}b_s)q +$$

$$+ (c_r - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}c_s)r,$$

e avremo:

$$P_r = \frac{d(F_0^{(r)}, F_1', F_2')}{d(p, q, r)} \qquad (r = \nu + 1,\ \nu + 2, \dots\ n),$$

quindi anche le forze P_r si esprimeranno mediante funzioni ellittiche del tempo.

Lugano, 8 agosto 1895.

NOTA.

Dopo ultimato il precedente lavoro nell'Agosto scorso, ebbi conoscenza di una Memoria del prof. Beltrami presentata al Reale Istituto Lombardo nell' adunanza del 20 Giugno, la quale contiene delle osservazioni altrettanto importanti e profonde quanto ne è elegante e limpida la esposizione. Il prof. Beltrami si propone in essa lo scopo di porre in luce la importanza che ha nella dinamica l'impiego diretto di quella espressione del principio fondamentale di Lagrange che ordinariamente si chiama la equazione simbolica del moto. Questa equazione è suscettibile di trasformarsi in modo da potersi mettere in riscontro colle varie forme sotto cui vennero poste le equazioni della dinamica, quali la lagrangiana e la hamiltoniana, ed anche con un tipo intermedio fra i due che il prof. Beltrami pone in evidenza. Una applicazione di ciò dà l'illustre Autore ottenendo quella che potrebbe chiamarsi la equazione simbolica corrispondente alle equazioni di Thomson e Tait. Mi permetto qui di ricavare dalla equazione simbolica $(5)_c$ del Beltrami il teorema che riconduce ad un moto isociclico il moto adiabatico di un sistema in cui sussistono moti ciclici. Perciò ammetterò che il lettore abbia presente le notazioni ed i simboli usati dal prof. Beltrami.

Si supponga che il sistema sia girevole attorno ad un punto fisso e che si scelgano come prime fra le coordinate che individuano la configurazione del sistema, tre variabili q_1, q_2, q_3 che determinino la posizione degli assi mobili rispetto ad assi fissi (per esempio i tre angoli di Eulero), mentre le successive coordinate indipendenti del sistema siano cicliche e tali da individuare il moto del sistema relativamente ai detti assi mobili. Le forze corrispondenti alle coordinate cicliche siano nulle. Quindi nel nostro caso le tre prime variabili indipendenti sarebbero le q del Beltrami, mentre le r' sarebbero le nostre ω_i. Nelle dette ipotesi l'equazione simbolica del Beltrami assume la forma:

$$\delta L = \delta U - \left(\sum_1^3{}_i \frac{\partial U}{\partial q'_i} \delta q_i\right)',$$

in cui si ha:

$$- U = T_q - \mathbf{T}_\lambda - \mathbf{T}_\rho - \Sigma \frac{\partial \mathbf{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho.$$

In questa equazione per T_q deve prendersi la forza viva dovuta al moto di trascinamento degli assi mobili, cioè:

$$T_q = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2 D q r - 2 E r p - 2 F p q),$$

le λ debbono essere sostituite da:

$$a_i p + b_i q + c_i r,$$

e $\mathbf{T}$ deve essere la forma reciproca della

$$T_r = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} \omega_i \omega_s,$$

vale a dire la forma:

$$\frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} \Omega_i \Omega_s,$$

onde:

$$\mathbf{T}_\lambda = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} (a_i p + b_i q + c_i r)(a_s p + b_s q + c_s r) =$$

$$= \frac{1}{2} (a p^2 + b q^2 + c r^2 + 2 d q r + 2 e r p + 2 f p q).$$

Quindi, sempre adottando le notazioni del prof. Beltrami,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \Big[(A - a) p^2 + (B - b) q^2 + (C - c) r^2 - 2(D + d) q r - 2(E + e) r p - 2(F + f) p q\Big] -$$

$$- \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s,$$

giacchè le costanti K_i sostituiscono nel nostro caso le costanti ρ del Beltrami.

Quanto a $\mathbf{V}$ avremo:

$$\mathbf{V} = \Sigma \frac{\partial \mathbf{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho = \Sigma_i \Sigma_s A_{si} (a_i p + b_i q + c_i r) K_s =$$
$$= p \Sigma_i \Sigma_s A_{is} a_i K_s + q \Sigma_i \Sigma_s A_{is} b_i K_s + r \Sigma_i \Sigma_s A_{is} c_i K_s =$$
$$= l_1 p + l_2 q + l_3 r,$$

onde:

$$-U = \frac{1}{2} \left[(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq \right] +$$
$$+ l_1 p + l_2 q + l_3 r - \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s.$$

All'infuori dunque del termine costante $\frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s$, la U del Beltrami coincide colla Θ della precedente Memoria. Noi potremo dunque dire che:

$$\delta L = \left(\sum_1^3 \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i} \delta q_i \right)' - \delta \Theta, \tag{1}$$

è la equazione simbolica del moto di un sistema nel cui interno esistono moti ciclici, quando son nulle le forze relative alle coordinate cicliche e i parametri sono costanti.

La precedente equazione ci conduce facilmente al teorema della Memoria precedente che abbiamo sopra ricordato, osservando che essa può interpretarsi come la equazione simbolica del moto di un sistema nel cui interno esistono moti isociclici. Il teorema resulta così dimostrato in un altro modo: le operazioni fatte nella precedente Memoria per giungervi furono eseguite sopra equazioni aventi il tipo che può chiamarsi di Lagrange-Liouville, mentre invece le trasformazioni ora eseguite valendosi del metodo del prof. Beltrami furono direttamente applicate sopra la equazione del moto nella così detta forma simbolica.

Mostriamo ora come dall'ultima equazione scritta possano ricavarsi direttamente le equazioni del moto aventi il tipo di Lagrange-Liouville, anche senza ricorrere all'impiego del principio di Hamilton. Si osservi perciò che:

$$\sum_1^3 \frac{\partial \Theta}{\partial q'_i} \delta q_i = \frac{\partial \Theta}{\partial p} \sum_1^3 \frac{\partial p}{\partial q'_i} \delta q_i + \frac{\partial \Theta}{\partial q} \sum_1^3 \frac{\partial q}{\partial q'_i} \delta q_i + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \sum_1^3 \frac{\partial r}{\partial q'_i} \delta q_i.$$

Tenendo conto che p, q, r debbono essere lineari nelle q'_i, cioè deve aversi:

$$p = \sum_1^3 P_i q'_i, \qquad q = \sum_1^3 Q_i q'_i, \qquad r = \sum_1^3 R_i q'_i,$$

in cui P_i, Q_i, R_i sono indipendenti dalle q'_i, e (vedi § 5):

$$\delta \varpi = \sum_1^3 P_i \delta q_i, \qquad \delta \chi = \sum_1^3 Q_i \delta q_i, \qquad \delta \rho = \sum_1^3 R_i \delta q_i,$$

si otterrà che:

$$\delta \varpi = \sum_1^3 \frac{\partial p}{\partial q'_i} \delta q_i, \qquad \delta \chi = \sum_1^3 \frac{\partial q}{\partial q'_i} \delta q_i, \qquad \delta \rho = \sum_1^3 \frac{\partial r}{\partial q'_i} \delta q_i,$$

e perciò la (1) diverrà:

$$\delta L = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial p}\delta\varpi + \frac{\partial \Theta}{\partial q}\delta\chi + \frac{\partial \Theta}{\partial r}\delta\rho\right)' - \delta\Theta,$$

ossia, poichè:

$$\delta\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial p}\delta p + \frac{\partial \Theta}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \Theta}{\partial r}\delta r,$$

potrà scriversi:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial p}\delta\varpi + \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q}\delta\chi + \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial r}\delta\rho +$$

$$+ \frac{\partial \Theta}{\partial p}(\delta\varpi' - \delta p) + \frac{\partial \Theta}{\partial q}(\delta\chi' - \delta q) + \frac{\partial \Theta}{\partial r}(\delta\rho' - \delta r).$$

Ma (vedi § 5):

$$\delta\varpi' - \delta p = r\delta\chi - q\delta\rho, \qquad \delta\chi' - \delta q = p\delta\rho - r\delta\varpi, \qquad \delta\rho' - \delta r = q\delta\varpi - p\delta\chi,$$

quindi:

$$\delta L = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial p} + q\frac{\partial \Theta}{\partial r} - r\frac{\partial \Theta}{\partial q}\right)\delta\varpi + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q} + r\frac{\partial \Theta}{\partial p} - p\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)\delta\chi +$$

$$+ \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + p\frac{\partial \Theta}{\partial q} - q\frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)\delta\rho,$$

e poichè:

$$\delta L = M_\xi\,\delta\varpi + M_\eta\,\delta\chi + M_\zeta\,\delta\rho,$$

otterremo le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial p} + q\frac{\partial \Theta}{\partial r} - r\frac{\partial \Theta}{\partial q} &= M_\xi \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q} + r\frac{\partial \Theta}{\partial p} - p\frac{\partial \Theta}{\partial r} &= M_\eta \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + p\frac{\partial \Theta}{\partial q} - q\frac{\partial \Theta}{\partial p} &= M_\zeta .
\end{aligned}\right\}$$

che sono appunto del tipo Lagrange-Liouville.

Analogamente potrebbe operarsi nel caso trattato nel § 9.

Sul problema della temperatura nell'ellissoide.

(Di Carlo Somigliana, *a Pavia.)*

Nella introduzione alla classica Memoria: *Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégeaux* (*) il Lamé, a proposito del problema da lui risolto, così scrive: « ... il s'agissait de traiter un corps « pour lequel les procedés d'analyse, employés jusqu'ici, étaient totalement « impuissants: car ni les coordonnées du prisme rectangle, ni celle de la « sphère, les seules dont les géomètres aient encore fait usage en physique « mathématique, ne pouvaient aborder l'ellipsoïde ».

Ma quest' asserzione dell' illustre analista non è completamente esatta; poichè, se è vero che mediante le coordinate e le trascendenti ellittiche si arriva alla nota elegante rappresentazione delle soluzioni semplici del problema come prodotti di tre funzioni di una sola variabile, d'altra parte non si può dire che l'uso di queste coordinate sia indispensabile per risolvere il problema dell' ellissoide.

E difatti i prodotti di Lamé esprimono in ultima analisi funzioni razionali intere delle coordinate rettangolari (che noi chiameremo *polinomi di Lamé*) ed è quindi lecito domandare se sia possibile definire e costruire questi polinomi per via puramente algebrica, come nel caso della sfera è possibile definire e costruire le cosidette *funzioni armoniche* senza ricorrere alle formole trascendenti che s'incontrano facendo uso delle coordinate sferiche.

Ora una via che può effettivamente condurre ad un tale risultato si ha applicando un metodo d'integrazione, da me già esposto sommariamente in una Nota (**) dei Rendiconti del R. Istituto Lombardo (serie 2.ª, vol. 25, 1891).

(*) Journal de Mathématiques, tomo 4, 1839.

(**) *Intorno alla integrazione per mezzo di soluzioni semplici.*

L'applicazione di questo metodo al problema della temperatura stazionaria nell'ellissoide forma l'oggetto di questo lavoro; ma il principio sul quale tal metodo è fondato gode di una generalità che sorpassa assai il problema di Lamé, e può quindi condurre alla integrazione di equazioni per le quali gli artifici speciali, che hanno servito in questo caso, non hanno più alcun valore. In particolare le formole, che io trovo, sono immediatamente estendibili al caso di un ellissoide in uno spazio di un numero qualunque di dimensioni, problema pel quale non basterebbero le trascendenti ellittiche, qualora si volesse seguire la via di Lamé. L'estensione poi è così semplice che io mi limito ad accennarla qui, e nel seguito mi atterrò sempre al caso del problema fisico con tre variabili indipendenti.

Questo caso si presenta come il più interessante a studiarsi col nuovo metodo, poichè il confronto coi risultati già noti può portare a stabilire leggi generali applicabili anche in altri casi, e servire quindi come utile esercizio per passare poi a problemi più complicati. D'altra parte i risultati particolari a cui si arriva, hanno anche in sè qualche valore, in quanto presentano sotto un nuovo punto di vista la soluzione di Lamé.

L'osservazione che nel problema della temperatura dell'ellissoide si possa far a meno delle funzioni di Lamé si trova anche in una Nota di Liouville (*). Però col procedimento, ivi indicato dall'Autore, più che altro si ottiene una trasformazione della serie di Lamé, atta a dimostrarne la convergenza, e vengono messe in luce le relazioni fra le funzioni di Lamé e le funzioni sferiche; invece non si vede molto chiaramente come egli intenda evitare l'uso delle funzioni o dei polinomi di Lamé, anzi la via più naturale per giungere ai risultati, cui egli accenna, è appunto quella di servirsi di questi polinomi.

Nello studio che segue vengono stabilite e specialmente studiate queste due proprietà: 1.° la determinazione dei polinomi di Lamé si riduce ad un problema ben noto, quello di ridurre a forma canonica il sistema di due forme bilineari; 2.° se si chiama *genere* dei polinomi di Lamé, il grado dell'equazione algebrica, da cui essi dipendono, si trova che tutti quelli dello stesso genere sono suscettibili di una rappresentazione uniforme.

Del resto questo lavoro non ha la pretesa di essere una esposizione completa della teoria algebrica dei polinomi di Lamé, ma solo ha per scopo di mettere in luce la possibilità di questa teoria e segnarne alcune linee principali.

(*) *Sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique.* Journal de Mathématiques, tomo 10, 1845.

§ 1. Definizione algebrica delle funzioni armoniche ellissoidiche.

La funzione u che rappresenta la temperatura nell'interno di un corpo S omogeneo, isotropo, supposto che in esso si sia stabilita una distribuzione stazionaria, deve soddisfare alle seguenti condizioni:

1.° Nello spazio S deve essere regolare insieme alle sue derivate prime, ed avere le derivate seconde finite ed integrabili.

2.° Soddisfare in tutto lo spazio S all'equazione di Laplace.

3.° Sulla superficie s, che limita lo spazio S, assumere i valori di una funzione arbitrariamente data sulla superficie stessa e che rappresenta la temperatura dell'ambiente nell'immediata vicinanza della superficie.

Sono, come si sa, le condizioni del problema di Dirichlet per lo spazio S.

Supponiamo ora di aver costruito una serie di funzioni $u_1, u_2, \ldots$ le quali soddisfacciano alle condizioni 1.ª e 2.ª, ed inoltre sulla superficie verifichino le seguenti relazioni:

$$h_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = H u_i \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

dove n rappresenta la normale, che supporremo diretta verso l'interno, le h_i sono costanti finite, non nulle ed inoltre tutte differenti fra loro, e H è una funzione dei punti della superficie, indipendente dalle u_i.

Applicando il lemma di Green ad una coppia qualunque u_p, u_q di queste funzioni si ha:

$$\int_s \left(u_p \frac{\partial u_q}{\partial n} - u_q \frac{\partial u_p}{\partial n} \right) ds = 0,$$

da cui, mediante le (1), si ricavano subito le relazioni:

$$\int_s u_p u_q H \, ds = 0 \qquad \int_s \frac{\partial u_p}{\partial n} \frac{\partial u_q}{\partial n} \frac{ds}{H} = 0 \qquad p \gtrless q, \tag{2}$$

le quali, come nel metodo classico così detto delle *soluzioni semplici*, possono servire ad isolare i coefficienti in uno sviluppo della forma:

$$u = \sum_i c_i u_i, \tag{3}$$

oppure:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_i c_i \frac{\partial u_i}{\partial n}. \tag{4}$$

Difatti, se ammettiamo *a priori* per la u uno sviluppo della forma (3), e consideriamo lecita l'integrazione termine a termine, applicando la prima delle (2), troviamo:

$$c_i = \frac{\int_s f \cdot u_i H ds}{\int_s u^2_i H ds},$$

dove f rappresenta i valori della u sulla superficie.

Analogamente la seconda delle (2) può servire a determinare i coefficienti c_i applicandola allo sviluppo (4), quando sulla superficie siano dati i valori della derivata $\frac{\partial u}{\partial n}$ invece di quelli della u. La stessa serie di funzioni u_1, u_2,... può quindi servire a risolvere i due problemi.

Possiamo subito osservare che fra le funzioni u_i si può sempre includere la funzione $u_0 = \text{cost.}$, senza che le (2) cessino di sussistere, quantunque per questa funzione, affinchè sia soddisfatta la (1), debbasi supporre $\frac{1}{h_0} = 0$. Difatti, supponendo $u_p = u_0$, la seconda delle (2) è soddisfatta, poichè $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$, e perchè lo sia anche la prima dovrà essere:

$$\int_s u_p H ds = 0,$$

per $p = 1, 2, \ldots$. Ora essendo $\Delta_2 u_p = 0$ si ha:

$$0 = \int_S \Delta_2 u_p dS = -\int_s \frac{\partial u_p}{\partial n} ds = -\frac{1}{h_p}\int_s u_p H ds,$$

e le equazioni precedenti sono quindi soddisfatte, poichè, per ipotesi, le costanti $\frac{1}{h_p}$ sono finite e differenti da zero.

È assai facile verificare che, se lo spazio S è una sfera, le funzioni cosidette *armoniche sferiche,* rientrano nella definizione delle funzioni u_1, u_2,... da noi stabilita. Questo fatto basta a giustificare la nostra ipotesi della esistenza di una serie di funzioni u_1, u_2,..., mostrando che in essa non vi è nulla di contradditorio.

Supponiamo ora che lo spazio S sia quello racchiuso da un'ellissoide a tre assi.

Le armoniche sferiche sono, come è noto, funzioni razionali, intere, omogenee delle coordinate rettangolari. Si può quindi cercare se sia possibile costruire delle funzioni più generali, razionali ed intere, le quali nello spazio interno ad un'ellissoide soddisfacciano alle condizioni imposte alle u_1, u_2,... . Queste funzioni si potranno allora chiamare *armoniche ellissoidiche.*

L'equazione dell'ellissoide sia:

$$\Omega = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

e perciò sulla superficie si avrà:

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{x}{a^2 R} \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{y}{b^2 R} \qquad \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{z}{c^2 R},$$

dove:

$$R = -\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

per cui se poniamo:

$$H = -\frac{1}{R},$$

la (1) in questo caso si potrà scrivere:

$$h_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{x}{a^2} + \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{y}{b^2} + \frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{z}{c^2}\right) = u_i. \tag{5}$$

Noi supporremo che u_i sia razionale, intera e di grado i; inoltre, se i è pari, non contenga che termini di grado pari, se è dispari, non contenga che termini di grado dispari. Per cui indicando in generale con φ_r una funzione razionale, intera, omogenea, di grado r, si avrà:

$$u_i = \varphi_i + \varphi_{i-2} + \cdots \qquad \cdots + \begin{cases} \cdots + \varphi_2 + \varphi_0 & \text{se } i \text{ è pari} \\ \cdots + \varphi_3 + \varphi_1 & \text{se } i \text{ è dispari.} \end{cases}$$

È chiaro ora che l'operazione che nel primo membro della (5) si fa sulla u_i, non altera la legge di formazione della u_i; per cui indicando con D questa operazione (all'infuori della moltiplicazione per h_i) si avrà:

$$Du_i = \psi_i + \psi_{i-2} + \cdots \qquad \cdots + \begin{cases} \cdots + \psi_2 + \psi_0 & \text{se } i \text{ è pari} \\ \cdots + \psi_3 + \psi_1 & \text{se } i \text{ è dispari,} \end{cases}$$

ove le ψ_r sono ancora funzioni omogenee, intere di grado r. Perciò noi potremo rendere la (5) omogenea, moltiplicando rispettivamente le espressioni

φ_{i-k}, ψ_{i-k}, che compaiono in u_i e Du_i, per Ω^k; ed inoltre potremo supporre che la (5), così modificata, debba essere soddisfatta in tutto il campo, cioè debbano nei due membri essere identici i coefficienti dei termini simili rispetto alle variabili x, y, z. Difatti, essendo sulla superficie $\Omega = 1$, la (5) sarà in tale ipotesi certamente verificata.

Le u_i inoltre debbono soddisfare l'equazione di LAPLACE $\Delta_2 u_i = 0$. Ora anche l'operazione Δ_2 non altera la legge di formazione delle u_i; quindi ciascuna delle φ_r separatamente dovrà soddisfare a questa equazione, cioè essere una funzione armonica sferica.

L'enumerazione delle equazioni, a cui tutte queste condizioni conducono, mostra che esse non superano il numero dei coefficienti disponibili nelle u_i. Difatti per i pari, $= 2n$, il numero N_{2n} dei coefficienti di u_i è:

$$N_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k+1)(2k+2)}{2},$$

mentre l'equazione (5) dà luogo ad

$$M_{2n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2},$$

condizioni, e l'equazione di LAPLACE ad altre

$$M'_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}.$$

Dunque:

$$N_{2n} = M_{2n} + M'_{2n}.$$

Analogamente per i dispari, $= 2n+1$, si trova:

$$N_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k+2)(2k+3)}{2} \qquad M_{2n+1} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{2}$$

$$M'_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+2)(2k+3)}{2}.$$

Quindi anche in questo caso:

$$N_{2n+1} = M_{2n+1} + M'_{2n+1},$$

cioè il numero dei coefficienti indeterminati uguaglia quello delle equazioni da soddisfare. Queste sono tutte lineari, omogenee rispetto ai coefficienti incogniti; di più quelle che provengono dalla (5), contengono un'altra incognita, la h_i. Perchè il sistema sia possibile, questa h_i dovrà quindi scegliersi in modo da annullare il determinante del sistema stesso; allora i coefficienti della u_i risulteranno determinati linearmente all'infuori di un fattore arbitrario comune, che è implicito nella definizione.

La possibilità di costruire le armoniche ellissoidiche per la via indicata, resta così dimostrata, almeno in generale. Vedremo poi che queste funzioni coincidono con quelle che abbiamo chiamato *polinomi di Lamè* (§ 6).

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$ i coefficienti di una u_i; la forma generale delle equazioni, a cui essi devono soddisfare è la seguente:

$$h \sum_{k=1}^{N} a_{ks} \alpha_k = \sum_{k=1}^{N} b_{ks} \alpha_k \tag{6}$$

$$(s = 1, 2, \ldots N),$$

ove le $a_{k,s}$, $b_{k,s}$ sono costanti, di cui le prime, in una stessa equazione, possono anche essere tutte nulle, poichè nelle equazioni provenienti dalla $\Delta_2 u_i = 0$ non compare la h. L'equazione che determina h si può quindi scrivere:

$$\begin{vmatrix} h a_{11} - b_{11} \ldots & h a_{N1} - b_{N1} \\ \cdots & \cdots \\ h a_{N1} - b_{N1} \ldots & h a_{NN} - b_{NN} \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

ed ha la forma dell'equazione fondamentale nella teoria dei sistemi di due forme bilineari:

$$\varphi = \sum a_{ks} \alpha_k \beta_s \qquad \psi = \sum b_{ks} \alpha_k \beta_s,$$

la quale è stata oggetto di tante ricerche per parte di Jacobi, Borchardt, Weierstrass, ecc.

Noi non discuteremo qui la questione della possibilità che la (7) abbia radici multiple; dalla identità delle nostre funzioni coi polinomi di Lamé risulterà che essa ha tutte le radici distinte, almeno finchè l'ellissoide è a tre assi. Ricorderemo invece un ragionamento conosciuto, che mostra che le radici devono essere tutte reali.

Difatti se esistesse una coppia di radici complesse coniugate h', h'' i coefficienti delle due funzioni u', u'' corrispondenti, che sono funzioni reali e razionali di h', h'' rispettivamente, sarebbero parimenti complessi e coniugati; perciò sarebbe impossibile l'equazione:

$$\int_s u' u'' \frac{ds}{R} = 0,$$

poichè il prodotto $u' u''$ risulterebbe la somma di due quadrati.

Ammessa la semplicità delle radici della (7) è noto che esistono in generale due sostituzioni lineari per le variabili α, β rispettivamente:

$$\alpha_k = \sum_p c_{kp}\xi_p \qquad \beta_s = \sum_q e_{sq}\eta_q, \tag{8}$$

che riducono le forme φ, ψ a contenere solamente i prodotti delle variabili ξ, η di indice uguale, cioè:

$$\varphi = \sum_p A_p \xi_p \eta_p \qquad \psi = \sum_p h_p A_p \xi_p \eta_p,$$

dove inoltre h_1, $h_2, \dots$ h_N sono le radici della (7).

Ora osserviamo che le equazioni (6) si possono ottenere uguagliando a zero la variazione, rispetto alle variabili β, della forma $h\varphi - \psi$; poichè infatti si ha per tale variazione:

$$\delta(h\varphi - \psi) = \sum_{k,s}(h\,a_{ks} - b_{ks})\alpha_k \delta\beta_s.$$

Ora colle nuove variabili questa variazione diviene:

$$\delta(h\varphi - \psi) = \sum_p (h - h_p) A_p \xi_p \delta\eta_p,$$

e quindi le equazioni (6) divengono:

$$(h - h_1)\xi_1 = 0, \qquad (h - h_2)\xi_2 = 0, \dots, \qquad (h - h_N)\xi_N = 0,$$

le cui N soluzioni si determinano immediatamente. Esse sono:

$$\begin{array}{lll}
h = h_1 & \xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_N = 0 & \xi_1 = \text{cost.} \\
h = h_2 & \xi_1 = \xi_3 = \cdots = \xi_N = 0 & \xi_2 = \text{cost.} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
h = h_N & \xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{N-1} = 0 & \xi_N = \text{cost.}
\end{array}$$

I valori corrispondenti per le α si ricavano dalle equazioni (8) e sono i seguenti:

$$\begin{array}{lllll}
\text{per} & h = h_1 & \alpha_1 = c_{11}, & \alpha_2 = c_{21}, \dots & \alpha_N = c_{N1} \\
\text{per} & h = h_2 & \alpha_1 = c_{12}, & \alpha_2 = c_{22}, \dots & \alpha_N = c_{N2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\text{per} & h = h_N & \alpha_1 = c_{1N}, & \alpha_2 = c_{2N}, \dots & \alpha_N = c_{NN},
\end{array}$$

ove a ciascuna serie di valori può aggiungersi un fattore di proporzionalità.

Possiamo quindi concludere che in generale:

La determinazione delle funzioni armoniche ellissoidiche può ricondursi alla riduzione di due forme bilineari a forma canonica; i coefficienti di queste funzioni coincidono coi coefficienti di una delle due sostituzioni lineari che effettuano la riduzione.

Studieremo in seguito più particolarmente la forma dell'equazione (7).

§ 2. **Classificazione.**

Abbiamo già osservato che le operazioni D e Δ_2 non alterano la legge di formazione delle u_i; ora possiamo aggiungere che se una u_i si comporta in un determinato modo rispetto al segno quando si mutano le variabili x, y, z nelle loro contrarie, cioè è pari o dispari rispetto a ciascuna di esse, questa proprietà si conserva anche dopo eseguite sopra di essa le operazioni D e Δ_2. Difatti considerando un termine qualunque $A x^r y^s z^t$, si ha:

$$D(A x^r y^s z^t) = A\left(\frac{r}{a^2} + \frac{s}{b^2} + \frac{t}{c^2}\right) x^r y^s z^t$$

$$\Delta_2(A x^r y^s z^t) = A\left\{r(r-1)y^2 z^2 + s(s-1)z^2 x^2 + t(t-1)x^2 y^2\right\} x^{r-2} y^{s-2} z^{t-2},$$

e quindi il grado delle x, y, z conserva la stessa parità che aveva nel prodotto $x^r y^s z^t$.

Da ciò segue che, se nelle espressioni delle u_i raccogliamo insieme tutti i termini che si comportano nello stesso modo rispetto alla parità delle variabili, e scriviamo le equazioni che determinano i coefficienti di questa funzione, i coefficienti di un gruppo non compariranno mai in una stessa equazione coi coefficienti di un altro e quindi ciascun gruppo potrà essere determinato isolatamente.

Ora un polinomio, come le u_i, composto con termini tutti di grado pari, o tutti di grado dispari, può comportarsi in quattro modi differenti rispetto alla parità delle variabili.

Se è *di grado pari* può essere:

	1.°	2.°	3.°	4.°
rispetto ad x:	pari	pari	dispari	dispari
rispetto ad y:	pari	dispari	pari	dispari
rispetto a z:	pari	dispari	dispari	pari.

Se è *di grado dispari* può essere:

	1.°	2.°	3.°	4.°
rispetto ad x:	dispari	dispari	pari	pari
rispetto ad y:	dispari	pari	dispari	pari
rispetto a z:	dispari	pari	pari	dispari.

Dunque possiamo concludere che la determinazione delle funzioni armoniche ellissoidiche di qualunque grado si ridurrà sempre alla determinazione *indipendente* di *quattro* funzioni distinte; diremo perciò che una funzione armonica è di 1.ª, 2.ª, 3.ª o 4.ª classe secondo quella cui appartiene delle classi sopra indicate con questi numeri, in corrispondenza colla parità del suo grado. Rappresenteremo inoltre, d'ora innanzi, con ω_m, φ_m, ψ_m, χ_m i polinomi omogenei di grado m e di classe 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª rispettivamente, quando i loro coefficienti si considerano come indeterminati. È facile assegnarne la forma generale.

I polinomi ω_{2n}, dovendo essere pari rispetto a tutte tre le variabili, saranno funzioni di x^2, y^2, z^2 ed avranno quindi la forma del polinomio omogeneo generale di grado n di queste variabili; conterranno quindi $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficienti. Inoltre $\Delta_2 \omega_{2n}$, per la legge sopraindicata, conterrà $\frac{n(n+1)}{2}$ termini; quindi se ω_{2n} soddisfa all'equazione di Laplace conterrà solo $n+1$ coefficienti arbitrari. Potremo dire anche: esistono solamente $n+1$ funzioni ω_{2n} indipendenti che soddisfanno all'equazione di Laplace.

Indicheremo con $M_n^{(i)}$ il numero dei coefficienti di una funzione di classe i e di grado n; con $m_n^{(i)}$ il numero dei suoi coefficienti indipendenti quando è soggetta alla condizione di soddisfare all'equazione di Laplace. Avremo allora:

$$M_{2n}^{(1)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad m_{2n} = n+1.$$

Dalla forma generale delle ω_{2n} si passa facilmente a quella delle rimanenti. Le φ_{2n}, ψ_{2n}, χ_{2n} dovendo essere pari rispetto ad una delle variabili e dispari rispetto alle rimanenti saranno composte del prodotto di una ω_{2n-2} per yz, zx, xy rispettivamente. Avremo quindi:

$$\varphi_{2n} = yz\,\omega_{2n-2} \qquad \psi_{2n} = zx\,\omega_{2n-2} \qquad \chi_{2n} = xy\,\omega_{2n-2},$$

e inoltre:

$$M_{2n}^{(2)} = M_{2n}^{(3)} = M_{2n}^{(4)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$m_{2n}^{(2)} = m_{2n}^{(3)} = m_{2n}^{(4)} = n.$$

Passando alle forme di grado dispari si trova subito che la forma generale delle ω_{2n+1} è la seguente:

$$\omega_{2n+1} = xyz\,\omega_{2n-2},$$

e quindi si ha:

$$M^{(1)}_{2n+1} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad m^{(1)}_{2n+1} = n.$$

Finalmente si trova:

$$\varphi_{2n+1} = x\,\omega_{2n} \qquad \psi_{2n+1} = y\,\omega_{2n} \qquad \chi_{2n+1} = z\,\omega_{2n},$$

e perciò:

$$M^{(2)}_{2n+1} = M^{(3)}_{2n+1} = M^{(4)}_{2n+1}\,\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$m^{(2)}_{2n+1} = m^{(3)}_{2n+1} = m^{(4)}_{2n+1} = n+1.$$

A conferma di questi numeri osserviamo che indicando con r un intero qualunque pari o dispari, si ha:

$$M^{(1)}_r + M^{(2)}_r + M^{(3)}_r + M^{(4)}_r = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

$$m^{(1)}_r + m^{(2)}_r + m^{(3)}_r + m^{(4)}_r = 2r+1,$$

e questi numeri coincidono con quelli che danno rispettivamente il numero dei termini di una forma generale di grado r, e quello coefficienti indipendenti della stessa, quando deve soddisfare all'equazione di Laplace.

Da ciò che precede dunque risulta che le armoniche ellissoidiche, sia di grado pari che di grado dispari, possono essere divise in quattro classi; noi le indicheremo rispettivamente colle lettere T, U, V, W e avremo:

$$T_r = \omega_r + \omega_{r-2} + \cdots$$
$$U_r = \varphi_r + \varphi_{r-2} + \cdots$$
$$V_r = \psi_r + \psi_{r-2} + \cdots$$
$$W_r = \chi_r + \chi_{r-2} + \cdots,$$

ove r può essere pari o dispari. Inoltre approfittando delle relazioni trovate fra le forme generali delle ω, φ, ψ, χ e ponendo:

$$\Phi_n = \omega_{2n} + \omega_{2n-2} + \cdots + \omega_2 + \omega_0,$$

avremo per r pari, $= 2n$,

$$\left.\begin{array}{c} T_{2n} = \Phi_n \\ U_{2n} = yz\,\Phi_{n-1} \qquad V_{2n} = zx\,\Phi_{n-1} \qquad W_{2n} = xy\,\Phi_{n-1}, \end{array}\right\} \tag{9}$$

e per r dispari, $= 2n + 1$,

$$\left.\begin{array}{c} T_{2n+1} = xyz\Phi_{n-1} \\ U_{2n+1} = x\Phi_n \qquad V_{2n+1} = y\Phi_n \qquad W_{2n+1} = z\Phi_n . \end{array}\right\} \tag{9'}$$

Le quattro forme trovate pei polinomi di grado pari e dispari corrispondono agli otto modi differenti secondo cui può comportarsi una funzione che sia pari o dispari secondo ciascuna delle variabili x, y, z. Come una funzione qualsiasi di una variabile può sempre decomporsi nella somma di due funzioni, l'una pari e l'altra dispari, colla formola:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

così una funzione di tre variabili può decomporsi nella somma di otto, le quali si comportano negli otto modi sopraindicati rispetto alla parità. Una funzione che sia composta con una somma di armoniche ellissoidiche, come noi abbiamo supposto per la funzione che rappresenta la temperatura, risulta così già per sè decomposta nelle otto funzioni, ed il problema della temperatura viene diviso in otto problemi distinti, ciascuno dei quali corrisponde ad un caso di simmetria speciale, rispetto ai piani principali diametrali, pei valori della temperatura sulla superficie. Ciò del resto è già stato osservato anche da LAMÉ.

Mediante le formole (9), (9') si può semplificare notevolmente il problema della determinazione dei polinomi u_r.

Le equazioni che determinano i coefficienti di u_n si possono dividere in due gruppi; quelle che provengono dall'equazione $\Delta_2 u_r = 0$, che chiameremo sistema (I) e quelle che provengono dall'equazione (5), che chiameremo sistema (II).

Per determinare T_{2n} dobbiamo (9) considerare i due sistemi di equazioni che risultano da:

$$\Delta_2 \Phi_n = 0 \qquad h D \Phi_n = \Phi_n .$$

Ora per la funzione U_{2n+1} dalle (9') si ha:

$$\Delta_2 U_{2n+1} = x\left(\Delta_2 \Phi_m + 4 \frac{\partial \Phi_n}{\partial (x^2)}\right)$$

$$D U_{2n+1} = x\left(D\Phi_n + \frac{1}{a^2}\Phi_n\right),$$

e la forma generale di Φ_n è la seguente:

$$\Phi_n = \sum A_{rst}\, x^{2r} y^{2s} z^{2t},$$

dove r, s, t sono numeri interi o nulli. Di qui appare che le equazioni che si deducono da $\Delta_2 T_{2n} = 0$ contengono gli stessi coefficienti che quelle risultanti dall'equazione $\Delta_2 U_{2n+1} = 0$, soltanto moltiplicati per coefficienti numerici diversi; ossia:

Le equazioni del sistema (I) *per* T_{2n} *ed* U_{2n+1} *coincidono, all'infuori dei coefficienti numerici delle incognite.*

Indicando con λ la costante di proporzionalità h relativa alla funzione U_{2n+1}, l'equazione (5) per questa funzione si può scrivere:

$$\lambda D \Phi_n - \left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right)\Phi_n,$$

e quindi se poniamo:

$$\frac{\lambda}{1 - \dfrac{\lambda}{a^2}} = h,$$

quest'equazione diventa identica all'equazione analoga per T_{2n}. Dunque:

Il sistema (II) *per* U_{2n+1} *coincide col sistema* (II) *per* T_{2n} *quando fra le due rispettive costanti di proporzionalità* λ *ed* h *si ponga la relazione lineare:*

$$\lambda h + a^2(\lambda - h) = 0.$$

Possiamo riassumere queste due proprietà dicendo che i due problemi della determinazione di T_{2n} e U_{2n+1} sono algebricamente equivalenti.

Relazioni analoghe si trovano fra i sistemi di equazioni che determinano T_{2n} e quelli che determinano tutti gli altri polinomi parimenti formati con Φ_n.

Difatti troviamo:

$$\Delta_2 U_{2n+2} = y z \left(\Delta_2 \Phi_n + 4 \frac{\partial \Phi_n}{\partial (y^2)} + 4 \frac{\partial \Phi_n}{\partial (z^2)}\right)$$

$$D U_{2n+2} = y z \left[D \Phi_n + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\Phi_n\right].$$

Quindi il primo dei due teoremi precedenti sta ancora e l'equazione (5) si può scrivere, chiamando λ' la costante di proporzionalità,

$$\lambda' D \Phi_n = \left[1 - \lambda'\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]\Phi_n.$$

Perciò può essere ridotta a coincidere colla corrispondente di T_{2n} ponendo fra le costanti λ' ed h la relazione:

$$\lambda' h\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\lambda'-h=0.$$

Sussiste quindi anche il secondo teorema.

Finalmente abbiamo:

$$\Delta_2 T_{2n+3}=xyz\left[\Delta_2\Phi_n+4\left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial(x^2)}+\frac{\partial\Phi_n}{\partial(y^2)}+\frac{\partial\Phi_n}{\partial(z^2)}\right)\right]$$

$$DT_{2n+3}=xyz\left[D\Phi_n+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\Phi_n\right].$$

Di qui appare che il primo teorema sussiste ancora, e che la coincidenza fra i due sistemi (II) per T_{2n} e T_{2n+3} si può stabilire ponendo fra le corrispondenti costanti h ed h' la relazione lineare:

$$h'h\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+h'-h=0.$$

I casi rimanenti, cioè quelli riguardanti le funzioni V_{2n+1}, W_{2n+1}, V_{2n+2}, W_{2n+2}, non hanno bisogno di essere considerati potendo essere dedotti dai precedenti con permutazioni circolari sopra x, y, z e a, b, c.

Concludendo dunque vediamo che, una volta determinata T_{2n}, gli stessi procedimenti algebrici conducono a determinare altre sette funzioni, cioè U_{2n+1}, V_{2n+1}, W_{2n+1} e T_{2n+3}, U_{2n+2}, V_{2n+2}, W_{2n+2}, le quali, come si è visto, sono formate mediante Φ_n. Noi esprimeremo l'affinità che esiste fra queste otto funzioni dicendo che esse sono *dello stesso genere*. Vedremo (§ 4) che la determinazione di T_{2n} dipende da un'equazione algebrica di grado $n+1$; perciò diremo che quelle otto funzioni sono *di genere* $n+1$.

Le armoniche ellissoidiche si possono così riunire in gruppi di $8(n+1)$, la cui legge di formazione è la stessa; di più, introducendo un tale criterio di classificazione, si viene a mettere in evidenza il grado di difficoltà che presenta la loro determinazione.

§ 3. Le funzioni armoniche ellissoidiche di genere 1 e 2.

Come applicazione delle considerazioni precedenti studieremo le funzioni di genere più semplice.

T_0 è, come sappiamo, una costante, e possiamo assumere:

$$T_0 = 1.$$

Conformemente alle (9), (9') avremo allora per le altre sette funzioni di genere 1:

$$U_1 = x \qquad V_1 = y \qquad W_1 = z$$

$$T_3 = x\,y\,z \qquad U_2 = y\,z \qquad V_2 = z\,x \qquad W_2 = x\,y,$$

Queste, come si vede, sono indipendenti dagli assi dell' ellissoide e sono anche armoniche sferiche. Per le corrispondenti costanti di proporzionalità abbiamo:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{a^2} \qquad \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{b^2} \qquad \frac{1}{\nu_1} = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{h_3} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \qquad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \qquad \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \qquad \frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Passando ora alle armoniche di genere 2, abbiamo come forma generale di Φ_1

$$\Phi_1 = A x^2 + B y^2 + C z^2 + E,$$

ove A, B, C, E sono i coefficienti da determinare. Di qui si ricava:

$$\frac{1}{2} D \Phi_1 = A \frac{x^2}{a^2} + B \frac{y^2}{b^2} + C \frac{z^2}{c^2}.$$

Scriveremo la costante di proporzionalità relativa a T_2 sotto la forma $\frac{1}{2} h$, e allora dall' equazione:

$$\frac{1}{2} h D \Phi_1 = \Phi_1,$$

ridotta omogenea moltiplicando E per

$$\Omega = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

si ricavano le seguenti equazioni per determinare A, B, C, E:

$$A(h-a^2)=B(h-b^2)=C(h-c^2)=E.$$

Quindi prendendo, come è lecito, $E=1$, possiamo scrivere:

$$T_2=\frac{x^2}{h-a^2}+\frac{y^2}{h-b^2}+\frac{z^2}{h-c^2}+1. \tag{10}$$

Ora per determinare h basta osservare che, affinchè sia $\Delta_2\Phi_1=0$, deve essere $A+B+C=0$; quindi avremo:

$$\frac{1}{h-a^2}+\frac{1}{h-b^2}+\frac{1}{h-c^2}=0. \tag{10'}$$

Quest'equazione è di 2.° grado in h e si può verificare che le sue radici sono reali e distinte, perchè il suo discriminante Δ si può porre sotto la forma:

$$\Delta=\frac{1}{2}(b^2-c^2)^2+\frac{1}{2}(c^2-a^2)^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)^2,$$

ed è quindi sempre positivo e solo si annulla quando $a=b=c$. Risolvendo poi si trova:

$$h=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\pm\frac{1}{3}\sqrt{\Delta}.$$

Noi possiamo così assumere il sistema delle due equazioni (10), (10') per rappresentare in modo semplice i due polinomi T_2. Del resto nell'espressione esplicita di T_2 i coefficienti hanno i seguenti valori:

$$A=\frac{3}{b^2+c^2-2a^2\pm\sqrt{\Delta}}$$

$$B=\frac{3}{c^2+a^2-2b^2\pm\sqrt{\Delta}}$$

$$C=\frac{3}{a^2+b^2-2c^2\pm\sqrt{\Delta}},$$

e sono quindi funzioni delle tre differenze b^2-c^2, c^2-a^2, a^2-b^2. Perciò i polinomi T_2 sono invariabili per tutte le ellissoidi omofocali a quella che consideriamo.

Le osservazioni fatte circa le relazioni fra T_2 ed U_3 ci portano subito ad assumere per questa funzione l'espressione:

$$U_3=x\left(\frac{x^2}{\lambda-a^2}+\frac{y^2}{\lambda-b^2}+\frac{z^2}{\lambda-c^2}+1\right), \tag{11}$$

e l'equazione a cui deve soddisfare λ si avrà osservando che, affinchè sia soddisfatta l'equazione $\Delta_2 U_3 = 0$, deve essere:

$$\frac{3}{\lambda - a^2} + \frac{1}{\lambda - b^2} + \frac{1}{\lambda - c^2} = 0. \tag{11}$$

Noi possiamo così assumere il sistema delle due equazioni (11), (11′) per rappresentare i due polinomi U_3. Il discriminante Δ_1 della (11′) si può scrivere:

$$\Delta_1 = \Delta + 3(b^2 - c^2),$$

e si comporta quindi come il discriminante Δ della (10′). Si ha poi:

$$\lambda = \frac{1}{5}\left(a^2 + 2(b^2 + c^2)\right) \pm \frac{1}{5}\sqrt{\Delta_1}.$$

Similmente si trova:

$$U_4 = yz\left(\frac{x^2}{\lambda' - a^2} + \frac{y^2}{\lambda' - b^2} + \frac{z^2}{\lambda' - c^2} + 1\right),$$

e per determinare λ':

$$\frac{1}{\lambda' - a^2} + \frac{3}{\lambda' - b^2} + \frac{3}{\lambda' - c^2} = 0.$$

Le espressioni di V_3, W_3, V_4, W_4 si deducono dalle precedenti con permutazioni circolari; in quanto a quella di T_5 si trova subito che dipende da un'equazione identica a quella di T_2. Per cui volendo riassumere i risultati così trovati per le armoniche ellissoidiche di genere 2 possiamo dire:

Le sedici funzioni armoniche ellissoidiche di genere 2 *si possono rappresentare mediante un'unica espressione:*

$$\Phi(h) = \frac{x^2}{h - a^2} + \frac{y^2}{h - b^2} + \frac{z^2}{h - c^2} + 1,$$

nel modo seguente: si ha per le funzioni di 1.ª classe:

$$T_2 = \Phi(h) \qquad T_5 = xyz\Phi(h),$$

dove h deve soddisfare all'equazione di 2.º grado:

$$\frac{1}{h - a^2} + \frac{1}{h - b^2} + \frac{1}{h - c^2} = 0;$$

per le funzioni di 3.° grado, di classe 2.ª, 3.ª, 4.ª:

$$U_3 = x\,\Phi(\lambda) \qquad V_3 = y\,\Phi(\mu) \qquad W_3 = z\,\Phi(\nu),$$

dove λ, μ, ν *devono rispettivamente essere radici delle equazioni di 2.° grado:*

$$\frac{3}{\lambda - a^2} + \frac{1}{\lambda - b^2} + \frac{1}{\lambda - c^2} = 0$$

$$\frac{1}{\mu - a^2} + \frac{3}{\mu - b^2} + \frac{1}{\mu - c^2} = 0$$

$$\frac{1}{\nu - a^2} + \frac{1}{\nu - b^2} + \frac{3}{\nu - c} = 0,$$

e finalmente per le funzioni di 4.° grado, di classe 2.ª, 3.ª, 4.ª si ha:

$$U_4 = y\,z\,\Phi(\lambda') \qquad V_4 = z\,x\,\Phi(\mu') \qquad W_4 = x\,y\,\Phi(\nu'),$$

dove λ', μ', ν' *devono rispettivamente soddisfare le equazioni di 2.° grado:*

$$\frac{1}{\lambda' - a^2} + \frac{3}{\lambda' - b^2} + \frac{3}{\lambda' - c^2} = 0$$

$$\frac{3}{\mu' - a^2} + \frac{1}{\mu' - b^2} + \frac{3}{\mu' - c^2} = 0$$

$$\frac{3}{\nu' - a^2} + \frac{3}{\nu' - b^2} + \frac{1}{\nu' - c^2} = 0.$$

Se indichiamo con h_2, h_5 le costanti di proporzionalità relative a T_2 e T_5, per le quali cioè sono verificate sulla superficie dell'ellissoide le relazioni:

$$h_2\,D\,T_2 = T_2 \qquad h_5\,D\,T_5 = T_5,$$

esse risultano determinate linearmente, in funzione della quantità h dell'equazione quadratica precedente, mediante le relazioni:

$$\frac{1}{h_2} = \frac{2}{h} \qquad \frac{1}{h_5} = \frac{2}{h} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\,.$$

Analogamente indicando con λ_3, μ_3, ν_3 le costanti di proporzionalità relative ad U_3, V_3, W_3 fra esse e le quantità λ, μ, ν abbiamo le relazioni:

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{a^2} \qquad \frac{1}{\mu_3} = \frac{2}{\mu} + \frac{1}{b^2} \qquad \frac{1}{\nu_3} = \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{c^2}\,,$$

e finalmente per le costanti λ'_4, μ'_4, ν'_4 delle U_4, V_4, W_4 abbiamo:

$$\frac{1}{\lambda'_4} = \frac{2}{\lambda'} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{\mu'_4} = \frac{2}{\mu'} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{\nu'_4} = \frac{2}{\nu'} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

La precedente rappresentazione delle armoniche ellissoidiche di genere 2 permette di verificare immediatamente la loro invariabilità rispetto a tutte le ellissoidi omofocali alla data. Difatti tutte le equazioni quadratiche che determinano i valori di h, λ,... sono della forma:

$$\frac{\alpha}{h-a^2} + \frac{\beta}{h-b^2} + \frac{\gamma}{h-c^2} = 0, \tag{12}$$

dove α, β, γ sono costanti positive; quindi se poniamo:

$$a^2 = a'^2 + \delta \qquad b^2 = b'^2 + \delta \qquad c^2 = c'^2 + \delta,$$

ove δ è una costante qualsiasi, le nuove radici h' si dedurranno dalle precedenti colla formola:

$$h' = h - \delta,$$

e si avrà quindi:

$$h - a^2 = h' - a'^2 \qquad h - b^2 = h' - b'^2 \qquad h - c^2 = h' - c'^2.$$

Perciò l'espressione di $\Phi(h)$ non muta.

Dalla (12) poi risulta subito che, se b è il semi asse medio dell'ellissoide, le due radici di ognuna delle equazioni quadratiche precedenti sono rispettivamente compresi fra a^2 e b^2 e fra b^2 e c^2.

§ 4. Caso generale.

Per quanto abbiamo visto al § 2 volendo studiare in generale il sistema delle equazioni che determinano i coefficienti di un'armonica ellissoidica, basterà occuparci dei polinomi T_{2n}, cioè di quelli di 1.ª classe e di ordine pari. I procedimenti algebrici applicabili ad uno di questi lo sono anche agli altri sette delle rimanenti classi e che abbiamo chiamato dello stesso genere.

Indicheremo ora con x_1, x_2, x_3 le variabili indipendenti e quindi potremo rappresentare la forma ω_{2k} coll'espressione:

$$\omega_{2k} = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \cdots \sum_{h_k} a_{h_1 h_2 \dots h_k} x_{h_1}^2 x_{h_2}^2 \dots x_{h_k}^2, \tag{13}$$

dove gli indici $h_1, h_2, \dots h_k$ variano da 1 a 3 e le $a_{h_1 h_2 \dots h_k}$ sono coefficienti indeterminati, il cui valore supporremo indipendente dall'ordine degli indici $h_1, h_2, \dots h_k$.

Nella ω_{2k} il coefficiente di $x_{h_1}^2, x_{h_2}^2, \dots x_{h_k}^2$ sarà quindi rappresentato da $a_{h_1 h_2 \dots h_k}$ moltiplicato per un coefficiente numerico che è lo stesso che compare nel termine simile, quando si sviluppa la potenza $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k$.

Siccome però in seguito dovremo considerare espressioni non indipendenti dall'ordine degli indici, noi rappresenteremo, anche in questo caso, il coefficiente di $x_{h_1}^2 x_{h_2}^2 \dots x_{h_k}^2$ colla notazione:

$$S \cdot a_{h_1 h_2 \dots h_k},$$

intendendo che la somma, indicata con S, debba essere estesa a tutte le permutazioni possibili, e fra loro distinte, degli indici $h_1, h_2, \dots h_k$.

Avremo ora dalla (13):

$$\frac{\partial \omega_{2k}}{\partial x_{h_1}} = \frac{\partial \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)} 2 x_{h_1} \qquad \frac{\partial^2 \omega_{2k}}{\partial x_{h_1}^2} = \frac{\partial^2 \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)^2} 4 x_{h_1}^2 + 2 \frac{\partial \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)},$$

e inoltre:

$$\frac{\partial \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)} = k \sum_{h_2} \sum_{h_3} \cdots \sum_{h_k} a_{h_1 h_2 \dots h_k} x_{h_2}^2 x_{h_3}^2 \dots x_{h_k}^2$$

$$\frac{\partial^2 \omega_{2k}}{\partial (x_{h_1}^2)^2} = k(k-1) \sum_{h_3} \sum_{h_4} \cdots \sum_{h_k} a_{h_1 h_1 h_3 \dots h_k} x_{h_3}^2 x_{h_4}^2 \dots x_{h_k}^2.$$

Quindi, indicando con α_1, α_2, α_3 i semi assi dell'ellissoide, finora rappresentati con a, b, c, sarà:

$$D \omega_{2k} = 2k \sum_{h_1} \cdots \sum_{h_k} \frac{1}{\alpha_{h_1}^2} a_{h_1 \dots h_k} x_{h_1}^2 \dots x_{h_k}^2 \tag{14}$$

$$\Delta_2 \omega_{2k} = 4k(k-1) \sum_{h_2} \cdots \sum_{h_k} a_{h_2 h_2 \dots h_k} x_{h_2}^2 \dots x_{h_k}^2 +$$

$$+ 2k \sum_{h_1} \cdots \sum_{h_k} a_{h_1 h_1 \dots h_k} x_{h_2}^2 \dots x_{h_k}^2. \tag{15}$$

Di qui possiamo ricavare subito le equazioni che devono essere verificate affinchè sia soddisfatta l'equazione di Laplace dalla ω_{2k}. Noi indicheremo con $i_1, i_2, \ldots i_k$ un sistema di indici che, come gli indici $h_1, h_2, \ldots h_k$ possono assumere tutti i valori da 1 a 3, ma che nella formola nella quale compaiono hanno valori fissi, e possono variare solo da una formola all'altra. Queste equazioni saranno allora:

$$2(k-1)S \cdot a_{i_2 i_2 i_3 \ldots i_k} + S \cdot \sum_{h_1} a_{h_1 i_2 i_3 \ldots i_k} = 0, \tag{16}$$

dove $i_2, i_3, \ldots i_k$ è una combinazione qualunque dei numeri 1, 2, 3 presi a k a k. Queste equazioni sono quindi in numero di $\frac{k(k+1)}{2}$ e, come è facile vedere, sono relazioni che legano a tre a tre i coefficienti di φ_{2k}, cioè sono della forma:

$$N_1 a_{1 i_2 i_3 \ldots i_k} + N_2 a_{2 i_2 i_3 \ldots i_k} + N_3 a_{3 i_2 i_3 \ldots i_k} = 0,$$

ove N_1, N_2, N_3 sono coefficienti numerici che dipendono dalla combinazione $i_2, i_3, \ldots i_k$.

La espressione generale della T_{2n} si avrà da quella delle ω_{2k} ponendo:

$$T_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \omega_{2k},$$

e siccome, colle nuove notazioni, si ha:

$$\Omega = \sum_h \frac{x_h^2}{\alpha_h^2},$$

sulla superficie dell'ellissoide, potremo scrivere:

$$T_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \omega_{2k} \Omega^{n-k}.$$

Ora si ha:

$$\Omega^{n-k} = \sum_{h_{k+1}} \sum_{h_{k+2}} \cdots \sum_{h_n} \frac{x_{h_{k+1}}^2 x_{h_{k+2}}^2 \ldots x_{h_n}^2}{\alpha_{h_{k+1}}^2 \alpha_{h_{k+2}}^2 \ldots \alpha_{h_n}^2}, \tag{17}$$

quindi per l'espressione omogenea di T_{2n} sulla superficie dell'ellissoide avremo:

$$T_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h_1} \sum_{h_1} \cdots \sum_{h_n} \frac{a_{h_1 h_2 \ldots h_k}}{\alpha_{h_{k+1}}^2 \alpha_{h_{k+2}}^2 \ldots \alpha_{h_n}^2} x_{h_1}^2 x_{h_2}^2 \ldots x_{h_n}^2.$$

Analogamente avremo:

$$D T_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \Omega^{n-k} D \omega_{2k},$$

e per le (14), (17):

$$D\,T_{2n} = 2\sum_{k=0}^{n}\sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\sum_{h_n}\frac{k}{\alpha_{h_1}^2}\,\frac{a_{h_1 h_2\ldots h_k}}{\alpha_{h_{k+1}}^2\,\alpha_{h_{k+2}}^2\cdots\alpha_{h_n}^2}\,x_{h_1}^2\,x_{h_2}^2\cdots x_{h_n}^2.$$

Stabilite così le espressioni generali di T_{2n}, $D\,T_{2n}$, ridotte omogenee, potremo ottenere il sistema di equazioni che abbiamo chiamato (II) nel § 2, uguagliando i coefficienti dei termini simili nei due membri dell'equazione:

$$\frac{1}{2}\,h_{2n}\,D\,T_{2n} = T_{2n},$$

ove si è scritto $\frac{1}{2}\,h_{2n}$ invece di h_n.

Troviamo così:

$$h_{2n}\,S\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\alpha_{i_1}^2}\,\frac{a_{i_1 i_2\ldots i_k}}{\alpha_{i_{k+1}}^2\,\alpha_{i_{k+2}}^2\cdots\alpha_{i_n}^2} = S\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{i_1 i_2\ldots i_k}}{\alpha_{i_{k+1}}^2\,\alpha_{i_{k+2}}^2\cdots\alpha_{i_n}^2}. \qquad \text{(II)}$$

Le equazioni del sistema (I) poi si avranno subito dalle (16) facendo $k = 1, 2, \ldots n$.

Le espressioni del primo e secondo membro della (II) sono formate secondo una legge abbastanza semplice e importante per studiare l'equazione che determina h_{2n}. Difatti si ha:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{i_1 i_2\ldots i_k}}{\alpha_{i_{k+1}}^2\,\alpha_{i_{k+2}}^2\cdots\alpha_{i_n}^2} = \frac{a_0}{\alpha_{i_1}^2\,\alpha_{i_2}^2\cdots\alpha_{i_n}^2} + \frac{a_1}{\alpha_{i_2}^2\,\alpha_{i_3}^2\cdots\alpha_{i_n}^2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{a_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}}}{\alpha_{i_n}^2} + a_{i_1 i_2\ldots i_n}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\alpha_{i_1}^2}\,\frac{a_{i_1 i_2\ldots i_k}}{\alpha_{i_{k+1}}^2\,\alpha_{i_{k+2}}^2\cdots\alpha_{i_n}^2} = \frac{a_{i_1}}{\alpha_{i_1}^2\,\alpha_{i_2}^2\cdots\alpha_{i_n}^2} + \frac{2}{\alpha_{i_1}^2}\,\frac{a_{i_1 i_2}}{\alpha_{i_3}^2\,\alpha_{i_4}^2\cdots\alpha_{i_n}^2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n-1}{\alpha_{i_1}^2}\,\frac{a_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}}}{\alpha_{i_n}^2} + \frac{n}{\alpha_{i_1}^2}\,a_{i_1 i_2\ldots i_n},$$

per cui, se indichiamo con $A_{i_1 i_2\ldots i_n}$, $B_{i_1 i_2\ldots i_n}$ rispettivamente i due primi membri delle due equazioni precedenti, avremo, per costruirli, le seguenti formole ricorrenti:

$$\left.\begin{aligned} A_{i_1 i_2\ldots i_n} &= a_{i_1 i_2\ldots i_n} + \frac{1}{\alpha_{i_n}^2}\,A_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}} \\ B_{i_1 i_2\ldots i_n} &= \frac{n}{\alpha_{i_1}^2}\,a_{i_1 i_2\ldots i_n} + \frac{1}{\alpha_{i_n}^2}\,B_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

cui conviene aggiungere:

$$A_0 = a_0 \qquad B_0 = 0 \qquad i_0 = 0.$$

Potremo quindi, servendoci delle espressioni ora introdotte, scrivere le (II) nella forma più semplice:

$$h_{2n} S \cdot B_{i_1 i_2 \dots i_n} = S \cdot A_{i_1 i_2 \dots i_n}, \tag{II'}$$

ove l'operazione S si eseguirà facendo la somma di tutte le espressioni differenti che si ottengono dalle precedenti di $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $B_{i_1 i_2 \dots i_n}$, quando si permutano in tutti i modi possibili gli indici $i_1, i_2, \dots i_n$; quindi il segno S potrà essere soppresso quando si ha $i_1 = i_2 = \cdots = i_n$.

Il numero totale dei coefficienti che compaiono in T_{2n} è:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

e le equazioni del sistema (I) sono in numero di

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Altrettanti coefficienti si potranno quindi eliminare dalle equazioni (II), le quali si ridurranno così ad essere omogenee e lineari rispetto ad $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficienti, mantenendo sempre la forma delle equazioni che compaiono nella teoria dei sistemi di due forme bilineari. Il numero di queste equazioni è di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, quindi l'eliminazione dei coefficienti condurrà ad un'equazione della forma (7) per determinare h_{2n}, come si è visto al § 1, la quale in generale è di grado $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Però è facile vedere che la determinazione di h_{2n} si può far dipendere da un'equazione di grado minore. Difatti il problema della determinazione di T_{2n}, come è stato posto da noi, ammette come soluzioni speciali le funzioni $T_{2n-2}, T_{2n-4}, \dots T_2, T_0$; poichè se si suppongono successivamente nulli i coefficienti di $\omega_{2n}, \omega_{2n-2}, \dots$ le nostre equazioni si riducono a quelle che determinano i coefficienti di $\omega_{2n-2}, \omega_{2n-4}, \dots$. Da ciò segue che l'equazione generale per h_{2n} ammetterà per radici anche i valori di $h_{2n-2}, h_{2n-4}, \dots$. Ora siccome queste quantità possono essere definite da equazioni algebriche di grado inferiore, dalla equazione generale di h_{2n}, si dovranno poter separare i fattori che corrispondono a tali radici. Ora h_0 dipende da un'equazione di 1.° grado, h_2 da una di 2.°; quindi dall'equazione di 6.° grado per h_4 si potrà separare un fattore di 3.° grado che darà i valori speciali di h_4 che determinano T_4. In generale si vede che i valori di h_{2n} che determinano i coefficienti di T_{2n} sono dati da un'equazione di grado $n+1$.

Quest'equazione, di grado $n+1$, si può effettivamente costruire col procedimento seguente.

A cagione delle relazioni (18) le equazioni (II') si possono scrivere:

$$h_{2n} S \cdot \left(\frac{n}{\alpha_{i_1}^2} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} + \frac{1}{\alpha_{i_n}^2} B_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \right) = S \cdot \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_n} + \frac{1}{\alpha_{i_n}^2} A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \right),$$

od anche:

$$S \cdot \left(a_{i_1 i_2 \ldots i_n} - n \frac{h_{2n}}{\alpha_{i_1}^2} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \right) + S \cdot \frac{1}{\alpha_{i_n}^2} (A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} - h_{2n} B_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}) = 0.$$

Queste $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni contengono linearmente le $\frac{n(n+1)}{2}$ quantità:

$$S \cdot (A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} - h_{2n} B_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}),$$

e potremo quindi in generale, eliminando queste quantità, ottenere un sistema di $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$, ossia $n+1$, equazioni lineari nei coefficienti di ω_{2n}, che non conterranno più alcuno dei coefficienti di $\omega_{2n-2}, \omega_{2n-4}, \ldots \omega_2, \omega_0$ e che manterranno ancora la forma solita delle equazioni che servono per la riduzione a forma canonica di due forme bilineari. Se a questo sistema aggiungiamo il sistema delle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni (I) a cui devono soddisfare i coefficienti di ω_{2n}, otterremo un sistema di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni lineari ed omogenee negli altrettanti coefficienti di ω_{2n}. Di queste, come si è visto solo $n+1$ contengono linearmente la h_{2n}; per cui uguagliando a zero il determinante di un tale sistema otterremo l'equazione cercata di grado $n+1$ che determina h_{2n}. Concludiamo quindi:

La funzione armonica ellissoidica T_{2n}, e le rimanenti dello stesso genere U_{2n+1}, V_{2n+1}, W_{2n+1} e T_{2n+3}, U_{2n+2}, V_{2n+2}, W_{2n+2}, possono essere costruite risolvendo un'equazione di grado $n+1$.

Vediamo ora, per concludere, come si possa procedere per determinare effettivamente tutti i coefficienti di T_{2n}, o di una delle funzioni dello stesso genere.

Nel sistema primitivo, con opportune combinazioni lineari, come si è visto, è possibile ottenere un sistema di $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni che contengono i soli coefficienti di ω_{2n}, che chiameremo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ $\left(\text{posto } p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$. Indichiamo poi con $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ i rimanenti coefficienti di T_{2n} che entrano in $\omega_{2n-2}, \omega_{2n-4}, \ldots \omega_2, \omega_0$, i quali compariranno nelle rimanenti $q = N - p$ equazioni che completano il sistema, e che potranno scegliersi in modo che, annullando tutti i coefficienti di ω_{2n}, esse costituiscono il sistema delle equazioni che determinano T_{2n-2}. Con N indichiamo il numero totale dei coefficienti di T_{2n}. Il complesso di questi coefficienti può allora considerarsi come definito da un sistema di equazioni della forma seguente:

$$\left.\begin{array}{l}
(h a_{11} - b_{11})\alpha_1 + \cdots + (h a_{1p} - b_{1p})\alpha_p = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(h a_{p1} - b_{p1})\alpha_1 + \cdots + (h a_{pp} - b_{pp})\alpha_p = 0 \\
(h a_{p+1,1} - b_{p+1,1})\alpha_1 + \cdots + (h a_{p+1,p} - b_{p+1,p})\alpha_p + (h a_{p+1,p+1} - b_{p+1,p+1})\beta_1 + \cdots \\
\qquad \cdots + (h a_{p+1,N} - b_{p+1,N})\beta_q = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(h a_{N1} - b_{N1})\alpha_1 + \cdots + (h a_{Np} - b_{Np})\alpha_p + (h a_{N,p+1} - b_{N,p+1})\beta_1 + \cdots \\
\qquad \cdots + (h a_{NN} - b_{NN})\beta_q = 0
\end{array}\right\} \quad (19)$$

. . . .

Il determinante $\Delta_N(h)$ di questo sistema risulta così il prodotto dei due determinanti:

$$D_p(h) = \begin{vmatrix} h a_{11} - b_{11} \ldots & h a_{1p} - b_{1p} \\ \cdots & \cdots \\ h a_{p1} - b_{p1} \ldots & h a_{pp} - b_{pp} \end{vmatrix}$$

$$D_q(h) = \begin{vmatrix} h a_{p+1,p+1} - b_{p+1,p+1} \ldots & h a_{p+1,N} - b_{p+1,N} \\ \cdots & \cdots \\ h a_{N,p+1} - b_{N,p+1} \ldots & h a_{NN} - b_{NN} \end{vmatrix}$$

L'equazione:

$$D_p(h) = 0,$$

è, come si è visto, di grado $n+1$ in h; per ciascuna delle sue radici si potranno allora dalle prime p equazioni (19) ricavare delle espressioni proporzionali ai coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, che indicheremo con $A_1, A_2, \ldots A_p$. Per cui potremo porre:

$$\alpha_1 = s A_1, \qquad \alpha_2 = s A_2, \ldots \qquad \alpha_p = s A_p.$$

Sostituendo questi valori nelle rimanenti equazioni (19) otterremo un sistema di q equazioni lineari, non omogenee, nei q rapporti:

$$\frac{\beta_1}{s}, \qquad \frac{\beta_2}{s}, \ldots \qquad \frac{\beta_q}{s},$$

il cui determinante è $D_q(h)$, e sarà quindi differente da zero, se h non è radice comune di $D_p(h) = 0$ e $D_q(h) = 0$. Avremo quindi risolvendo:

$$\beta_1 = s B_1, \qquad \beta_2 = s B_2, \ldots \qquad \beta_q = s B_q.$$

Tutti i coefficienti di T_{2n} risultano così determinati all'infuori del fattore comune arbitrario s, che effettivamente devono contenere.

Le considerazioni precedenti mostrano anche come si possano separare nell'equazione generale di grado N per h i diversi fattori che corrispondono alle radici che determinano T_{2n}, $T_{2n-2}, \ldots$. Difatti collo stesso procedimento che ci ha condotti alla formola:

$$\Delta_N = D_p \cdot D_q,$$

si potrebbe in D_q separare il fattore che dà le radici per T_{2n-2}, e così di seguito.

§ 5. Le funzioni armoniche ellissoidiche di genere 3.

Le considerazioni del paragrafo precedente risulteranno assai chiarite da un esempio. Proponiamoci di determinare T_4; avremo:

$$T_4 = \omega_4 + \omega_2 + \omega_0,$$

e potremo porre:

$$\omega_4 = a_{11} x^4 + a_{22} y^4 + a_{33} z^4 + 2 a_{23} y^2 z^2 + 2 a_{31} z^2 x^2 + 2 a_{12} x^2 y^2$$

$$\omega_2 = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2$$

$$\omega_0 = a_0 .$$

Le equazioni del sistema (I) sono quattro:

$$\left.\begin{aligned} &3 a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ &a_{12} + 3 a_{22} + a_{23} = 0 \qquad a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ &a_{13} + a_{23} + 3 a_{33} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Quelle del sistema (II) sono sei, e si possono scrivere nel modo seguente:

$$h B_{is} = A_{is} \qquad i,\ s = 1,\ 2,\ 3,$$

dove si ha:

$$A_{ss} = a_{ss} + \frac{1}{\alpha_s^2} A_s \qquad A_{is} = 2 a_{is} + \frac{A_i}{\alpha_s^2} + \frac{A_s}{\alpha_i^2}$$

$$B_{ss} = \frac{2}{\alpha_s^2} a_{ss} + \frac{1}{\alpha_s^2} B_s \qquad B_{is} = \left(\frac{2}{\alpha_s^2} + \frac{2}{\alpha_i^2}\right) a_{is} + \frac{B_s}{\alpha_i^2} + \frac{B_i}{\alpha_s^2}$$

$$A_s = a_s + \frac{a_0}{\alpha_s^2} \qquad B_s = \frac{a_s}{\alpha_s^2}$$

$$i,\ s = 1,\ 2,\ 3 \qquad i == s$$

(colle notazioni del paragrafo precedente, invece di A_{is}, B_{is}, avremmo dovuto scrivere $S \cdot A_{is}$, $S \cdot B_{is}$).

Avremo così due terne di equazioni delle seguenti due forme:

$$a_{ss}\left(1 - \frac{2h}{\alpha_s^2}\right) = \frac{1}{\alpha_s^2} (h B_s - A_s)$$

$$2 a_{is}\left(1 - h\left(\frac{1}{\alpha_s^2} + \frac{1}{\alpha_i^2}\right)\right) = \frac{1}{\alpha_s^2} (h B_i - A_i) + \frac{1}{\alpha_i^2} (h B_s - A_s)$$

L'eliminazione delle tre espressioni $h B_s - A_s$ si ottiene immediatamente osservando che dalle prime tre equazioni si ricava.

$$a_{ss}\left(1 - \frac{2h}{\alpha_s^2}\right)\frac{\alpha_s^2}{\alpha_i^2} + a_{ii}\left(1 - \frac{2h}{\alpha_i^2}\right)\frac{\alpha_i^2}{\alpha_s^2} = \frac{1}{\alpha_s^2} (h B_i - A_i) + \frac{1}{\alpha_i^2} (h B_s - A_s),$$

e quindi confrontando colle rimanenti tre, si ha:

$$a_{ss}\left(1-\frac{2h}{\alpha_s^2}\right)\frac{\alpha_s^2}{\alpha_i^2}+a_{ii}\left(1-\frac{2h}{\alpha_i^2}\right)\frac{\alpha_i^2}{\alpha_s^2}=2a_{is}\left(1-h\left(\frac{1}{\alpha_s^2}+\frac{1}{\alpha_i^2}\right)\right),$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2}a_{22}+\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}a_{33}-2a_{23}=2h\left(\frac{a_{22}}{\alpha_3^2}+\frac{a_{33}}{\alpha_2^2}-a_{23}\left(\frac{1}{\alpha_2^2}+\frac{1}{\alpha_3^2}\right)\right)\\
&\frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2}a_{33}+\frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2}a_{11}-2a_{31}=2h\left(\frac{a_{33}}{\alpha_1^2}+\frac{a_{11}}{\alpha_3^2}-a_{31}\left(\frac{1}{\alpha_3^2}+\frac{1}{\alpha_1^2}\right)\right)\\
&\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}a_{11}+\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}a_{22}-2a_{12}=2h\left(\frac{a_{11}}{\alpha_2^2}+\frac{a_{22}}{\alpha_1^2}-a_{12}\left(\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}\right)\right)
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Queste tre equazioni insieme alle prime tre delle (20) costituiscono il sistema delle sei equazioni che determina i coefficienti di ω_4. L'equazione di 3.° grado, cui soddisfa la h, si potrà avere sotto forma di un determinante di 6.° ordine uguagliando a zero il determinante di tale sistema; oppure anche sotto forma di determinante di 3.° ordine, eliminando dalle (21) tre delle incognite mediante le (20), ed uguagliando a zero il determinante di questo nuovo sistema. Ad esempio, eliminando dalle (21) le a_{11}, a_{22}, a_{33}, si ottiene per h la seguente equazione:

$$\begin{vmatrix}
\alpha_2^4+\alpha_3^4+6\alpha_2^2\alpha_3^2-8h(\alpha_2^2+\alpha_3^2) & \alpha_3^2(\alpha_3^2-2h) & \alpha_2^2(\alpha_2^2-2h)\\
\alpha_3^2(\alpha_3^2-2h) & \alpha_3^2+\alpha_1^2+6\alpha_3^2\alpha_1^2-8h(\alpha_3^2+\alpha_1^2) & \alpha_1^2(\alpha_1^2-2h)\\
\alpha_2^2(\alpha_2^2-2h) & \alpha_1^2(\alpha_1^2-2h) & \alpha_1^2+\alpha_2^2+6\alpha_1^2\alpha_2^2-8h(\alpha_1^2+\alpha_2^2)
\end{vmatrix}=0. \quad (22)$$

Quest'equazione coincide con quella che conviene risolvere per ridurre a forma canonica le due forme quadratiche, i cui determinanti si ottengono dal precedente facendo $h=0$ e $h=\infty$; è facile verificare che queste due forme sono determinate di segno, quindi per un noto teorema di WEIERSTRASS, l'equazione precedente ha tutte le radici reali.

Dal sistema (20), (21) ora considerato possiamo dedurre in funzione di h, delle espressioni proporzionali ai coefficienti di ω_4, che possiamo scrivere:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}=sA_{11}(h) \qquad a_{22}=sA_{22}(h) \qquad a_{33}=sA_{33}(h)\\
&a_{23}=sA_{23}(h) \qquad a_{31}=sA_{31}(h) \qquad a_{12}=sA_{12}(h),
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

ove s è il fattore di proporzionalità. I rimanenti coefficienti di T_4 si potranno ora determinare, all'infuori del fattore s, mediante le quattro equazioni:

$$a_{11} + \frac{a_1}{\alpha_1^2} + \frac{a_0}{\alpha_1^4} = h\left(\frac{2}{\alpha_1^2} a_{11} + \frac{a_1}{\alpha_1^4}\right)$$

$$a_{22} + \frac{a_2}{\alpha_2^2} + \frac{a_0}{\alpha_2^4} = h\left(\frac{2}{\alpha_2^2} a_{22} + \frac{a_2}{\alpha_2^4}\right)$$

$$a_{33} + \frac{a_3}{\alpha_3^2} + \frac{a_0}{\alpha_3^4} = h\left(\frac{2}{\alpha_3^2} a_{33} + \frac{a_3}{\alpha_3^4}\right)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

quando in esse per a_{11}, a_{22}, a_{33} si sostituiscano le loro espressioni (23). Queste equazioni, quando si faccia $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, coincidono con quelle che determinano T_2; il loro determinante coincide quindi, anche nel caso attuale, col determinante delle equazioni di T_2, ed è:

$$D_2(h) = \frac{1}{\alpha_1^2\,\alpha_2^2\,\alpha_3^2}\begin{vmatrix} 1-\frac{h}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_1^2} \\ 0 & 1-\frac{h}{\alpha_2^2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} \\ 0 & 0 & 1-\frac{h}{\alpha_3^2} & \frac{1}{\alpha_3^2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

in esso però al posto di h si deve intendere sostituita una delle radici della (22).

Risolvendo troviamo così:

$$D_2(h)\,a_1 = \frac{s}{\alpha_1^2\,\alpha_2^2\,\alpha_3^2}\begin{vmatrix} \left(\frac{2h}{\alpha_1^2}-1\right)A_{11} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_1^2} \\ \left(\frac{2h}{\alpha_2^2}-1\right)A_{22} & 1-\frac{h}{\alpha_2^2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} \\ \left(\frac{2h}{\alpha_3^2}-1\right)A_{33} & 0 & 1-\frac{h}{\alpha_3^2} & \frac{1}{\alpha_3^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

. . . .

$$D_2(h)a_0 = \frac{s}{\alpha_1^2\,\alpha_2^2\,\alpha_3^2}\begin{vmatrix} 1-\frac{h}{\alpha_1^2} & 0 & 0 & \left(\frac{2h}{\alpha_1^2}-1\right)A_{11} \\ 0 & 1-\frac{h}{\alpha_2^2} & 0 & \left(\frac{2h}{\alpha_2^2}-1\right)A_{22} \\ 0 & 0 & 1-\frac{h}{\alpha_3^2} & \left(\frac{2h}{\alpha_3^2}-1\right)A_{33} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

I coefficienti di T_4 risultano così tutti determinati. Sarebbe facile poi rappresentare ω_4 sotto forma di un unico determinante di 3.° ordine, o trovare, sotto forma di determinante, un'unica relazione lineare che determini $\omega_2+\omega_0$, ecc.; ma non insisteremo su queste espressioni, essendo ben nota la via per arrivarvi.

§ 6. Relazioni fra le funzioni di Lamé e le funzioni armoniche ellissoidiche.

Le formole che legano le coordinate cartesiane x, y, z colle coordinate ellittiche, adottando le notazioni di Weierstrass per le funzioni ellittiche, si possono porre sotto la forma seguente (*):

$$x\sqrt{H} = \sqrt{e_2-e_3}\,\frac{\sigma_1\xi}{\sigma\xi}\,\frac{\sigma_1\eta}{\sigma\eta}\,\frac{\sigma_1\zeta}{\sigma\zeta}$$

$$y\sqrt{H} = \sqrt{e_3-e_1}\,\frac{\sigma_2\xi}{\sigma\xi}\,\frac{\sigma_2\eta}{\sigma\eta}\,\frac{\sigma_2\zeta}{\sigma\zeta}$$

$$z\sqrt{H} = \sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma_3\xi}{\sigma\xi}\,\frac{\sigma_3\eta}{\sigma\eta}\,\frac{\sigma_3\zeta}{\sigma\zeta},$$

ove:

$$H = -(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2), \qquad e_1 > e_2 > e_3,$$

e ξ, η, ζ sono tre parametri, i cui intervalli di variabilità si possono fissare in modo che risulti una corrispondenza univoca fra le terne di valori x, y, z

(*) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, 2.^{e} Partie, Chap. XII.

e ξ, η, ζ. Le equazioni delle tre famiglie di quadriche omofocali $\xi = \text{cost.}$, $\eta = \text{cost.}$, $\zeta = \text{cost.}$ si ottengono immediatamente dalle formole precedenti mediante l'identità:

$$(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u \sigma_1^2 v + (e_3 - e_1)\sigma_2^2 u \sigma_2^2 v + (e_1 - e_2)\sigma_3^2 u \sigma_3^2 v = H \sigma^2 u \sigma^2 v,$$

che sussiste fra le due quaderne di funzioni σ dipendenti rispettivamente dai due argomenti u e v.

L'equazione di LAPLACE colle variabili ξ, η, ζ assume la forma:

$$(\wp\eta - \wp\zeta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\wp\zeta - \wp\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\wp\xi - \wp\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0,$$

per cui, ponendo:

$$u_i = L(\xi) M(\eta) N(\zeta),$$

come è ben noto, risulta soddisfatta ogni qualvolta L, M, N sono integrali dell'equazione di LAMÉ:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = [i(i+1)\wp t + B] w,$$

ove i è un numero intero, B una costante. Per il prodotto $L(\xi)M(\eta)N(\zeta)$ si aggiunge poi la condizione che rappresenti una funzione razionale intera delle coordinate x, y, z.

Le funzioni L, M, N sono le *funzioni di Lamé;* noi dimostreremo ora che le funzioni u_i, ora definite (che sono quelle che abbiamo chiamato: *polinomi di Lamé*) coincidono colle funzioni armoniche ellissoidiche, da noi studiate.

Difatti colle coordinate ξ, η, ζ l'elemento lineare prende la forma:

$$ds^2 = P^2 d\xi^2 + Q^2 d\eta^2 + R^2 d\zeta^2,$$

dove:

$$P^2 = (\wp\xi - \wp\eta)(\wp\xi - \wp\zeta)$$

$$Q^2 = (\wp\eta - \wp\zeta)(\wp\eta - \wp\xi)$$

$$R^2 = (\wp\zeta - \wp\xi)(\wp\zeta - \wp\eta),$$

per cui indicando con dn l'elemento di normale ad uno qualunque degli ellissoidi $\xi = \text{cost.}$, avremo:

$$dn = \sqrt{(\wp\xi - \wp\eta)(\wp\xi - \wp\zeta)}\, d\xi.$$

Sulla superficie dell'ellissoide $\xi = \xi_0$ sarà perciò:

$$\frac{1}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{(\wp\xi_0 - \wp\eta)(\wp\xi_0 - \wp\zeta)}}\frac{L'(\xi_0)}{L(\xi_0)}, \tag{24}$$

dove $L'(\xi) = \frac{dL}{d\xi}$.

D'altra parte, se l'equazione cartesiana dell'ellissoide ξ_0 è:

$$\Omega = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

si ha:

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{D u_i}{\sqrt{\Delta_1 \Omega}},$$

e inoltre per formole note:

$$\Delta_1 \Omega = \frac{(\wp\xi_0 - \wp\eta)(\wp\xi_0 - \wp\zeta)}{(\wp\xi_0 - e_1)(\wp\xi_0 - e_2)(\wp\xi_0 - e_3)},$$

per cui sostituendo nella (24) troviamo:

$$\frac{D u_i}{u_i} = \frac{1}{\sqrt{(\wp\xi_0 - e_1)(\wp\xi_0 - e_2)(\wp\xi_0 - e_3)}}\frac{L'(\xi_0)}{L(\xi_0)}.$$

L'espressione del secondo membro è una costante sull'ellissoide ξ_0 e rappresentandola con $\frac{1}{h_i}$ ritroviamo la formola fondamentale:

$$h_i D u_i = u_i.$$

Ricordando infine dalla teoria delle funzioni di Lamé, che i polinomi u_i sono pari o dispari secondo ciascuna delle variabili x, y, z concludiamo che essi soddisfanno a tutte le condizioni che noi abbiamo posto per le funzioni armoniche ellissoidiche.

Reciprocamente possiamo far vedere che qualunque funzione razionale intera che sulla superficie dell'ellissoide soddisfa all'equazione (5) e nell'interno all'equazione di Laplace, si può ottenere col nostro procedimento. Difatti se la (5) è soddisfatta quando le x, y, z sono legate dalla condizione:

$$\Omega = 1, \tag{25}$$

ciò significa che quella relazione si riduce ad una identità, quando mediante quest'ultima equazione si elimina una delle variabili; cioè sono nulli tutti i coefficienti dell'espressione, formata colle rimanenti due variabili, che in tal modo si ottiene. Ora a queste identità si può arrivare anche riducendo prima u_i e Du_i omogenee mediante la (25) e poi uguagliando a zero i coefficienti di tutti i termini della funzione così costruita. Ciò è appunto quanto noi abbiamo fatto.

Le considerazioni precedenti ci conducono anche a trovare un'espressione generale per le costanti h_i di proporzionalità, cioè:

$$h_i = \sqrt{(\wp \xi_0 - e_1)(\wp \xi_0 - e_2)(\wp \xi_0 - e_3)}\, \frac{L(\xi_0)}{L'(\xi_0)}\,.$$

Agosto 1895.

Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica.

(Di Luigi Bianchi, *a Pisa.)*

I teoremi di cui qui do le dimostrazioni trovansi già, per la massima parte, enunciati nella mia Nota inserita nel vol. 30 degli Atti della R. Accademia di Torino (*). Credo per ciò superfluo riassumere i risultati contenuti nel presente lavoro, a cui quella Nota serve per sè di prefazione.

Soltanto richiamerò l'attenzione sulle ulteriori proprietà qui descritte di quei sistemi tripli ortogonali dello spazio ellittico, di cui fa parte una serie di superficie a curvatura nulla, in particolare sul caso notevole in cui le superficie di questa serie sono rigate.

Avverto inoltre che, per maggiore semplicità delle formole, suppongo in tutto il corso della Memoria la curvatura dello spazio eguale all'unità.

§ 1. Gli scorrimenti nello spazio ellittico.

Mi sia lecito riprodurre dalla citata Nota la parte relativa agli scorrimenti, essendo indispensabile l'aver presenti le proprietà di questi singolari movimenti dello spazio ellittico per studiare le proprietà delle superficie a curvatura nulla, che con quelle strettamente si collegano (**).

« Gli scorrimenti, assimilabili sotto molti rapporti alle ordinarie trasla-
« zioni, possono definirsi per mezzo di una loro proprietà caratteristica con-
« sistente in ciò che tutti i punti, eseguito il movimento, hanno la medesima

(*) Adunanza del 9 giugno 1895.

(**) Veggasi la Memoria di Klein: *Zur nicht-euklidischen Geometrie.* Mathem. Annalen, Bd. 37, pag. 544.

« distanza dalle loro rispettive posizioni iniziali. Nello spazio rappresentativo (*) essi sono le omografie biassiali i cui assi coincidono con due generatrici immaginarie coniugate dell'assoluto. Gli scorrimenti si dividono « in due classi distinte e cioè in scorrimenti destrorsi o sinistrorsi secondochè « gli assi della corrispondente omografia appartengono al primo ovvero al « secondo sistema di generatrici dell'assoluto.

« In uno scorrimento ogni punto si sposta di un tratto costante d sopra « la retta della congruenza lineare avente per assi le due generatrici fondamentali e dualmente ogni piano ruota attorno alla retta della congruenza « in esso contenuta dell'angolo costante $\varphi = \frac{d}{R}$ (**). Ad ogni scorrimento corrisponde così una congruenza che si dirà una congruenza di Clifford.

« Analiticamente gli scorrimenti sono definiti dalle formole seguenti. Essendo x_1, x_2, x_3, x_4 quattro variabili reali legate dalla relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

« la formola:

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2),$$

« definisce appunto l'elemento lineare ds dello spazio ellittico di raggio R. « Ogni movimento in questo spazio è rappresentato da una sostituzione ortogonale a determinante $+1$:

$$x'_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

« sulle quattro variabili x. Per gli scorrimenti valgono in particolare le formole:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4 \\ x'_2 &= Bx_1 + Ax_2 - Dx_3 + Cx_4 \\ x'_3 &= Cx_1 + Dx_2 + Ax_3 - Bx_4 \\ x'_4 &= Dx_1 - Cx_2 + Bx_3 + Ax_4, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(*) La rappresentazione di cui qui si tratta è quella *geodetica* dello spazio ellittico sullo spazio euclideo, che si ottiene mediante la determinazione metrica di Cayley a quadrica fondamentale (assoluto) immaginaria.

(**) Con $\frac{1}{R^2}$ è indicata la curvatura dello spazio ellittico. In seguito, come già ho detto nella prefazione, riterrò costantemente $R = 1$.

« ovvero le altre:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4 \\ x'_2 &= Bx_1 + Ax_2 + Dx_3 - Cx_4 \\ x'_3 &= Cx_1 - Dx_2 + Ax_3 + Bx_4 \\ x'_4 &= Dx_1 + Cx_2 - Bx_3 + Ax_4, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

« secondo che lo scorrimento appartiene all'una o all'altra specie, in ambedue « i casi denotando A, B, C, D quattro costanti, legate dall'unica relazione:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

« Ora supponiamo che, nelle (1) ad esempio, siano x_1, x_2, x_3, x_4 fun- « zioni di una variabile u, sicchè le formole:

$$x_i = x_i(u) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad (3)$$

« ci definiscano una curva; se inoltre i quattro coefficienti A, B, C, D con- « tengono un nuovo parametro variabile che indichiamo con v e poniamo:

$$A = y_1(v), \qquad B = y_2(v), \qquad C = y_3(v), \qquad D = y_4(v), \qquad (4)$$

« sostituendo nelle (1), queste ci definiranno una superficie come luogo della « curva (3) che si muove nello spazio collo scorrimento continuo di prima « specie definito dalle (4). Ma d'altra parte se ordiniamo le nostre formole « rapporto a y_1, y_2, y_3, y_4 scrivendo:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \\ x'_2 &= x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_4 y_3 - x_3 y_4 \\ x'_3 &= x_3 y_1 - x_4 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_4 \\ x'_4 &= x_4 y_1 + x_3 y_2 - x_2 y_3 + x_1 y_4, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

« vediamo che la medesima superficie può anche generarsi collo scorrimento « continuo della curva:

$$y_i = y_i(v) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \qquad (3^*)$$

« lungo la curva (3). La superficie definita dalle (5) potrà dirsi opportuna- « mente una *superficie di scorrimento*. Per definire una tale superficie basta « evidentemente dare, uscenti da un punto, le due curve generatrici (3), (3*). »

§ 2. Le rigate delle congruenze di Clifford.

Dal sistema ∞^2 di raggi di una congruenza di Clifford stacchiamone ad arbitrio una totalità semplicemente infinita; avremo così una *rigata della congruenza*. Ora diciamo che sussiste il teorema:

Qualunque rigata di una congruenza di Clifford è una superficie a curvatura assoluta nulla (*).

E infatti la nostra superficie S ammette un movimento continuo in sè medesima e cioè appunto lo scorrimento secondo la congruenza di Clifford in cui S è immersa. Ne segue che prendendo a linee coordinate $u =$ cost. sulla S le rette e a linee $v =$ cost. le loro traiettorie ortogonali, l'elemento lineare ds della superficie avrà necessariamente la forma che appartiene ad un'ordinaria superficie di rotazione (**), cioè:

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2,$$

essendo $\varphi(u)$ una funzione della sola u. Ma poichè qui le $u =$ cost. sono geodetiche, si ha:

$$\frac{d\varphi}{du} = 0,$$

e però, cangiando il parametro v, risulta semplicemente:

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

ciò che dimostra il teorema.

In particolare se in una congruenza di Clifford si considerano i raggi che si appoggiano ad una retta fissa, questi generano una particolare rigata a curvatura nulla, *la superficie di Clifford,* che possiede un doppio sistema di rette ed ammette quindi due distinti scorrimenti fra loro permutabili. Da

---

(*) Per una superficie dello spazio ellittico distinguiamo la curvatura *assoluta* K dalla *relativa* k. La prima è la curvatura che compete alla forma differenziale quadratica che ne fornisce il quadrato dell'elemento lineare. La seconda, che eguaglia il prodotto delle curvature principali ridotte, è legata alla prima dalla relazione:

$$k = K - \frac{1}{R^2}\,.$$

(**) Veggasi per es. il n.° 101, pag. 158 delle mie *Lezioni di geometria differenziale.* (Pisa, Spörri, 1894.)

questa ultima circostanza CLIFFORD traeva appunto la dimostrazione del teorema che alla sua superficie compete il valore zero per la curvatura (*). Ma, come sopra si è visto, ciò discende già dal fatto che la superficie ammette un movimento continuo in sè stessa, durante il quale le geodetiche di un sistema strisciano sopra sè stesse.

Dimostreremo in seguito (vedi § 6) che le rigate delle congruenze di CLIFFORD sono le uniche rigate a curvatura nulla. Intanto possiamo già dare le formole più generali che definiscono una tale rigata. Osserviamo per ciò che due congruenze di CLIFFORD della medesima specie sono sovrapponibili, onde segue che le formole (1), relative ad uno scorrimento di prima specie d'ampiezza v, possono porsi, a meno di movimenti, sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos v - x_2 \operatorname{sen} v \\ x'_2 &= x_1 \operatorname{sen} v + x_2 \cos v \\ x'_3 &= x_3 \cos v - x_2 \operatorname{sen} v \\ x'_4 &= x_3 \operatorname{sen} v + x_4 \cos v. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Supponendo che in queste formole x_1, x_2, x_3, x_4 designino quattro funzioni di una variabile u legate dalla relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

e del resto arbitrarie, avremo definita la più generale rigata di una congruenza di prima specie di CLIFFORD. Analogamente dicasi per le congruenze di seconda specie. Senza particolarizzare la rigata (6), possiamo assumerne a profilo generatore la sezione fatta col piano $x_4 = 0$, con che le formole si presentano sotto la forma data nel n.° 4 della mia Nota citata. Possiamo di più supporre che a parametro u si prenda l'arco del profilo generatore e allora le funzioni x_1, x_2, x_3, x_4 verranno inoltre legate dalla relazione:

$$\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{du}\right)^2 + \left(\frac{dx_4}{du}\right)^2 = 1.$$

L'elemento lineare della superficie assume in conseguenza la forma:

$$ds^2 = du^2 + 2U du\, dv + dv^2,$$

(*) Cfr. KLEIN loc. cit., come anche le litografie delle *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie* (1889-90).

dove si è posto:

$$U = \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{du} & \frac{dx_2}{du} \end{matrix} + \begin{matrix} x_3 & x_4 \\ \frac{dx_3}{du} & \frac{dx_4}{du} \end{matrix}$$

Verifichiamo ora subito la proprietà già dimostrata che la curvatura è nulla. E infatti ne risulta:

$$ds^2 = (1 - U^2)du^2 + (Udu + dv)^2.$$

§ 3. Formole fondamentali per la teoria delle superficie (*).

Come nella geometria euclidea, così nella ellittica (e nella iperbolica) ad ogni superficie S appartengono due forme differenziali quadratiche fondamentali, dalle quali dipendono tutte le proprietà inerenti alla forma della superficie, astrazione fatta dalla sua posizione nello spazio.

Se indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate di un punto mobile della S espresse in funzione di due parametri u, v e con

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3,\quad X_4,$$

le coordinate del piano tangente, ovvero le coordinate del polo di questo piano rispetto all'assoluto, le X sono determinate dalle equazioni simultanee (**):

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

$$\sum Xx = 0, \qquad \sum X^2 = 1.$$

Le due forme fondamentali da considerarsi sono allora le seguenti:

$$ds^2 = \sum dx^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$-\sum dx\,dX = Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2.$$

Fra i loro sei coefficienti sussistono, come in geometria euclidea, tre relazioni, le quali esprimono le condizioni necessarie e sufficienti, perchè quelle due forme appartengano come forme fondamentali ad una superficie.

(*) Il lettore troverà la dimostrazione delle formole date nel presente paragrafo nei due capitoli aggiunti alla traduzione tedesca delle mie *Lezioni di geometria differenziale.*

(**) Propriamente le X risultano determinate a meno del segno, ma un cangiamento simultaneo del segno nelle coordinate di un punto riporta, nello spazio ellittico *semplice,* al punto stesso.

Queste relazioni sono date in primo luogo dalle *equazioni di Codazzi*, che si conservano precisamente le stesse come in geometria euclidea, e noi scriveremo qui sotto la seconda forma (*):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}-\\
&\qquad\qquad -2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}+\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}=0\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}-\\
&\qquad\qquad -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}+\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

In secondo luogo abbiamo la equazione di Gauss che, a causa della curvatura $K_0=+1$ dello spazio attuale, assume la forma modificata:

$$\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}=K-1, \qquad (B)$$

dove K indica la curvatura della prima forma fondamentale, cioè la curvatura assoluta della superficie S.

Viceversa, se le due forme:

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

$$Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2,$$

soddisfano le equazioni (A) e (B), esiste una superficie dello spazio ellittico, *perfettamente determinata di forma a meno di movimenti nello spazio,* che le ammette per forme fondamentali.

Per determinare poi le x, X in funzione di u, v abbiamo allora le seguenti equazioni differenziali che valgono pei quattro valori:

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

dell'indice i:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}&=\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v}-Ex_i+DX_i\\
\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v}&=\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v}-Fx_i+D'X_i\\
\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}&=\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v}-Gx_i+D''X_i
\end{aligned}\right\} \quad (C)$$

(*) *Lezioni*, ecc., pag. 91.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_i}{\partial u} &= \frac{FD'-GD}{EG-F^2}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{FD-ED'}{EG-F^2}\frac{\partial x_i}{\partial v}\\ \frac{\partial X_i}{\partial v} &= \frac{FD''-GD'}{EG-F^2}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{FD'-ED''}{EG-F^2}\frac{\partial x_i}{\partial v}.\end{aligned}\right\} \qquad (D)$$

Si osserverà che, formalmente, soltanto le formole del primo gruppo (C) differiscono dalle corrispondenti in geometria euclidea pei termini additivi:

$$-Ex_i, \qquad -Fx_i, \qquad -Gx_i.$$

La superficie S' descritta dal polo del piano tangente a S si dirà la *superficie polare* di S. Essa può anche definirsi come la superficie parallela a S alla distanza di un quadrante.

Se indichiamo con

$$ds'^2 = E'du^2 + 2F'du'dv' + G'dv^2,$$

la prima forma di S', siccome la relazione fra S, S' è manifestamente invertibile, varranno ancora le formole dedotte dalle (A), (B), (C), (D), col sostituire rispettivamente ad

$$E, \quad F, \quad G,$$

i coefficienti (*)

$$E', \quad F', \quad G'.$$

§ 4. Formole di Frenet.

Insieme alle formole sopra riportate dobbiamo utilizzare nel seguito le *formole di Frenet* per la teoria delle curve in geometria ellittica. Data una curva C nello spazio ellittico, abbiamo da considerare in ogni suo punto, come nell'ordinaria geometria, le tre direzioni principali e cioè la tangente, la normale principale e la binormale. Alla curva C compete poi in ogni suo punto una certa *flessione* ed una certa *torsione*. La flessione $\frac{1}{\rho}$ si misurerà sempre in valore assoluto, cioè si assumerà ρ positivo, mentre alla torsione $\frac{1}{T}$ si at-

(*) Le formole del presente paragrafo, nel caso speciale di un sistema coordinato (u, v) ortogonale, furono date la prima volta dal Fibbi nella Memoria: *I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazi di curvatura costante* (Annali della Scuola Normale di Pisa, vol. 7.°, 1895).

tribuirà anche un segno che dipenderà dall'essere nel punto la curva destrorsa o sinistrorsa (*).

Indicando con

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

le coordinate di un punto mobile sopra C, espresse in funzione dell'arco u, denotiamo con

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4,$$

i coseni di direzione della tangente, ossia le coordinate del piano normale e similmente con

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \eta_4.$$

i coseni di direzione della normale principale, infine con

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \zeta_4,$$

quelli della binormale.

Valgono allora le seguenti formole:

$$\frac{dx_i}{du} = \xi_i, \qquad \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\eta_i}{\rho} - x_i, \qquad \frac{d\eta_i}{du} = -\frac{\xi_i}{\rho} - \frac{\zeta_i}{T}, \qquad \frac{d\zeta_i}{du} = \frac{\eta_i}{T} \qquad (E)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

Esse si stabiliscono in modo simile alle formole di Frenet in geometria euclidea, delle quali qui fanno le veci (**).

Notiamo soltanto la importante conseguenza che da queste deriva col teorema:

Una curva C è pienamente determinata di forma dalle espressioni dei raggi ρ, T di prima e seconda curvatura in funzione dell'arco u.

Il lettore ricostruirà facilmente la dimostrazione affatto analoga alla corrispondente in geometria euclidea (***).

(*) Cfr. *Lezioni*, ecc., pag. 11.

(**) Se la curvatura K_0 dello spazio fosse $+\frac{1}{R^2}$ esse si scriverebbero:

$$\frac{dx_i}{du} = \frac{\xi_i}{R}, \qquad \frac{d\xi_i}{du} = \frac{\eta_i}{\rho} - \frac{x_i}{R}$$

$$\frac{d\eta_i}{du} = -\frac{\xi_i}{\rho} - \frac{\zeta_i}{T}. \qquad \frac{d\zeta_i}{du} = \frac{\eta_i}{T}.$$

(***) *Lezioni*, ecc., pag. 12.

§ 5. Curve a torsione costante.

Consideriamo la superficie rigata luogo delle binormali a una curva C. Indichiamo con v la lunghezza della binormale contata a partire da C e le coordinate x'_i dell'estremo saranno date dalle formole:

$$x'_i = x_i \cos v + \zeta_i \operatorname{sen} v. \tag{7}$$

Da queste, derivando e tenendo conto delle formole (E) di Frenet, si trae per l'elemento lineare ds' della superficie:

$$ds'^2 = dv^2 + \left\{\cos^2 v + \frac{1}{T^2} \operatorname{sen}^2 v\right\} du^2. \tag{8}$$

Se si suppone $T = \text{cost.}$ l'elemento lineare (8) appartiene ad una superficie di rotazione di cui le $v = \text{cost.}$ sono i meridiani, onde il teorema:

Le superficie delle binormali delle curve a torsione costante sono applicabili sopra superficie di rotazione, le generatrici distendendosi sui meridiani.

Inversamente si può dimostrare che queste rigate sono le uniche applicabili sopra superficie di rotazione *in guisa che ai meridiani corrispondano le generatrici*, risultato importante, perchè con esso viene a precisarsi il caso d'eccezione al teorema inverso di Weingarten in geometria ellittica (*).

(*) Accenniamo qui soltanto alla dimostrazione. Sia:

$$ds^2 = dv^2 + \varphi^2(v)\, du^2,$$

l'elemento lineare di una rigata di cui le $u = \text{cost.}$ siano le generatrici e però assintotiche, onde:

$$D'' = 0.$$

Le formole di Codazzi dànno:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\varphi}\right) + 2\frac{D'}{\varphi} \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} = 0,$$

e l'equazione di Gauss:

$$\frac{D'^2}{\varphi^2} = \frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Dalla prima integrando segue:

$$\frac{D'}{\varphi} = \frac{C}{\varphi^2} \quad (C \text{ cost.}),$$

e sostituendo nella seconda, coll'integrare di nuovo si otterrà per il ds^2 precisamente l'espressione (8) del testo.

Ma qui a noi interessa il caso particolare in cui:

$$T^2 = 1,$$

cioè la torsione della curva eguaglia in valore assoluto la curvatura dello spazio. Allora la (8) ci dà il teorema:

La superficie luogo delle binormali ad ogni curva di torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ *è una rigata a curvatura nulla.*

È facile ora dimostrare il teorema inverso:

In ogni superficie rigata a curvatura nulla le traiettorie ortogonali delle generatrici sono curve congruenti a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$.

L'elemento lineare di una tale rigata riferita alle generatrici v e alle loro traiettorie ortogonali u sia infatti:

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Poichè le v sono assintotiche sarà:

$$D = 0,$$

e inoltre, a causa di $K = 0$, per l'equazione (B) di Gauss:

$$D' = \sqrt{G}.$$

La prima equazione (A) di Codazzi dà quindi:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

onde deduciamo che anche le $u =$ cost, sono geodetiche e però ciascuna di esse ha per binormali le generatrici. Ma allora basta ricorrere alla nostra formola (8) per accertarsi che, essendo $K = 0$ e le linee u, v geodetiche, deve aversi:

$$T^2 = 1.$$

Che inoltre le dette traiettorie ortogonali siano tutte fra loro congruenti risulta da ciò che esse si corrispondono ad archi eguali e calcolando la loro flessione si trova che essa è la stessa in punti corrispondenti, mentre anche la torsione ha lo stesso valore ± 1. Dal teorema alla fine del § 4 segue quindi la verità della nostra asserzione.

§ 6. Le rigate a curvatura nulla.

Dimostriamo ora che le superficie ultimamente considerate sono rigate di una congruenza di Clifford, dopo di che, combinandovi il risultato ottenuto al paragrafo precedente, avremo stabilito il teorema già annunciato al § 2:

Qualunque rigata a curvatura nulla è una rigata di una congruenza di Clifford.

Se consideriamo infatti una superficie (7) luogo delle binormali di una curva a torsione ± 1, facilmente troviamo per le coordinate X_1, X_2, X_3, X_4 del piano tangente le formole:

$$X_i = \eta_i \cos v - \xi_i \operatorname{sen} v, \tag{9}$$

onde pei coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale si calcolano i valori:

$$D = \frac{1}{\rho}, \qquad D' = 1, \qquad D'' = 0. \tag{10}$$

Di qui segue che cangiando v in $v + c$, essendo c una costante arbitraria, tanto la prima che la seconda forma fondamentale della superficie restano inalterate e però (§ 3) esiste un movimento continuo di tutto lo spazio, pel quale la superficie scorre in sè stessa. Ma di più tutte le generatrici strisciando sopra sè stesse, il movimento è di necessità uno scorrimento, il che dimostra quanto sopra è asserito.

Adottando la definizione di Clifford per il *parallelismo* di due rette in geometria ellittica, possiamo anche enunciare il nostro risultato così:

Le binormali di ogni curva a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ *sono tutte rette fra loro parallele nel senso di Clifford.*

Aggiungiamo che, a seconda del segno della torsione, il parallelismo sarà destrorso o sinistrorso.

Consideriamo ora in una rigata a curvatura nulla le assintotiche non rettilinee. Per le (10) avremo immediatamente l'equazione in termini finiti di queste assintotiche sotto la forma:

$$2v + \int \frac{du}{\rho} = \text{cost.}$$

Osservando poi che per una tale curva i coseni di direzione della binormale sono precisamente le X_i date dalle (9) e applicando le ultime formole (E) di Frenet, stabiliremo subito il teorema:

In ogni rigata a curvatura nulla le assintotiche non rettilinee sono (come le traiettorie ortogonali delle generatrici) curve a torsione costante ± 1.

Questo del resto non è che un caso particolare del teorema di Enneper in geometria ellittica.

È facile stabilire inversamente che ogni curva C a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ appartiene, come curva assintotica, ad ∞^1 superficie rigate a curvatura nulla. Ritenendo per la curva C le notazioni del § 4 e ponendo:

$$\sigma = \int \frac{du}{\rho},$$

le superficie richieste si troveranno date dalle formole:

$$x'_i = x_i \cos v + (\xi_i \cos\sigma - \eta_i \operatorname{sen}\sigma) \operatorname{sen} v, \tag{11}$$

il che dà per l'elemento lineare della superficie riferita alle assintotiche u, v:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\sigma\, du\, dv + dv^2. \tag{12}$$

§ 7. La superficie di Clifford.

Esaminiamo ora il caso particolare della superficie di Clifford, quando cioè anche le assintotiche del secondo sistema sono rettilinee. Possiamo ottenere le formole relative dalle (11) supponendo che la curva C sia una retta, a cui attribuiamo la torsione costante $\frac{1}{T} = 1$. Basterà per ciò prendere i valori delle

$$x_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad \zeta_i,$$

in guisa da soddisfare le formole (E) di Frenet in cui si faccia:

$$\frac{1}{\rho} = 0, \qquad \frac{1}{T} = 1.$$

Prendiamo ad esempio:

$$\begin{array}{llll}
x_1 = \cos u & x_2 = \operatorname{sen} u & x_3 = 0 & x_4 = 0 \\
\xi_1 = -\operatorname{sen} u & \xi_2 = \cos u & \xi_3 = 0 & \xi_4 = 0 \\
\eta_1 = 0 & \eta_2 = 0 & \eta_3 = \cos u & \eta_4 = \operatorname{sen} u \\
\zeta_1 = 0 & \zeta_2 = 0 & \zeta_3 = \operatorname{sen} u & \zeta_4 = -\cos u,
\end{array}$$

e per definire la superficie di Clifford riferita alle assintotiche u, v avremo dalle (11) le formole:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos u \cos v - \cos\sigma \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ x_2 &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos\sigma \cos u \operatorname{sen} v \\ x_3 &= \operatorname{sen}\sigma \cos n \operatorname{sen} v \\ x_4 &= \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

essendo qui σ una costante arbitraria e per l'elemento lineare varrà la formola (12):

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\sigma\, du\, dv + dv^2.$$

I coefficienti della seconda forma fondamentale della superficie di Clifford hanno i valori:

$$D = 0, \qquad D' = \operatorname{sen}\sigma, \qquad D'' = 0.$$

La superficie di Clifford ha quindi costanti ambedue i raggi principali di curvatura, circostanza che si rende anche manifesta dall'esistenza di due distinti scorrimenti della superficie in sè stessa. Aggiungiamo che la proprietà di avere costanti i raggi principali di curvatura appartiene soltanto alla superficie di Clifford e alla sfera.

Le traiettorie ortogonali delle generatrici sono curve a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ (§ 5), ma di più attualmente anche la loro flessione è costante. E invero la formola:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2},$$

che anche in geometria ellittica dà la flessione della geodetica, spiccata nella direzione fissata dal rapporto $\frac{dv}{du}$, dimostra che per le dette traiettorie ortogonali, le cui equazioni in termini finiti sono:

$$v + u\cos\sigma = \text{cost.}$$
$$u + v\cos\sigma = \text{cost.},$$

si avrà:

$$\frac{1}{\rho} = \cot\sigma.$$

Per ciò le formole (13), dove si faccia:

$$v = -u\cos\sigma,$$

dànno la curva coi raggi di curvatura costanti:

$$\rho = \operatorname{tg}\sigma, \qquad T = 1.$$

Consideriamo ora le linee di curvatura della superficie di Clifford, le cui equazioni in termini finiti sono:

$$v - u = \text{cost.}, \qquad v + u = \text{cost.}$$

Esse sono linee geodetiche e però in piani normali alla superficie; di più poichè i raggi di curvatura sono costanti esse sono circoli, tutti quelli di un medesimo sistema avendo egual raggio. In fine si osserverà che il luogo dei centri dei circoli di un sistema è una retta normale a tutti i loro piani (*), sicchè la superficie di Clifford è suscettibile della semplice generazione seguente che non sembra osservata:

Un circolo di raggio costante (arbitrario) il cui centro percorra una retta, restando il piano del circolo sempre normale alla retta descrive una superficie di Clifford.

(*) Tutte le proprietà ora descritte possono leggersi facilmente nelle (13), dalle quali facendo per es. $v = u$ risulta:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - (1 + \cos\sigma)\operatorname{sen}^2 u \\ x_2 &= (1 + \cos\sigma)\operatorname{sen} u \cos u \\ x_3 &= \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} u \cos u \\ x_4 &= \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}^2 u. \end{aligned}\right\}$$

Di qui si traggono le due formole:

$$x_2 \operatorname{sen}\sigma - x_3(1 + \cos\sigma) = 0$$

$$x_1 \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2} + x_4 \cos\frac{\sigma}{2} = \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2},$$

la prima delle quali dimostra che la linea di curvatura $v = u$ è piana, la seconda che tutti i suoi punti distano dal punto fisso:

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}, \quad 0, \quad 0, \quad \cos\frac{\sigma}{2}\right),$$

di questo piano della lunghezza costante:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2} \quad \text{ecc. ecc.}$$

§ 8. Le eliche in geometria ellittica.

Le proprietà delle rigate a curvatura nulla descritte nei paragrafi precedenti ravvicinano queste superficie della geometria ellittica ai *cilindri* della geometria euclidea, in particolare la superficie di Clifford al cilindro circolare retto.

Proseguiremo ancora queste analogie col definire come *eliche* della geometria ellittica quelle curve tracciate sopra le rigate a curvatura nulla, che ne tagliano sotto angolo costante le generatrici, che sono cioè geodetiche della superficie. Per studiare le nostre curve consideriamo una tale rigata come luogo delle binormali ad una curva C di torsione $\frac{1}{T}=1$, per la quale riteniamo le solite notazioni (§ 4). Le coordinate di un punto variabile sull'elica C' saranno date dalle formole:

$$x'_i = x_i \cos v + \zeta_i \operatorname{sen} v,$$

dove si ponga:

$$v = u \operatorname{tg} \alpha \qquad (\alpha \text{ cost.}).$$

Derivando coll'aver riguardo alle formole di Frenet e all'ipotesi $T=1$ e indicando cogli accenti tutti gli elementi relativi a C', troviamo in primo luogo:

$$du' = \frac{du}{\cos\alpha},$$

indi:

$$\xi'_i = -x \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} v + \xi \cos\alpha \cos v + \eta \cos\alpha \operatorname{sen} v + \zeta \operatorname{sen}\alpha \cos v.$$

Con una nuova derivazione si trovano le formole:

$$\left.\begin{aligned} \eta'_i &= \eta_i \cos v - \xi_i \operatorname{sen} v \\ \frac{1}{\rho'} &= \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Ne seguono le altre:

$$\zeta'_i = -x \cos\alpha \operatorname{sen} v - \xi \operatorname{sen}\alpha \cos v - \eta \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} v + \zeta \cos\alpha \cos v,$$

che derivate dànno:

$$\frac{1}{T'} = \cos 2\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{\rho} \quad (*). \tag{b}$$

(*) Le formole (*a*), (*b*) si potrebbero anche scrivere subito come conseguenze delle formole generali che dànno la curvatura e la torsione di una linea geodetica di una superficie.

Eliminando ρ fra le (a), (b) si ottiene:

$$\frac{1}{T'} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\rho'} = 1,$$

ovvero:

$$\rho' \left(\frac{1}{T'} - 1 \right) = \text{cost.}$$

come relazione caratteristica fra i raggi di prima e seconda curvatura di un'elica in geometria ellittica.

Osserviamo che dalle (a), (b) risulta come per ρ costante siano costanti anche ρ' e T' e dipendentemente dai valori di ρ e di α possono ricevere valori ad arbitrio. Se ne deduce il teorema corrispondente a quello di Puiseux in geometria euclidea:

Le curve che in geometria ellittica hanno costanti ambedue i raggi di curvatura sono le eliche (geodetiche) della superficie di Clifford.

Per avere dunque la curva più generale a raggi di curvatura costanti basterà porre nelle (13) § 7

$$v = ku \qquad (k \text{ cost.}).$$

Si osserverà che se k è commensurabile la elica corrispondente è algebrica.

§ 9. Le superficie generali a curvatura nulla.

Andiamo ora a trattare delle superficie generali a curvatura nulla dello spazio ellittico, rigate o no. Dovremo perciò applicare le formole fondamentali date al § 3.

Per una superficie S a *curvatura assoluta* $K = 0$, la equazione (B) di Gauss (§ 3) ci dà:

$$\frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2} = -1.$$

Le linee assintotiche della superficie sono quindi reali e distinte e assumendole a linee coordinate u, v, avremo:

$$D = 0, \qquad D' = \sqrt{E G - F^2}, \qquad D'' = 0.$$

Sostituendo questi valori nelle equazioni (A) di Codazzi, otteniamo:

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

ossia (cfr. *Lezioni*, ecc., n.° 67, pag. 126):

$$\frac{\partial E}{\partial v}=0, \qquad \frac{\partial G}{\partial u}=0,$$

e cangiando i parametri u, v potremo fare senz'altro:

$$E=1, \qquad G=1.$$

Così per l'elemento lineare della superficie avremo:

$$ds^2=du^2+2\cos\theta\, du\, dv+dv^2,$$

essendo θ l'angolo racchiuso dalle linee assintotiche. Ma poichè deve essere $K=0$ ne risulta:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v}=0,$$

quindi:

$$\theta=U+V,$$

indicando U una funzione di u soltanto e V una funzione di v. Abbiamo dunque il risultato:

L'elemento lineare di una superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico, riferita alle sue linee assintotiche u, v, assume la forma:

$$ds^2=du^2+2\cos(U+V)du\,dv+dv^2. \tag{14}$$

Viceversa, prese ad arbitrio le due funzioni U, V di u, v rispettivamente, esiste una corrispondente superficie a curvatura nulla coll'elemento lineare (14), *le u, v essendo le assintotiche.*

L'ultima parte del teorema si dimostra subito osservando che col prendere:

$$D=0, \qquad D'=\operatorname{sen}(U+V), \qquad D''=0,$$

si soddisfano le equazioni di Codazzi.

Dalla forma (14) dell'elemento lineare segue poi il teorema (cfr. *Lezioni*, ecc., loc. cit.):

In ogni quadrilatero curvilineo racchiuso sulla superficie da due assintotiche del primo e due del secondo sistema gli archi opposti hanno eguale lunghezza.

Si aggiunga che: *La somma degli angoli di un tale quadrilatero è eguale a quattro retti.*

E infatti se il quadrilatero è racchiuso dalle due coppie di assintotiche:

$$u = u_0 \qquad u = u_1$$
$$v = v_0 \qquad v = v_1,$$

e con U_0, U_1; V_0, V_1 indichiamo i valori che rispettivamente assumono su di esse U, V, la detta somma è data da:

$$U_0 + V_0 + U_1 + V_1 + \pi - (U_0 + V_1) + \pi - (U_1 + V_0) = 2\pi.$$

§ 10. Le superficie a curvatura nulla come superficie di scorrimento.

Secondo il teorema di Enneper, le assintotiche di un medesimo sistema di una nostra superficie S hanno tutte la torsione

$$\frac{1}{T} = \pm 1,$$

valendo l'uno o l'altro segno a seconda che l'assintotica appartiene al primo o al secondo sistema.

Di una di queste assintotiche, per es.:

$$u = u_0,$$

consideriamo la flessione $\frac{1}{\rho_{u_0}}$, la quale, per essere la linea assintotica, coincide colla curvatura geodetica ed è data (salvo il segno) da:

$$\frac{1}{\rho_{u_0}} = \frac{dV}{dv} = V',$$

valore indipendente da u_0. Ne segue che tutte le linee:

$$u = \text{cost.},$$

avendo le medesime espressioni pei raggi di prima e seconda curvatura in funzione dell'arco v, sono fra loro congruenti (§ 4). Lo stesso vale naturalmente per le assintotiche del secondo sistema.

Nel movimento continuo che porta una assintotica a coincidere successivamente con tutte quelle del medesimo sistema i vari punti dell'assintotica descrivono, pel § 9, archi di assintotica dell'altro sistema di eguale lunghezza, onde è facile concludere che il movimento stesso è uno scorrimento.

Ma per stabilire questo risultato in tutto rigore basterà che ci appoggiamo sul teorema:

Le tangenti condotte per i punti di una assintotica $u=u_0$ di una superficie a curvatura nulla alle assintotiche v dell'altro sistema sono rette fra loro parallele (nel senso di Clifford).

La dimostrazione di questo teorema risulta facilmente dall'applicare le formole del § 3 al caso nostro. E infatti considerando la rigata generata da quelle tangenti, basterà provare (pel § 6) che essa è a curvatura nulla. Ora indicando con t la lunghezza del tratto di generatrice contata a partire da $u=u_0$, per le coordinate x'_i dell'estremo avremo:

$$x'_i = x_i \cos t + \frac{\partial x_i}{\partial u} \operatorname{sen} t,$$

ove in x_i e $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ si faccia $u=u_0$. Derivando coll'aver riguardo alla media delle (C) § 3, troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'_i}{\partial v} &= \frac{\partial x_i}{\partial v} \cos t + \left\{ \operatorname{sen}(U_0+V) X_i - \cos(U_0+V) x_i \right\} \operatorname{sen} t \\
\frac{\partial x'_i}{\partial t} &= - x_i \operatorname{sen} t + \frac{\partial x_i}{\partial u} \cos t,
\end{aligned}\right\}$$

avendo al solito indicato con U_0 il valore di U per $u=u_0$.

Per l'elemento lineare della rigata ne segue subito:

$$d s'^2 = \sum d x_i'^2 = d v^2 + 2 \cos(U_0+V) d v\, d t + d t^2,$$

formola che mette appunto in evidenza l'avere la rigata nulla la curvatura.

Se ritorniamo ora alla considerazione del movimento infinitesimo che porta un'assintotica u nella posizione infinitamente vicina, vediamo che tutti i suoi punti si muovono di tratti eguali secondo direzioni parallele e però il movimento stesso è uno scorrimento. Possiamo quindi enunciare il risultato finale:

Le superficie a curvatura nulla dello spazio ellittico sono superficie di scorrimento che hanno per curve generatrici due curve a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$ eguale ed opposta.

Aggiungiamo poi che, essendo le due funzioni U, V affatto arbitrarie, potremo scegliere le due curve generatrici C, C' ad arbitrio, purchè l'una sia a torsione $+1$, l'altra a torsione -1. Basterà allora collocare C, C' nello spazio in guisa che escano da un medesimo punto, avendovi a comune il piano osculatore, ma tangenti distinte. Di poi dando alla C, lungo la C', uno scorrimento destrorso o sinistrorso a seconda del segno della sua torsione, si genererà una superficie a curvatura nulla.

Si noti poi che i risultati dei §§ 1 e 5 ci pongono in grado di assegnare, con sole quadrature, tutte le curve a torsione ± 1 e quindi anche tutte le superficie a curvatura nulla.

In particolare si osservi che se delle due funzioni U, V una è costante la superficie è una rigata e ancor più in particolare una superficie di Clifford, se sono costanti ambedue.

§ 11. Evoluta ed evolventi delle superficie a curvatura nulla.

Se riferiamo una superficie S alle sue linee di curvatura u, v e con

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

ne indichiamo l'espressione dell'elemento lineare, con r_1, r_2 i raggi principali (ridotti) di curvatura, le formole (A) di Codazzi diventano:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v} &= 0 \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (A^*)$$

Ora se poniamo:

$$r_1 = \operatorname{tg} w_1, \qquad r_2 = \operatorname{tg} w_2,$$

le lunghezze w_1, w_2 sono precisamente quelle che intercedono fra un punto M di S e i rispettivi centri principali di curvatura M_1, M_2. Indicando con $x_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate di M_1, si ha:

$$x_i^{(1)} = x_i \cos w_1 - X_i \operatorname{sen} w_1.$$

Di qui derivando ed indicando con

$$\begin{matrix} E_1, & F_1, & G_1 \\ D_1, & D_1', & D_1'', \end{matrix}$$

i coefficienti della prima e seconda forma fondamentale per la prima falda S_1

dell'evoluta di S, troviamo:

$$E_1 = \left(\frac{\partial w_1}{\partial u}\right)^2 + E\,\frac{\operatorname{sen}^2(w_1 - w_2)}{\operatorname{sen}^2 w_2}, \qquad F_1 = \frac{\partial w_1}{\partial u}\,\frac{\partial w_1}{\partial v}, \qquad G_1 = \left(\frac{\partial w_1}{\partial v}\right)^2 \quad (15)$$

$$D_1 = \frac{E}{\sqrt{G}}\,\frac{\operatorname{sen} w_1}{\operatorname{sen}^2 w_2}\,\frac{\partial w_2}{\partial v}, \qquad D_1' = 0, \qquad D_1'' = -\frac{\sqrt{G}}{\operatorname{sen} w_1}\,\frac{\partial w_1}{\partial v}. \quad (16)$$

Costruendo l'espressione:

$$k_1 = \frac{D_1 D_1'' - D_1'^2}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

della curvatura *relativa* di S_1, ne deduciamo:

$$k_1 = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(w_1 - w_2)}\,\frac{\dfrac{\partial w_2}{\partial v}}{\dfrac{\partial w_1}{\partial v}}, \quad (17)$$

e con notazione analoga per la seconda falda:

$$k_2 = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(w_1 - w_2)}\,\frac{\dfrac{\partial w_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial w_2}{\partial u}}. \quad (17^*)$$

Supponiamo ora che la evolvente S sia a curvatura assoluta nulla, cioè si abbia:

$$r_1 r_2 = -1,$$

ossia:

$$w_1 - w_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Le (17), (17*) dànno allora subito:

$$k_1 = -1, \qquad k_2 = -1,$$

mentre le (16) dimostrano che:

$$D_1, \quad D_1', \quad D_1'',$$

sono rispettivamente proporzionali a

$$D = -\frac{E}{r_2}, \qquad D' = 0, \qquad D'' = -\frac{G}{r_1},$$

Abbiamo quindi il teorema:

I. *Le due falde dell'evoluta di una superficie a curvatura nulla sono esse stesse a curvatura nulla: alle assintotiche della evolvente corrispondono sopra ambedue le falde dell'evoluta le assintotiche.*

Osserviamo che, secondo le (15), l'elemento lineare ds_1 della prima falda S_1 è dato da:

$$ds_1^2 = dw_1^2 + E\frac{\operatorname{sen}^2(w_1 - w_2)}{\operatorname{sen}^2 w_2}du^2,$$

onde calcolando sopra S_1 la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_{w_1}}$ delle linee geodeticamente parallele $w_1 = \text{cost.}$ troviamo:

$$\frac{1}{\rho_{w_1}} = \cot.(w_1 - w_2). \tag{18}$$

Applicando questa formola al caso attuale, abbiamo l'ulteriore risultato:

II. *Le geodetiche inviluppate sopra ciascuna falda dell'evoluta di una superficie a curvatura nulla dalle normali della evolvente sono parallele nel senso euclideo.*

Inversamente prendiamo una superficie S_1 a curvatura nulla, nella quale tracciamo ad arbitrio un sistema di geodetiche parallele e a queste conduciamo le tangenti. Sia S una qualunque superficie normale a queste tangenti, cioè una evolvente di S_1. Poichè qui deve essere $\frac{1}{\rho_{w_1}} = 0$ la (18) ci dà:

$$w_1 - w_2 = \frac{\pi}{2},$$

cioè il teorema:

III. *Tracciando sopra una superficie a curvatura nulla un sistema qualunque di geodetiche parallele, le rette tangenti a queste geodetiche hanno per superficie normali altrettante superficie a curvatura nulla.*

§ 12. **Verifica.**

Non sarà inutile verificare direttamente le proprietà gia dimostrate al paragrafo precedente.

Riferiamo per ciò la superficie S a curvatura nulla alle sue linee assintotiche u, v e sia (§ 9):

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(2\Omega)du\,dv + dv^2,$$

$$\Omega = U + V,$$

il suo elemento lineare. Per le coordinate $x_i^{(1)}$ dell'uno dei centri di curvatura avremo allora:

$$x_i^{(1)} = x_i \cos\Omega - X_i \operatorname{sen}\Omega.$$

Derivando col tener conto delle formole [(D) § 3]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u} &= \cot(2\Omega)\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{1}{\operatorname{sen}(2\Omega)}\frac{\partial x_i}{\partial v} \\ \frac{\partial X_i}{\partial v} &= -\frac{1}{\operatorname{sen}(2\Omega)}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \cot(2\Omega)\frac{\partial x_i}{\partial v}, \end{aligned}\right\}$$

si trae:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial u} &= \frac{1}{2\cos\Omega}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) - (x_i \operatorname{sen}\Omega + X_i\cos\Omega)\,U' \\ \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial v} &= \frac{1}{2\cos\Omega}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) - (x_i \operatorname{sen}\Omega + X_i\cos\Omega)\,V', \end{aligned}\right\}$$

da cui per l'elemento lineare ds_1 della corrispondente falda dell'evoluta risulta:

$$ds_1^2 = (1 + U'^2)du^2 + 2(1 + U'V')du\,dv + (1 + V'^2)dv^2, \tag{19}$$

formola che, ponendo:

$$\alpha = u + v, \qquad \beta = U + V,$$

diventa:

$$ds_1^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Ciò dimostra la prima parte del teorema I, § 11 ed il teorema II. La seconda parte del teorema I, si verificherebbe agevolmente osservando che le coordinate $X_i^{(1)}$ del piano tangente all'evoluta sono date da:

$$X_i^{(1)} = \frac{1}{2\operatorname{sen}\Omega}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\right),$$

e perciò valgono le formole:

$$\sum \frac{\partial X_i^{(1)}}{\partial u}\frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial X_i^{(1)}}{\partial v}\frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial v} = 0.$$

Come immediata conseguenza della nostra formola (19) troviamo poi che le assintotiche $v =$ cost. sulla evoluta sono rette allorchè si abbia $U'' = 0$, cioè $U' =$ cost., nel qual caso le assintotiche della evolvente hanno, oltre la torsione $\frac{1}{T} = \pm 1$, costante la flessione. Prendendo adunque delle rigate a curvatura nulla le evolventi rispetto ad un sistema di geodetiche parallele avremo quelle superficie a curvatura nulla di cui una delle curve assintotiche generatrici ha costante la flessione. In particolare per le evolventi della superficie di Clifford ambedue le assintotiche generatrici avranno flessione costante.

§ 13. Superficie complementari.

Se combiniamo il teorema III col teorema I del § 11 ne deduciamo subito la costruzione seguente che rappresenta per le nostre superficie la trasformazione complementare (cfr. *Lezioni*, ecc., pag. 431):

Sulle rette tangenti alle geodetiche di un sistema parallelo sopra una superficie S a curvatura nulla si stacchi, a partire dal punto di contatto, un segmento eguale a un quadrante $\frac{\pi}{2}$ (*): *il luogo S' degli estremi sarà una nuova superficie a curvatura nulla.*

Possiamo facilmente dimostrare in modo più diretto questo teorema. Sulla superficie S prendansi infatti a linee coordinate v le geodetiche del sistema parallelo e le loro traiettorie ortogonali u, sicchè per l'elemento lineare avremo semplicemente:

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

ed essendo nulli tutti i simboli di Christoffel, le formole (A) di Codazzi esprimeranno semplicemente che:

$$D\,du + D'\,dv$$

$$D'\,du + D''\,dv,$$

sono differenziali esatti (**). Ora le coordinate x'_i del punto di S' corrispondente al punto x_i di S sono date evidentemente da:

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

(*) Il senso è indifferente, perchè nello spazio ellittico semplice la retta si chiude dopo un giro di π.

(**) In questo modo di trattare il problema D, D', D'' risultano le derivate seconde di una medesima funzione $\Phi(u, v)$:

$$D = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}, \qquad D' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v}, \qquad D'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2},$$

integrale dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v}\right)^2 = -1.$$

da cui per le (C) § 3 si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x'_i}{\partial u} &= D X_i - x_i \\ \frac{\partial x'_i}{\partial v} &= D' X_i,\end{aligned}\right\}$$

e quindi per l'elemento lineare di S':

$$ds'^2 = (1 + D^2) du^2 + 2 D D' du dv + D'^2 dv^2,$$

cioè:

$$ds'^2 = du^2 + (D du + D' dv)^2,$$

il che, per essere, come si è detto, $D du + D' dv$ un differenziale esatto, dimostra il teorema.

Osserviamo poi che dalle proprietà svolte alla fine del § 12 risulta che la trasformazione complementare applicata ad una rigata a curvatura nulla dà sempre nuovamente una rigata, in particolare la complementare di una superficie di Clifford è una nuova superficie di Clifford. La stessa cosa risulta anche dall'osservare che la rigata ammette uno scorrimento in sè stessa, durante il quale la complementare scorre pure sopra sè stessa; questa superficie è dunque nuovamente rigata.

In luogo di un sistema di geodetiche parallele sopra una superficie a curvatura nulla, prendiamo ora a considerare un fascio di geodetiche uscenti da un punto a distanza finita e della S costruiamo la *complementare* (*) S' rispetto a questo sistema di geodetiche.

Secondo il teorema di Weingarten (esteso alla geometria ellittica), tutte queste superficie S' costituiscono una classe completa di superficie applicabili l'una sull'altra. Per superficie tipica di questa classe si potrà prendere ad esempio la complementare di una superficie di Clifford.

Così adunque, nella geometria ellittica, troviamo con sole quadrature due classi complete di superficie applicabili, cioè le superficie a curvatura nulla e le loro complementari testè considerate. A queste due classi è da aggiungersi, come completamente nota, una terza, quella delle *superficie sviluppabili,* cioè distendibili sul piano della geometria ellittica. Queste superficie, caratterizzate dal valore $K = 1$ della curvatura assoluta, sono come le analoghe dello spazio euclideo, il luogo delle tangenti alle curve dello spazio (**).

(*) *Lezioni,* ecc., pag. 237.

(**) Il lettore dimostrerà facilmente il teorema, ricorrendo alle formole (A), (D) del § 3 e supponendovi, come è lecito;

$$F = 0, \qquad D = 0, \qquad D' = 0.$$

§ 14. Sistemi tripli ortogonali nello spazio ellittico.

Affinchè l'elemento lineare:

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2,$$

appartenga allo spazio di curvatura di RIEMANN $K_0 = 1$ è necessario e sufficiente che le funzioni H_1, H_2, H_3 delle tre variabili u_1, u_2, u_3 soddisfino le sei equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 H_l}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\frac{\partial H_l}{\partial u_k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\frac{\partial H_l}{\partial u_i} \\ &\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\right) + \frac{1}{H_l^2}\frac{\partial H_i}{\partial u_l}\frac{\partial H_k}{\partial u_l} + H_i H_k = 0, \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

dove con ikl si indica una qualunque permutazione degli indici 123.

Supposte le (20) soddisfatte, per determinare in funzione di u_1, u_2, u_3, le coordinate:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4,$$

di un punto dello spazio, legate dalla solita relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

tali dunque che si abbia:

$$\sum dx_i^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2,$$

valgono le osservazioni seguenti.

Poniamo:

$$\xi_\nu^{(i)} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

sicchè:

$$\xi_1^{(i)}, \quad \xi_2^{(i)}, \quad \xi_3^{(i)}, \quad \xi_4^{(i)},$$

sono i coseni di direzione della tangente alla linea coordinata (u_i). Allora se consideriamo le quattro funzioni:

$$x_\nu, \quad \xi_\nu^{(1)}, \quad \xi_\nu^{(2)}, \quad \xi_\nu^{(3)},$$

per un valore fisso qualunque di ν, esse soddisfano al sistema di equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u_i} = H_i \xi^{(i)} \\
&\frac{\partial \xi^k}{\partial u_i} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial u_k}\xi^{(i)} \\
&\frac{\partial \xi^k}{\partial u_l} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_l}{\partial u_k}\xi^{(l)} \\
&\frac{\partial \xi^k}{\partial u_k} = -\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}\xi^{(i)} - \frac{1}{H_l}\frac{\partial H_k}{\partial u_l}\xi^{(l)} - H_k x,
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

le quali, appunto in virtù delle (20), formano un sistema illimitatamente integrabile.

§ 15. Sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie a curvatura nulla.

Un semplice esempio dei sistemi indicati nel titolo di questo paragrafo si ha considerando una superficie a curvatura nulla e le sue parallele che sono altrettante superficie a curvatura nulla. Queste superficie parallele insieme colle sviluppabili luogo delle loro normali lungo le linee di curvatura dànno il sistema in discorso.

Volendo studiare i sistemi generali che contengono una serie di superficie a curvatura nulla procederemo in modo affatto analogo a quello tenuto al n.° 293, pag. 497 e ss. delle *Lezioni*, ecc. e dalle attuali formole (20) dedurremo che può porsi:

$$H_1 = \cos\theta, \qquad H_2 = \operatorname{sen}\theta, \qquad H_3 = \frac{\partial \theta}{\partial u_3},$$

dove la funzione θ deve soddisfare alla equazione del 2.° ordine:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2^2} = 0, \tag{22}$$

e alle tre del 3.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3}\right) = -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u_1}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} \\
&\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u_2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} \\
&\frac{\partial^3 \theta}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u_1}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u_2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3},
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

all' ultima delle quali conviene anche dare le forme equivalenti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}\right) &= -\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial u_2}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3}\right) &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial u_1}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}\,. \end{aligned}\right\}$$

In forza di queste equazioni si vede che l' espressione:

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3}\right)^2,$$

è indipendente sì da u_1 che da u_2 e però, cangiando convenientemente il parametro u_3, si può dare a questa somma il valore $= 1$.

Indicando quindi con ω un angolo ausiliario, potremo porre:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3} = \cos\theta\operatorname{sen}\omega\,, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} = \operatorname{sen}\theta\cos\omega\,,$$

dopo di che le (23) diventano semplicemente:

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_1} = \frac{\partial\omega}{\partial u_2}\,, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial u_2} = \frac{\partial\omega}{\partial u_1}\,,$$

e queste traggono seco evidentemente la (22). Avremo dunque un sistema triplo ortogonale della specie richiesta corrispondente alla forma:

$$ds^2 = \cos^2\theta\,du_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,du_2^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2, \tag{24}$$

dell' elemento lineare, ogniqualvolta la funzione θ sia legata ad un' altra funzione ausiliare ω dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u_1} &= \frac{\partial\omega}{\partial u_2}\,, & \frac{\partial\theta}{\partial u_2} &= \frac{\partial\omega}{\partial u_1} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u_1\,\partial u_3} &= \cos\theta\operatorname{sen}\omega\,, & \frac{\partial^2\theta}{\partial u_2\,\partial u_3} &= \operatorname{sen}\theta\cos\omega. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ora questo sistema (25) si riporta facilmente alla nota equazione:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \operatorname{sen} z\,,$$

della teoria delle ordinarie superficie pseudosferiche, procedendo nel modo seguente.

Introduciamo in luogo di u_1, u_2 le due nuove variabili α, β:

$$\alpha = \frac{1}{2}(u_2 + u_1), \qquad \beta = \frac{1}{2}(u_2 - u_1),$$

cioè i parametri delle linee assintotiche e le (25) diventano:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial u_3} = \operatorname{sen}(\theta + \omega), \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta\, \partial u_3} = \operatorname{sen}(\theta - \omega). \end{aligned}\right\} \tag{25*}$$

Ma dalle due prime equazioni segue che possiamo porre:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= A + B \\ \omega &= A - B, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

dove A è una funzione delle sole variabili α, u_3 e B delle due β, u_3. Dopo di ciò le due ultime (25*) ci dànno:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha\, \partial u_3} = \operatorname{sen}(2A) \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \beta\, \partial u_3} = \operatorname{sen}(2B). \tag{27*}$$

Abbiamo così tanto per la funzione A che per la B la equazione tipica da cui dipende la ricerca delle ordinarie superficie pseudosferiche. E poichè inversamente se A, B sono rispettivamente integrali dalla (27), (27*) le funzioni θ, ω date dalle (26) soddisfano le (25*), ossia le (25), possiamo enunciare il notevole risultato:

Ad ogni coppia di superficie pseudosferiche dello spazio ordinario, prese ad arbitrio, corrisponde un sistema triplo ortogonale (24) *dello spazio ellittico con una serie di superficie a curvatura nulla.*

I nostri sistemi tripli ortogonali vengono quindi visibilmente a dipendere da quattro funzioni arbitrarie.

§ 16. Sistemi complementari.

È chiaro che la funzione ω definita dalla seconda delle (26) verifica le medesime condizioni della θ e perciò l'elemento lineare:

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2, \tag{28}$$

definisce alla sua volta un secondo sistema triplo ortogonale della medesima specie del sistema (24). Due tali sistemi si diranno *complementari* per la ragione che andiamo ora ad esporre.

Nel sistema triplo ortogonale (24) consideriamo sulle superficie a curvatura nulla $u_3 = \text{cost.}$ *le linee di livello:*

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_3} = \text{cost.}$$

e dimostriamo che esse formano un sistema di linee geodetiche parallele.

A causa delle due ultime (25*) l'equazione differenziale delle linee di livello può scriversi:

$$\cos\theta \operatorname{sen}\omega\, du_1 + \operatorname{sen}\theta \cos\omega\, du_2 = 0,$$

e quindi quella delle traiettorie ortogonali:

$$\cos\theta \cos\omega\, du_1 - \operatorname{sen}\theta \cos\omega\, du_2 = 0.$$

Ma le due prime (25) ci dimostrano che i primi membri delle due equazioni precedenti sono, rapporto a u, v, i differenziali esatti di due funzioni che indichiamo con φ, ψ (*), onde avremo:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta \operatorname{sen}\omega\, du_1 + \operatorname{sen}\theta \cos\omega\, du_2 &= d\varphi \\ \cos\theta \cos\omega\, du_1 - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega\, du_2 &= d\psi, \end{aligned}\right\}$$

da cui quadrando e sommando si ottiene:

$$\cos^2\theta\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, du_2^2 = d\varphi^2 + d\psi^2,$$

con che appunto è dimostrata l'asserzione superiore.

Ora diciamo che:

Se di ciascuna superficie a curvatura nulla del sistema (24) *si assume la complementare rispetto alle geodetiche parallele di livello, le nuove superficie a curvatura nulla ottenute dànno appunto luogo al sistema* (28).

E infatti se adoperiamo le notazioni del § 14 e indichiamo con

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \eta_4,$$

i coseni della direzione tangente in un punto ad una linea di livello $\dfrac{\partial \theta}{\partial u_3} = \text{cost.}$,

(*) La stessa cosa si vede subito trasformando le dette espressioni in coordinate α, β perchè esse diventano rispettivamente:

$$\operatorname{sen}(2A)\, d\alpha + \operatorname{sen}(2B)\, d\beta$$
$$\cos(2A)\, d\alpha - \cos(2B)\, d\beta.$$

avremo per le (25):

$$\eta_i = \xi_i^{(1)} \cos\omega - \xi_i^{(2)} \operatorname{sen}\omega. \tag{29}$$

Ora le formole generali (21) applicate al nostro sistema (24) dànno le formole:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial u_1} = \frac{\partial \theta}{\partial u_2}\xi_i^{(2)} + \operatorname{sen}\theta\,\xi_i^{(3)} - \cos\theta\, x_i, \quad \frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial u_2} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1}\xi_i^{(2)}, \quad \frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial u_3} = \operatorname{sen}\omega\,\xi_i^{(3)}\\
&\frac{\partial \xi_i^{(2)}}{\partial u_1} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_2}\xi_i^{(1)}, \quad \frac{\partial \xi_i^{(2)}}{\partial u_2} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_1}\xi_i^{(1)} - \cos\theta\,\xi_i^{(3)} - \operatorname{sen}\theta\, x_i, \quad \frac{\partial \xi_i^{(2)}}{\partial u_3} = \cos\omega\,\xi_i^{(3)}\\
&\frac{\partial \xi_i^{(3)}}{\partial u_1} = -\operatorname{sen}\theta\,\xi_i^{(1)}, \quad \frac{\partial \xi_i^{(3)}}{\partial u_2} = \cos\theta\,\xi_i^{(2)}, \quad \frac{\partial \xi_i^{(3)}}{\partial u_3} = -\operatorname{sen}\omega\,\xi_i^{(1)} - \cos\omega\,\xi_i^{(2)} - \frac{\partial \theta}{\partial u_3} x_i\\
&\frac{\partial x_i}{\partial u_1} = \cos\theta\,\xi_i^{(1)}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = \operatorname{sen}\theta\,\xi_i^{(2)}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_3} = \frac{\partial \theta}{\partial u_3}\xi_i^{(3)}.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Calcolando con queste formole le derivate delle η dalle (29) troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \eta_i}{\partial u_1} &= \cos\omega(\operatorname{sen}\theta\,\xi_i^{(3)} - \cos\theta\, x_i)\\
\frac{\partial \eta_i}{\partial u_2} &= \operatorname{sen}\omega(\cos\theta\,\xi_i^{(3)} + \operatorname{sen}\theta\, x_i)\\
\frac{\partial \eta_i}{\partial u_3} &= -(\operatorname{sen}\omega\,\xi_i^{(1)} + \cos\omega\,\xi_i^{(2)})\frac{\partial \omega}{\partial u_3},
\end{aligned}\right\}$$

da cui risulta:

$$\sum d\eta_i^2 = \cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3}\right)^2 du_3,$$

formola che dimostra il teorema.

§ 17. Sistemi con superficie a curvatura nulla rigate.

Abbiamo dimostrato alla fine del § 15 l'effettiva esistenza dei nostri sistemi tripli ortogonali, riferendoci alla teoria delle superficie pseudosferiche ordinarie. Ora consideriamo una classe molto notevole di questi sistemi che si ottiene assumendo eguale a zero l'una o l'altra delle funzioni A, B al § 15. Prendiamo per es. $B = 0$, cioè $\theta = \omega$ e allora basterà che la funzione θ delle variabili $u_1 + u_2$, u_3 soddisfi l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1 \partial u_3} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Ma poichè sopra una superficie a curvatura nulla $u_3 =$ cost., θ è funzione di $u_1 + u_2$ soltanto, ne risulta che le linee *assintotiche* $u_1 + u_2 = \text{cost.}$, sono rette e perciò:

Nei sistemi tripli ortogonali in discorso le superficie $u_3 = \text{cost.}$ *sono rigate a curvatura nulla.*

La stessa cosa risulta dall'osservare che le dette linee assintotiche coincidono nel caso attuale colle linee di livello e però sono geodetiche parallele (§ 16).

Come caso particolare del risultato ottenuto alla fine del § 15 abbiamo qui il teorema:

Ad ogni superficie pseudosferica dello spazio euclideo corrisponde un sistema triplo ortogonale dello spazio ellittico, nel quale le superficie di una serie sono rigate a curvatura nulla.

Un'altra singolare proprietà degli attuali sistemi merita di essere osservata. Se cangiamo le variabili u_1, u_2 ponendo nuovamente:

$$u_2 + u_1 = 2\alpha, \qquad u_2 - u_1 = 2\beta,$$

l'elemento lineare (24) diventa:

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos(2\theta)\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

e poichè θ è funzione solo di α, u_3 (indipendente da β) le superficie $\alpha = \text{cost.}$ che hanno l'elemento lineare:

$$ds^2 = d\beta^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2,$$

sono rigate a curvatura nulla. Ma in queste superficie le traiettorie ortogonali delle generatrici sono curve a torsione ± 1 (§ 5); dunque sussiste il teorema:

Nei sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie rigate a curvatura nulla le traiettorie ortogonali di queste superficie sono curve a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$.

Ne segue che sulle superficie delle altre due serie le linee di curvatura di un sistema sono curve a torsione costante $\frac{1}{T} = \pm 1$. Le superficie poi che sono luogo di assintotiche curvilinee corrispondenti sulle $u_3 = \text{cost.}$ posseggono un doppio sistema ortogonale di curve colla torsione $\frac{1}{T} = \pm 1$, quelle dell'un sistema essendo inoltre geodetiche.

In fine osserveremo che se dello spazio ellittico si fa la nota rappresentazione *conforme* sullo spazio euclideo, i sistemi tripli ortogonali della specie ora studiata hanno per immagini sistemi tripli ortogonali dello spazio ordinario e poichè le rette dello spazio ellittico hanno per immagini circoli che tagliano in punti diametralmente opposti una sfera fissa, ne concludiamo:

Ad ogni superficie pseudosferica (dello spazio euclideo) corrisponde univocamente un sistema triplo ortogonale ordinario, in cui le superficie di una serie sono CERCHIATE *e precisamente luoghi di circoli, che tagliano in punti diametralmente opposti una sfera fissa.*

Si aggiunga che tutte queste superficie cerchiate sono integrali di una medesima equazione a derivate parziali del secondo ordine, la quale esprime che le superficie obiettive dello spazio ellittico sono a curvatura nulla. Di più è evidente che i circoli *non sono* linee di curvatura, perchè corrispondono alle assintotiche della superficie obiettiva. Inoltre i circoli stessi insieme colle loro traiettorie ortogonali formano, sulle superficie in discorso, un sistema isotermo.

§ 18. **Trasformazione di Bäcklund.**

Ai sistemi tripli ortogonali finora studiati sono applicabili quei metodi di trasformazione che ho esposto pei sistemi pseudosferici ordinari al Cap. XX delle *Lezioni,* ecc. Qui mi limiterò a dare le formole effettive che servono per siffatte trasformazioni, sulle quali formole sarà poi facile verificare tutte le proprietà asserite.

Consideriamo uno dei nostri sistemi definito dalla forma (24) dell'elemento lineare dello spazio, essendo θ, ω due funzioni legate dalle (25). Indicando con φ un terzo angolo incognito e con σ un angolo costante, si determini φ dal sistema simultaneo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}+\frac{\partial\theta}{\partial u_2}=\cot\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}+\frac{\partial\theta}{\partial u_1}=-\cot\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}+\frac{\partial\theta}{\partial u_3}=-\,\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\omega)\ (*),
\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

(*) Se in particolare $\sigma=\frac{\pi}{2}$ ritorniamo alla trasformazione complementare (§ 16), giacchè allora ne segue:

$$\varphi=-\omega.$$

ossia dalla corrispondente equazione ai differenziali totali:

$$d\varphi = \left(\cot\sigma \operatorname{sen}(\varphi + \theta) - \frac{\partial \theta}{\partial u_2}\right) du_1 - \left(\cot\sigma \operatorname{sen}(\varphi + \theta) + \frac{\partial \theta}{\partial u_1}\right) du_2 -$$
$$- \left(\operatorname{tg}\sigma \operatorname{sen}(\varphi + \omega) + \frac{\partial \theta}{\partial u_3}\right) du_3. \tag{31*}$$

Le condizioni d'*illimitata* integrabilità per le (31) o (31*) sono qui identicamente soddisfatte a causa delle (25); perciò la soluzione generale φ del sistema (31) contiene una costante arbitraria. Preso l'angolo φ eguale a una soluzione particolare qualsiasi delle (31), conduciamo a ciascuna superficie a curvatura nulla $u_3 =$ cost. in ogni suo punto (x_i) una tangente inclinata sulle linee di curvatura $u_2 =$ cost. precisamente dell'angolo φ e sopra questa tangente stacchiamo, a partire dal punto di contatto, un segmento eguale alla costante σ. Se con x'_i indichiamo le coordinate dell'estremo, avremo manifestamente:

$$x'_i = x_i \cos\sigma + (\xi_i^{(1)} \cos\varphi + \xi_i^{(2)} \operatorname{sen}\varphi) \operatorname{sen}\sigma. \tag{32}$$

Calcolando le derivate delle x'_i, osservando le (30) § 16 e le (31), troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x'_i}{\partial u_1} &= \cos\sigma \cos\varphi \cos(\varphi + \theta)\xi_i^{(1)} + \cos\sigma \cos\varphi \operatorname{sen}(\varphi + \theta)\xi_i^{(2)} + \\
&\quad + \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\, \xi_i^{(3)} - \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi \cos\theta\, x_i \\
\frac{\partial x'_i}{\partial u_2} &= \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\varphi + \theta)\xi_i^{(1)} - \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \cos(\varphi + \theta)\xi_i^{(2)} - \\
&\quad - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \cos\theta\, \xi_i^{(3)} - \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta\, x_i \\
\frac{\partial x'_i}{\partial u_3} &= [- \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi\, \xi_i^{(1)} + \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi\, \xi_i^{(2)} - \cos\sigma\, \xi_i^{(3)}] \frac{\partial \varphi}{\partial u_3},
\end{aligned}\right\} \tag{32*}$$

e per la somma dei quadrati dei differenziali dx'_i abbiamo quindi:

$$ds'^2 = \sum dx_i'^2 = \cos^2\varphi\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, du_2^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2. \tag{33}$$

Questa formola ci dimostra come, per mezzo della costruzione indicata, siamo pervenuti ad un nuovo sistema triplo ortogonale. Di più le superficie $u_3 =$ cost. sono nuovamente a curvatura nulla perchè dalle (31) segue che φ soddisfa alla equazione:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2} = 0.$$

§ 19. Continuazione.

La interpretazione geometrica dei risultati precedenti è così simile a quella che ho stabilito al Cap. XX delle *Lezioni*, ecc., che sarà inutile insistervi. Osserviamo soltanto che la nostra trasformazione può applicarsi non solo ai sistemi tripli ortogonali considerati ma anche alle superficie a curvatura nulla isolate. In tal caso si ottiene ogni volta una congruenza di raggi nella quale è costante la distanza dei fuochi e dei punti limiti mentre le due falde focali sono superficie a curvatura nulla. Su queste si corrispondono inoltre e linee di curvatura e assintotiche, queste ultime ad archi eguali.

Esaminiamo ora il modo di integrare il sistema (31). Trasformiamo per ciò nuovamente nelle variabili:

$$\alpha = \frac{1}{2}(u_2 + u_1), \qquad \beta = \frac{1}{2}(u_2 - u_1), \qquad u_3,$$

ed otterremo:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial\alpha} = 0 \\ &\frac{\partial(\varphi-\theta)}{\partial\beta} = -2\cot\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta) \\ &\frac{\partial(\varphi+\theta)}{\partial u_3} = -\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{sen}(\varphi+\omega). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ma al § 15 formole (26) abbiamo posto:

$$\theta = A + B, \qquad \omega = A - B,$$

e risultando dalla prima delle (34):

$$\varphi = B' - A,$$

dove B' indica, come B, una funzione delle due variabili β, u_3, le ultime due (34) diventano:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial(B'-B)}{\partial\beta} = -2\cot\sigma\,\mathrm{sen}(B'+B) \\ &\frac{\partial(B'+B)}{\partial u_3} = -\mathrm{tg}\,\sigma\,\mathrm{sen}(B'-B). \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Queste, con una piccola modificazione nelle notazioni, sono precisamente le formole della trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche ordinarie (*).

Se ci riferiamo dunque al risultato finale del § 15, vediamo che basterà saper applicare ad una delle due superficie pseudosferiche generatrici la trasformazione di Bäcklund, lasciando l'altra superficie invariata, per ottenere la trasformazione di Bäcklund del corrispondente sistema triplo ortogonale dello spazio ellittico. E così tutte le conseguenze che si sono dedotte dal *teorema di permutabilità* per lo spazio euclideo valgono pure per lo spazio ellittico, la qual cosa si può del resto dimostrare direttamente stabilendo per i nostri sistemi il teorema dato a pag. 506 delle *Lezioni*, ecc., pei sistemi pseudosferici ordinari.

In particolare si può partire da un tale sistema triplo ortogonale dello spazio ellittico che l'applicazione *illimitata* della trasformazione di Bäcklund non richieda mai altro che calcoli algebrici e di derivazione. Tale è per es. il caso se si parte dal sistema triplo corrispondente alla formola:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = e^{u_1 + u_2 + u_3}.$$

(*) *Lezioni*, ecc., pag. 427.

Sur quelques propriétés des fonctions Bessèliennes, tirées de la théorie des fractions continues.

(*De* L. CRELIER, *à St. Imier.*)

Introduction.

Dans un intéressant travail (*), M.r le prof. D.r J. H. GRAF donne la relation élégante:

$$I^c_{(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{i^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n+c} f_n\left(\frac{2(c+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)},$$

où $I^c_{(x)}$ est la fonction Bessèlienne de 1.e espèce, et $f_n\left(\frac{2(c+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)$ le dénominateur de la $(n+1)^e$ réduite d'une fraction continue, définie par

$$\frac{2c}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(c+1)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(c+2)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(c+3)}{ix} + \begin{array}{c}\vdots\\ + \cfrac{1}{\cfrac{2(c+n)}{ix}}\end{array}}}}.$$

C'est la formule (10) à la page 8, dans le mémoire précité. La théorie des fonctions $f_n\left(\frac{2(c+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)$ ou plus généralement des fonctions $f_n(a, b)$, dont nous ferons aussi usage dans la suite, y est exposée dans les § 1 et § 2.

(*) *Relations entre la fonction Bessèlienne de 1.e espèce et une fraction continue.* Annali di Matematica, serie 2.a, tomo 23. Milano, 1895.

Si nous réunissons en groupe la formule de BESSEL (*):

$$I^{n+1}_{(x)} + I^{n-1}_{(x)} = \frac{2n}{x} I^{n}_{(x)},$$

avec la formule analogue en K tirée des fonctions K introduites par L. SCHLÆFLI (**):

$$K^{n+1}_{(x)} + K^{n-1}_{(x)} = \frac{2n}{x} K^{n}_{(x)},$$

et avec les formules:

$$P^{a+1}_{m-2}(x) + P^{a-1}_{m}(x) = \frac{2a}{x} P^{a}_{m-1}(x)$$

$$P^{a}_{m}(x) + P^{a}_{m-2}(x) = \frac{2(a+m)}{x} P^{a}_{m-1}(x),$$

données par M.r GRAF dans les § 4 et § 5 de son travail, aux numéros (41) et (42), nous aurons 4 relations entre 3 fonctions I, K ou P *dont les indices diffèrent entre eux d'une unité,* et nous les appellerons

Relations du 1.r groupe.

Considérons ensuite les formules données par M.r le prof. D.r J. H. GRAF dans le travail déjà cité aux numéros (31) et (33):

$$I^{a+m}_{(x)} = I^{a}_{(x)} P^{a-1}_{m}(x) - I^{a-1}_{(x)} P^{a}_{m-1}(x),$$

et

$$K^{a+m}_{(x)} = K^{a}_{(x)} P^{a-1}_{m}(x) - K^{a-1}_{(x)} P^{a}_{m-1}(x).$$

Ces formules constitueront pour nous les

Relations du 2.e groupe.

Elles établissent une parenté entre 3 fonctions I et K. *Les indices des deux dernières, dans chaque équation, diffèrent entre eux d'une unité, mais ils diffèrent en revanche de m ou $m+1$, c'est-à-dire d'un nombre entier, des indices des premières fonctions $I^{a+m}_{(x)}$ au $K^{a+m}_{(x)}$.* On peut conclure que ces formules sont plus générales que celles données au premier groupe.

(*) *Untersuchungen des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht,* voir: Abhandlungen der Berliner Akademie, 1824. Math. Classe, pag. 1 et Abhandlungen von F. W. BESSEL, tom. 1, pag. 96, n.° 11.

(**) Voir: *Ueber die Addition et Subtraktion der Argumente bei Bessel'schen Funktionen nebst einer Anwendung* par J. H. GRAF. Math. Annalen, Bd. 43, pag. 136 et Annali di Matematica, serie 2, tom. 4 par L. SCHLÆFLI.

Notre but, dans ce travail, est de continuer l'œuvre de M.r le prof. Graf. Pour cela, nous avons cherché à établir par une méthode différente, mais plus générale, les relations du 2.e groupe, non seulement pour les fonctions I et les fonctions K, mais encore pour les fonctions P.

En outre, nous avons réussi à obtenir des relations plus générales encore, liant des fonctions I, K et P, *différant dans leurs indices, d'un nombre quelconque d'entiers*, et nous les avons appelées:

Relations du 3.e groupe.

Nous avons considéré comme point de départ, un Mémoire de E. Catalan (*) sur les fractions continues, et nous y avons appliqué les considérations de M.r J. H. Graf.

En déhors de cela, par la même méthode, nous avons essayé une nouvelle démonstration de la formule de Neumann pour les fonctions de 2.e espèce $O^n_{(x)}$.

I. Relations du 1.e groupe.

La relation en I, qui est:

$$I^{a+1}_{(x)} + I^{a-1}_{(x)} = \frac{2a}{x} I^a_x, \tag{1}$$

a été donnée comme nous l'avons vu par Bessel lui même, dans le travail précité.

Les fonctions K, introduites par L. Schlæfli, présentent la même propriété:

$$K^{a+1}_{(x)} + K^{a-1}_{(x)} = \frac{2a}{x} K^a_{(x)}. \tag{2}$$

D'un autre côté, M.r Graf, a établi par ses formules (41) et (42), deux équations analogues en P; ce sont:

$$P^{a-1}_m(x) + P^{a+1}_{m-2}(x) = \frac{2a}{x} P^a_{m-1}(x), \tag{3}$$

et

$$P^a_m(x) + P^a_{m-2}(x) = \frac{2(a+m)}{x} P^a_{m-1}(x). \tag{4}$$

Dans la première, les indices supérieurs et les indices inférieurs différent entre eux d'une unité; dans la seconde, les indices inférieurs seuls diffèrent.

(*) *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries,* voir: Mémoires de l'Académie royale des sciences de Belgique, tom. 45, 1885.

La relation (3) peut encore s'obtenir directement. Posons, en partant de

$$i^m f_m\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = P_m^{a-1}(x)$$

$$\frac{i^{m+1} f_{m+1}\left(\frac{2a}{ix} \cdot \frac{2}{ix}\right)}{i^m f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)} + \frac{1}{\dfrac{i^m f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{i^{m-1} f_{m-1}\left(\frac{2(a+2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}} = \frac{P_{m+1}^{a-1}(x)}{P_m^a(x)} + \frac{1}{\dfrac{P_m^a(x)}{P_{m-1}^{a+1}(x)}}.$$

Développons nos quotients en fractions continues:

$$i\left\{\frac{2a}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+1)}{ix} + \cdots + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+m)}{ix}}}\right\} + \frac{1}{i}\left\{\cfrac{1}{\cfrac{2(a+1)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+2)}{ix} + \cdots + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+m)}{ix}}}}\right\}$$

$$= \frac{P_{m+1}^{a-1}(x)}{P_m^a(x)} + \frac{1}{\dfrac{P_m^a(x)}{P_{m-1}^{a+1}(x)}}.$$

Divisons le tout par i il reste:

$$\frac{2a}{ix} = \frac{1}{i}\left\{\frac{P_{m+1}^{a-1}(x)}{P_m^a(x)} + \frac{1}{\dfrac{P_m^a(x)}{P_{m-1}^{a+1}(x)}}\right\}.$$

D'où:

$$P_{m+1}^{a-1}(x) + P_{m-1}^{a+1} = \frac{2a}{x} P_m^a(x),$$

équation qui n'est autre que (3) où m est devenu $m+1$.

II. Relations du 2.e groupe.

a) *Formules en P.* Pour établir nos formules empruntons au Mémoire déjà cité de E. Catalan les quelques lignes qui suivent (*):

« Soit une fraction continue de quotients incomplets:

$$x = (a,\ b,\ c, \ldots,\ p,\ q,\ r,\ s)$$

$$\frac{A}{A'},\quad \frac{B}{B'},\quad \frac{C}{C'}, \ldots,\quad \frac{P}{P'},\quad \frac{Q}{Q'},\quad \frac{R}{R'},\quad \frac{S}{S'};$$

étant les réduites successives de cette fraction, si nous considérons la nouvelle fraction continue de termes:

$$y = (q,\ r,\ s, \ldots),$$

les dénominateurs de ses réduites seront:

$$(PQ' - QP')(-1)^{\lambda}, \qquad (PR' - RP')(-1)^{\lambda}, \quad \text{etc.},$$

λ, indiquant le rang de p dans la suite x. »

Au lieu de

$$a,\ b,\ c, \ldots,\ p,\ q,\ r,\ s, \ldots,$$

prenons:

$$\frac{2a}{ix},\quad \frac{2(a+1)}{ix},\quad \frac{2(a+2)}{ix}, \ldots,\quad \frac{2(a+p)}{ix},\quad \frac{2(a+p+1)}{ix},$$

$$\frac{2(a+p+2)}{ix}, \ldots .$$

Nous aurons d'après les fonctions:

$$f_n(a,\ b)$$

$$A = f_1\left(\frac{2a}{ix},\ \frac{2}{ix}\right) \quad \text{et} \quad A' = f_0\left(\frac{2(a+1)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right)$$

$$B = f_2\left(\text{»}\ ,\ \text{»}\right) \qquad B' = f_1\left(\quad \text{»}\quad ,\ \text{»}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

(*) *Notes sur la théorie des fractions continues et sur certaines séries.* voir: Mémoires de l'Académie royale des sciences de Belgique, tom. 45, 1885.

$$P = f_{p+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \qquad P' = f_p\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)$$

$$Q = f_{p+2}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \qquad Q' = f_{p+1}\left(\frac{2(a+1)}{ix} \cdot \frac{2}{ix}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S = f_{s+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \qquad S' = f_s\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right).$$

D'autre part,

$$(PQ' - QP')(-1)^{p-1} = f_0\left(\frac{2(a+q+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = 1.$$

comme dénominateur de la première réduite de y.

Les quotients incomplets de y sont:

$$\frac{2(a+q)}{ix}, \qquad \frac{2(a+q+1)}{ix}, \qquad \frac{2(a+q+2)}{ix}, \ldots,$$

et $f_0 = 1$ dans tous les cas.

Ici, au lieu de q, on peut prendre $p+1$. Mettons ensuite pour P, P', Q, Q', leurs valeurs, on obtient:

$$\left\{f_{p+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \cdot f_{p+1}\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) - f_{p+2}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \cdot f_p\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)\right\}(-1)^{p+1} = 1.$$

Nous savons que:

$$f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = \frac{P_m^a(x)}{i^m}.$$

En introduisant ce système de notation dans l'équation précédente, nous obtenons:

$$\left\{\frac{P_{p+1}^{a-1}(x)}{i^{p+1}} \cdot \frac{P_{p+1}^a(x)}{i^{p+1}} - \frac{P_{p+2}^{a-1}(x)}{i^{p+2}} \cdot \frac{P_p^a(x)}{i^p}\right\}(-1)^{p+1} = 1,$$

mais

$$i^{p+1} \cdot i^{p+1} = i^{2p+2} = (-1)^{p+1}$$

$$i^{p+2} \cdot i^p \quad = i^{2p+2} = (-1)^{p+1}.$$

D'où nous avons:

$$P_{p+1}^{a-1}(x) \cdot P_{p+1}^a(x) - P_{p+2}^{a-1}(x) \cdot P_p^a(x) = 1. \tag{5}$$

Cette relation est analogue à celle donnée au numéro (30) par M.r Graf; on y a fait $m = p+2$.

Prenons maintenant la relation générale:

$$(PS' - SP')(-1)^{p+1},$$

c'est le dénominateur de la réduite s dans y; comme tel, on a:

$$= f_{s-p-1}\left(\frac{2(a+p+2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right),$$

$s - p$, indique le rang de s dans la fraction y, et $a + p + 2 = a + q + 1$ est aussi le deuxième quotient incomplet de cette même fraction, et l'on sait que pour le dénominateur d'une réduite, on commence avec le deuxième quotient, d'après la propriété *d)* des fractions continues; on prend comme indice, $m - 1$, si m est l'ordre de la réduite considérée.

Ici, $s - p$ est l'ordre et $s - p - 1$ l'indice.

Les valeurs de P, P', S, S', données antérieurement sont introduites, et il vient:

$$\left\{f_{p+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \cdot f_s\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) - f_{s+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \cdot f_p\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)\right\}(-1)^{p+1} =$$
$$= f_{s-p-1}\left(\frac{2(a+p+2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right).$$

Remplaçons par les valeurs en P; nous aurons:

$$\left\{\frac{P_{p+1}^{a-1}(x)}{i^{p+1}} \cdot \frac{P_s^a(x)}{i^s} - \frac{P_{s+1}^{a-1}(x)}{i^{s+1}} \cdot \frac{P_p^a(x)}{i^p}\right\}(-1)^{p+1} = \frac{P_{s-p-1}^{a+p+1}}{i^{s-p-1}},$$

ou

$$\left(P_{p+1}^{a-1}(x) \cdot P_s^a(x) - P_{s+1}^{a-1}(x) \cdot P_p^a(x)\right) \frac{i^{2p+2}}{i^{s+p+1}} = \frac{i^{p+1}}{i^s} P_{s-p-1}^{a+p+1}.$$

Les i se simplifiant, il reste:

$$P_{p+1}^{a-1}(x) \cdot P_s^a(x) - P_{s+1}^{a-1}(x) \cdot P_p^a(x) = P_{s-p-1}^{a+p+1}(x). \tag{6}$$

C'est ici, *notre relation du 2.e groupe pour les fonctions P.*

Remarque. De cette formule, nous pouvons aisément déduire (3), la relation du 1.r groupe en P.

En faisant:

$$p = 0,$$

nous aurons:

$$P_1^{a-1}(x)\, P_s^a(x) - P_{s+1}^{a-1}(x)\, P_0^a(x) = P_{s-1}^{a+1}(x)$$

$$P_1^{a-1}(x) = i f_1\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = i\frac{2a}{ix} = \frac{2a}{x}$$

$$P_0^a(x) = i f_0 = 1.$$

Donc:

$$P^{a+1}_{s-1}(x) + P^{a-1}_{s+1}(x) = \frac{2a}{x} P^{a}_{s}(x).$$

C'est (3) avec $s = m - 1$. Pour déduire (4) d'une formule plus générale nous attendrons d'avoir les relations du 3.^{e} groupe.

b) *Formules en I.* Revenons quelques pas en arrière et reprenons la formule:

$$\left\{ f_{p+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) f_s\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) - f_p\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) f_{s+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \right\} (-1)^{p+1} =$$

$$= f_{s-p-1}\left(\frac{2(a+p+2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right).$$

Multiplions chacun des membres par le produit:

$$i^{s+p+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{a+s} \frac{1}{\Gamma(a+1+s)},$$

on aura:

$$\left\{ i^{p+1} f_{p+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \cdot \frac{i^s \left(\frac{x}{2}\right)^{a+s}}{\Gamma(a+1+s)} f_s\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) - \right.$$

$$\left. - i^{s+1} f_{s+1}\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{(a-1)+(s+1)}}{\Gamma(a+s+1)} \cdot i^p f_p\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{i^{2p+2}} \cdot i^{s+p+1}}_{= i^{s-p-1}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{(a+p+1)+(s-p-1)}}{\Gamma(a+p+2+s-p-1)} f_{s-p-1}\left(\frac{2(a+p+2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right).$$

Laissons s devenir ∞ et prenons la valeur à la lim $s = \infty$, en tenant compte de la formule (10) de M.^{r} Graf:

$$I^c_{(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{i^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n+c} f_n\left(\frac{2(c+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)};$$

nous obtiendrons:

$$P^{a-1}_{p+1}(x)\, I^a_{(x)} - P^a_p(x)\, I^{a-1}_{(x)} = I^{a+p+1}_{(x)}. \tag{7}$$

Remarque. Si dans (31) de M.^{r} J. H. Graf, nous faisons $m = p + 1$, nous obtenons cette formule; *c'est la relation du 2.^{e} groupe pour les fontions I.*

En y faisant
$$p = 0,$$
on a, avec
$$P_1^{a-1}(x) = \frac{2a}{x},$$
et
$$P_0^a(x) = 1$$
$$I_{(x)}^{a+1} + I_{(x)}^{a-1} = \frac{2a}{x} I_{(x)}^a,$$
qui est une formule du 1.^{r} groupe.

c) *Formules en K.* Nous connaissons la formule:
$$K_{(x)}^a = \frac{1}{\sin a\pi} \left\{ \cos a\pi \, I_{(x)}^a - I_{(x)}^{-a} \right\}$$
$$I_{(x)}^{-a} = (-1)^a I_{(x)}^a.$$
Si, par exemple, a se change en $a + m$, où m est un nombre entier, on aura:
$$K_{(x)}^{a+m} = \frac{\cos(a+m)\pi - (-1)^{a+m}}{\sin(a+m)\pi} I_{(x)}^{a+m}$$
$$\cos(a+m)\pi = \cos a\pi \cdot (-1)^m$$
$$\sin(a+m)\pi = \sin a\pi \cdot (-1)^m.$$
De ceci, nous tirons:
$$\frac{\cos(a+m)\pi - (-1)^a(-1)^m}{\sin(a+m)\pi} = \frac{\cos a\pi - (-1)^a}{\sin a\pi}.$$

Multiplions maintenant les deux membre de (7) par cette expression, nous aurons:
$$P_{p+1}^{a-1}(x) \frac{\cos a\pi - (-1)^a}{\sin a\pi} I_{(x)}^a - P_p^a \frac{\cos(a-1)\pi - (-1)^{a-1}}{\sin(a-1)\pi} I_{(x)}^{a-1} =$$
$$= \frac{\cos(a+p+1)\pi - (-1)^{a+p+1}}{\sin(a+p+1)\pi} I_{(x}^{a+p+1}.$$
D'où
$$P_{p+1}^{a-1}(x) K_{(x)}^a - P_p^a K_{(x)}^{a-1} = K_{(x)}^{a+p+1}. \tag{8}$$

Remarque. Comme tout à l'heure, $p = 0$ nous donne:
$$K_{(x)}^{a+1} + K_{(x)}^{a-1} = K_{(x)}^a \cdot \frac{2a}{x},$$
ce qui n'est pas autre que la relation du groupe en K, déduite de (8). *Cette formule* (8), *est la relation de 2.^{e} groupe en K.*

Nous avons donc obtenu, avec les formules (6), (7) et (8), en fonction des coefficients:

$$P_{p+1}^{a-1}(x) \quad \text{et} \quad P_p^a(x).$$

3 relations générales, en suivant une même marche. La 1.ᵉ est entre les fonctions:

$$P_s^a(x), \qquad P_{s+1}^{a-1}(x) \quad \text{et} \quad P_{s\ \ p-1}^{a+p+1}(x).$$

La 2.ᵉ est entre les fonctions:

$$I_{(x)}^a, \qquad I_{(x)}^{a-1} \quad \text{et} \quad I_{(x)}^{a+p+1}.$$

La 3.ᵉ, entre les fonctions:

$$K_{(x)}^a, \qquad K_{(x)}^{a-1} \quad \text{et} \quad K_{(x)}^{a+p+1}.$$

Dans tous les cas p est entier, arbitraire mais positif.

III. Relations du 3.ᵉ groupe.

Comme nous l'avons dit antérieurement, nous comprenons ici, des relations plus générales que les précédentes. Pour y arriver, revenons au Mémoire de Catalan, déjà cité.

Il y est encore dit:

« Soit x, une fraction continue:

$$x = \left\{ q_1,\ q_2,\ q_3, \dots,\ q_g, \dots\ q_h, \dots\ q_k, \dots \right\},$$

et soient 3 fractions auxillaires:

$$y = \left\{ q_{g+1},\ q_{g+2}, \dots,\ q_h \right\} = \frac{N_{(g+1,\,h)}}{D_{(g+1,\,h)}}$$

$$z = \left\{ q_{h+1},\ q_{h+2}, \dots,\ q_k \right\} = \frac{N_{(h+1,\,k)}}{D_{(h+1,\,k)}}$$

$$u = \left\{ q_{g+1},\ q_{g+2}, \dots,\ q_k \right\} = \frac{N_{(g+1,\,k)}}{D_{(g+1,\,k)}},$$

on a:

$$D_{(k)}\, D_{(g+1,h)} - D_{(h)}\, D_{(g+1,k)} = (-1)^{h-g+1}\, D_{(g)}\, D_{(h+1,\,k)}$$

$$N_{(k)}\, D_{(g+1,h)} - N_{(h)}\, D_{(g+1,k)} = (-1)^{h-g+1}\, N_{(g)}\, D_{(h+1,k)},$$

où

$$\frac{N_{g)}}{D_{g}}, \qquad \frac{N_{h)}}{D_{(h}}, \qquad \frac{N_{k}}{D_{(k}},$$

sont les réduites de rang g, h et k, de la fraction x.

« Ces relations constituent *le théorème de Kramp.* »

a) *Formules en P.* Nous poserons dans les équations ci-dessus:

$$q_1 = \frac{2a}{ix}$$

$$q_2 = \frac{2(a+1)}{ix}$$

$$q_3 = \frac{2(a+2)}{ix}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

La suite x devient:

$$x = \left\{\frac{2a}{ix}, \frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2(a+2)}{ix}, \ldots, \frac{2(a+g)}{ix}, \ldots, \frac{2(a+h)}{ix}, \ldots, \frac{2(a+k)}{ix}, \ldots\right\},$$

et d'un façon générale, nous aurons:

$$\frac{N_{(m-1)}}{D_{m-1)}},$$

pour la réduite de rang m

$$= \frac{f_m\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{f_{m-1}\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)} = \frac{2a}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+1)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+2)}{ix} + \begin{matrix} \vdots \\ + \cfrac{1}{\cfrac{2(a+m-1)}{ix}} \end{matrix}}}.$$

Nous formerons de même, les réduites de rang:

$$(g+1), \qquad (h+1), \qquad g(k+1):$$

nous écrivons par simplification $f_m(2a)$ pour

$$f_m\left(\frac{2a}{ix}, \frac{2}{ix}\right);$$

il vient donc:

$$\frac{N_{(k)}}{D_{(k)}} = \frac{f_{k+1}(2a)}{f_k(2(a+1))} = \frac{i^k P_{k+1}^{a-1}(x)}{i^{k+1} P_k^a(x)}$$

$$\frac{N_{(h)}}{D_{(h)}} = \frac{f_{h+1}(2a)}{f_h(2(a+1))} = \frac{i^h P_{h+1}^{a-1}(x)}{i^{h+1} P_h^a(x)}$$

$$\frac{N_{(g)}}{D_{(g)}} = \frac{f_{g+1}(2a)}{f_{(g)}(2(a+1))} = \frac{i^g P_{g+1}^{a-1}(x)}{i^{g+1} P_g^a(x)}.$$

Reportons nous, aux suites y, z, et u et formons d'une façon analogue les numérateurs et les dénominateurs considérés. Nous aurons:

$$N_{(g+1,h)} = f_{h-g}\left(\frac{2(a+g+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = \frac{1}{i^{h-g}} P_{h-g}^{a+g}(x),$$

$N_{(g+1,h)}$ est le numérateur de la réduite de rang $h-g$ dans la fraction y, et celle-ci commence avec le quotient

$$\frac{2(a+g+1)}{ix}.$$

Son dénominateur sera:

$$D_{(g+1,h)} = f_{h-g-1}\left(\frac{2(a+g+2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = \frac{1}{i^{h-g-1}} P_{h-g-1}^{a+g+1}(x).$$

On aura de même:

$$N_{(h+1,k} = f_{k-h}\left(\frac{2(a+h+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = \frac{1}{i^{k-h}} P_{k-h}^{a+h}(x)$$

$$D_{(h+1,k)} = f_{k-h-1}\left(\frac{2(a+h+2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = \frac{1}{i^{k-h-1}} P_{k-h-1}^{a+h+1}(x)$$

$$N_{(g+1,k)} = f_{k-g}\left(\frac{2(a+g+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = \frac{1}{i^{k-p}} P_{k-g}^{a+g}(x)$$

$$D_{(g+1,k)} = f_{k-g-1}\left(\frac{2(a+g+2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = \frac{1}{i^{k-g-1}} P_{k-g-1}^{a+g+1}(x).$$

Revenons à la 1.[e] formule de Kramp:

$$D_{(k)} D_{(g+1,h)} - D_{(h)} D_{(g+1,k)} = (-1)^{h-g+1} D_{(g)} D_{(h+1,k)}.$$

En introduisant les valeurs que nous venons d'établir, nous aurons:

$$\frac{P_k^a(x)}{i^k} \cdot \frac{P_{h-g-1}^{a+g+1}(x)}{i^{h-g-1}} - \frac{P_h^a(x)}{i^h} \cdot \frac{P_{k-g-1}^{a+g+1}(x)}{i^{k-g-1}} = (-1)^{h-g+1} \frac{P_g^a(x)}{i^g} \cdot \frac{P_{k-h-1}^{a+h+1}(x)}{i^{k-h-1}}.$$

Multiplions les deux membres par $i^{k+h-g-1}$

$$P_k^a(x) \cdot P_{h-g-1}^{a+g+1}(x) - P_h^a(x) \cdot P_{k-g-1}^{a+g+1}(x) =$$

$$= \frac{i^{2h-2g+2+k+h-g-1}}{i^{g+k-h-1}} P_g^a(x) \cdot P_{k-h-1}^{a+h+1}(x)$$

$$= \underbrace{i^{4h-4g+2}}_{=-1} P_g^a(x) \cdot P_{k-h-1}^{a+h+1}(x).$$

Donc:

$$P_h^a(x)\, P_{k-g-1}^{a+g+1}(x) - P_k^a(x)\, P_{h-g-1}^{a+g+1}(x) = P_g^a(x)\, P_{k-h-1}^{a+h+1}(x). \tag{9}$$

C'est ici la 1.e formule du 3.e groupe en P. Nous lui donnerons plus tard une autre forme.

La deuxième relation de Kramp donnait:

$$N_{(k)}\, D_{(g+1,\,h)} - N_{(h)}\, D_{(g+1,\,k)} = (-1)^{h-g+1}\, N_{(g)}\, D_{(h+1,\,k)}.$$

Une substitution analogue à la précédente donnera:

$$\frac{P_{k+1}^{a-1}(x)}{i^{k+1}} \cdot \frac{P_{h-g-1}^{a+g+1}(x)}{i^{h-g-1}} - \frac{P_{h+1}^{a-1}(x)}{i^{h+1}} \cdot \frac{P_{k-g-1}^{a+g+1}(x)}{i^{k-g-1}} =$$

$$= (-1)^{h\ g+1} \frac{P_{g+1}^{a-1}(x)}{i^{g+1}} \cdot \frac{P_{k-h-1}^{a+h+1}(x)}{i^{k-h-1}};$$

en simplifiant les i, il reste:

$$P_{k+1}^{a-1}(x) \cdot P_{h-g-1}^{a+g+1}(x) - P_{h+1}^{a-1}(x) \cdot P_{k-g-1}^{a+g+1} =$$

$$= \underbrace{(-1)^{h-g+1} \frac{i^{k+h-g}}{i^{k-h+g}}}_{=-1} P_{g+1}^{a-1}(x) \cdot P_{k-h-1}^{a+h+1}(x).$$

Donc:

$$-P_{k+1}^{a-1}(x) \cdot P_{h-g-1}^{a+g+1}(x) + P_{h+1}^{a-1}(x) \cdot P_{k-h-1}^{a+g+1}(x) = P_{g+1}^{a-1}(x) \cdot P_{k-h-1}^{a+h+1}(x). \tag{10}$$

C'est la 2.e formule en P, du 3.e groupe. Elle peut s'obtenir de (9), lorsqu'on fait dans celle-ci:

$$a = a - 1 \qquad g = g + 1 \qquad k = k + 1 \quad \text{et} \quad h = h + 1.$$

Ceci est évident.

Remarques. I. D'autre part, dans (9) faisons:

$$\underline{g} = 0 \qquad s = \underline{k-1} \qquad \underline{h} = p + 1 \quad \text{et} \quad a = \underline{a+1}.$$

(Les lettres soulignées sont celles prises dans (9).)

Nous aurons:

$$P_{p+1}^{a-1}(x)\cdot P_s^a(x) - P_{s+1}^{a-1}(x)\cdot P_p^a(x) = P_{s\ p-1}^{a+p+1}(x),$$

c'est-à-dire notre relation du 2.^e groupe en P, donnée au numéro (6).

II. Dans (9) faisons encore:

$$a+1=a \qquad g=0 \qquad k=m \qquad h=1,$$

nous aurons.

$$P_1^{a-1}(x)\cdot P_{m-1}^a(x) - P_m^{a-1}(x)\cdot P_0^a(x) = P_0^{a+1}(x)\cdot P_{m-2}^{a+1}(x),$$

où

$$P_{m-2}^{a+1}(x) + P_m^{a-1}(x) = \frac{2a}{x} P_{m-1}^a(x)$$

Nous retrouvons aussi, notre formule (3), du 1.^r groupe; elle est donnée comme nous l'avons dit par M.^r Graf dans son numéro (41).

III. L'autre formule du 1.^r groupe:

$$P_m^a(x) + P_{m-2}^a(x) = (a+m)\frac{2}{x} P_{m-1}^a(x),$$

numéro (4) et déjà citée par M.^r Graf au numéro (42), peut s'obtenir de (9), en y faisant:

$$k=m-1 \qquad h=m \qquad g=m-2 \quad \text{et} \quad a=a.$$

On obtient alors:

$$P_m^a(x)\,P_0^{a+m-1}(x) - P_{m-1}^a(x)\,P_1^{a+m-1}(x) = P_{m-2}^a(x)\,P_{-2}^{a+m+1}(x).$$

La formule (40) de M.^r J. H. Graf nous donne:

$$P_{-2}^{a+m+1}(x) = (-1)\,P_0^{-a-m-1} = -1,$$

puis

$$P_0^{a+m-1} = 1,$$

et

$$P_1^{a+m-1}(x) = i f_1\left(\frac{2(a+m)}{ix}, \frac{2}{ix}\right) = i\,\frac{2(a+m)}{ix} = \frac{2(a+m)}{x}.$$

En introduisant, il reste:

$$P_m^a(x) + P_{m-2}^a(x) = \frac{2(a+m)}{x} P_{m-1}^a(x).$$

Résultat qui vérifie nos propositions.

b) *Formules en I.* Si, dans la première formule du théorème de Kramp, nous introduisons pour les formes D, leurs valeurs suivant les fonctions $f_n(2a)$, nous aurons:

$$f_k(2a+1))\cdot f_{h-g-1}(2a+g+2)-f_h(2(a+1))\cdot f_{k-g-1}(2(a+g+2))=$$
$$=(-1)^{h-g+1}f_g(2(a+1))\cdot f_{k-h-1}(2(a+h+2)).$$

Rappelons encore la valeur de $I^a_{(x)}$

$$I^a_{(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{i^n\left(\frac{x}{2}\right)^{n+a}f_n\left(\frac{2(a+1))}{ix},\ \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(a+1+n)}.$$

Si nous multiplions toute notre équation transformée en f, par

$$i^{k+h-g-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+a}\cdot\frac{1}{\Gamma(a+k+1)},\tag{α}$$

et si nous laissons k s'approcher de l'infini, nous aurons avec $\lim k=\infty$, *pour le 1.r terme du membre de gauche:*

$$\lim_{k=\infty}i^{h-g-1}f_{h-g-1}\left(\frac{2(a+g+2)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right)\cdot\frac{i^k\left(\frac{x}{2}\right)^{k+a}f_k\left(\frac{2(a+1)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(a+k+1)}=$$
$$=P^{a+g+1}_{h-g-1}(x)\,I^a_{(x)}.$$

Pour le 2.e terme du membre de gauche, nous aurons:

$$\lim_{k=\infty}-i^hf_h\left(\frac{2(a+1)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{i^{k-g-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{(k-g-1)+(a+g+1)}}{\Gamma[(a+g+1)+(k-g-1)+1]}\cdot f_{k-g-1}\left(\frac{2(a+g+2)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right)=$$
$$=-P^a_h(x)\,I^{a+g+1}_{(x)}.$$

Disons ici, que les nombres ajoutés ou retranchés dans l'exposant de $\frac{x}{2}$ et dans la fonction Γ, ne changent pas le terme multiplicateur (α). Ils établissent seulement une harmonie analogue à celle de l'expression donnée plus haut pour $I^a_{(x)}$.

Le membre de droite donnera:

$$\lim_{k=\infty}(-1)^{h+1-g}\frac{i^{k+h-g-1}\frac{i^{k-h-1}}{i^{k-h-1}}\left(\frac{x}{2}\right)^{(k-h-1)+(a+h+1)}}{\Gamma[(k-h-1)+(a+h+1)+1]}f_{k-h-1}\left(\frac{2(a+h+2)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{i^g}{i^g}f_g\left(\frac{2(a+1)}{ix},\ \frac{2}{ix}\right)=\underbrace{(-1)^{h-g+1}\cdot\frac{i^{k+h-g-1}}{i^{k-h-1+g}}}_{=-1}P^a_g(x)\,I^{a+h+1}_{(x)}.$$

En prenant ensemble les 3 termes changés de signe, on aura:

$$P_h^a(x) \cdot I_{(x)}^{a+g+1} - P_{h-g-1}^{a+g+1}(x)\, I_{(x)}^a = P_g^a(x)\, I_{(x)}^{a+h+1}. \tag{11}$$

C'est la relation du 3.[e] groupe pour les fonctions I; mais elle est appelée à subir encore une modification.

En partant de la 2.[e] formule de Kramp, on arrive évidemment à l'équation en f:

$$f_{k+1}(2a) \cdot f_{h-g-1}(2(a+g+2)) - f_{h+1}(2a) \cdot f_{k-g-1}(2(a+g+2)) =$$
$$= (-1)^{h-g+1} f_{g+1}(2a) \cdot f_{k-h-1}(2(a+h+2)).$$

En multipliant le tout par

$$i^{k+h-g}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+a} \cdot \frac{1}{\Gamma(a+k+1)},$$

et en faisant les mêmes considérations que tout à l'heure, nous aurons:

$$I_{(x)}^{a-1} P_{h-g-1}^{a+g+1}(x) - P_{h+1}^{a-1}(x)\, I_{(x)}^{a+g+1} = \underbrace{(-1)^{h-g+1} \frac{i^{k+h-g}}{i^{k+g-h}}}_{=-1} I_{(x)}^{a+h+1} P_{g+1}^{a-1}(x),$$

ou

$$I_{(x)}^{a+g+1} P_{h+1}^{a-1}(x) - I_{(x)}^{a-1} P_{h-g-1}^{a+g+1}(x) = I_{(x)}^{a+h+1} P_{g+1}^{a-1}(x). \tag{12}$$

Comme la relation (10), cette forme peut s'obtenir de celle qui la précède soit de (11), en y faisant:

$$a = a-1, \qquad g = g+1 \quad \text{et} \quad h = h+1.$$

Remarques. I. Si dans la formule (11) nous faisons:

$$g = 0 \qquad a+1 = a \quad \text{et} \quad h = p+1,$$

nous aurons:

$$I_{(x)}^a P_{p+1}^{a-1}(x) - I_{(x)}^{a-1} P_p^a(x) = I_{(x)}^{a+p+1}.$$

Nous retrouvons ainsi la relation que nous avons appelée relation du 2.[e] groupe.

II. En outre, en faisant dans (11):

$$a+1 = a \qquad g = 0 \qquad h = 1,$$

il vient:

$$I_{(x)}^a P_1^{a-1}(x) - I_x^{a+1} P_x^{a-1}(x) = I_x^{a-1} P_0^a(x),$$

d'où

$$I_{(x)}^{a+1} + I_{(x)}^{a-1} = \frac{2a}{x} I_{(x)}^a.$$

C'est comme on le voit la relation du 1.[r] groupe en I.

c) *Formules en K.* Nous avons vu déjà que:

$$\frac{\cos(a+m)\pi - (-1)^{a+m}}{\sin(a+m)\pi} = \frac{\cos a\pi - (-1)^a}{\sin a\pi},$$

lorsque m est entier. En outre, nous savons encore que:

$$K^a_{(x)} = \frac{\cos a\pi - (-1)^a}{\sin a\pi} I^a_{(x)}.$$

Si nous multiplions les termes de (11) par

$$\frac{\cos a\pi - (-1)^a}{\sin a\pi}\,,$$

nous pourrons écrire, puisque g et h sont entiers:

$$\frac{\cos(a+g+1)\pi - (-1)^{a+g+1}}{\sin(a+g+1)\pi} I^{a+g+1}_{(x)} P^a_h(x) - \frac{\cos a\pi - (-1)^a}{\sin a\pi} I^a_{(x)} P^{a+g+1}_{h-g-1}(x) =$$
$$= \frac{\cos(a+h+1)\pi - (-1)^{a+h+1}}{\sin(a+h+1)\pi} I^{a+h+1}_{(x)} P^a_g(x),$$

d'où,

$$K^{a+g+1}_{(x)} P^a_h(x) - K^a_{(x)} P^{a+g+1}_{h-g-1}(x) = K^{a+h+1}_{(x)} P^a_g(x). \qquad (13)$$

Ce sera notre formule du 3.e groupe en K.

Nous pourrons faire subir à (12) une transformation analogue, et nous aurons directement:

$$K^{a+g+1}_{(x)} P^{a-1}_{h+1}(x) - K^{a-1}_{(x)} P^{a+g+1}_{h-g-1}(x) = K^{a+h+1}_{(x)} P^{a-1}_{g+1}(x). \qquad (14)$$

Nous aurions pu obtenir directement cette 2.e relation du 3.e groupe en K en changeant dans (13):

$$a \text{ en } a-1, \qquad g \text{ en } g+1 \quad \text{et} \quad h \text{ en } h+1.$$

Remarques. I. De la fonction du 3.e groupe, nous passons à celle du 2.e groupe en y faisant [dans (13)]:

$$a+1=a, \qquad h=p+1, \qquad g=0\;.$$

nous obtenons alors:

$$K^a_{(x)} \cdot P^{a-1}_{p+1}(x) - K^{a-1}_{(x)} P^a_p(x) = K^{a+p+1}_{(x)},$$

formule que nous connaissons et dont nous avons déjà causé.

II. Nous dériverons la formule du 1.^r groupe en faisant dans celle du 3.^e, (13):

$$a + 1 = a, \qquad g = 0, \qquad h = 1,$$

et nous aurons:

$$K_{(x)}^{a+1} + K_{(x)}^{a-1} = \frac{2a}{x} K_{(x)}^{a}.$$

c'est-à-dire une relation bien connue.

IV. Généralisation des formules.

Si dans nos formules (9), (10), (11), (12), (13) et (14), nous posons:

$$a = m \qquad a + g + 1 = n \qquad a + h + 1 = l,$$

nous aurons:

$$g = n - m - 1$$
$$h = l - m - 1.$$

En introduisant ces substitutions dans les équations (9) et (10), il viendra:

$$P_k^m(x) \cdot P_{l-n-1}^n(x) - P_{l-1-m}^m(x) P_{k+m-n}^n(x) = -P_{n-m-1}^m(x) P_{k-l-m}^l(x) \quad (15)$$

$$P_{k+1}^{m-1}(x) \cdot P_{l-n-1}^n(x) - P_{l-m}^{m-1}(x) P_{k+m-n}^n(x) = -P_{n-m}^{m-1}(x) P_{k+m-l}^l(x). \quad (16)$$

La substitution de m par $m-1$ et k par $k+1$ dans la première de ces équations, donne aussi la deuxième.

Les formules (11) et (12) traitées ainsi donnent:

$$I_{(x)}^n P_{l-1-m}^m(x) - I_{(x)}^m P_{l-n-1}^n(x) = I_{(x)}^l P_{n-m-1}^m(x) \quad (17)$$

$$I_{(x)}^n P_{l-m}^{m-1}(x) - I_{(x)}^{m-1} P_{l-n-1}^n(x) = I_{(x)}^l P_{n-m}^{m-1}(x). \quad (18)$$

Les formules relatives aux fonctions K, (13) et (14), deviennent à leur tour:

$$K_{(x)}^n \cdot P_{l-1-m}^m(x) - K_{(x)}^m P_{l-n-1}^n(x) = K_{(x)}^l P_{n-m-1}^m(x) \quad (19)$$

$$K_{(x)}^n P_{l-m}^{m-1}(x) - K_{(x)}^{m-1} P_{l-n-1}^n(x) = K_{(x)}^l P_{n-m}^{m-1}(x). \quad (20)$$

Les formules (18) et (20) peuvent se dériver respectivement de (17) et (19) comme (16) a été dérivé de (15).

D'après ce que nous avons établi, les équations de (9) à (14) sont liées à la condition de

$$h, \quad g \text{ et } k \text{ entiers et positifs};$$

ceci d'après la constitution des formules de Kramp. Si nous nous bornons au cas ou a, sans être entier, est positif quand même, nous pourrons dire que *les formules de* (15) *à* (20) *sont valables pour tous les nombres m, n et l, positifs, mais différents entre eux d'un nombre entier.*

D'autre part comme formules types, nous avons vu qu'il suffisait de considérer (15), (17) et (19). Voyons maintenant ce qu'elles deviennent quand m, n et l sont négatifs.

[Dans (15), nous prendrons en plus k négatif.]

Après le changement de m, n et l en $-m$, $-n$, $-l$ et de k en $-k$, la relation en P (15), deviendra:

$$P^{-m}_{-k}(x)\, P^{-m}_{-l+n-1}(x) - P^{-m}_{-l-1+m}(x)\, P^{-n}_{-k-m+n}(x) = - P^{-m}_{-n-1+m}(x)\, P^{-l}_{-k-m+l}(x).$$

En empruntant à M.r J. H. Graf la formule (40):

$$P^{a}_{-m}(x) = (-1)^{m-1}\, P^{-a}_{m-2}(x),$$

formule qui peut être déduite directement de la formule de définition des fonctions P, nous aurons:

$$P^{-m}_{-k}(x) = (-1)^{k-1}\, P^{m}_{k-2}(x)$$

$$P^{-n}_{n-l-1}(x) = (-1)^{l-n}\, P^{n}_{l-n-1}(x)$$

$$P^{-m}_{m-l-1}(x) = (-1)^{l-m}\, P^{m}_{l-m-1}(x)$$

$$P^{-n}_{n-k-m}(x) = (-1)^{k+m-n-1}\, P^{m}_{k+m-n-2}(x)$$

$$P^{-m}_{m-n-1}(x) = (-1)^{n-m}\, P^{m}_{n-m-1}(x)$$

$$P^{-l}_{-k+l-m}(x) = (-1)^{k-l+m-1}\, P^{l}_{k+m-l-2}(x).$$

En introduisant ces valeurs dans notre équation précédente, nous aurons, les (-1) se simplifiant:

$$P^{m}_{l-m-1}(x)\, P^{n}_{k+m-n-2}(x) - P^{m}_{k-2}(x)\, P^{n}_{l-n-1}(x) = P^{m}_{n-m-1}(x)\, P^{l}_{k+m-l-2}(x), \quad (15)^{\text{bis}}$$

ce qui n'est pas autre chose que la formule (15), ou k est devenu $k-2$.

La formule à indices négatifs, se ramenant à la formule à indices positifs, nous concluons:

La formule $(15)^{\text{bis}}$, *donnant la relation du 3.^{e} groupe pour les fonctions* $P_{(x)}$, *est une formule générale.* Elle est valable quels que soient m, n, l et k.

Les relations du 2.^{e} groupe que nous avons établies plus haut, n'en sont que des cas particuliers, et les formules du 1.^{r} groupe données par M.^{r} Graf aux numéros (41) et (42) en sont encore des cas plus particuliers.

En tout cas, dans les 3 groupes, les formules sont valables pour des indices quelconques, entiers, fractionnaires, positifs ou négatifs. La seule condition, est que les différences entre les indices soient des nombres entiers.

La relation (17) en I, deviendra avec m, n et l négatif:

$$I_{(x)}^{-m} P_{n-l-1}^{-n}(x) - P_{m-l-1}^{-m}(x) I_{(x)}^{-n} = -I_{(x)}^{-l} P_{m\ n-1}^{-m}(x).$$

Rappelons la formule connue:

$$I_{(x)}^{-a} = (-1)^a I_{(x)}^a,$$

elle donne:

$$I_{(x)}^{-m} = (-1)^m I_{(x)}^m$$

$$I_{(x)}^{-n} = (-1)^n I_{(x)}^n$$

$$I_{(x)}^{-l} = (-1)^l I_{(x)}^l.$$

En introduisant, nous obtenons:

$$I_{(x)}^n P_{l\ m-1}^m(x) - I_{(x)}^m P_{l-n-1}^m(x) = I_{(x)}^l P_{n-m-1}^m(x), \qquad (17)^{\text{bis}}$$

formule identique à la formule (17). Donc:

La relation du 3.^{e} groupe en $I_{(x)}$ *est générale.*

La formule du 2.^{e} groupe (7) que nous avons établie et que M.^{r} Graf a aussi donnée (31), tout en étant générale dans sa signification n'en est qu'un cas particulier. Analogue pour la formule (1) du 1.^{r} groupe, qui est encore un cas plus particulier.

De la même façon (19) deviendra:

$$K_{(x)}^{-m} P_{-l+n-1}^{-n}(x) - K_{(x)}^{-n} P_{m-l-1}^{-m}(x) = -K_{(x)}^{l} P_{+m-n-1}^{-m}(x).$$

Nous savons aussi que:

$$K_{(x)}^{-m} = (-1)^m K_{(x)}^m$$

$$K_{(x)}^{-n} = (-1)^n K_{(x)}^n$$

$$K_{(x)}^{-l} = (-1)^l K_{(x)}^l.$$

En introduisant ces nouvelles valeurs ainsi que celles déjà données pour les fonctions P, nous arrivons à l'équation:

$$K^n_{(x)} P^m_{l-m-1}(x) - K^m_{(x)} P^n_{l-n-1}(x) = K^l_{(x)} P^m_{n-m-1}(x), \qquad (19)^{\text{bis}}$$

c'est-à-dire une formule identique à (19). D'où nous pouvons encore conclure:

La relation du 3.e groupe en $K_{(x)}$ est générale.

Les formules en $K(x)$ du 1.r et du 2.e groupe en sont des cas particuliers.

V. Sur quelques propriétés des équations précédentes.

Si nous divisons l'une par l'autre, les deux formules (15) et (16), nous obtenons:

$$\frac{P^m_k(x)\, P^n_{l-n-1}(x) - P^m_{l-m-1}(x)\, P^n_{k+m-n}(x)}{P^{m-1}_{k+1}(x)\, P^n_{l-n-1}(x) - P^{m-1}_{l-m}(x)\, P^n_{k+m-n}(x)} = \frac{P^m_{n-1-m}(x)}{P^{m-1}_{n-m}}.$$

En outre,

$$\frac{P^m_{n-1-m}(x)}{P^{m-1}_{n-m}(x)} = \frac{i^{n-m-1} f_{n-m-1}\left(\frac{2(m-1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{i^{n-m} f_{n-m}\left(\frac{2(m-2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)},$$

En prenant l'inverse, nous aurons:

$$\frac{P^{m-1}_{n-m}(x)}{P^m_{n-1-m}} = i\,\frac{f_{n-m}\left(\frac{2(m-2)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{f_{n-m-1}\left(\frac{2(m-1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)} =$$

$$= \frac{2(m-2)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(m-1)}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2m}{ix} + \cfrac{1}{\cfrac{2(m+1)}{ix} + \cdots + \cfrac{1}{\cfrac{2(n-3)}{ix}}}}}.$$

Ce qui est donc une fraction continue limitée avec $n - m$ quotients incomplets.

En divisant les formules (17) et (18) l'une par l'autre, nous obtenons:

$$\frac{I^m_{(x)} P^n_{l-n-1}(x) - I^n_{(x)} P^m_{l-m-1}(x)}{I^{m-1}_{(x)} P^n_{l-n-1}(x) - I^n_x P^{m-1}_{l-m}(x)} = \frac{P^m_{n-m-1}(x)}{P^{m-1}_{n-m}(x)}.$$

Nous avons ici le même résultat que pour la division précédente. Les formules K traitées de cette façon nous conduisent aussi au même résultat, et nous pouvons écrire:

$$\frac{K_{(x)}^m P_{l-n-1}^n(x) - K_x^n P_{l-m-1}^m(x)}{K_{(x)}^{m-1} P_{l-n-1}^n(x) - K_{(x)}^n P_{l-m-1}^m(x)} = \frac{P_{n-m-1}^m(x)}{P_{n-m}^{m-1}(x)}.$$

Considérons les premiers membres de nos trois quotients; ils sont égaux entre eux, et de plus ils peuvent se mettre sous la forme d'un quotient de deux déterminants du second ordre.

Donc nous écrirons:

$$\frac{\begin{vmatrix} P_k^m(x) \cdot P_{l-m-1}^m(x) \\ P_{k+m-n}^n(x) \cdot P_{l-n-1}^n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_{k+1}^{m-1}(x) \cdot P_{l-m}^{m-1}(x) \\ P_{k+m-n}^n(x) \cdot P_{l-n-1}^n(x) \end{vmatrix}} = \tag{21}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} I_{(x)}^m \cdot P_{l-1-m}^m(x) \\ I_{(x)}^n \cdot P_{l-1-n}^n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{(x)}^{m-1} \cdot P_{l-m}^{m-1}(x) \\ I_{(x)}^n \cdot P_{l-1-n}^n(x) \end{vmatrix}} = \tag{22}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} K_{(x)}^m \cdot P_{l-1-m}^m(x) \\ K_{(x)}^n \cdot P_{l-1-n}^n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_{(x)}^{m-1} \cdot P_{l-m}^{m-1}(x) \\ K_{(x)}^n \cdot P_{l-1-n}^n(x) \end{vmatrix}}. \tag{23}$$

En examinant ces 6 déterminants nous voyons qu'ils se présentent sous une forme très élégante. Dans les 4 derniers, les premières colonnes proviennent de la substitution des fonctions I et des fonctions K, aux fonctions P avec l'indice k, dans les premières colonnes des deux déterminants du premier quotient. Ensuite, les 3 numérateurs ont les secondes colonnes identiques; les dénominateurs ont aussi la même propriété, mais les termes ici, diffèrent de ceux des secondes colonnes dans les numérateurs.

Le premier quotient qui était, avant la transformation en déterminant:

$$\frac{P_k^m(x) P_{l-n-1}^n - P_{l-m-1}^m(x) P_{k-n+m}^n(x)}{P_{k+1}^{m-1}(x) P_{l-n-1}^n - P_{l-m}^{m-1}(x) P_{k+m-n}^n(x)} = \frac{P_{n-1-m}^m(x)}{P_{n-m}^{m-1}(x)} = p,$$

(p est une simplification d'écriture, nous lui rendrons plus tard sa valeur), nous permet d'écrire:

$$P^n_{l-n-1}(P^m_k - p\,P^{m-1}_{k-1}) + p\,P^{m-1}_{l-m}\,P^n_{k+m-n} - P^m_{l-m-1}\,P^n_{k+m-n} = 0,$$

considérons respectivement:

$$P^n_{l-n-1}, \qquad P^{m-1}_{l-m} \quad \text{et} \quad P^m_{l-m-1},$$

c'est-à-dire les termes qui apparaissent dans les secondes colonnes de nos déterminants, comme:

$$x, \qquad y \quad \text{et} \quad z.$$

Nous pourrons écrire:

$$x\left\{P^m_k(x) - p\cdot P^{m-1}_{k+1}(x)\right\} + y\left\{p\cdot P^n_{k+m-n}(x)\right\} - z\left\{P^n_{k+m-n}(x)\right\} = 0.$$

Le deuxième quotient,

$$\frac{I^m_{(x)}\,P^n_{l-n-1}(x) - I^n_{(x)}\,P^m_{l-m-1}(x)}{I^{m-1}_{(x)}\,P^n_{l-n-1}(x) - I^n_{(x)}\,P^{m-1}_{l-m}(x)} = p,$$

nous donne, après une transformation analogue à la précédente:

$$x\left\{I^m_{(x)} - p\cdot I^{m-1}_{(x)}\right\} + y\left\{p\cdot I^n_{(x)}\right\} - z\left\{I^n_{(x)}\right\} = 0.$$

Le quotient des relations en K:

$$\frac{K^m_{(x)}\,P^n_{l-n-1}(x) - K^n_{(x)}\,P^m_{l-m-1}(x)}{K^{m-1}_{(x)}\,P^n_{l-n-1}(x) - K^n_{(x)}\,P^{m-1}_{l-m}(x)} = p,$$

traité de la même manière, donnera:

$$x\left\{K^m - p\cdot K^{m-1}\right\} + y\left\{p\cdot K^n\right\} - z\left\{K^n\right\} = 0.$$

Nous avons de cette façon, trois équations en x, y et z:

$$x(P^m_k - p\,P^{m-1}_{k+1}) + y\,p\,P^n_{k+m-n} - z\,P^n_{k+m-n} = 0$$

$$x(I^m - p\,I^{m-1}) + y\,p\,I^n - z\,I^n = 0$$

$$x(K^m - p\,K^{m-1}) + y\,p\,K^n - z\,K^n = 0.$$

Ce sont trois équations homogènes. Pour que x, y et z, c'est-à-dire leurs valeurs:

$$P^n_{l-n-1}, \qquad P^{m-1}_{l-m} \quad \text{et} \quad P^m_{l-m-1},$$

soient réelles, il faut que le déterminant des coefficients soit nul.

D'après nos suppositions, x, y et z sont réels, donc:

$$\begin{vmatrix} P_k^m - pP_{k+1}^{m-1} & pP_{k+m-n}^n & -P_{k+m-n}^n \\ I^m - pI^{m-1} & pI^n & -I^n \\ K^m - pK^{m-1} & pK^n & -K^n \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition est évidemment satisfaite, puisque les deux dernières colonnes du déterminant sont proportionnelles.

Mettons ensuite le facteur $-p$ en évidence et développons suivant la dernière colonne; nous obtiendrons:

$$-pP_{k+m-n}^n \begin{vmatrix} I^m - pI^{m-1} & I^n \\ K^m - pK^{m-1} & K^n \end{vmatrix} +$$

$$+pI^n \begin{vmatrix} P_k^m - pP_{k+1}^{m-1} & P_{k+m-n}^n \\ K^m - pK^{m-1} & K^n \end{vmatrix} -$$

$$-pK^n \begin{vmatrix} P_k^m - pP_{k+1}^{m-1} & P_{k+m-1}^n \\ I^m - pI^{m-1} & I^n \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut évidemment que chacun de nos déterminants du 2.ᵉ ordre soit nul.

Considérons le premier seulement, il donnera:

$$\begin{vmatrix} I^m - pI^{m-1} & I^n \\ K^m - pK^{m-1} & K^n \end{vmatrix} = 0;$$

développé ensuite suivant la théorie des déterminants, il devient:

$$\begin{vmatrix} I^m & I^n \\ K^m & K^n \end{vmatrix} - p \begin{vmatrix} I^{m-1} & I^n \\ K^{m-1} & K^n \end{vmatrix} = 0,$$

d'où:

$$= \frac{\begin{vmatrix} I_{(x)}^m & I_{(x)}^n \\ K_{(x)}^m & K_{(x)}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_{(x)}^{m-1} & K_{(x)}^n \\ I_{(x)}^{m-1} & I_{(x)}^n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} I_{(x)}^m & K_{(x)}^m \\ I_{(x)}^n & K_{(x)}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{(x)}^{m-1} & K_{(x)}^{m-1} \\ I_{(x)}^n & K_{(x)}^n \end{vmatrix}}. \tag{24}$$

Rappelons ici la valeur:

$$p = \frac{P_{n-1-m}^m(x)}{P_{n-m}^{m-1}(x)}.$$

La deuxième forme des nouveaux quotients est obtenue par une permutation des éléments de la première. Si nous comparons les deux nouveaux déterminants avec ceux des quotients égaux, (21), (22) et (23), nous voyons que les premières colonnes dans les déterminants (24) sont les mêmes que dans les déterminants (22), et les deuxièmes colonnes dans (24) sont les premières colonnes dans (23).

Le dernier résultat obtenu, nous permet d'écrire:

$$P^{m-1}_{n-m}(x) = \text{const.} \begin{vmatrix} I^{m-1}_{(x)} & K^{m-1}_{(x)} \\ I^{n}_{(x)} & K^{n}_{(x)} \end{vmatrix}.$$

Pour déterminer cette constante, faisons $m = n$, nous aurons:

$$P^{n-1}_{0}(x) = 1 = \text{const.} \left\{ I^{n-1}_{(x)} K^{n}_{(x)} - I^{n}_{(x)} K^{n-1}_{(x)} \right\}.$$

Mais la formule de Weber, nous donne:

$$I^{n-1}_{(x)} K^{n} - I^{n}_{(x)} K^{n-1}_{(x)} = -\frac{2}{\pi x}.$$

Donc:

$$C = \text{const.} = -\frac{\pi x}{2}.$$

D'où:

$$P^{m-1}_{n-m}(x) = \frac{\pi x}{2} \begin{vmatrix} I^{n}_{(x)} & K^{n}_{(x)} \\ I^{m-1}_{(x)} & K^{m-1}_{(x)} \end{vmatrix} \tag{25}$$

Cette formule-ci étant analogue à la formule (35) de M.[r] Graf, nous en concluons donc que les équations desquelles nous sommes partis, étaient exactes, et que la méthode suivie était bonne. D'autre part, si, après avoir établi les trois quotients (21), (22) et (23), égaux à p, nous avions introduit pour p sa valeur en fonction de la formule (35) précitée, nous aurions obtenu directement les deux déterminants du quotient (24). Nous pouvons donc considérer ce qui vient d'être fait, comme une méthode de vérification de nos formules.

VI. Développement de la fonction O.

Dans la théorie des fonctions Besséliennes, on arrive facilement à l'expression:

$$O^n_{(x)} = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \frac{1}{2} \left\{ t^n + (-1)^n t^{-n} \right\} ds, \tag{1}$$

où:

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Le développement de cette fonction O, qui est la fonction Bessélienne de 2.e espèce, en une série, a été fait par Neumann. Il est l'objet de transformations assez longues, et l'étude des fractions continues peut le simplifier en partie.

Nous avons eu dans les fonctions O:

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

$$T_n = \frac{1}{2}(t^n + (-1)^n t^{-n}),$$

la multiplication de ces deux valeurs donne:

$$2 s T_n = \frac{1}{2}(t^n + (-1)^n t^{-n})(t - t^{-1})$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ t^{n+1} + (-1)^{n+1} t^{-(n+1)} \right\} - \frac{1}{2}\left\{ t^{n-1} + (-1)^{n-1} t^{-(n-1)} \right\}$$

$$= T_{n+1} - T_{n-1}.$$

D'où:

$$2 s T_n = T_{n+1} - T_{n-1}. \tag{2}$$

En divisant par T_n, il vient:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \frac{T_{n-1}}{T_n} = 2s + \cfrac{1}{\cfrac{T_n}{T_{n-1}}}.$$

Mais on a aussi:

$$2 s T_{n-1} = T_n - T_{n-2},$$

soit en calculant cette forme comme (2), soit en changeant n en $n-1$ dans (2).

D'où:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cdots + \cfrac{1}{\frac{T_1}{T_0}}}}}.$$

La dernière forme analogue à (2) que l'on a dû considérer sera:

$$2sT_1 = T_2 - T_0.$$

On peut en vérifier l'exactitude et écrire:

$$T_1 = \frac{1}{2}(t - t^{-1}) = s$$

$$2s = (t - t^{-1})$$

$$2sT_1 = \frac{1}{2}(t - t^{-1})^2 = \frac{1}{2}\left\{t^2 + t^{-2} - 2\frac{t}{t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{t^2 + t^{-2}\right\} - 1.$$

En outre,

$$T_2 = \frac{1}{2}(t^2 + t^{-2})$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(t^0 + t^{-0}) = 1$$

$$T_2 - T_0 = \frac{1}{2}(t^2 + t^{-2}) - 1.$$

Donc:

$$2sT_1 = T_2 - T_0,$$

ce qui vérifie l'exactitude de notre proposition.

En revenant à la valeur du 1.^{r} quotient, nous avons:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \underbrace{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cdots + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{s}}}}}_{n \text{ termes}}.$$

La suite est donc une fraction continue; elle a $(n+1)$ quotients incomplets, et la $(n+1)^{ème}$ réduite en sera la dernière. D'après ce que nous savons de la théorie des fractions continues, on pourra écrire:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{[2s,\ 2s,\ 2s, \ldots,\ 2s,\ s]}{[2s,\ 2s, \ldots,\ 2s,\ s]}. \tag{3}$$

Le numérateur ayant $(n+1)$ termes, n en $2s$ et 1 en s; le dénominateur ayant n termes, $(n-1)$ en $2s$ et 1 en s; la propriété *a)* des fonctions continues permet d'écrire:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{s\overbrace{[2s,\ 2s, \ldots,\ 2s,\ 2s]}^{n \text{ termes}} + \overbrace{[2s,\ 2s, \ldots,\ 2s]}^{(n-1) \text{ termes}}}{s\underbrace{[2s,\ 2s, \ldots,\ 2s]}_{(n-1) \text{ termes}} + \underbrace{[2s,\ 2s, \ldots,\ 2s]}_{(n-2) \text{ termes}}}. \tag{4}$$

Nous avions:

$$f_n(a,\ b) = [a,\ a+b,\ a+2b, \ldots,\ a+(n-1)b]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \binom{n-\lambda}{\lambda} (a+\lambda b)(a+(\lambda+1)b)\ldots(a+(n-\lambda-1)b).$$

Faisons:

$$a = 2s \quad \text{et} \quad b = 0,$$

nous pourrons écrire:

$$f_n(2s,\ 0) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \binom{n-\lambda}{\lambda} (2s)^{n-2\lambda}.$$

Ces considérations introduites dans la formule (3) donnent:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{sf_n(2s,\ 0) + f_{n-1}(2s,\ 0)}{sf_{n-1}(2s,\ 0) + f_{n-2}(2s,\ 0)}. \tag{5}$$

Nous pourrons dire que le dénominateur T_n sera égal à l'autre dénominateur son voisin, multiplié par une constante C:

$$T_n = C\left\{sf_{n-1}(2s,\ 0) + f_{n-2}(2s,\ 0)\right\}.$$

Pour déterminer C faisons $n=2$:

$$T_2 = C\left\{sf_1(2s,\ 0) + f_0(2s,\ 0)\right\},$$

mais

$$f_1(2s,\ 0) = 2s,$$

et

$$f_0(2s,\ 0) = 1.$$

Donc:

$$T_2 = (2s^2 + 1) \cdot C,$$

et d'après la formule de définition des fonctions T:

$$T_2 = \frac{1}{2}(t^2 + t^{-2})$$

$$s = \frac{1}{2}(t - t^{-1}),$$

d'où:

$$T_2 = \left(2 \cdot \frac{1}{4}(t - t^{-1})^2 + 1\right)C$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left[\left\{t^2 + t^{-2}\right\} - 2\,\frac{t}{t}\right] + 1\right)C.$$

En simplifiant et en égalisant les deux valeurs de T_2, on a:

$$\frac{1}{2}\left\{t^2 + t^{-2}\right\} = C \cdot \frac{1}{2}\left\{t^2 + t^{-2}\right\}.$$

Donc:

$$C = 1,$$

et finalement:

$$T_n = s f_{n-1}(2s,\ 0) + f_{n-2}(2s,\ 0). \tag{6}$$

Revenons à notre formule (1) du présent chapître:

$$O^n_{(x)} = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \frac{1}{2}\left\{t^n + (-1)^n t^{-n}\right\} ds$$

$$= \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, T_n\, ds$$

$$= \int_0^{\frac{N}{x}} \underbrace{e^{-xs} s f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds}_{\mathrm{I}} + \int_0^{\frac{N}{x}} \underbrace{e^{-xs} f_{n-2}(2s,\ 0)\, ds.}_{\mathrm{II}} \tag{7}$$

La première intégrale donne, en remplaçant f_{n-1} par sa valeur:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!(n-1-2\lambda)!}(2s)^{n-2\lambda-1} ds$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!(n-1-2\lambda)!}\,\frac{2^{n-2\lambda}}{x^{n-2\lambda}}\cdot\frac{1}{x}\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u}u^{n-2\lambda}du,$$

après avoir fait:

$$xs = u \qquad ds = \frac{1}{x}du;$$

mais

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u}u^{n-2\lambda}du = \Gamma(n-2\lambda+1) = (n-2\lambda)!$$

Donc:

$$1.^{\text{e}}\text{ intég.} \quad = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!(n-2\lambda)!}{\lambda!(n-2\lambda-1)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda}\frac{1}{x}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{1}{4}\,\frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!}(n-2\lambda)\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}. \tag{8}$$

La seconde intégrale donne de la même façon:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{(n-2-\lambda)!}{\lambda!(n-2-2\lambda)!}(2s)^{n-2-2\lambda}ds =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2}\,\frac{(n-2-\lambda)!}{\lambda!(n-2-2\lambda)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1-2\lambda}\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u}u^{n-2-2\lambda}du,$$

mais

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u}u^{n-2-2\lambda}du = \Gamma(n-2-2\lambda+1) = (n-2-2\lambda)!$$

Donc:

$$2.^{\text{e}}\text{ intég.} \quad = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2}\,\frac{(n-2-\lambda)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1-2\lambda}. \tag{9}$$

En mettant ensemble, les formes (8) et (9) nous aurons:

$$O^n_{(x)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{1}{4}\,\frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!}(n-2\lambda)\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda} +$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2}\,\frac{(n-2-\lambda)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1-2\lambda}. \tag{10}$$

Cette formule (10) qui constitue un double développement par sommation, peut se ramener aussi à une seule sommation.

Développons les $2\sum$ en une série suivant les puissances décroissantes de $\frac{2}{x}$ nous aurons:

le 1.r terme de la série avec $\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1}$, provenant du 1.r terme de la 1.e $\sum$,

le 2.e terme avec $\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}$ donné par le 2.e de la 1.e $\sum$ et le 1.r de la 2.e $\sum$,

le 3.e » » $\left(\frac{2}{x}\right)^{n-3}$ » » 3.e » 1.e $\sum$ » 2.e » 2.e $\sum$,

. . . .

le λe » » $\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}$ » » λe » 1.e $\sum$ » $(\lambda-1)$e » 2.e $\sum$,

. . . .

Formons maintenant ce λe terme:

$$\left\{\frac{n}{4}\,\frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} - \frac{\lambda}{2}\,\frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} + \frac{1}{2}\,\frac{(n-2-(\lambda-1))!}{(\lambda-1)!}\right\}\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}$$

$$= \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}\frac{n}{4}\,\frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!},$$

puisque les deux dernières parties se détruisent.

Prenons maintenant le dernier terme et considérons 2 cas:

I. n pair $=2p$, II. n impair $=2p+1$.

I. Le dernier terme de la 1.e $\sum$ est, avec $\lambda=\frac{n}{2}-1$:

$$\left(\frac{2}{x}\right)^3\frac{n}{4};$$

il s'ajoute au terme avec $\lambda = \frac{n}{2} - 2$ de la 2.e $\sum$, lequel est:

$$\left(\frac{2}{x}\right)^3 \left(\frac{n^2}{8} - \frac{n}{4}\right).$$

L'addition donne:

$$\left(\frac{2}{x}\right)^3 \frac{n^2}{8}.$$

ce qui n'est pas autre chose que le terme en $\lambda = \frac{n}{2} - 1$, de la série générale unique dont nous avons établi le terme λ général.

Cette série aura donc pour dernier terme le dernier de la 2.e $\sum$, celui en $\lambda = \frac{n}{2} - 1$, soit $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x}$. On peut aussi le considérer comme fourni par la série unique avec $\lambda = \frac{n}{2}$.

D'où nous concluons que la nouvelle série pour n pair, ayant encore le terme $\lambda = \frac{n}{2}$ va de 0 jusqu'à $\lambda < \frac{n+1}{2}$.

II. Dans ce cas, le dernier terme de la 1.e $\sum$ a $\lambda = \frac{n-1}{2}$ et il est:

$$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^2,$$

il s'ajoute avec celui en $\lambda = \frac{n-3}{2}$ de la 2.e $\sum$; celui-ci est le dernier dans cette sommation:

$$\left(\frac{n}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^2.$$

Leur somme donnera forcément le dernier terme de la nouvelle série, soit:

$$\frac{n}{4}\left(\frac{2}{x}\right)^2.$$

Celui-ci peut aussi être obtenu du terme général de la série unique, ou $\lambda = \frac{n-1}{2}$; donc ici encore λ est limité supérieurement par $\frac{n+1}{2}$, soit:

$$\lambda < \frac{n+1}{2}.$$

Ceci nous permet de dire que dans les 2 cas la série de terme général:

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda} \frac{n}{4} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!},$$

qui est la somme des deux autres, va de

$$\lambda = 0 \quad \text{à} \quad \lambda < \frac{n+1}{2}.$$

Donc:

$$O^n_{(x)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}. \tag{11}$$

Nous retrouvons ainsi, une formule donnée en déduction d'une méthode de calcul différente, par NEUMANN.

Berne, juin 1895.

Sulle intersezioni di tre superficie algebriche.

(*Di* Luigi Berzolari, *a Torino.*)

Scopo principale di questo lavoro è la dimostrazione (algebrica) rigorosa del seguente teorema fondamentale:

Date tre qualunque superficie algebriche di ordini l, m, n, semplici o comunque composte (anche dotate di infiniti punti multipli), ma non passanti per una medesima curva, la condizione necessaria e sufficiente perchè in un loro punto comune O, *dove esse hanno rispettivamente le multiplicità* λ, μ, ν, *siano raccolte precisamente* $\lambda\mu\nu$, *e non più, delle loro* lmn *intersezioni, è che i tre coni tangenti alle superficie nel punto* O *non abbiano in comune nessuna generatrice, qualunque siano del resto le singolarità presentate da quei coni.*

La dimostrazione che ne darò sussiste, senza modificazioni sostanziali, pel caso di n (> 2) varietà algebriche (ad $n-1$ dimensioni) dello spazio ad n dimensioni, e soltanto per evitare complicazioni di pura forma viene qui esposta per $n = 3$. Essa è un'estensione (che non si presenta però del tutto ovvia) di quella che fu data per la prima volta dal sig. Voss (*) per due curve

(*) Voss, *Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Annalen, Bd. 27, pag. 533 e seg.[1]). — V. altresì l'osservazione del sig. Noether in una nota a piè della pag. 144 del vol. 40 dei Math. Ann.

Nelle sue lezioni del 1894-95 il prof. Segre ha approfondito ulteriormente la questione, estendendo il calcolo stesso del sig. Voss al caso in cui le due curve abbiano nel punto che si considera una tangente comune, e cercando allora quante intersezioni delle due curve vengano a cadere in quel punto. Come applicazioni immediate di questi risultati alle intersezioni di una curva con le prime polari di punti generici o di punti della curva o di una tangente singolare, come pure alle intersezioni della curva con la piane, e che fu poi riportata dal sig. Bertini nella Nota che ha per titolo *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rendic. del R. Istituto Lombardo, serie 2.ª, vol. 24, 5 novembre 1891).

In seguito, supponendo che i tre coni sopra nominati contengano una stessa generatrice, la quale abbia inoltre riunite in 0 quante si vogliano intersezioni con ciascuna delle date superficie, determino il numero delle intersezioni di queste ultime che vengono ulteriormente a cadere *in generale* nel punto 0, assegnando tutti i casi in cui questo numero diventa ancor più elevato. Per ultimo, come applicazione dei risultati ottenuti, dimostro alcune proposizioni relative all'abbassamento che un punto multiplo di una superficie produce nella classe di questa, considerando in modo particolare il caso in cui il cono tangente nel punto multiplo possiede una generatrice doppia.

Una dimostrazione rigorosa del teorema enunciato in principio, per quanto mi consta, non è stata data finora, neanche per lo spazio ordinario, dove di solito la proprietà viene ammessa come intuitiva; i risultati rimanenti (n.ⁱ 7, 8, 9 e 10) sono del tutto nuovi.

Sembrami anche degno di nota, per la sua eleganza, il modo col quale si prova nel n.° 2 che le tre superficie hanno lmn punti comuni, benchè di questo, come di altri analoghi teoremi, si conoscano già (anche per un iperspazio) parecchie dimostrazioni.

1. In coordinate omogenee siano

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv a_{00} + (a_{10}x_1 + a_{11}x_2) + \cdots + (a_{l0}x_1^l + \cdots + a_{ll}x_2^l) = 0, \\ B &\equiv b_{00} + (b_{10}x_1 + b_{11}x_2) + \cdots + (b_{m0}x_1^m + \cdots + b_{mm}x_2^m) = 0, \\ C &\equiv c_{00} + (c_{10}x_1 + c_{11}x_2) + \cdots + (c_{n0}x_1^n + \cdots + c_{nn}x_2^n) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

le equazioni delle tre superficie A, B, C, dove per es. le a_{i0}, $a_{i1}, \ldots, a_{ii}$ sono forme binarie di grado $l-i$ nelle x_3, x_4. Volendo eliminare dalle (1) le x_1, x_2, non si conosce finora (a meno che l, m, n non siano fra loro uguali) un'espressione della risultante, che, essendo priva di fattori estranei, abbia

Hessiana, egli ha poi stabilite le proposizioni fondamentali sulle curve piane algebriche e sulle loro singolarità più comuni, con precisione e rigore maggiori di quanto non si trovi nei noti trattati classici. Ad es. egli dimostrò per questa via le proposizioni analoghe a quelle che per le superficie io tratterò alla fine del presente lavoro (n.° 10).

la forma di determinante. È però dovuto al CAYLEY (*) un metodo per ottenere quella risultante *come quoziente di due determinanti;* ed ecco, brevemente, in che consiste. Moltiplichiamo le (1) risp. per

$$\begin{array}{l} 1;\ x_1,\ x_2;\ x_1^2,\ x_1x_2,\ x_2^2;\ldots;\ x_1^{m+n-2},\ x_1^{m+n-3}x_2,\ldots,\ x_2^{m+n-2};\\ 1;\ x_1,\ x_2;\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\ x_1^{n+l-2},\ x_1^{n+l-3}x_2,\ldots,\ x_2^{n+l-2};\\ 1;\ x_1,\ x_2;\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\ x_1^{l+m-2},\ x_1^{l+m-3}x_2,\ldots,\ x_2^{l+m-2}. \end{array}$$

Otteniamo così

$$\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)+\frac{1}{2}(n+l)(n+l-1)+\frac{1}{2}(l+m)(l+m-1) \quad (2)$$

equazioni lineari fra le quantità

$$1;\ x_1,\ x_2;\ldots;\ x_1^{l+m+n-2},\ x_1^{l+m+n-3}x_2,\ldots,\ x_2^{l+m+n-2},$$

che sono in numero di

$$\frac{1}{2}(l+m+n)(l+m+n-1). \quad (3)$$

Tali equazioni non sono però fra loro indipendenti: invero, se si moltiplicano le identità

$$BC=CB, \qquad CA=AC, \qquad AB=BA$$

risp. per

$$\begin{array}{l} 1;\ x_1,\ x_2;\ldots;\ x_1^{l-2},\ x_1^{l-3}x_2,\ldots,\ x_2^{l-2};\\ 1;\ x_1,\ x_2;\ldots;\ x_1^{m-2},\ x_1^{m-3}x_2,\ldots,\ x_2^{m-2};\\ 1;\ x_1,\ x_2;\ldots;\ x_1^{n-2},\ x_1^{n-3}x_2,\ldots,\ x_2^{n-2}, \end{array}$$

si ottengono

$$\frac{1}{2}l(l-1)+\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1) \quad (4)$$

relazioni lineari fra le precedenti equazioni: il numero (4) è la differenza fra

(*) CAYLEY, *On the Theory of Elimination* (Cambridge and Dublin Math. Journal, vol. III, pag. 116; oppure *The Collected Mathem. Papers,* vol. I, pag. 370). — La teoria di CAYLEY è riprodotta succintamente nell'*Algebra superiore* di SALMON (pag. 125 e seg. della 2.ª ediz. francese).

i numeri (2) e (3). Ad. es., la prima di tali relazioni è:

$$c_{00}\cdot B + (c_{10}\cdot x_1 B + c_{11}\cdot x_2 B) + \cdots +$$
$$+ (c_{n0}\cdot x_1^n B + c_{n1}\cdot x_1^{n-1}x_2 B + \cdots + c_{nn}\cdot x_2^n B)$$
$$- b_{00}\cdot C - (b_{10}\cdot x_1 C + b_{11}\cdot x_2 C) - \cdots -$$
$$- (b_{m0}\cdot x_1^m C + b_{m1}\cdot x_1^{m-1}x_2 C + \cdots + b_{mm}\cdot x_2^m C) = 0.$$

Si formino ora due matrici H ed H', le quali abbiano risp. per elementi i coefficienti delle equazioni sopra costruite, e quelli delle relazioni ultimamente trovate. Entrambe conterranno un numero di linee dato dall'espressione (2), mentre il numero delle loro colonne sarà dato risp. dalle (3) e (4). Allora il Cayley ha trovato che la risultante R delle (1) si può ottenere dividendo uno qualunque dei determinanti tratti dalla matrice H (il quale non sia nullo identicamente) per il determinante *supplementare* tratto dalla matrice H', cioè per quello formato con le linee di H' aventi lo stesso posto di quelle che si sono dianzi trascurate in H. Di guisa che, indicando con χ e χ' due tali determinanti, si avrà:

$$R = \frac{\chi}{\chi'}\,.$$

Il modo di composizione delle matrici H ed H' risulta del tutto chiaro dalle osservazioni seguenti, nelle quali introduciamo altresì alcune notazioni, che si manteranno in tutto il lavoro. La H è costituita da tre matrici parziali, che diremo 1, 2, 3, di cui tutti gli elementi appartengono come coefficienti soltanto alla prima, od alla seconda, od alla terza delle (1). La 1 contiene $m+n-1$ gruppi di linee, formati risp. di $1, 2, \ldots, m+n-1$ linee; la 2 ne contiene $n+l-1$, formati risp. di $1, 2, \ldots, n+l-1$ linee; la 3 ne contiene $l+m-1$, formati risp. di $1, 2, \ldots, l+m-1$ linee. Le colonne di H si dividono invece in $l+m+n-1$ gruppi, contenenti ordinatamente $1, 2, \ldots, l+m+n-1$ colonne. Mediante siffatti gruppi di linee e colonne la matrice 1 risulta divisa in $(l+m+n-1)(m+n-1)$ matrici parziali; e chiamando α_{ij} quella che è comune all' i^{mo} gruppo di linee ed all' j^{mo} gruppo di colonne, si ha:

$$\alpha_{ij} = \left|\begin{matrix} a_{j-i,0} & a_{j-i,1}\ldots & a_{j-i,j-i} & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & a_{j-i,0}\ldots & a_{j-i,j-i-1} & a_{j-i,j-i} & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{j-i,j-i} \end{matrix}\right|$$

dove la matrice del secondo membro contiene i linee e j colonne: ogni suo elemento che non sia nullo è una forma binaria di grado $l-j+i$ in x_3, x_4. Denotando analogamente con β_{ij}, γ_{ij} le matrici comuni all' i^{mo} gruppo di linee ed all' j^{mo} gruppo di colonne di 2 e 3, e scrivendo 0 per significare una matrice, di cui tutti gli elementi sono nulli, la matrice H si può scrivere come segue:

$$H = \left| \begin{array}{cccccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \dots & \alpha_{1,l+1} & 0 & 0 \dots & & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \dots & \alpha_{2,l+1} & \alpha_{2,l+2} & 0 \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & & \alpha_{m+n-1,\, l+m+n-1} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \dots & \beta_{1,m+1} & & 0 \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & & \beta_{n+l-1,\, l+m+n-1} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \dots & \gamma_{1,n+1} & & 0 \dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots & \dots & \dots & & \gamma_{l+m-1,\, l+m+n-1} \end{array} \right| .$$

La matrice H' è formata di tre matrici parziali 1', 2', 3', di cui ciascuna, per ciò che riguarda il numero e la disposizione dei gruppi di lince, nonchè delle linee di ciascun gruppo, è formata nell'identico modo delle matrici 1, 2, 3 di H. Quanto alle colonne, la H' si scinde in tre matrici I', II', III': la I' contiene $n-1$ gruppi, cui appartengono ordinatamente 1, 2,..., $n-1$ colonne; la II' ne contiene $l-1$ con 1, 2,..., $l-1$ colonne risp., e la III' ne contiene $m-1$ con risp. 1, 2,..., $m-1$ colonne. Mediante siffatte matrici di linee e di colonne, la H' risulta scomposta (oltre che in tre di elementi tutti nulli) in sei nuove matrici, ciascuna delle quali è formata coi coefficienti di una sola delle (1). Ognuna alla sua volta risulta poi composta di matrici minori, tali che tutti gli elementi di una qualunque di esse sono di uno stesso grado in x_3, x_4: se una di tali matrici minori è quella comune all' i^{mo} gruppo di linee ed all' j^{mo} gruppo di colonne, per es., della matrice 2' I', ogni suo elemento è una forma di grado $l-i+j$ in x_3, x_4. Sono nulli tutti gli elementi delle tre matrici 1' II', 2' III', 3' I'; mentre gli elementi delle matrici 1' I', 2' II', 3' III' si trovano tutti, rispetto alle (1), cambiati di segno. Possiamo dunque scrivere:

$$
H' = \begin{array}{cccccc|cccc|cccc|c}
\multicolumn{6}{c}{\mathrm{I}'} & \multicolumn{4}{c}{\mathrm{II}'} & \multicolumn{4}{c}{\mathrm{III}'} & \\
-b_{00} & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & & & & & c_{00}\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & \\
-b_{10} & -b_{00} & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & & & & & c_{10}\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & \\
-b_{11} & 0 & -b_{00}\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & & & & & c_{11}\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & \\
\multicolumn{6}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & & & & & \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \\
0 & 0 & 0\ldots & -b_{m0} & 0\ldots & 0 & \multicolumn{4}{c|}{0} & 0\ldots & c_{n0} & 0\ldots & 0 & 1' \\
0 & 0 & 0\ldots & -b_{m1} & -b_{m0}\ldots & 0 & & & & & 0\ldots & c_{n1} & c_{n0}\ldots & 0 & \\
\multicolumn{6}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & & & & & \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & -b_{m0} & & & & & 0\ldots & 0 & 0\ldots & c_{n0} & \\
\cline{1-14}
a_{00} & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & -c_{00}\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & & & & & \\
\multicolumn{6}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & & & & & \\
0 & 0 & 0\ldots & a_{l0} & 0\ldots & 0 & 0\ldots & -c_{n0} & 0\ldots & 0 & \multicolumn{4}{c|}{0} & 2' \\
\multicolumn{6}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & & & & & \\
0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0\ldots & a_{l0} & 0\ldots & 0 & 0\ldots & -c_{n0} & & & & & \\
\cline{1-14}
& & & & & & b_{00}\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & -a_0\ldots & 0 & 0\ldots & 0 & \\
& & & & & & \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \\
\multicolumn{6}{c|}{0} & 0\ldots & b_{m0} & 0\ldots & 0 & 0\ldots & -a_{l0} & 0\ldots & 0 & 3' \\
& & & & & & \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \\
& & & & & & 0\ldots & 0 & 0\ldots & b_{m0} & 0\ldots & 0 & 0\ldots & -a_{l0} & \\
\end{array}
$$

2. Ciò posto, poichè per ipotesi il numero delle intersezioni delle tre date superficie è finito, possiamo supporre di aver scelto il tetraedro di riferimento in modo che il suo spigolo $x_3 = x_4 = 0$ non sia tagliato da nessuna delle congiungenti due di quelle intersezioni. L'equazione

$$R = 0,$$

che rappresenta l'insieme dei piani projettanti dal detto spigolo quelle intersezioni, avrà quindi tante radici $\frac{x_3}{x_4}$ quante sono le intersezioni stesse, sicchè il numero di queste ultime si avrà cercando il grado di R, cioè la differenza dei gradi di χ e χ'.

Per trarre da H il determinante χ, prendiamo in generale ρ_i linee del gruppo i^{mo} della matrice 1 ($i = 1, 2, \ldots, m+n-1$), σ_i linee del gruppo i^{mo} della matrice 2 ($i = 1, 2, \ldots, n+l-1$), e τ_i linee del gruppo i^{mo} della matrice 3 ($i = 1, 2, \ldots, l+m-1$). Analogamente, per trarre da H' il determinante χ', prendiamo ρ'_i linee del gruppo i^{mo} della matrice $1'$ ($i = 1, 2, \ldots, m+n-1$), e così via.

Poichè gli ordini di χ e χ' sono dati risp. dalle espressioni (3) e (4), si avrà:

$$\sum_1^{m+n-1} \rho_i + \sum_1^{n+l-1} \sigma_i + \sum_1^{l+m-1} \tau_i = \frac{(l+m+n)(l+m+n-1)}{2}, \tag{5}$$

$$\sum_1^{m+n-1} \rho'_i + \sum_1^{n+l-1} \sigma'_i + \sum_1^{l+m-1} \tau'_i = \frac{l(l-1)+m(m-1)+n(n-1)}{2}. \tag{5'}$$

Inoltre sarà

$$\rho_i + \rho'_i = i, \qquad \sigma_i + \sigma'_i = i, \qquad \tau_i + \tau'_i = i \tag{6}$$

per tutti i valori di i che vanno da 1 risp. fino ad $m+n-1$, $n+l-1$, $l+m-1$.

Un elemento qualsiasi di χ si otterrà scegliendo ordinatamente in ciascuna delle ρ_1 linee del primo gruppo della matrice 1 un elemento, la cui colonna corrispondente apparterrà ad un gruppo di posto $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1\rho_1}$; indi in ciascuna delle ρ_2 linee del secondo gruppo di 1 un elemento situato in una colonna appartenente ad un gruppo di posto $r_{21}, r_{22}, \ldots, r_{2\rho_2}; \ldots$; in ciascuna delle ρ_{m+n-1} linee dell'ultimo gruppo di 1 un elemento situato in una colonna di un gruppo di posto $r_{m+n-1,1}, \ldots, r_{m+n-1,\rho_{m+n-1}}$; e facendo l'operazione analoga per le diverse linee fissate nei vari gruppi delle matrici 2 e 3, col che si verranno ad introdurre, con significato analogo a quello dei numeri r, nuovi numeri che chiameremo $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1\sigma_1}; s_{21}, \ldots, s_{2\sigma_2}; \ldots; s_{n+l-1,1}, \ldots, s_{n+l-1,\sigma_{n+l-1}}$; — $t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1\tau_1}; t_{21}, \ldots, t_{2\tau_2}; \ldots; t_{l+m-1,1}, \ldots, t_{l+m-1,\tau_{l+m-1}}$. In tal guisa vengono a considerarsi, prescindendo dall'ordine, tutte le colonne della matrice H, onde:

$$\sum r + \sum s + \sum t = 1^2 + 2^2 + \cdots + (l+m+n-1)^2,$$

ossia:

$$\sum r + \sum s + \sum t = \frac{(l+m+n)(l+m+n-1)(2l+2m+2n-1)}{6}. \tag{7}$$

Un elemento qualunque del determinante χ' si formerà in modo analogo al precedente, e s'introdurranno così dei numeri $r'_{11}, \ldots, r'_{1\rho'_1}; \ldots; r'_{m+n-1,1}, \ldots,$

$r'_{m+n-1,\rho'_{m+n-1}}$; $s'_{11},\dots, s'_{n+l-1,\sigma'_{n+l-1}}$; $t'_{11},\dots, t'_{l+m-1,\tau'_{l+m-1}}$, legati dalla relazione

$$\sum r' + \sum s' + \sum t' = \frac{l(l-1)(2l-1) + m(m-1)(2m-1) + n(n-1)(2n-1)}{6}. \tag{7'}$$

Pertanto il grado di χ in x_3, x_4 è

$$\sum_{i=1}^{i=\rho_1}(l - r_{1i} + 1) + \sum_{i=1}^{i=\rho_2}(l - r_{2i} + 2) + \cdots + \sum_{i=1}^{i=\rho_{m+n-1}}(l - r_{m+n-1,i} + m + n - 1)$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=\sigma_1}(m - s_{1i} + 1) + \sum_{i=1}^{i=\sigma_2}(m - s_{2i} + 2) + \cdots + \sum_{i=1}^{i=\sigma_{n+l-1}}(m - s_{n+l-1,i} + n + l - 1)$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=\tau_1}(n - t_{1i} + 1) + \sum_{i=1}^{i=\tau_2}(n - t_{2i} + 2) + \cdots + \sum_{i=1}^{i=\tau_{l+m-1}}(n - t_{l+m-1,i} + l + m - 1),$$

ossia

$$\sum_{i=1}^{i=m+n-1}(l+i)\rho_i + \sum_{i=1}^{i=n+l-1}(m+i)\sigma_i + \sum_{i=1}^{i=l+m-1}(n+i)\tau_i - (\sum r + \sum s + \sum t). \tag{8}$$

Quanto al grado di χ', si osservi che i numeri r', s', t' denotano il posto delle colonne scelte, quando si considerino separatamente le tre matrici I', II', III', sicchè ad es. un r' può riferirsi all' r'^{mo} gruppo tanto di I' quanto di III'. Se quindi diciamo x un numero che può coincidere tanto con m quanto con n, y un numero che può coincidere tanto con n quanto con l, e z un numero che può essere tanto l quanto m, il grado di χ' sarà

$$\sum_{i=1}^{i=\rho'_1}(x + r'_{1i} - 1) + \sum_{i=1}^{i=\rho'_2}(x + r'_{2i} - 2) + \cdots + \sum_{i=1}^{i=\rho'_{m+n-1}}(x + r'_{m+n-1,i} - m - n + 1)$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=\sigma'_1}(y + s'_{1i} - 1) + \sum_{i=1}^{i=\sigma'_2}(y + s'_{2i} - 2) + \cdots + \sum_{i=1}^{i=\sigma'_{n+l-1}}(y + s'_{n+l-1,i} - n - l + 1)$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=\tau'_1}(z + t'_{1i} - 1) + \sum_{i=1}^{i=\tau'_2}(z + t'_{2i} - 2) + \cdots + \sum_{i=1}^{i=\tau'_{l+m-1}}(z + t'_{l+m-1,i} - l - m + 1),$$

ossia

$$\sum x + \sum y + \sum z + \sum r' + \sum s' + \sum t' - \sum_{i=1}^{i=m+n-1} i\rho'_i - \sum_{i=1}^{i=n+l-1} i\sigma'_i - \sum_{i=1}^{i=l+m-1} i\tau'_i.$$

Ora, per quanto concerne $\sum x$, nel considerare le $\sum\limits_1^{m+n-1} \rho'_i$ colonne avremo preso un certo numero b' di volte un elemento b ed un certo numero c' di volte un elemento c, onde sarà:

$$b' + c' = \sum_1^{m+n-1} \rho'_i, \tag{9}$$

$$\sum x = m b' + n c'. \tag{9'}$$

Così pure, nel considerare le $\sum\limits_1^{n+l-1} \sigma'_i$ e poi le $\sum\limits_1^{l+m-1} \tau'_i$ colonne, avremo preso c'' volte un elemento c ed a'' volte un elemento a, e risp. a''' volte un elemento a e b''' volte un elemento b. Quindi:

$$c'' + a'' = \sum_1^{n+l-1} \sigma'_i, \tag{10}$$

$$\sum y = n c'' + l a''; \tag{10'}$$

$$a''' + b''' = \sum_1^{l+m-1} \tau'_i, \tag{11}$$

$$\sum z = l a''' + m b'''. \tag{11'}$$

È poi evidente che:

$$b''' + c'' = \frac{l(l-1)}{2}, \qquad c' + a''' = \frac{m(m-1)}{2}, \qquad a'' + b' = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{12}$$

Dalle (9'), (10'), (11') si deduce:

$$\sum x + \sum y + \sum z = l(a'' + a''') + m(b''' + b') + n(c' + c'');$$

ma sommando le (9), (10), (11) a due a due, e tenendo conto delle (12), si ha:

$$a'' + a''' = \sum \sigma' + \sum \tau' - \frac{l(l-1)}{2},$$

$$b''' + b' = \sum \tau' + \sum \rho' - \frac{m(m-1)}{2},$$

$$c' + c'' = \sum \rho' + \sum \sigma' - \frac{n(n-1)}{2},$$

epperò:

$$\sum x + \sum y + \sum z = l(\sum \sigma' + \sum \tau') + m(\sum \tau' + \sum \rho') + n(\sum \rho' + \sum \sigma') - \frac{l^2(l-1) + m^2(m-1) + n^2(n-1)}{2}.$$

Il grado di χ' è quindi

$$\sum_{i=1}^{i=m+n-1}(m+n-i)\rho'_i+\sum_{i=1}^{i=n+l-1}(n+l-i)\sigma'_i+\sum_{i=1}^{i=l+m-1}(l+m-i)\tau'_i \quad (8')$$

$$+\sum r'+\sum s'+\sum t'-\frac{l^2(l-1)+m^2(m-1)+n^2(n-1)}{2}.$$

Sottraendo quest'espressione dalla (8), si ottiene come grado della risultante R:

$$l\sum\rho+m\sum\sigma+n\sum\tau-(m+n)\sum\rho'-(n+l)\sum\sigma'-(l+m)\sum\tau'$$

$$+\sum_{i=1}^{i=m+n-1}i(\rho_i+\rho'_i)+\sum_{i=1}^{i=n+l-1}i(\sigma_i+\sigma'_i)+\sum_{i=1}^{i=l+m-1}i(\tau_i+\tau'_i)$$

$$-(\sum r+\sum s+\sum t+\sum r'+\sum s'+\sum t')+\frac{l^2(l-1)+m^2(m-1)+n^2(n-1)}{2}.$$

Il primo sestinomio può anche scriversi nella forma:

$$l(\sum\rho+\sum\rho')+m(\sum\sigma+\sum\sigma')+n(\sum\tau+\sum\tau')$$
$$-(l+m+n)(\sum\rho'+\sum\sigma'+\sum\tau'),$$

ed equivale quindi, per le (6) e (5'), a

$$l\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}+m\frac{(n+l)(n+l-1)}{2}+n\frac{(l+m)(l+m-1)}{2}$$
$$-(l+m+n)\frac{l(l-1)+m(m-1)+n(n-1)}{2}.$$

Sostituendo quest'espressione, e facendo uso delle (6), (7) e (7'), si trova facilmente che *il grado di R è lmn.*

3. Ora supponiamo che le date superficie abbiano in un punto comune 0 le multiplicità λ, μ, ν risp.: per vedere quante intersezioni cadono in tal punto, collochiamo in 0 il vertice (0, 0, 0, 1) del tetraedro di riferimento assumendo come piano $x_3=0$ un piano affatto arbitrario per 0, e cerchiamo con quale esponente si stacchi da R il fattore x_3.

A tal fine osserviamo che, per l'ipotesi fatta, le forme A, B, C non possono contenere in nessun termine le coordinate x_1, x_2, x_3 ad un grado minore di λ, μ, ν risp., sicchè possiamo porre:

$$\left.\begin{array}{lll} a_{iu}=\alpha_{iu}x_3^{\lambda-i}x_4^{l-\lambda}+\text{potenze superiori di } x_3, & & (i\leq\lambda) \\ b_{jv}=\beta_{jv}x_3^{\mu-j}x_4^{m-\mu}+ & \text{id.} & (j\leq\mu) \\ c_{kw}=\gamma_{kw}x_3^{\nu-k}x_4^{n-\nu}+ & \text{id.} & (k\leq\nu), \end{array}\right\} \quad (13)$$

dove le costanti α_{iu}, β_{jv}, γ_{kw} possono anche essere nulle. Ora consideriamo la matrice H, e nella sua matrice parziale 1 moltiplichiamo le linee del primo gruppo per $x_3^{\mu+\nu-1}$, quelle del secondo per $x_3^{\mu+\nu-2}, \ldots$, quelle del $(\mu+\nu-1)^{\text{mo}}$ per x_3; analogamente nella 2 moltiplichiamo le linee del primo, del secondo,..., del $(\nu+\lambda-1)^{\text{mo}}$ gruppo ordinatamente per $x_3^{\nu+\lambda-1}$, $x_3^{\nu+\lambda-2}, \ldots, x_3$, e nella 3 le linee del primo, del secondo,..., del $(\lambda+\mu-1)^{\text{mo}}$ gruppo per $x_3^{\lambda+\mu-1}$, $x_3^{\lambda+\mu-2}, \ldots, x_3$. Eseguendo tali operazioni anche sulle linee di H che si sono scelte per formare il determinante χ, questo risulta così moltiplicato per x_3 coll'esponente

$$\sum_{i=1}^{i=\mu+\nu-1}(\mu+\nu-i)\rho_i+\sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1}(\nu+\lambda-i)\sigma_i+\sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1}(\lambda+\mu-i)\tau_i.$$

Ma, per effetto di quelle operazioni, nella matrice H, e quindi anche in χ, ogni colonna del primo, del secondo,..., del $(\lambda+\mu+\nu-1)^{\text{mo}}$ gruppo riesce divisibile risp. per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1}$, $x_3^{\lambda+\mu+\nu-2}, \ldots, x_3$; e perciò χ riesce divisibile per x_3 coll'esponente

$$(\lambda+\mu+\nu-1)+2(\lambda+\mu+\nu-2)+\cdots+(\lambda+\mu+\nu-2)\cdot 2 \\ +(\lambda+\mu+\nu-1),$$

cioè coll'esponente

$$\frac{(\lambda+\mu+\nu)\,[(\lambda+\mu+\nu)^2-1]}{6}.$$

Risulta quindi posto in evidenza in χ il fattore x_3 coll'esponente

$$\frac{(\lambda+\mu+\nu)\,[(\lambda+\mu+\nu)^2-1]}{6}$$

$$-\sum_{i=1}^{i=\mu+\nu-1}(\mu+\nu-i)\rho_i-\sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1}(\nu+\lambda-i)\sigma_i-\sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1}(\lambda+\mu-i)\tau_i.$$

Per la matrice H', moltiplichiamo invece in I′ le colonne del primo, del secondo,..., del $(\nu-1)^{\text{mo}}$ gruppo per $x_3^{\nu-1}$, $x_3^{\nu-2}, \ldots, x_3$ risp.; in II′ le colonne del primo, del secondo,..., del $(\lambda-1)^{\text{mo}}$ gruppo per $x_3^{\lambda-1}$, $x_3^{\lambda-2}, \ldots, x_3$; e in III′ le colonne del primo, secondo,..., $(\mu-1)^{\text{mo}}$ gruppo per $x_3^{\mu-1}$, $x_3^{\mu-2}, \ldots, x_3$. Eseguendo queste stesse operazioni sopra le colonne di χ', questo risulta moltiplicato per x_3 coll'esponente

$$\sum_{i=1}^{i=\lambda-1}i(\lambda-i)+\sum_{i=1}^{i=\mu-1}i(\mu-i)+\sum_{i=1}^{i=\nu-1}i(\nu-i),$$

cioè coll'esponente

$$\frac{\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 - (\lambda + \mu + \nu)}{6}.$$

Ma, in seguito a quelle operazioni, riescono divisibili, in 1', le linee del primo, secondo,..., $(\mu + \nu - 1)^{mo}$ gruppo risp. per $x_3^{\mu+\nu-1}$, $x_3^{\mu+\nu-2}$,..., x_3; in 2', le linee del primo,..., $(\nu + \lambda - 1)^{mo}$ gruppo per $x_3^{\nu+\lambda-1}$,..., x_3; in 3', le linee del primo,..., $(\lambda + \mu - 1)^{mo}$ gruppo per $x_3^{\lambda+\mu-1}$,..., x_3. Quindi χ' riesce divisibile per x_3 coll'esponente

$$\sum_{i=1}^{i=\mu+\nu-1}(\mu+\nu-i)\rho'_i + \sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1}(\nu+\lambda-i)\sigma'_i + \sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1}(\lambda+\mu-i)\tau'_i.$$

Epperò vien posto in evidenza in χ' il fattore x_3 coll'esponente

$$\sum_{i=1}^{i=\mu+\nu-1}(\mu+\nu-i)\rho'_i + \sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1}(\nu+\lambda-i)\sigma'_i + \sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1}(\lambda+\mu-i)\tau'_i$$

$$-\frac{\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 - (\lambda + \mu + \nu)}{6}.$$

Ne segue che la risultante R è divisibile per x_3 coll'esponente

$$\frac{1}{6}\left\{(\lambda+\mu+\nu)^3 + \lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 - 2(\lambda+\mu+\nu)\right\}$$

$$-\left\{\sum_{i=1}^{i=\mu+\nu-1}(\mu+\nu-i)(\rho_i+\rho'_i) + \sum_{i=1}^{i=\nu+\lambda-1}(\nu+\lambda-i)(\sigma_i+\sigma'_i)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{i=\lambda+\mu-1}(\lambda+\mu-i)(\tau_i+\tau'_i)\right\},$$

la qual quantità, per le (6), si riduce facilmente a $\lambda\mu\nu$. Si conclude che *il punto* 0 *assorbe* ALMENO $\lambda\mu\nu$ *intersezioni delle date superficie.*

4. Nel punto 0 sarà raccolto un numero d'intersezioni delle tre superficie maggiore di $\lambda\mu\nu$, allora ed allora soltanto che sarà nullo in R il coefficiente di $x_3^{\lambda\mu\nu}$: dobbiamo dunque cercare questo coefficiente, e stabilirne il significato geometrico. A tal fine occorre premettere la seguente osservazione. Siano

$$\left.\begin{aligned}
U &\equiv (u_{\lambda 0}x_1^\lambda + u_{\lambda 1}x_1^{\lambda-1}x_2 + \cdots + u_{\lambda\lambda}x_2^\lambda)x_3^{l-\lambda} + (u_{\lambda+1,0}x_1^{\lambda+1} + \cdots + u_{\lambda+1,\lambda+1}x_2^{\lambda+1})x_3^{l-\lambda-1}\\
&\qquad + \cdots + (u_{l0}x_1^l + u_{l1}x_1^{l-1}x_2 + \cdots + u_{ll}x_2^l) = 0,\\
V &\equiv (v_{\mu 0}x_1^\mu + \cdots + v_{\mu\mu}x_2^\mu)x_3^{m-\mu} + \cdots + (v_{m0}x_1^m + \cdots + v_{mm}x_2^m) = 0,\\
W &\equiv (w_{\nu 0}x_1^\nu + \cdots + w_{\nu\nu}x_2^\nu)x_3^{n-\nu} + \cdots + (w_{n0}x_1^n + \cdots + w_{nn}x_2^n) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

le equazioni di tre curve piane U, V, W degli ordini l, m, n, aventi nel punto fondamentale (0, 0, 1) risp. le moltiplicità λ, μ, ν: la condizione necessaria e sufficiente perchè esse abbiano in comune un punto *diverso dal precedente* (ma che potrebbe però anche coincidere con questo, nel senso che esso conti fra i punti comuni alle tre curve più di quello che conta in generale pel solo fatto che esse vi passano λ, μ, ν volte) si può ottenere come quoziente di due determinanti, analogamente a ciò che si è fatto nel n.° 1, nel modo seguente. Moltiplichiamo le (14) ordinatamente per

$$\begin{array}{l} x_1^{\mu+\nu-1},\ x_1^{\mu+\nu-2}x_2,\ldots,\ x_2^{\mu+\nu-1};\ldots;\ x_1^{m+n-2},\ x_1^{m+n-3}x_2,\ldots,\ x_2^{m+n-2};\\ x_1^{\nu+\lambda-1},\ x_1^{\nu+\lambda-2}x_2,\ldots,\ x_2^{\nu+\lambda-1};\ldots;\ x_1^{n+l-2},\ x_1^{n+l-3}x_2,\ldots,\ x_2^{n+l-2};\\ x_1^{\lambda+\mu-1},\ x_1^{\lambda+\mu-2}x_2,\ldots,\ x_2^{\lambda+\mu-1};\ldots;\ x_1^{l+m-2},\ x_1^{l+m-3}x_2,\ldots,\ x_2^{l+m-2}. \end{array}$$

Otteniamo così

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left\{(m+n)(m+n-1)+(n+l)(n+l-1)+(l+m)(l+m-1)\right\}\\ -\frac{1}{2}\left\{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)+(\nu+\lambda)(\nu+\lambda-1)+(\lambda+\mu)(\lambda+\mu-1)\right\} \end{array}\right\} \quad (15)$$

equazioni lineari fra le potenze

$$x_1^{\lambda+\mu+\nu-1},\ x_1^{\lambda+\mu+\nu-2}x_2,\ldots,\ x_2^{\lambda+\mu+\nu-1};\ldots;\ x_1^{l+m+n-2},\ x_1^{l+m+n-3}x_2,\ldots,\ x_2^{l+m+n-2},$$

il cui numero è

$$\frac{1}{2}\left\{(l+m+n)(l+m+n-1)-(\lambda+\mu+\nu)(\lambda+\mu+\nu-1)\right\}. \quad (16)$$

Le equazioni ottenute non sono però fra loro indipendenti, giacchè se moltiplichiamo le identità

$$VW=WV, \qquad WU=UW, \qquad UV=VU$$

risp. per

$$\begin{array}{l} x_1^{\lambda-1},\ x_1^{\lambda-2}x_2,\ldots,\ x_2^{\lambda-1};\ldots;\ x_1^{l-2},\ x_1^{l-3}x_2,\ldots,\ x_2^{l-2};\\ x_1^{\mu-1},\ x_1^{\mu-2}x_2,\ldots,\ x_2^{\mu-1};\ldots;\ x_1^{m-2},x_1^{m-3}x_2,\ldots,\ x_2^{m-2};\\ x_1^{\nu-1},\ x_1^{\nu-2}x_2,\ldots,\ x_2^{\nu-1};\ldots;\ x_1^{n-2},x_1^{n-3}x_2,\ldots,\ x_2^{n-2}, \end{array}$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\left\{l(l-1)+m(m-1)+n(n-1)\right\}-\frac{1}{2}\left\{\lambda(\lambda-1)+\mu(\mu-1)+\nu(\nu-1)\right\} \quad (17)$$

relazioni lineari fra le equazioni stesse, e il numero (17) è la differenza fra i numeri (15) e (16). Se allora si formano due matrici, l'una coi coefficienti delle equazioni, l'altra coi coefficienti delle relazioni da cui esse sono vincolate, la richiesta condizione si ottiene uguagliando a zero il rapporto fra uno qualunque (non identicamente nullo) dei determinanti tratti dalla prima e il determinante supplementare tratto dalla seconda. Gli ordini dei due determinanti sono dati risp. dalle espressioni (16) e (17).

5. Per riconoscere ormai quale sia in R il coefficiente di $x_3^{\lambda\mu\nu}$, supponiamo di aver eseguito sulle matrici H, H', e però anche su χ, χ', le operazioni indicate al n.° 3. Il risultato che ricaveremo dall'R primitivo sarà $\frac{R}{x_3^{\lambda\mu\nu}}$, sicchè il cercato coefficiente sarà ciò che diventa questo quoziente ponendovi $x_3=0$.

In H scompongasi ciascuna delle matrici parziali 1, 2, 3 in altre due, che diremo risp. 1_1, 1_2; 2_1, 2_2; 3_1, 3_2, ponendo nelle 1_1, 2_1, 3_1 risp. i primi $\mu+\nu$, $\nu+\lambda$, $\lambda+\mu$ gruppi di linee di 1, 2, 3, e nelle 1_2, 2_2, 3_2 i gruppi rimanenti. Scompongasi inoltre la H in due matrici I e II, ponendo nella prima i primi $\lambda+\mu+\nu-1$ gruppi di colonne, e nella seconda i gruppi rimanenti. Un elemento qualunque, il quale appartenga ad una colonna del gruppo j^{mo} di H e ad una linea del gruppo i^{mo} di 1, o di 2, o di 3, può rappresentarsi risp. con $a_{j-i,r}$, o con $b_{j-i,r}$, o con $c_{j-i,r}$: vediamo ciò che esso diventa, a seconda delle matrici 1_1I, 1_2I,... a cui appartiene, quando, eseguite le operazioni su accennate, vi si pone $x_3=0$.

1_1I) Nell'elemento $a_{j-i,r}$ si ha $i \leqq \mu+\nu$, $j \leqq \lambda+\mu+\nu-1$. Esso è stato moltiplicato per $x_3^{\mu+\nu-i}$ e diviso per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-j}$, e però in sostanza è stato moltiplicato per $x_3^{j-i-\lambda}$. Ora se $j-i \leqq \lambda$, in $a_{j-i,r}$ esiste il fattore $x_3^{\lambda-j+i}$, sicchè, fatte le precedenti operazioni e posto $x_3=0$, si ottiene $\alpha_{j-i,r}$ [v. le (13)]. Se invece $j-i>\lambda$, si ottiene zero.

1_2I) Si ha $i>\mu+\nu$, $j \leqq \lambda+\mu+\nu-1$, da cui segue $j-i<\lambda$, quindi l'elemento $a_{j-i,r}$ contiene il fattore $x_3^{\lambda-j+i}$. Esso è stato soltanto diviso per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-j}$, dunque risulta ancora come fattore $x_3^{i-\mu-\nu}$, dove l'esponente è >0. Per $x_3=0$ esso si annulla.

2_1I) L'elemento è $b_{j-i,r}$: per $j-i \leqq \mu$ si ottiene $\beta_{j-i,r}$, e per $j-i>\mu$ si ottiene zero.

2_2I) Tutti gli elementi si annullano.

3_1I) L'elemento è $c_{j-i,r}$: per $j-i \leqq \nu$ si ha $\gamma_{j-i,r}$, per $j-i>\nu$ risulta zero.

3_2I) Tutti gli elementi si annullano.

Quanto agli elementi della matrice II, essi assumono il valore che acquistano per $x_3 = 0$, all'infuori di quelli che appartengono alle linee dei primi $\mu + \nu - 1$, $\nu + \lambda - 1$, $\lambda + \mu - 1$ gruppi di 1, 2, 3 risp., i quali si annullano tutti.

Nella H' scindasi ciascuna delle matrici $1'$, $2'$, $3'$ in altre due, che diremo risp. $1'_1$, $1'_2$; $2'_1$, $2'_2$; $3'_1$, $3'_2$, ponendo nelle $1'_1$, $2'_1$, $3'_1$ risp. le linee dei primi $\mu + \nu - 1$, $\nu + \lambda - 1$, $\lambda + \mu - 1$ gruppi di $1'$, $2'$, $3'$, e nelle $1'_2$, $2'_2$, $3'_2$ le linee dei gruppi rimanenti. Inoltre dividasi anche ciascuna delle matrici I$'$, II$'$, III$'$ in altre due, che risp. diremo I$'_1$, I$'_2$; II$'_1$, II$'_2$; III$'_1$, III$'_2$, ponendo nelle I$'_1$, II$'_1$, III$'_1$ i primi $\nu - 1$, $\lambda - 1$, $\mu - 1$ gruppi di colonne di I$'$, II$'$, III$'$, e nelle I$'_2$, II$'_2$, III$'_2$ i gruppi rimanenti. Un elemento qualunque, il quale appartenga all'i^{mo} gruppo di linee di $1'$, o di $2'$, o di $3'$, ed all'j^{mo} gruppo di colonne di I$'$, o di II$'$ o di III$'$, viene rappresentato, prescindendo dal segno, con una delle lettere a, b, c, affetta da due indici, di cui il primo è $i - j$: eseguite le operazioni di cui sopra si è parlato, e posto $x_3 = 0$, con ragionamenti del tutto analoghi ai precedenti si giunge al seguente risultato:

gli elementi	di	$(1'_1 \text{I}'_1)$	diventano	$-\beta_{i-j,r}$	se	$i - j \leqq \mu$,
»	»	» $(2'_1 \text{I}'_1)$	»	$\alpha_{i-j,r}$	»	$i - j \leqq \lambda$,
»	»	» $(2'_1 \text{II}'_1)$	»	$-\gamma_{i-j,r}$	»	$i - j \leqq \nu$,
»	»	» $(3'_1 \text{II}'_1)$	»	$\beta_{i-j,r}$	»	$i - j \leqq \mu$,
»	»	» $(3'_1 \text{III}'_1)$	»	$-\alpha_{i-j,r}$	»	$i - j \leqq \lambda$,
»	»	» $(1'_1 \text{III}'_1)$	»	$\gamma_{i-j,r}$	»	$i - j \leqq \nu$,

mentre si annullano in caso contrario;

tutti gli elementi di $(1'_1 \text{I}'_2)$ e $(2'_1 \text{I}'_2)$, di $(2'_1 \text{II}'_2)$ e $(3'_1 \text{II}'_2)$, di $(3'_1 \text{III}'_2)$ e $(1'_1 \text{III}'_2)$ si annullano, salvo se si ha ordinatamente $j = \nu$, $j = \lambda$, $j = \mu$, nei quali casi essi diventano $-\beta_{i-\nu,r}$ e $\alpha_{i-\nu,r}$, $-\gamma_{i-\lambda,r}$ e $\beta_{i-\lambda,r}$, $-\alpha_{i-\mu,r}$ e $\gamma_{i-\mu,r}$;

tutti gli elementi di $(1'_2 \text{I}'_2)$, $(2'_2 \text{I}'_2)$, $(2'_2 \text{II}'_2)$, $(3'_2 \text{II}'_2)$, $(3'_2 \text{III}'_2)$, $(1'_2 \text{III}'_2)$ acquistano il valore che essi assumono per $x_3 = 0$;

infine tutti gli elementi delle dieciotto matrici rimanenti si annullano.

6. Per brevità, chiamiamo D e Δ i due termini della differenza (15), T e Θ quelli della (16). Ciò posto, consideriamo di nuovo la H: abbiamo

veduto che nella sua matrice II, in seguito alle fatte operazioni, si sono annullati tutti gli elementi di Δ linee; ma il numero totale delle linee di H è D, quindi $D-\Delta$ esprime il numero delle linee di II, ciascuna delle quali è risultata composta, in generale, di elementi non tutti nulli. Il numero delle colonne di II è invece $T-\Theta$. Siccome è

$$D-\Delta \geqq T-\Theta,$$

per formare il determinante χ potremo scegliere T linee di H, delle quali $T-\Theta$ non siano risultate composte, nella loro parte contenuta in II, di elementi tutti nulli, e le rimanenti Θ siano fra quelle (il cui numero totale è Δ) che in II sono diventate di tutti elementi nulli. Se allora si pensa χ scomposto in due matrici, di cui l'una formata colle colonne dei primi $\lambda+\mu+\nu-1$ gruppi (cioè colle prime Θ colonne), e l'altra formata colle $T-\Theta$ colonne rimanenti (cioè con quelle che appartengono a II), è chiaro che, eseguite le solite operazioni, colle linee della seconda matrice non si può formare che un solo determinante non nullo. Laonde χ per tali operazioni diventa il prodotto di due determinanti χ_1 e χ_2: il primo, di ordine Θ, ha le sue linee tratte dai primi $\mu+\nu-1$, $\nu+\lambda-1$, $\lambda+\mu-1$ gruppi di 1 I, 2 I, 3 I, ed ha per elementi le α, β, γ risp.; il secondo, di ordine $T-\Theta$, ha le sue linee tratte dagli $(m+n-1)-(\mu+\nu-1)=m+n-\mu-\nu$, $n+l-\nu-\lambda$, $l+m-\lambda-\mu$ gruppi che in II non sono risultati di tutti elementi nulli, ed ha per elementi i valori che si ottengono ponendo $x_3=0$ nei corrispondenti elementi di II, i cui primi indici non sono minori di λ, μ, ν risp.

Con ciò che precede, la composizione del determinante χ' è già del tutto fissata; ed eseguite le solite operazioni, $\Delta-\Theta$ fra le sue linee sono formate cogli elementi α, β, γ, e le altre, in numero di $(D-\Delta)-(T-\Theta)$, sono formate coi risultati che s'ottengono ponendo $x_3=0$ negli elementi a, b, c i cui primi indici non siano risp. minori di λ, μ, ν. Se quindi pensiamo χ' scomposto in due matrici, di cui l'una formata colle linee della prima specie e l'altra colle rimanenti, eseguite le solite operazioni, dalla seconda non si può trarre che un solo determinante non nullo; sicchè per tali operazioni χ' si scinde nel prodotto di due determinanti χ'_1 e χ'_2, di ordini $\Delta-\Theta$ e $(D-\Delta)-(T-\Theta)$.

Il coefficiente di $x_3^{\lambda\mu\nu}$ in R è dunque il prodotto $\frac{\chi_1}{\chi'_1}\cdot\frac{\chi_2}{\chi'_2}$, e la ricerca del significato geometrico dell'annullarsi de' suoi due fattori non offre ormai nessuna difficoltà. Invero si osservi che i coni d'ordini λ, μ, ν tangenti alle tre superficie A, B, C nel punto singolare 0 hanno per equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{00}\, x_3^\lambda + (\alpha_{10}\, x_1 + \alpha_{11}\, x_2)\, x_3^{\lambda-1} + \cdots + (\alpha_{\lambda 0}\, x_1^\lambda + \cdots + \alpha_{\lambda\lambda}\, x_2^\lambda) = 0\,, \\ \beta_{00}\, x_3^\mu + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0\,, \\ \gamma_{00}\, x_3^\nu + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0\,; \end{array}\right\} \quad (18)$$

mentre le sezioni delle superficie stesse col piano $x_3 = 0$ sono rappresentate da:

$$(a'_{\lambda 0}\, x_1^\lambda + a'_{\lambda 1}\, x_1^{\lambda-1} x_2 + \cdots + a'_{\lambda\lambda}\, x_2^\lambda)\, x_4^{l-\lambda} + \cdots + (a'_{l0}\, x_1^l + \cdots + a'_{ll}\, x_2^l) = 0,$$

$$(b'_{\mu 0}\, x_1^\mu + \cdots\cdots + b'_{\mu\mu}\, x_2^\mu)\, x_4^{m-\mu} + \cdots\cdots\cdots = 0,$$

$$(c'_{\nu 0}\, x_1^\nu + \cdots\cdots + c'_{\nu\nu}\, x_2^\nu)\, x_4^{n-\nu} + \cdots\cdots\cdots = 0,$$

dove le a', b', c' denotano i coefficienti dei termini indipendenti da x_3 nelle corrispondenti forme a, b, c (onde le $a'_{\lambda i}$, $b'_{\mu i}$, $c'_{\nu i}$ coincidono risp. colle $\alpha_{\lambda i}$, $\beta_{\mu i}$, $\gamma_{\nu i}$). Allora il primo fattore $\frac{\chi_1}{\chi'_1}$ è costituito, colle α, β, γ delle (18), nell'identico modo col quale si disse nel n.° 1 doversi formare, colle a, b, c delle (1), il quoziente $\frac{\chi}{\chi'}$: uguagliato a zero, esso rappresenta dunque la risultante dell'eliminazione dei rapporti $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ dalle (18), cioè la condizione necessaria e sufficiente perchè i coni tangenti in 0 alle tre date superficie abbiano una generatrice comune. L'annullarsi del secondo fattore $\frac{\chi_2}{\chi'_2}$ è invece (n.° 4) la condizione perchè le sezioni fatte nelle date superficie dal piano $x_3 = 0$ abbiano in comune un punto distinto da 0. Per l'ipotesi fatta che le tre superficie non passino per una medesima curva, e per il modo del tutto arbitrario con cui abbiamo scelto la faccia $x_3 = 0$ del tetraedro fondamentale, quest' ultimo fatto certamente non ha luogo, sicchè il secondo fattore è essenzialmente diverso da zero. Ciò dimostra la proposizione enunciata in principio.

7. Possiamo spingere la ricerca più oltre. I coni tangenti in 0 alle tre superficie abbiano una generatrice comune g, e per maggior generalità poniamo che questa abbia raccolte in 0 risp. $\lambda + \xi$, $\mu + \eta$, $\nu + \zeta$ delle sue intersezioni colle superficie A, B, C: sarà

$$\xi \geqq 1, \qquad \eta \geqq 1, \qquad \zeta \geqq 1,$$

e possiamo supporre che sia, per es.,

$$\xi \leqq \eta \leqq \zeta.$$

Assumiamo g come retta $x_1 = x_2 = 0$, di guisa che nelle (18) si avrà

$$\alpha_{00} = \beta_{00} = \gamma_{00} = 0.$$

Inoltre, se nelle (1) si pone $x_1 = x_2 = 0$, si devono risp. staccare dai primi membri i fattori $x_3^{\lambda+\xi}$, $x_3^{\mu+\eta}$, $x_3^{\nu+\zeta}$, onde potremo scrivere:

$$a_{00} = p\, x_3^{\lambda+\xi}\, x_4^{l-\lambda-\xi} + \text{potenze superiori di } x_3,$$

$$b_{00} = q\, x_3^{\mu+\eta}\, x_4^{m-\mu-\eta} + \quad \text{»} \quad \text{»} \quad x_3,$$

$$c_{00} = r\, x_3^{\nu+\zeta}\, x_4^{n-\nu-\zeta} + \quad \text{»} \quad \text{»} \quad x_3,$$

e sarà

$$p \neq 0, \qquad q \neq 0, \qquad r \neq 0.$$

Volendo cercare quante intersezioni delle A, B, C sono assorbite dal punto 0, per semplicità, poniamo nel determinante χ la prima linea di ciascuna delle matrici 1, 2, 3 di H: ciò che, per i numeri precedenti, è sempre lecito. Allora, rifacendo il ragionamento del n.° 3, si trova che la prima colonna di H, e però anche di χ, riesce divisibile non soltanto per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1}$, ma per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1+\xi}$, sicchè da χ si stacca il fattore x_3 con un esponente superiore di almeno ξ unità a quello che avevasi nel n.° 3, mentre l'esponente della potenza di x_3, che entra come fattore di χ', non è ora diverso da quello di prima. Dunque *il punto* 0 *assorbe* ALMENO $\lambda\mu\nu + \xi$ *intersezioni delle date superficie.*

In 0 cadrà un maggior numero di tali intersezioni quando sarà nullo in R il coefficiente di $x_3^{\lambda\mu\nu+\xi}$. Per trovare questo coefficiente, rifacciamo esattamente tutte le operazioni descritte nel n.° 3: soltanto, poichè abbiamo già notato che la prima colonna di χ riesce ora divisibile, anzichè per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1}$, per $x_3^{\lambda+\mu+\nu-1+\xi}$, converrà dividerla appunto per questa potenza. Poscia porremo $x_3 = 0$. Il risultato sarà allora, come nel numero precedente, il prodotto di due quozienti di determinanti, dei quali il secondo è lo stesso $\frac{\chi_2}{\chi'_2}$, e, per le ragioni già addotte, è essenzialmente diverso da zero. Il primo quoziente invece si deduce da $\frac{\chi_1}{\chi'_1}$ eseguendo su esso alcune modificazioni, che variano a seconda dei casi; e precisamente: secondo che è $\xi < \eta$ (e del resto $\eta \leqq \zeta$), oppure $\xi = \eta < \zeta$, oppure $\xi = \eta = \zeta$, nella prima colonna del numeratore, in luogo di α_{00}, β_{00}, γ_{00} vengono risp. i valori p, 0, 0, oppure p, q, 0, oppure p, q, r, mentre in ogni caso in tutte le colonne rimanenti del numeratore, come pure dappertutto nel denominatore, in luogo di α_{00}, β_{00}, γ_{00} compare lo zero.

Scomponendo quindi il numeratore in due matrici, costituite l'una delle prime tre colonne e l'altra delle rimanenti, colle linee della prima non si può formare che un determinante non nullo, cioè, risp. nei tre casi dianzi accennati,

$$\begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ 0 & \beta_{10} & \beta_{11} \\ 0 & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ q & \beta_{10} & \beta_{11} \\ 0 & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ q & \beta_{10} & \beta_{11} \\ r & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Il determinante supplementare tratto dall'altra matrice è ciò che rimane di χ_1 sopprimendovi le prime tre colonne e la prima linea di ciascuna delle sue matrici parziali 1, 2, 3, e ponendo poi dappertutto $\alpha_{00} = \beta_{00} = \gamma_{00} = 0$. Un tal determinante verrà significato con χ_{10}; e analogamente si chiamerà χ'_{10} ciò che si ottiene come denominatore, cioè il risultato che si ha da χ'_1 colle sostituzioni $\alpha_{00} = \beta_{00} = \gamma_{00} = 0$.

Per ciò che si è trovato nel n.° 4, l'annullarsi del fattore $\frac{\chi_{10}}{\chi'_{10}}$ è la condizione necessaria e sufficiente perchè i coni tangenti in 0 alle date superficie abbiano in comune una seconda generatrice diversa da g (ma che potrebbe anche coincidere con la g, nel senso già dichiarato nel n.° 4, cioè nel senso che allora la g assorba *almeno due* delle generatrici di ciascuno dei tre coni).

8. Prima di venire all'interpretazione geometrica dell'annullarsi dei tre determinanti (19), facciamo le seguenti osservazioni, nelle quali, per semplificare il linguaggio, toglieremo l'omogeneità alle coordinate, ponendo $\frac{x_1}{x_4} = x$, $\frac{x_2}{x_4} = y$, $\frac{x_3}{x_4} = z$, così che la retta g sarà l'asse delle z. Considerando una sola delle date superficie, ad es. la A, la sua equazione può scriversi così:

$$\left.\begin{aligned} A \equiv p z^{\lambda+\xi} &+ \text{termini di grado superiore nella sola } z \\ +(\alpha_{10} x + \alpha_{11} y) z^{\lambda-1} &+ \text{termini di grado superiore in } x \text{ e } y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ora diciamo A' la superficie che ha per equazione

$$A' \equiv p z^{\xi+1} + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y = 0, \tag{21}$$

e che è perciò una superficie particolare del fascio rappresentato, al variare di k, da

$$k z^{\xi+1} + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y = 0. \tag{22}$$

Se chiamiamo Γ_A il cono tangente ad A nell'origine, e π il piano tangente a Γ_A lungo l'asse delle z, cioè quello che ha per equazione

$$\pi \equiv \alpha_{10} x + \alpha_{11} y = 0,$$

una superficie qualunque del fascio (22) è un cilindro di grado $\xi + 1$, le cui generatrici sono parallele all'intersezione del piano π col piano xy, e di cui la retta all'infinito del piano xy è una generatrice multipla secondo ξ, colla particolarità che i ξ piani tangenti lungo essa al cilindro coincidono tutti col piano all'infinito dello spazio. Oltre a ciò, tutti i cilindri del fascio sono secati dal piano π in $\xi + 1$ generatrici coincidenti colla traccia di quel piano sul piano xy. Al fascio appartengono, come cilindri degeneri, il piano xy contato $\xi + 1$ volte, ed il piano π insieme col piano all'infinito contato ξ volte, sicchè, fissato il piano coordinato xy (nonchè il piano $x_4 = 0$), il fascio può ritenersi perfettamente noto: la sua base si compone della retta all'infinito del piano xy contata ξ $(\xi + 1)$ volte, e dell'intersezione dei piani xy e π, contata $\xi + 1$ volte.

Per definire, entro il fascio, il cilindro particolare A', si consideri un piano qualunque parallelo all'asse delle z (cioè alla g) e infinitamente vicino all'origine (cioè alla g): piano la cui equazione sarà quindi della forma

$$\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y = \varepsilon, \tag{23}$$

dove ε_1, ε_2 sono costanti arbitrarie, ed ε è un infinitesimo. Volendo determinare i punti che, essendo comuni a questo piano ed alle superficie A e A', cadono in prossimità dell'origine, basta ricavare dalle (22) e (23) le x, y e sostituirle nell'equazione (20) di A. Si giunge così alla seguente equazione in z:

$$(p - k) z^{\lambda+\xi} + \cdots = 0,$$

dove i termini che non si sono scritti o contengono potenze di z superiori alla $(\lambda + \xi)^{ma}$, o dipendono da ε. Se dunque si vuole che per ε infinitesimo cada in 0 il massimo numero di quelle intersezioni, bisogna porre $k = p$, il che fornisce, nel fascio (22), appunto la superficie A'. Per la proprietà che ora le abbiamo riconosciuta, e che la caratterizza fra gli elementi del fascio, chiameremo *A' la superficie cilindrica osculatrice ad A e corrispondente alla generatrice g del cono Γ_A* (*).

9. Siamo ora in grado di assegnare il significato geometrico dell'annullarsi dei determinanti (19).

1.º caso. Quando sia $\xi < \eta$ (ed $\eta \leq \zeta$), si deve considerare il primo di quei determinanti, il quale equivale a

$$p(\beta_{10}\gamma_{11} - \beta_{11}\gamma_{10}),$$

e poichè (n.º 7) p non è nullo, resta soltanto da interpretare la condizione

$$\beta_{10}\gamma_{11} - \beta_{11}\gamma_{10} = 0.$$

Ora, se non si ha $\beta_{10} = \beta_{11} = 0$, nè $\gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$, la generatrice g è semplice per ciascuno dei coni Γ_B e Γ_C tangenti in 0 alle superficie B e C risp., e la condizione precedente esprime che i piani tangenti a tali coni lungo g (piani le cui equazioni sono

$$\beta_{10}x_1 + \beta_{11}x_2 = 0, \qquad \gamma_{10}x_1 + \gamma_{11}x_2 = 0)$$

coincidono.

2.º caso. Se $\xi = \eta < \zeta$, il secondo dei determinanti (19) si annulla sia quando si ha $\gamma_{10} = \gamma_{11} = 0$, sia quando è ad un tempo

$$q\alpha_{10} - p\beta_{10} = 0, \qquad q\alpha_{11} - p\beta_{11} = 0.$$

Nel primo caso il cono Γ_C ha in g una generatrice almeno doppia; nel secondo caso le superficie cilindriche A' e B' osculatrici alle A e B e corrispondenti alla g coincidono. Esclusi questi casi, i due piani

$$\gamma_{10}x + \gamma_{11}y = 0, \qquad (q\alpha_{10} - p\beta_{10})x + (q\alpha_{11} - p\beta_{11})y = 0 \tag{24}$$

riescono ben determinati, e l'annullarsi del determinante considerato è la condizione perchè essi coincidano. Il primo è quello che tocca Γ_C lungo g. Per riconoscere che piano sia il secondo, si osservi che le A' e B' hanno per equazioni

$$A' \equiv p z^{\xi+1} + \alpha_{10}x + \alpha_{11}y = 0, \qquad B' \equiv q z^{\xi+1} + \beta_{10}x + \beta_{11}y = 0.$$

(*) Non si dimentichi però che la A' non è unica, sibbene è tale ogniqualvolta siasi fissato il sistema dei piani coordinati (così che 0 sia l'origine e la generatrice g l'asse delle z). In tutto il seguito si sottintenderà sempre che ciò sia stato fatto.

Ma si ha identicamente

$$qA' - pB' = (q\alpha_{10} - p\beta_{10})x + (q\alpha_{11} - p\beta_{11})y,$$

epperò l'intersezione di A' e B' si compone della retta all'infinito del piano xy contata $\xi(\xi+1)$ volte e di una curva piana [razionale, ecc. (*)] di ordine $\xi+1$, situata nel piano rappresentato appunto dalla seconda delle (24). La condizione cercata è dunque che il piano di questa curva coincida col piano tangente al cono Γ_C lungo la retta g.

3.° caso. Se $\xi = \eta = \zeta$, l'annullarsi del terzo fra i determinanti (19) dà la condizione perchè i cilindri A', B', C' appartengano ad un medesimo fascio [la cui curva base è composta della retta all'infinito del piano xy contata $\xi(\xi+1)$ volte e di una curva piana razionale d'ordine $\xi+1$, come si è detto nel caso precedente].

Riassumendo, possiamo enunciare il teorema:

Se tre superficie qualunque A, B, C di ordini l, m, n (non passanti per una medesima curva) hanno in un punto comune 0 le multiplicità λ, μ, ν, e se i tre coni Γ_A, Γ_B, Γ_C ad esse tangenti in 0 hanno in comune una generatrice g, la quale abbia raccolte in 0 rispettivamente $\lambda+\xi$, $\mu+\eta$, $\nu+\zeta$ delle sue intersezioni colle date superficie (essendo, ad esempio, $\xi \leqq \eta \leqq \zeta$), qualunque siano le ulteriori singolarità di queste ultime, esse si tagliano in lmn punti, di cui almeno $\lambda\mu\nu+\xi$ cadono in 0. — Questo punto assorbe un maggior numero di tali intersezioni soltanto quando i tre coni Γ_A, Γ_B, Γ_C abbiano in comune una seconda generatrice (che può anche coincidere con la g, la quale assorbe in tal caso due generatrici di ciascuno di quei coni); oppure:

1) *essendo $\xi < \eta$ (ed $\eta \leqq \zeta$), quando g sia almeno doppia per Γ_B o per Γ_C, o quando, essendo essa semplice per entrambi i coni, questi abbiano lungo g lo stesso piano tangente;*

(*) Si trova facilmente che, se si pone

$$M = \frac{q\alpha_{11} - p\beta_{11}}{\alpha_{10}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{10}}, \qquad N = -\frac{q\alpha_{10} - p\beta_{10}}{\alpha_{10}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{10}},$$

le coordinate del punto corrente sopra questa curva si possono rappresentare, come funzioni di un parametro t, colle formole:

$$x = Mt^{\xi+1}, \qquad y = Nt^{\xi+1}, \qquad z = t.$$

Se poi si assume come piano xz quello della curva, l'equazione di questa nel proprio piano è:

$$(\alpha_{10}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{10})x - (q\alpha_{11} - p\beta_{11})z^{\xi+1} = 0.$$

2) *essendo* $\xi = \eta < \zeta$, *quando, mettendo in evidenza i termini di grado più basso nelle equazioni delle tre superficie*

$$p z^{\lambda+\xi} + \cdots + (\alpha_{10} x + \alpha_{11} y) z^{\lambda-1} + \cdots = 0,$$
$$q z^{\mu+\eta} + \cdots + (\beta_{10} x + \beta_{11} y) z^{\mu-1} + \cdots = 0,$$
$$r z^{\nu+\zeta} + \cdots + (\gamma_{10} x + \gamma_{11} y) z^{\nu-1} + \cdots = 0,$$

si abbia

$$\begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ q & \beta_{10} & \beta_{11} \\ 0 & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

cioè quando il cono Γ_C *abbia in* g *una generatrice almeno doppia, o quando le superficie cilindriche osculatrici alle* A *e* B *e corrispondenti alla generatrice* g (*coincidano, ovvero*) *si taglino* (*oltre che nella generatrice* ξ-*pla comune*) *in una linea* (*necessariamente piana*) *situata nel piano tangente a* Γ_C *lungo* g;

3) *essendo* $\xi = \eta = \zeta$, *quando si abbia*

$$\begin{vmatrix} p & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ q & \beta_{10} & \beta_{11} \\ r & \gamma_{10} & \gamma_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

cioè quando le superficie cilindriche osculatrici alle A, B, C *e corrispondenti alla generatrice* g *appartengano ad un medesimo fascio.*

Per dare un esempio, una delle tre superficie abbia in 0 un punto h-planare cogli h piani tangenti coincidenti in un solo σ; le altre due superficie abbiano in 0 le multiplicità k e t, ed i rispettivi coni tangenti Γ e Γ_1 abbiano in comune una (sola) generatrice g situata in σ ed avente risp. $h+h'$, $k+k'$, $t+t'$ delle sue intersezioni colle tre superficie raccolte in 0. Supposto, per fissar le idee, $k' \leq t'$, non potranno accadere che due casi:

1) Se $h' \leq k'$ $(\leq t')$, in 0 cadranno *almeno* $hkt + h'$ intersezioni delle tre superficie, e ne cadrà *precisamente questo numero*, salvo quando g sia almeno doppia per l'uno o per l'altro dei coni Γ e Γ_1, oppure quando, essendo g semplice per entrambi, questi si tocchino lungo g;

2) se invece $h' > t' (\geq k')$, oppure se $t' \geq h' > k'$, cadranno in 0 *almeno* $hkt + k' + 1$ di quelle intersezioni.

10. Dei risultati a cui siamo giunti si potrebbero fare molteplici applicazioni: qui mi limiterò a qualcuna relativa alla classe di una superficie algebrica (priva di linee multiple). Se questa, che dirò F, è di ordine n e priva di punti multipli, la sua classe è $n(n-1)^2$, cioè per una retta qualunque si possono condurre ad $F n(n-1)^2$ piani tangenti: i loro punti di contatto sono quelli che F ha in comune colle prime polari F_1 ed F_2 di due punti arbitrari P_1 e P_2 di quella retta. Se invece F è dotata di un punto s-plo $(s>1)0$, quelle prime polari hanno in 0 la multiplicità $s-1$, onde la classe vien diminuita di $s(s-1)^2$ unità *almeno*: proposizione notissima. Ora possiamo vedere in qual caso la diminuzione dovuta al punto s-plo sarà maggiore. In virtù del teorema dimostrato nei n.i 5 e 6, perchè ciò avvenga occorre e basta che i coni Γ, Γ_1, Γ_2 tangenti in 0 alle F, F_1, F_2 abbiano una generatrice comune g. Ma Γ_1 e Γ_2 sono le prime polari delle rette OP_1 ed OP_2 rispetto al cono Γ, sicchè la polare di prim'ordine di g rispetto a Γ è allora indeterminata, epperò g è multipla per Γ. Risulta dunque dimostrato rigorosamente e per via puramente algebrica il teorema (*):

Affinchè un punto s-plo di una superficie d'ordine n (priva di linee multiple) diminuisca la classe $n(n-1)^2$ della superficie di più che $s(s-1)^2$ unità, è necessario e sufficiente che il cono tangente alla superficie nel punto s-plo abbia una generatrice multipla.

Consideriamo più da vicino il caso, in cui il cono Γ ha una generatrice g doppia, e per maggior generalità poniamo che questa abbia $s+1+t(t\geqq 0)$ delle sue intersezioni con F raccolte nel punto 0. Assumendo 0 come origine delle coordinate e g come asse delle z, l'equazione di F può scriversi nella forma:

$$\left.\begin{aligned}F\equiv\ & p z^{s+t+1} + \text{potenze superiori di } z\\ & + x(a z^{s+h} + \text{potenze superiori di } z) + y(b z^{s+k} + \text{potenze superiori di } z)\\ & + (\alpha_{20}x^2 + \alpha_{21}xy + \alpha_{22}y^2)z^{s-2}\\ & + \text{termini che in } x \text{ e } y \text{ sono di 2.° grado e in } z \text{ di grado superiore}\\ & \qquad \text{all'}(s-2)^{\text{mo}}\\ & + \text{termini di grado superiore al 2.° in } x \text{ e } y = 0.\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

(*) Cfr. Rohn, *Ueber die Entstehung eines beliebigen κ-fachen Punctes einer Fläche aus dem gewöhnlichen κ-fachen Punct* (Berichte der K. Sächs. Gesell. d. Wissensch., 1884), pag. 2.

Qui è $p \neq 0$, $h \geqq 0$, $k \geqq 0$, ma i termini lineari in x ed y possono anche mancare (onde a e b possono anche essere nulli); invece, poichè l'equazione

$$\alpha_{20} x^2 + \alpha_{21} x y + \alpha_{22} y^2 = 0$$

rappresenta i due piani tangenti a Γ lungo g, possiamo supporre che nessuna delle α_{20}, α_{21}, α_{22} sia nulla.

Per riconoscere la diminuzione prodotta dal punto 0 nella classe di F, consideriamo le intersezioni di F colle prime polari di due punti generici P e Q aventi le coordinate P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3. Scrivendo soltanto i termini di grado più basso, tali polari hanno per equazioni

$$a P_1 z^{s+h} + b P_2 z^{s+k} + p P_3 (s + t + 1) z^{s+t} + \cdots$$
$$+ \left\{ (2 \alpha_{20} P_1 + \alpha_{21} P_2) x + (\alpha_{21} P_1 + 2 \alpha_{22} P_2) y \right\} z^{s-2} + \cdots = 0,$$

e quella che di qui si deduce cambiando le P nelle Q. Ora dobbiamo distinguere due casi.

1) Se t non è maggiore di nessuno dei numeri h e k, oppure se mancano nella (25) i termini lineari in x e y (onde $a = b = 0$), ciascuna delle polari considerate ha raccolte in 0 (in generale ed almeno) $s + t$ delle sue intersezioni con g, epperò, colle notazioni del n. prec., abbiamo:

$$\lambda = s, \qquad \mu = \nu = s - 1; \qquad \xi = t + 1, \qquad \eta \geqq t + 1, \qquad \zeta \geqq t + 1.$$

Il punto 0 assorbe quindi $s(s-1)^2 + t + 1$ intersezioni delle tre superficie, e non ne assorbe un numero maggiore se non quando sia

$$0 = p \begin{vmatrix} 2 \alpha_{20} P_1 + \alpha_{21} P_2 & \alpha_{21} P_1 + 2 \alpha_{22} P_2 \\ 2 \alpha_{20} Q_1 + \alpha_{21} Q_2 & \alpha_{21} Q_1 + 2 \alpha_{22} Q_2 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \alpha_{20} & \alpha_{21} \\ \alpha_{21} & 2 \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Il primo fattore p non è nullo; il secondo fattore si annulla soltanto allorchè la retta PQ taglia l'asse delle z, il che è da escludersi avendo scelto P e Q in posizione generica; infine l'annullarsi dell'ultimo fattore significa che g è per Γ una generatrice cuspidale.

2) Se t supera quello dei due numeri h e k che non è maggiore dell'altro, e che supporremo, ad es., sia h (cioè se, supposto $h \leqq k$, è $h < t$), oppure se, mancando uno dei numeri h e k (per es. k), l'altro è minore di t, il più piccolo dei numeri che nel numero precedente abbiamo indicato con ξ, η, ζ è $h + 1$, epperò, tenendo presente che il cono Γ ha in g una genera-

trice doppia, si conclude che 0 assorbe almeno

$$s(s-1)^2+(h+1)+1\,, \quad \text{cioè} \quad s(s-1)^2+h+2$$

intersezioni delle tre superficie.

Ora nel caso 1) il numero $s+t$ esprime quante fra le intersezioni della retta g colla prima polare di un punto generico dello spazio rispetto ad F cadono in 0; nel caso 2) invece, 0 rappresenta $s+h$ di tali intersezioni. Abbiamo dunque il teorema:

Se una superficie algebrica ha in un punto 0 *la multiplicità* s, *ed il cono* Γ *ivi ad essa tangente possiede una generatrice doppia* g, *la quale abbia in* 0 *raccolte* $s+1+t(t\geqq 0)$ *delle sue intersezioni colla superficie, può accadere che* g *incontri in* 0 *la prima polare di un punto generico rispetto ad* $F\,s+t$ *volte, oppure un numero minore,* $s+h\,(0\leqq h<t)$, *di volte. Nel primo caso il punto* 0 *diminuisce la classe della superficie almeno di* $s(s-1)^2+t+1$ *unità, e la diminuisce maggiormente soltanto allorchè* g *è pel cono* Γ *una generatrice cuspidale; nel secondo caso il punto* 0 *diminuisce la classe di almeno* $s(s-1)^2+h+2$ *unità* (*).

Ha un interesse particolare il caso in cui 0 è doppio per $F(s=2)$: la classe di F vien da esso diminuita di più che due unità soltanto quando il cono ivi tangente si spezza in due piani (distinti o no). Se 0 è biplanare, il teorema precedente diviene:

Avendosi una superficie dotata di un punto biplanare 0, *siffatto che la retta* g *comune ai due piani ivi tangenti abbia* $3+t(t\geqq 0)$ *delle sue intersezioni colla superficie raccolte in* 0, *questo punto abbassa la classe della superficie precisamente di* $t+3$ *unità, oppure di almeno* $h+4$ *unità, secondo che esso assorbe* $t+2$, *oppure un numero minore,* $h+2\,(0\leqq h<t)$, *delle intersezioni di* g *colla prima polare di un punto generico rispetto alla superficie.*

Di questo teorema sono immediate conseguenze alcune proprietà che sono state stabilite dal sig. Rohn (**) ricorrendo a sviluppi in serie: un punto bi-

(*) Di questo teorema non sono noti che alcuni casi molto particolari (e del resto anche con minor precisione di quella che è nel testo): per $t=0,\,1$, cfr. Rohn, *Das Verhalten der* Hesse'*schen Fläche* ecc. (Math. Ann. Bd. XXIII, nota a pag. 89); e per una superficie del 4.° ordine con un punto triplo, v. Rohn, *Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte* (Math. Ann., Bd. XXIV), n.^{i} 52, 53 e 59, dove l'A. ricorre a sviluppi in serie.

(**) Rohn, *Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte* (Math. Ann., Bd. XXII, pag. 133-134).

planare può abbassare la classe della superficie (compatibilmente coll'ordine di questa) di quante si vogliano unità, senza che le sezioni fatte nella superficie dai piani in esso tangenti abbiano in quel punto una multiplicità superiore a tre; se la classe vien diminuita di più che tre unità, le sezioni della superficie con ciascuno di quei due piani hanno in generale in quel punto un punto triplo, di cui *una* delle tangenti è l'intersezione dei due piani tangenti, e non è necessario che intervengano altre particolarità; ecc.

Si deduce altresì:

Perchè un punto biplanare di una superficie algebrica diminuisca la classe di questa precisamente di tre unità, è necessario e sufficiente che la retta comune ai due piani ivi tangenti abbia tre, e non più, delle sue intersezioni colla superficie riunite in quel punto.

Torino, 3 gennaio 1896.

Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere tre.

(Di Ernesto Pascal, *a Pavia.)*

Nel 1890 mi sono occupato della quistione che è oggetto di questa Memoria, in un lavoro, pubblicato negli *Annali di Matematica* (vol. XVIII), col titolo: *Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti.* Lo scopo di questo nuovo lavoro è di completare i risultati ottenuti in quello di sei anni fa. Dalla teoria generale si sa che il campo di razionalità delle σ abeliane pari a tre argomenti, è quello dei coefficienti di una certa rete di quadriche, mediante i quali si esprimono poi anche razionalmente i coefficienti della quartica piana che si assume per forma fondamentale dell'irrazionalità abeliana. I termini dello sviluppo in serie delle σ pari, sono formazioni invariantive della rete di quadriche, e il secondo termine è un combinante di 8.° grado nei coefficienti della rete. Ma sotto questa forma la ricerca mi presentò sin dall'epoca di quel mio lavoro, difficoltà grandi, e quindi vidi opportuno di mutar forma al problema, e di introdurre, mediante un certo artifizio, in luogo della rete di quadriche, un certo connesso (1, 2) nel piano, e potetti così condurre a termine la ricerca esprimendo il secondo termine dello sviluppo, non più mediante i coefficienti della rete, ma mediante quelli del connesso.

Ora, a proposito di un lavoro sulle funzioni ellittiche che ho pubblicato ultimamente in questo stesso Periodico, ho avuto occasione di tornare sulla medesima quistione, e avendo trovato certi artifizii coi quali ho potuto condurre più speditamente i calcoli, e essendomi valso dei risultati già ottenuti nella citata Memoria, ho potuto definitivamente risolvere il problema sotto la primitiva sua forma.

L'esposizione dei miei nuovi risultati e dei miei procedimenti è lo scopo appunto di questa Memoria.

§ 1. Riassunto dei risultati ottenuti nella Memoria del 1890.

Per potere più facilmente intendere i procedimenti che avrò occasione di seguire nei paragrafi seguenti, è necessario riassumere in questo paragrafo i risultati ottenuti nella Memoria di cui questa può considerarsi come una continuazione.

Introducendo una rete di quadriche:

$$F = x_1 \sum_1^4 \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum_1^4 \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum_1^4 \gamma_{ik} z_i z_k = 0,$$

in cui le x sono i parametri della rete, si può definire una curva generale di 4.° ordine piana, coll'equazione:

$$\Pi = 2 \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{11} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

dove

$$\pi_{ik} = \pi_{ki} = \alpha_{ik} x_1 + \beta_{ik} x_2 + \gamma_{ik} x_3.$$

Se la equazione della rete di quadriche la poniamo sotto la forma simbolica:

$$F = a_x \alpha_z^2 = b_x \beta_z^2 = c_x \gamma_z^2 = d_x \delta_z^2 = \cdots = 0,$$

allora la espressione simbolica dell'equazione della curva $\Pi = 0$ è

$$\Pi = \frac{1}{12} (\alpha \beta \gamma \delta)^2 a_x b_x c_x d_x = 0.$$

Data una quartica piana, la sua equazione si può in 36 modi diversi porre sotto la forma precedente; ad ognuno di questi 36 modi corrisponde una delle 36 funzioni abeliane pari σ. Il secondo termine dello sviluppo in serie di queste σ, è un combinante della rete, di *8.° grado* nei coefficienti, e di *2.° grado* nei parametri x, che vengono allora a rappresentare *i tre integrali abeliani di 1.ª specie.* Nel § 9 della Memoria citata facemmo una ricerca sulla quale torneremo nel paragrafo seguente, e che allora restò come una cosa isolata senza influenza alcuna sui risultati della Memoria.

Senza togliere generalità alla equazione della rete di quadriche, la si può immaginare sotto la forma simbolica speciale:

$$z_4 (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^2 = 0,$$

e allora eguagliando a zero il secondo termine di questa espressione, e intendendo poi che le x rappresentino coordinate di rette nel piano, e le z coordinate dí punti, si ha l'equazione di un connesso (1, 2) nel piano.

Allora sia il primo membro dell'equazione della quartica piana, sia i termini dello sviluppo delle σ, diventano invarianti della cosiddetta *coincidenza principale del connesso.* Esprimendo il connesso sotto la forma simbolica:

$$0 = a_x \alpha_z^2 = b_x \beta_z^2 = \cdots,$$

dove le z adesso non sono più quaternarie, ma ternarie, la equazione di Π diventa

$$\Pi = a_x b_x (\alpha \beta x)^2,$$

e da una lunga ricerca fatta poi nei paragrafi seguenti della citata Memoria, risulta che il secondo termine della σ deve essere una combinazione lineare dei tre invarianti:

$$(a) = (3) - \frac{2}{3}(4) - \frac{32}{3}(5) - 4(6) + \frac{32}{3}(7) - \frac{4}{3}(8) - \frac{10}{3}(9) + \frac{32}{3}(10)$$

$$(b) = (2) - \frac{1}{6}(4) + \frac{4}{3}(5) - (6) - \frac{4}{3}(7) + \frac{1}{6}(8) - \frac{5}{6}(9) + \frac{2}{3}(10)$$

$$(c) = (1) + \frac{1}{3}(4) - \frac{5}{6}(5) \qquad - \frac{1}{3}(7) - \frac{1}{3}(8) - \frac{1}{3}(9) - \frac{7}{6}(10),$$

dove per semplicità si è posto:

$$\begin{aligned}
(1) &= (x\delta\beta)(x\delta\gamma)\,\alpha_a\alpha_b\beta_c\gamma_d \\
(2) &= \quad " \quad\quad " \quad \alpha_a\alpha_b\gamma_c\beta_d \\
(3) &= \quad " \quad\quad " \quad \alpha_a\beta_b\gamma_c\alpha_d \\
(4) &= \quad " \quad\quad " \quad \alpha_a\gamma_b\beta_c\alpha_d \\
(5) &= \quad " \quad\quad " \quad \beta_a\gamma_b\alpha_c\alpha_d \\
(6) &= \quad " \quad\quad " \quad \beta_a\alpha_b\gamma_c\alpha_d \\
(7) &= \quad " \quad\quad " \quad \beta_a\alpha_b\alpha_c\gamma_d \\
(8) &= \quad (u\delta\gamma)^2 \quad \alpha_a\beta_b\alpha_c\beta_d \\
(9) &= \quad\quad " \quad\quad \alpha_a\alpha_b\beta_c\beta_d \\
(10) &= \quad\quad " \quad\quad \beta_a\alpha_b\alpha_c\beta_d.
\end{aligned}$$

Si trovò poi infine che propriamente il termine richiesto dello sviluppo di σ, è:

$$[\sigma]_2 = \frac{1}{2^4 \cdot 3^2}(a) + \frac{5^2}{2^3 \cdot 3^2}(b).$$

Per giungere a questo risultato finale, abbiamo dovuto passare per dei risultati parziali che ci occorre di fissare qui, perchè hanno una grande importanza per quello che dovremo calcolare in seguito.

Abbiamo trovato che

1.° ponendo il primo membro dell'equazione del connesso sotto la forma speciale:

$$2x_1 z_2 z_3 + 2x_2 z_3 z_1 + 2x_3 z_1 z_2, \tag{I}$$

si ha:

$$(a) = -64(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$(b) = 0$$

$$(c) = \frac{23}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

e

$$[\sigma]_2 = \frac{4}{9}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

2.° ponendo il primo membro dell'equazione del connesso sotto l'altra forma speciale:

$$x_1 z_1^2 + x_1 z_2^2 + x_2 z_3^2, \tag{II}$$

si ha:

$$(a) = \frac{25}{3} x_3^2 - \frac{32}{3} x_1 x_2$$

$$(b) = -\frac{1}{6} x_3^2 + \frac{1}{3} x_1 x_2$$

$$(c) = -\frac{7}{2} x_3^2 - \frac{2}{3} x_1 x_2,$$

$$[\sigma]_2 = \frac{1}{2^3 \cdot 3} x_1 x_2.$$

§ 2. Combinanti di 8.° grado della rete di quadriche.

Nel § 9 della Memoria del 1890 fu fatta la lunga ricerca di tutti i possibili combinanti di 8.° grado nei coefficienti, e di 2.° grado nelle x. A prima vista di tali combinanti espressi sotto forma simbolica se ne presentarono moltissimi; ma in seguito, con opportuni artifizii, si ridussero tutti a tre che indicammo con (A) (B) (C). Per quella ricerca questi combinanti non aveano alcuna importanza, e la loro ricerca restava come un fatto isolato senza conseguenze.

Per la ricerca odierna invece questi combinanti hanno la maggiore importanza, perchè è intorno ad essi che la ricerca si svolge. Quindi ho ripreso in esame il procedimento tenuto nel citato § 9, e mi sono assicurato che esso è esatto, ma che però il risultato cui si arriva ha bisogno di essere ulteriormente semplificato coll'osservazione che in fondo basta limitarsi a considerare solo i due combinanti (A) (B).

Il combinante (C) era simbolicamente:

$$a_x a'_x (b c b')(d c' d')(\alpha \beta \gamma \delta)(\alpha \beta \gamma' \delta')(\alpha' \beta' \gamma \delta')(\alpha' \beta' \gamma' \delta).$$

Osserviamo che la parte colle lettere greche resta inalterata cogli scambi di

$$\begin{array}{cccccc} \gamma & \text{con} & \gamma' & \text{e} & \delta & \text{con} \ \delta' \\ \gamma & \text{con} & \delta & \text{e} & \gamma' & \text{con} \ \delta' \\ \gamma & \text{con} & \delta' & \text{e} & \gamma' & \text{con} \ \delta, \end{array}$$

e poichè lo scambio dei simboli rappresentati dalle lettere greche, porta con sè quello delle lettere latine omonime, così il combinante (C) lo possiamo anche scrivere nelle tre altre maniere:

$$\begin{gathered} a_x a'_x (b c' b')\,(d' c\, d)\,(\alpha \beta \gamma \delta)(\alpha \beta \gamma' \delta')(\alpha' \beta' \gamma \delta')(\alpha' \beta' \gamma' \delta) \\ a_x a'_x (b\, d\, b')\,(c\, d' c')\,(\alpha \beta \gamma \delta)\,(\alpha \beta \gamma' \delta')(\alpha' \beta' \gamma \delta')(\alpha' \beta' \gamma' \delta) \\ a_x a'_x (b\, d' b')(c' d\, c)\,(\alpha \beta \gamma \delta)\,(\alpha \beta \gamma' \delta')(\alpha' \beta' \gamma \delta')(\alpha' \beta' \gamma' \delta)\,, \end{gathered}$$

ovvero anche, come la quarta parte della somma delle quattro espressioni. Ma una tal somma è identicamente zero perchè per una delle note identità simboliche si ha:

$$(b c b')(d c' d') - (b d b')(c' d' c) + (b c' b')(d' c d) - (b d' b')(c d c') = 0.$$

In base ai risultati del citato § 9 possiamo allora conchiudere che il secondo termine dello sviluppo della σ deve essere una combinazione lineare dei soli due combinanti:

$$(A) = a_x a'_x (b\,c\,d)(b'\,c'\,d')(\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta)(\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta')(\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta)\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta')$$

$$(B) = a_x a'_x (b\,c\,d)(b'\,c'\,d')(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)\,(\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta')(\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta')\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta).$$

§ 3. Formazione dei combinanti (A) (B) mediante certe espressioni più facilmente calcolabili.

Consideriamo la espressione (v. §§ 4, 6 della Mem. cit.):

$$\Phi_{\delta\delta'} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{14} & \delta_1 \\ \pi_{21} & \dots & \pi_{24} & \delta_2 \\ \pi_{31} & \dots & \pi_{34} & \delta_3 \\ \pi_{41} & \dots & \pi_{44} & \delta_4 \\ \delta'_1 & \dots & \delta'_4 & 0 \end{vmatrix},$$

la quale espressa mediante i coefficienti simbolici della rete di quadriche è (dove δ, δ' per ora non hanno significato di coefficienti simbolici della rete):

$$\Phi_{\delta\delta'} = \frac{1}{12}(\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta)\,(\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta')\,a_x b_x c'_x$$

$$= \frac{1}{12}(\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta)(\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta')\,a'_x b'_x c_x.$$

Ora indichiamo con D_{xy} l'operazione di polare fra le variabili x e y, cioè precisamente:

$$D_{xy} = y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots$$

Possiamo allora scrivere:

$$2\,D_{xy}\,D_{xz}\,\Phi_{\delta\delta'} = (\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta)(\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta')\,a_x b_y c'_z,$$

o anche, mutando i simboli,

$$= (\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta)(\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta')\,a'_x b'_z c_y.$$

Indichiamo con P_{yz} questa espressione, e allora possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_1 \partial z_2} = (\alpha\beta\gamma'\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')a_x b_1 c'_2$$

$$\frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_2 \partial z_1} = (\alpha'\beta'\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma\delta')a'_x b'_1 c_2,$$

donde moltiplicando:

$$(\alpha\beta\gamma'\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')(\alpha'\beta'\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma\delta')a_x a'_x b_1 c_2 d_3 b'_1 c'_2 d'_3 =$$
$$= \frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_1 \partial z_2} \cdot \frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_2 \partial z_1} d_3 d'_3 .$$

Ora se nel covariante (A) si sviluppa il prodotto dei due determinanti simbolici ternarii, (bcd), $(b'c'd')$, uno dei termini dello sviluppo è proprio il primo membro dell'ultima espressione scritta; i 36 termini dello sviluppo possono tutti rappresentarsi in questa maniera mediante le derivate seconde di P_{yz} moltiplicate per i simboli d.

Il covariante (A) è allora eguale a:

$$(A) = \sum \pm \frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_i \partial z_{j'}} \cdot \frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_j \partial z_{i'}} d_h d'_{h'},$$

dove $i\ j\ h$, $i'\ j'\ h'$ sono due permutazioni dei numeri 1, 2, 3, e il segno del termine è $+$ ovvero $-$ secondochè le due permutazioni sono ambedue pari o ambedue dispari, ovvero di parità contraria. Messo (A) sotto questa forma ci sarà più facile calcolarlo in funzione dei coefficienti del connesso, giacchè basterà calcolare mediante tali coefficienti la espressione P_{yz} e poi eseguire le operazioni indicate. È di questo principio che noi ci serviremo in seguito. Sulla formola precedente vogliamo osservare che essa propriamente viene a contenere 36 termini; però è facile vedere che questi a due a due sono fra loro eguali, e quindi si riducono a soli 18 diversi.

Cerchiamo ora di fare una ricerca analoga per la determinazione del covariante (B).

Consideriamo:

$$\Phi_{\gamma\delta \atop \gamma\delta} = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} & \gamma_1 & \delta_1 \\ \pi_{21} & \cdots & \cdots & \pi_{24} & \gamma_2 & \delta_2 \\ \pi_{31} & \cdots & \cdots & \pi_{34} & \gamma_3 & \delta_3 \\ \pi_{41} & \cdots & \cdots & \pi_{44} & \gamma_4 & \delta_4 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 & \gamma'_4 & 0 & 0 \\ \delta'_1 & \delta'_2 & \delta'_3 & \delta'_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

che espresso mediante i coefficienti simbolici della rete di quadriche è (dove $\gamma\delta\gamma'\delta'$ per ora non hanno ancora significato di coefficienti simbolici della rete):

$$= \frac{1}{2}(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')a_x b_x.$$

Di qui si ha:

$$D_{xy}\Phi_{\substack{\gamma\delta \\ \gamma'\delta'}} = (\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')a_x b_y$$

$$D_{xy}\Phi_{\substack{\gamma\delta' \\ \gamma\delta}} = (\alpha'\beta'\gamma\delta')(\alpha'\beta'\gamma\delta)a'_x b'_y,$$

che chiameremo per brevità rispettivamente:

$$P_y, \qquad P'_y.$$

Formando ora p. es.:

$$\frac{\partial P_y}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial P'_y}{\partial y_1}(c_2 d_3)(c'_2 d'_3),$$

si ha evidentemente una parte del covariante (B), e tutte le altre parti si possono ottenere in una maniera analoga.

Propriamente il covariante (B) è eguale a:

$$(B) = \sum \frac{\partial P_y}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial P'_y}{\partial y_{i'}}(c_j d_h)(c'_{j'} d'_{h'}),$$

dove i, j, h; i', j', h' rappresentano due permutazioni *pari* degli indici 1, 2, 3.

§ 4. Calcolo di (A) per il caso in cui il connesso abbia la forma speciale (I).

Dalle considerazioni fatte avanti risulta che per eseguire il calcolo indicato bisognerà prima esaminare che cosa diventa P_{yz} quando il connesso acquista la forma (I) del § 1, ovvero, ciò che è lo stesso, quando il primo membro dell'equazione della rete di quadriche diventa

$$z_4(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) + 2(x_1 z_2 z_3 + x_2 z_3 z_1 + x_3 z_1 z_2).$$

I coefficienti dell'equazione della rete sono allora:

$$a_i \alpha_i \alpha_4 = \frac{1}{2}$$

$$a_i \alpha_j \alpha_h = 1 \qquad (i, j, h = \text{permut. di } 1, 2, 3),$$

e tutti gli altri sono zero.

Possiamo fare una semplificazione al problema nella seguente maniera. Dai risultati citati al § 1 si vede che quando il connesso ha la forma (I) allora $(b)=0$ e (a) (c) diventano, salvo coefficienti numerici, della forma

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2).$$

Ora siccome naturalmente (A) come anche (B) non possono riuscire che combinazioni lineari di (a) (b) (c), così è evidente che essi devono risultare eguali, salvo coefficienti numerici, a questa medesima espressione. Tutta la questione sarà di trovare qual'è questo coefficiente numerico; ora esso potrà trovarsi ricercando il coefficiente del termine in x_1^2 nell'espressione cui si riduce (A).

La ricerca allora resta semplificata nel senso che invece di far entrare nei calcoli il P_{yz} intero, si tien conto solo del termine in x_1 in esso contenuto, tralasciando gli altri termini.

La espressione $\Phi_{\delta\delta}$ è nel nostro caso:

$$2\Phi_{\delta\delta'} = \begin{vmatrix} 0 & x_3 & x_2 & x_1 & \delta'_1 \\ x_3 & 0 & x_1 & x_2 & \delta'_2 \\ x_2 & x_1 & 0 & x_3 & \delta'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & \delta'_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 0 \end{vmatrix},$$

che sviluppato è:

$$\begin{aligned} 2\Phi_{\delta\delta'} = {} & [\delta_4\delta'_1+\delta_1\delta'_4+\delta_2\delta'_3+\delta_3\delta'_2](-x_1^2+x_2^2+x_3^2)x_1 + \\ & +[\delta_4\delta'_2+\delta_2\delta'_4+\delta_1\delta'_3+\delta_3\delta'_1](+x_1^2-x_2^2+x_3^2)x_2 + \\ & +[\delta_4\delta'_3+\delta_3\delta'_4+\delta_1\delta'_2+\delta_2\delta'_1](+x_1^2+x_2^2-x_3^2)x_3 - \\ & -2[\delta_1\delta'_1+\delta_2\delta'_2+\delta_3\delta'_3+\delta_4\delta'_4]\,x_1x_2x_3 . \end{aligned}$$

Facendo ora le polari D_{xy} D_{xz} e tenendo conto, per quel che abbiamo detto sopra, solo della parte in x_1, si ha:

$$P_{yz} = 2D_{xz}D_{xy}\Phi_{\delta\delta'} = \left\{ \begin{aligned} & 2A_{14}(-3y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)+ \\ & +2A_{24}(y_1z_2+y_2z_1)+ \\ & +2A_{34}(y_1z_3+y_3z_1)+ \\ & +2A_{44}(y_2z_3+y_3z_2) \end{aligned} \right\} x_1 + etc.$$

dove:

$$A_{14} = \delta_1 \delta'_4 + \delta_4 \delta'_1 + \delta_2 \delta'_3 + \delta_3 \delta'_2$$

$$A_{24} = \delta_2 \delta'_4 + \delta_4 \delta'_2 + \delta_3 \delta'_1 + \delta_1 \delta'_3$$

$$A_{34} = \delta_3 \delta'_4 + \delta_4 \delta'_3 + \delta_1 \delta'_2 + \delta_2 \delta'_1$$

$$A_{44} = \delta_1 \delta'_1 + \delta_2 \delta'_2 + \delta_3 \delta'_3 + \delta_4 \delta'_4 .$$

Ora dobbiamo passare a calcolare i diversi termini della formola trovata per (A) al § 3.

Per esempio il primo termine:

$$\frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_1 \partial z_2} \frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_2 \partial z_1} d_3 d'_3 ,$$

è:

$$2 A_{24} \cdot 2 A_{24} d_3 d'_3 ,$$

e, avendo presente che:

$$d_i \delta_j \delta_4 = 0 \qquad d_i \delta_i \delta_4 = \frac{1}{2}$$

$$d_i \delta_j \delta_h = 1 \qquad \text{se } i,\ j,\ h \text{ è una permut. dei num. } 1,\ 2,\ 3,$$

si ottiene per risultato il numero $+8$.

Inseriremo qui la tabella di tutti i dieciotto valori in tal maniera ottenuti che dobbiamo poi sommare e raddoppiare per le cose dette al § 3. Nella prima colonna sono segnati i valori degli indici $i\ j\ h$, $i'\ j'\ h'$ riferentisi ai termini della citata formola, nella seconda colonna ci sono i segni che competono a quei termini, nella terza i valori simbolici di quei termini e nella quarta i valori numerici effettivi:

1 2 3 1 2 3	$+$	$+\ 4\ A^2_{24}\ d_3\ d'_3$	$+\ 8$
1 2 3 1 3 2	$-$	$-\ 4\ A_{34}\ A_{24}\ d_3\ d'_2$	$-\ 9$
1 2 3 2 3 1	$+$	$+\ 4\ A_{34}\ A_{14}\ d_3\ d'_1$	$+\ 9$
1 2 3 2 1 3	$-$	$+12\ A^2_{14}\ d_3\ d'_3$	$+24$
1 2 3 3 1 2	$+$	$-12\ A_{14}\ A_{44}\ d_3\ d'_2$	-27
1 2 3 3 2 1	$-$	$-\ 4\ A_{24}\ A_{44}\ d_3\ d'_1$	$-\ 9$
1 3 2 1 2 3	$-$	$-\ 4\ A_{24}\ A_{34}\ d_2\ d'_3$	$-\ 9$
1 3 2 1 3 2	$+$	$+\ 4\ A^2_{34}\ d_2\ d'_2$	$+\ 8$
1 3 2 2 3 1	$-$	$-\ 4\ A_{34}\ A_{44}\ d_2\ d'_1$	$-\ 9$

1 3 2 2 1 3	+	$-12\ A_{14}\ A_{41}\ d_2\ d'_3$	-27
1 3 2 3 1 2	−	$+12\ A^2_{14}\ d_2\ d'_2$	$+24$
1 3 2 3 2 1	+	$+\ 4\ A_{24}\ A_{14}\ d_2\ d'_1$	$+\ 9$
2 3 1 1 2 3	+	$+\ 4\ A_{14}\ A_{34}\ d_1\ d'_3$	$+\ 9$
2 3 1 1 3 2	−	$-\ 4\ A_{44}\ A_{34}\ d_1\ d'_2$	$-\ 9$
2 3 1 2 3 1	+	$+\ 4\ A^2_{44}\ d_1\ d'_1$	$+10$
2 3 1 2 1 3	−	$-\ 4\ A_{21}\ A_{14}\ d_1\ d'_3$	$-\ 9$
2 3 1 3 1 2	+	$+\ 4\ A_{24}\ A_{14}\ d_1\ d'_2$	$+\ 9$
2 3 1 3 2 1	−	$-\ 4\ A^2_{14}\ d_1\ d'_1$	-10

La somma di tutti i numeri dell'ultima colonna dà per risultato -8 che raddoppiato dà -16.

Possiamo dunque conchiudere che quando il primo membro dell'equazione del connesso si pone sotto la forma (I), allora il covariante (A) diventa:

$$(A) = -16\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

§ 5. Calcolo di (A) quando il connesso assume la forma speciale (II).

Per la forma speciale (II) cioè:

$$z_4(x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) + (x_1 z_1^2 + x_1 z_2^2 + x_2 z_3^2),$$

tutti i coefficienti della rete sono zero, meno quelli che in simboli hanno la forma:

$$d_i \delta_i \delta_4 \text{ che sono eguali a } \frac{1}{2},$$

e

$$d_1 \delta_1^2, \qquad d_1 \delta_2^2, \qquad d_2 \delta_3^2 \text{ che sono eguali ad } 1.$$

Si ha:

$$2\,\Phi_{\delta\delta'} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_1 & \delta_1 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & \delta_2 \\ 0 & 0 & x_2 & x_3 & \delta_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & \delta_4 \\ \delta'_1 & \delta'_2 & \delta'_3 & \delta'_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= \delta_3\delta'_3 x_1^3 + \delta_1\delta'_1 x_2^3 + \\ &+ (\delta_1\delta'_4 + \delta_4\delta'_1 + \delta_2\delta'_2 + \delta_4\delta'_4)x_1^2x_2 + \\ &+ (\delta_2\delta'_4 + \delta_4\delta'_2 + \delta_3\delta'_3 - \delta_1\delta'_2 - \delta_2\delta'_1)x_1x_2^2 + \\ &+ (\delta_3\delta'_4 + \delta_4\delta'_3 - \delta_1\delta'_3 - \delta_3\delta'_1)x_1^2x_3 + \\ &+ (\delta_1\delta'_1 + \delta_2\delta'_2)x_1x_3^2 - (\delta_2\delta'_3 + \delta_3\delta'_2)x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Ponendo ora:

$$\begin{aligned}A_{111} &= \delta_3\delta'_3\\ A_{222} &= \delta_1\delta'_1\\ A_{112} &= \delta_1\delta'_4 + \delta_4\delta'_1 + \delta_2\delta'_2 + \delta_4\delta'_4\\ A_{122} &= \delta_2\delta'_4 + \delta_4\delta'_2 + \delta_3\delta'_3 - \delta_1\delta'_2 - \delta_2\delta'_1\\ A_{113} &= \delta_3\delta'_4 + \delta_4\delta'_3 - \delta_1\delta'_3 - \delta_3\delta'_1\\ A_{133} &= \delta_1\delta'_1 + \delta_2\delta'_2\\ A_{123} &= -\delta_2\delta'_3 - \delta_3\delta'_2,\end{aligned}$$

e calcolando al solito:

$$P_{yz} = 2\,D_{xz}\,D_{xy}\,\Phi_{\delta\delta},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}P_{yz} = {} & [6\,A_{111}y_1z_1 + 2\,A_{122}y_2z_2 + 2\,A_{133}y_3z_3 + 2\,A_{112}(y_1z_2 + y_2z_1) + \\ & + 2\,A_{113}(y_1z_3 + y_3z_1) + A_{123}(y_2z_3 + y_3z_2)]\,x_1 + \\ & + [2\,A_{112}y_1z_1 + 6\,A_{222}y_2z_2 + 2\,A_{122}(y_1z_2 + y_2z_1) + \\ & + A_{123}(y_1z_3 + y_3z_1)]\,x_2 + \\ & + [2\,A_{113}y_1z_1 + 2\,A_{123}(y_1z_2 + y_2z_1) + 2\,A_{133}(y_1z_3 + y_3z_1)]\,x_3.\end{aligned}$$

Ora per semplificare il calcolo facciamo un'osservazione simile a quella già fatta nel paragrafo precedente. Osserviamo che (v. § 1) quando il connesso riceve la forma speciale (II), allora (a) (b) (c) risultano formati di soli due termini, cioè del termine in x_3^2, e del termine in x_1x_2; onde possiamo affermare che anche (A) risulterà formato di due termini di tale specie.

Il calcolo di tali due termini si potrà fare similmente a quello già fatto nel paragrafo precedente.

Per es.:

$$\frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_1\,\partial z_2}\,\frac{\partial^2 P_{yz}}{\partial y_2\,\partial z_1}\,d_3\,d'_3,$$

dà:

$$A^2_{123}\,d_3\,d'_3,$$

che è zero, come si riconosce se si tien presente l'espressione soprascritta di A_{123}, e i valori dei coefficienti simbolici $d_i \delta_j \delta_h$ indicati al principio di questo paragrafo.

Similmente si può riconoscere che sono zero tutti gli altri 18 termini analoghi a questo considerato. Possiamo dunque conchiudere che *in* (A) *il termine in* x_3^2 *ha per coefficiente zero, quando la forma fondamentale è del tipo speciale* (II).

Passiamo ora al termine in $x_1 x_2$.

Qui dobbiamo procedere come nel paragrafo precedente, e inseriamo quindi senz'altro la tabella dei soliti 18 termini. La formazione della tabella è simile a quella del paragrafo precedente, quindi ci dispensiamo da ulteriori schiarimenti.

1 2 3 1 2 3	$+$	$(4\, A_{112}\, A_{122} + 4\, A_{122}\, A_{112})\, d_3\, d'_3$	$+\ 2$
1 2 3 1 3 2	$-$	$(-\ 4\, A_{113}\, A_{122} - 2\, A_{123}\, A_{112})\, d_3\, d'_2$	$-\ \frac{5}{2}$
1 2 3 2 3 1	$+$	$(12\, A_{113}\, A_{222} - 2\, A_{123}\, A_{122})\, d_3\, d'_1$	$-\ 1$
1 2 3 2 1 3	$-$	$(-36\, A_{111}\, A_{222} - 4\, A_{112}\, A_{122})\, d_3\, d'_3$	$-\ 1$
1 2 3 3 1 2	$+$	$+\ 2\, A_{112}\, A_{123}\ d_3\, d'_2$	$-\ \frac{1}{2}$
1 2 3 3 2 1	$-$	$-\ 2\, A_{122}\, A_{123}\ d_3\, d'_1$	$+\ 1$
1 3 2 1 2 3	$-$	$(-\ 2\, A_{112}\, A_{123} - 4\, A_{122}\, A_{113})\, d_2\, d'_3$	$-\ \frac{5}{2}$
1 3 2 1 3 2	$+$	$(2\, A_{113}\, A_{123} + 2\, A_{123}\, A_{113})\, d_2\, d'_2$	$-\ 4$
1 3 2 2 3 1	$-$	$-\, A^2_{123}\, d_2\, d'_1$	$-\ 1$
1 3 2 2 1 3	$+$	$2\, A_{112}\, A_{123}\ d_2\, d'_3$	$-\ \frac{1}{2}$
1 3 2 3 1 2	$-$	$-\ 4\, A_{112}\, A_{133}\ d_2\, d'_2$	$-\ 1$
1 3 2 3 2 1	$+$	$4\, A_{122}\, A_{133}\ d_2\, d'_1$	$+\ 2$
2 3 1 1 2 3	$+$	$(2\, A_{122}\, A_{123} + 12\, A_{222}\, A_{113})\, d_1\, d'_3$	$-\ 1$
2 3 1 1 3 2	$-$	$-\, A^2_{123}\, d_1\, d'_2$	$-\ 1$
2 3 1 2 3 1	$+$	0	0
2 3 1 2 1 3	$-$	$-\ 2\, A_{122}\, A_{123}\ d_1\, d'_3$	$+\ 1$
2 3 1 3 1 2	$+$	$+\ 4\, A_{122}\, A_{133}\ d_1\, d'_2$	$+\ 2$
2 3 1 3 2 1	$-$	$-12\, A_{222}\, A_{133}\ d_1\, d'_1$	$-\ 12$

Sommando tutti i numeri dell'ultima colonna e raddoppiando si ha per risultato -40. Possiamo quindi conchiudere che quando la forma fondamentale è del tipo speciale (II) allora il covariante (A) diventa semplicemente:

$$(A) = -40\, x_1 x_2 .$$

§ 6. Espressione di (A) mediante (a) (b) (c).

Coi risultati dei due paragrafi precedenti, e con quelli citati nel § 1 possiamo subito ottenere l'espressione di (A) mediante (a) (b) (c).

In effetti ponendo:

$$(A) = \mu_a (a) + \mu_b (b) + \mu_c (c),$$

si hanno subito fra i coefficienti numerici μ le equazioni:

$$\begin{aligned}
-64\, \mu_a \qquad\quad + \frac{23}{3}\, \mu_c &= -16 \\
\frac{25}{3}\, \mu_a - \frac{1}{6}\, \mu_b - \frac{7}{2}\, \mu_c &= 0 \\
-\frac{32}{3}\, \mu_a + \frac{1}{3}\, \mu_b - \frac{2}{3}\, \mu_c &= -40,
\end{aligned}$$

le quali risolute danno:

$$\begin{aligned}
\mu_a &= +\frac{2^2 \cdot 7}{29} \\
\mu_b &= -\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 31 \cdot 131}{23 \cdot 29} \\
\mu_c &= +\frac{2^4 \cdot 3 \cdot 83}{23 \cdot 29} .
\end{aligned}$$

Passiamo ora a fare un'analoga ricerca per il covariante (B).

§ 7. Calcolo di (B) nel caso della forma speciale (I).

Nel caso della forma speciale (I) il $\Phi_{\substack{\gamma\delta\\ \gamma'\delta'}}$ diventa:

$$\Phi_{\substack{\gamma\delta\\ \gamma'\delta'}} = \begin{vmatrix} 0 & x_3 & x_2 & x_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ x_3 & 0 & x_1 & x_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ x_2 & x_1 & 0 & x_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & \gamma_4 & \delta_4 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 & \gamma'_4 & 0 & 0 \\ \delta'_1 & \delta'_2 & \delta'_3 & \delta'_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando e ordinando rispetto alle potenze e prodotti delle x, si ha:

$$\Phi_{\substack{\gamma\delta\\ \gamma'\delta'}} = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_{12}x_1x_2 + A_{23}x_2x_3 + A_{31}x_3x_1,$$

dove:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (\gamma_2\delta_4)(\gamma'_3\delta'_1) + (\gamma_3\delta_1)(\gamma'_2\delta'_4) - (\gamma_3\delta_4)(\gamma'_1\delta'_2) - (\gamma_1\delta_2)(\gamma'_3\delta'_4) - \\
&\qquad - (\gamma_1\delta_4)(\gamma'_1\delta'_4) - (\gamma_2\delta_3)(\gamma'_2\delta'_3) \,. \\
A_{22} &= (\gamma_3\delta_4)(\gamma'_1\delta'_2) + (\gamma_1\delta_2)(\gamma'_3\delta'_4) - (\gamma_1\delta_4)(\gamma'_2\delta'_3) - (\gamma_2\delta_3)(\gamma'_1\delta'_4) - \\
&\qquad - (\gamma_2\delta_4)(\gamma'_2\delta'_4) - (\gamma_3\delta_1)(\gamma'_3\delta'_1) \\
A_{33} &= (\gamma_1\delta_4)(\gamma'_2\delta'_3) + (\gamma_2\delta_3)(\gamma'_1\delta'_4) - (\gamma_2\delta_4)(\gamma'_3\delta'_1) - (\gamma_3\delta_1)(\gamma'_2\delta'_4) - \\
&\qquad - (\gamma_3\delta_4)(\gamma'_3\delta'_4) - (\gamma_1\delta_2)(\gamma'_1\delta'_2) \\
A_{23} &= (\gamma_3\delta_4)(\gamma'_3\delta'_1) + (\gamma_3\delta_1)(\gamma'_3\delta'_4) - (\gamma_2\delta_4)(\gamma'_1\delta'_2) - (\gamma_1\delta_2)(\gamma'_2\delta'_4) + \\
&\qquad + (\gamma_2\delta_4)(\gamma'_3\delta'_4) + (\gamma_3\delta_4)(\gamma'_2\delta'_4) - (\gamma_3\delta_1)(\gamma'_1\delta'_2) - (\gamma_1\delta_2)(\gamma'_3\delta'_1) \\
A_{31} &= (\gamma_1\delta_4)(\gamma'_1\delta'_2) + (\gamma_1\delta_2)(\gamma'_1\delta'_4) - (\gamma_3\delta_4)(\gamma'_2\delta'_3) - (\gamma_2\delta_3)(\gamma'_3\delta'_4) + \\
&\qquad + (\gamma_3\delta_4)(\gamma'_1\delta'_4) + (\gamma_1\delta_4)(\gamma'_3\delta'_4) - (\gamma_1\delta_2)(\gamma'_2\delta'_3) - (\gamma_2\delta_3)(\gamma'_1\delta'_2) \\
A_{12} &= (\gamma_2\delta_4)(\gamma'_2\delta'_3) + (\gamma_2\delta_3)(\gamma'_2\delta'_4) - (\gamma_1\delta_4)(\gamma'_3\delta'_1) - (\gamma_3\delta_1)(\gamma'_1\delta'_4) + \\
&\qquad + (\gamma_1\delta_4)(\gamma'_2\delta'_4) + (\gamma_2\delta_4)(\gamma'_1\delta'_4) - (\gamma_2\delta_3)(\gamma'_3\delta'_1) - (\gamma_3\delta_1)(\gamma'_2\delta'_3)
\end{aligned}$$

(si noti, per tutta chiarezza, che tutte le espressioni in parentesi rappresentano determinanti binarii, cioè per es. $(\gamma_2\delta_4) = \gamma_2\delta_4 - \gamma_4\delta_2$, ecc.).

Le espressioni $P_y\, P'_y$ risultano:

$$\begin{aligned} P_y = D_{xy}\Phi_{\gamma\delta \atop \gamma'\delta'} &= (2\,A_{11}\,y_1 + A_{12}\,y_2 + A_{13}\,y_3)\,x_1 + \\ &+ (A_{21}\,y_1 + 2\,A_{22}\,y_2 + A_{23}\,y_3)\,x_2 + \\ &+ (A_{31}\,y_1 + A_{32}\,y_2 + 2\,A_{33}\,y_3)\,x_3 \\ P'_y = D_{xy}\Phi_{\gamma\delta' \atop \gamma'\delta} &= (2\,A'_{11}\,y_1 + A'_{12}\,y_2 + A'_{13}\,y_3)\,x_1 + \\ &+ (A'_{21}\,y_1 + 2\,A'_{22}\,y_2 + A'_{23}\,y_3)\,x_2 + \\ &+ (A'_{31}\,y_1 + A'_{32}\,y_2 + 2\,A'_{33}\,y_3)\,x_3, \end{aligned}$$

dove con A'_{ij} si intendono le A_{ij} precedenti scambiandovi però δ con δ'.

Per calcolare ora (B) mediante la formola trovata nel § 3, per la stessa osservazione fatta nel § 4 a proposito del calcolo di (A), noi calcoleremo solo il coefficiente del termine in x_1^2, il quale risulterà dal termine in x_1 di P_y insieme col termine in x_1 di P'_y.

Giusta la formola citata del § 3, si hanno da calcolare nove termini, corrispondenti a tutte le combinazioni degli indici i, i'. Il primo di tali termini è:

$$\frac{\partial P_y}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial P'_y}{\partial y_1}(c_2 d_3)(c'_2 d'_3) = 4\,A_{11}\,A'_{11}(c_2 d_3)(c'_2 d'_3).$$

Eseguèndo il calcolo effettivo e tenendo conto che:

$$c_i \gamma_i \gamma_4 = d_i \delta_i \delta_4 = \frac{1}{2}$$

$$c_i \gamma_j \gamma_h = d_i \delta_j \delta_h = 1 \qquad (i,\ j,\ h = 1,\ 2,\ 3),$$

e che tutti gli altri coefficienti sono zero, si trova per risultato $+32$.

Nella seguente tabella ci sono i risultati che si ottengono per ciascuno dei nove termini.

Indici i, i'	
1, 1	$4\,A_{11}\,A'_{11}\,(c_2\,d_3)\,(c'_2\,d'_3) = +32$
1, 2	$2\,A_{11}\,A'_{12}\,(c_2\,d_3)\,(c'_3\,d'_1) = +18$
1, 3	$2\,A_{11}\,A'_{13}\,(c_2\,d_3)\,(c'_1\,d'_2) = +18$
2, 1	$2\,A_{12}\,A'_{11}\,(c_3\,d_1)\,(c'_2\,d'_3) = +18$
2, 2	$A_{12}\,A'_{12}\,(c_3\,d_1)\,(c'_3\,d'_1) = +18$
2, 3	$A_{12}\,A'_{13}\,(c_3\,d_1)\,(c'_1\,d'_2) = -\frac{15}{8}$

Indici i, i'	
3, 1	$2\, A_{13}\, A'_{11}\, (c_1\, d_2)\, (c'_2\, d'_3) = +\, 18$
3, 2	$A_{13}\, A'_{12}\, (c_1\, d_2)\, (c'_3\, d'_1) = -\, \frac{15}{8}$
3, 3	$A_{13}\, A'_{13}\, (c_1\, d_2)\, (c'_1\, d'_2) = +\, 18$

La somma di questi numeri è $+\,\frac{545}{4}$, dunque possiamo conchiudere che *quando la forma fondamentale ha la forma speciale* (I) *allora* (B) *diventa:*

$$(B) = \frac{545}{4}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

§ 8. Calcolo di (B) nel caso della forma speciale (II).

In tal caso si ha:

$$\Phi_{\substack{\gamma\delta \\ \gamma'\delta'}} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ 0 & 0 & x_2 & x_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & \gamma_4 & \delta_4 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 & \gamma'_4 & 0 & 0 \\ \delta'_1 & \delta'_2 & \delta'_3 & \delta'_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= B_{11}\, x_1^2 + B_{22}\, x_2^2 + B_{33}\, x_3^2 + B_{12}\, x_1 x_2 + B_{23}\, x_2 x_3 + B_{31}\, x_3 x_1,$$

dove:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= -\,(\gamma_2\,\delta_3)\,(\gamma'_2\,\delta'_3) - (\gamma_3\,\delta_4)\,(\gamma'_3\,\delta'_1) - (\gamma_3\,\delta_1)\,(\gamma'_3\,\delta'_4) + (\gamma_3\,\delta_4)\,(\gamma'_3\,\delta'_4) \\
B_{22} &= -\,(\gamma_3\,\delta_1)\,(\gamma'_3\,\delta'_1) - (\gamma_1\,\delta_4)\,(\gamma'_1\,\delta'_2) - (\gamma_1\,\delta_2)\,(\gamma'_1\,\delta'_4) \\
B_{33} &= -\,(\gamma_1\,\delta_2)\,(\gamma'_1\,\delta'_2) \\
B_{12} &= -\,(\gamma_2\,\delta_3)\,(\gamma'_3\,\delta'_1) - (\gamma_3\,\delta_1)\,(\gamma'_2\,\delta'_3) + (\gamma_2\,\delta_4)\,(\gamma'_1\,\delta'_2) + (\gamma_1\,\delta_2)\,(\gamma'_2\,\delta'_4) \\
&\quad + (\gamma_3\,\delta_4)\,(\gamma'_2\,\delta'_3) + (\gamma_2\,\delta_3)\,(\gamma'_3\,\delta'_4) + (\gamma_1\,\delta_4)\,(\gamma'_1\,\delta'_4) + (\gamma_2\,\delta_4)\,(\gamma'_2\,\delta'_4) \\
B_{23} &= -\,(\gamma_3\,\delta_1)\,(\gamma'_1\,\delta'_2) - (\gamma_1\,\delta_2)\,(\gamma'_3\,\delta'_1) \\
B_{31} &= -\,(\gamma_1\,\delta_2)\,(\gamma'_2\,\delta'_3) - (\gamma_2\,\delta_3)\,(\gamma'_1\,\delta'_2) - (\gamma_2\,\delta_4)\,(\gamma'_2\,\delta'_3) - (\gamma_2\,\delta_3)\,(\gamma'_2\,\delta'_4) \\
&\quad + (\gamma_1\,\delta_4)\,(\gamma'_3\,\delta'\,) + (\gamma_3\,\delta_1)\,(\gamma'_1\,\delta'_4)
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
P_y &= (2\,B_{11}\,y_1 + B_{12}\,y_2 + B_{13}\,y_3)\,x_1 + \\
&+ (B_{12}\,y_1 + 2\,B_{22}\,y_2 + B_{23}\,y_3)\,x_2 + \\
&+ (B_{13}\,y_1 + B_{23}\,y_2 + 2\,B_{33}\,y_3)\,x_3 \\
P'_y &= (2\,B'_{11}\,y_1 + B'_{12}\,y_2 + B'_{13}\,y_3)\,x_1 + \\
&+ \quad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.},
\end{aligned}$$

dove le B' sono le B quando in esse si effettua lo scambio dei due simboli δ e δ'.

Si può osservare, il che è utile per i calcoli seguenti, che le B, B' restano inalterate quando in esse si scambia γ con δ e γ' con δ'.

Collo stesso metodo tenuto nel paragrafo precedente passando a calcolare il termine in x_3^2 e il termine in x_1x_2 dell'espressione di (B), *si trova che quello in x_3^2 è zero.*

Per quello in x_1x_2 si trova la seguente tabella composta in modo analogo a quello del paragrafo precedente.

Indici i, i'	
1, 1	$(2\,B_{11}\,B'_{12} + 2\,B_{12}\,B'_{11})\,(c_2\,d_3)\,(c'_2\,d'_3) = -\frac{7}{2}$
1, 2	$(4\,B_{11}\,B'_{22} + B_{12}\,B'_{12})\,(c_2\,d_3)\,(c'_3\,d'_1) = -\frac{1}{2}$
1, 3	$(2\,B_{11}\,B'_{23} + B_{12}\,B'_{13})\,(c_2\,d_3)\,(c'_1\,d'_2) = +1$
2, 1	$(B_{12}\,B'_{12} + 2\,B_{22}\,B'_{11})\,(c_3\,d_1)\,(c'_2\,d'_3) = -\frac{1}{2}$
2, 2	$(2\,B_{12}\,B'_{22} + 2\,B_{22}\,B'_{12})\,(c_3\,d_1)\,(c'_3\,d'_1) = -2$
2, 3	$(B_{12}\,B'_{23} + 2\,B_{22}\,B'_{13})\,(c_3\,d_1)\,(c'_1\,d'_2) = -\frac{7}{2}$
3, 1	$(B_{13}\,B'_{12} + 2\,B_{23}\,B'_{11})\,(c_1\,d_2)\,(c'_2\,d'_3) = +1$
3, 2	$(2\,B_{13}\,B'_{22} + B_{23}\,B'_{12})\,(c_1\,d_2)\,(c'_3\,d'_1) = -\frac{7}{2}$
3, 3	$(B_{13}\,B'_{23} + B_{23}\,B'_{13})\,(c_1\,d_2)\,(c'_1\,d'_2) = -4$

Sommando questi nove risultati si ha $-\frac{31}{2}$; dunque possiamo conchiudere che per la formola speciale (II), il covariante (B) diventa:

$$(B) = -\frac{31}{2}\,x_1x_2.$$

§ 9. Espressione di (B) mediante (a) (b) (c).

Coi risultati ottenuti possiamo dire che:

$$(B) = \nu_a(a) + \nu_b(b) + \nu_c(c),$$

dove i ν sono coefficienti numerici determinati dalle equazioni:

$$\begin{aligned} -64\,\nu_a \qquad\qquad + \frac{23}{3}\nu_c &= \frac{545}{4} \\ \frac{25}{3}\nu_a - \frac{1}{6}\nu_b - \frac{7}{2}\nu_c &= 0 \\ -\frac{32}{3}\nu_a + \frac{1}{3}\nu_b - \frac{2}{3}\nu_c &= -\frac{31}{2}, \end{aligned}$$

donde:

$$\nu_a = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 23}{2^3 \cdot 29}$$

$$\nu_b = -\frac{2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 223}{23 \cdot 29}$$

$$\nu_c = +\frac{3 \cdot 349}{2^2 \cdot 23 \cdot 29}.$$

§ 10. Espressione definitiva del secondo termine dello sviluppo della σ abeliana pari, mediante i covarianti (A) (B), e osservazioni.

Coi risultati ottenuti e con quelli citati al § 1 troviamo subito che, ponendo il secondo termine dello sviluppo della σ abeliana pari sotto la forma

$$[\sigma]_2 = n_A(A) + n_B(B),$$

fra i coefficienti numerici n_A n_B devono sussistere le relazioni:

$$-16\,n_A + \frac{545}{4}n_B = -\frac{4}{9}$$

$$-40\,n_A - \frac{31}{2}n_B = \frac{1}{24},$$

donde:

$$n_A = \frac{349}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37}$$

$$n_B = - \frac{83}{3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37} .$$

Non vogliamo tralasciare di fare un'osservazione sui risultati ottenuti. Noi abbiamo dimostrato che oltre i combinanti (A) (B) non ne esistono altri della stessa natura e da essi linearmente indipendenti. Ora dai risultati numerici possiamo dedurre che in ogni caso, se anche esiste un altro combinante (C) linearmente indipendente da (A) (B), esso non può entrare nella formazione del termine di σ. Giacchè noi abbiamo visto che, quando si assume la forma speciale (II), allora (A) (B) $[\sigma]$ mancano del termine in x_3^2, mentre (a) (b) (c) non mancano di tal termine. Ora se esistesse un altro combinante (C) della specie di (A) (B) e linearmente indipendente da essi, allora o (C) per lo stesso caso manca del termine in x_3^2, e allora dovendosi in ogni caso (A) (B) (C) esprimere linearmente mediante (a) (b) (c), e quindi queste mediante quelle, anche (a) (b) (c) per il caso speciale dovrebbero mancare del termine in x_3^2. Ovvero (C) non manca del termine in x_3^2, e allora esso certamente non può entrare nella formazione del secondo termine dello sviluppo della σ. L'obbiezione che vi possa essere, oltre (C), ancora un quarto combinante resta esclusa dal fatto che dovendo poi tutti esprimersi linearmente mediante (a) (b) (c), esisterebbe fra essi una relazione lineare.

Pavia, gennaio del 1896.

Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali.

(Di Remigio Banal, *a Mantova.)*

È già molto lontana l'epoca in cui l'attenzione dei geometri cominciò a rivolgersi allo studio delle varietà a più di due dimensioni giacenti nello spazio piano con una dimensione di più; tuttavia le ricerche nelle quali tale studio sia fatto analiticamente, prendendo per base la considerazione delle due forme differenziali quadratiche per mezzo di cui, come nelle ordinarie superficie, le varietà stesse risultano determinate, appartengono ad un periodo assai più recente. Tale periodo si apre, per quanto è a mia cognizione, con un memorabile lavoro del prof. Gregorio Ricci: *Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche*, comparso nel tomo XII, serie II di questi Annali, per giungere fino alle recenti indagini del prof. Cesàro, inserite negli Atti della Società Reale di Napoli, 1894, e alle recentissime del Ricci medesimo, stampate nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1895.

Nè l'elenco delle pubblicazioni in cui la ricerca sia condotta dal punto di vista accennato, formerebbe una lunga lista.

Egli è che i lavori della maggior parte dei geometri, i quali, e prima della Memoria del Ricci, e dopo, si occuparono dell'argomento, furono condotti sulla guida delle analogie che offre la teoria delle ordinarie superficie nello spazio euclideo; e questa via non poteva aprire largo campo alle indagini, poichè è noto che nella teoria generale delle varietà a più dimensioni quello delle superficie a due dimensioni è, per molti aspetti, un caso di eccezione, nè d'altronde sfugge ad alcuno la natura essenzialmente analitica delle ricerche di tale specie.

Senonchè vennero in luce in questi ultimi anni nuovi metodi di analisi, i quali sono particolarmente atti a tradurre in formole, nella maniera più naturale e più semplice, tutte le considerazioni che possono instituirsi nel campo di una varietà qualsiasi e che sono, come in gran parte queste cui accenniamo, indipendenti per natura loro dalla scelta delle coordinate nella varietà stessa. Sono quelli cui l'autore, il Ricci, diede il nome di *Calcolo differenziale assoluto* e dei quali può leggersi un riassunto nel fascicolo di giugno 1892 del *Bulletin des Sciences Mathématiques* dei sigg. Darboux e Tannery. Di essi si conoscono già notevoli applicazioni nel campo delle ordinarie superficie (*), ma, per quanto mi consta, non esistono che due pubblicazioni in cui siano impiegati sistematicamente nello studio delle varietà superiori (**), mentre, nel concetto dell'autore essi « *conducono nel modo più* « *legittimo alla estensione delle ricerche relative allo spazio euclideo a tre* « *dimensioni, a varietà ad n dimensioni di natura qualsiasi* ».

Oggetto del presente lavoro è di iniziare con questi metodi una serie di indagini nel campo delle varietà a tre dimensioni immerse nello spazio piano a quattro dimensioni, e in particolare su una classe di tali varietà, messa implicitamente in rilievo nella Memoria del Ricci: *Principii di una teoria,* ecc., già citata.

Sono le varietà per cui è nulla l'espressione del prodotto delle tre curvature principali. Il loro interesse analitico proviene da ciò che nella teoria generale esse costituiscono un caso di eccezione; nel mentre le equazioni *fondamentali* di una varietà a tre dimensioni (equazioni che tengono il posto delle celebri formole di Gauss e Codazzi nelle ordinarie superficie) determinano in generale gli elementi della seconda forma fondamentale in funzione dei coefficienti dell'elemento lineare della varietà stessa, in quelle che formano oggetto di questo e degli studi che seguiranno, ciò ha luogo soltanto in alcuni casi. Geometricamente, laddove ogni varietà per cui l'accennata espressione non è zero, è indeformabile, fra le altre devono ricercarsi quelle per cui sussiste un teorema del Killing (***), che contiene le condizioni ne-

---

(*) G. Ricci, *Di alcune applicazioni del calcolo differenziale assoluto,* Atti del R. Istituto Veneto, s. 7.ª, tom. IV; *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi* di Liouville, id., s. 7.ª, tom. V; *Sulla teoria intrinseca delle superficie,* id., s. 7.ª, tom. VI.

(**) G. Ricci, *Di un punto della teoria delle forme differenziali quadratiche ternarie,* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. 4.ª, vol. 5.°; *Sulla teoria degli iperspazii,* id., s. 5.ª, vol. 4.°

(***) W. Killing, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen,* Lipsia, Teubner ed. 1885, pag. 238-39.

cessarie e sufficienti per la deformabilità di una varietà a più di due dimensioni.

Divido il lavoro in due capitoli: nel primo svolgo alcune considerazioni generali sulle varietà a tre dimensioni a curvatura totale nulla. Separando le equazioni fondamentali di una di tali varietà in due classi, una di equazioni algebriche, l'altra di equazioni differenziali, queste considerazioni conducono a determinare una forma delle prime, che è caratteristica delle varietà con una curvatura nulla, e preparano una trasformazione delle seconde che troverà posto in altro lavoro. Nel secondo capitolo considero il caso, assai notevole, in cui le due curvature non nulle della varietà siano fra loro uguali. In tal caso le equazioni fondamentali assumono forme particolari assai semplici. La loro integrazione conduce a forme dell'elemento lineare caratteristiche di queste sottoclassi di varietà; esse contengono solo una costante, arbitraria entro certi limiti, particolarizzando la quale si trovano tutte le varietà che ad essa appartengono. Lo spazio euclideo può riguardarsi appartenere alla classe soltanto come varietà limite, ottenuta col convergere della costante al valore 1.

Dò poi un teorema fondamentale per lo studio delle proprietà geometriche delle varietà considerate, dal quale risulta la possibilità della rappresentazione conforme di esse nello spazio euclideo. Queste proprietà del resto appaiono intimamente collegate con quelle di una classe di superficie a due dimensioni che occupano qui il ruolo dei circoli paralleli nelle superficie di rotazione. In particolare sono interessanti le relazioni fra le curvature principali non nulle delle varietà a tre dimensioni e quelle di tali superficie; una di queste relazioni si traduce in una formola che è una generalizzazione assai evidente della celebre formola di Gauss. — Nell'ultimo paragrafo considero infine il caso di una varietà avente costanti, oltre che eguali, le due curvature diverse da zero.

Conservo tutte le notazioni e i simboli del Calcolo differenziale assoluto, quali si possono vedere nel riassunto già citato (*).

(*) Occorrendomi di ricordare di frequente questo riassunto, come pure l'altra Memoria del Ricci: *Principii di una teoria, ecc.*, indicherò il primo con la lettera R e quest'ultima con la lettera M.

CAPITOLO I.

Considerazioni generali sulle varietà a tre dimensioni a curvatura totale nulla (*).

1. *Prime equazioni di condizione per i coefficienti dell'elemento lineare di una varietà a tre dimensioni a curvatura totale nulla.*

È noto che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una forma differenziale quadratica irriducibile e positiva

$$\varphi^2 = \Sigma_{rs} a_{rs} dx_r dx_s \qquad (a = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} > 0),$$

sia di prima classe, o, in linguaggio geometrico, affinchè rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie ad n dimensioni immersa in uno spazio piano ad $n+1$ dimensioni, coincidono con quelle necessarie e sufficienti per l'esistenza di un sistema doppio simmetrico, che si riguarda come covariante, i cui elementi b_{rs} soddisfacciano alle equazioni (M. § 3.°, p. 161)

$$a_{rs,tu} = b_{rt} b_{su} - b_{ru} b_{st}$$

$$b_{rst} = b_{rts}.$$

Chiameremo le prime *equazioni fondamentali algebriche,* le seconde *equazioni fondamentali differenziali* della forma o della superficie considerata.

Le funzioni $a_{rs,tu}$ che compaiono nelle prime non sono altro che gli $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ elementi del noto sistema quadruplo covariante, introdotto dal Christoffel [R. § 2.° form. (3)]; ed è noto [R. § 2.°, form. (4)], che un tal sistema, per il caso di tre variabili, si riduce al sistema doppio controvariante definito dalle formole:

$$\alpha'^{(rs)} = \frac{1}{a}(a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2}) \; (^{**}).$$

(*) Per una superficie a tre dimensioni attribuirò alle due denominazioni *curvatura totale* e *curvatura di GAUSS* due significati distinti, indicando con la prima il prodotto delle inverse dei tre raggi di curvatura principali della superficie che si considera, e con la seconda la somma dei prodotti due a due delle inverse stesse.

(**) In questa, come in tutte le formole relative a tre variabili, che seguiranno, si converrà di riguardare come identici gli indici congrui per rapporto a tre.

Limitandoci a questo caso, notiamo che le

$$a \cdot \alpha'^{(rs)} = b_{r+1\, s+1}\, b_{r+2\, s+2} - b_{r+1\, s+2}\, b_{r+2\, s+1}, \tag{I}$$

definiscono completamente, in generale, le b_{rs}, e soddisfatte le

$$b_{rst} = b_{rts}, \tag{II}$$

la superficie a tre dimensioni è pienamente determinata a meno di trasporti rigidi nello spazio. Quest'osservazione non sussiste più se il determinante formato con le $\alpha'^{(rs)}$, e quindi quello delle b_{rs} (che indicheremo rispettivamente con $|\alpha'|$ e $|b|$ siano nulli; tale ipotesi corrisponde geometricamente a quella in cui sia zero la curvatura totale della superficie, curvatura che ha per espressione invariantiva appunto $-\frac{|b|}{a}$ (M. § 3.°, pag. 165).

Se ci si propone allora di riconoscere se e sotto quali condizioni sia possibile di determinare le b_{rs} in modo da soddisfare assieme alle (I) e alle (II), e quale forma particolare esse assumano, conviene notare anzitutto che, come si riconosce facilmente dalle (I), insieme col determinante $|\alpha'|$ debbono annullarsi i suoi minori di 2.° ordine, e che quindi i suoi elementi sono riducibili alla forma

$$\alpha'^{(rs)} = \pm\, \tau^{(r)} \tau^{(s)}.$$

Al sistema semplice controvariante $\tau^{(r)}$ può sostituirsi un altro della stessa natura, per mezzo delle posizioni:

$$\tau^{(r)} = \mu\, \alpha^{(r)},$$

e l'indeterminata μ può fissarsi in guisa che si abbia:

$$\Sigma_r\, \alpha^{(r)} \alpha_r = 1,$$

bastando all'uopo assumere:

$$\mu^2 = \Sigma_r\, \tau^{(r)} \tau_r = \pm\, \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, \alpha'^{(rs)}.$$

L'invariante $\Sigma_{rs}\, a_{rs}\, \alpha'^{(rs)}$ ha una importanza capitale in questa teoria. Esso rappresenta, in generale, la somma dei prodotti due a due delle curvature principali della varietà, di cui le a_{rs} rappresentano i coefficienti dell'elemento lineare (M. § 3.°, pag. 165), e nell'ipotesi nostra quindi il prodotto delle due curvature non nulle della varietà stessa. Per le molteplici analogie che lo collegano con l'invariante di Gauss delle ordinarie superficie, lo chiameremo la *curvatura di GAUSS* della varietà a tre dimensioni considerata, e lo indicheremo con G. Avremo quindi:

$$\mu^2 = \pm G,$$

valendo il segno $+$ o il segno $-$ secondo che G è positivo o negativo. Noteremo ancora che G è funzione delle a_{rs} e delle loro derivate prime e seconde soltanto, e ammetteremo sempre in quel che segue, che tale funzione non sia nulla, salvo in punti speciali isolati della varietà; l'ipotesi contraria (e nel caso che forma l'oggetto del Cap. II ciò è evidente) equivarrebbe a supporre che la forma φ^2 sia di classe zero.

Siamo quindi condotti alle formole

$$\alpha'^{(rs)} = G\,\alpha^{(r)}\alpha^{(s)}, \qquad (G \lesseqgtr 0), \tag{A}$$

le quali costituiscono una prima categoria di condizioni cui devono soddisfare i coefficienti della forma φ^2, affinchè essa rappresenti l'elemento lineare di una varietà a tre dimensioni, a curvatura totale nulla.

2. *Forme particolari per le funzioni* b_{rs}. — Soddisfatte le (A), da esse, dalle (I) e dall'equazione:

$$|b| = 0,$$

si deduce che le b_{rs} debbono considerarsi come soluzioni dell' equazione algebrica

$$\Sigma_r\,\alpha^{(r)} z_r = 0.$$

Indicando con β_r e γ_r $(r = 1, 2, 3)$ due soluzioni indipendenti di essa, è facile riconoscere che le b_{rs} possono assumere la forma

$$b_{rs} = c\beta_r\beta_s + f(\beta_r\gamma_s + \beta_s\gamma_r) + g\gamma_r\gamma_s, \tag{1}$$

c, f e g essendo tre indeterminate. È evidente che le β_r e γ_r possono scegliersi in guisa che siano verificate le relazioni:

$$\Sigma_r\,\beta^{(r)}\beta_r = 1, \qquad \Sigma_r\,\gamma^{(r)}\gamma_r = 1,$$

e rimarrà ancora arbitrarietà sufficiente perchè sussista anche l'altra:

$$\Sigma_r\,\beta^{(r)}\gamma_r = \Sigma_r\,\gamma^{(r)}\beta_r = 0.$$

Se di più si sostituiscono alle β_r e γ_r così scelte, le β'_r, γ'_r definite per mezzo delle posizioni:

$$\beta'_r = \gamma_r \operatorname{sen}\theta + \beta_r\cos\theta, \qquad \gamma'_r = \gamma_r\cos\theta - \beta_r\operatorname{sen}\theta,$$

θ essendo un angolo arbitrario, si verifica subito che le relazioni precedenti sussistono ancora, ed è chiaro che si potrà disporre dell'angolo θ in modo che nelle (1) manchi il termine medio. Se ne conclude che le b_{rs} sono sempre riducibili alla forma:

$$b_{rs} = c\beta_r\beta_s + g\gamma_r\gamma_s, \tag{2}$$

gli elementi dei tre sistemi semplici covarianti α_r, β_r, γ_r essendo legati fra di loro dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_r\alpha^{(r)}\beta_r &= \Sigma_r\alpha^{(r)}\gamma_r = \Sigma_r\beta^{(r)}\gamma_r = 0 \\ \Sigma_r\alpha^{(r)}\alpha_r &= \Sigma_r\beta^{(r)}\beta_r = \Sigma_r\gamma^{(r)}\gamma_r = 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

3. *Relazioni fra i coefficienti dell'elemento lineare e gli elementi dei sistemi* α_r, β_r, γ_r. — Dalle (3) discende immediatamente che i determinanti

$$\begin{vmatrix} \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_{r+1} & \beta_{r+1} & \gamma_{r+1} \\ \alpha_{r+2} & \beta_{r+2} & \gamma_{r+2} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha^{(r)} & \beta^{(r)} & \gamma^{(r)} \\ \alpha^{(r+1)} & \beta^{(r+1)} & \gamma^{(r+1)} \\ \alpha^{(r+2)} & \beta^{(r+2)} & \gamma^{(r+2)} \end{vmatrix}$$

sono reciproci (*). Indicando adunque con D il primo e con D' il secondo, si avrà:

$$D' = \frac{1}{D},$$

e si potranno scrivere le formole:

$$D\alpha^{(r)} = \beta_{r+1}\gamma_{r+2} - \beta_{r+2}\gamma_{r+1}; \qquad \frac{1}{D}\alpha_r = \beta^{(r+1)}\gamma^{(r+2)} - \beta^{(r+2)}\gamma^{(r+1)}$$

e altre analoghe.

Ora D può mettersi anche sotto la forma

$$\begin{vmatrix} \Sigma_s a_{rs}\alpha^{(s)} & \Sigma_s a_{rs}\beta^{(s)} & \Sigma_s a_{rs}\gamma^{(s)} \\ \Sigma_s a_{r+1s}\alpha^{(s)} & \Sigma_s a_{r+1s}\beta^{(s)} & \Sigma_s a_{r+1s}\gamma^{(s)} \\ \Sigma_s a_{r+2s}\alpha^{(s)} & \Sigma_s a_{r+2s}\beta^{(s)} & \Sigma_s a_{r+2s}\gamma^{(s)} \end{vmatrix}$$

(*) La reciprocità di due determinanti è qui intesa in questo significato: *Si dirà reciproco di un determinante non nullo A un determinante A' di cui ciascun elemento sia il complemento algebrico dell'elemento corrispondente di A, diviso per A stesso.* — Ne segue che il prodotto $A\,A'$ è eguale all'unità, e che ogni minore di A', moltiplicato per A, è eguale al complemento algebrico del minore corrispondente di A: teoremi che trovano applicazione in questo paragrafo. — Questo concetto di reciprocità di due determinanti fu introdotto dal Ricci nel *Corso di lezioni di algebra complementare*, che egli professa all'Università di Padova.

e di qui si riconosce che esso equivale al prodotto di D' per il discriminante a della forma φ^2. Si ha dunque:

$$D^2 = a.$$

Dalla reciprocità dei due determinanti D e D' discendono ancora le identità:

$$\alpha_r \alpha^{(s)} + \beta_r \beta^{(s)} + \gamma_r \gamma^{(s)} = \begin{cases} 1 & \text{per } r = s \\ 0 & \text{per } r \lessgtr s \end{cases},$$

e di qui le formole:

$$a_{rs} = \alpha_r \alpha_s + \beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s, \tag{4}$$

poichè, indicandone provvisoriamente con a'_{rs} i secondi membri, se ne dedurrebbero le

$$\Sigma_r a^{(rs)} a'_{rt} = \alpha^{(s)} \alpha_t + \beta^{(s)} \beta_t + \gamma^{(s)} \gamma_t = \begin{cases} 1 & \text{per } s = t \\ 0 & \text{per } s \lessgtr t \end{cases},$$

le quali significano che le a'_{rt} sono gli elementi del determinante reciproco al reciproco di a, cioè gli elementi di a stesso.

4. *Significato geometrico delle indeterminate* c, g. — Le funzioni c, g che compaiono nelle (2) non sono del tutto indeterminate; esse devono soddisfare ad una condizione semplice che ci viene fornita dalle (I), qualora in esse alle quantità $\alpha'^{(rs)}$ e b_{rs} si sostituiscano rispettivamente i secondi membri delle (A) e delle (2). Otteniamo allora:

$$a\, G\, \alpha^{(r)} \alpha^{(s)} = c\, g\, (\beta_{r+1} \gamma_{r+2} - \beta_{r+2} \gamma_{r+1}) (\beta_{s+1} \gamma_{s+2} - \beta_{s+2} \gamma_{s+1}),$$

ovvero, per due formole del paragrafo precedente:

$$G = c\, g. \tag{B}$$

È chiaro perciò che le funzioni incognite, che compaiono nei secondi membri delle (2) e da cui dipende la determinazione delle b_{rs}, si riducono, in generale, sostanzialmente a due, per le quali si possono assumere una delle c, g e l'angolo θ di cui è parola nel § 2.°

Dal fin qui detto possiamo concludere: « *Affinchè una forma differen-* « *ziale quadratica ternaria sia di prima classe e tale, che la corrispondente* « *superficie a tre dimensioni abbia una curvatura nulla, e una sola, si richiede:*

« I. *Che siano verificate le* (A), *cioè che le funzioni* $\alpha'^{(rs)}$ *definite* « *dalle formole*

$$« \quad \alpha'^{(rs)} = \frac{a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2}}{a}$$

« *siano proporzionali ai prodotti due a due degli elementi di un sistema* « *semplice controvariante* $\alpha^{(r)}$, *il quale soddisfi alla condizione*

$$« \Sigma_r \alpha^{(r)} \alpha_r = 1.$$

« II. *Che esistano due sistemi semplici covarianti* β_r *e* γ_r, *i cui ele-* « *menti siano legati fra di loro e con quelli del sistema* $\alpha^{(r)}$ *dalle rela-* « *zioni* (3), *e due funzioni* c, g, *legate fra di loro dalla* (B), *tali che gli* « *elementi del sistema doppio covariante simmetrico*

$$« b_{rs} = c\beta_r\beta_s + g\gamma_r\gamma_s \tag{2}$$

« *soddisfacciano alle* (II). »

Queste condizioni sono anche sufficienti. Data infatti una forma differenziale quadratica ternaria, che soddisfaccia ad esse, calcolando per mezzo delle (2) i minori

$$b_{r+1\,s+1} b_{r+2\,s+2} - b_{r+1\,s+2} b_{r+2\,s+1},$$

tenendo conto di formole trovate nel paragrafo precedente, e delle (A), si ricostruiscono facilmente le (I), mentre le (II) sussistono per ipotesi. Dunque la forma data è di prima classe. — Si riconosce poi immediatamente che per la forma stessa è

$$|b| = 0.$$

Perciò la varietà corrispondente ha una curvatura nulla, e poichè si suppone che l'invariante $\Sigma_{rs} a_{rs} \alpha'^{(rs)}$ ad essa relativo sia diverso da zero, ne ha una sola.

Si moltiplichino ora ambo i membri delle (2) per $a^{(rs)}$, sommando e tenendo conto delle (3). Si otterrà:

$$\Sigma_{rs} a^{(rs)} b_{rs} = c + g.$$

Se si nota che l'invariante $\Sigma_{rs} a^{(rs)} b_{rs}$ non è altro che l'espressione, presa con segno cambiato, della somma delle curvature principali della varietà rappresentata da φ^2 (M. § 3.°, pag. 165), da questa e dalla (B) si concluderà che « *le funzioni* c, g, *prese con segno cambiato, rappresentano le due curvature* « *principali non nulle della superficie di elemento lineare* φ^2 ».

CAPITOLO II.

Considerazioni sulle varietà a tre dimensioni aventi una curvatura nulla ed eguali le altre due.

5. *Forma caratteristica degli elementi della seconda forma fondamentale, e delle equazioni fondamentali differenziali.* — Si è notato che le (2) dànno, in generale, soltanto la forma delle funzioni b_{rs}, dipendendo la loro determinazione da quella di due funzioni incognite. Tuttavia nelle ricerche relative a tale determinazione, che è l'oggetto principale di queste indagini, si incontra dapprima un caso nel quale le relazioni fra gli elementi dei sistemi α_r, β_r, γ_r, a_{rs} e la (B) sono sufficienti a fissare le b_{rs} completamente. È il caso che si presenta quando ci si proponga di riconoscere se e sotto quali condizioni una forma differenziale quadratica sia suscettibile di rappresentare l'elemento lineare di una varietà a tre dimensioni, avente in ogni punto due curvature eguali e la terza nulla. Si osservi che in tal caso abbiamo:

$$c = g$$

e perciò la (B) e, per le (4), le (2) assumono rispettivamente le forme

$$G = c^2 \qquad (B')$$

$$b_{rs} = c\,(a_{rs} - \alpha_r \alpha_s) \qquad c = \sqrt{G}. \qquad (2')$$

Le condizioni cercate possono dividersi in tre gruppi:

I. *Che siano soddisfatte le* (A);

II. *Che sia soddisfatta la* (B'), *cioè si abbia* $G > 0$;

III. *Che i valori delle* b_{rs} *dati dalle* (2') *soddisfacciano alle* (II).

Escluso nelle considerazioni che seguiranno il caso in cui c sia costante (caso che sarà considerato a parte nel § 12.°) otterremo le condizioni del III gruppo espresse per i coefficienti dell'elemento lineare, per le α_r e le loro derivate, formando col processo di derivazione covariante [R. § 2.°, form. (β)], le b_{rst} dai secondi membri delle (2') e sostituendo nelle (II). Avremo:

$$(a_{rs} - \alpha_r \alpha_s)\, c_t - c\,(\alpha_r \alpha_{st} + \alpha_s \alpha_{rt}) = (a_{rt} - \alpha_r \alpha_t)\, c_s - c\,(\alpha_r \alpha_{ts} + \alpha_t \alpha_{rs}). \qquad (5)$$

Di qui, moltiplicando per $\alpha^{(r)}$, sommando e tenendo conto delle $\Sigma_r \alpha^{(r)} \alpha_{rs} = 0$, che si deducono dalla derivazione covariante della $\Sigma_r \alpha^{(r)} \alpha_r = 1$, si hanno dapprima le

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr},$$

le quali equivalgono alle condizioni necessarie e sufficienti affinchè le α_r rappresentino le derivate di una funzione α.

Per esse le precedenti acquistano la forma:

$$(a_{rs} - \alpha_r \alpha_s) c_t + c\, \alpha_{rs} \alpha_t = (a_{rt} - \alpha_r \alpha_t) c_s + c\, \alpha_{rt} \alpha_s, \tag{6}$$

da cui moltiplicando ancora per $\alpha^{(t)}$ e sommando, discendono le

$$(a_{rs} - \alpha_r \alpha_s) \Sigma_i \alpha^{(i)} c_i + c\, \alpha_{rs} = 0. \tag{C}$$

Se i valori delle $c\alpha_{rs}$, dedotte da queste, si sostituiscono nelle (6) e si pone

$$\rho_s = c_s - \alpha_s \Sigma_i \alpha^{(i)} c_i$$

le (6) stesse diventerebbero:

$$(a_{rs} - \alpha_r \alpha_s) \rho_t = (a_{rt} - \alpha_r \alpha_t) \rho_s,$$

e per esse, se le ρ_s non fossero nulle, le a_{rs} sarebbero suscettibili della forma

$$a_{rs} = \psi \rho_r \rho_s + \alpha_r \alpha_s$$

le quali avrebbero per conseguenza $a = 0$ e sono quindi assurde. Sussisteranno adunque le $\rho_s = 0$, cioè le

$$c_r = \alpha_r \Sigma_i \alpha^{(i)} c_i. \tag{D}$$

Con procedimento inverso, dalle (C) moltiplicate per α_t valendosi delle (D), si ottiene:

$$(a_{rs} - \alpha_r \alpha_s) c_t + c\, \alpha_t \alpha_{rs} = 0$$

donde discendono, per identità, le (6). Nelle (C) sono implicite le $\alpha_{st} = \alpha_{ts}$; si tolga perciò $c\alpha_r \alpha_{st}$ dal primo membro, $c\alpha_r \alpha_{ts}$ dal secondo delle (6): con qualche trasposizione si sono ricostituite le (5). Perciò le (C) e (D) equivalgono alle (5) e comprendono quindi tutte e sole le equazioni di condizione del 3.° gruppo.

6. *Nuova forma delle equazioni fondamentali del 3.° gruppo.* — La forma più semplice delle equazioni fondamentali del 3.° gruppo si ottiene con le seguenti considerazioni. Posto:

$$(\Delta_1 c)^2 = \Sigma_r c^{(r)} c_r$$

dalle (D) si ricava:

$$\Delta_1 c = \Sigma_r \alpha^{(r)} c_r \tag{7}$$

per cui esse assumono la forma

$$\alpha_r = \frac{c_r}{\Delta_1 c}, \tag{D'$_1$}$$

dalle quali e dalle $\alpha_{rs} = \alpha_{sr}$ si deduce anzitutto che α è funzione soltanto di c.

Fra le (C) è compresa quella che se ne trae moltiplicando per $a^{(rs)}$ e sommando rapporto ai due indici r ed s. Ricordando che $\Sigma_{rs} a^{(rs)} \alpha_{rs}$ è una espressione del noto parametro differenziale di 2.° ordine della funzione α, tale equazione può scriversi:

$$2\,\Sigma_t \alpha^{(t)} c_t + c\,\Delta_2 \alpha = 0,$$

e, se si pone

$$\Delta_2 \alpha = -2\,\omega \tag{8}$$

essa assumerà la forma:

$$\Delta_1 c = c\,\omega. \tag{9}$$

Per mezzo di queste le (D'$_1$), e quindi le (D), si trasformano nelle equazioni

$$c_r = c\,\omega\,\alpha_r \tag{D'}$$

e le (C), con l'aiuto anche delle (2'), nelle

$$\omega b_{rs} + c\,\alpha_{rs} = 0. \tag{C'}$$

Le (D'), (C') contengono i seguenti teoremi:

I. « *Esiste una funzione* α *di cui gli elementi del sistema semplice* α_r, « *reciproco a quello definito dalle* (A), *sono le derivate prime. Essa è fun-* « *zione soltanto della* c *definita dalla* (B'). »

II. « *Gli elementi del sistema doppio* b_{rs}, *definito dalle* (2'), *sono* « *proporzionali alle derivate seconde covarianti della funzione* α. »

7. *Proprietà delle superficie* $\alpha =$ cost. — *Significato geometrico della funzione* ω. — Se si estendono agli spazi curvi i significati e le interpretazioni geometriche che soglionsi dare dei parametri e degli invarianti differenziali nello spazio euclideo, è evidente anzitutto che le superficie di parametro α, per la $\Sigma_r \alpha^{(r)} \alpha_r = (\Delta_1 \alpha)^2 = 1$, nella varietà φ^2 sono parallele. — Dalle (8) e (9) combinate insieme, si ricava facilmente che $\Delta_2 \alpha$ è funzione soltanto di c e quindi di α, e si conclude che nella varietà stessa le $\alpha = cost.$ formano eziandio un sistema isotermo.

Inoltre si consideri l'equazione algebrica la quale rappresenta, per la varietà φ^2, la generalizzazione di quella, che nello spazio euclideo ha per radici le curvature principali delle superficie $\alpha = cost.$

Essa è la:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_r & \alpha_{r+1} & \alpha_{r+2} \\ \alpha_r & \alpha_{rr} + \omega a_{rr} & \alpha_{rr+1} + \omega a_{rr+1} & \alpha_{rr+2} + \omega a_{rr+2} \\ \alpha_{r+1} & \alpha_{r+1r} + \omega a_{r+1r} & \alpha_{r+1\,r+1} + \omega a_{r+1\,r+1} & \alpha_{r+1\,r+2} + \omega a_{r+1\,r+2} \\ \alpha_{r+2} & \alpha_{r+2r} + \omega a_{r+2r} & \alpha_{r+2\,r+1} + \omega a_{r+2\,r+1} & \alpha_{r+2\,r+2} + \omega a_{r+2\,r+2} \end{vmatrix} = 0. \quad (\Omega)$$ (*)

Indicando con $z^{(r)}(\omega)$ i minori della prima orizzontale diversi dal minore principale, e facendone lo sviluppo, otteniamo:

$$\frac{1}{a} z^{(r)}(\omega) = \omega^2 \alpha^{(r)} + \omega \alpha^{(r)} \Sigma_{ts} a^{(ts)} \alpha_{ts} + \Sigma_s \alpha_s \varepsilon^{(rs)},$$

dove è posto:

$$\varepsilon^{(rs)} = \frac{1}{a}(\alpha_{r+1\,s+1}\alpha_{r+2\,s+2} - \alpha_{r+1\,s+2}\alpha_{r+2\,s+1}).$$

Ora risolvendo rispetto alle $\alpha^{(r)}$ le

$$\Sigma_r \alpha^{(r)} \alpha_{rs} = 0,$$

e tenendo conto anche delle $\varepsilon^{(rs)} = \varepsilon^{(sr)}$ si hanno le:

$$\eta \cdot \alpha^{(r)} \alpha^{(s)} = \varepsilon^{(rs)}.$$

Il coefficiente di proporzionalità η si ottiene moltiplicando queste per a_{rs} e sommando. Risulta:

$$\eta = \Sigma_{rs} a_{rs} \varepsilon^{(rs)} = \frac{1}{a} \Sigma_{rs} a_{rs}(\alpha_{r+1\,s+1}\alpha_{r+2\,s+2} - \alpha_{r+1\,s+2}\alpha_{r+2\,s+1}).$$

L'espressione scritta nel secondo membro è quella del parametro differenziale di 2.° ordine e di 2.° grado della funzione α (**), che si suole indicare con

(*) V. Ricci, *Sui sistemi di integrali indipendenti di un'equazione lineare, omogenea,* ecc. — (Annali di Matematica, serie II, tom. XV.) Confrontisi anche la Memoria del compianto prof. Padova « *Sulla teoria delle coordinate curvilinee* » (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. IV, 2.° sem., fasc. II, 1888.) Sono notevoli in questa Memoria due formole, che dànno la curvatura media e la curvatura totale di una superficie immersa in uno spazio curvo, espresse per i parametri differenziali di quella funzione, che eguagliata ad una costante fornisce l'equazione della superficie. — Col loro impiego si giunge ai medesimi risultati ottenuti per mezzo dell'equazione (Ω).

(**) V. Ricci, *Sui parametri e gli invarianti delle forme differenziali quadratiche.* — Annali di Matematica, serie II, tom. XIV.

$\Delta_{2,2}\alpha$. Scriveremo quindi:

$$\varepsilon^{(rs)} = \Delta_{2,2}\alpha \cdot \alpha^{(r)}\alpha^{(s)}.$$

Sostituendo queste espressioni negli sviluppi delle $z^{(r)}(\omega)$, indi moltiplicandone i due membri per α_r e sommando, otteniamo lo sviluppo del primo membro della (Ω) sotto la forma:

$$\omega^2 + \omega\Delta_2\alpha + \Delta_{2,2}\alpha = 0. \qquad (\Omega')$$

Scrivendo il parametro $\Delta_{2,2}\alpha$ nel modo seguente:

$$\Delta_{2,2}\alpha = \frac{1}{4}\Sigma_{rs}\left(a^{(r+1\,s+1)}a^{(r+2\,s+2)} - a^{(r+1\,s+2)}a^{(r+2\,s+1)}\right)\left(\alpha_{r+1\,s+1}\alpha_{r+2\,s+2} - \alpha_{r+1\,s+2}\alpha_{r+2\,s+1}\right)$$

si ha facilmente l'identità:

$$2\Delta_{2,2}\alpha = (\Delta_2\alpha)^2 - \Sigma_{rs}\alpha^{(rs)}\alpha_{rs},$$

e d'altronde, moltiplicando le (C) per $\alpha^{(rs)}$, sommando e tenendo conto di una formola del paragrafo precedente, si ottiene la equazione

$$2\Sigma_{rs}\alpha^{(rs)}\alpha_{rs} = (\Delta_2\alpha)^2,$$

dalla quale, e dalla precedente, discende l'altra:

$$4\Delta_{2,2}\alpha - (\Delta_2\alpha)^2 = 0.$$

Perciò:

« *L'equazione* (Ω') *ha le due radici reali ed eguali. — Il loro valore* « *comune* ω *è definito dalle formole* (8) e (9). »

Allo stesso risultato si giunge notando che, tenuto conto delle (C) e (D), risultano identicamente soddisfatte le equazioni (trovate dal Ricci nella Memoria « *Sui sistemi di integrali indipendenti*, ecc., già citata) le quali esprimono le condizioni necessarie e sufficienti per l'eguaglianza delle radici della (Ω), cioè le

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{r+1} & \alpha_{r+2} \\ \alpha_{r+1} & \alpha_{r+1\,r+1} & \alpha_{r+1\,r+2} \\ \alpha_{r+2} & \alpha_{r+2\,r+1} & \alpha_{r+2\,r+2} \end{vmatrix} = a\omega\left(a^{(rs)} - \alpha^{(r)}\alpha^{(s)}\right).$$

Nel corso di questo calcolo si ritrova l'equazione (9).

Per altri teoremi dalla Memoria stessa possiamo concludere ancora:

« *Nella varietà d'elemento lineare* φ^2 *il sistema di superficie a due di-* « *mensioni di parametro* α *fa parte di infiniti sistemi tripli ortogonali, in*

« *quanto, scelto ad arbitrio un sistema ψ ortogonale ad α, ne esiste sempre* « *un terzo ortogonale ad α e a ψ.*

« *Ogni superficie del sistema ha le curvature eguali fra di loro ed a*

$$« \frac{\Delta_1 c}{c} \cdot »$$

8. *L'elemento lineare φ^2 riferito ad un sistema triplo ortogonale di coordinate. — Forme particolari delle equazioni fondamentali.* — Riferiamo i punti della varietà φ^2 ad un sistema coordinato formato del sistema di superficie $\alpha = cost.$ e di due degli infiniti sistemi che sono ortogonali a questo e fra di loro. L'elemento lineare φ^2 assumerà la forma:

$$\varphi^2 = M^2 d\alpha^2 + H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2$$

la quale potrà subito ridursi all'altra

$$\varphi^2 = d\alpha^2 + H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 \tag{E}$$

essendo $M = \frac{1}{\Delta_1 \alpha} = 1$. Abbiamo adunque:

$$a_{rs} = a^{(rs)} = 0 \text{ per } r \lessgtr s;$$

$$a_{11} = \frac{1}{a^{(11)}} = H_1^2; \qquad a_{22} = \frac{1}{a^{(22)}} = H_2^2; \qquad a_{33} = \frac{1}{a^{(33)}} = 1;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0; \qquad \alpha_3 = \alpha^{(3)} = 1.$$

Se ci proponiamo di riconoscere quali forme particolari assumono, con le nuove coordinate, le condizioni che siamo andati mano mano determinando, troviamo anzitutto che quelle del primo gruppo esprimono:

« *Tutti gli elementi del sistema doppio controvariante $\alpha'^{(rs)}$ si annullano,* « *salvo quello che corrisponde agli indici* r = s = 3, *il quale ha per va-* « *lore* G.

Le espressioni analitiche di tale fatto si ottengono partendo dalle formole:

$$a \cdot \alpha'^{(rs)} = \frac{d a_{r+1\, s+1,\, r+2}}{d x_{s+2}} - \frac{d a_{r+1\, s+2,\, r+2}}{d x_{s+1}} +$$
$$\sum_h a^{(hh)} (a_{r+1\, s+2,\, h}\, a_{s+1\, r+2,\, h} - a_{r+1\, s+1,\, h}\, a_{r+2\, s+2,\, h}).$$

Osserviamo che fra le espressioni

$$a_{rs,t} = \frac{1}{2}(a^{(s)}_{rt} + a^{(r)}_{st} - {}^{(t)}_{rs})$$

sono nulle tutte quelle per cui gli indici r, s, t sono tutti differenti, e quelle per cui almeno due indici sono eguali a 3. Per le altre abbiamo:

$$a_{kk,i} = -H_k \frac{dH_k}{dx_i}; \qquad a_{ki,i} = H_i \frac{dH_i}{dx_k}; \qquad a_{kk,k} = H_k \frac{dH_k}{dx_k}$$

nelle quali gli indici k ed i sono diversi uno dall'altro, e fra essi quello che è ripetuto può assumere soltanto i valori 1 e 2, mentre l'altro può assumere anche il valore 3.

Da queste formole con facili calcoli e qualche trasformazione otteniamo per le $\alpha'^{(rs)}$ delle espressioni di cui una, la $\alpha'^{(12)}$ è nulla; la $\alpha'^{(33)}$ eguagliata a G dà:

$$G \equiv c^2 = -\omega^2 - \frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{dx_1}\right) + \frac{d}{dx_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{dx_2}\right)\right\}$$

e le altre, eguagliate a zero, forniscono:

$$\frac{d^2 H_1}{d\alpha^2} = \frac{d^2 H_2}{d\alpha^2} = 0 \qquad \text{(A')}$$

$$H_1 \frac{d^2 H_2}{d\alpha\, dx_1} - \frac{dH_1}{d\alpha}\frac{dH_2}{dx_1} = 0; \qquad H_2 \frac{d^2 H_1}{d\alpha\, dx_2} - \frac{dH_1}{dx_2}\frac{dH_2}{d\alpha} = 0.$$

La prima di queste è particolarmente notevole, poichè se si osserva che l'ultimo termine del secondo membro non è altro che la nota espressione della curvatura di Gauss delle superficie di elemento lineare

$$ds^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2$$

cioè delle $\alpha = cost.$ nello spazio euclideo, che indicheremo con σ^2, ci dà:

$$\sigma^2 = \omega^2 + c^2 \qquad \text{(A'')}$$

la quale contiene il teorema:

« *La curvatura di GAUSS delle superficie di parametro α, nello spazio*
« *euclideo, è eguale alla somma della curvatura di GAUSS delle superficie*
« *medesime nello spazio φ^2 e di quella dello spazio φ^2 stesso.* » (*)

(*) Il prof. Luigi Bianchi nella Memoria: « *Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante* » (Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 4.ª, tom. IV), dimostra questa formola per superficie a due dimensioni immerse in uno spazio a curvatura di Gauss k costante, positiva o negativa. Giova però notare che gli spazi di Riemann e di Lobatschewsky, a cui egli si riferisce e i cui elementi lineari sono rispettivamente

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4c^2}\right)^2}, \quad \left(k = +\frac{1}{c^2}\right); \quad ds^2 = \frac{c^2}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \left(k = -\frac{1}{c^2}\right)$$

hanno la curvatura totale diversa da zero.

Questo teorema sussiste in casi molto più generali di quello da noi considerato, come sarà dimostrato in altro mio lavoro.

Dalle (2') abbiamo ancora:

$$b_{11} = c H_1^2; \qquad b_{22} = c H_2^2; \qquad b_{33} = b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0.$$

Scompaiono quindi i prodotti dei differenziali delle variabili anche nell'espressione della seconda forma fondamentale della varietà φ^2; cioè due qualunque dei sistemi di superficie che compongono ogni sistema triplo ortogonale che dà all'elemento lineare la forma (E) si tagliano secondo linee di curvatura della varietà stessa.

Per avere le forme particolari che assumono le condizioni del 3.° gruppo, possiamo partirci dalle loro forme (D') e (C'). — Se si nota che dalla formola (R. § 2.°):

$$\alpha_{rs} = \frac{d^2 \alpha}{dx_r\, dx_s} - \Sigma_p\, a_{rs.p}\, \alpha^{(p)}$$

si hanno, con le nuove coordinate:

$$\alpha_{11} = H_1 \frac{dH_1}{d\alpha}; \qquad \alpha_{22} = H_2 \frac{dH_2}{d\alpha}; \qquad \alpha_{33} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$$

otteniamo facilmente al posto delle (D')

$$\frac{dc}{dx_1} = \frac{dc}{dx_2} = 0; \qquad \frac{dc}{d\alpha} = c\,\omega. \tag{D''}$$

e al posto delle (C'):

$$H_1\omega + \frac{dH_1}{d\alpha} = 0; \qquad H_2\omega + \frac{dH_2}{d\alpha} = 0. \tag{C''}$$

Le (D'') esprimono, come era stato già dimostrato, che c ed ω sono funzioni soltanto di α. Le (C'') contengono anche la (8).

Importa determinare quali fra le equazioni (A'), (C''), (D'') sono indipendenti, e ridurle alla forma più opportuna per la loro integrazione. — Perciò da una delle (C''), derivando rispetto ad α e tenendo conto della corrispondente fra le seconde delle (A'), abbiamo:

$$\omega \frac{dH_2}{d\alpha} + H_2 \frac{d\omega}{d\alpha} = 0,$$

e per la (C'') medesima:

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \omega^2, \tag{F}$$

nel mentre da questa e dalle (C″) discendono inversamente le seconde delle (A′). Le due ultime fra le formole (A′) sono pure facili conseguenze delle (C″), (D″).

Concludendo:

« *Affinchè una forma differenziale quadratica* φ^2 *rappresenti l'elemento* « *lineare di una superficie a tre dimensioni avente una curvatura nulla ed* « *eguali le altre due, si richiede che essa sia riducibile alla forma* (*E*), *e* « *che i coefficienti di questa forma soddisfacciano alle equazioni:*

$$« \; c^2 \equiv G = -\omega^2 - \frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{d}{dx_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{dx_1}\right) + \frac{d}{dx_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{dx_2}\right)\right\}$$

$$« \; H_1\omega + \frac{dH_1}{d\alpha} = 0, \qquad H_2\omega + \frac{dH_2}{d\alpha} = 0$$

$$« \; \frac{dc}{dx_1} = \frac{dc}{dx_2} = 0; \qquad \frac{dc}{d\alpha} = c\cdot\omega; \qquad \frac{d\omega}{d\alpha} = \omega^2;$$

« c *e* ω *essendo funzioni da determinarsi in base alle equazioni stesse, che* « *rappresentano la prima il valore comune delle due curvature non nulle* « *della superficie considerata, cambiato di segno, la seconda quello delle cur-* « *vature delle superficie a due dimensioni* $\alpha =$ cost. *in essa contenute.* »

Egli è chiaro che queste condizioni sono anche sufficienti, poichè esse non sono che forme particolari delle equazioni (I) e (II), e delle ipotesi che siamo venuti man mano introducendo. Di ciò daremo tuttavia più avanti una verificazione diretta.

9. *Integrazione delle equazioni fondamentali.* — Le equazioni precedenti si integrano facilmente. — La (*F*) infatti ci dà anzitutto:

$$\omega = -\frac{1}{\alpha}$$

essendosi nella variabile α incorporata una costante arbitraria additiva. — Ricordando il significato geometrico di ω abbiamo di qui:

« *Ogni superficie* $\alpha =$ cost. *nella varietà* φ^2 *ha costanti ed eguali i raggi* « *principali di curvatura; il parametro* α *rappresenta uno di essi, mutato* « *di segno.* »

Sostituendo il valore di ω ora determinato nella terza delle (D″) e integrando otteniamo:

$$\log c = -\log\alpha + \log k$$

donde

$$c = \frac{k}{\alpha}$$

dove k indica una costante arbitraria che, per la $G > 0$ deve essere reale. Di qui:

« *Il valore comune dei due raggi di curvatura eguali alla varietà* φ^2 « *è costante lungo ogni superficie* α. *Da punto a punto (non posti su una* « *stessa superficie* α) *della varietà stessa tale valore cambia proporzional-* « *mente a quello dei due raggi di curvatura della corrispondente super-* « *ficie* α. »

Di qui risulta altresì evidente l'importante significato geometrico della costante k.

Dalla (A″) abbiamo ancora:

$$\sigma^2 = \frac{k^2 + 1}{\alpha^2}$$

la quale esprime che:

« *Ogni superficie* $\alpha =$ cost. *nello spazio euclideo è a curvatura di* GAUSS « *costante e positiva, ed è perciò applicabile sopra una sfera di raggio*

$$« \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 + 1}} \cdot »$$

Ne viene che l'elemento lineare $H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2$ delle superficie $\alpha = cost.$ potrà con un opportuno cambiamento di variabili ridursi alla forma:

$$k_1^2 \alpha_1^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\chi^2)$$

e quindi:

« *L'elemento lineare di una varietà a tre dimensioni avente una curva-* « *tura nulla ed eguali le altre due, è sempre riducibile alla forma*

$$« \varphi^2 = d\alpha^2 + k_1^2 \alpha^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\chi^2) \tag{L}$$

« *dove* k_1 *è una costante reale e in valore assoluto minore di* 1, *legata alla* « *costante* k *che compare nell'espressione di* c *dalla formola:*

$$« k_1^2 = \frac{1}{k^2 + 1} \cdot$$

« *Le due curvature non nulle della varietà hanno per valore comune* $-\frac{k}{\alpha} \cdot$ »

Con ciò si sono determinati i coefficienti H_1, H_2 a meno di una costante arbitraria, essendo

$$H_1 = k_1 \alpha; \qquad H_2 = k_1 \alpha \operatorname{sen} \theta,$$

e con le (C″) risultano soddisfatte tutte le equazioni di condizione del problema.

Dimostriamo reciprocamente come ogni forma differenziale quadratica del tipo (L) può rappresentare l'elemento lineare di una varietà a tre dimensioni avente una curvatura nulla e le altre due eguali ed eguali a $-\frac{k}{\alpha}\cdot$ Basterà a tal uopo provare la esistenza di un sistema doppio covariante b_{rs}, il quale soddisfi alle (I) e (II), o a quelle che ne tengono il posto, e per cui gli invarianti $\frac{|b|}{a}$, $G=\frac{1}{a}\Sigma_{rs}a_{rs}(b_{r+1\,s+1}b_{r+2\,s+2}-b_{r+1\,s+2}b_{r+2\,s+1})$, $\Sigma_{rs}a^{(rs)}b_{rs}$ abbiano rispettivamente per valore 0, $\frac{k^2}{\alpha^2}$, $\frac{2k}{\alpha}$, posto in tutte queste formole per le a_{rs} i coefficienti dell'elemento lineare (L). Per ciò si noti dapprima che le funzioni $a_{rs,t}$ di CHRISTOFFEL, se gli indici 1, 2, 3 si fanno corrispondere rispettivamente alle variabili α, θ, χ, e i coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{33} alle quantità 1, $k_1^2\alpha^2$, $k_1^2\alpha^2\mathrm{sen}^2\theta$, assumono per tale elemento la forma:

$$a_{rs,t}=0 \quad \text{per} \quad r \lesseqgtr s \lesseqgtr t; \qquad a_{hh,h}=0; \qquad a_{11,t}=a_{t1,1}=a_{22,3}=a_{32,2}=0$$

$$a_{12,2}=-a_{22,1}=k_1^2\alpha; \qquad a_{13,3}=-a_{33,1}=k_1^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta;$$

$$a_{23,3}=-a_{33,2}=k_1^2\alpha^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta.$$

Ora determinando con l'aiuto di queste e in base all'indicata sostituzione le funzioni $\alpha'^{(rs)}$, troviamo che esse sono tutte nulle tranne la $\alpha'^{(11)}$, che equivale a $\frac{k^2}{\alpha^2}\cdot$ — Avremo adunque, qualunque possano essere le b_{rs}:

$$|\alpha'|=|b|=0; \qquad G=\Sigma_{rs}a_{rs}\alpha'^{(rs)}=\frac{k^2}{\alpha^2}$$

rimanendo contemporaneamente soddisfatte le (A), che tengono il posto delle (I), e identificati gli elementi del sistema reciproco a quello che compare nei secondi membri di esse con le derivate prime della variabile α.

Ciò posto, se assumiamo:

$$b_{rs}=\frac{k}{\alpha}(a_{rs}-\alpha_r\alpha_s), \tag{10}$$

posto mente che

$$\alpha_{rs}=-a_{rs,1}$$

si riscontrano con facili calcoli soddisfatte anche le (II), e di più si ha:

$$\Sigma_{rs}a^{(rs)}b_{rs}=\frac{2k}{\alpha}\cdot$$

Il sistema cercato esiste adunque, ed è definito dalle (10).

Troverà posto in altro lavoro la discussione del problema di determinare tutti i sistemi b_{rs} della forma (2) del § 2.°, per i quali siano soddisfatte le (II) relative alla forma differenziale quadratica (L), o, in linguaggio geometrico, lo studio della deformabilità delle superficie a tre dimensioni che hanno la (L) per espressione dell'elemento lineare. Ci limiteremo qui a notare, come risulta evidente dal precedente ragionamento, che se una di tali superficie è deformabile, tutte le sue deformate dovranno pur essere a curvatura totale nulla, e possedere la stessa curvatura di Gauss della superficie da cui provengono.

Dalle considerazioni fin qui sotto svolte deduciamo infine:

« *Esiste una semplice infinità di superficie a tre dimensioni con due* « *curvature eguali e non nulle e la terza nulla. Esse si ottengono tutte dal*-« *l'elemento lineare* (L) *assegnando alla costante* k_1 *particolari valori reali e* « *numericamente minori di* 1. »

Se si assegnasse alla k_1 il valore ± 1 si avrebbe:

$$k = 0$$

quindi, da una formola di questo paragrafo:

$$c = 0,$$

e la varietà corrispondente sarebbe lo spazio euclideo. Soltanto in questo caso l'elemento lineare (L) può appartenere allo spazio euclideo; e infatti se si calcolano le note formole di Lamè, che dànno le condizioni necessarie e sufficienti per l'euclideità di uno spazio rappresentato dall'elemento lineare

$$ds^2 = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + H_3^2\, dx_3^2,$$

esse non sono tutte verificate, poichè una fornisce la condizione $k_1^2 = 1$.

Se si pone $k_1^2 = \frac{1}{2}$, risulta $k^2 = 1$, e si ha uno spazio cui appartiene la proprietà che le superficie $\alpha = cost.$ in esso immerse hanno la curvatura di Gauss eguale a quella dello spazio stesso, mentre tale curvatura si raddoppia se esse vengono trasportate nello spazio euclideo.

10. *Considerazioni geometriche sulle varietà φ^2. Nuove forme del loro elemento lineare.* — Le proprietà geometriche delle superficie della classe (L) sono contenute nel seguente teorema:

« *D'ogni superficie di elemento lineare* (L) *è possibile fare nello spazio* « *euclideo una rappresentazione che conservi la similitudine delle parti infi*-« *nitesime.* »

A dimostrarlo si sostituisca alla variabile α una nuova variabile ρ, funzione solo di α, per mezzo dell'equazione differenziale

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\alpha}=\frac{1}{k_1\alpha}. \tag{11}$$

Avendosi

$$d\alpha^2=k_1^2\alpha^2\frac{d\rho^2}{\rho^2}; \qquad k_1^2\alpha^2=\frac{\rho^2}{\rho'^2}$$

dove è posto

$$\rho'=\frac{d\rho}{d\alpha},$$

l'elemento lineare (L) assumerà la forma

$$\varphi^2=\frac{1}{\rho'^2}\left\{d\rho^2+\rho^2(d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2)\right\}.$$

L'espressione fra parentesi non è che quella del quadrato dell'elemento lineare dello spazio euclideo in coordinate polari; perciò questo, e l'elemento lineare delle varietà della classe φ^2 sono proporzionali, il che dimostra il teorema.

Le formole di passaggio fra la variabile α e la nuova variabile ρ si possono avere in termini finiti con la integrazione della (11).

Si otterrà:

$$d\log\rho=\frac{1}{k_1}d\log\alpha; \qquad \log\rho=\frac{1}{k_1}(\log\alpha+\log k_2)=\frac{1}{k_1}\log k_2\alpha.$$

La costante arbitraria k_2 può sempre porsi eguale ad 1; risulterà quindi:

$$\rho=\alpha^{\frac{1}{k_1}}, \qquad \alpha=\rho^{k_1}$$

che sono le formole cercate.

Una forma notevole dell'elemento lineare (L) si ottiene con le seguenti considerazioni. Alle variabili α, θ, χ si sostituiscano delle altre con le formole:

$$\alpha=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k_1}{2}}; \qquad \theta=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}}; \qquad \chi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Differenziando si hanno le:

$$d\alpha=k_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k_1-2}{2}}(x\,dx+y\,dy+z\,dz);$$

$$d\theta=\frac{z(x\,dx+y\,dy)-(x^2+y^2)\,dz}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}; \qquad d\chi=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

e si trova facilmente d'altronde:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Sostituendo in (L) dopo qualche riduzione si ottiene:

$$\varphi^2 = k_1^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{k_1 - 1} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

che è la forma accennata (*).

11. *Raggi di curvatura delle superficie coordinate.* — Consideriamo dapprima l'elemento lineare sotto la forma (L). S'è già accennato nei paragrafi precedenti alla natura delle superficie $\alpha = cost.$ tanto nelle varietà φ^2 come nello spazio euclideo. La natura delle superficie $\chi = cost.$ e $\theta = cost.$ e quindi di elementi lineari

$$d\alpha^2 + k_1^2 \alpha^2 d\theta^2, \qquad d\alpha^2 + k_1^2 \alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2,$$

nello spazio euclideo è evidente. La natura loro nelle varietà φ^2 si può dedurre dall'equazione

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \omega \dfrac{\Omega_{11}}{\sqrt{\Delta_1 U}} & b_{12} - \omega \dfrac{\Omega_{12}}{\sqrt{\Delta_1 U}} \\ b_{12} - \omega \dfrac{\Omega_{12}}{\sqrt{\Delta_1 U}} & b_{22} - \omega \dfrac{\Omega_{22}}{\sqrt{\Delta_1 U}} \end{vmatrix} = 0,$$

trovata dal Voss (**) le cui radici sono i raggi di curvatura di una superficie $U = cost.$ esistente in uno spazio curvo. In quest'equazione le b_{11}, b_{12}, b_{22} rappresentano i coefficienti dell'elemento lineare della superficie U e le Ω_{rs}, indicando con x_h, $(h = 1, 2, 3)$ le coordinate dello spazio curvo, con y_r, $(r = 1, 2)$ quelle della superficie, hanno le seguenti espressioni:

$$\Omega_{rs} = \Sigma_{hk}\, U_{hk} \frac{dx_h}{dy_r} \frac{dx_k}{dy_s}.$$

(*) Si noti che l'elemento lineare ora trovato si riduce a quello dello spazio euclideo non solo per $k_1 = 1$, come è evidente, ma anche per $k_1 = -1$, poichè è facile riconoscere che la forma differenziale quadratica

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

è di classe zero.

(**) *Zur Theorie der Transformationen quadratischer Differentialausdrüche, ecc.*, Math. Annalen, Bd. XVI.

Nelle varietà da noi considerate si trova facilmente, con l'aiuto di alcune formole del § 9.°, che, nel caso delle superficie $\chi = cost.$ queste funzioni diventano:

$$b_{11} = 1; \qquad b_{22} = k_1^2 \alpha^2; \qquad b_{12} = 0; \qquad \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \chi}} = k_1 \alpha \operatorname{sen} \theta;$$

$$\Omega_{11} = \chi_{11} = - a_{11,3} a^{(33)} = 0; \qquad \Omega_{12} = \chi_{12} = - a_{12,3} a^{(33)} = 0;$$

$$\Omega_{22} = \chi_{22} = - a_{22,3} a^{(33)} = 0,$$

mentre in quello delle superficie $\theta = cost.$ prendono i valori:

$$b_{11} = 1, \qquad b_{12} = 0, \qquad b_{22} = k_1^2 \alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta; \qquad \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \theta}} = k_1 \alpha,$$

$$\Omega_{11} = \theta_{11} = - a_{11,2} a^{(22)} = 0; \qquad \Omega_{12} = \theta_{13} = - a_{13,2} a^{(22)} = 0;$$

$$\Omega_{22} = \theta_{33} = - a_{33,2} a^{(22)} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

Quindi nei due casi l'equazione di Voss assume rispettivamente le forme:

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)^2 k_1^2 \alpha^2 = 0; \qquad \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega} k_1^2 \alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta - k_1 \alpha \operatorname{sen} \theta \cos \theta\right) = 0.$$

Perciò: « *Nelle varietà* φ^2 *le superficie* $\chi =$ cost. *hanno le due curvature* « *nulle; le superficie* $\theta =$ cost. *hanno una curvatura nulla, e l'altra eguale a*

$$\frac{1}{k_1 \alpha} \operatorname{cotg} \theta. \text{ »}$$

Consideriamo ora l'elemento lineare degli spazi φ^2 sotto la forma:

$$\varphi^2 = k_1^2 (\Sigma_t x_t^2)^{k_1 - 1} \Sigma_t d x_t^2.$$

Calcoliamo le forme particolari che assumono le funzioni $a_{rs,t}$. Avendosi:

$$a_{rs} = 0 \text{ per } r \gtrless s; \qquad a_{rr} = k_1^2 (\Sigma_t x_t^2)^{k_1 - 1}; \qquad x_{i\,q} \equiv \frac{d x_i}{d x_q} = \begin{cases} 0 \text{ per } i \gtrless q \\ 1 \text{ per } i = q \end{cases},$$

si ottiene per $r \gtrless s \gtrless t$:

$$a_{rs,t} = 0; \qquad a_{rs,r} = - a_{rr,s} = k_1^2 (k_1 - 1) (\Sigma_t x_t^2)^{k_1 - 2} x_s.$$

Ora:

$$x_{i|rs} = \frac{d^2 x_i}{d x_r \, d x_s} - \Sigma_{pq} a_{rs,p} a^{(pq)} \frac{d x_i}{d x_q} = - a_{rs,i} \frac{1}{a_{ii}},$$

e perciò:

$$x_{i\,i+1\,i+1} = x_{i|i+2\,i+2} = \frac{k_1 - 1}{\Sigma_t x_t^2} x_i; \qquad x_{i|i+1\,i+2} = 0.$$

Ciò premesso si considerino negli spazi φ^2 le superficie $x_i = cost.$; si riconosce immediatamente che le corrispondenti funzioni che compaiono nell'equazione di Voss, hanno i valori:

$$b_{11} = b_{22} = k_1^2 (\Sigma_t x_t^2)^{k_1 - 1}; \quad b_{12} = 0; \qquad \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 x_i}} = k_1 (\Sigma_t x_t^2)^{\frac{k_1 - 1}{2}}$$

$$\Omega_{11} \equiv x_{i|i+1\, i+1} = \Omega_{22} \equiv x_{i|i+2\, i+2} = \frac{k_1 - 1}{\Sigma_t x_t^2} x_i; \qquad \Omega_{12} = 0,$$

e che l'equazione medesima prende la forma:

$$\left[\frac{1}{\omega} k_1^2 (\Sigma_t x_t^2)^{k_1 - 1} - x_i k_1 (k_1 - 1)(\Sigma_t x_t^2)^{\frac{k_1 - 3}{2}}\right]^2 = 0.$$

Ne concludiamo che « *le superficie di parametri* x_i *nelle varietà* φ^2 *hanno* « *le curvature eguali fra di loro ed eguali a*

$$\frac{k_1 - 1}{k_1} \frac{x_i}{(\Sigma_t x_t^2)^{\frac{k_1 + 1}{2}}} \text{ ».}$$

Calcolando invece, per mezzo di una nota formola le curvature di Gauss σ_i^2 delle superficie $x_i = cost.$ nello spazio euclideo, si trova:

$$\sigma_i^2 = \frac{2(1 - k_1)}{k_1^2} \frac{x_i^2}{(\Sigma_t x_t^2)^{k_1 + 1}}.$$

Fra questa e la curvatura di Gauss delle superficie stesse nelle varietà φ^2, v'è adunque la relazione:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1 - k_1}{2} \sigma_i^2.$$

12. *Di un caso particolare.* — Consideriamo da ultimo il caso, fin qui escluso, in cui i coefficienti della forma φ^2 siano assoggettati alla nuova condizione:

$$G = cost.,$$

pur restando ferme tutte quelle che formano oggetto dei paragrafi precedenti; o, geometricamente, ricerchiamo le condizioni affinchè essa possa rappresentare l'elemento lineare di una varietà avente una curvatura nulla, ed eguali e costanti le altre due.

Le considerazioni che conducono alle condizioni del 1.° e 2.° gruppo valgono anche in questa ipotesi, e tali condizioni quindi sussistono sempre. —

Le condizioni del 3.° gruppo si riducono, come si riconosce facilmente, alle

$$\alpha_{rs} = 0.$$

Di qui, per mezzo dell'equazione (Ω) si trova:

« *Le superficie* $\alpha =$ cost. *nella varietà considerata, oltre alle proprietà* « *riferite nel § 7.°, godono di quella di aver nulle le curvature principali.* »

Esse, in questa varietà, tengono adunque il posto di un sistema di piani paralleli nello spazio euclideo.

Data, come nel § 8.° all'elemento lineare la forma (E) trovasi che le equazioni del 3.° gruppo, con le nuove coordinate, si riducono alle seguenti

$$\frac{d H_1}{d \alpha} = \frac{d H_2}{d \alpha} = 0,$$

e per mezzo di queste quelle del 1.° gruppo alla

$$\sigma^2 = c^2.$$

Quindi « *La curvatura di* Gauss *delle* $\alpha =$ cost. *nello spazio euclideo è co-* « *stante ed eguale a quella dello spazio* φ^2. »

Per ciò l'elemento lineare di tali superficie sarà suscettibile della forma

$$\frac{1}{c^2}(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\chi^2),$$

e quindi quello della varietà considerata sarà riducibile all'altra:

$$d s^2 = d\alpha^2 + \frac{1}{c^2}(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\chi^2), \tag{L'}$$

e la varietà stessa potrebbe forse ritenersi un cilindro retto a tre dimensioni avente per sezione una sfera di raggio $\frac{1}{c}$, se le formole di Lamè, calcolate per l'elemento lineare (L') non esprimessero che tale elemento lineare non può appartenere allo spazio euclideo.

Se sostituiamo alla variabile α la variabile ρ con la posizione

$$\log \rho = c\alpha,$$

abbiamo:

$$d\alpha = \frac{1}{c\rho} d\rho,$$

e l'elemento lineare precedente si può porre sotto la forma:

$$ds^2 = \frac{1}{c^2 \rho^2} [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\chi^2)],$$

di cui è evidente l'interpretazione geometrica.

Se ci riferiamo a delle variabili x, y, z legate alle α, θ, χ dalle formole:

$$\alpha = \frac{1}{2c} \log (x^2 + y^2 + z^2); \qquad \theta = \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z^2}}; \qquad \chi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x},$$

l'elemento considerato si trasforma nell'altro:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 (x^2 + y^2 + z^2)}. \tag{L''}$$

Sarebbe facile inversamente riconoscere come ogni elemento lineare (L') o (L''), qualunque sia c, purchè diverso da zero, appartenga ad uno spazio a tre dimensioni a curvatura totale nulla e a curvatura di Gauss costante e positiva c^2; ma è d'uopo osservare che tale spazio differisce tuttavia sostanzialmente dallo spazio di Riemann d'elemento lineare

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4c^2}\right)^2},$$

$\left(\text{a curvatura di Gauss costante e positiva } \frac{1}{c^2}\right)$, in quanto quest'ultimo è a curvatura totale costante ma diversa da zero. Neppure è possibile, per una osservazione del § 9.°, che uno dei due spazi possa ottenersi dall'altro per mezzo di deformazioni, senza uscire dallo spazio piano a quattro dimensioni in cui si considerano immersi entrambi.

Notiamo ancora che, coi procedimenti impiegati nel paragrafo precedente trovasi che le curvature principali delle superficie $\chi = cost.$, in una varietà d'elemento lineare (L') sono entrambe nulle, mentre quelle delle $\theta = cost.$ sono l'una nulla, l'altra costante ed eguale a $c \cdot cotg\, \theta$; e quelle delle $x_i = cost.$ [indicando con x_i le x, y, z dell'elemento lineare (L'')] sono eguali ed hanno per valore comune

$$\frac{1}{\omega} = -\frac{c x_i}{\sqrt{\Sigma_t x_t^2}}.$$

Calcolando infine la curvatura di GAUSS σ^2 delle $x_i = cost.$ medesime nello spazio euclideo, trovasi

$$\sigma^2 = \frac{2\,c^2 x_i^2}{\Sigma_t x_t^2}.$$

Essa è quindi doppia della curvatura di GAUSS di tali superficie considerate come immerse nello spazio d'elemento lineare (L″) (*).

(*) Devo qui tributare un omaggio reverente d'affetto e di gratitudine alla memoria del mio compianto maestro, il prof. ERNESTO PADOVA, che nelle ultime settimane della sua vita, fra i dolori della malattia che lo trasse anzitempo alla tomba, chiese e volle rivedere e annotare questo lavoro. — Al prof. GREGORIO RICCI, che mi fu prodigo di incoraggiamenti e di consigli esprimo pure tutta la mia riconoscenza.

Sulle varie forme che possono darsi alle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare.

(*Di* Ernesto Pascal, *a Pavia.*)

Le relazioni fra i determinanti di una matrice sono state presentate da vari Autori sotto varie forme diverse. Così il Vahlen ne ha fatto l'argomento di un recente lavoro (*Ueber die Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix.* Crelle, v. 112, pag. 306 [1893]); il Netto ha presentato ultimamente una formola notevole (*Zwei Determinantensätze*, Acta Math., v. 17, pag. 199 [1893]), e l'Hunyady ha costruito per scopo geometrico una lunga serie di identità relative a questo soggetto (*Ueber einige Determinanten-Gleichungen.* Crelle, v. 94, pag. 171 [1882]).

Ora tali relazioni possono riassumersi tutte in una formola unica di tipo semplice, e che non è altro che una delle notissime identità che occorrono nella teoria del calcolo simbolico delle forme algebriche di specie m; è formata con una somma algebrica di prodotti di due determinanti di ordine m. Qualunque altra relazione fra determinanti dello stesso ordine, o fra determinanti anche di ordine diverso (particolarizzando alcune delle colonne della matrice, col porre eguali a zero tutti gli elementi, meno uno, che si pone invece eguale ad 1, si hanno relazioni fra determinanti di ordine diverso), non può che essere una conseguenza di identità del tipo indicato. Ciò non è che un caso particolare di un teorema più generale che può dimostrarsi per le combinazioni di tipo invariantivo. (V. per es. la mia Memoria: *Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche di tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche.* Memorie dei Lincei, serie 4.ª, v. V, pag. 374 [1888].)

Sebbene però tutte le altre identità non siano che trasformazioni di quelle indicate, ciò non toglie che queste possono raggrupparsi in maniera da dar luogo a delle formole e dei teoremi notevoli da per sè stessi.

Così tutte le note e molteplici formole sui determinanti ad elementi determinanti, sebbene si possano far subito rientrare nella categoria di formole cui si accenna, pure possono poi ancora meglio considerarsi e studiarsi separatamente da quelle. Volendo generalizzare le indicate formole sui determinanti ad elementi determinanti, in modo da farle subito rientrare in quella categoria di formole, occorre studiare dei determinanti formati colle colonne di due determinanti dati, il che cominciò a fare il sig. Picquet alla fine di un lavoro che ha notevoli pregi di fattura. (*Analyse combinatoire des déterminants.* Journal de l'Ecole Polyt. V. XXVIII p. 201 [1878].)

Lo scopo di questo lavoro è di presentare alcune altre formole e teoremi nuovi che son venuto trovando, rifacendo per conto mio, questi studi, e che possono stare allato a quelli trovati dagli autori sunnominati e da altri.

§ 1. Cenno sui risultati di Vahlen. Identità fondamentale.

Il Vahlen nella citata Nota trova che le relazioni esistenti fra i determinanti di una matrice di n colonne e m linee sono in numero di:

$$\binom{n}{m} - 1 - m(n-m),$$

fra loro indipendenti. Tali relazioni sono espresse nella seguente maniera. Indichiamo in generale con $(i_1, i_2, \dots i_m)$ il determinante formato colle colonne $i_1, i_2, \dots i_m$. Allora si ha:

$$(i_1, \dots i_m)(1, 2, \dots m)^{m-1} = \begin{vmatrix} (i_1, 2, \dots m) \dots (1, 2, \dots m-1, i_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (i_m, 2, \dots m) \dots (1, 2, \dots m-1, i_m) \end{vmatrix}.$$

È facile vedere che se *due* soli degli indici i, sono *diversi* dagli indici $1, 2, \dots m$ allora al secondo membro si ha per fattore $(1, 2, \dots m)^{m-2}$, e quindi, sopprimendo questo fattore si ha una relazione di 2.° grado; di tali se ne hanno $\binom{n-m}{2}\binom{n}{2}$. Similmente se *tre* soli degli indici i sono *diversi* da $1, 2, \dots m$, allora si hanno $\binom{n-m}{3}\binom{n}{3}$ relazioni di 3.° grado, e così di seguito.

Formiamo un determinante nella seguente maniera.

Costruiamo la matrice che ha $m+1$ colonne della matrice data e propriamente quelle di ordini:

$$i_1\, i_2 \ldots i_m\, i_{m+1}.$$

Poniamo poi come ultima linea di questa matrice parziale una linea formata cogli elementi:

$$\begin{array}{l} (i_1 \quad j_1 j_2 \ldots j_{m-1}) \\ (i_2 \quad j_1 j_2 \ldots j_{m-1}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (i_{m+1} j_1 j_2 \ldots j_{m-1}), \end{array}$$

dove $j_1 j_2 \ldots j_{m-1}$ rappresentano gli indici di altre colonne della matrice data (in particolare alcune delle j potrebbero essere eguali alle i). Si viene così a formare un determinante di ordine $m+1$ il quale è identicamente zero, perchè gli elementi dell'ultima linea sono le medesime combinazioni lineari degli elementi delle linee parallele. Sviluppando questo determinante secondo gli elementi dell'ultima linea si ha:

$$\sum \pm (i_1\, i_2 \ldots i_m)(i_{m+1} j_1 j_2 \ldots j_{m-1}) = 0, \tag{A}$$

dove il sommatorio si estende a tutte le permutazioni circolari degli indici i, e i segni dei termini sono alternati se m è dispari, e sono tutti positivi se m è pari. È questa la relazione fondamentale dalla quale tutte le altre possono ricavarsi.

Cominciamo col mostrare come le relazioni di Vahlen avanti citate si possono ricavare dalle relazioni (A) le quali hanno il vantaggio di essere *tutte di 2.° grado nei determinanti:*

Per intenderci più facilmente chiameremo nella relazione (A) elementi *circolanti* gli indici $i_1 i_2 \ldots i_{m-1}$, e elementi *fissi* gli indici $j_1 j_2 \ldots j_{m-1}$. Se tutti gli elementi fissi sono diversi dai circolanti, allora la (A) conterrà $m+1$ termini; se r elementi fissi sono eguali ad altrettanti circolanti, allora r termini si annullano, e restano solo $m-r+1$ termini. Nella (A) poniamo in particolare:

$$\begin{array}{lll} i_1 = 1, & i_2 = 2, \ldots & i_m = m \\ j_2 = i_1 = 1, & j_3 = i_2 = 2, \ldots & j_{m-1} = i_{m-2} = m-2 \\ i_{m+1} = i, & j_1 = j. & \end{array}$$

Allora si ha una relazione a tre termini solo, cioè:

$$(1,\ 2,\dots\ m-2,\ m-1,\ m)(i,\ j,\ 1,\dots\ m-2)+$$
$$+(1,\ 2,\dots\ m-2,\ m,\ i)(m-1,\ j,\ 1,\dots\ m-2)+$$
$$+(1,\ 2,\dots\ m-2,\ i,\ m-1)(m,\ j,\ 1,\dots\ m-2)=0.$$

Questa non è altro che una delle relazioni di 2.° grado della formola generale di Vahlen; quella che si ottiene ponendo in essa $i_1=1,\dots\ i_{m-2}=m-2$, $i_{m-1}=i$, $i_m=j$.

Passiamo alle relazioni di 3.° grado di Vahlen. Una di esse è per es.:

$$(1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-2}\,i_{m-1}\,i_m)(1,\ 2,\dots\ m)^2=$$
$$=\begin{vmatrix} (1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-2},\ m-1,\ m), & (1,\ 2,\dots\ m-2,\ i_{m-2},\ m), & (1,\ 2,\dots\ m-1,\ i_{m-2}), \\ (1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-1},\ m-1,\ m), & (1,\ 2,\dots\ m-2,\ i_{m-1},\ m), & (1,\ 2,\dots\ m-1,\ i_{m-1}), \\ (1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_m,\ m-1,\ m), & (1,\ 2,\dots\ m-2,\ i_m,\ m), & (1,\ 2,\dots\ m-1,\ i_m). \end{vmatrix}.$$

Sviluppiamo questo determinante secondo gli elementi dell'ultima colonna, e teniamo conto delle relazioni simili all'ultima scritta. I minori di 2.° ordine compresi nelle due prime colonne di questo determinante sono rispettivamente eguali a:

$$+(1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-2},\ i_{m-1},\ m)(1,\ 2,\dots\ m),$$
$$-(1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-2},\ i_m,\ m)(1,\ 2,\dots\ m),$$
$$+(1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-1},\ i_m,\ m)(1,\ 2,\dots\ m),$$

e quindi, sopprimendo il fattore comune $(1,\ 2,\dots\ m)$, resta la relazione:

$$(1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-2},\ i_{m-1},i_m)(1,\ 2,\dots\ m-2,\ m-1,\ m\ )-$$
$$-(1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-2},\ i_{m-1},m)(1,\ 2,\dots\ m-2,\ m-1,\ i_m\ )+$$
$$+(1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-2},\ i_m,\ m)(1,\ 2,\dots\ m-2,\ m-1,\ i_{m-1})-$$
$$-(1,\ 2,\dots\ m-3,\ i_{m-1},\ i_m,\ m)(1,\ 2,\dots\ m-2,\ m-1,\ i_{m-2})=0,$$

che si ricava da (A) ponendo:

$$j_1=1,\dots\qquad j_{m-1}=m-1,$$

e

$$i_1=1,\dots\qquad i_{m-3}=m-3,\qquad i_{m+1}=m.$$

Così si potrebbe dimostrare che lo stesso accade per le relazioni di quarto grado, e di grado superiore, e, *in generale tutte le possibili relazioni fra i determinanti di una matrice non sono che trasformazioni opportune della formola* A.

§ 2. Su di una formola di Netto e su di un'altra ad essa affine (*).

Consideriamo $m+2$ colonne della matrice data. Indichiamo con $\Delta_{\alpha\beta}$ il determinante che si ottiene sopprimendo le colonne α, β; allora si ha la relazione identica:

$$\begin{vmatrix} \Delta_{m_1 n_1} & \Delta_{m_1 n_2} & \Delta_{m_1 n_3} \\ \Delta_{m_2 n_1} & \Delta_{m_2 n_2} & \Delta_{m_2 n_3} \\ \Delta_{m_3 n_1} & \Delta_{m_3 n_2} & \Delta_{m_3 n_3} \end{vmatrix} = 0,$$

dove m_1, n_1, ecc., sono indici scelti fra quelli che compongono la matrice parziale di $m+2$ colonne. Questa è una formola che il sig. Netto ha fatto conoscere in un recente lavoro negli *Acta Mathematica* (v. XVII, pag. 199).

Ora questa formola discende subito dalla relazione fondamentale (A), e ne discende poi anche un'altra formola che ha perfetta analogia con questa, ma che nella sostanza è affatto diversa.

Per fissare le idee supponiamo che le $m-4$ colonne che si ottengono quando dalle $m+2$ scelte si tolgono quelle di indici $m_1\, m_2\, m_3\, n_1\, n_2\, n_3$ sieno $i_1\, i_2 \ldots i_{m-4}$.

Come caso particolare della (A) si costruisca la relazione a tre termini:

$$\begin{aligned} &(i_1 \ldots i_{m-4}\, m_2\, m_3\, n_2\, n_3)(i_1 \ldots i_{m-4}\, m_1\, m_2\, m_3\, n_1) + \\ &+ (i_1 \ldots i_{m-4}\, m_2\, m_3\, n_3\, n_1)(i_1 \ldots i_{m-4}\, m_1\, m_2\, m_3\, n_2) + \\ &+ (i_1 \ldots i_{m-4}\, m_2\, m_3\, n_1\, n_2)(i_1 \ldots i_{m-4}\, m_1\, m_2\, m_3\, n_3) = 0, \end{aligned}$$

cioè colla notazione ora introdotta:

$$\Delta_{m_1 n_1} \Delta_{n_2 n_3} + \Delta_{m_1 n_2} \Delta_{n_3 n_1} + \Delta_{m_1 n_3} \Delta_{n_1 n_2} = 0,$$

e mutando m_1, in m_2 e in m_3, e osservando che i secondi fattori di ciascun termine restano inalterati, si riconosce subito che il determinante dei primi fattori deve essere zero.

(*) Da non confondersi con quella che forma l'argomento di una mia Nota ultimamente stampata ai Lincei (1896), la quale porta lo stesso titolo di questo paragrafo.

Invece in questa stessa formola si cambi m_1 in m'_1 e poi ancora in m''_1, dove m'_1 m''_1 sono indici nuovi scelti fra quelli che appartengono alle altre colonne non ancora considerate. Si consideri una matrice con $m+4$ colonne:

$$i_1 \dots i_{m-4}\, m_1\, m_2\, m_3\, n_1\, n_2\, n_3\, m'_1\, m''_1 .$$

Poniamo $m_2 = i_{m-3}$ $m_3 = i_{m-2}$; i determinanti che entrano allora nelle tre formole hanno tutti per parte comune le $m-2$ colonne $i_1 \dots i_{m-2}$. Indichiamo con $\Delta'_{\alpha\beta}$ un determinante formato *aggiungendo* a queste $m-2$ colonne fisse, le due colonne α, β. La prima delle relazioni di sopra prende la forma:

$$\Delta'_{n_2 n_3} \cdot \Delta'_{m_1 n_1} + \Delta'_{n_3 n_1} \cdot \Delta'_{m_1 n_2} + \Delta'_{n_1 n_2} \cdot \Delta'_{m_1 n_3} = 0,$$

e le altre due si ottengono mutando m_1 in m'_1, m''_1.

Si ha quindi:

$$\begin{vmatrix} \Delta'_{m_1 n_1} & \Delta'_{m_1 n_2} & \Delta'_{m_1 n_3} \\ \Delta'_{m'_1 n_1} & \Delta'_{m'_1 n_2} & \Delta'_{m'_1 n_3} \\ \Delta'_{m''_1 n_1} & \Delta_{m''_1 n_2} & \Delta'_{m''_1 n_3} \end{vmatrix} = 0,$$

che *formalmente* costituisce una relazione analoga a quella di Netto, ma che nella sostanza ne è diversa, perchè *mentre nella relazione di* Netto *gli elementi sono determinanti ottenuti sopprimendo due colonne in una matrice di* $m+2$ *colonne, in questa relazione gli elementi sono determinanti ottenuti aggiungendo due colonne ad una matrice di* $m-2$ *colonne.*

§ 3. Relazioni fra i determinanti formati colle colonne di due determinanti dati. Continuazione delle ricerche di Picquet. Estensione di un teorema di Sylvester.

Sieno dati due determinanti di ordine m:

$$A = (a_1\, a_2 \dots a_m)$$

$$B = (b_1\, b_2 \dots b_m).$$

Si può formare una matrice di $2m$ colonne e m linee ponendo le due matrici dei due determinanti l'una accanto all'altra.

Scegliamo in tutti i modi possibili k colonne di A e al loro posto sostituiamo k colonne di B scelte in tutti i modi possibili; abbiamo in tutto $\binom{m}{k}^2$ determinanti formati con $m - k$ colonne di A e k di B; questi possono disporsi in una matrice quadrata e formare a loro volta un determinante che chiameremo D_{m-k}; analogamente poi può formarsi il determinante D_k i cui elementi sono determinanti contenenti k colonne di A e $m - k$ di B; questi due determinanti sono evidentemente degli stessi ordini. Se B diventa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 1 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

allora in particolare D_{m-k} e D_k diventano i determinanti formati coi minori di ordine $m - k$ e di ordine k del determinante A.

Su questi determinanti D, il Picquet dimostra i due teoremi:

1. Sia D_k che D_{m-k} sono ciascuno eguali al prodotto di una potenza di A per una potenza di B:

$$D_k = A^{\binom{m-1}{k-1}} B^{\binom{m-1}{k}}.$$

2. Ogni minore di ordine r di D_k è eguale al prodotto del complemento del suo omologo in D_{m-k} per una potenza di A e una potenza di B; propriamente per:

$$A^{r-\binom{m-1}{k}} B^{r-\binom{m-1}{k-1}}.$$

(Si suppongono naturalmente ordinati convenientemente gli elementi di D_k e D_{m-k}.)

A questi teoremi di Picquet noi ne aggiungiamo alcuni altri.

Consideriamo D_{m-1} che è di ordine m. Noi dimostreremo che:

3. *Ogni minore di ordine k di D_{m-1} è eguale a A^{k-1} moltiplicato per un elemento del determinante D_{m-k}.*

Questo teorema non è altro che la estensione di quello sugli ordinari determinanti reciproci.

In effetti un minore di 2.° ordine di D_{m-1} è (salvo i nomi degli elementi) riducibile sempre al tipo:

$$\begin{vmatrix} (a_1 \dots a_{m-2}\, a_{m-1}\, b_1), & (a_1 \dots a_{m-2}\, a_m\, b_1) \\ (a_1 \dots a_{m-2}\, a_{m-1}\, b_2), & (a_1 \dots a_{m-2}\, a_m\, b_2) \end{vmatrix},$$

che per effetto della identità fondamentale può trasformarsi in:

$$(a_1 \ldots a_{m-2}\, a_{m-1}\, a_m)\,(a_1 \ldots a_{m-2}\, b_1\, b_2),$$

di cui il primo fattore è A e l'altro è un elemento di D_{m-2}. Consideriamo ora un minore di 3.° ordine di D_{m-1}. Salvo i nomi degli elementi, esso è sempre del tipo:

$$\begin{vmatrix} (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-2}\, a_{m-1}\, b_1), & (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-1}\, a_m\, b_1), & (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_m\, a_{m-2}\, b_1) \\ (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-2}\, a_{m-1}\, b_2), & (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-1}\, a_m\, b_2), & (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_m\, a_{m-2}\, b_2) \\ (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-2}\, a_{m-1}\, b_3), & (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-1}\, a_m\, b_3), & (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_m\, a_{m-2}\, b_3) \end{vmatrix}.$$

Sviluppandolo secondo gli elementi dell'ultima linea, e osservando che ai minori di 2.° ordine compresi nelle due prime linee, si può applicare il risultato della dimostrazione già fatta, si ha:

$$\begin{aligned} A\Big[\, & (a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-2}\, a_{m-1}\, b_3)\,(a_1 \ldots a_{m-3}\, a_m\, b_1\, b_2) - \\ & -(a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-1}\, a_m\, b_3)\,(a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-2}\, b_1\, b_2) + \\ & +(a_1 \ldots a_{m-3}\, a_m\, a_{m-2}\, b_3)\,(a_1 \ldots a_{m-3}\, a_{m-1}\, b_1\, b_2)\,\Big], \end{aligned}$$

che, per effetto della solita identità fondamentale, è uguale a:

$$A^2\,(a_1 \ldots a_{m-3}\, b_1\, b_2\, b_3),$$

cioè A^2 moltiplicato per un elemento di D_{m-3}. Si vede che questo procedimento può continuarsi e darà sempre l'analogo risultato. Il teorema proposto resta così dimostrato in generale.

Nella teoria dei determinanti formati coi minori di un altro è noto il seguente teorema di Sylvester. (V. per es. D'Ovidio, Acc. Torino 1876-77-90; Picquet, op. cit.)

Indichiamo con Δ_{m-k} il determinante formato coi minori di ordine $m-k$ di un determinante dato Δ di ordine m. Formiamo quel minore $\Delta_{\lambda k}$ di Δ_{m-k}, i cui elementi sieno minori contenenti sempre $m-\lambda$ linee e colonne fisse di Δ, e $\lambda-k$ linee e colonne variabili ($\lambda > k$). Il minore $\Delta_{\lambda k}$ è di ordine $\binom{\lambda}{k}$ ed esso è eguale ad una potenza di Δ moltiplicata per una potenza di quel minore di Δ racchiuso dalle $m-\lambda$ linee e colonne fisse.

Ora vediamo in che modo potrà estendersi questo teorema.

Consideriamo D_{m-k} e un suo minore formato nel seguente modo: i suoi elementi contengano tutti $m-\lambda$ colonne fisse di A e $\lambda-k$ colonne variabili ($\lambda > k$), e poi k colonne di B scelte fra λ assegnate.

Un tal minore lo chiameremo $D_{\lambda k}$ ed è di ordine $\binom{\lambda}{k}$.

Moltiplichiamo ogni suo elemento per A^{k-1}; tutto il minore resterà moltiplicato per:

$$A^{\binom{\lambda}{k}(k-1)}.$$

In forza del teorema ora dimostrato, ogni elemento suo diventa un certo minore di ordine k di D_{m-1}, e propriamente un minore i cui elementi sono determinanti contenenti tutte le $m-\lambda$ colonne fisse di A, e non contenenti mai le $m-\lambda$ colonne escluse di B.

Ora in D_{m-1} tutti gli elementi così formati, costituiscono un minore di ordine λ che chiameremo $D^{(\lambda)}$; abbiamo dunque che, dopo la moltiplicazione indicata, gli elementi di $D_{\lambda k}$ diventano minori di ordine k di $D^{(\lambda)}$, e si ha quindi il determinante formato coi minori di ordine k di $D^{(\lambda)}$, il quale, come si sa, è eguale ad una potenza di $D^{(\lambda)}$.

Abbiamo dunque la formola:

$$A^{\binom{\lambda}{k}(k-1)} D_{\lambda k} = [D^{(\lambda)}]^{\binom{\lambda-1}{k-1}}.$$

Intanto a $D^{(\lambda)}$, come minore di D_{n-1}, può applicarsi ancora il teorema sopra dimostrato, e si ha che $D^{(\lambda)}$ è eguale a $A^{\lambda-1}$ moltiplicato per quell'elemento di $D_{m-\lambda}$ che contiene tutte le $m-\lambda$ colonne fisse di A e le λ scelte di B. Supposto che le $m-\lambda$ colonne fisse di A sieno indicate con $a_1 a_2 \ldots a_{m-\lambda}$, e sieno indicate con $b_{m-\lambda+1} \ldots b_m$ le colonne scelte di B, tale elemento resta rappresentato con:

$$(a_1 \ldots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \ldots b_m).$$

Raccogliendo si ha dunque infine la formola:

$$D_{\lambda k} = A^{\binom{\lambda-1}{k}} \cdot (a_1 \ldots a_{m-\lambda} b_{m-\lambda+1} \ldots b_m)^{\binom{\lambda-1}{k-1}},$$

che è una formola analoga a quella del citato teorema di Sylvester, il quale se ne ricava come caso particolare se il determinante B si suppone eguale a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Possiamo dunque conchiudere:

4. *Separiamo le colonne di A e B in due categorie, $m-\lambda$ nell'una e λ nell'altra. Formiamo tutti i determinanti colle $m-\lambda$ colonne di A, altre $\lambda-k$ di A, e le rimanenti k di B scelte fra le λ della seconda categoria; presi come elementi questi determinanti e opportunamente ordinati si costruisca con essi il determinante di ordine $\binom{\lambda}{k}$. Questo sarà eguale alla potenza $\binom{\lambda-1}{k}^{ma}$ di A per la potenza $\binom{\lambda-1}{k-1}^{ma}$ del determinante formato colle $n-\lambda$ colonne di A e colle λ di B.*

Al minore $D_{\lambda k}$ di D_{m-k} si può far corrispondere in D_k il complemento del suo omologo che è di ordine:

$$\binom{m}{k}-\binom{\lambda}{k},$$

e, per il teorema citato di Picquet (teor. 2), questo è eguale a:

$$D_{\lambda k}\cdot A^{\binom{m}{k}-\binom{\lambda}{k}-\binom{m-1}{k}}\, B^{\binom{m}{k}-\binom{\lambda}{k}-\binom{m-1}{k-1}},$$

che, in forza del teorema dimostrato, è:

$$A^{\binom{m}{k}-\binom{\lambda}{k}+\binom{\lambda-1}{k}-\binom{m-1}{k}}\, B^{\binom{m}{k}-\binom{\lambda}{k}-\binom{m-1}{k-1}}\, (a_1\ldots a_{m-\lambda}\, b_{m-\lambda+1}\ldots b_m)^{\binom{\lambda-1}{k-1}},$$

che è eguale a:

$$A^{\binom{m-1}{k-1}-\binom{\lambda-1}{k-1}}\, B^{\binom{m-1}{k}-\binom{\lambda}{k}}\, (a_1\ldots a_{m-\lambda}\, b_{m-\lambda+1}\ldots b_m)^{\binom{\lambda-1}{k-1}}.$$

Abbiamo dunque:

5. *Formiamo il minore di D_k che abbia per elementi, determinanti contenenti k colonne di A* non scelte tutte *fra le λ della seconda categoria, e $m-k$ colonne di B fra le quali non sono mai comprese* tutte *le $m-\lambda$ della prima categoria; fra le colonne compaia sempre* almeno una *colonna di A scelta fra quelle della prima categoria, e non compaia* almeno una

delle colonne di B fra quelle della prima categoria. Tal minore così formato è di ordine $\binom{m}{k} - \binom{\lambda}{k}$ *e si esprime colla formola soprascritta.*

Questa formola è l'estensione di un teorema del D'Ovidio (loc. cit.).

§ 4. Estensione di un teorema dato dal sig. Netto come estensione della cosiddetta formola di scomposizione di Laplace.

Il sig. Netto in un lavoro intitolato *Erweiterung des Laplaceschen Determinanten-Zerlegungssatzes* (Crelle, v. 114, pag. 345), dimostra il seguente teorema:

In un determinante dato di ordine m sopprimiamo $m - \lambda$ linee e colonne, e facciamo la scomposizione del determinante restante secondo la cosiddetta regola di Laplace, cioè facciamo la somma dei prodotti *con segni opportuni* di tutti i minori compresi in k_1 linee, per tutti quelli compresi in k_2 linee, e così di seguito, per tutti quelli compresi in k_i linee, dove $k_1 + \cdots + k_i = \lambda$, e due fattori di un prodotto non contengono mai in comune una colonna del determinante primitivo. Il risultato di questa somma sarà il determinante delle λ colonne e linee non soppresse. Se ora i vari fattori dei vari termini di questa somma si intendono *orlati* delle $m - \lambda$ linee e colonne soppresse, allora la somma rappresenterà invece il prodotto di tutto il determinante primitivo per la potenza $(i - 1)^{ma}$ del minore formato dalle $m - \lambda$ linee e colonne fisse.

Di questo teorema io ho dato in un altro lavoro (*) una dimostrazione semplice, e ho trovato poi anche un altro teorema che è ad esso affine, e che consiste in questo: si faccia la somma di prodotti come nella regola di Laplace; poi ad ogni fattore si sostituisca il suo minore complementare; indi si orlino tutti i fattori colle solite $m - \lambda$ linee e colonne fisse; il risultato della somma sarà allora, viceversa, la potenza $(i - 1)^{ma}$ del determinante dato per la prima potenza del minore formato colle $n - \lambda$ linee e colonne fisse.

Estendiamo ora questi teoremi secondo il punto di vista indicato nei paragrafi precedenti.

Separiamo, come avanti, le colonne di due determinanti dati A, B di ordine m, in due categorie, $m - \lambda$ nella prima e λ nella seconda; per fissare

(*) V. Nota nei Rend. dei Lincei. Marzo, 1896.

le idee supponiamo che si separino le prime $m-\lambda$ dalle ultime λ. Le λ di B dividiamole in $k_1+k_2+\cdots+k_i=\lambda$. La generalizzazione del teorema è la seguente:

6. *Formiamo un determinante colle $m-\lambda$ colonne fisse di A, e poi altre k_1 di A in tutti i modi possibili, e le $\lambda-k_1$ colonne di B già fissate; poi un altro determinante colle $m-\lambda$ colonne fisse di A, con altre k_2 colonne di A (diverse tutte dalle k_1 già considerate), e colle altre $\lambda-k_2$ colonne di B_2 fissate, e così proseguiamo per* i *volte di seguito; poi facciamo la somma algebrica dei prodotti di questi* i *determinanti tali che in ciascun termine due fattori non abbiano mai in comune altre colonne di A che le $m-\lambda$. Se supponiamo che B diventi cogli elementi zero, meno quelli della diagonale principale che siano eguali ad* 1, *allora si vede che questa somma di prodotti diventa precisamente quella che occorre nel teorema succitato di* Netto; *noi daremo appunto a ciascun termine il segno + o — secondochè + o — sarebbe il segno del corrispondente termine della formola di* Netto. *Ora io dico che questa somma è eguale a:*

$$A\cdot(a_1\dots a_{m-\lambda}\,b_{m-\lambda+1}\dots b_m)^{i-1},$$

se $a_1\dots a_{m-\lambda}$ sono le $m-\lambda$ colonne fisse di A, e $b_{m-\lambda+1}\dots b_m$ sono le λ colonne di B della seconda categoria.

La dimostrazione del teorema la facciamo dipendere dal teorema dato nel paragrafo precedente.

Moltiplichiamo ogni termine della somma (che è sempre un elemento di $D_{m-\lambda+k_1}$ moltiplicato per uno di $D_{m-\lambda+k_2}$, ecc.) per:

$$A^{\lambda-k_1-1}\cdot A^{\lambda-k_2-1}\dots A^{\lambda-k_i-1}.$$

Mantenendo le stesse notazioni del paragrafo precedente, ogni termine della somma diventa il prodotto di un minore di ordine $\lambda-k_1$ di $D^{(\lambda)}$ moltiplicato per un minore di ordine $\lambda-k_2$, e così di seguito. Se in luogo di questi minori si sostituiscono i loro complementi in $D^{(\lambda)}$, si ha una somma di prodotti che non è altro che lo sviluppo secondo la regola di Laplace del determinante $D^{(\lambda)}$. La somma considerata avanti, moltiplicata per quella potenza di A, non è altro quindi che ciò che si ottiene facendo lo sviluppo di $D^{(\lambda)}$ secondo la regola di Laplace, e poi sostituendo ad ogni minore il suo complemento. Si può ritenere come teorema noto, e del resto potrebbe facilmente dimostrarsi (v. mia Nota citata) che così facendo si ha la potenza $i-1^{ma}$ di $D^{(\lambda)}$; dunque possiamo infine conchiudere che la nostra somma moltiplicata per:

$$A^{(\lambda-1)i-(k_1+\ldots+k_i)},$$

è eguale a:

$$[D^{(\lambda)}]^{i-1},$$

cioè (v. paragrafo precedente) a:

$$[A^{\lambda-1}(a_1 \ldots a_{m-\lambda}\, b_{m-\lambda+1} \ldots b_m)]^{i-1},$$

dunque si ha infine che la somma da noi formata è eguale a:

$$A \cdot (a_1 \ldots a_{m-\lambda}\, b_{m-\lambda+1} \ldots b_m)^{i-1},$$

giusta il teorema enunciato.

Possiamo similmente enunciare un teorema che è analogo a questo e che è a sua volta l'estensione di quell'altro cui ho accennato, analogo al teorema di NETTO:

7. *Formiamo la stessa somma precedente, ma sostituendo ad ogni fattore di un termine (fattore che è un determinante con $m-\lambda$ colonne fisse di A, con k_1 altre colonne di A, e con $\lambda-k_1$ di B), l'altro determinante, che potrebbe dirsi complementare, cioè formato colle stesse $m-\lambda$ colonne di A, poi colle restanti $\lambda-k_1$ colonne di A, e colle restanti k_1 colonne di B. Si ha allora una somma di prodotti di* i *fattori, che è eguale a:*

$$A^{i-1}(a_1 \ldots a_{n-\lambda}\, b_{n-\lambda+1} \ldots b_m).$$

La dimostrazione si fa come quella di avanti, moltiplicando ogni termine per:

$$A^{k_1-1} A^{k_2-1} \ldots A^{k_i-1},$$

e osservando che allora si ha esattamente lo sviluppo per minori secondo la regola di LAPLACE del determinante $D^{(\lambda)}$, e quindi si ha:

$$A^{\lambda-1}(a_1 \ldots a_{m-\lambda}\, b_{m-\lambda+1} \ldots b^m),$$

e sopprimendo al primo e secondo membro una opportuna potenza di A, resta la formola annunciata.

Pavia, febbraio del 1896.

Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche.

(*Di* Tullio Levi-Civita, *a Padova.*)

INTRODUZIONE.

Accanto al problema classico della trasformabilità di due forme differenziali quadratiche è stato posto in questi ultimi anni dal sig. Appell (*) il problema analogo più generale della trasformabilità di due sistemi di equazioni dinamiche fra uno stesso numero di variabili.

Varii autori hanno dopo di allora istituito ricerche su questo soggetto, segnatamente i sigg. Painlévé e R. Liouville, cui spetta il merito di aver scoperto alcune interessanti proprietà generali. Per aver modo di farne un breve cenno, conviene fin d'ora precisar la questione, indicando altresì l'aspetto definitivo, sotto cui essa può venire formulata.

Ecco in primo luogo l'enunciato del sig. Appell.

Dati due sistemi materiali S ed S_1 a legami indipendenti dal tempo e collo stesso grado di libertà, e dette rispettivamente x_i e y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ le coordinate lagrangiane, che fissano la posizione dei due sistemi, X_i, Y_i le forze, che li sollecitano secondo queste coordinate, saranno:

$$T=\frac{1}{2}\sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, x'_r\, x'_s, \qquad T_1=\frac{1}{2}\sum_1^n{}_{rs}\, b_{rs}\, \bar{y}'_r\, \bar{y}'_s$$

$$\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial x'_i}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial x_i}=X_i \tag{A}$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

$$\frac{d\dfrac{\partial T_1}{\partial \bar{y}'_i}}{dt_1}-\frac{\partial T}{\partial y_i}=Y_i, \tag{B}$$

(*) *Sur des transformations de mouvements.* Crelle, Bd. 109, 1892. Si trovano in questa Nota molte indicazioni di lavori aventi attinenza collo stesso argomento o relativi ad alcuni casi particolari.

le forze vive e le equazioni del moto dei due sistemi; essendosi designata al solito con x'_i la derivata di x_i rispetto a t, e, per evitare ambiguità, con $\bar{y}'_i$ la derivata di y_i rispetto a t_1:

Si domanda sotto quali condizioni esista e come si possa assegnare una trasformazione del tipo:

$$\left. \begin{aligned} & y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ & dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \end{aligned} \right\} \tag{C}$$

atta a far coincidere il sistema di equazioni (B) col sistema (A), supponendo:

1.° Che sieno date tanto le forze X_i, quanto le Y_i.

2.° Che sieno date le sole forze X_i e si possano assegnare a piacimento le Y_i.

La seconda parte della questione, come ha osservato lo stesso sig. Appell, è sempre risolubile, se le forze si risguardano dipendenti anche dalle velocità; si può cioè, e in infiniti modi, con opportuna scelta delle Y_i, far corrispondere a ogni movimento del sistema S, dovuto a forze dipendenti dalle coordinate e dalle velocità, un movimento analogo del sistema S_1, le cui equazioni differenziali (B) sieno, mediante trasformazione del tipo (C), riconducibili alle (A).

In vista di ciò e del minor interesse, che può essere annesso al caso di forze, dipendenti eziandio dalle velocità, giova addirittura, anche per la prima parte della questione, limitarsi all'ipotesi che le forze sieno indipendenti dalle velocità stesse.

Il problema, ristretto sotto questo punto di vista, venne ripreso dal signor Painlévé, che lo presenta (*) tuttavia con una felice modificazione: Egli richiede soltanto che le traiettorie del sistema (B) si possano ricondurre a quelle di (A), o, in altri termini, che gli $n-1$ integrali di (B) indipendenti da t_1 si possano, mediante trasformazioni del tipo:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{D}$$

far coincidere cogli $n-1$ integrali di (A) indipendenti da t; di più egli ha fatto notare come convenga scindere la ricerca in due parti, di cui la prima soltanto è essenziale, riducendosi la seconda ad una trasformazione di forme

(*) *Sur la transformation des équations de la dynamique.* Journal de Liouville, tom. 10, 1894.

differenziali quadratiche. Per stabilire questo punto, si immagini di sostituire in (B) le y_i coi loro valori $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e si ponga:

$$T_1 = \sum_1^n {}_{rs}\, b_{rs}\, \overline{y}'_r\, \overline{y}'_s = \sum_1^n {}_{rs}\, \alpha_{rs}\, \overline{x}'_r\, \overline{x}'_s$$

$$\Xi_i = \sum_1^n {}_k\, Y_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i};$$

le equazioni:

$$\frac{d \dfrac{\partial T_1}{\partial \overline{x}'_i}}{d t_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = \Xi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{A$_1$}$$

che sono, come è noto, le trasformate delle (B), dovranno ammettere *le stesse traiettorie* di (A), il che mostra in primo luogo che da ogni coppia di sistemi (A), (B), le cui traiettorie si possono far coincidere per mezzo di una trasformazione (D), si deduce una coppia di sistemi (A), (A_1), pure d'equazioni dinamiche, e *aventi le stesse traiettorie.* D'altra parte poi, se si conoscono, per ogni sistema (A), tutti gli (A_1) aventi le stesse traiettorie, cioè secondo la denominazione del sig. Painlévé, tutti i sistemi *corrispondenti*, la questione originariamente proposta, di decidere se e come si possa assegnare una trasformazione (D) atta a ricondurre le traiettorie di (B) in quelle di (A), si può risguardare risoluta; poichè una tale trasformazione esisterà allora e solo allora che sia possibile stabilire una identità del tipo:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, b_{rs}\, d y_r\, d y_s = \sum_1^n {}_{rs}\, \alpha_{rs}\, d x_r\, d x_s,$$

le b_{rs} essendo i coefficienti della forza viva di (B) e le α_{rs} essendo i coefficienti della forza viva in un sistema (A_1) corrispondente ad (A).

Se si suppone adunque che tutti i sistemi (A_1) sieno conosciuti, non ci resta che da esaminare, per ciascuno di essi, se le forme differenziali quadratiche $\sum_1^n {}_{rs}\, b_{rs}\, d y_r\, d y_s$, $\sum_1^n {}_{rs}\, \alpha_{rs}\, d x_r\, d x_s$ sono equivalenti nel senso ordinario e da determinare in caso affermativo le formule di trasformazione. Affinchè codesto criterio sia in fatto applicabile, si esige manifestamente che le espressioni possibili per le α_{rs} si riducano ad un numero finito di tipi, e questo precisamente ha luogo nel caso nostro, poichè, come vedremo e come del resto ha già osservato il sig. Painlévé, il problema della determinazione di tutti i corrispondenti ad un dato (A) è di quelli, il cui integrale generale dipende soltanto da un numero finito di costanti arbitrarie.

Concludiamo pertanto che, senza ledere la generalità della ricerca, basta limitarla alla questione di *determinare, per un dato sistema* (A), *tutti i corrispondenti* (A_1).

I risultati più notevoli raggiunti finora si possono riassumere come segue (*):

1.° Ogni qual volta un sistema (A) ammette un corrispondente (A_1) *non ordinario* (cioè non di un certo tipo assai facilmente assegnabile, che compete ad ogni (A) fissato ad arbitrio), esiste per entrambi un integrale primo quadratico.

2.° Se nel sistema (A) si suppone che le forze sieno nulle, lo stesso deve accadere per ogni suo corrispondente (A_1), quindi, posto $ds^2 = 2\,T\,dt^2$, $ds_1^2 = 2\,T_1\,dt_1^2$, la ricerca dei sistemi corrispondenti ad (A) equivale in questo caso alla determinazione di tutte le varietà ds_1, che hanno le medesime geodetiche di ds. (Per $n = 2$, il problema, come è ben noto, è stato risoluto dal prof. Dini.)

3.° *Teorema di* R. Liouville (**). Due sistemi (A) ed (A_1) privi di forze, i quali definiscano le medesime geodetiche, ammettono entrambi n integrali quadratici, che possono però coincidere ed anche ridursi al solo integrale delle forze vive.

4.° La trasformazione, che permette di ricondurre un sistema (A_1) al suo corrispondente (A), è del tipo $dt_1 = \dfrac{dt}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, quando non agiscono forze, e più generalmente del tipo $dt_1^2 = \dfrac{dt^2}{\mu^2}\left\{1 - \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r x'_s\right\}$ (la μ e le c_{rs} essendo funzioni delle x) in tutti gli altri casi. Apparisce da ciò come in generale la condizione di ammettere le medesime traiettorie sia per due sistemi di equazioni dinamiche alquanto meno restrittiva che non la loro trasformabilità secondo il sig. Appell (veggasi la seconda delle equazioni (C)); le due condizioni si equivalgono, solo quando mancano le forze.

Malgrado queste notevoli proposizioni, il problema generale della determinazione di tutti i corrispondenti ad un dato (A), non venne ancora trat-

(*) Io ho esposto questi risultati nel modo, che mi parve più semplice, però il loro ordine, come avremo occasione di constatare più innanzi, non rispecchia la successione naturale, secondo cui si presentano.

(**) *Sur les èquations de la dynamique.* Acta Math., tom. 19, 1895; è notevole l'estensione ivi indicata di alcuni risultati ad una classe di equazioni più generali delle dinamiche.

tato: Il sig. LIOUVILLE ne ha stabilite le equazioni differenziali (di cui si vale per stabilire in modo diverso da quello del sig. PAINLÉVÉ le proprietà accennate), senza tuttavia proporsene la effettiva integrazione, ciò, che per verità, prendendo direttamente le sue formule, non sarebbe punto agevole.

Lo studio di tale questione costituisce all'incontro l'oggetto principale delle mie ricerche.

Io prendo le mosse ab initio dalla definizione di sistemi corrispondenti e mostro in primo luogo come *l'integrazione di un sistema equivale a meno di quadrature a quella d'ogni suo corrispondente;* discuto quindi le relazioni che debbono passare tra le variabili t e t_1 e ritrovo per via diretta le forme già note: $dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, quando non agiscono forze e più generalmente $dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2}\left\{1 - \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} x'_r x'_s\right\}$ negli altri casi (secondo e quarto dei risultati sopra riferiti). Ho dovuto limitarmi nella presente Memoria a considerare il caso, in cui non agiscono forze, cioè, con linguaggio geometrico, il problema della conservazione delle geodetiche.

Si può attribuire ad esso il seguente aspetto generale:

Data una varietà φ, il cui elemento lineare sia $ds = dt\sqrt{2T}$, determinare tutte le varietà Φ rappresentabili (almeno in una certa regione) *univocamente su φ, in modo che ad ogni geodetica di Φ corrisponda una geodetica di φ.*

È manifesto infatti che, se si risguardano equivalenti le varietà applicabili (e si suppone quindi sostituibile ciascuna categoria di varietà applicabili con un solo individuo), la determinazione delle Φ si riduce a quella di tutte le varietà, che hanno le stesse geodetiche di φ, cioè effettivamente alla determinazione di tutti i $ds_1^2 = \sum_1^n {}_{rs} \alpha_{rs} dx_r dx_s$, che rendono, supposte nulle le forze, il sistema (A_1) corrispondente al sistema (A).

Questo problema trovasi qui risoluto completamente (*).

Fissate nel § 4 le equazioni, che legano le α_{rs} alle a_{rs}, mi occupo nel § 6 di trasformarle, introducendo le derivate covarianti del prof. RICCI, che sono prezioso quanto elegante stromento in tutte le ricerche, che hanno ca-

(*) Conviene aggiungere nel campo reale, poichè non solo noi ci riferiremo sempre (come è naturale, trattandosi di equazioni dinamiche) a forme ds^2, ds_1^2 essenzialmente positive, ma non sarebbe nemmeno possibile col nostro procedimento prescindere dall'ipotesi (cfr. § 7) che una almeno di esse conservi sempre il medesimo segno.

rattere invariantivo: Dalle equazioni differenziali, in tal guisa trasformate, deduco immediatamente l'esistenza di un integrale primo quadratico (primo dei risultati sopra riferiti).

Estesi quindi (§§ 7 ed 8) (colla scorta di una Nota recente (*) dello stesso prof. Ricci) al caso di n variabili taluni procedimenti di calcolo, immaginati dal medesimo autore nelle sue ricerche sulla teoria delle superficie (**), me ne valgo (§ 9) per attribuire alle mie equazioni un aspetto molto più semplice e sotto cui l'interpretazione geometrica si presenta spontanea. Il successo del metodo da me adottato si deve a questa interpretazione; essa rivela infatti l'esistenza nelle coppie di varietà corrispondenti (chiamando per brevità varietà corrispondenti quelle, le cui geodetiche coincidono) di speciali famiglie di superfici, che, assunte a sistema coordinato, attribuiscono forme particolari ai quadrati degli elementi lineari. Ciò permette la riduzione di una coppia qualsivoglia di sistemi corrispondenti a n tipi perfettamente determinati t_1), t_2),..., t_n), ciascun tipo essendo caratterizzato dalla trasformabilità dei ds e ds_1 a certe forme canoniche, rese esplicite a § 12.

Di più, dato ad arbitrio un sistema (A) privo di forze, o ciò, che è lo stesso, un ds e fissato un tipo t_m), si possono formare, se esistono tutti i ds_1 corrispondenti (cioè spettanti a sistemi corrispondenti di quel tipo): La loro espressione generale dipende da due costanti arbitrarie per t_1), t_2),..., t_{n-1}), da una costante sola pel tipo t_n).

Due sistemi corrispondenti di tipo t_m) ammettono ciascuno $n-m+1$ integrali primi *quadratici* distinti, con che riesce completato in un punto importante il teorema di Liouville.

Pongo ormai termine a questa introduzione, esprimendo la speranza di poter presentare in un prossimo articolo alcuni risultati relativi ai sistemi sollecitati da forze.

(*) *Sulla teoria degli iperspazii.* Rendiconti dei Lincei, 1895.

(**) Si veggano gli Atti dell'Ist. Veneto, 1893, 1894 e 1895.

§ 1. Sistemi corrispondenti. Loro equivalenza a meno di quadrature.

Sieno:

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i \tag{A}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{d\frac{\partial T_1}{\partial \overline{x}'_i}}{dt} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = \Xi_i, \tag{A$_1$}$$

le equazioni differenziali spettanti a due problemi dinamici collo stesso grado di libertà, ma in generale distinti, sì per la natura del sistema in movimento, che per le forze. Se, ogni qualvolta si attribuiscono alle coordinate e alle velocità gli stessi valori iniziali, i due movimenti hanno nello spazio rappresentativo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la stessa traiettoria (potendo però differire per il modo, con cui, al variare del tempo, tale comune traiettoria viene percorsa), i sistemi (A) ed (A$_1$), secondo una denominazione proposta dal sig. Painlévé, si dicono *corrispondenti.*

Giova mostrare prima di tutto che: *L'integrazione delle equazioni differenziali di due problemi, corrispondenti, presenta, a meno di quadrature, la stessa difficoltà.* Infatti, integrato uno dei due sistemi, poniamo il primo, si hanno, eliminando il tempo, $n-1$ relazioni tra le coordinate e le costanti arbitrarie, le quali, per ipotesi, debbono essere altresì integrali del secondo sistema. Da esse si potranno ricavare $x_2, x_3, \ldots, x_n$ in funzione di x_1, e, derivando rapporto a t_1, $\overline{x}'_2, \overline{x}'_3, \ldots, \overline{x}'_n$ in funzione di x_1 e di $\overline{x}'_1$: Si immagini ora di risolvere il sistema (A$_1$) rispetto ad $\overline{x}''_1$ e di sostituire nel secondo membro per $x_2, x_3, \ldots, x_n$; $\overline{x}'_2, \overline{x}'_3, \ldots, \overline{x}'_n$ le loro espressioni, otterremo, come è agevole riconoscere una equazione della forma:

$$\overline{x}''_1 = P\overline{x}'^2_1 + Q,$$

P e Q essendo funzioni della sola x_1; ed è manifesto che basterà integrare tale equazione, per determinare completamente il moto del sistema (A$_1$). Consideriamo x_1 come variabile indipendente, $y = \overline{x}'^2_1$ come funzione incognita; avendosi $\overline{x}'_1 = \frac{dx_1}{dt_1}$, $\overline{x}''_1 = \frac{d\overline{x}'_1}{dt_1}$, risulterà $\overline{x}''_1 = \overline{x}'_1 \frac{d\overline{x}'_1}{dx_1} = \frac{1}{2}\frac{dy}{dx_1}$ e per conseguenza $\frac{1}{2}\frac{dy}{dx_1} = Py + Q$: Tale equazione, lineare in y, si integra per quadrature, e, nota y, si ha con una nuova quadratura da $dt_1 = \frac{dx_1}{x'_1} = \frac{dx_1}{\sqrt{y}}$, la richiesta relazione fra x_1 e t_1.

La proposizione enunciata si potrebbe del resto ovviamente dedurre dalla nota teoria dell'ultimo moltiplicatore (*).

§ 2. Modo di passare dall'uno all'altro di due sistemi corrispondenti.

Il precedente teorema mette in evidenza l'interesse, che si riattacca alla considerazione dei sistemi corrispondenti, poichè un problema dinamico potrà riguardarsi risoluto, le quante volte si giunga a stabilire che esso è il corrispondente di un caso noto. Sorge quindi spontanea la questione di determinare per un sistema (A) tutti i corrispondenti.

Affine di poter anche soltanto abbordare una questione siffatta, occorre manifestamente conoscere quali condizioni leghino tra loro le forze e i coefficienti della forza viva di due sistemi corrispondenti: Noi dovremo pertanto in primo luogo avviarci a stabilire codeste condizioni.

Sia:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \ldots, x'^0_n) \\ x_2 = \varphi_2(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \ldots, x'^0_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \ldots, x'^0_n), \end{array}\right\} \qquad (1)$$

il sistema integrale delle (A), dove si suppone, come è sempre possibile, che le $2n$ costanti di integrazione sieno i valori delle coordinate e della velocità per un generico valore del tempo t^0.

Il sistema integrale delle (A_1) sarà:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \psi_1(t_1, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \ldots, x'^0_n) \\ x_2 = \psi_2(t_1, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \ldots, x'^0_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \psi_n(t_1, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \ldots, x'^0_n), \end{array}\right\} \qquad (2)$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, Lez. 18.

nelle quali pure $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \dots, x'^0_n$ rappresentano i valori delle coordinate e delle velocità relativi ad un generico valore t_1^0 di t_1. Se si immagina che tali valori iniziali, pur restando affatto arbitrarii, coincidano con quelli, che compaiono nelle (1), si esprimerà immediatamente la condizione di corrispondenza pei sistemi (A) ed (A_1), dicendo che l'eliminazione di t dalle (1), e di t_1 dalle (2) deve portare *alle stesse relazioni* fra le coordinate.

Ciò equivale ad esigere che, sostituendo nelle (2), t_1 in funzione di t, per mezzo, poniamo, della relazione:

$$\varphi_1(t, x_1^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, \dots, x'^0_n) = \psi_1(t_1, x_1^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, \dots, x'^0_n), \tag{3}$$

le (2) stesse *si riducano identicamente alle* (1). In tal caso avviene altresì che le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt} \\ x'_2 &= \frac{d\varphi_2}{dt} \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ x'_n &= \frac{d\varphi_n}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

derivate delle (1) rapporto a t e le:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}'_1 &= \frac{d\psi_1}{dt_1} \\ \bar{x}'_2 &= \frac{d\psi_2}{dt_1} \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \bar{x}'_n &= \frac{d\psi_n}{dt_1}, \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

derivate delle (2) rapporto a t_1, si riconducono le une alle altre, mediante la (3) e la conseguente relazione differenziale:

$$\frac{d\varphi_1}{dt}dt = \frac{d\psi_1}{dt_1}dt_1. \tag{4}$$

Valendo codesta proprietà per ogni sistema di valori delle costanti arbitrarie $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; x'^0_1, x'^0_2, \dots, x'^0_n$, è manifesto che, se nelle (3) e (4), a mezzo delle (1), (1'), si sostituiscono le $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0$ colle $x_1, x_2, \ldots, x_n; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, e poi tali espressioni di t_1 e dt_1 si portano nelle (2) (2'), il risultato deve sostanzialmente esser sempre quello di ricondurre le (2) (2') alle (1) (1'). In conseguenza, esprimendo le (3), (4), dopo eseguita l'accennata sostituzione, nella forma:

$$t_1 = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \tag{3'}$$

$$d t_1 = \frac{dt}{f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}, \tag{4'}$$

possiamo concludere che, per la corrispondenza tra (A) e (A_1) è necessario e basta che un cambiamento di variabile indipendente del tipo (3'), (4') riconduca il sistema integrale delle (A_1) a quello delle (A): Messa sotto questo aspetto, la condizione di corrispondenza si traduce assai facilmente in relazione fra gli stessi sistemi differenziali (A), (A_1); poichè, se esiste un cambiamento di variabile indipendente, che ne fa coincidere i sistemi integrali, il cambiamento stesso deve evidentemente trasformarli l'uno nell'altro.

La variabile t_1 non entrando esplicitamente nelle (A_1), deduciamo il seguente risultato fondamentale:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due sistemi (A) ed (A_1) *di equazioni dinamiche ammettano le medesime traiettorie, si è che il sistema* (A_1) *possa identicamente trasformarsi in* (A), *mediante un cambiamento di variabile indipendente del tipo:*

$$d t_1 = \frac{dt}{f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}.$$

§ 3. Caratteri della funzione f.

Nei riguardi della funzione f è bene notare che essa, in un certo intorno di $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$, almeno per qualche valore delle coordinate e del tempo, è regolare (*) *e diversa da zero.*

(*) Noi supponiamo implicitamente in questo paragrafo e nei due successivi che i coefficienti a_{rs} e α_{rs}, nelle espressioni di T e di T_1, sieno funzioni analitiche delle x_i. Non sarà per altro difficile riconoscere che i risultati finali dei paragrafi 4 e 5 sono indipendenti da questa ipotesi restrittiva, quantunque lo stabilirli con rigore riuscirebbe inutilmente penoso.

Per stabilire questa proprietà, giova dapprima risolvere i sistemi (A) ed (A_1), rispetto alle derivate seconde, ciò, che, se si pone:

$$a = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}, \qquad \alpha = \sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn}$$

$$a^{(ij)} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{ij}}, \qquad \alpha^{(ij)} = \frac{\partial \log \alpha}{\partial \alpha_{ij}}$$

$$a_{rs,i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial a_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} \right\}, \qquad \alpha_{rs,i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i} \right\}$$

$$a^j{}_{rs} = \sum_1^n{}_i\, a^{(ij)} a_{rs,i}, \qquad \alpha^j{}_{rs} = \sum_1^n{}_i\, \alpha^{(ij)} \alpha_{rs,i}$$

$$X^j = \sum_1^n{}_i\, a^{(ij)} X_i, \qquad \Xi^j = \sum_1^n{}_i\, \alpha^{(ij)} \Xi_i,$$

conduce, come è noto, alle equazioni:

$$x''_j = X^j - \sum_1^n{}_{rs}\, a^j{}_{rs} x'_r x'_s \qquad (A')$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\overline{x}''_j = \Xi^j - \sum_1^n{}_{rs}\, \alpha^j{}_{rs} \overline{x}'_r \overline{x}'_s. \qquad (A'_1)$$

Immaginando di sostituire col solito metodo alle (A') il sistema di equazioni di prim'ordine:

$$\frac{d x_j}{d t} = x'_j$$

$$\frac{d x'_j}{d t} = X^j - \sum_1^n{}_{rs}\, a^j{}_{rs} x'_r x'_s,$$

apparisce che i valori $x'_1 = x'^0_1$, $x'_2 = x'^0_2, \dots, x'_n = x'^0_n$, presi comunque, purchè finiti, almeno in un certo campo C delle variabili x_i e t (in cui supporremo presi i valori iniziali x^0_1, $x^0_2, \dots, x^0_n$, t^0), non sono singolari pei secondi membri. Si può quindi asserire (*) che le funzioni integrali φ sono regolari in C per ogni sistema di valori delle x'^0_1, $x'^0_2, \dots, x'^0_n$ e in particolare pel valor zero di queste quantità.

Analoga proprietà compete naturalmente alle funzioni ψ, nonchè alle derivate delle φ e delle ψ. Se si prende ora ad esaminare il sistema (1) (1')

(*) NICCOLETTI, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali.* Rend. dei Lincei, 1895.

e lo si immagina risoluto rispetto ai valori iniziali, questi ci si presentano, nel campo C sopra detto come funzioni analitiche delle x', regolari per tutti i valori finiti delle x' stesse: Sostituendo così i valori iniziali, la relazione (3) $\varphi_1 = \psi_1$ definisce t come una funzione τ_1 di $t_1, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$, la quale si mantiene certamente regolare, dovunque non sia $\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$. Considerando infine la (4), se vi si sostituisce t per mezzo di τ_1 e i valori iniziali mediante le loro espressioni desunte dalle (1) (1'), $\frac{d\varphi_1}{dt}$ diviene x'_1 e $\frac{d\psi_1}{dt_1}$ una certa funzione $\chi_1(t_1, x_1, \ldots, x_n;\, x'_1, \ldots, x'_n)$, la quale nel campo C è regolare per valori finiti delle x', escluso al più il valore $x'_1 = 0$ (*).

Ne viene che il rapporto $\frac{\chi_1(t_1, x_1, \ldots, x_n;\, x'_1 \ldots, x'_n)}{x'_1}$, considerato come funzione dei suoi argomenti, può avere nel campo C e per valori finiti delle x', il solo punto singolare $x'_1 = 0$.

Le osservazioni precedenti permettono di togliere questa restrizione e di stabilire che il detto rapporto è, anche nel punto $x'_1 = 0$, regolare e non identicamente nullo.

Infatti si noti che, assumendo a punto di partenza un'altra (**) relazione del tipo $\varphi_i = \psi_i$ $(i > 1)$, per es. la $\varphi_2 = \psi_2$ e operando, come si è fatto sulla $\varphi_1 = \psi_1$, si trova che il rapporto $\dfrac{\frac{d\psi_2}{dt_1}}{\frac{d\varphi_2}{dt}}$, sostituitivi τ_2 (***) per t e i valori iniziali mediante le loro espressioni ricavate dalle (1) (1'), si riduce a: $\frac{\chi_2(t_1, x_1, \ldots, x_n;\, x'_1, \ldots, x'_n)}{x'_2}$, che è una funzione intera rispetto alla varia-

(*) Tale eccezione proviene dalla circostanza che la funzione t di t_1, $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$; $x'^0_1, x'^0_2, \ldots, x'^0_n$ definita dalla (3) $\varphi_1 = \psi_1$ non può asserirsi regolare, quando $\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$ e quindi, fatte le debite sostituzioni, il medesimo dubbio si presenta per la funzione τ_1, quando $x'_1 = 0$.

(**) Siccome le relazioni $\varphi_i = \psi_i$ sono in numero di n e $n > 1$ (poichè, per $n = 1$, tutti i sistemi si possono riguardare come corrispondenti), così è sempre lecito considerare, oltre alla relazione $\varphi_1 = \psi_1$, almeno la $\varphi_2 = \psi_2$.

(***) La funzione τ_2 si comporta di fronte alla relazione $\varphi_2 = \psi_2$ come τ_1 di fronte alla $\varphi_1 = \psi_1$ e sarà dunque l'espressione di t, desunta dalla $\varphi_2 = \psi_2$, quando si sieno eliminati i valori iniziali a mezzo delle (1) (1').

bile x'_1. D'altra parte le relazioni $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2$ definiscono, in virtù della proprietà caratteristica dei sistemi corrispondenti, la *medesima* funzione t_1 di t, talchè i due rapporti $\frac{\chi_1}{x'_1}$ e $\frac{\chi_2}{x'_2}$, i quali esprimono, per mezzo delle stesse quantità, la derivata di t_1 rapporto a t, debbono coincidere e, siccome il secondo è, almeno in un certo campo, funzione intera di x'_1, lo sarà del pari $\frac{\chi_1}{x'_1}$, come avevamo asserito. Si riconosce che esso non si annulla identicamente per $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$ colla semplice considerazione seguente. La funzione $\frac{d\psi_1}{dt_1}$, per $t_1 = t^0_1$, si riduce per ipotesi a x'^0_1; tale sarà adunque anche il valore di χ_1, quando si faccia $t_1 = t^0_1$, $x_1 = x^0_1$, $x_2 = x^0_2, \ldots$, $x_n = x^0_n$; $x'_1 = x'^0_1$, $x'_2 = x'^0_2, \ldots$, $x'_n = x'^0_n$: Siccome questa circostanza si presenta comunque si immaginino scelti i valori iniziali delle coordinate e delle velocità (purchè soltanto le x^0 sieno in C e le x'^0 finite e diverse da zero), così la funzione χ_1 deve per $t_1 = t^0_1$ ridursi *identicamente* (quindi anche se tutte le x' sono nulle) all'unità. Ciò esclude manifestamente che $\frac{\chi_1}{x'_1}$ sia sempre zero per $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$. Assodato questo punto, facilmente si conclude che la funzione f della (4') è, nell'intorno di $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$, almeno per qualche valore delle coordinate e del tempo, regolare e diversa da zero. E per verità tale funzione f non differisce dalla $\frac{\chi_1}{x'_1}$, se non perchè (oltre alle x e alle x'), nell'una compare come variabile t, nell'altra t_1: Ove quindi t_1 si possa (anche per valori tutti nulli delle velocità) esprimere in funzione regolare delle x, x' e t, le proprietà già dimostrate per la $\frac{\chi_1}{x'_1}$ si riportano senz'altro alla f.

Ora dalla relazione $\varphi_1 = \psi_1$, t_1 risulta funzione regolare di t, per tutti quei valori di t e delle $x^0_1, \ldots, x^0_n$; $x'^0_1, \ldots, x'^0_n$, che appartengono a C, e per cui resta finito il rapporto $\dfrac{\frac{d\varphi_1}{dt}}{\frac{d\psi_1}{dt_1}}$, cioè non nullo l'altro rapporto $\dfrac{\frac{d\psi_1}{dt_1}}{\frac{d\varphi_1}{dt}}$: Sostituendo al solito per i valori iniziali le loro espressioni, ricavate dalle (1) (1'), potremo anche dire che t_1 è funzione regolare di t e delle $x_1, \ldots, x_n$; $x'_1, \ldots, x'_n$ per tutti i valori di queste quantità, che appartengono a C e non annullano $\frac{\chi_1}{x'_1}$: Ma tale rapporto non è sempre zero per $x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_n = 0$, dunque t_1 si può esprimere, almeno in qualche porzione di C, come funzione delle x, x' e t, regolare nell'intorno di $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$.

Il teorema è così dimostrato.

§ 4. Dimostrazione che in due sistemi corrispondenti le forze devono essere contemporaneamente nulle. Forma della relazione fra t e t_1, quando non agiscono forze. Equazioni, che legano in questo caso, le α_{rs} alle a_{rs}.

Si è visto al § 2 che, sostituendo nel sistema (A_1), $\frac{dt}{f(t;\, x;\, x')}$ al posto di dt_1, si deve ritrovare il sistema (A): Lo stesso può evidentemente affermarsi relativamente ai due sistemi (A'_1) e (A'), e sarà appunto, nell'esprimere questa circostanza, che ci verrà fatta di precisare la forma della funzione f e di stabilire le relazioni fondamentali tra le α_{rs} e le a_{rs}.

Scrivendo le equazioni (A'_1) sotto la forma:

$$\frac{d^2 x_j\, dt_1 - d^2 t_1\, dx_j}{dt_1^3} = \Xi^j - \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \alpha^j_{rs} \frac{dx_r}{dt_1} \frac{dx_s}{dt_1},$$

e, notando che da $d t_1 = \frac{dt}{f}$ segue $-d^2 t_1 = \frac{dt}{f^2} df$, se ne trae agevolmente (qualora si indichino al solito mediante apici le derivazioni rispetto a t):

$$x''_j = \frac{\Xi^j}{f^2} - \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \alpha^j_{rs} x'_r x'_s - x'_j \frac{d \log f}{dt},$$

le quali potranno coincidere colle (A') allora e solo allora che le n relazioni:

$$\left(X^j - \frac{\Xi^j}{f^2}\right) + x'_j \frac{d \log f}{dt} + \sum_{1}^{n}{}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (5)$$

sieno soddisfatte *identicamente,* cioè per ogni sistema di valori delle $2n + 1$ quantità $t;\ x_1, \ldots, x_n,\ x'_1, \ldots, x'_n$.

Supposto (§ 3) di sostituire ad f il suo sviluppo in serie di potenze di $t - t_0$, e, detto f_0 il primo termine di questo sviluppo (che, come sappiamo, nemmeno per valori tutti nulli delle velocità è identicamente nullo) le (5) dovranno in particolare rimanere identità, quando vi si faccia $t = t_0$, cioè $f = f_0$. Esse esprimono allora le condizioni necessarie e sufficienti affinchè si possa passare dal sistema (A_1) al suo corrispondente (A), mediante la trasformazione $d t_1 = \frac{dt}{f_0}$, di guisa che si vede che, ogniqualvolta esiste una trasformazione $d t_1 = \frac{dt}{f_0}$, dove f_0 non contiene il tempo esplicitamente. Basta per conseguenza riferirsi a quest' ultimo caso. Senza trascrivere le (5) col porre $f = f_0$, come equazione di condizione per la corrispondenza fra (A) e (A_1) terremo sempre le (5); *solo f sarà a ritenersi indipendente da t.*

Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato come f sia sviluppabile in serie di potenze delle velocità nell'intorno di $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$ e come il primo termine di questo sviluppo, che chiameremo μ, *non sia identicamente nullo.* Potremo porre pertanto:

$$f = \mu \left\{ 1 + \sum_1^n {}_r c_r x'_r + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} x'_r x'_s + \mathbf{3} \right\},$$

dove le c sono funzioni delle x e si designa per brevità con $\mathbf{k}$ un insieme di termini, almeno d'ordine k (nelle velocità).

Avremo per conseguenza:

$$f^{-1} = \mu^{-1} \left\{ 1 - \sum_1^n {}_r c_r x'_r + \mathbf{2} \right\}$$

$$f^{-2} = \mu^{-2} \left\{ 1 - 2 \sum_1^n {}_r c_r x'_r - \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} x'_r x'_s + 3 \left(\sum_1^n {}_r c_r x'_r \right)^2 + \mathbf{3} \right\}. \tag{6}$$

Derivando rispetto a t l'espressione di f e immaginando di sostituirvi le derivate seconde, mediante i loro valori (A'), si ottiene:

$$\frac{df}{dt} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} x'_r + \mu \left\{ \sum_1^n {}_r c_r X^r + \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} x'_r X^s \right\} + \mathbf{2},$$

la quale, moltiplicata per la precedente $f^{-1} = \mu^{-1} \left\{ 1 - \sum_1^n {}_r c_r x'_r + \mathbf{2} \right\}$, ci dà:

$$\frac{d \log f}{dt} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + \sum_1^n {}_r c_r X^r - \left(\sum_1^n {}_r c_r X^r \right) \left(\sum_1^n {}_r c_r x'_r \right) + \sum_1^n {}_{rs} c_{rs} x'_r X^s + . \mathbf{2} \tag{7}$$

Portando nelle (5), per f^{-2} e $\frac{d \log f}{dt}$ le loro espressioni offerte dalle (6), (7), i termini indipendenti dalle velocità si ridurranno in ciascuna di esse a: $X^j - \Xi^j \mu^{-2}$, talchè, per il carattere identico delle (5) stesse, dovrà essere:

$$\Xi^j = \mu^2 X^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

da cui apparisce, per essere μ diverso da zero, che le X^j e le Ξ^j possono annullarsi solo contemporaneamente; lo stesso può dirsi quindi delle forze $X_i = \sum_1^n {}_{ij}\, a_{ij} X^j$, $\Xi_i = \sum_1^n {}_j\, a_{ij} \Xi^j$, relative a una coppia di sistemi corrispondenti.

Assodato questo punto, cominciamo dal supporre che tutte le forze sieno eguali a zero.

Le (5) danno in questo caso:

$$x'_j \frac{d \log f}{dt} + \sum_1^n {}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0, \tag{5'}$$

e la (7) si riduce a:

$$\frac{d \log f}{dt} = \sum_1^n {}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + \mathfrak{Z},$$

con che la (5') può essere scritta:

$$x'_j \sum_1^n {}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + x'_j \mathfrak{Z} + \sum_1^n {}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0.$$

Vediamo subito che si deve avere separatamente:

$$x'_j \sum_1^n {}_r \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + \sum_1^n {}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0, \tag{5''}$$

è $x'_j \mathfrak{Z} \equiv 0$, cioè $\mathfrak{Z} \equiv 0$.

Dal confronto delle (5') colle (5'') apparisce che le seconde si deducono dalle prime collo scambio di f in μ; esse mostrano quindi come dall'esistenza di una trasformazione $dt_1 = \frac{dt}{f}$ atta a far coincidere il sistema (A_1) col sistema (A) segue necessariamente l'esistenza di una trasformazione $dt_1 = \frac{dt}{\mu}$ dotata della medesima proprietà. Ne viene che le condizioni (5''), le quali a priori ci si presentano soltanto come necessarie (poichè, appena insieme alle $\mathfrak{Z} \equiv 0$, equivalgono alle (5')) sono effettivamente, nell'ipotesi ammessa che manchino le forze, necessarie e sufficienti per la corrispondenza fra i due sistemi (A) ed (A_1).

Le identità (5'') equivalgono alle relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^j_{rs} = a^j_{rs} \qquad (\text{per } j \gtrless r,\ s) \\ &\alpha^r_{rs} = a^r_{rs} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s} \qquad (\text{per } r \gtrless s), \qquad (r,\ s,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n) \\ &\alpha^r_{rr} = a^r_{rr} - \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

le quali, tenuto conto delle espressioni effettive spettanti alle α^j_{rs}, a^j_{rs}, *sono* *precisamente le equazioni differenziali, che legano i coefficienti della forza viva di due sistemi corrispondenti, quando non agiscono forze: Si passa in questo caso dall'uno all'altro di essi mediante la trasformazione* $d t_1 = \frac{dt}{\mu}$, *la funzione* μ *essendo quella stessa, che compare nelle* (8).

§ 5. Sistemi corrispondenti, in cui non tutte le forze sono nulle.

Riprendiamo le equazioni (5), il cui identico sussistere porge nel caso generale la condizione di corrispondenza fra i due sistemi (A) ed (A_1): Ponendo in esse per f^{-2} e $\frac{df}{dt}$ i loro valori (6) e (7) ed esprimendo che si annullano i termini indipendenti dalle velocità, ne abbiamo già ricavato le (8): Ora ci gioverà, tenuto conto delle (8), esprimere che si debbono annullare i termini lineari nelle velocità. Solo quando, a mezzo di queste equazioni, avremo un po' semplificate le (6) e (7), riescirà vantaggiosa la effettiva sostituzione dei valori di f^{-2} e $\frac{df}{dt}$ per dedurre le relazioni definitive.

I termini lineari di una generica (5) sono: $2\,\dot{\Xi}^j \mu^{-2} \sum_1^n {}_r\, c_r x'_r + x'_j \sum_1^n {}_r\, c_r X^r$, e, se usando come s'è detto delle (8), si esprimerà che sono identicamente nulli, avremo:

$$2\,X^j \sum_1^n {}_r\, c_r x'_r + x'_j \sum_1^n {}_r\, c_r X^r \equiv 0, \qquad (j = 1,\, 2, \ldots,\, n),$$

donde:

$$2\,X^j c_r = 0 \qquad (j \gtrless r)$$

$$2\,X^j c_j + \sum_1^n {}_r\, c_r X^r = 0 \qquad (j = 1,\, 2, \ldots,\, n).$$

Siccome non tutte le forze sono nulle, una almeno delle X^j, poniamo X^i dovrà essere differente da zero; ma allora da $X^i c_r = 0\, (i \gtrless r)$, segue che tutte le c_r, ad eccezione forse di c_i, si annullano; dopo ciò le equazioni del secondo gruppo si riducono unicamente a $c_i X^i = 0$, donde $c_i = 0$ e quindi effettivamente le singole c_r sono nulle. Tenendo conto di questa semplificazione, la (6) e la (7) divengono:

$$f^{-2} = \mu^{-2} \left\{ 1 - \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r x'_s + \mathbf{3} \right\} \tag{6'}$$

$$\frac{d \log f}{dt} = \sum_1^n {}_r\, \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x'_r + \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r X^s + \mathbf{2}; \tag{7'}$$

le (5), portandovi ormai questi valori di f^{-2} e $\frac{df}{dt}$, e intendendo sostituite le Ξ^j con $\mu^2 X^j$, si scindono nelle:

$$x'_j \sum_1^n{}_r x'_r \left\{ \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} + \sum_1^n{}_s c_{rs} X^s \right\} + \sum_1^n{}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} + X^j c_{rs} \right\} x'_r x'_s \equiv 0 \qquad (9)$$

$$(j = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

$$x'_j \mathbf{2} - X^j \mathbf{3} \equiv 0,$$

e quest' ultime (si constata agevolmente), equivalgono alla lor volta a:

$$\mathbf{2} \equiv 0, \qquad \mathbf{3} \equiv 0,$$

di guisa che le condizioni necessarie e sufficienti per la corrispondenza fra i sistemi (A) ed (A_1) si trovano ora espresse dalle (9), $\mathbf{2} \equiv 0$, $\mathbf{3} \equiv 0$.

Vogliamo proporci di attribuire ad esse una forma più utile. Cominciamo per ciò dall'osservare che le (6'), (7'), in causa delle $\mathbf{2} \equiv 0$, $\mathbf{3} \equiv 0$, divengono:

$$f^{-2} = \mu^{-2} \left\{ 1 - \sum_1^n{}_{rs} c_{rs} x'_r x'_s \right\} \qquad (10)$$

$$\frac{d \log f}{dt} = \frac{d \log \mu}{dt} + \sum_1^n{}_{rs} c_{rs} x'_r X^s, \qquad (11)$$

e che la funzione f delle $2n$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, definita dalla (10), non soddisfa (come si vedrebbe derivando e rimpiazzando le derivate seconde coi loro valori (A')) identicamente alla (11), per modo che, esprimendo appunto che la (11) è conseguenza della (10), si troverebbero alcune relazioni tra le funzioni c_{rs}, X^s e μ.

D' altra parte, *supposte queste relazioni*, le (9) esprimono precisamente che, per la funzione f definita dalla (10), il cambiamento di variabile $dt_1 = \frac{dt}{f}$ riconduce il sistema (A_1) al sistema (A). Dunque: *l'insieme delle relazioni risultanti dal confronto delle* (10), (11) *e l'identico sussistere delle* (9) *sono condizioni non solo necessarie, ma altresì sufficienti per la corrispondenza fra i sistemi* (A) *ed* (A_1): *Di più si passa da* (A_1) *ad* (A) *mediante il cambiamento di variabile:* $dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2} \left\{ 1 - \sum_1^n{}_{rs} c_{rs} x'_r x'_s \right\}$.

Io non posso ora intrattenermi a stabilire la forma effettiva delle accennate condizioni, volendo dedicare il presente lavoro allo studio dei sistemi corrispondenti privi di forze: Ho voluto però dedurre questo primo risultato, perchè, se, come ebbi ad esprimere il desiderio, mi sarà dato di tornare sull'argomento, potrò addirittura prendere le mosse dalle equazioni (9), (10), (11).

§ 6. Forma invariantiva delle equazioni (8). Integrale quadratico.

Considereremo d'ora innanzi esclusivamente il caso, in cui non agiscono forze.

Una prima conseguenza utile a ricavarsi dalle equazioni (8) è l'espressione della funzione μ, per mezzo dei discriminanti a e α relativi alle forze vive dei due sistemi.

Ricordando le posizioni del § 3, si ha:

$$\alpha^r{}_{rs} = \sum_1^n {}_i\, \alpha^{(ri)} \alpha_{rs,i} = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i\, \alpha^{(ri)} \left\{ \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i} \right\};$$

quindi, sommando rispetto ad r:

$$\sum_1^n {}_r\, \alpha^r{}_{rs} = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{ir}\, \alpha^{(ri)} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{ir}\, \alpha^{(ri)} \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{ir}\, \alpha^{(ri)} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i},$$

e, siccome il secondo e il terzo termine si elidono, così resterà:

$$\sum_1^n {}_r\, \alpha^r{}_{rs} = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{ir}\, \alpha^{(ri)} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \alpha}{\partial x_s};$$

in modo analogo: $\sum_1^n {}_r\, a^r{}_{rs} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log a}{\partial x_s}$, e per conseguenza:

$$\sum_1^n {}_r \left\{ a^r{}_{rs} - \alpha^r{}_{rs} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \log \left(\frac{a}{\alpha} \right).$$

Ora il primo membro, tenendo conto dei due ultimi gruppi delle equazioni (8), si riduce a $\frac{n+1}{2} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s}$, per cui si ottiene:

$$\frac{n+1}{2} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \log \left(\frac{a}{\alpha} \right) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

e da queste:

$$\mu = C \left(\frac{a}{\alpha} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \tag{12}$$

dove C designa una costante arbitraria.

Il valore (12) di μ, quantunque notevole per la sua semplicità, non presenta dal nostro punto di vista un particolare interesse, poichè noi intendiamo di riprendere le (8), come stanno, senza sostituirvi per μ il suo valore; la (12) vi si trova del resto implicitamente compresa.

Prima di passare alla effettiva trasformazione delle equazioni (8), sarà opportuno che io ricordi come, data una forma differenziale quadratica fondamentale $\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ e un sistema qualsiasi

$$A_{r_1 r_2 \ldots r_m}, \quad (r_1, r_2, \ldots, r_m = 1, 2, \ldots, n),$$

(che si dice d'ordine m) di n^m funzioni (distinte o no) dalle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il sistema d'ordine $m+1$:

$$A_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial A_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_{1}^{m}{}_l \sum_{1}^{n}{}_j a^j{}_{r_l r_{m+1}} A_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} j r_{l+1} \ldots r_m}, \tag{Ω}$$

$$(r_1, r_2, \ldots, r_m, r_{m+1} = 1, 2, \ldots, n),$$

venne chiamato dal prof. Ricci (*) *derivato covariante del primo, secondo la forma fondamentale* φ: L'operazione, per cui da un sistema d'ordine m $A_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ si passa al sistema $A_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ d'ordine $m+1$, definito da (Ω), dicesi *derivazione covariante secondo* φ (rispetto alla generica variabile $x_{r_{m+1}}$); *essa possiede le caratteristiche esteriori della derivazione ordinaria (in quanto ciascuna funzione di qualunque sistema dà luogo a n derivate) e, come ha mostrato il prof.* Ricci *anche tutte le proprietà algoritmiche, tranne la permutabilità degli indici, cioè delle derivazioni.*

Segue in particolare dalle (Ω) che, se il sistema si riduce ad un'unica funzione μ, le sue derivate covarianti μ_r coincidono colle derivate ordinarie $\frac{\partial \mu}{\partial x_r}$; di più, derivando covariantemente il sistema μ_r, non si trovano in generale le derivate seconde ordinarie della funzione μ, ma valgono però le relazioni $\mu_{rs} = \mu_{sr}$.

Si ha, per le derivate covarianti α_{rst} (da non confondersi colle $\alpha_{rs,t}$) di un sistema doppio α_{rs}:

$$\alpha_{rst} = \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_t} - \sum_{1}^{n}{}_j \left\{ a^j{}_{rt}\, \alpha_{js} + a^j{}_{ts}\, \alpha_{rj} \right\}, \tag{Ω'}$$

(*) Veggasi in particolare il suo *Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique.* Bulletin des Sciences Mathématiques, 1892.

le quali, applicate al caso speciale dei coefficienti di φ, permetterebbero dopo facile calcolo di concludere che le loro derivate covarianti sono identicamente nulle.

Questo breve richiamo ci pone in grado di adoperare con maggior disinvoltura talune denominazioni e taluni procedimenti, che non sono forse finora, come sarebbe desiderabile, divenuti abbastanza d'uso comune.

Intenderemo assunta come forma fondamentale φ la

$$ds^2 = 2\,T\,dt^2 = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

e designeremo talvolta ancora con φ una qualunque varietà, di cui

$$\varphi = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

rappresenti il quadrato dell'elemento lineare.

Ritenuto ciò, notiamo che dalle posizioni del § 3 si ricava senza difficoltà:

$$\alpha_{rt,s} + \alpha_{ts,r} = \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_t}$$

$$\alpha_{rt,s} = \sum_1^n{}_j\, \alpha^j{}_{rt}\, \alpha_{js}$$

$$\alpha_{st,r} = \sum_1^n{}_j\, \alpha^j{}_{st}\, \alpha_{rj},$$

e quindi:

$$\frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n{}_j \left\{ \alpha^j{}_{rt}\, \alpha_{js} + \alpha^j{}_{st}\, \alpha_{rj} \right\} = 0.$$

Se in queste identità si sostituiscono per $\alpha^j{}_{rt}$ e $\alpha^j{}_{st}$ i loro valori offerti dalle (8), si trae (*):

$$\frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n{}_j \left\{ a^j{}_{rt}\, \alpha_{js} + a^j{}_{st}\, \alpha_{rj} \right\} + \alpha_{rs} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_t} + \frac{1}{2} \alpha_{rt} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s} + \frac{1}{2} \alpha_{ts} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} = 0,$$

ossia, in virtù delle (Ω') e di osservazioni fatte testè:

$$\mu\, \alpha_{rst} + \mu_t\, \alpha_{rs} + \frac{1}{2} \left\{ \mu_r\, \alpha_{ts} + \mu_s\, \alpha_{rt} \right\} = 0, \qquad (r,\ s,\ t = 1,\ 2, \ldots,\ n). \qquad (13)$$

(*) Nell'eseguire la sostituzione, conviene considerare separatamente i vari casi: r ed s entrambi diversi da t; $r = t$, ma $s \gtrless t$, o viceversa; $r = s = t$. Il risultato si può però sempre rappresentare mediante la formula sopra riportata.

Queste equazioni di forma invariantiva equivalgono completamente alle (8), perchè seguono da esse, sono in egual numero e certamente indipendenti, in quanto porgono tutte le derivate prime delle α_{rs} definite per mezzo delle α_{rs} stesse, della funzione ausiliaria μ e, si intende, dei coefficienti della forma fondamentale. Del resto dalle (13) si può immediatamente risalire alle (8).

Le (13), moltiplicate per μ, ricordando quanto si è detto circa i calcoli con derivate covarianti, possono essere scritte:

$$(\mu^2 \alpha_{rs})_t + \frac{1}{2}\left\{\mu^2 \alpha_{ts}\frac{\mu_r}{\mu} + \mu^2 \alpha_{rt}\frac{\mu_s}{\mu} - \mu^2 \alpha_{rs}\frac{\mu_t}{\mu}\right\} = 0,$$

ovvero, col porre $\mu^2 \alpha_{rs} = A_{rs}$:

$$A_{rst} + \frac{1}{2}\left\{A_{ts}\frac{\mu_r}{\mu} + A_{rt}\frac{\mu_s}{\mu} - A_{rs}\frac{\mu_t}{\mu}\right\} = 0;$$

eseguendo sugli indici r, s, t le due permutazioni circolari $\begin{pmatrix} s\,t\,r \\ r\,s\,t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t\,r\,s \\ r\,s\,t \end{pmatrix}$ e sommando le equazioni relative, si ottiene:

$$A_{rst} + A_{str} + A_{trs} = 0, \tag{14}$$

le quali ci dicono che il sistema A_{rst}, derivato covariante di A_{rs} secondo φ, è *emisimmetrico*, e quindi (*) che:

$$\sum_1^n{}_{rs} A_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}$$

è un integrale primo per il sistema (A).

Di qua il teorema (**):

Se un sistema (A) *privo di forze ammette un corrispondente* (A_1), *la cui forza viva sia*: $T_1 = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} \bar{x}'_r \bar{x}'_s$, *l'equazione* $\sum_1^n{}_{rs} A_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}$, *cioè per la* (12):

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.},$$

porge un integrale primo per il sistema (A).

È manifesto che, assumendo a forma fondamentale $ds_1^2 = \sum_1^n{}_{rs} \alpha_{rs} dx_r dx_s$,

---

(*) Cfr. la mia Nota: *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche.*

(**) Painlevé, Mem. cit., pag. 43.

si troverebbe in modo analogo l'integrale primo:

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\,\overline{x}'_r\,\overline{x}'_s = \text{cost.},$$

per il sistema (A_1).

Possiamo aggiungere col sig. PAINLÉVÉ che, se (A_1) *non è un corrispondente ordinario di* (A), se cioè le α_{rs} *non* hanno la forma $\alpha_{rs} = C a_{rs}$, (con C costante), l'integrale $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \alpha_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}$, è certamente distinto dall'integrale delle forze vive $\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}$ Basta osservare perciò che, qualora questi due integrali coincidessero, dovrebbe essere $a_{rs} = C_1 \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \alpha_{rs}$ (con C_1 costante), da cui: $a = C_1^n \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2n}{n+1}} \alpha$; ossia sarebbe costante $\frac{a}{\alpha}$ e quindi costanti altresì i singoli rapporti $\frac{\alpha_{rs}}{a_{rs}}$.

Non sarà inopportuno avvertire che i risultati di questo paragrafo e alcune altre osservazioni (*), ommesse per brevità, si potranno a suo tempo ricavare come ovvie conseguenze della riduzione a tipi delle coppie di sistemi corrispondenti.

§ 7. Considerazioni algebriche sul sistema di due forme quadratiche.

Associamo ai coefficienti a_{rs} della nostra forma fondamentale φ un altro sistema di funzioni α_{rs} parimenti doppio e simmetrico, come ad esempio (sarà, si prevede, il caso, cui dovremo più innanzi riferirci) i coefficienti della forza viva T_1.

L'equazione:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \rho a_{11} & \alpha_{12} - \rho a_{12} \dots & \alpha_{1n} - \rho a_{1n} \\ \alpha_{21} - \rho a_{21} & \alpha_{22} - \rho a_{22} \dots & \alpha_{2n} - \rho a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} - \rho a_{n1} & \alpha_{n2} - \rho a_{n2} \dots & \alpha_{nn} - \rho a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad (15)$$

(*) PAINLÉVÉ, Mem. cit., pag. 43.

ammette, come si sa, per essere positiva la forma quadratica $\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$, n radici essenzialmente reali $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, che possono però non essere tutte distinte: Comunque, corrispondentemente ad ogni radice semplice ρ_h della (15), esiste uno ed un solo sistema $\lambda_h^{(s)} (s = 1, 2, \ldots, n)$, che soddisfa alle equazioni lineari ed omogenee:

$$\sum_1^n {}_s (\alpha_{rs} - \rho\, a_{rs}) z_s = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

e di più alla condizione:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, z^r z^s = 1.$$

Se invece alcune ρ, poniamo $\rho_{q_1}, \rho_{q_2}, \ldots, \rho_{q_m}$, in numero di m, coincidono tra loro ed hanno il valore comune σ, considerando ancora il sistema di equazioni lineari $\sum_1^n {}_s (\alpha_{rs} - \rho\, a_{rs}) z^s = 0$, sempre per essere positiva la forma φ, si può stabilire (*) che esso, quando vi si faccia $\rho = \sigma$, ammette m sistemi $z_i^s (i = 1, 2, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots, n)$ di soluzioni indipendenti. Ne viene che anche le:

$$\lambda_h^{(s)} = \sum_1^m {}_i\, \delta_{hi}\, z_i^s, \qquad (h = q_1, q_2, \ldots, q_m),$$

(dove le δ sono quantità arbitrarie a determinante non nullo) porgono m sistemi di soluzioni indipendenti ed è chiaro che le δ si possono (e in $\infty^{\frac{m(m-1)}{2}}$ modi) prendere in maniera che le $\lambda_h^{(s)}$ soddisfacciano alle $\frac{m(m+1)}{2}$ condizioni:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} = \varepsilon_{hk}, \qquad (h, k = q_1, q_2, \ldots, q_m),$$

dove il simbolo ε_{hk} rappresenta lo zero o l'unità, secondochè gli indici h e k sono distinti, o coincidono.

Supponendo di fissare effettivamente per le δ un sistema qualunque (ma determinato una volta per sempre) di valori, che verifichino le accennate condizioni, e intendendo di ripetere la stessa cosa per ogni radice multipla

(*) Weierstrass, *Ueber ein Theorem die homogenen Functionen der 2ten Grades betreffend, ecc.* Monatsberichte der Ak. zu Berlin, 1858, pag. 207.

della (15), ci troveremo infine a possedere n sistemi semplici di funzioni $\lambda_h^{(s)}$ $(h = 1, 2, \dots, n;\ s = 1, 2, \dots, n)$ tali che:

1.° Ciascun sistema $\lambda_h^{(s)}$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, per $\rho = \rho_h$, soddisfa alle equazioni (16).

2.° Si hanno le relazioni simultanee:

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \lambda_h^{(s)} \lambda_k^{(r)} = \varepsilon_{hk}, \qquad (h,\ k = 1, 2, \dots, n). \tag{17}$$

Quest' ultima asserzione è giustificata da condizioni imposte esplicitamente alle λ, quando $h = k$ e quando h e k sono indici di radici coincidenti; se poi h e k corrispondono a due radici distinte della (15), allora si mostra, come di solito, che $\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \lambda_h^{(s)} \lambda_k^{(r)} = 0$, partendo dalle:

$$\sum_1^n {}_s (\alpha_{rs} - \rho_h a_{rs}) \lambda_h^{(s)} = 0$$

$$\sum_1^n {}_s (\alpha_{rs} - \rho_k a_{rs}) \lambda_k^{(s)} = 0,$$

e sottraendole l'una dall'altra, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\lambda_k^{(r)}$, $\lambda_h^{(r)}$ e sommate rispetto all'indice r.

Pongasi ora:

$$\lambda_{h|r} = \sum_1^n {}_s\, a_{rs} \lambda_h^{(s)}; \qquad (h,\ r = 1, 2, \dots, n), \tag{18}$$

potremo scrivere le (17) sotto la forma:

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_k^{(r)} \lambda_{h|r} = \varepsilon_{hk}, \qquad (h,\ k = 1, 2, \dots, n), \tag{17'}$$

da cui si deduce in primo luogo che il determinante:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & \lambda_1^{(n)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \lambda_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{(1)} & \lambda_n^{(2)} & \lambda_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

non è zero e quindi che le $\lambda_{h|r}$, testè definite, sono gli elementi reciproci (*) delle $\lambda_h^{(r)}$ in Λ.

(*) Cioè i minori complementari divisi pel valore del determinante.

Ne consegue che, insieme alle (17′), sussistono pure le relazioni:

$$\sum_1^n{}_h \lambda_h^{(s)} \lambda_{h|r} = \varepsilon_{rs}, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{17''}$$

le quali, confrontate colle (18), danno:

$$a_{rs} = \sum_1^n{}_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|s}, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{18'}$$

e permettono di ricavare dalle (16) le:

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n{}_h \rho_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|s}\ (*), \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n). \tag{16'}$$

Quest'ultimo gruppo di equazioni costituirà il nostro punto di partenza per l'ulteriore trasformazione del sistema (13). Occorre tuttavia qualche sviluppo preliminare, inteso ad introdurre quegli elementi geometrici, che ci saranno precipuo mezzo di indagine.

§ 8. Cenno di una interpretazione geometrica nel campo differenziale (**).

Gli n sistemi di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dx_1}{\lambda_h^{(1)}} = \frac{dx_2}{\lambda_h^{(2)}} = \cdots = \frac{dx_n}{\lambda_h^{(n)}}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

definiscono nella varietà φ altrettante congruenze di linee, ciascuna delle quali si può perciò risguardare individuata dal sistema di funzioni $\lambda_h^{(r)} (r = 1, 2, \ldots, n)$ o, ciò, che è poi lo stesso, in causa delle (18), dal sistema $\lambda_{h|r} (r = 1, 2, \ldots, n)$, che chiameremo *sistema coordinato covariante della congruenza stessa.* Le (17) esprimono che *le n congruenze, così introdotte, sono ortogonali fra loro nella varietà φ.*

(*) Avremmo potuto dedurre immediatamente le formule (16′) e (18′) da note proposizioni di Weierstrass sull'equivalenza dei sistemi di forme quadratiche; abbiamo tuttavia preferita una concisione minore, per mettere in evidenza il legame tra le λ e l'equazione (15).

(**) Le nozioni sommarie di questo paragrafo (limitate a quanto ci parve indispensabile per l'intelligenza dei successivi) sono tolte per intero dalla Nota del prof. Ricci *Sulla teoria degli iperspazii,* accennata già nell'introduzione.

Per poterne rilevare i caratteri geometrici più salienti (curvature, torsioni, ecc.), conviene però prendere in esame anche i differenziali di secondo ordine, e quindi le derivate delle funzioni λ. Ciò si farà nel modo migliore, derivando covariantemente ciascun sistema $\lambda_{h|r}$ e ponendo:

$$\lambda_{h|rs} = \sum_1^n {}_{ij}\, \gamma_{hij}\, \lambda_{i|r}\, \lambda_{j,s}, \qquad (h,\ r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n), \qquad (19)$$

la qual cosa è certamente possibile, perchè (in causa delle (17')) le (19) equivalgono a:

$$\gamma_{hij} = \sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_{h|rs}\, \lambda_i^{(r)}\, \lambda_j^{(s)}, \qquad (h,\ i,\ j = 1\,,\ 2, \ldots,\ n). \qquad (19')$$

Le n^3 funzioni γ si riducono a $n\, \frac{n(n-1)}{2}$ algebricamente distinte, poichè, derivando le (17) (o se si vuole le (17')), che sono in numero di $\frac{n(n+1)}{2}$, scaturiscano $n\, \frac{n(n+1)}{2}$ relazioni, che legano le $\lambda_{h|r}$, $\lambda_{h|rs}$, e quindi le $\lambda_{h|r}$ alle γ.

Queste relazioni tra le γ si possono stabilire immediatamente, applicando, secondo i cánoni del calcolo differenziale assoluto (*), la derivazione covariante alle (17'), e confrontando colle (19). Si trova (appunto per il modo felice, con cui le γ vennero scelte) la forma semplicissima:

$$\gamma_{hkj} + \gamma_{khj} = 0, \qquad (20)$$

da cui in particolare:

$$\gamma_{hhj} = 0.$$

Le γ hanno ciascuna un significato cinematico molto notevole, che io lascierò tuttavia di rilevare, non dovendone far uso. Per lo scopo nostro ha invece importanza capitale la proposizione seguente:

Affinchè la congruenza $\lambda_{h|r}\,(r = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ *sia normale, affinchè cioè le linee della congruenza sieno le traiettorie ortogonali di una famiglia di superfici* (ad $n-1$ dimensioni della varietà φ) *è necessario e basta che sieno soddisfatte le* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *condizioni:*

$$\gamma_{hkj} = \gamma_{hjk}, \qquad (j,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ h-1\,,\ h+1, \ldots,\ n).$$

(*) Ricci, *Résumé, etc.*, o, per maggior dettaglio: *Di alcune applicazioni del calcolo differenziale assoluto.* Atti dell'Istituto Veneto, 1893.

Ommetteremo anche la dimostrazione di questo teorema, per non dilungarci soverchiamente in particolari, solo indirettamente collegati colla nostra ricerca; notiamo piuttosto il corollario:

Se le condizioni $\gamma_{hkj} = \gamma_{hjk}(j,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ h-1,\ h+1, \ldots,\ n)$ *sono soddisfatte per qualunque valore di h, nella quale ipotesi, a causa delle* (20), *le* γ *con tre indici distinti sono tutte nulle, le n congruenze* $\lambda_{h|r}$ *risultano dalle mutue intersezioni di un sistema ennuplo ortogonale di superficî.*

§ 9. Trasformazione delle equazioni (13). Classificazione delle coppie di sistemi corrispondenti.

Come abbiamo già accennato, prenderemo le mosse dalle equazioni (16'): Derivandole covariantemente e designando con $\rho_{h|t}(t = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ le derivate (covarianti o, se si vuole, ordinarie) della funzione ρ_h, si trae:

$$\alpha_{rst} = \sum_1^n {}_h \left\{ \rho_{h|t} \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} + \rho_h \lambda_{h|rt} \lambda_{h|s} + \rho_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|st} \right\},$$

cioè, approfittando delle (19):

$$\alpha_{rst} = \sum_1^n {}_h \rho_{h|t} \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} + \sum_1^n {}_{hij} \rho_h \gamma_{hij} \lambda_{h|s} \lambda_{i|r} \lambda_{j|t} + \sum_1^n {}_{hij} \rho_h \gamma_{hij} \lambda_{h|r} \lambda_{i|s} \lambda_{j|t}.$$

Se ora si portano nelle (13) questi valori delle α_{rst} e si sostituiscono parimenti alle α_{rs} le loro espressioni (16'), si ottiene il sistema di equazioni:

$$\mu \left\{ \sum_1^n {}_h \rho_{h|t} \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} + \sum_1^n {}_{hij} \rho_h \gamma_{hij} \lambda_{h|s} \lambda_{i|r} \lambda_{j|t} + \sum_1^n {}_{hij} \rho_h \gamma_{hij} \lambda_{h|r} \lambda_{i|s} \lambda_{j|t} \right\} +$$
$$+ \mu_t \sum_1^n {}_h \rho_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} + \frac{1}{2} \left\{ \mu_r \sum_1^n {}_h \rho_h \lambda_{h|t} \lambda_{h|s} + \mu_s \sum_1^n {}_h \rho_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|t} \right\} = 0,$$

apparentemente molto complicato, ma che, a mezzo delle (17'), si riconduce, con calcoli ovvii, alla comoda forma seguente:

$$\left.\begin{array}{lr}
(\rho_h - \rho_i)\gamma_{hij} = 0 \quad \text{(per ogni terna } h,\ i,\ j \text{ di indici distinti)} & (21) \\
(\rho_i - \rho_j)\gamma_{iji} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_1^n {}_r \frac{\partial \rho_i}{\partial x_r} \lambda_j^{(r)} \quad \text{(per ogni coppia } i,\ j \text{ di indici distinti)} & (22) \\
\qquad\qquad (h,\ i,\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n) & \\
\displaystyle\sum_1^n {}_r \frac{\partial(\mu \rho_i)}{\partial x_r} \lambda_j^{(r)} = 0 \quad \text{(per ogni coppia } i,\ j \text{ di indici distinti)} & (23) \\
\displaystyle\sum_1^n {}_r \frac{\partial(\mu \rho_i)}{\partial x_r} \lambda_i^{(r)} = -\rho_i \sum_1^n {}_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \lambda_i^{(r)}. & (24)
\end{array}\right\} \text{(E)}$$

Le (21), tenuto conto delle (20), sono $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ distinte, le (22) $n(n-1)$, altrettante le (23), infine le (24) sono n, onde complessivamente abbiamo $\frac{n(n+1)}{2}n$ equazioni, il cui numero coincide intanto con quello delle equazioni (13); non solo, ma il sistema complessivo delle equazioni (E) equivale completamente alle equazioni (13), poichè, come queste, esprime le condizioni necessarie e sufficienti, per la corrispondenza dei due sistemi (A) ed (A_1). E per verità, qualora le a_{rs} e le α_{rs}, che sono gli elementi del problema primitivo, in numero di $n(n+1)$, si risguardino, a tenore delle (16′) e (18′), sostituite dalle ρ_h, $\lambda_{h|r}$ $\Big($che sono $n+n^2$, ma legate dalle $\frac{n(n+1)}{2}$ relazioni (17)$\Big)$, e ci si proponga di tradurre in equazioni differenziali tra le ρ e le λ le condizioni di corrispondenza tra i sistemi (A) ed (A_1), si è naturalmente condotti ad adottare il procedimento, testè seguito, e si perviene quindi al sistema (E). D'altra parte poi, ammesse le equazioni (E), si può risalire via via fino alle (13), onde effettivamente i due sistemi si equivalgono, ma si ha per le (E) il duplice vantaggio di una semplicità notevolmente maggiore e di una forma, che meglio si presta all'interpretazione geometrica.

Accingiamoci ormai a classificare le coppie di sistemi corrispondenti.

Assumeremo come criterio di classificazione il numero di radici distinte, possedute dall'equazione (15); si vedrà a suo tempo che questo criterio riesce giustificato da un carattere saliente, proprio di tutte le coppie, per cui l'equazione in ρ ammette uno stesso numero di radici distinte.

Più precisamente converremo di dire che due sistemi corrispondenti (A) ed (A_1) appartengono alla classe o tipo t_m), se l'equazione (15) ad essi relativa possiede $n-m+1$ radici distinte.

Uno sguardo alle equazioni (E) (e più particolarmente alle (21)) ci avverte di questa circostanza notevole che il loro numero non è costante, ma varia da tipo a tipo, anzi più generalmante nell'ambito di ciascun tipo, secondo il modo, con cui sono aggruppate le radici multiple dell'equazione (15). Difatti, quelle tra le (21), che si riferiscono a coppie di radici coincidenti riescono soddisfatte identicamente, quelle invece, che si riferiscono a coppie di radici distinte, portano l'annullarsi delle corrispondenti γ.

Sembrerebbe da ciò che fosse necessario, per lo studio del sistema (E), di considerare separatamente ogni singolo caso; potremo limitarci tuttavia all'esame particolareggiato del tipo t_1) (§ 10) e di una sottoclasse assai semplice del tipo generale t_m) (§ 11), poichè, dopo questi esempi, anche senza sviluppi prolissi e poco istruttivi, si coglie nettamente il risultato definitivo.

§ 10. Sistemi corrispondenti di tipo t_1). Forma canonica. Deduzione degli n integrali quadratici da essi posseduti.

Sieno le n radici $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ dell'equazione (15) tutte diseguali: Le (21) esprimono allora che le singole γ con tre indici distinti sono nulle e quindi (§ 8) che le congruenze $\lambda_{h/r}$ sono normali nella varietà φ. L'esistenza di questa speciale ennupla di famiglie ortogonali di superficie fa sorgere spontaneo il pensiero di servirsene come sistema di riferimento, per indagare a quali sue caratteristiche conduca l'ipotesi della corrispondenza fra (A) ed (A_1). Noi vedremo che, rispetto a quest'ennupla di superficie, il ds^2 di φ e così pure il $ds_1^2 = 2\, T_1\, d t_1^2$ posseggono una forma molto particolare; inoltre che reciprocamente, ammessa la riducibilità di ds e di ds_1 a quella forma, i due sistemi (A) ed (A_1) riescono corrispondenti. Ne verrà che siffatte espressioni degli elementi lineari si potranno risguardare come canoniche per le coppie di sistemi corrispondenti di tipo t_1), nel senso che tutti e soli i ds, ds_1, riducibili simultaneamente (mediante una scelta conveniente del sistema coordinato, cioè mediante un cambiamento di variabili) a quelle forme, saranno tra loro corrispondenti.

Si immagini pertanto di assumere come sistema di riferimento l'ennupla ortogonale sopra menzionata; in luogo dell'espressione generale

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, d x_r\, d x_s\,,$$

per la forma fondamentale φ, avremo in questo caso più semplicemente:

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, H_i^2\, d x_i^2\,;$$

di più, siccome le linee $\lambda_{h/r}$ coincidono colle intersezioni delle superficie coordinate $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_{h-1} = 0,\ x_{h+1} = 0, \ldots,\ x_n = 0$, così, tenuto conto delle equazioni differenziali (§ 8), che definiscono la congruenza e delle (17), troveremo immediatamente:

$$\lambda_h^{(r)} = \frac{\varepsilon_{hr}}{H_h}, \qquad (h, r = 1, 2, \ldots, n),$$

e quindi, per le (18):

$$\lambda_{h|r} = \varepsilon_{hr} H_h, \qquad (h, r = 1, 2, \ldots, n).$$

Derivando covariantemente queste espressioni delle $\lambda_{h|r}$ rispetto alla forma fondamentale φ (che è ora $\sum_1^n {}_i H_i^2 dx_i^2$) e calcolando le γ per mezzo delle (19'), si può intanto verificare che, come è necessario per le premesse, le γ con tre indici distinti sono tutte nulle e si ottiene poi subito:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \qquad (i \gtrless j).$$

Dopo ciò, il primo gruppo delle (E) riesce identicamente soddisfatto e gli altri divengono ordinatamente:

$$(\rho_i - \rho_j) \frac{\partial \log H_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (i \gtrless j) \tag{22$_1$}$$

$$\frac{\partial (\mu \rho_i)}{\partial x_j} = 0 \qquad (i \gtrless j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{23$_1$}$$

$$\frac{\partial (\mu \rho_i)}{\partial x_i} = -\rho_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i}. \tag{24$_1$}$$

Se si nota che, in causa delle (16'), la espressione del ds_1^2 del sistema (A_1), rispetto all'ennupla ortogonale, cui ora ci riferiamo, è:

$$ds_1^2 = \sum_1^n {}_i \rho_i H_i^2 dx_i^2,$$

potremo dire che le (22$_1$), (23$_1$), (24$_1$) determinano quali relazioni (per una conveniente scelta delle superficie coordinate) debbono passare fra i coefficienti delle forze vive di due sistemi (A) ed (A_1), affinchè essi appartengono al tipo t_1).

Le equazioni, scritte or ora, si integrano senza difficoltà; in primo luogo le (23$_1$) equivalgono a:

$$\mu \rho_i = \frac{1}{\psi_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{23'$_1$}$$

designandosi con ψ_i una funzione della sola variabile x_i (*); mediante le ($23'_1$), si ha poi dalle (24_1):

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x_i} = \frac{\partial \log \psi_i}{\partial x_i},$$

ossia:

$$\mu = \frac{\psi_1 \cdot \psi_2 \dots \psi_n}{C}, \tag{$24'_1$}$$

con C costante.

Per integrare le (22_1), sostituiamovi al posto di ρ_i, ρ_j i loro valori

$$\frac{C}{\psi_i(\psi_1 \cdot \psi_2 \dots \psi_n)}, \qquad \frac{C}{\psi_j(\psi_1 \cdot \psi_2 \dots \psi_n)};$$

esse diverranno:

$$(\psi_j - \psi_i)\frac{\partial \log H_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} = 0,$$

da cui:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log (\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j} \text{ (**)},$$

e per conseguenza:

$$H_i^2 = F_i \prod_1^n{}'_j (\psi_j - \psi_i),$$

dove F_i rappresenta una funzione della sola x_i e nel fattoriale $\prod_1^n{}'_j$ si esclude il valore i dell'indice j. Non sarà male osservare che, essendo H_i^2 quantità essenzialmente positiva, lo stesso deve accadere del prodotto $F_i \prod_1^n{}'_j (\psi_j - \psi_i)$ e che quindi si può senz'altro attribuirgli la forma:

$$H_i^2 = V_i^2 \prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|,$$

(*) Per la natura del problema, che noi studiamo, è lecito scrivere $\frac{1}{\psi_i}$, senza lasciarci sfuggire alcun caso particolare. Infatti il prodotto $\mu \rho_i$ è essenzialmente diverso da zero, poichè nè $\mu = \frac{dt}{dt_1}$, nè ρ_i possono annullarsi (quest'ultima in quanto il termine noto della (15) è $\alpha > 0$).

(**) Passando dalla formula precedente a questa, abbiamo potuto dividere senza riserve per $\psi_j - \psi_i$, poichè, nel caso, che ora consideriamo, tutte le radici sono diseguali e, per le ($23'_1$), da $\rho_i \gtrless \rho_j$ segue necessariamente $\psi_i \gtrless \psi_j$.

essendo evidentemente $V_i^2 = \pm F_i$, secondochè il prodotto $\overset{n}{\underset{1}{\Pi'}}_j(\psi_j - \psi_i)$ è positivo o negativo.

Se si immagina di eseguire nei parametri x_i delle superficie coordinate la trasformazione: $\xi_i = \int V_i dx_i$ e si ripone poi x_i e dx_i per ξ_i e $d\xi_i$, si perviene agevolmente alla conclusione che agli elementi lineari ds, ds_1 di due sistemi (A), (A$_1$) corrispondenti di tipo t_1) è possibile attribuire simultaneamente le espressioni:

$$ds^2 = \sum_1^n{}_i \left(\overset{n}{\underset{1}{\Pi'}}_j \mid \psi_j - \psi_i \mid\right) dx_i^2, \tag{25}$$

$$ds_1^2 = \frac{C}{\psi_1 \cdot \psi_2 \dots \psi_n} \sum_1^n{}_i \frac{1}{\psi_i} \left(\overset{n}{\underset{1}{\Pi'}}_j \mid \psi_j - \psi_i \mid\right) dx_i^2. \tag{26}$$

D'altra parte poi, se i coefficienti delle (25) (26) si sostituiscono nelle originarie equazioni di condizione (8) (cfr. § 4), si prova nel modo più spiccio che due sistemi (A) (A$_1$), i cui elementi lineari sieno riducibili alle forme (25) (26), sono corrispondenti (e, si intende, di tipo t_1)). Dunque le espressioni (25) (26) sono canoniche e si può, nel caso considerato, riportare ad esse esclusivamente lo studio dei sistemi corrispondenti.

Una prima circostanza degna di nota è che, per ogni forza viva del tipo (25) $T = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \left(\overset{n}{\underset{1}{\Pi'}}_j \mid \psi_j - \psi_i \mid\right) x'^2_i$, le equazioni delle geodetiche (A) (e quindi analogamente le (A')) si sanno integrare per sole quadrature col metodo classico della separazione delle variabili.

Altro fatto, che vogliamo porre in rilievo si è che, dato un ds della forma (25), le funzioni ψ si possono ritenere determinate *solo a meno di una costante additiva* c, talchè, quando si vogliono invece considerare le ψ come funzioni completamente individuate, le (25) (26) vanno interpretate come segue: *Per la corrispondenza di tipo* t_1) *fra* (A) *ed* (A$_1$) *è necessario e basta che i rispettivi* ds, ds_1 *equivalgano* (cioè sieno riconducibili mediante trasformazione di variabili) *a:*

$$ds^2 = \sum_1^n{}_i \left(\overset{n}{\underset{1}{\Pi'}}_j \mid \psi_j - \psi_i \mid\right) dx_i^2, \tag{25}$$

$$ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)(\psi_2 + c)\dots(\psi_n + c)} \sum_1^n{}_i \frac{1}{\psi_i + c} \left(\overset{n}{\underset{1}{\Pi'}}_j \mid \psi_j - \psi_i \mid\right) dx_i^2, \tag{26'}$$

dove le ψ sono funzioni della sola variabile accennata dall'indice, C e c costanti arbitrarie (*).

Questa osservazione che ogni ds della forma (25) ammette come corrispondenti tutti i ds_1, che rientrano nel tipo (26'), *qualunque sia il valore della costante c*, reca immediatamente una conseguenza importante per *ogni* coppia di sistemi corrispondenti t_1), permettendo di stabilire per ciascuno di essi la esistenza di n integrali quadratici distinti.

Si ricordi a tale proposito (§ 6) che in generale:

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \alpha_{rs}\, x'_r\, x'_s = \text{cost.},$$

è un integrale primo del sistema (A), onde, applicando il teorema al caso presente, si può senz'altro asserire che, *per ogni valore di c*, l'equazione:

$$\sum_{1}^{n}{}_i (\psi_1 + c)\ldots(\psi_{i-1} + c)(\psi_{i+1} + c)\ldots(\psi_n + c)\left(\Pi_{1}^{n}{}'_j \,|\psi_j - \psi_i|\right) x'^2_i = \text{cost.},$$

è integral primo del sistema (A).

Ne viene che i coefficienti delle singole potenze di c sono costanti ciascuno separatamente e quindi dan luogo ad altrettanti integrali: Entrando la c al grado $n - 1$, nascono così n integrali quadratici, i quali, come si può verificare, per essere le ψ tutte distinte, sono effettivamente tra loro indipendenti.

Riassumendo adunque, le coppie di sistemi corrispondenti di tipo t_1) sono caratterizzate dalla riducibilità dei loro elementi lineari alle forme canoniche (25) (26'); ciascuno dei due sistemi possiede n integrali quadratici indipendenti: Inoltre, per ogni dato sistema (A), se ne possono trovare tutti i corrispondenti (A_1) di tipo t_1), poichè, determinate, quando esistono, tutte le forme (25) (che si possono chiamare *forme generalizzate di* Liouville), di

(*) Le forme (25) (26') di due sistemi corrispondenti sono già state considerate a titolo di esempio dal signor R. Liouville nella Memoria citata e dai signori G. Di Pirro e G. Picciati nelle Note: *Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica,* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1895; e *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica in alcuni casi particolari,* Atti dell'Ist. Veneto, 1896: Tutti e tre questi autori arrivano alle forme (25) (26'), studiando il caso particolare della corrispondenza fra due sistemi ortogonali (chiamando così due (A), (A_1), le cui forze vive contengono soltanto i quadrati delle velocità). Il punto di vista, sotto cui noi le abbiamo ritrovate, è manifestamente molto più generale.

cui è suscettibile l'elemento lineare ds del sistema proposto (A), per ciascuna di esse, la (26') porge in modo esplicito tutti i ds_1 corrispondenti e mostra che essi dipendono da due costanti arbitrarie.

Resterebbe a studiare quante e quali forme di LIOUVILLE competono effettivamente ad una data varietà secondo la natura del suo elemento lineare, problema, che, per $n=2$, è stato risoluto completamente dal prof. RICCI (*), e per la cui trattazione si hanno oramai nel sistema (E) i necessari elementi.

Non è però nostro proposito di imprendere ricerche di tal natura, perciocchè, malgrado il loro grande interesse e la natura, quasi direi, più intrinseca, rimangono estranee all'intento, che noi abbiamo di mira. È infatti ben naturale, come ho avvertito fin da principio, che si debba ritenere risoluto un problema concernente la trasformazione di equazioni dinamiche, ogniqualvolta lo si sia ricondotto a questioni concrete dell'ordinaria teoria delle forme differenziali quadratiche.

§ 11. Sistemi corrispondenti di tipo $t_m)$ in un caso particolare.

Nell'ipotesi che le radici dell'equazione (15) si riducano a $n-m+1$ fra loro distinte, vi è ancora un carattere da prendere in considerazione, il modo cioè, con cui sono distribuite le molteplicità delle radici stesse. Noi vogliamo ora riferirci con qualche dettaglio al caso più semplice, quello cioè, in cui $n-m$ tra le radici, poniamo $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-m}$ sono semplici e quindi

(*) Non sarà forse superfluo di rilevare in qual modo i risultati di questo autore esauriscano, per $n=2$, il problema della conservazione delle geodetiche.

Il prof. RICCI ha infatti stabilito i criteri per riconoscere se un dato elemento lineare binario è riducibile alla forma di LIOUVILLE e più in particolare per riconoscere se esso ammette ∞^4, ∞^2, ∞^1 od anche un solo sistema di LIOUVILLE, avendo dimostrato che questi sono i soli casi possibili. Per ciascuno di essi, supposte soddisfatte le volute condizioni, è inoltre indicato in qual modo si possano effettivamente determinare i relativi sistemi di LIOUVILLE. La ricerca esige l'integrazione di un sistema completo, quando i sistemi di LIOUVILLE sono ∞^4, ∞^2 od ∞^1, appena quadrature nel caso di un solo sistema.

Non parrà strano che io non abbia fatto cenno dell'importante e fondamentale Memoria del signor KOENIGS sulle linee geodetiche, quando si pensi che in tutte le sue investigazioni, egli suppone in sostanza l'elemento lineare già ridotto alla forma di LIOUVILLE e solo allora ne scruta i caratteri più riposti e ne determina proprietà, per quanto notevoli, estranee pur sempre al problema, che qui ci intrattiene.

la rimanente σ è multipla d'ordine m. Per brevità designeremo con t'_m) una tale sottoclasse del tipo t_m).

Dalle (21) non si potrà, come precedentemente, dedurre che tutte le γ con tre indici distinti sono zero, ma si avrà soltanto:

$$\gamma_{hij} = 0, \tag{27}$$

(per h, i, j distinti e h, i non contemporaneamente maggiori di $n - m$).

Le (27) esprimono intanto immediatamente (§ 8) che le $n-m$ congruenze $\lambda_{h|r}(h = 1, 2, \ldots, n-m)$ sono normali. Io dico di più che le famiglie di superficî $f_1 = \text{cost}$, $f_2 = \text{cost}, \ldots, f_{n-m} = \text{cost}$ (di cui le linee λ sono ordinatamente le traiettorie ortogonali) ne ammettono ∞^m, che le tagliano ortogonalmente.

Cominciamo ad osservare che la condizione di ortogonalità (entro la varietà φ) fra due famiglie di superficie $f_h = \text{cost}$, $u = \text{cost}$, ove se ne designino con $f_{h|r}$, $u_r (r = 1, 2, \ldots, n)$ le derivate, e si ponga $f_h^{(r)} = \sum_1^n {}_s a^{(rs)} f_{h,s}$, è espressa da:

$$\sum_1^n {}_r f_h^{(r)} u_r = 0,$$

la quale è manifestamente una equazione a derivate parziali del prim'ordine lineare ed omogenea rispetto al parametro u: Per essere le linee $\lambda_{h|r}$ traiettorie ortogonali delle superficie $f_h = \text{cost.}$ e quindi le $\lambda_h^{(r)}$ proporzionali alle $f_h^{(r)}$, si può anche attribuirle la forma:

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0.$$

Ne segue che il sistema simultaneo delle $n - m$ equazioni:

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{28}$$

ammette come integrali tutti e soli i parametri di superficie, che tagliano le $f_h (h = 1, 2, \ldots, n-m)$ ortogonalmente.

Per provare il nostro asserto, basterà quindi far vedere che le equazioni (28) costituiscono un sistema completo.

Prendiamo a tale scopo due generiche (28):

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0, \qquad \sum_1^n {}_r \lambda_k^{(r)} u_r = 0,$$

e formiamone la risultante jacobiana, usando però, ciò, che sostanzialmente non reca differenza, la derivazione covariante invece che l'ordinaria. Verrà, secondo le regole del calcolo differenziale assoluto:

$$\sum_1^n{}_r \left(\lambda_{h|rs}\, u^{(r)} + \lambda_h{}^{(r)}\, u_{rs}\right) = 0, \qquad \sum_1^n{}_r \left(\lambda_{k|rs}\, u^{(r)} + \lambda_k{}^{(r)}\, u_{rs}\right) = 0;$$

moltiplicando la prima equazione per $\lambda_k{}^{(s)}$, la seconda per $\lambda_h{}^{(s)}$ e sommando rispetto ad s:

$$\sum_1^n{}_{rs} \left\{\lambda_{h|rs}\, \lambda_k{}^{(s)}\, u^{(r)} + u_{rs}\, \lambda_h{}^{(r)}\, \lambda_k{}^{(s)}\right\} = 0$$

$$\sum_1^n{}_{rs} \left\{\lambda_{k|rs}\, \lambda_h{}^{(s)}\, u^{(r)} + u_{rs}\, \lambda_k{}^{(r)}\, \lambda_h{}^{(s)}\right\} = 0,$$

da cui, per sottrazione, ove si tenga conto (§ 6) che $u_{rs} = u_{sr}$:

$$\sum_1^n{}_r\, u^{(r)} \left\{ \sum_1^n{}_s\, \lambda_{h|rs}\, \lambda_k{}^{(s)} - \sum_1^n{}_s\, \lambda_{k|rs}\, \lambda_h{}^{(s)} \right\} = 0.$$

Sostituendo per le $\lambda_{h|rs}$, $\lambda_{k|rs}$ i loro valori (19), si passa, dopo facili riduzioni, alla:

$$\sum_1^n{}_r\, u_r \sum_1^n{}_i \left(\gamma_{hik} - \gamma_{kih}\right) \lambda_i{}^{(r)} = 0,$$

e, siccome le γ, che appariscono nella sommatoria interna, hanno il primo indice (h o k) non maggiore di $n-m$, così, in causa delle (27), la risultante jacobiana di $\sum_1^n{}_r\, \lambda_h{}^{(r)}\, u_r = 0$, $\sum_1^n{}_k\, \lambda_k{}^{(r)}\, u_r = 0$ assume l'aspetto definitivo:

$$\gamma_{hkk} \sum_1^n{}_r\, \lambda_h{}^{(r)}\, u_r - \gamma_{khh} \sum_1^n{}_r\, \lambda_k{}^{(r)}\, u_r = 0,$$

e, riescendo una combinazione lineare delle equazioni primitive, mostra che il sistema (28) è completo.

Esiste dunque nella varietà φ [ogniqualvolta $ds^2 = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$ è elemento lineare di un sistema (A), che ammette un corrispondente di tipo t'_m)] un sistema ennuplo di superfici

$$f_1 = \text{cost.},\ f_2 = \text{cost.}, \ldots, f_{n-m} = \text{cost.};\ f_{n-m+1} = \text{cost.}, \ldots, f_n = \text{cost.},$$

così fatto che le prime $n-m$ sono ortogonali fra loro e a ciascuna delle m rimanenti.

Assumendolo a sistema coordinato, avremo per ds una espressione della forma:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m} {}_i H_i^2 dx_i^2 + \sum_{n-m+1}^{n} {}_{rs} a'_{rs} dx_r dx_s;$$

di più $\lambda_h^{(r)} = \frac{\varepsilon_{hr}}{H_h} (h = 1, 2, \ldots, n-m)$, mentre delle $\lambda_{h'}^{(r)} (h' = n-m+1, \ldots, n)$ potrà dirsi soltanto che $\lambda_h^{(r)} = 0 (r \leqq n-m)$; in ogni modo le (16′) (18′) danno:

$$ds_1^2 = \sum_1^{n-m} {}_i \rho_i H_i^2 dx_i^2 + \sigma \sum_{n-m+1}^{n} {}_{rs} a'_{rs} dx_r dx_s,$$

dove le a'_{rs} coincidono con quelle, che appariscono nell'espressione di ds.

Cerchiamo che cosa divengono le (E) rispetto a questo particolare sistema di riferimento.

Le (23) ci danno in primo luogo, per $i > n-m$:

$$\sum_1^n {}_r \frac{\partial (\mu \sigma)}{\partial x_r} \lambda_j^{(r)} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde, moltiplicando per $\lambda_{j/s}$ e sommando rispetto ad j:

$$\frac{\partial (\mu \sigma)}{\partial x_s} = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

ossia $\mu \sigma = \text{cost.}$; per ragioni di simmetria, designeremo il valore di $\mu \sigma$, che è essenzialmente diverso da zero, con $\frac{1}{\psi_n}$.

Usufruendo di questo primo risultato e tenendo presente che $\lambda_i^{(r)} = 0$ per $r \leqq n-m$, le (24) si riducono, quando $i > n-m$, a:

$$\sum_{n-m+1}^{n} {}_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \lambda_i^{(r)} = 0;$$

moltiplicandole per $\lambda_{i/s}$ e sommando rispetto ad i fra $n-m+1$ ed n, otteniamo:

$$\sum_{n-m+1}^{n} {}_r \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \sum_{n-m+1}^{n} {}_i \lambda_i^{(r)} \lambda_{i/s} = 0.$$

Ma $\lambda_i^{(r)} = 0$, per $i \leqq n-m$, dunque potremo scrivere, al posto della sommatoria interna, $\sum_1^n {}_i \lambda_i^{(r)} \lambda_{i/s} = \varepsilon_{rs}$ e così finalmente deduciamo:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_s} = 0, \qquad (s = n-m+1, n-m+2, \ldots, n).$$

Consideriamo ora le rimanenti equazioni (23) e (24), quelle cioè, in cui l'indice i non supera $n-m$. Esse si possono scrivere compendiosamente:

$$\sum_1^n {}_r \frac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial x_r} \lambda_j^{(r)} = -\varepsilon_{ij}\rho_i \sum_1^n {}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_r}\lambda_i^{(r)}, \qquad (i \leqq n-m;\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

od anche, moltiplicando per $\lambda_{j/s}$ e sommando rispetto a j:

$$\frac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial x_s} = -\lambda_{i/s}\rho_i \sum_1^n {}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_i}\lambda_i^{(r)}, \qquad (i \leqq n-m;\ s = 1, 2, \ldots, n).$$

Come abbiamo già notato, per $i \leqq n-m$, $\lambda_i^{(r)} = \frac{\varepsilon_{ir}}{H_i}$; si vede subito che $\lambda_{i/s} = \varepsilon_{is} H_i$, talchè le precedenti equazioni si riducono a:

$$\frac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial x_s} = 0, \qquad (i \leqq n-m;\ s \gtrless i),$$

e:

$$\frac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial x_i} = -\rho_i \frac{\partial\mu}{\partial x_i}, \qquad (i \leqq n-m).$$

Il primo gruppo porge:

$$\mu\rho_i = \frac{1}{\psi_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m),$$

essendo al solito ogni ψ_i funzione della sola variabile x_i.

Il secondo gruppo, usufruendo delle relazioni $\mu\rho_i = \frac{1}{\psi_i}$, equivale a:

$$\frac{\partial \log\mu}{\partial x_i} = \frac{\partial \log\psi_i}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m),$$

e queste, insieme alle:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_s} = 0, \qquad (s = n-m+1,\ n-m+2, \ldots, n),$$

ci conducono all'espressione definitiva del sistema delle (23) (24), cioè:

$$\mu = \frac{1}{C}\psi_1 . \psi_2 \ldots \psi_{n-m}\psi_n,$$

$$\rho_i = \frac{C}{\psi_i(\psi_1 . \psi_2 \ldots \psi_{n-m}\psi_n)}, \qquad (i \leqq n-m),$$

$$\sigma = \frac{C}{\psi_n(\psi_1 . \psi_2 \ldots \psi_{n-m}\psi_n)}.$$

Passando ormai alle equazioni (22), sarà bene scinderle in quattro gruppi, secondo i valori degli indici i e j. Per i e j entrambi non superiori ad $n-m$, si ha: $\gamma_{iji} = \sum_1^n {}_{rs} \lambda_{i|rs} \lambda_j^{(r)} \lambda_i^{(s)} = \frac{\lambda_{i|ji}}{H_i H_j}$, e, siccome, per definizione:

$$\lambda_{i|ji} = \frac{\partial \lambda_{i|j}}{\partial x_i} - \sum_1^n {}_p a_{ij.p} \lambda_i^{(p)},$$

ricordando che la forma fondamentale, è:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m} {}_i H_i^2 dx_i^2 + \sum_{n-m+1}^n {}_{rs} a'_{rs} dx_r dx_s,$$

si trova subito per $i \gtrless j$:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Le (22) corrispondenti si riducono agevolmente alla forma:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m;\ j \leqq n-m).$$

Supponendo ancora $i \leqq n-m$, ma $j > n-m$, i secondi membri delle (22) si annullano e si ottiene:

$$\gamma_{iji} = 0,$$

ossia, per essere

$$\gamma_{iji} = \sum_1^n {}_{rs} \lambda_{i|rs} \lambda_j^{(r)} \lambda_i^{(s)},$$

$\left(\text{eguale nel caso presente a } \frac{1}{H_i} \sum_1^n {}_r \lambda_{i|ri} \lambda_j^{(r)}\right)$:

$$\sum_1^n {}_r \lambda_{i|ri} \lambda_j^{(r)} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m;\ j > n-m).$$

Coll'artificio già adoperato di moltiplicare per $\lambda_{j|s}$ e sommare rispetto ad j fra $n-m+1$ ed n, osservando poi che la sommatoria si può ritenere estesa fra 1 ed n, deduciamo:

$$\lambda_{i|si} = -\frac{\partial H_i^2}{\partial x_s} = 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m;\ s > n-m),$$

in definitiva le equazioni (22) ci danno per $i \leqq n-m$:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j}, \qquad (j \leqq n-m \text{ e diverso da } i),$$

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = 0, \qquad (j > n-m),$$

e quindi, ricordando le osservazioni del precedente paragrafo:

$$H_i^2 = V_i^2 \prod_1^{n-m}{}'_j \,|\, \psi_j - \psi_i \,| , \qquad (i \leqq n - m).$$

Per i e j entrambi maggiori di $n-m$, si hanno dalle equazioni (22) altrettante identità; per $i > n-m$ e $j \leqq n-m$, si trova subito:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{2}\frac{1}{H_j}\frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j},$$

cui gioverà associare le:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = 0, \qquad (i > n-m;\ j \leqq n-m;\ h > n-m \text{ e diverso da } i),$$

che sono una conseguenza delle (21).

Questi due sistemi di equazioni si possono raccogliere, scrivendo:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = -\varepsilon_{ih}\frac{1}{H_j}\frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j}, \qquad (i,\ h > n-m;\ j \leqq n-m).$$

D'altra parte:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = \sum_1^n{}_{rs}\left\{\frac{\partial \lambda_{i|r}}{\partial x_s} - \sum_1^n{}_p a_{rs,p}\lambda_i^{(p)}\right\}\lambda_j^{(r)}\lambda_h^{(s)} +$$

$$+ \sum_1^n{}_{rs}\left\{\frac{\partial \lambda_{h|r}}{\partial x_s} - \sum_1^n{}_p a_{rs,p}\lambda_h^{(p)}\right\}\lambda_j^{(r)}\lambda_i^{(s)} =$$

$$= \frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_s\left(\frac{\partial \lambda_{i|j}}{\partial x_s} - \sum_{n-m+1}^n{}_p a_{js,p}\lambda_i^{(p)}\right)\lambda_h^{(s)} +$$

$$+ \frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_s\left(\frac{\partial \lambda_{h|j}}{\partial x_s} - \sum_{n-m+1}^n{}_p a_{js,p}\lambda_h^{(p)}\right)\lambda_i^{(s)},$$

e, siccome $\lambda_{i|j}$, $\lambda_{h|j}$ (per i, $h > n-m$ e $j \leqq n-m$) sono nulli, rimarrà:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = -\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_{sp}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}(a_{js,p} + a_{jp,s}) =$$

$$-\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_{sp}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}\frac{\partial a_{sp}}{\partial x_j} = -\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^n{}_{sp}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}\frac{\partial a'_{sp}}{\partial x_j},$$

le a'_{sp} essendo i coefficienti tuttora incogniti dell'attuale

$$ds^2 = \sum_1^{n-m}{}_i H_i^2 dx_i^2 + \sum_{n-m+1}^n{}_{rs} a'_{rs} dx_r dx_s .$$

Abbiamo così:

$$\sum_{n-m+1}^n{}_{sp}\frac{\partial a'_{sp}}{\partial x_j}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)} = \varepsilon_{ih}\frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j}, \qquad (i,\ h > n-m;\ j \leqq n-m),$$

e da queste col solito artificio:

$$\frac{\partial a'_{rq}}{\partial x_j} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j} \sum_{n-m+1}^{n}{}_{ih}\, \varepsilon_{ih} \lambda_{i|r} \lambda_{h|q} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j} a'_{rq};$$

integrando (e riscrivendo s per q) abbiamo le espressioni cercate dei coefficienti a', cioè:

$$a'_{rs} = K_{rs} \prod_1^{n-m}{}_j \,|\psi_j - \psi_n|, \qquad (r,\ s = n-m+1,\ n-m+2, \ldots, n),$$

le K_{rs} designando funzioni delle m variabili $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n$: Tali funzioni $\Big($oltre alla ovvia restrizione di rendere essenzialmente positiva la forma $\sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s\Big)$ non sono ulteriormente vincolate. Possiamo infatti ritenere di aver esaurite le condizioni (E), in quanto quelle tra le (21), che non abbiamo ancora considerate, si riducono oramai, come è facile convincersi, ad altrettante identità.

Col solito cambiamento di parametro per le superficie coordinate $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}, \ldots, x_{n-m} = \text{cost.}$, si possono ridurre le funzioni V_i $(i \leq n-m)$, che appariscono nell'espressione di H_i, all'unità, oppure (ciò, che apparirà giustificato dal confronto colle formule generali (32) e (33)) si può porre $V_i^2 = |\psi_n - \psi_i|$; si perviene così, tenendo conto dell'opportunità di mettere in evidenza una costante nell'espressione di ds_1 $\Big($e scrivendo $\frac{C}{\psi_n + c}$ invece di $C\Big)$ alle forme canoniche:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m}{}_i \Big\{ |\psi_n - \psi_i| \prod_1^{n-m}{}'_j |\psi_j - \psi_i| \Big\} dx_i^2 + \prod_1^{n-m}{}_j |\psi_j - \psi_n| \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s \qquad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)\ldots(\psi_{n-m} + c)(\psi_n + c)} \Bigg[\sum_1^{n-m}{}_i \frac{1}{\psi_i + c} \Big(\prod_1^{n-m}{}'_j |\psi_j - \psi_i| \Big) dx_i^2 + \\ + \frac{1}{\psi_n + c} \prod_1^{n-m}{}_j |\psi_j - \psi_n| \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s \Bigg] (*). \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

(*) I sigg. Di Pirro e Picciati (loc. cit.), proponendosi la ricerca di *tutte le coppie di corrispondenti ortogonali*, hanno trovato soltanto le forme (25_1) e $(26'_1)$, mentre per es. le (29) e (30) (quando $\sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s$ sia riducibile alla forma ortogonale), sono coppie di corrispondenti, che non rientrano nel tipo da essi assegnato. Questa divergenza va at-

Il sistema (A) possiede evidentemente (ψ_n essendo una costante, ma determinata) $n - m + 1$ integrali quadratici distinti, compresi tutti nella formula:

$$(\psi_1 + c) \ldots (\psi_{n-m} + c)(\psi_n + c) \left\{ \sum_1^{n-m}{}_i \left(\frac{1}{\psi_i + c} \prod_1^{n-m}{}'_j \,|\, \psi_j - \psi_i \,|\right) x'^2_i + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\psi_n + c} \prod_1^{n-m}{}_j \,|\, \psi_j - \psi_n \,|\, \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs} x'_r x'_s \right\} = \text{cost.},$$

da cui potrebbero direttamente essere calcolati i relativi primi membri, come coefficienti delle diverse potenze di c.

Come già pel tipo t_1), la questione di determinare tutti i corrispondenti di un dato sistema (A), spettanti alla sottoclasse t'_m), è risoluta, per ogni forma canonica (29), dall'espressione (30) di ds_1, la quale dipende sempre dalle due costanti arbitrarie C e c.

Giova avvertire che la forma canonica (29) per un ds^2 è meno restrittiva che non la (25_1), ciò, che del resto, come si constaterà, vale anche per la forma canonica generale del tipo t_m), talchè sarà molto più ampia la categoria dei ds, che ammettono corrispondenti di tipo t_m), che non di tipo t_1); anzi le condizioni per l'esistenza di un corrispondente (come in fondo si poteva prevedere dal comportamento (§ 9) delle equazioni (E)) vanno gradatamente decrescendo da tipo a tipo, finchè si giunge al tipo t_n), che non ne esige alcuna e determina quei sistemi, che si son detti (§ 6) col sig. Painlévé *corrispondenti ordinarii* e dipendono da una sola costante arbitraria.

Riuscirà agevole trovar conferma a queste asserzioni.

§ 12. Tipo generale t_m). Considerazioni riassuntive.

Sieno (A) ed (A_1) due sistemi corrispondenti di tipo generale t_m) e si chiamino $\rho_{p_1}, \rho_{p_2}, \ldots, \rho_{p_{n-m+1}}$ ($p_{n-m+1} = n$) le $n - m + 1$ radici distinte dall'equazione (15), supponendo che gli indici $p_1, p_2, \ldots, p_{n-m+1}$ sieno disposti in ordine crescente e che la differenza $p_l - p_{l-1}$ ($p_0 = 0$) designi l'ordine di multeplicità della radice ρ_{p_l}. Questo modo di rappresentare l'aggruppamento

tribuita ad una semplice svista, del resto ben naturale, commessa da entrambi; all'ommissione cioè dei vari casi, che si possono presentare, quando certe equazioni riescano soddisfatte identicamente, ciò che rende inattendibili i calcoli successivi, riferentisi all'ipotesi generale.

delle radici si presenta spontaneo, quando si parta dalla successione ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_n$ e si immagini che coincidano tra loro le prime p_1 radici, e poi quelle (distinte dalle prime), i cui indici sono compresi fra p_1 e p_2 (incluso) ecc., e così in generale quelle, i cui indici sono compresi fra p_{l-1} e p_l (incluso).

Una prima ispezione alle equazioni (E) ci assicura che in questo caso debbono annullarsi tutte le γ_{hij} con tre indici distinti e tali che h ed i non sieno compresi nello stesso intervallo (determinato da due p consecutive). Con metodo analogo a quello seguito, nel caso svolto testè, si potrebbe poi stabilire che i singoli $n-m+1$ sistemi di equazioni

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0, \qquad (h = 1,\ 2, \ldots,\ p_{l-1},\ p_l + 1,\ p_l + 2, \ldots,\ n), \tag{31}$$

sono completi e che quindi ciascuno di essi ammette $p_l - p_{l-1} (l = 1,\ 2, \ldots,\ n - m + 1)$ integrali indipendenti $f_{p_{l-1}+1},\ f_{p_{l-1}+2}, \ldots,\ f_{p_l}$. Inoltre due qualisivogliono di questi integrali f_α e f_β appartenenti a due distinti sistemi (31) (e quindi cogli indici α e β situati in intervalli differenti) sono fra loro ortogonali.

Infatti, considerando per un momento un sistema (31) come un insieme di $n - p_l + p_{l-1}$ equazioni algebriche lineari ed omogenee nelle n quantità u_r, si hanno le $p_l - p_{l-1}$ soluzioni indipendenti $\lambda_{p_{l-1}+1|r},\ \lambda_{p_{l-1}+2|r}, \ldots,\ \lambda_{p_l|r}$, talchè, supposto α compreso fra p_{l-1} e p_l, le derivate $f_{\alpha|r}$ saranno linearmente esprimibili mediante $\lambda_{p_{l-1}+1|r},\ \lambda_{p_{l-1}+2|r}, \ldots,\ \lambda_{p_l|r}$; analoga proprietà vale per f_β, soltanto, per essere α e β compresi in intervalli differenti, le λ ad esso relative saranno essenzialmente diverse dalle precedenti. Dopo ciò, l'ortogonalità fra f_α e f_β riesce manifesta.

Segue da questa osservazione che, assumendo a sistema coordinato le n famiglie di superfici $f_i = \text{cost.}$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$, si possono attribuire a ds e ds_1 le forme rispettive:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m+1}{}_l \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs}\, a'_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

$$ds_1^2 = \sum_1^{n-m+1}{}_l\, \rho_{p_l} \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs}\, a'_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Una volta ridotti a questa forma, le (E) si integrano subito, basta soltanto aver cura di scinderle in varii gruppi, corrispondenti ai posti, occupati dagli indici negli intervalli p_{l-1}, p_l (come si è fatto nell'ipotesi particolare t'_m), pei due intervalli $1,\ n - m;\ n - m,\ n$).

Il lettore avrà già intuito il risultato finale, talchè, senza riportare il calcolo, sembrami sufficiente, a complemento della ricerca, di trascrivere le forme canoniche:

$$d s^2 = \sum_1^{n-m+1}{}_l \; \prod_1^{n-m+1}{}'_j \; |\psi_{p_j} - \psi_{p_l}| \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} K_{rs}\, d x_r\, d x_s, \tag{32}$$

$$d s_1^2 = \frac{C}{(\psi_{p_1}+c)(\psi_{p_2}+c)\ldots(\psi_{p_{n-m+1}}+c)} \sum_1^{n-m+1}{}_l \frac{1}{\psi_{p_l}+c} \prod_1^{n-m+1}{}'_j \; |\psi_{p_j} - \psi_{p_l}| \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} K_{rs}\, d x_r\, d x_s, \tag{33}$$

in cui ψ_{p_l} è funzione della sola x_{p_l}, se ρ_{p_l} è radice semplice, una pura costante nel caso opposto; $K_i\,(p_{l-1} + 1 \leqq i \leqq p_l)$ è funzione delle sole variabili $x_{p_{l-1}+1}, x_{p_{l-1}+2}, \ldots, x_{p_l}$ e si può sempre supporre eguale ad *1*, se ρ_{p_l} è radice semplice.

Dalle (32), (33) si ritrovano, come è naturale le (25) (26'), supponendo tutte le radici semplici, cioè $m = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2, \ldots, p_n = n$; si ottengono invece le (29), (30), facendo $p_1 = 1$, $p_2 = 2, \ldots, p_{n-m} = n - m$, $p_{n-m+1} = n$; considerando infine come caso particolare il tipo t_n), vengono a mancare le funzioni ψ e si ha semplicemente:

$$d s^2 = \sum_1^n{}_{rs} K_{rs}\, d x_r\, d x_s$$

$$d s_1^2 = C \sum_1^n{}_{rs} K_{rs}\, d x_r\, d x_s .$$

Il tipo t_n) non esige dunque alcun vincolo per la forza viva del sistema (A), ma comprende però soltanto dei corrispondenti manifesti a priori, cioè i corrispondenti ordinarii.

Apparisce dalle forme canoniche (32) e (33) che il caso dei corrispondenti ordinarii è l'unico (cfr. § 6), in cui esiste per la coppia (A) (A_1) il solo integrale delle forze vive; in tutti gli altri casi abbiamo infatti $n - m + 1 \, (> 1)$ integrali quadratici, che si possono raccogliere nell'equazione:

$$(\psi_{p_1}+c)(\psi_{p_2}+c)\ldots(\psi_{p_{n-m+1}}+c) \sum_1^{n-m+1}{}_l \frac{1}{\psi_{p_l}+c} \prod_1^{n-m+1}{}'_j \; |\psi_j - \psi_{p_l}| \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} K_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.},$$

valida, durante il moto determinato dal sistema (A), per tutti i valori di c.

Per concludere, *vogliamo mostrare in qual modo coi risultati ottenuti si risolve la questione di determinare tutti i sistemi corrispondenti ad un dato* (A).

La ricerca va eseguita separatamente per ciascun tipo t_m) e per ciascuna sottoclasse di esso, individuata dal modo, con cui possono essere distribuite le molteplicità fra $n - m + 1$ radici distinte di una equazione di grado n. Ognuna di queste sottoclassi è caratterizzata da una certa forma canonica (32) di elemento lineare: Se ds non è riducibile a quella forma, esso non ammette corrispondenti di quel tipo e sottoclasse; per ogni forma (32), da esso posseduta, i ds_1 corrispondenti, sono tutti compresi nella espressione (33), che dipende da due costanti arbitrarie. Fa eccezione il tipo t_n), che dà luogo, per ogni ds, ai sistemi corrispondenti Cds, con C costante arbitraria.

Sulla equazione $\Delta_2 U + k^2 U = 0$ in uno spazio di n dimensioni.

(*Di* R. Marcolongo, *a Messina.*)

Nella presente Nota considero una funzione U ad n variabili, soluzione della equazione:

$$\Delta_2 U + k^2 U = 0,$$

e generalizzo alcune formole date da Helmholtz (*) e dal Weber (**), valendomi di risultati ottenuti dal prof. Beltrami (***) e dal prof. Tonelli (****). Richiamo brevemente dapprima alcune proprietà delle funzioni cilindriche di ordine $n + \frac{1}{2}$ e di ordine n; poichè, come nello studio delle ordinarie funzioni potenziali la funzione $\frac{1}{\rho^{n-2}}$ (in cui ρ è la distanza tra due punti) ha un ufficio importantissimo, così nel caso dell'equazione più generale che qui si considera pari ufficio è rappresentato dalle funzioni cilindriche.

Richiami su alcune proprietà delle funzioni cilindriche.

La funzione cilindrica di prima specie e di indice qualunque r è definita dalla serie:

$$I_r(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^r \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p)\Gamma(r+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}. \tag{1}$$

(*) *Ueber Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.* Crelle's Journ., Bd. 57, 1860.

(**) *Ueber die Integration der partiellen-Diff.* $\Delta_2 u + k^2 u = 0$. Math. Ann., Bd. 1.

(***) *Sulla teorica generale dei parametri differenziali.* Mem. Acc. Sc. di Bologna, tom. VIII, 1869.

(****) *Sopra la funzione potenziale in uno spazio di n dimensioni.* Ann. Matem., serie 2.ª, tom. X.

Indicando quindi costantemente con n un numero intero e positivo, dedurremo:

$$\lim_{x=0} x^{-n} I_n(kx) = \frac{k^n}{2^n \Gamma(n)} = \frac{k^n}{2 \, . \, 4 \, . \, 6 \ldots 2n} \tag{2}$$

$$\lim_{x=0} x^{-n-\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}(kx) = \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \ldots (2n-1)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, . \tag{3}$$

Si ha pure:

$$\lim_{x=0} x^n I_n(kx) = 0, \qquad \lim_{x=0} x^{n+1} I'_n(kx) = 0 \, . \tag{4}$$

Le stesse proprietà hanno luogo mutando n in $n + \frac{1}{2}$; esse si deducono anche facilmente dalla relazione ricorrente:

$$I_{r+1} = \frac{2r}{x} I_r - I_{r-1} \, .$$

Rammentiamo ancora che:

$$\left. \begin{aligned} I_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 1 - \frac{\mu(\mu - 1 \, . \, 2)}{1 \, . \, 2 \, . \, (2x)^2} + \frac{\mu(\mu - 1 \, . \, 2)(\mu - 2 \, . \, 3)(\mu - 3 \, . \, 4)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, (2x)^4} - \ldots \right\} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{x}} \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\mu}{1 \, . \, (2x)} - \frac{\mu(\mu - 1 \, . \, 2)(\mu - 2 \, . \, 3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, (2x)^3} + \ldots \right\} \frac{\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{x}} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

in cui si è posto:

$$\mu = n(n+1).$$

Di guisa che risulta:

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}, \qquad I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) .$$

Teoremi analoghi valgono per le funzioni cilindriche di 2.ª specie.

Si hanno le due relazioni:

$$Y_{n+1} = \frac{2n}{x} Y_n - Y_{n-1}, \qquad Y_{n+1} = \frac{n}{x} Y_n - \frac{d Y_n}{dx} \, . \tag{6}$$

Sarà quindi:

$$Y_1 = - \frac{d Y_0}{dx},$$

ed osservando che Y_0 per $x=0$ diventa infinita come $\log x$ e che precisamente si ha:

$$Y_0 = I_0(x)\log x + \cdots$$

risulta:

$$\lim_{x=0} x Y_1 = -1.$$

Quindi si trae:

$$\lim_{x=0} x^n Y_n(kx) = -\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{k^n}. \tag{7}$$

Lo stesso può ripetersi per la $Y_{n+\frac{1}{2}}$. Infatti le relazioni (6) valgono qualunque sia n e poichè:

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}},$$

si trae:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x=0} x^{n+\frac{1}{2}} Y_{n+\frac{1}{2}}(kx) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{k^{n+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\\
&\lim_{x=0} x^{n+\frac{3}{2}} Y'_{n+\frac{1}{2}}(kx) = -\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{k^{n+\frac{3}{2}}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Possiamo stabilire la (8) direttamente. Infatti è:

$$\left.\begin{aligned}
Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = {}&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1 - \frac{\mu(\mu-1.2)}{1.2.(2x)^2} + \cdots\right\}\frac{\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{x}}\\
&+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\mu}{1(2x)} - \frac{\mu(\mu-1.2)(\mu-2.3)}{1.2.3.(2x)^3} + \cdots\right\}\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Supposto n pari, l'ultimo termine della prima parte del secondo membro è:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mu(\mu-1.2)\ldots(\mu-n-1.n)}{1.2.3\ldots n.2^n}\,\frac{\cos x}{x^{n+\frac{1}{2}}},$$

e l'ultimo termine della seconda parte è:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mu(\mu-1.2)\ldots(\mu-n-2.n-1)}{1.2.3\ldots n-1.2^{n-1}}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x^{n+\frac{1}{2}}};$$

tutti gli altri termini contengono potenze di $\frac{1}{x}$ inferiori ad $n+\frac{1}{2}$, onde:

$$\lim_{x=0} x^{n+\frac{1}{2}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{\mu(\mu-1.2)\ldots(\mu-n-1.n)}{1.2.3\ldots n.2^n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Lo stesso vale per n dispari. Ma abbiamo:

$$\mu(\mu-1.2)\ldots(\mu-n-1.n) = \prod_{k=0}^{n-1}\left\{n(n+1)-k(k+1)\right\} = 1.2.3\ldots 2n.$$

Posto quindi:

$$a_n = \frac{\mu(\mu-1.2)\ldots(\mu-n-1.n)}{1.2.3\ldots n.2^n} = \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{2^n},$$

risulta:

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = (2n+1)a_n;$$

onde:

$$a_n = 1.3.5\ldots(2n-1),$$

e quindi si trae la (8).

Le due funzioni I_r e Y_r sono due soluzioni particolari della equazione differenziale del secondo ordine:

$$z'' + \frac{z'}{x} + \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right)z = 0.$$

Si ha quindi:

$$I_r Y'_r - I'_r Y_r = I_{r+1} Y_r - I_r Y_{r+1} = \frac{C}{x},$$

in cui C è una costante arbitraria.

Se $r = n$, scrivendo la equazione precedente nella forma:

$$x^2 . x^{-n-1} I_{n+1} . x^n Y_n - x^{-n} I_n . x^{n+1} Y_{n+1} = C,$$

e passando al limite per $x = 0$, tenendo presenti le (2) e (7) risulta: $C = 1$, onde:

$$I_n(x) Y'_n(x) - I'_n(x) Y_n(x) = \frac{1}{x}. \qquad (10)$$

Se $r = n + \frac{1}{2}$, valendoci delle (3) e (8) troveremo:

$$C = -\frac{2}{\pi},$$

onde:

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x)\,Y'_{n+\frac{1}{2}}(x) - I'_{n+\frac{1}{2}}(x)\,Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = -\frac{2}{\pi x}. \tag{11}$$

Le (10) e (11) sono casi particolari di una formola più generale stabilita da LOMMEL (*).

Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione:

$$\Delta_2 U + k^2 U = 0.$$

Consideriamo l'equazione:

$$\sum_s \frac{\partial^2 U}{\partial x_s^2} + k^2 U = 0, \tag{12}$$

e ricordiamo che se $k = 0$ essa ammette la soluzione particolare $\frac{1}{\rho^{n-2}}$, in cui:

$$\rho^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2. \tag{13}$$

Cerchiamo quindi se la (12) ammette una soluzione della forma:

$$U = \frac{R}{\rho^{n-2}} \tag{14}$$

in cui R è funzione della sola ρ.

Abbiamo successivamente:

$$\frac{\partial U}{\partial x_s} = \left\{ \frac{R'}{\rho^{n-1}} - (n-2)\frac{R}{\rho^n} \right\} (x_s - a_s)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_s^2} = \left\{ \frac{R''}{\rho^{n-1}} + (3-2n)\frac{R'}{\rho^n} + n(n-2)\frac{R}{\rho^{n+1}} \right\} \frac{(x_s - a_s)^2}{\rho} + \left\{ \frac{R'}{\rho^{n-1}} - (n-2)\frac{R}{\rho^n} \right\}.$$

Quindi:

$$\Delta_2 U = \frac{R''}{\rho^{n-2}} + (3-n)\frac{R'}{\rho^{n-1}};$$

(*) *Zur Theorie der Bessel' schen Functionen.* Math. Ann., tom. IV; formola A, pag. 105. La formola più generale di LOMMEL è:

$$I_r I_{-r+1} + I_{-r} I_{r-1} = \frac{2}{\pi x} \operatorname{sen} r\pi,$$

e per $r = n + \frac{1}{2}$ si ha:

$$(-1)^n Y_{n+\frac{1}{2}} = I_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

onde R dovrà soddisfare all'equazione:

$$R'' - (n-3)\frac{R'}{\rho} + k^2 R = 0,$$

la quale, posto:

$$R = \rho^{\frac{n-2}{2}} z, \tag{15}$$

si trasforma nella seguente:

$$z'' + \frac{z'}{\rho} + \left\{ k^2 - \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{\rho^2} \right\} z = 0,$$

che definisce le funzioni cilindriche di ordine $\frac{n-2}{2}$ dell'argomento $k\rho$.

Se adunque $n = 2l + 2$, avremo per R le due soluzioni:

$$R_1 = \rho^l I_l(k\rho), \qquad R_2 = \rho^l Y_l(k\rho);$$

invece se $n = 2l + 3$ avremo:

$$R_1 = \rho^{l+\frac{1}{2}} I_{l+\frac{1}{2}}(k\rho), \qquad R_2 = \rho^{l+\frac{1}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(k\rho).$$

Queste soluzioni potrebbero essere anche moltiplicate per una costante.

Porremo:

$$a_l = -\frac{k^l}{2.4.6\ldots(2l-2)}; \qquad a_{l+\frac{1}{2}} = \frac{k^{l+\frac{1}{2}}}{1.3.5\ldots(2l-1)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{16}$$

e considereremo le soluzioni particolari seguenti:

$$n = 2l + 2: \qquad U_1 = \frac{a_l \rho^l Y_l(k\rho)}{\rho^{2l}}, \qquad U_2 = \rho^{-l} I_l(k\rho). \tag{17}$$

Col tendere di ρ verso zero il numeratore di U_1 tende ad 1 e quindi U_1 nel punto $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ diventa infinita come $\frac{1}{\rho^{n-2}}$, mentre U_2 resta finita.

$$n = 2l + 3: \qquad U_1 = \frac{a_{l+\frac{1}{2}} \rho^{l+\frac{1}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(k\rho)}{\rho^{2l+1}}, \qquad U_2 = \rho^{-l-\frac{1}{2}} I_{l+\frac{1}{2}}(k\rho); \tag{18}$$

e parimenti, nel punto $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ la prima diventa infinita come $\frac{1}{\rho^{n-2}}$, e la seconda si conserva finita.

Teoremi sulla funzione U.

Se, in tutto uno spazio S_n, U e V sono monodrome finite e continue e le loro derivate sono atte alla integrazione, si ha:

$$\int (U\Delta_2 V - V\Delta_2 U)\, d S_n + \int \left(U \frac{dV}{dp} - V\frac{dU}{dp}\right) d S_{n-1} = 0, \qquad (19)$$

in cui S_{n-1} è lo spazio contorno di S_n e p la normale interna.

Se inoltre U e V soddisfano la (12), sarà:

$$U\Delta_2 V - V\Delta_2 U = 0,$$

e quindi:

$$\int \left(U \frac{dV}{dp} - V\frac{dU}{dp}\right) d S_{n-1} = 0. \qquad (20)$$

Supponiamo lo spazio piano e assumiamo un sistema di coordinate polari col polo in $(a_1 a_2 \dots a_n)$; sia ancora n dispari $= 2l + 3$ e nella (20) facciamo:

$$V = a_{l+\frac{1}{2}} \frac{Y_{l+\frac{1}{2}}(k\rho)}{\rho^{l+\frac{1}{2}}}, \qquad (21)$$

che soddisfa la (12), ma nel punto $(a_1 a_2 \dots a_n)$ diventa infinita; però dobbiamo escludere da S_n uno spazio sferico sufficientemente piccolo di raggio ρ avente il centro in $(a_1 a_2 \dots a_n)$; detto S'_{n-1} il suo contorno e p' la normale volta verso l'interno di questo spazio sferico, applicando la (20) abbiamo:

$$\int \left(U \frac{dV}{dp} - V\frac{dU}{dp}\right) d S_{n-1} = \int \left(U \frac{dV}{dp'} - V\frac{dU}{dp'}\right) d S'_{n-1}. \qquad (22)$$

Ora rammentiamo che:

$$\lim_{\rho=0} \int W d S'_{n-1} = NL,$$

in cui:

$$N = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2.4\dots(n-2)} \qquad \text{se } n \text{ è pari,}$$

$$N = \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{3.5\dots(n-2)} \qquad \text{se } n \text{ è dispari,}$$

e

$$L = \lim_{\rho=0} \rho^{n-1} W \text{ (*)}.$$

Però avremo:

$$\lim_{\rho=0} \int U \frac{dV}{dp'} dS'_{n-1} = NL,$$

dove:

$$L = \lim_{\rho=0} U \frac{dV}{dp'} \rho^{n-1} = U_1 \lim_{\rho=0} \rho^{n-1} \frac{dV}{dp'},$$

accennando con U_1 il valore di U nel punto $(a_1 \dots a_n)$.

Poichè $\frac{dV}{dp'} = -\frac{dV}{d\rho}$, derivando la (21), moltiplicando per ρ^{n-1} e passando al limite per $\rho = 0$, tenendo presenti le (8) e il valore di $a_{l+\frac{1}{2}}$, risulta:

$$\lim_{\rho=0} \rho^{n-1} \frac{dV}{dp'} = 2l + 1,$$

e in conseguenza:

$$\lim_{\rho=0} \int U \frac{dV}{dp'} dS'_{n-1} = \frac{4(2\pi)^{l+\frac{1}{2}} a_{l+\frac{1}{2}}}{k^{l+\frac{1}{2}}} U_1.$$

Analogamente, riflettendo che:

$$\lim_{\rho=0} \rho^{n-1} V \frac{dU}{dp'} = -\left(\frac{dU}{d\rho}\right)_0 a_{l+\frac{1}{2}} \lim_{\rho=0} \rho^{l+\frac{1}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(k\rho) = 0,$$

risulterà:

$$\lim_{\rho=0} \int V \frac{dU}{dp'} dS'_{n-1} = 0,$$

e la (22) si trasforma nella seguente:

$$U_1 = \frac{k^{\frac{n-2}{2}}}{4(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}} \int \left\{ U \frac{d}{dp} \left(\frac{Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \right) - \frac{Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \frac{dU}{dp} \right\} dS_{n-1}. \tag{23}$$

Nel caso di n pari procederemo in modo analogo; porremo nella (22):

$$V = \frac{a_l \rho^l Y_l(k\rho)}{\rho^{2l}},$$

(*) Cfr. Tonelli. Mem. cit.

e si troverà:

$$U_1 = -\frac{k^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \left\{ U \frac{d}{dp} \left(\frac{Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \right) - \frac{Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \frac{dU}{dp} \right\} d S_{n-1}. \tag{24}$$

Finalmente, osservando che la funzione:

$$\frac{I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}}$$

soddisfa la (12) tanto per n pari che per n dispari e si mantiene finita anche per $\rho = 0$ avremo, applicando la (20):

$$\int \left\{ U \frac{d}{dp} \left(\frac{I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \right) - \frac{I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \frac{dU}{dp} \right\} d S_{n-1} = 0. \tag{25}$$

Per $n = 3$, la (23) e (25) ci danno:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi} \int \left(U \frac{d}{dp} \frac{\cos k\rho}{\rho} - \frac{\cos k\rho}{\rho} \frac{dU}{dp} \right) d\sigma$$

$$0 = \int \left(U \frac{d}{dp} \frac{\operatorname{sen} k\rho}{\rho} - \frac{\operatorname{sen} k\rho}{\rho} \frac{dU}{dp} \right) d\sigma,$$

in cui σ è la superficie contorno di S; e si ottengono due formole di Helmholtz.

Le stesse formole per $n = 2$ ci danno:

$$U_1 = -\frac{1}{2\pi} \int \left(U \frac{d\, Y_0(k\rho)}{dp} - Y_0(k\rho) \frac{dU}{dp} \right) ds$$

$$0 = \int \left(U \frac{d\, I_0(k\rho)}{dp} - I_0(k\rho) \frac{dU}{dp} \right) ds,$$

date da Weber.

La (23) o la (24) ci dà il valore in un punto di S_n, di una funzione U monodroma ecc. e che soddisfa la (12), mediante i valori di U e $\frac{dU}{dp}$ sopra S_{n-1} contorno di S_n.

Consideriamo un campo sferico interno ad S_n, tale che:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < \rho^2,$$

limitato dal campo sferico S_{n-1} pel quale si ha:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = \rho^2,$$

e, supponendo n dispari, applichiamo la (23) e (25) a questo spazio; otterremo:

$$4\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{n-2}{2}} U_1 = \frac{Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int \frac{dU}{d\rho} dS_{n-1} - \frac{d}{d\rho}\left(\frac{Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}}\right) \int U dS_{n-1};$$

$$0 = \frac{I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int \frac{dU}{d\rho} dS_{n-1} - \frac{d}{d\rho}\left(\frac{I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}}\right) \int U dS_{n-1}.$$

Eliminiamo tra queste due equazioni: $\int \frac{dU}{d\rho} dS_{n-1}$ e notiamo che:

$$Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho) \frac{d}{d\rho}\left(\frac{I_{n-2}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}}\right) - I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho) \frac{d}{d\rho}\left(\frac{Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho)}{\rho^{\frac{n-2}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{k}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \left\{ Y_{\frac{n-2}{2}}(k\rho) I'_{\frac{n-2}{2}}(k\rho) - I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho) Y'_{\frac{n-2}{2}}(k\rho) \right\},$$

e quindi per la (11) il secondo membro si riduce a: $\frac{2}{\pi \rho^{\frac{n}{2}}}$; onde:

$$\frac{(2\pi\rho)^{\frac{n}{2}}}{k^{\frac{n-2}{2}}} I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho) U_1 = \int U dS_{n-1}. \tag{26}$$

Per $n = 3$ si ha ancora una formola di Helmholtz.

Procedendo in modo del tutto analogo per n pari si giungerà alla stessa formola, la quale per $n = 2$ ci dà un'altra formola del Weber.

La (26) offre una generalizzazione del principio della media.

Se quindi il raggio ρ è scelto tra le infinite radici reali della equazione trascendente:

$$I_{\frac{n-2}{2}}(k\rho) = 0,$$

e nell'interno della sfera di raggio ρ la U è monodroma finita e continua si ha:

$$\int U \, d S_{n-1} = 0,$$

Osserviamo da ultimo ancora che dalla (9) risulta:

$$\lim_{k=0} k^{l+\frac{1}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(k\rho) = \frac{1.3.5\ldots(2l-1)}{\rho^{\frac{2l+1}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

e però la (23) per $k=0$ si trasforma nella:

$$U_1 = \frac{1}{(n-2)N} \int \left\{ U \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right) - \frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{dU}{dp} \right\} d S_{n-1},$$

essendo:

$$\Delta_2 U = 0 \ (*).$$

Generalizzazione dei teoremi di Weber.

Le formole stabilite permettono di generalizzare alcuni teoremi di Weber.

Notiamo anzitutto come conseguenza immediata delle (23), (24) che se una funzione U è monodroma finita e continua insieme colle sue derivate prime in tutto S_n in cui soddisfa la (12) e se in S_{n-1} U e $\frac{dU}{dp}$ sono nulle sarà, in tutto S_n, $U=0$.

Si voglia determinare una funzione U che soddisfi in S_n alle solite condizioni di continuità e alla equazione (12) e inoltre sul contorno S_{n-1} sia:

$$U=0, \qquad \text{oppure } \frac{dU}{dp}=0, \qquad \text{oppure } U+\alpha\frac{dU}{dp}=0,$$

in cui α è una costante negativa. Si può mostrare che k deve essere reale.

Supponiamo invece:

$$k = a+ib, \qquad (a,\ b \neq 0),$$

e quindi anche:

$$U = V + iW.$$

L'equazione (12) diventa:

$$\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2} + i \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x_s^2} + (a^2 - b^2 + 2iab)(V+iW) = 0,$$

(*) Beltrami. Mem. cit.

e quindi:

$$\Delta_2 U' + k'^2 U' = 0,$$

in cui:

$$U' = V - iW; \qquad k' = a - ib.$$

Applichiamo ora la (19) alle due funzioni U e U'; si avrà:

$$(k^2 - k'^2)\int (V^2 + W^2)\, d S_n + \int \left(U \frac{d U'}{dp} - U' \frac{d U}{dp} \right) d S_{n-1} = 0.$$

Ora se in S_{n-1} è $U = 0$ oppure $\frac{dU}{dp} = 0$, oppure $U + \alpha \frac{dU}{dp} = 0$, sarà ancora:

$$U' = 0, \qquad \text{oppure } \frac{dU'}{dp} = 0, \qquad \text{oppure } U' + \alpha \frac{dU'}{dp} = 0.$$

In ogni caso adunque:

$$(k^2 - k'^2)\int (V^2 + W^2)\, d S_n = 0.$$

E ciò è impossibile; dunque k non può essere un numero complesso.

Vediamo se k può essere immaginario puro; essendo in tal caso $k^2 = k'^2$ la parte reale V e la immaginaria $i\,W$ di U soddisfano alla stessa equazione; basta dunque considerare il caso in cui U è reale. Ma qualunque sia lo spazio si ha:

$$\int \left\{ \Delta (U V) + V \Delta_2 U \right\} d S_n + \int V \frac{dU}{dp}\, d S_{n-1} = 0 \text{ (*)}.$$

Fatto $U = V$ abbiamo:

$$\int \left\{ \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s} - k^2 U^2 \right\} d S_n + \int U \frac{dU}{dp}\, d S_{n-1} = 0.$$

Per ipotesi k^2 è negativo; la forma quadratica: $\sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s}$ è definita positiva, e però l'elemento dell'integrale di S_n e quindi l'integrale stesso è essenzialmente positivo, mentre che il secondo integrale è nullo nelle ipotesi che al contorno $U = 0$ oppure $\frac{dU}{dp} = 0$; si ha dunque un assurdo. Nel caso poi che al contorno fosse:

$$U + \alpha \frac{dU}{dp} = 0,$$

(*) Beltrami. Mem. cit.

l'equazione precedente diventa:

$$\int \left\{ \sum A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s} - k^2 U^2 \right\} d S_n - \alpha \int U^2 d S_{n-1} = 0,$$

che è pure impossibile.

Sull'equazione $\sum_s a^2{}_s \frac{\partial^2 U}{\partial x^2{}_s} = h \frac{\partial U}{\partial t}$.

La temperatura U in un corpo cristallizzato soddisfa all'equazione di Duhamel (*):

$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = h \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{27}$$

qualora gli assi x, y, z sieno scelti in modo opportuno.

Nello stato di equilibrio avremo:

$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

che è stata studiata in particolar modo da Mathieu (**).

Nella (27) facciamo:

$$U = V e^{-\alpha^2 t}.$$

La $V(x, y, z)$ soddisfa alla equazione:

$$a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V = 0, \tag{28}$$

essendo:

$$k^2 = h \alpha^2.$$

Posto:

$$\rho^2 = \left(\frac{x - x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{z - z_1}{c}\right)^2,$$

si trova subito che due soluzioni particolari della (28) sono:

$$\frac{\cos k\rho}{\rho}, \qquad \frac{\operatorname{sen} k\rho}{\rho},$$

(*) *Journ. École. Polyt.* Cah. XXI, 1832.

(**) *Théorie du potentiel,* pag. 116.

la prima delle quali diventa infinita come $\frac{1}{\rho}$ nel punto $(x_1 y_1 z_1)$; la seconda è finita anche per $\rho = 0$.

Pongasi:

$$\Delta_2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

e si determini una direzione n' tale che:

$$K \cos(n'x) = a^2 \cos(nx), \quad K \cos(n'y) = b^2 \cos(ny), \quad K \cos(n'z) = c^2 \cos(nz);$$

d'onde:

$$K = \sqrt{a^2 \cos^2(nx) + b^2 \cos^2(ny) + c^2 \cos^2(nz)}.$$

Se U e V sono due soluzioni della (28) monodrome finite e continue in tutto S, si ha:

$$\int K \left(U \frac{dV}{dn'} - V \frac{dU}{dn'} \right) d\sigma = 0.$$

Di qui coi soliti metodi trarremo:

$$4\pi abc U_1 = \int K \left\{ U \frac{d}{dn'} \left(\frac{\cos k\rho}{\rho} \right) - \frac{\cos k\rho}{\rho} \frac{dU}{dn'} \right\} d\sigma$$

$$0 = \int K \left\{ U \frac{d}{dn'} \left(\frac{\operatorname{sen} k\rho}{\rho} \right) - \frac{\operatorname{sen} k\rho}{\rho} \frac{dU}{dn'} \right\} d\sigma.$$

Sarebbe ora assai semplice estendere questi risultati all'equazione analoga alla (28) ad n variabili.

Messina, Maggio 1896.

Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica.

(Di G. Di Pirro, *a Roma.)*

Fra i problemi di meccanica, le cui equazioni si sanno integrare col metodo Hamilton-Jacobi, meritano una speciale menzione quelli, che il signor Stäckel (*) ha indicati in una Nota, pubblicata nei *Comptes Rendus*, e che comprendono i casi di moto considerati da Liouville (**) nelle classiche Memorie, aventi per soggetto: *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer.*

Cosiffatti problemi, pei quali la espressione della forza viva si suppone ridotta a forma quadratica *ortogonale*, sono notevoli anche per ciò: che essi posseggono oltre l'integrale delle forze vive, altri $(n-1)$ integrali quadratici ortogonali nelle componenti di velocità, essendo n il numero dei gradi di libertà del sistema.

Poichè questa proprietà è solo incidentalmente notata da Liouville e da Stäckel, e si ignora se essa appartiene unicamente ai casi da essi studiati, o se è comune ad altri; così mi è parso utile intraprendere la ricerca diretta dei problemi, che ammettono, oltre l'integrale delle forze vive, altri integrali quadratici ortogonali, nella ipotesi in cui la espressione della forza viva è riducibile a forma ortogonale.

Ho risoluta compiutamente la questione per $n=3$.

Per n qualunque, ho dimostrato un teorema, che permette di associare al caso di moto considerato da Stäckel, altri $(n-2)$ casi, pei quali esistono:

$$n-2,\ n-3, \dots 3,\ 2,\ 1,$$

integrali quadratici ortogonali, oltre quello delle forze vive.

(*) *Comptes Rendus*, 6 marzo 1893.

(**) Journal de Liouville, 1.ª serie, tomi XI e XII; e *Additions à la Connaissance des Temps pour 1850.*

Si ha così una speciale classificazione dei problemi della meccanica, secondo il numero degli integrali quadratici ortogonali, che essi ammettono.

I.

Abbiasi un problema di meccanica, definito dalla semiforza viva:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} a_{r0}\, q'^2_r, \qquad \left(q'_r = \frac{dq_r}{dt}\right),$$

e dalla funzione delle forze:

$$U = U(q_1\, q_2 \ldots q_n),$$

dove le a_{r0} si suppongono funzioni dei soli parametri $q_1\, q_2 \ldots q_n$, che individuano la posizione del sistema.

Mi propongo di determinare le espressioni delle a_{r0} e della U in guisa che il problema, oltre l'integrale delle forze vive:

$$H = T - U = h\,(\text{costante}),$$

ammetta un secondo integrale quadratico:

$$H_1 = T_1 - U_1 = \alpha_1\,(\text{costante}),$$

dove:

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} a_{r1}\, q'^2_r; \qquad U_1 = U_1(q_1\, q_2 \ldots q_n),$$

essendo le a_{r1} funzioni delle sole $q_1\, q_2 \ldots q_n$.

Perchè ciò sia, è necessario e sufficiente che, espresse le T e T_1 a mezzo delle

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial q'_r} = a_{r0}\, q'_r,$$

risulti identicamente soddisfatta l'equazione:

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial H_1}{\partial q_r} - \frac{\partial H}{\partial q_r}\frac{\partial H_1}{\partial p_r}\right) = 0. \tag{1}$$

Questa equazione, quando si osservi che:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\frac{p_r^2}{a_{r0}}, \qquad T_1 = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\frac{a_{r1}\, p_r^2}{a^2_{r0}},$$

si scinde nelle altre:

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial p_r}\frac{\partial T_1}{\partial q_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}\frac{\partial T_1}{\partial p_r}\right)=0 \tag{1'}$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial p_r}\frac{\partial U_1}{\partial q_r}-\frac{\partial T_1}{\partial p_r}\frac{\partial U}{\partial q_r}\right)=0. \tag{1''}$$

Occupiamoci per ora della (1'), nella quale trovansi contenute le condizioni che si richieggono, perchè le equazioni delle geodetiche ammettano l'integrale quadratico:

$$T_1=\alpha_1.$$

Essa dà luogo alle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni:

$$\frac{1}{a_{r0}}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{a_{s1}}{a_{s0}}\right)-\frac{a_{r1}}{a^2_{r0}}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{1}{a_{s0}}\right)=0, \qquad (r,\ s=1,\ 2,\dots,\ n). \tag{2}$$

Separiamo le (2) in due gruppi:
quello che si ottiene per $r=s$

$$\frac{1}{a_{r0}}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{a_{r1}}{a_{r0}}\right)-\frac{a_{r1}}{a^2_{r0}}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{1}{a_{r0}}\right)=0, \qquad (r=1,\ 2,\dots,\ n), \tag{2'}$$

quello che si ottiene per $r \neq s$

$$\frac{1}{a_{r0}}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{a_{s1}}{a^2_{s0}}\right)-\frac{a_{r1}}{a^2_{r0}}\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{1}{a_{s0}}\right)=0, \qquad \begin{pmatrix} r,\ s=1,\ 2,\dots,\ n \\ r\neq s \end{pmatrix}. \tag{2''}$$

Dalla equazione (2') si ha:

$$\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\log\frac{a_{r1}}{a_{r0}}\right)=0,$$

donde:

$$\frac{a_{r1}}{a_{r0}}=\theta_r^{(1)}(\text{non } q_r), \qquad (r=1,\ 2,\dots,\ n), \tag{3}$$

dove $\theta_r^{(1)}$ è una funzione arbitraria non contenente la q_r.

Dalla (2'') si trae:

$$\frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\theta_s^{(1)}-\theta_r^{(1)}}{a_{s0}}\right)=0,$$

da cui:

$$a_{s0}=(\theta_s^{(1)}-\theta_r^{(1)})\,F_{rs}, \qquad (r,\ s=1,\ 2,\dots,\ n,\ r\neq s),$$

essendo F_{rs} una funzione arbitraria non contenente la q_r.

Le equazioni (2) sono così completamente integrate, e la risoluzione del problema è ricondotta allo studio delle equazioni funzionali (3) e (4).

II.

1. Studiamo innanzi tutto il

Caso di $n = 3$.

Le equazioni (3) e (4) danno:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{11}}{a_{10}} &= \theta_1^{(1)} (\text{non } q_1) \\ \frac{a_{21}}{a_{20}} &= \theta_2^{(1)} (\text{non } q_2) \\ \frac{a_{31}}{a_{30}} &= \theta_3^{(1)} (\text{non } q_3), \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{10} &= (\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)}) F_{21} = (\theta_1^{(1)} - \theta_3^{(1)}) F_{31} \\ a_{20} &= (\theta_2^{(1)} - \theta_1^{(1)}) F_{12} = (\theta_2^{(1)} - \theta_3^{(1)}) F_{32} \\ a_{30} &= (\theta_3^{(1)} - \theta_1^{(1)}) F_{13} = (\theta_3^{(1)} - \theta_2^{(1)}) F_{23}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Dal sistema (4') si deduce l'equazione:

$$\frac{F_{13}}{F_{12}} \cdot \frac{F_{21}}{F_{23}} \cdot \frac{F_{32}}{F_{31}} = -1\,. \tag{5}$$

Le prime due equazioni dello stesso sistema si possono scrivere così:

$$\frac{\theta_1^{(1)} - \theta_3^{(1)}}{\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)}} = \frac{F_{21}}{F_{31}}, \qquad \frac{\theta_3^{(1)} - \theta_2^{(1)}}{\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)}} = \frac{F_{12}}{F_{32}}\,.$$

Sommando si ha:

$$\frac{F_{12}}{F_{32}} + \frac{F_{21}}{F_{31}} = 1, \tag{5'}$$

Evidentemente le (5) e (5') possono sostituire due equazioni del sistema (4').

Esaminiamo l'equazione (5). Essa è della forma:

$$\psi_1(q_2 q_3) \cdot \psi_2(q_1 q_3) \cdot \psi_3(q_1 q_2) = -1\,.$$

Con derivazioni si ottiene:

$$\frac{1}{\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial q_3} = -\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3} = f_3(q_3)$$

$$\frac{1}{\psi_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial q_2} = -\frac{1}{\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2} = f_2(q_2)$$

$$\frac{1}{\psi_3}\frac{\partial\psi_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial q_1} = f_1(q_1),$$

dove f_1, f_2, f_3 sono funzioni arbitrarie dei rispettivi argomenti.

Integrando, si hanno per le ψ_1, ψ_2, ψ_3 le seguenti espressioni:

$$\psi_1 = \frac{\varphi_{33}(q_3)}{\varphi_{23}(q_2)}, \qquad \psi_2 = \frac{\varphi_{13}(q_1)}{\varphi_{33}(q_3)}, \qquad \psi_3 = -\frac{\varphi_{23}(q_2)}{\varphi_{13}(q_1)},$$

essendo φ_{13} φ_{23} φ_{33} funzioni arbitrarie del solo argomento indicato.

Dalla forma delle ψ si deduce quella delle F, che compajono nella (5): e si ha:

$$\left.\begin{array}{ll} F_{13} = \varphi_{33}\, w_1(q_2 q_3), & F_{12} = \varphi_{23}\, w_1(q_2 q_3) \\ F_{21} = \varphi_{13}\, w_2(q_1 q_3), & F_{23} = \varphi_{33}\, w_2(q_1 q_3) \\ F_{32} = -\varphi_{23}\, w_3(q_1 q_2), & F_{31} = \varphi_{13}\, w_3(q_1 q_2), \end{array}\right\} \tag{6}$$

dove le $w_1\, w_2\, w_3$ sono funzioni arbitrarie degli argomenti posti in evidenza.

Tenendo conto delle (6), la (5′) diventa:

$$\frac{w_2}{w_3} - \frac{w_1}{w_3} = 1,$$

ossia:

$$w_1(q_2 q_3) - w_2(q_1 q_3) + w_3(q_1 q_2) = 0. \tag{7}$$

Se ora si indicano con φ_{12}, φ_{22}, φ_{32} tre funzioni arbitrarie, la 1.ª della sola q_1, la 2.ª della sola q_2, la 3.ª della sola q_3, dalla equazione (7) si trae:

$$w_1 = \varphi_{32}(q_3) - \varphi_{22}(q_2)$$

$$w_2 = \varphi_{32}(q_3) - \varphi_{12}(q_1)$$

$$w_3 = \varphi_{22}(q_2) - \varphi_{12}(q_1).$$

Dopo ciò, consideriamo la 1.ª delle equazioni (4′):

$$a_{10} = (\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)})\, F_{21} = (\theta_1^{(1)} - \theta_3^{(1)})\, F_{31}.$$

Da questa si ha:

$$\theta_1^{(1)}(F_{21} - F_{31}) - \theta_2^{(1)} F_{21} + \theta_3^{(1)} F_{31} = 0,$$

ossia, in virtù delle (6) e (7):

$$\varphi_{13}(\theta_1^{(1)} w_1 - \theta_2^{(1)} w_2 + \theta_3^{(1)} w_3) = 0,$$

ed infine, poichè φ_{13} deve supporsi differente da zero, si perviene alla:

$$\theta_1^{(1)} w_1 - \theta_2^{(1)} w_2 + \theta_3^{(1)} w_3 = 0.$$

Questa equazione è analoga alla (7), e dà:

$$\theta_1^{(1)} = \frac{\varphi_{21}(q_2) - \varphi_{31}(q_3)}{\varphi_{32}(q_3) - \varphi_{22}(q_2)}$$

$$\theta_2^{(1)} = \frac{\varphi_{13}(q_1) - \varphi_{31}(q_3)}{\varphi_{32}(q_3) - \varphi_{12}(q_1)}$$

$$\theta_3^{(1)} = \frac{\varphi_{11}(q_1) - \varphi_{21}(q_2)}{\varphi_{22}(q_2) - \varphi_{12}(q_1)},$$

dove le φ_{11}, φ_{21}, φ_{31} sono altre funzioni arbitrarie di q_1, q_2, q_3 rispettivamente.

Le espressioni trovate per le F e per le θ ci permettono di assegnare le espressioni di a_{10}, a_{20}, a_{30}.

Si ha infatti:

$$a_{10} = (\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)}) F_{21} = \varphi_{13} \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & 1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 1 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_{22} & 1 \\ \varphi_{32} & 1 \end{vmatrix}}.$$

Allo stesso modo si ottiene:

$$a_{20} = -\varphi_{23} \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & 1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 1 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_{12} & 1 \\ \varphi_{32} & 1 \end{vmatrix}}, \qquad a_{30} = \varphi_{33} \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & 1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 1 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_{12} & 1 \\ \varphi_{22} & 1 \end{vmatrix}}$$

Per dare miglior forma a queste espressioni, moltiplichiamo numeratore denominatore di a_{10} per $\varphi_{23} \cdot \varphi_{33}$, e portiamo il fattore esterno φ_{13} a moltiplicatore della 1.ª linea del determinante numeratore.

Con ciò a_{10} assume la forma:

$$a_{10} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{11}\,\varphi_{13}, & \varphi_{12}\,\varphi_{13}, & \varphi_{13} \\ \varphi_{21}\,\varphi_{23}, & \varphi_{22}\,\varphi_{23}, & \varphi_{23} \\ \varphi_{31}\,\varphi_{33}, & \varphi_{32}\,\varphi_{33}, & \varphi_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_{22}\,\varphi_{23}, & \varphi_{23} \\ \varphi_{32}\,\varphi_{33}, & \varphi_{33} \end{vmatrix}}$$

Operiamo analogamente sulle espressioni di a_{20}, a_{30} e denotiamo ancora con φ_{11}, $\varphi_{12}, \ldots$ i prodotti $\varphi_{11}\varphi_{13}$, $\varphi_{12}\varphi_{13}, \ldots$

Se poniamo allora:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix},$$

e diciamo Φ_{ks} il complemento algebrico dell'elemento φ_{ks}, si ha:

$$a_{k0} = \frac{\Phi}{\Phi_{ki}}, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$\theta_k^{(1)} = \frac{\Phi_{k2}}{\Phi_{k1}}, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

e quindi, in virtù delle (3′):

$$a_{k1} = \frac{\Phi_{k2}}{\Phi_{k1}}\, a_{k0} = \frac{\Phi\,\Phi_{k2}}{\Phi^2_{k1}}.$$

È importante notare che, scambiando nel determinante Φ la 3.ª colonna con la 2.ª, le a_{10}, a_{20}, a_{30} non cangiano nè di valore nè di segno: mentre le $\theta_1^{(1)}$, $\theta_2^{(1)}$, $\theta_3^{(1)}$ si cangiano nelle:

$$\theta_k^{(2)} = \frac{\Phi_{k3}}{\Phi_{k1}}, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

Se ne deduce la esistenza di un altro integrale quadratico, definito dalle formole:

$$a_{k2} = \frac{\Phi_{k3}}{\Phi_{k1}}\, a_{k0} = \frac{\Phi\,\Phi_{k3}}{\Phi^2_{k1}}, \qquad (k = 1, 2, 3).$$

E si conchiude che:

Se la forza viva di un sistema materiale è riducibile alla forma:

$$2T = \sum_{r=1}^{r=3} \frac{\Phi}{\Phi_{r1}}\, q'^2_r, \tag{A}$$

allora, oltre l'integrale delle forze vive:

$$T = h,$$

le equazioni delle geodetiche ammettono due integrali quadratici ortogonali della forma:

$$T_s = \sum_{r=1}^{3} \frac{\Phi\,\Phi_{r,s+1}}{\Phi_{r1}} = \alpha_s, \qquad (s = 1,\ 2).$$

Si ricade così nel teorema di Stäckel.

2. Passiamo ora a studiare un

Caso di eccezione.

I ragionamenti svolti debbono ritenersi validi solo nel caso in cui le $\theta_1^{(1)}$, $\theta_2^{(1)}$, $\theta_3^{(1)}$ siano differenti fra loro.

Se infatti si supponesse:

$$\theta_1^{(1)} = \theta_2^{(1)} = \theta_{12}(q_3),$$

allora per a_{10} si avrebbe:

$$a_{10} = (\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)})\,F_{21} = \frac{0}{\frac{1}{F_{21}}}.$$

E se si vuole che a_{10} sia differente da zero, è necessario che a_{10} assuma la forma $\frac{0}{0}$ e che quindi si abbia:

$$\frac{1}{F_{21}} = 0.$$

L'equazione (5) perde in tal caso ogni significato, ed occorre perciò riprendere in esame il sistema (4').

In virtù della ipotesi:

$$\theta_1^{(1)} = \theta_2^{(1)} = \theta_{12}(q_3),$$

dove θ_{12} è una funzione arbitraria della sola q_3, le equazioni del sistema (4') diventano:

$$a_{10} = (\theta_{12} - \theta_3^{(1)})\,F_{31}$$

$$a_{20} = (\theta_{12} - \theta_3^{(1)})\,F_{32}$$

$$a_{30} = (\theta_3^{(1)} - \theta_{12})\,F_{13} = (\theta_3^{(1)} - \theta_{12})\,F_{23}$$

Dalla 3.ª delle precedenti equazioni si trae:

$$F_{13} = F_{23} = F_{12}(q_3),$$

dove $F_{12}(q_3)$ è una funzione arbitraria della sola q_3.

Deriva da ciò che: *Se la forza viva del sistema è riducibile alla forma:*

$$2\,T = (\theta_{12} - \theta_3^{(1)})\,(F_{31}\,q'^2_1 + F_{32}\,q'^2_2 + F_{12}(q_3)\,q'^2_3), \tag{B}$$

le equazioni delle geodetiche, oltre l'integrale delle forze vive:

$$2\,T = \text{costante},$$

ammettono un secondo integrale quadratico:

$$2\,T_1 = (\theta_{12} - \theta_3^{(1)})\left\{\theta_{12}(F_{31}\,q'^2_1 + F_{32}\,q'^2_2) + \theta_3^{(1)}\,F_{12}\,q'^2_3\right\} = \text{costante}.$$

I risultati precedenti si potranno intanto compendiare nel seguente

Teorema.

Perchè un sistema con tre gradi di libertà, la cui forza viva si suppone ridotta a forma ortogonale, sia tale che le equazioni delle geodetiche ammettano, oltre l'integrale delle forze vive, altri integrali quadratici ortogonali, è necessario e sufficiente che la espressione della forza viva sia ulteriormente riducibile od alla forma:

$$2\,T = \sum_{r=1}^{3} \frac{\Phi}{\Phi_{r1}}\,q'^2_r, \tag{A}$$

od alla forma:

$$2\,T = (\theta_{12}(q_3) - \theta_3^{(1)}(q_1 q_2))\,(F_{31}(q_1 q_2)\,q'^2_1 + F_{32}(q_1 q_2)\,q'^2_2 + F_{12}(q_3)\,q'^2_3). \tag{B}$$

Nel 1.º caso esistono due integrali quadratici ortogonali, nel 2.º caso ne esiste uno solo.

Se si suppone che le tre variabili si riducano a due, le espressioni (A) e (B) coincidono entrambe con la nota forma di Liouville.

III.

Deduciamo ora alcune soluzioni importanti nel

Caso di n qualunque.

Le equazioni che vogliono esser soddisfatte sono compendiate nella:

$$a_{r0} = (\theta_r^{(1)} - \theta_s^{(1)}) F_{sr}\,, \qquad \left(\begin{matrix} r,\ s = 1,\ 2, \ldots\ n \\ r \neq s \end{matrix}\right).$$

Da queste equazioni si possono per $a_{10};\ a_{20}, \ldots, a_{n0}$ trovare direttamente le espressioni assegnate da Stäckel, le quali però in questo caso generale non si presentano come uniche.

Per intanto quando si ponga:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \varphi_{n3} \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$$

dove φ_{rs} è una funzione arbitraria della sola q_r; ed inoltre si chiami con Φ_{rs} il complemento algebrico dell'elemento φ_{rs}, si ha:

$$a_{k0} = \frac{\Phi}{\Phi_{k1}} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_k^{(1)} &= \frac{\Phi_{k2}}{\Phi_{k1}} \\ a_{k1} = \frac{\Phi_{k2}}{\Phi_{k1}}\, a_{k0} &= \frac{\Phi\,\Phi_{k2}}{\Phi^2_{k1}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Si sa poi che in tal caso, oltre l'integrale definito dalle (9), esistono altri $(n-2)$ integrali quadratici definiti dalle formole:

$$\left.\begin{array}{l} \theta_k^{(s)} = \dfrac{\Phi_{k,s+1}}{\Phi_{k1}} \\ a_{ks} = \dfrac{\Phi\,\Phi_{k,s+1}}{\Phi^2_{k1}}, \end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{l} s = 2,\ 3, \ldots\ n-1 \\ k = 1,\ 2, \ldots\ n \end{array}\right).$$

Questi risultati sono validi solo quando si supponga:

$$\theta_r^{(1)} \neq \theta_s^{(1)};$$

perchè, se si supponesse:

$$\theta_r^{(1)} = \theta_s^{(1)},$$

il determinante Φ avrebbe due colonne eguali, e sarebbe perciò identicamente uguale a zero: con che le a_{r0} perderebbero ogni significato.

Studiamo questo

Caso di eccezione,

e, per porci nelle condizioni più generali, supponiamo che si abbia:

$$\theta_1^{(1)} = \theta_2^{(1)} = \cdots = \theta_r^{(1)} = \theta^{(1)}\ (\text{non}\ q_1 q_2 \ldots q_r),$$

dove $\theta^{(1)}$ è una funzione arbitraria delle sole $q_{r+1}, q_{r+2}, \ldots q_n$.

Le equazioni del sistema (4) in tal caso diventano:

$$\left.\begin{array}{c} a_{h0} = (\theta^{(1)} - \theta^{(1)}_{r+1}) F_{r+1,h} = (\theta^{(1)} - \theta^{(1)}_{r+2}) F_{r+2,h} = \cdots = (\theta^{(1)} - \theta_n^{(1)}) F_{nh} \\ (h = 1,\ 2, \ldots\ r) \\ a_{k0} = (\theta_k^{(1)} - \theta^{(1)}) F_{1k} = (\theta_k^{(1)} - \theta^{(1)}) F_{2k} = \cdots = \\ = \cdots = (\theta_k^{(1)} - \theta^{(1)}_{r+1}) F_{r+1,k} = \cdots = (\theta_k^{(1)} - \theta_n^{(1)}) F_{nk} \\ (k = r+1,\ r+2, \ldots\ n). \end{array}\right\} \quad (10)$$

Consideriamo le equazioni corrispondenti ai coefficienti a_{h0}. Da esse si trae:

$$\frac{a_{h0}}{a_{r0}} = \frac{F_{r+1,h}}{F_{r+1,r}} = \frac{F_{r+2,h}}{F_{r+2,r}} = \cdots = \frac{F_{nh}}{F_{nr}} = \psi_h(q_1 q_2 \ldots q_r)$$

$$(h = 1,\ 2, \ldots\ r-1),$$

dove ψ_h deve di necessità supporsi funzione delle sole $q_1 q_2 \ldots q_r$.

Si ha quindi:

$$a_{h0} = \psi_h\, a_{r0}. \qquad (11)$$

La formola (11), così dedotta, ci permette di conoscere le espressioni di $a_{10}, a_{20}, \ldots a_{r-1,0}$ quando sia conosciuta la espressione di a_{r0}.

Esaminiamo ora le equazioni corrispondenti ai coefficienti a_{k0}, e di esse consideriamo le seguenti:

$$a_{k0} = (\theta_k^{(1)} - \theta^{(1)}) F_{1k} = (\theta_k^{(1)} - \theta^{(1)}) F_{2k} = \cdots = (\theta_k^{(1)} - \theta^{(1)}) F_{rk}$$
$$(k = r+1, r+2, \ldots n).$$

Da queste equazioni si cava:

$$F_{1k} = F_{2k} = \cdots = F_{rk} = F_k (\text{non } q_1 q_2 \ldots q_r)$$
$$(k = r+1, r+2, \ldots n),$$

dove F_k è una funzione arbitraria delle $q_{r+1}, q_{r+2}, \ldots q_n$.

In virtù delle precedenti deduzioni, il sistema (10) si riduce al sistema (11):

$$a_{h0} = \psi_h \cdot a_{r0}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, r-1),$$

ed al sistema:

$$\left.\begin{aligned} a_{r0} &= (\theta^{(1)} - \theta^{(1)}_{r+1}) F_{r+1,r} = (\theta^{(1)} - \theta^{(1)}_{r+2}) F_{r+2,r} = \cdots = (\theta^{(1)} - \theta_n^{(1)}) F_{nr} \\ a_{k0} &= (\theta_k^{(1)} - \theta^{(1)}) F_k = (\theta_k^{(1)} - \theta^{(1)}_{r+1}) F_{r+1,k} = \cdots = (\theta_k^{(1)} - \theta_n^{(1)}) F_{nk} \\ &(k = r+1, r+2, \ldots n). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Ciò posto, si pensi ad un sistema materiale con $(n - r + 1)$ gradi di libertà, si supponga che $a_{r0}, a_{r+1,0}, \ldots a_{n0}$ sieno i coefficienti della espressione della forza viva e che sieno $q_r, q_{r+1}, \ldots q_n$ le variabili indipendenti.

Se si cercano le condizioni, che devono esser verificate, acciò, per un tale sistema, le equazioni delle geodetiche ammettano un integrale quadratico ortogonale, oltre quello delle forze vive; tali condizioni saranno espresse da equazioni analoghe alle (12); e le (12) da esse differiranno solo in quanto la q_r nelle funzioni, in cui deve esser contenuta, entra accompagnata dalle $q_1 q_2 \ldots q_{r-1}$.

Poniamo allora:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{r1}(q_1 q_2 \ldots q_r), & \varphi_{r2}(q_1 q_2 \ldots q_r), \ldots, & \varphi_{r,(n-r+1)}(q_1 q_2 \ldots q_r) \\ \varphi_{r+1,1}(q_{r+1}), & \varphi_{r+1,2}(q_{r+1}), \ldots, & \varphi_{r+1,(n-r+1)}(q_{r+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(q_n), & \varphi_{n2}(q_n), \ldots, & \varphi_{n,n-r+1}(q_n) \end{vmatrix},$$

dove φ_{ks} è una funzione arbitraria delle $q_1 q_2 \ldots q_r$, per $k = r$, ed è una funzione arbitraria della sola q_k per $k \neq r$.

Indichiamo con Φ_{ks} il complemento algebrico dell'elemento φ_{ks}.

Fatte queste posizioni, è evidente, in virtù degli esposti ragionamenti, che le formole:

$$a_{k0} = \frac{\Phi}{\Phi_{k1}}, \qquad (k = r, \; r+1, \ldots, \; n)$$

$$\theta^{(1)} = \frac{\Phi_{r2}}{\Phi_{r1}}, \qquad \theta_k^{(1)} = \frac{\Phi_{k2}}{\Phi_{k1}}, \qquad (k = r+1, \; r+2, \ldots, \; n),$$

definiscono una soluzione del sistema (12).

Tenendo conto dei risultati ottenuti, e delle equazioni (11), si può concludere che il sistema (10) è soddisfatto, quando si abbia:

$$\left.\begin{aligned} a_{h0} &= \psi_h a_{r0} = \psi_h (q_1 q_2 \ldots q_r) \frac{\Phi}{\Phi_{r1}}, \qquad (h = 1, \; 2, \ldots, \; r-1) \\ a_{k0} &= \frac{\Phi}{\Phi_{k1}}, \qquad (k = r, \; r+1, \ldots, \; n). \end{aligned}\right\} \quad \text{(C)}$$

Le formole (C) dànno i coefficienti che figurano nella espressione della forza viva:

$$2\,T = \sum_{r=1}^{n} a_{r0}\, q'^2_r.$$

I coefficienti che compajono nella espressione:

$$2\,T_1 = \sum_{r=1}^{n} a_{r1}\, q'^2_r,$$

del secondo integrale quadratico son dati dalle formole:

$$a_{h1} = \theta^{(1)} a_{h0} = \theta^{(1)} \psi_h a_{r0} = \psi_h \frac{\Phi\, \Phi_{r2}}{\Phi^2_{r1}}$$

$$(h = 1, \; 2, \ldots, \; (r-1))$$

$$a_{k1} = \theta_k^{(1)} a_{k0} = \frac{\Phi\, \Phi_{k2}}{\Phi^2_{k1}}, \qquad (k = r, \; r+1, \ldots, \; n).$$

Se nel determinante φ si tien ferma la 1.ª colonna, e si scambia la 2.ª con la 3.ª, con la 4.ª, ..., con la $(n - r + 1)^{\text{esima}}$ successivamente, le formole (C) rimangono inalterate: ma le $\theta^{(1)}$ assumono nei diversi casi espressioni differenti.

Si hanno per esse $(n-r-1)$ sistemi di valori, ed in corrispondenza si avranno altrettanti integrali quadratici ortogonali della forma:

$$T_s = \frac{1}{2} \sum a_{rs} q_r'^2 = \alpha_s \,(\text{costante}),$$

dove:

$$a_{hs} = \theta^{(s)} a_{h0} = \theta^{(s)} \psi_h a_{r0} = \psi_h \frac{\Phi \Phi_{r,s+1}}{\Phi^2_{r1}}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, r-1)$$
$$(s = 2, 3, \ldots, (n-r))$$
$$a_{ks} = \theta_k^{(s)} a_{k0} = \frac{\Phi \Phi_{k,s+1}}{\Phi^2_{k1}}$$
$$(k = r, r+1, \ldots, n).$$

I risultati precedenti si potranno intanto così riassumere:

Se la espressione della forza viva di un sistema materiale in movimento è riducibile alla forma:

$$2T = \frac{\Phi}{\Phi_{r1}} \sum_{h=1}^{r-1} \psi_h (q_1 q_2 \ldots q_r) q'^2_h + \sum_{k=r}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_{k1}} q'^2_k,$$

allora le equazioni delle geodetiche, oltre l'integrale delle forze vive:

$$T = h,$$

ammettono altri $(n-r)$ integrali quadratici ortogonali della forma:

$$\frac{\Phi \Phi_{r,s+1}}{\Phi^2_{r1}} \sum_{h=1}^{r-1} \psi_h q'^2_h + \sum_{k=r}^{n} \frac{\Phi \Phi_{k,s+1}}{\Phi^2_{k1}} q'^2_k = \alpha_s$$
$$(s = 1, 2, 3, \ldots, n-r).$$

IV.

I risultati sopra esposti si possono estendere al caso, in cui esista una funzione U delle forze.

Per tal caso è necessario sia soddisfatta l'equazione (1'').

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial p_r} \frac{\partial U_1}{\partial q_r} - \frac{\partial T_1}{\partial p_r} \frac{\partial U}{\partial q_r} \right) = 0,$$

la quale esprime che, oltre l'integrale delle forze vive:

$$H = T - U = h,$$

esiste anche l'integrale:

$$H_1 = T_1 - U_1 = \alpha_1.$$

dove T e T_1 hanno la forma innanzi assegnata.

L'equazione (1''), sviluppata, dà luogo al sistema:

$$\frac{\partial U_1}{\partial q_r} = \frac{a_{r1}}{a_{r0}} \frac{\partial U}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

ossia:

$$\frac{\partial U_1}{\partial q_r} = \theta_r^{(1)} \frac{\partial U}{\partial q_r},$$

da cui si deduce ancora:

$$\frac{\partial^2 (\theta_r^{(1)} - \theta_s^{(1)}) U}{\partial q_r \partial q_s} = 0, \qquad \begin{pmatrix} r, s = 1, 2, \ldots, n \\ r \neq s \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Il sistema (13) definisce la funzione U.

Se introduciamo la ipotesi ammessa:

$$\theta_1^{(1)} = \theta_2^{(1)} = \cdots = \theta_r^{(1)} = \theta^{(1)} = \frac{\Phi_{r2}}{\Phi_{r1}},$$

le equazioni (13) corrispondenti agli indici:

$$r, s = 1, 2, \ldots, r,$$

sono identicamente soddisfatte.

Pertanto, quando si osservi che:

$$\theta_r^{(1)} - \theta_s^{(1)} = \frac{\Phi_{r2}}{\Phi_{r1}} - \frac{\Phi_{s2}}{\Phi_{s1}} = \psi_{s1}^{(r2)} \frac{\Phi}{\Phi_{r1} \Phi_{s1}}.$$

dove $\psi_{s1}^{(r2)}$ è il complemento algebrico dell'elemento φ_{r2} nel minore Φ_{s1}; il sistema (13) assume la forma:

$$\frac{\partial^2 \dfrac{\psi_{s1}^{(r2)} \Phi}{\Phi_{r1} \Phi_{s1}} U}{\partial q_r \partial q_s} = 0.$$

E poichè $\psi_{s1}^{(r2)}$ non contiene nè la q_r nè la q_s, e dippiù è differente da zero, si avrà ancora:

$$\frac{\partial^2 \dfrac{\Phi U}{\Phi_{r1} \Phi_{s1}}}{\partial q_r \partial q_s} = 0. \tag{14}$$

Del sistema (14) consideriamo le equazioni:

$$\frac{\partial^2 \dfrac{\Phi U}{\Phi_{h1}\Phi_{k1}}}{\partial q_h \partial q_k} = 0, \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, r \\ k = r+1, r+2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

ed osserviamo che, per i valori considerati di h:

$$\theta_h^{(1)} = \theta^{(1)} = \frac{\Phi_{r2}}{\Phi_{r1}},$$

e l'ultimo sistema di equazioni è equivalente all'altro:

$$\frac{\partial^2 \dfrac{\Phi U}{\Phi_{r1}\Phi_{k1}}}{\partial q_h \partial q_k} = 0. \tag{15}$$

Dalle (15) si ha, integrando:

$$\frac{\Phi U}{\Phi_{r1}\Phi_{k1}} = \psi_h^{(k)}(\text{non } q_h) + \psi_k^{(h)}(\text{non } q_k),$$

dove $\psi_h^{(k)}$, $\psi_k^{(h)}$ sono simboli di funzioni arbitrarie.

Moltiplicando per Φ_{k1} primo e secondo membro dell'ultima equazione, ed immaginando incluso nella funzione $\psi_k^{(h)}$ il fattore Φ_{k1}, si potrà scrivere:

$$\frac{\Phi U}{\Phi_{r1}} = \Phi_{k1}\psi_h^{(k)}(\text{non } q_h) + \psi_k^{(h)}(\text{non } q_k). \tag{16}$$

Teniamo ora fisso l'indice h, e facciamo variare k da $r+1$ ad n.

Dall'esame della (16) si deduce che ΦU si può esprimere mediante la somma di due funzioni:

a) la prima contiene arbitrariamente tutte le variabili, ad eccezione della q_h, la quale vi entra soltanto nel fattore Φ_{k1};

b) la seconda contiene arbitrariamente le $q_1 q_2 \ldots q_r$ ed è tale funzione di $q_{r+1}, q_{r+2}, \ldots, q_n$ che, divisa per Φ_{r1} non contiene nè la q_{r+1}, nè la $q_{r+2}, \ldots$, nè la q_n.

Ne consegue che ΦU dev'esser della forma:

$$\Phi U = F_n(q_1 q_2 \ldots q_n) + \Phi_{r1} f_r(q_1 q_2 \ldots q_r),$$

dove la F_n contiene arbitrariamente tutte le variabili ad eccezione della q_h, e dove f_r è una funzione arbitraria delle $q_1 q_2 \ldots q_r$.

I ragionamenti fatti valgono per:

$$h = 1, 2, \ldots, r.$$

Si ha quindi per ΦU l'espressione:

$$\Phi U = F(q_1 q_2 \ldots q_n) + \Phi_{r1} f_r(q_1 q_2 \ldots q_r), \tag{16'}$$

in cui F, pur dipendendo da tutte le variabili, contiene però in modo arbitrario soltanto le $q_{r+1}, q_{r+2}, \ldots, q_n$.

Consideriamo ora le equazioni che si ottengono dal sistema:

$$\frac{\partial^2 \dfrac{\Phi U}{\Phi_{h1} \Phi_{k1}}}{\partial q_h \partial q_k} = 0,$$

quando si dia a k uno dei valori della serie:

$$r+1,\ r+2, \ldots, n,$$

e ad h si dieno i valori:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n,$$

subordinatamente alla condizione:

$$h \neq k.$$

Integrando queste equazioni, si avrà:

$$\frac{\Phi U}{\Phi_{k1}} = \Phi_{h1} \psi_k^{(h)}(\text{non } q_k) + \psi_h^{(k)}(\text{non } q_h)$$

$$\left(\begin{matrix} h = 1,\ 2, \ldots, n \\ k = r+1,\ r+2, \ldots, n \end{matrix} \qquad (h \neq k)\right).$$

Con considerazioni analoghe a quelle esposte innanzi si trova per ΦU l'espressione:

$$\Phi U = f(q_1 q_2 \ldots q_n) + \sum_{k=r+1}^{n} \Phi_{k1} f_k(q_k), \tag{16''}$$

dove $f_k(q_k)$ è una funzione arbitraria del solo argomento q_k, ed f_r pur essendo funzione di tutte le variabili, contiene in modo arbitrario soltanto le $q_1 q_2 \ldots q_r$.

Le (16′) e (16″) ci permettono di assegnare per U l'unica e più generale espressione:

$$U = \frac{\Phi_{r1}}{\Phi} f_r(q_1 q_2 \ldots q_r) + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\Phi_{k1}}{\Phi} f_k(q_k), \tag{17}$$

ossia:

$$U = \frac{f_r(q_1 q_2 \ldots q_r)}{a_{r0}} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{f_k(q_k)}{a_{k0}}.$$

essendo a_{r0}, a_{k0} i coefficienti che figurano nella espressione della forza viva.

Per la funzione U_1 si trarrebbe dalle equazioni precedenti l'espressione:

$$U_1 = \frac{\Phi_{r2}}{\Phi} f_r(q_1 q_2 \ldots q_r) + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\Phi_{k2}}{\Phi} f_k(q_k).$$

La funzione U, definita dalle (17) soddisfa anche alle equazioni analoghe alla (1''), che si ottengono quando, in luogo dell'integrale:

$$H_1 = T_1 - U_1 = \alpha_1,$$

si consideri l'integrale:

$$H_s = T_s - U_s = \alpha_s, \qquad (s = 2,\ 3, \ldots,\ (n-r)),$$

e si trova:

$$U_s = \frac{\Phi_{r,s+1}}{\Phi} f_r(q_1 q_2 \ldots q_r) + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\Phi_{k,s+1}}{\Phi} f_k(q_k)$$

$$(s = 1,\ 2, \ldots,\ n-r).$$

Le espressioni delle U, U_s corrispondenti al caso:

$$\theta_r^{(1)} \neq \theta_s^{(1)},$$

si deducono dalle (17) e (17'), facendo in esse $r = 1$.

Allora le U, U_s coincidono con quelle, che, allo scopo di generalizzare il teorema di Stäckel, furono dapprima assegnate dal dott. Burgatti (*), e poscia dal Goursat e dallo stesso Stäckel.

Pertanto i risultati ottenuti ci permettono di enunciare il seguente

Teorema.

Sieno $q_1 q_2 \ldots q_n$ le variabili indipendenti che definiscono la posizione di un sistema materiale in movimento, soggetto a forze che derivano da una funzione:

$$U(q_1 q_1 \ldots q_n),$$

e sia la forza viva espressa da:

$$2\,T = \sum_{r=1}^{n} a_{r0} q'^2_r,$$

con a_{r0} funzione delle sole variabili indipendenti.

(*) *Rend. del Circolo Matem. di Palermo,* tom. IX, fasc. III.

Si consideri il determinante:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{r1}(q_1 q_2 \dots q_r), & \varphi_{r2}(q_1 q_2 \dots q_r), \dots, & \varphi_{r,(n-r+1)}(q_1 q_2 \dots q_r) \\ \varphi_{r+1,1}(q_{r+1}), & \varphi_{r+1,2}(q_{r+1}), \dots, & \varphi_{r+1,(n-r+1)}(q_{r+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1}(q_n), & \varphi_{n2}(q_n), \dots, & \varphi_{n,(n-r+1)}(q_n) \end{vmatrix},$$

dove le:

$$\varphi_{r1}, \varphi_{r2}, \varphi_{r3}, \dots, \varphi_{r,(n-r+1)},$$

della 1.ª linea sono funzioni delle:

$$q_1 q_2 \dots q_r,$$

e le φ_{ks} delle altre linee sono funzioni arbitrarie della sola:

$$q_k.$$

Si rappresenti con Φ_{ks} il complemento algebrico dell'elemento φ_{ks}.
Sieno inoltre:

$$\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{r-1}$$

$$f_r,$$

funzioni arbitrarie di $q_1 q_2 \dots q_r$, ed:

$$f_{r+1}(q_{r+1}), \quad f_{r+2}(q_{r+2}), \dots, \quad f_n(q_n),$$

funzioni arbitrarie del solo argomento indicato.

Ciò posto,

Se $2T$ è riducibile alla forma:

$$2T = \sum_{h=1}^{r-1} \psi_h \frac{\Phi}{\Phi_{r1}} q'^2_h + \sum_{k=r}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_{k1}} q'^2_k,$$

e se la funzione U è definita dalla espressione:

$$U = \frac{\Phi_{r1} f_r(q_1 q_2 \dots q_r)}{\Phi} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\Phi_{k1}}{\Phi} f_k(q_k)$$

$$= \frac{f_r(q_1 q_2 \dots q_r)}{a_{r0}} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{f_k(q_k)}{a_{k0}},$$

allora, oltre l'integrale delle forze vive, esistono altri:

$$n - r,$$

integrali omogenei quadratici ortogonali della forma:

$$T_s - U_s = \alpha_s \,(\text{costante}),$$

dove:

$$\left.\begin{aligned} T_s &= \frac{\Phi\,\Phi_{r,s+1}}{\Phi^2_{r1}} \sum_{h=1}^{h=r-1} \psi_h\, q'^2_h + \sum_{k=r}^{n} \frac{\Phi\,\Phi_{k,s+1}}{\Phi^2_{k1}}\, q'^2_k, \\ &\text{ed:} \\ U_s &= \frac{\Phi_{r,s+1} f_r(q_1 q_2 \dots q_r)}{\Phi} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\Phi_{k,s+1}}{\Phi} f_k(q_k) \end{aligned}\right\} \quad (s = 1,\, 2, \dots, (n-r)).$$

Se $r = 1$ *le formole precedenti coincidono con quelle assegnate da* STÄCKEL, *ed il problema ammette* $(n-1)$ *integrali quadratici ortogonali.*

Se si fa successivamente:

$$r = 2,\ 3, \dots, (n-1),$$

si hanno altri:

$$n - 2,$$

problemi differenti, pei quali esistono rispettivamente:

$$n-2, \qquad n-3, \dots, \qquad 3,\ 2,\ 1,$$

integrali quadratici ortogonali, oltre quello delle forze vive, comune a tutti.

Roma, Aprile 1896.

La moltiplicazione complessa per $\sqrt{-23}$ delle funzioni ellittiche.

(*Del prof.* F. Brioschi, *Milano.*)

1. È noto come Halphen nella sua Memoria sopra questo argomento pubblicata dapprima nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, e riprodotta nel volume 3.° del suo *Traité des fonctions elliptiques*, pag. 151, faccia dipendere la soluzione del problema da una equazione:

$$F(e_1,\ e_2,\ e_3)=0, \tag{1}$$

essendo F una forma ternaria di terzo ordine.

È noto ancora come la moltiplicazione complessa per la quale il moltiplicatore μ è dato dalla:

$$\mu=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-23}), \tag{2}$$

sia connessa alla trasformazione del sesto ordine delle funzioni ellittiche.

Ne deriva che questa trasformazione dovrà presentare una equazione la quale nel caso particolare riducasi alla (1). La ricerca di essa ed alcune sue conseguenze, formano lo scopo di questo breve scritto.

2. Richiamo alcuni risultati contenuti nella mia Memoria: « La trasformazione d'ordine pari delle funzioni ellittiche » pubblicata in questi Annali (tomo XXII, 1894) mantenendo le stesse denominazioni.

La equazione modulare per $n=6$, è dimostrato in quel lavoro, è la seguente:

$$(s_1-e)^4-\frac{1}{2}G_2(s_1-e)^2-G_3(s_1-e)-\frac{1}{48}G_2^2=0, \tag{3}$$

nella quale:

$$G_2=60e^2-4g_2; \qquad G_3=14g_2e+22g_3.$$

Inoltre gli invarianti γ_2, γ_3 trasformati hanno i valori:

$$\gamma_2 = 120(s_1 - e)^2 - 9\,G_2, \qquad \gamma_3 = 280(s_1 - e)^3 - 42\,G_2(s_1 - e) - 27\,G_3,$$

indicando con e una delle radici e_1, e_2, e_3.

Posto:

$$s_1 = y - e,$$

la equazione (3) prende la forma:

$$y^4 - 8\,e\,y^3 + 2(g_2 - 3\,e^2)\,y^2 - \frac{1}{3}(g_2 - 3\,e^2)^2 = 0, \tag{4}$$

o ponendo:

$$h(e) = 3\,e^2 - \frac{1}{4}g_2, \qquad p = 3\,e - 2\sqrt{h(e)}, \qquad q = 3\,e + 2\sqrt{h(e)},$$

la:

$$4\,y^2(y - p)(y - q) - (y^2 - p\,q)^2 = 0, \tag{5}$$

ed i valori di γ_2, γ_3 conducono alla:

$$\gamma_3 - 14\,e\,y_2 = 4 \cdot 7\left[10\,y^3 - 120\,e\,y^2 + 270\,e^2 y + 6\,g_2\,y - 11\,g_2\,e + \frac{79}{7}\,g_3\right]\cdot \tag{6}$$

Sieno:

$$e_1 > e_2 > e_3,$$

e supponiamo nelle formole superiori $e = e_1$. Si denominino con ε_1, ε_2, ε_3 i valori trasformati e quindi:

$$\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = -\frac{1}{4}\gamma_2, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \frac{1}{4}\gamma_3.$$

Le formole di trasformazione sopra indicate danno:

$$\varepsilon_1 = -2(e_1 + y) + 3\,q - \frac{2\,q\,(p - q)}{y - q}$$

$$\varepsilon_2 = -2(e_1 + y) + 3\,p + \frac{2\,p\,(p - q)}{y - p}$$

$$\varepsilon_3 = -2(e_1 + y) + 2\,\frac{p\,q}{y},$$

ed osservando che per la equazione (4) si ha:

$$\frac{p^2 q^2}{y^2} = 3(y^2 - 8\,e_1 y + 2\,p\,q),$$

si otterranno le tre relazioni seguenti:

$$pq\,\varepsilon_3 = 6y^3 - 48e_1y^2 + 10g_2y - 30e_1^2y - \frac{1}{2}g_2e_1 + \frac{3}{2}g_3$$

$$\varepsilon_3^2 + 4e_1\varepsilon_3 = 16\left(y^2 - 6e_1y + g_2 - \frac{13}{4}e_1^2\right)$$

$$\varepsilon_3^3 - 12e_1^2\varepsilon_3 = 16\left(4y^3 - 42e_1y^2 + 12g_2y - \frac{17}{4}g_2e_1 + \frac{55}{4}g_3\right),$$

dalle quali, moltiplicando la prima per 24, la seconda per $-5.6.e_1$, la terza per -1, e sommando si giunge alla:

$$-\varepsilon_3^3 - 5.6.e_1\varepsilon_3^2 + 24g_2\varepsilon - 3^2.4.5.e_1^2\varepsilon - 2.3^3.g_2e_1 - \frac{2.3^4.5}{7}g_3 =$$

$$= 8\left[10y^3 - 120e_1y^2 + 270e_1^2y + 6g_2y - 11g_2e_1 + \frac{79}{7}g_3\right],$$

la quale posta a confronto colla (6) dà:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_3 + 3^4.5.g_3 + 7\Big[\frac{1}{2}\varepsilon_3^3 + 3.5.e_1\varepsilon_3^2 + 2.3^2.5.e_1^2\varepsilon_3 - 2\gamma_2e_1 -& \\ -12g_2\varepsilon_3 + 3^3g_2e_1\Big] = 0,&\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

cioè *l'equazione cercata.*

Per la moltiplicazione sono:

$$\varepsilon_3 = \mu^2e_3, \qquad \gamma_2 = \mu^4g_2, \qquad \gamma_3 = \mu^6g_3,$$

e quando μ abbia il valore (2), ponendo con Halphen:

$$e_1 = \frac{1}{2}(2t-1)e_2, \qquad e_3 = -\frac{1}{2}(2t+1)e_2,$$

la equazione (7) diventa la:

$$7(17\mu^2 + 4.3^2)[4.19.t^3 - 3^2.7.t] + \frac{3}{2}(5\mu^2 + 4.3^2)(4.317.t^2 - 3^2) = 0,$$

che moltiplicata per $5\mu^2 + 19$ conduce alla equazione di Halphen (pag. 174):

$$7i\sqrt{23}(4.19.t^3 - 3^2.7.t) + \frac{3}{2}(4.317.t^2 - 3^2) = 0.$$

3. Posto:

$$v = \frac{y^2 - pq}{y^2},$$

la equazione (4) si trasforma nella:

$$\upsilon^3(\upsilon+8)=4^2\cdot\frac{(p-q)^2}{pq}(1-\upsilon),$$

e quindi se:

$$\delta=g_2^3-27g_3^2,\qquad D=G_2^3-27\,G_3^2,\qquad \Delta=\gamma_2^3-27\gamma_3^2,$$

si deducono le:

$$\frac{D}{\delta}=4^6\,\frac{1-\upsilon}{\upsilon^3(\upsilon+8)},\qquad \frac{\Delta}{\delta}=4^6\cdot\frac{(1-\upsilon)^5(\upsilon+8)}{\upsilon^5},$$

ed indicando il moltiplicatore con z, si ha:

$$z^{24}=4^6\cdot\frac{(1-\upsilon)^5(\upsilon+8)}{\upsilon^5},$$

ed analogamente si ottengono altre formole note della trasformazione.

Agosto, 1896.

Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di Lagrange.

(*Del prof.* F. Brioschi, *Milano.*)

1.° Le proprietà di quella equazione differenziale lineare la quale considerata per la prima volta da Lagrange fu poi denominata equazione differenziale aggiunta di Lagrange, furono stabilite da Jacobi, da Hesse, da Bertrand, da Darboux. Questi autori hanno dimostrato che allorquando la equazione differenziale aggiunta ammetta gli stessi integrali che l'equazione differenziale primitiva, cioè sia ad essa *equivalente*, sussiste fra quegli integrali e le loro derivate un determinato numero di relazioni quadratiche (*).

In modo particolare se n è un numero dispari, ed $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rappresentano un sistema fondamentale di integrali della equazione differenziale lineare:

$$y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} p_2 y^{(n-1)} + \cdots + n p_{n-1} y' + p_n y = 0, \tag{1}$$

se l'equazione differenziale aggiunta di Lagrange è equivalente alla superiore, si hanno le:

$$\left.\begin{array}{l} f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ f(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f\left(y_1^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}, y_2^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}, \ldots, y_n^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\right) = 0 \\ f\left(y_1^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, y_2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \ldots, y_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right) = 1, \end{array}\right\} \tag{2}$$

essendo f una forma quadratica a coefficienti costanti.

(*) Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Deuxième partie. Chapitre V.

2.° Nel volume 13.° di questi *Annali* (anno 1885) e nel 14.° degli *Acta Mathematica* (anno 1890) ho dato una formola generale di derivazione successiva per una forma $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ d'ordine m qualsivoglia, ai coefficienti costanti.

Supponendo che le $n-1$ quantità $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ possano assumere i valori $0, 1, 2, \ldots, m$; posto:

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1},$$

ed:

$$f^{(r)}(y_1) = \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r} f_r(y_1),$$

ed analogamente per le altre derivate, indico con $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ la espressione:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) = f_r(y_1) y'^{r_1}_1 y''^{r_2}_1 \ldots y_1^{(n-1)^{r_{n-1}}} + \cdots$$

e quindi:

$$(0, 0, \ldots, 0) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) = 0 \quad \text{per} \quad r > m$$
$$(1, 0, 0, \ldots, 0) = f_1(y_1) y'_1 + f_1(y_2) y'_2 + \cdots + f_1(y_n) y'_n$$
$$(2, 0, 0, \ldots, 0) = f_2(y_1) y'^2_1 + \cdots + 2 f_2(y_1, y_2) y'_1 y'_2 + \cdots$$

e così di seguito.

Ciò posto la formola di derivazione successiva è la seguente:

$$\frac{d(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})}{dx} = \sum_1^{n-2}{}_s\, r_s (r_1, r_2, \ldots, r_s - 1, r_{s+1} + 1 \ldots r_{n-1}) +$$
$$+ (m-r)(r_1 + 1, r_2, \ldots, r_n) -$$
$$- r_{n-1} \sum_2^n{}_s \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots s} p_s (r_1, r_2, \ldots, r_{n-s} + 1 \ldots r_{n-1} - 1).$$

Il numero delle espressioni $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ è evidentemente eguale a:

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}.$$

3.° Il caso che intendiamo qui considerare è quello in cui:

$$m = 2 \quad \text{e} \quad (0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

ed in conseguenza:

$$(1, 0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

In esso le altre $\frac{n^2+n-4}{2}$ quantità $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ si possono esprimere in funzione delle $\frac{n-1}{2}$ seguenti:

$$(2,\ 0,\ 0, \ldots,\ 0), \qquad (0,\ 2,\ 0, \ldots,\ 0), \qquad (0,\ 0,\ 2, \ldots,\ 0) \ldots$$

cioè dei primi membri delle equazioni (2). Queste però non sono fra loro indipendenti, ma bensì legate da $\frac{n+1}{2}$ relazioni fra esse e le loro derivate, ad eccezione del caso di $n=3$.

Consideriamo dapprima questo caso. La formola di derivazione diventa:

$$\frac{d(r_1,\ r_2)}{dx} = r_1(r_1-1,\ r_2+1) + (2-r)(r_1+1,\ r_2) -$$
$$- r_2 [3 p_2 (r_1+1,\ r_2-1) + p_3(r_1,\ r_2-1)],$$

da' cui:

$$\frac{d(0,\ 0)}{dx} = 2(1,\ 0), \qquad \frac{d(1,\ 0)}{dx} = (0,\ 1) + (2,\ 0), \qquad \frac{d(2,\ 0)}{dx} = 2(1,\ 1)$$

$$\frac{d(0,\ 1)}{dx} = (1,\ 1) - [3p_2(1,\ 0) + p_3(0,\ 0)]$$

$$\frac{d(1,\ 1)}{dx} = (0,\ 2) - [3p_2(2,\ 0) + p_3(1,\ 0)]$$

$$\frac{d(0,\ 2)}{dx} = -2[3p_2(1,\ 1) + p_3(0,\ 1)].$$

Supposto:

$$(0,\ 0) = 0, \qquad (2,\ 0) = \lambda,$$

si deducono le:

$$(1,\ 0) = 0, \qquad (0,\ 1) = -\lambda, \qquad (1,\ 1) = \frac{1}{2}\lambda',$$

e per la quarta:

$$(1,\ 1) = 0, \qquad \lambda = \text{cost.}$$

$$(0,\ 2) = 3p_2\lambda, \qquad \frac{d(0,\ 2)}{dx} = 2p_3\lambda,$$

da cui per l'ultima:

$$2p_3 - 3p'_2 = 0,$$

cioè nullo l'invariante della equazione differenziale (1), come è noto.

4.° Sia in secondo luogo $n=5$. La formola di derivazione è in questo caso:

$$\frac{d(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)}{dx}=r_1(r_1-1,\ r_2+1,\ r_3,\ r_4)+r_2(r_1,\ r_2-1,\ r_3+1,\ r_4)+$$
$$+r_3(r_1,\ r_2,\ r_3-1,\ r_4+1)+(2-r)(r_1+1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)-$$
$$-r_4[10p_2(r_1,\ r_2,\ r_3+1,\ r_4-1)+10p_3(r_1,\ r_2+1,\ r_3,\ r_4-1)+$$
$$+5p_4(r_1+1,\ r_2,\ r_3,\ r_4-1)+p_5(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4-1)].$$

Le funzioni $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ sono in numero di 15 e posto:

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0)=0,\qquad (2,\ 0,\ 0,\ 0)=\lambda,\qquad (0,\ 2,\ 0,\ 0)=\mu,$$

si ha:

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0)=0,$$

e le altre undici espressioni sono funzioni di λ e di μ; ma dalla formola di derivazione, esclusa la prima, si hanno quattordici relazioni, rimarranno quindi tre relazioni fra λ, μ e loro derivate.

Si avranno così:

$$(0,\ 1,\ 0,\ 0)=-\lambda,\qquad (1,\ 1,\ 0,\ 0)=\frac{1}{2}\lambda',\qquad (0,\ 0,\ 1,\ 0)=-\frac{3}{2}\lambda'$$
$$(1,\ 0,\ 1,\ 0)=\frac{1}{2}\lambda''-\mu,\qquad (0,\ 0,\ 0,\ 1)=-2\lambda''+\mu,\qquad (0,\ 1,\ 1,\ 0)=\frac{1}{2}\mu'$$
$$(1,\ 0,\ 0,\ 1)=\frac{1}{2}\lambda'''-\frac{3}{2}\mu',$$

ma:

$$\frac{d(0,\ 0,\ 0,\ 1)}{dx}=(1,\ 0,\ 0,\ 1)-[10p_2(0,\ 0,\ 1,\ 0)+10p_3(0,\ 1,\ 0,\ 0)+$$
$$+5p_4(1,\ 0,\ 0,\ 0)+p_5(0,\ 0,\ 0,\ 0)],$$

quindi si avrà la prima relazione fra λ, μ:

$$\mu'=\lambda'''+6p_2\lambda'+4p_3\lambda, \tag{3}$$

e per essa:

$$(0,\ 1,\ 1,\ 0)=\frac{1}{2}\lambda'''+3p_2\lambda'+2p_3\lambda$$
$$(1,\ 0,\ 0,\ 1)=-\lambda'''-9p_2\lambda'-6p_3\lambda.$$

La formola di derivazione applicata a queste funzioni dà:

$$(0,\ 1,\ 0,\ 1)=-\lambda^{IV}-4p_2\lambda''-(9p'_2+p_3)\lambda''-(6p'_3-5p_4)\lambda-10p_2\mu$$
$$(0,\ 0,\ 2,\ 0)=\frac{3}{2}\lambda^{IV}+7p_2\lambda''+(12p'_2+3p_3)\lambda'+(8p'_3-5p_4)\lambda+10p_2\mu,$$

ma:

$$\frac{d(0,\ 0,\ 2,\ 0)}{dx} = 2(0,\ 0,\ 1,\ 1)$$

$$\frac{d(0,\ 1,\ 0,\ 1)}{dx} = (0,\ 0,\ 1,\ 1) - [10p_2(0,\ 1,\ 1,\ 0) + 10p_3(0,\ 2,\ 0,\ 0) + \\ + 5p_4(1,\ 1,\ 0,\ 0) + p_5(0,\ 1,\ 0,\ 0)],$$

in conseguenza dalla eliminazione di (0, 0, 1, 1) si avrà la seconda relazione fra λ, μ: ossia:

$$0 = \frac{7}{4}\lambda^{\mathrm{V}} + \frac{35}{2}p_2\lambda''' + \frac{1}{2}(45p'_2 + 5p_3)\lambda'' + \frac{1}{2}(30p''_2 + 25p'_3 - 20p_4 + \\ + 120p^2_2)\lambda' + \frac{1}{2}(20p''_3 - 15p'_4 + 2p_5 + 80p_2p_3)\lambda - 10\left(p_3 - \frac{3}{2}p'_2\right)\mu.$$

Questa relazione introducendo i valori a, b, c dei tre invarianti fondamentali della equazione differenziale del quinto ordine, cioè:

$$a = p_3 - \frac{3}{2}p'_2, \qquad b = p_4 - 2p'_3 + \frac{6}{5}p''_2 - \frac{16}{5}p^2_2$$

$$c = p_5 - \frac{5}{2}p'_4 + \frac{15}{7}p''_3 - \frac{5}{7}p'''_2 - \frac{80}{7}p_2 a,$$

prende la forma:

$$\left.\begin{aligned} 10a\mu = \frac{7}{4}A - 15a\lambda'' - 25\left(a' + \frac{3}{4}b\right)\lambda' - \\ -\left(\frac{2 \cdot 5^2}{7}a'' + \frac{3 \cdot 5^2}{8}b' + \frac{3}{4}c - \frac{4 \cdot 5 \cdot 11}{7}p_2 a\right)\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

posto:

$$A = \lambda^{\mathrm{V}} + 10p_2\lambda''' + 10p_3\lambda'' + 5p_4\lambda' + p_5\lambda.$$

La terza relazione si deduce dai valori di:

$$\frac{d(0,\ 0,\ 1,\ 1)}{dx}, \qquad \frac{d(0,\ 0,\ 0,\ 2)}{dx},$$

ma prima di calcolarla distinguiamo il caso in cui:

$$\lambda = (2,\ 0,\ 0,\ 0) = 0,$$

dal caso contrario. Se $\lambda = 0$ si ottiene dalla (3) $\mu = \text{cost.}$ sussistono cioè le relazioni (2) per $n = 5$ e l'equazione differenziale è equivalente alla sua aggiunta.

Per la (4) sarà quindi:

$$a = 0,$$

e risultando in questo caso:

$$(0,\ 0,\ 1,\ 1) = 5p'_2\mu, \qquad (0,\ 0,\ 0,\ 2) = 5(p''_2 - p_4 + 20p^2_2)\mu,$$

dalla:

$$\frac{d(0,\ 0,\ 0,\ 2)}{dx} = -2\,[10p_2(0,\ 0,\ 1,\ 1) + 10p_3(0,\ 1,\ 0,\ 1) + \\ + 5p_4(1,\ 0,\ 0,\ 1) + p_5(0,\ 0,\ 0,\ 1)],$$

si ottiene che:

$$p_5 - \frac{5}{2}p'_4 + \frac{5}{2}p'''_2 - 4\,.\,5^2\,.\,p_2 a = 0,$$

ossia:

$$c = 0.$$

Se quindi la equazione differenziale (1) per $n = 5$ è equivalente alla rispettiva aggiunta di Lagrange gli invarianti di essa di grado dispari a, c sono nulli. Questa proprietà vale per n qualunque (dispari, o pari) come si è osservato nella seconda delle citate Memorie.

Ma aggiungiamo ora, ed è lo scopo di questo scritto, *la reciproca non sussiste.* Supponiamo infatti sieno $a = c = 0$ ma non λ. Le equazioni (3), (4) danno:

$$\mu' = \lambda''' + 6p_2\lambda' + 6p'_2\lambda \tag{5}$$

$$A - \frac{3\,.\,5^2}{7}b\lambda' - \frac{3\,.\,5^2}{2\,.\,7}b'\lambda = 0, \tag{6}$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{V} + 10p_2\lambda''' + 15p'_2\lambda'' + \left(9p''_2 + 16p_2^2 - \frac{5\,.\,8}{7}b\right)\lambda' + \\ &\quad + \left(2p'''_2 + 16p_2p'_2 - \frac{4\,.\,5}{7}b'\right)\lambda = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ed infine la terza relazione riducesi alla:

$$\left.\begin{aligned} &3\,.\,4\,.\,5\,.\,b\lambda''' + 3^2\,.\,5\,.\,b'\lambda'' + 3\,.\,5(b'' + 4^2\,.\,p_2 b)\lambda' + \\ &\quad + 2(b''' + 2\,.\,4^2\,.\,p_2 b' + 7\,.\,8\,.\,p'_2 b)\lambda = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Eliminando λ dalle (7) (8) si giunge ad una equazione di condizione fra l'invariante b, il coefficiente p_2 e le loro derivate. La (5) dà:

$$\mu = \lambda'' + 6p_2\lambda + \text{cost.},$$

e quindi si avranno i valori di λ, μ in funzione di b, p_2 e loro derivate.

Ma in questo caso (λ non $=0$) la equazione differenziale (1) può opportunamente trasformarsi nel modo seguente. Pongasi:

$$y=\lambda\upsilon,$$

essendo υ una funzione di z, e questa funzione di x. Supponendo:

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=-2\frac{z''}{z'},$$

e denominando con α, β, γ i tre invarianti fondamentali della equazione differenziale trasformata, saranno:

$$\alpha=0, \qquad \gamma=0,$$

e l'equazione stessa avrà la forma:

$$\frac{d^5\upsilon}{dz^5}+10q_2\frac{d^3\upsilon}{dz^3}+10q_3\frac{d^2\upsilon}{dz^2}+5q_4\frac{d\upsilon}{dz}+q_5\upsilon=0, \tag{9}$$

essendo:

$$q_3=\frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz}, \qquad q_4=\beta+\frac{9}{5}\frac{d^2q_2}{dz^2}+\frac{16}{5}q_2^2$$

$$q_5=\frac{5}{2}\frac{d\beta}{dz}+2\frac{d^3q_2}{dz^3}+16\,q_2\frac{dq_2}{dz}.$$

Ma come è noto:

$$\beta z'^4=b,$$

e trovasi facilmente essere:

$$q_5z'^5=\frac{A}{\lambda},$$

la equazione (6) condurrà così alla prima condizione:

$$q_5=\frac{3\,.\,5^2}{2\,.\,7}\cdot\frac{d\beta}{dz},$$

ed in conseguenza:

$$\frac{d\beta}{dz}=\frac{7}{2\,.\,5}\frac{d^3q_2}{dz^3}+\frac{4\,.\,7}{5}q_2\frac{dq_2}{dz},$$

e:

$$\beta=\frac{7}{2\,.\,5}\frac{d^2q_2}{dz^2}+\frac{2\,.\,7}{5}q_2^2+K,$$

da cui:

$$q_4=\frac{5}{2}\frac{d^2q_2}{dz^2}+6q_2^2+K.$$

Da ultimo l'equazione (8) per la stessa trasformazione diventa:

$$\frac{d^3\beta}{dz^3}+2\,.\,4^2\,.\,q_2\frac{d\beta}{dz}+7\,.\,8\,.\,\beta\frac{dq_2}{dz}=0\,,$$

e quindi:

$$\frac{1}{4^2\,.\,5}\frac{d^5q_2}{dz^5}+\frac{1}{2}q_2\frac{d^3q_2}{dz^3}+\frac{dq_2}{dz}\frac{d^2q_2}{dz^2}+6\,q_2^2\frac{dq_2}{dz}+K\frac{dq_2}{dz}=0. \tag{10}$$

Si ha così il teorema: « Se gli invarianti di grado dispari di una equazione del quinto ordine sono nulli, la equazione può trasformarsi nella (9) ed in questa sono:

$$q_3=\frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz},\qquad q_4=\frac{5}{2}\frac{d^2q_2}{dz^2}+6\,q_2^2+K$$

$$q_5=\frac{3\,.\,5}{4}\frac{d^3q_2}{dz^3}+5\,.\,6\,.\,q_2\frac{dq_2}{dz}\,,$$

ed il coefficiente q_2 deve soddisfare l'equazione (10). »

Le stesse proprietà, deducesi tosto dalle relazioni (6), (8), sussistono per la equazione differenziale primitiva, nella ipotesi di $\lambda=\text{cost.}$

Agosto, 1893.

Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

Nella presente Memoria studio una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche e caratterizzate dalla seguente proprietà geometrica: *le sfere descritte sopra ogni segmento di normale compreso fra i due centri di curvatura, come diametro, tagliano secondo circoli massimi, ovvero ortogonalmente; una sfera fissa, o infine passano per un punto fisso dello spazio.* Analiticamente, ogni tale superficie $z = z(x; y)$ è un integrale dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine, della forma di Ampère:

$$\left.\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2 + c)(r t - s^2) + (z - p x - q y) + \\ + \left[(1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t\right] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

essendo c una costante positiva nel primo caso, negativa nel secondo e nulla nel terzo.

Per brevità, nel corso della Memoria, indicherò le superficie di questa specie col nome di *superficie* Σ e suddistinguerò i tre casi sopra descritti, dicendo che nel primo caso la superficie Σ corrispondente è *ellittica*, nel secondo *iperbolica* e nel terzo *parabolica*. Queste denominazioni risulteranno giustificate da ciò che, ottenendosi le nostre superficie Σ dalle complementari delle superficie pseudosferiche coll'applicare il metodo dato da Weingarten nei suoi ultimi lavori, (*) ogni Σ ellittica deriva precisamente da una superficie complementare di una pseudosferica S rispetto ad un sistema di geodetiche, uscenti da un punto reale e a distanza finita di S, mentre le Σ para-

(*) Cf. specialmente le due Note dell'illustre geometra inserite nei n.[i] 23 marzo 1891 e 13 marzo 1893 dei *Comptes Rendus, ecc.*

boliche ed iperboliche corrispondono ordinatamente al caso che le geodetiche escano da un punto all'infinito (siano parallele), ovvero da un punto ideale (siano ortogonali ad una medesima geodetica).

Conviene dire subito che le Σ *iperboliche* si ottengono altresì, col metodo di Weingarten, dalle complementari delle *superficie a curvatura costante positiva*, con questa differenza però che nelle regioni di una Σ iperbolica provenienti dalle superficie a curvatura costante negativa la proiezione del centro della sfera fissa sulla normale cade fra i due centri di curvatura, mentre per quelle regioni che provengono invece da superficie a curvatura costante positiva la proiezione stessa cade esternamente al segmento fra i due centri di curvatura. La distinzione fra le due specie di regioni può anche farsi dicendo che nel primo caso la proiezione del centro della sfera fissa sulla normale cade esternamente, nel secondo internamente alla sfera stessa.

La proprietà fondamentale delle Σ delle tre specie consiste in ciò che, rappresentate al modo di Gauss sulla sfera, esse hanno a comune l'immagine delle linee di curvatura colle superficie pseudosferiche. Per una Σ iperbolica ciò vale però soltanto delle regioni appartenenti alla prima specie indicata; le regioni della seconda specie hanno invece a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura con una superficie a curvatura costante positiva. Ora siccome una superficie Σ iperbolica possederà, in generale, regioni di ambedue le specie (*), così sembra che la teoria di queste superficie, ulteriormente sviluppata, potrà servire di anello di congiunzione fra la teoria delle superficie pseudosferiche e quella delle superficie a curvatura costante positiva. Ma su ciò debbo, per ora, limitarmi a questo accenno.

Dalle proprietà descritte delle Σ segue che le normali di una superficie Σ costituiscono una *congruenza ciclica*, cioè sono gli assi di un sistema ∞^2 *normale* di circoli. Questi circoli nel caso ellittico ed iperbolico tagliano in

(*) Per convincersene basta considerare che, secondo il teorema fondamentale di Cauchy, per una superficie Σ integrale dell'equazione del secondo ordine (A), si può assegnare ad arbitrio una striscia per cui debba passare, cioè una curva C che debba appartenere a Σ e lungo di essa i piani tangenti della Σ stessa. Dopo di ciò è chiaro che possiamo sempre scegliere la striscia iniziale in guisa che lungo di essa la proiezione del centro della sfera fissa sulla normale cada per un tratto internamente, per un altro esternamente alla sfera stessa e la Σ iperbolica così determinata conterrà quindi regioni dell'una e dell'altra specie. Per levare ogni difficoltà relativa al campo di convergenza delle serie, che definiscono la superficie integrale, converrà prendere come punto iniziale un punto della striscia, ove confinano due tratti di specie diversa.

punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente, la sfera fissa e nel caso parabolico passano tutti pel punto fisso O; inoltre, e questa è la proprietà più notevole, le superficie ortogonali ai circoli sono in tutti tre i casi Σ paraboliche. Inversamente, presa ad arbitrio una Σ parabolica, si descrivano i circoli normali a Σ e che tagliano in punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente, una sfera fissa qualsiasi di centro O: le superficie ortogonali ai circoli sono tutte Σ paraboliche, e la congruenza degli assi dei circoli è una congruenza normale le cui superficie ortogonali sono Σ ellittiche nel primo caso, iperboliche nel secondo ed infine si riducono a Σ paraboliche, se la sfera si riduce al suo centro.

Per tal modo, potendosi dedurre le Σ ellittiche ed iperboliche dalle Σ paraboliche, il maggiore interesse si concentra nello studio di queste ultime superficie. Ancora più semplice della costruzione indicata è quella data al § 12, mediante la quale da due Σ paraboliche, colla medesima immagine sferica delle linee di curvatura, si deducono le superficie Σ ellittiche ed iperboliche.

Una proprietà molto notevole delle Σ paraboliche è la seguente: se della congruenza delle normali ad una tale superficie Σ si prende la congruenza polare rispetto ad una sfera di centro O, quest'ultima congruenza è ancora una congruenza normale. Poichè inoltre la descritta proprietà è caratteristica delle Σ paraboliche, le superficie ortogonali alla congruenza polare sono nuovamente Σ paraboliche. Le due serie (parallele) di Σ paraboliche così ottenute derivano, col metodo di Weingarten, da due superficie pseudosferiche complementari.

Per le Σ paraboliche sussiste poi l'importante proprietà, osservata da Weingarten: ogni inversione per raggi vettori reciproci rispetto ad una sfera, col centro nel punto fisso O, cangia una Σ parabolica in un'altra Σ parabolica.

Come sopra si è detto, esistono infiniti sistemi tripli ortogonali, di cui fa parte una serie di superficie Σ paraboliche e nei quali le traiettorie ortogonali delle Σ sono circoli. Ma questi non danno che la più semplice classe di sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di Σ paraboliche; tali sistemi esistono infatti nel medesimo grado di generalità dei sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie pseudosferiche di egual raggio (sistemi di Weingarten), dai quali deduconsi per mezzo della trasformazione di Combescure.

Fra di essi notevoli sono quei sistemi, studiati nei §§ 13, 14, 15 pei quali le traiettorie ortogonali delle Σ paraboliche sono curve tracciate in piani passanti pel punto fisso O. Per definire un tale sistema si può dare ad arbitrio una Σ parabolica e, in un piano passante pel punto fisso O, una curva di forma arbitraria normale in un punto a Σ.

Mi resta da avvertire che delle Σ paraboliche il primo accenno si ritrova nel IV° volume (pag. 322) delle *Leçons*, ecc. di Darboux. Nei *Rendiconti* della R. Accademia dei Lincei (1.° marzo 1896) io ho poi pubblicato gli enunciati di alcuni dei risultati contenuti nel presente lavoro. (*)

§ 1. Richiamo del metodo di Weingarten.

Consideriamo una superficie $\overline{S}$ e siano $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ le coordinate cartesiane ortogonali di un suo punto $\overline{P}$; $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ i coseni di direzione positiva della sua normale e per parametri p, q delle coordinate curvilinee, cui riferiamo i punti di $\overline{S}$, prendiamo la distanza dell'origine dal piano tangente e la metà del quadrato della distanza dell'origine stessa dal punto di contatto, poniamo cioè:

$$p=\overline{x}\,\overline{X}+\overline{y}\,\overline{Y}+\overline{z}\,\overline{Z}, \qquad 2q=\overline{x}^2+\overline{y}^2+\overline{z}^2.$$

Sussistono allora le formole fondamentali:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overline{x}}{\partial p}&=-r_1 r_2\frac{\partial \overline{X}}{\partial q}\\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial q}&=\frac{\partial \overline{X}}{\partial p}+(r_1+r_2)\frac{\partial \overline{X}}{\partial q},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

colle analoghe per $\overline{y}$, $\overline{Y}$; $\overline{z}$, $\overline{Z}$, dove con r_1, r_2 si indicano i raggi principali di curvatura di $\overline{S}$, contati dal rispettivo centro di curvatura verso il piede della normale.

Essendo ora $\varphi=\varphi(p,\,q)$ una *determinata* funzione di p, q, supponiamo che la superficie $\overline{S}$ soddisfi alla equazione a derivate parziali del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+(r_1+r_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}+r_1 r_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}=0. \tag{2}$$

(*) Occorrendomi diverse volte rimandare al mio libro: *Lezioni di geometria differenziale* e alla Memoria: *Sopra i sistemi tripli ortogonali di* Weingarten, contenuta nel tom. XIII, serie II di questi Annali, citerò il libro con (L) e la Memoria con (M).

Allora le tre espressioni:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \bar{x}\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \bar{X}\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} \\ dy &= \bar{y}\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \bar{Y}\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} \\ dz &= \bar{z}\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \bar{Z}\, d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

sono i differenziali esatti di tre funzioni x, y, z, che riguarderemo come coordinate di un punto P mobile sopra una superficie S. L'elemento lineare ds di una tale superficie S è dato quindi dalla formola:

$$ds^2 = 2q\left(d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 + 2p\,d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}\,d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \left(d\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2, \tag{4}$$

ed ha la notevole proprietà di dipendere unicamente dalla funzione φ e nulla affatto dalla speciale superficie $\bar{S}$ integrale della (2), talchè tutte le superficie S dedotte, mediante le (3), dalle singole superficie $\bar{S}$ integrali della (2), sono applicabili l'una sull'altra. Viceversa *tutte* le superficie S coll'elemento lineare (4) deduconsi, nel modo descritto, da corrispondenti superficie $\bar{S}$ integrali della (2).

§ 2. Applicazione alle superficie distendibili sopra le superficie di rotazione.

Supponiamo ora la funzione φ del paragrafo precedente funzione dell'argomento $\tau = 2q - p^2$, sia:

$$\varphi = f(\tau).$$

Se poniamo:

$$\psi(\tau) = 2\frac{df}{d\tau} = 2f',$$

la (4) ci dà subito:

$$ds^2 = \tau\, d\psi^2 + \psi^2 dp^2, \tag{4*}$$

elemento lineare che appartiene evidentemente ad una superficie di rotazione. E siccome la funzione $\psi(\tau)$ resta arbitraria, questa superficie di rotazione può essere evidentemente qualunque. Se scriviamo l'elemento lineare della S, applicabile sopra una superficie di rotazione, sotto la forma ordinaria:

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2, \qquad r = F(u), \tag{5}$$

per le coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ di un punto della superficie $\bar{S}$, dedotta da S col metodo di Weingarten, troviamo subito dalle formole precedenti:

$$\bar{x} = \frac{1}{r'}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{v}{r}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{r'}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{v}{r}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \bar{z} = \frac{1}{r'}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{r}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{6}$$

e pei coseni di direzione della sua normale:

$$\bar{X} = \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \bar{Y} = \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \bar{Z} = \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial v}. \tag{6*}$$

Si noti che il parametro v (longitudine) essendo determinato solo a meno di una costante additiva, le formole (6) fanno propriamente derivare dalla superficie S di elemento lineare (5) non una sola superficie $\bar{S}$, ma una intera serie di tali superficie parallele.

Le formole:

$$p = \Sigma \bar{x}\bar{X} = -v, \qquad 2q = \Sigma \bar{x}^2 = \frac{1}{r'^2} + v^2, \tag{7}$$

dimostrano poi che alle deformate dei meridiani sulla S corrispondono sopra $\bar{S}$ le linee lungo le quali è costante la distanza dell'origine dal piano tangente di $\bar{S}$ ed alle deformate dei paralleli quelle linee di $\bar{S}$ lungo le quali è costante la proiezione del raggio vettore sul piano tangente.

§ 3. Le linee di curvatura di $\bar{S}$.

Cerchiamo ora le linee ed i raggi principali di curvatura della superficie $\bar{S}$, definita dalle formole (6). Indicando per ciò con:

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = -\Sigma dx dX,$$

la seconda forma quadratica fondamentale della S, ed osservando che i simboli di Christoffel per l'elemento lineare (5) hanno i valori seguenti:

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} = -rr',$$

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = \frac{r'}{r}, \qquad \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} = 0,$$

le formole fondamentali della teoria delle superficie (L. pag. 88) daranno:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=DX\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{r'}{r}\frac{\partial x}{\partial v}+D'X\\
&\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-rr'\frac{\partial x}{\partial u}+D''X,
\end{aligned}\right\} \tag{7*}$$

colle analoghe per y, z.

Ora se si derivano le (6), si ottengono subito le formole:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}=-\frac{r''}{r'^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\frac{D}{r'}-\frac{D'v}{r}\right)X\\
&\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}=r'v\frac{\partial x}{\partial u}+\left(\frac{D'}{r'}-\frac{D''v}{r}\right)X,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

dalle quali risulta confermato che i coseni di direzione della normale a $\overline{S}$ sono dati dalle (6*). Derivando poi queste ultime, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{X}}{\partial u}=\frac{D'}{r}X\\
&\frac{\partial \overline{X}}{\partial v}=-r'\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{D''}{r}X.
\end{aligned}\right\} \tag{8*}$$

Se consideriamo una linea di curvatura della $\overline{S}$ e indichiamo con ρ il corrispondente raggio principale di curvatura, per uno spostamento lungo una tale linea avremo:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}du+\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}dv=\rho\left(\frac{\partial \overline{X}}{\partial u}du+\frac{\partial \overline{X}}{\partial v}dv\right),$$

colle analoghe per $\overline{y}$, $\overline{Y}$; $\overline{z}$, $\overline{Z}$. A causa delle (8), (8*), queste si decompongono nelle due equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{D}{r'}-\frac{D'}{r}(\rho+v)\right]du+\left[\frac{D'}{r'}-\frac{D''}{r}(\rho+v)\right]dv=0\\
&-\frac{r''}{r'^2}du+r'(\rho+v)dv=0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Eliminando fra queste $\rho+v$, otteniamo l'*equazione differenziale delle linee* *di curvatura di* $\bar{S}$ sotto la forma:

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \\ \frac{r''}{r'}\,du & r\,r'\,dv \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Se fra le (9) eliminiamo invece il rapporto $\frac{du}{dv}$, otteniamo per $\rho + v$ l'equazione di secondo grado:

$$\frac{D'\,r'}{r}(\rho + v)^2 + \left[\frac{D''\,r''}{r\,r'^2} - D\right](\rho + v) - \frac{D'\,r''}{r'^3} = 0\,,$$

onde risulta che i raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 di S soddisfano la relazione

$$(\rho_1 + v)(\rho_2 + v) + \frac{r\,r''}{r'^4} = 0,$$

la quale, osservando le (7), facilmente si traduce in un' equazione della forma (2).

Ora consideriamo la superficie S' *complementare* di S rispetto alle geodetiche $v = \text{cost.}$, cioè la seconda falda focale della congruenza formata dalle tangenti a queste geodetiche. Indicando cogli accenti le quantità relative alla S', per le coordinate x', y', z', del punto corrispondente al punto (x, y, z) di S avremo in particolare le formole:

$$x' = x - \frac{r}{r'}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad y' = y - \frac{r}{r'}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad z' = z - \frac{r}{r'}\frac{\partial z}{\partial v},$$

onde derivando coll'osservare di nuovo le (7*) otteniamo:

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{r\,r''}{r'^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D\,r}{r'}X$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = -\frac{D'\,r}{r'}X.$$

Di qui pei coseni di direzione della normale a S' si trae:

$$X' = \bar{X},\; Y' = \bar{Y},\; Z' = \bar{Z},$$

dopo di che formando, come per la $\bar{S}$, l'equazione differenziale delle linee di curvatura di S' si ritrova precisamente la (10). Ne deduciamo quindi il teorema generale:

Le superficie $\overline{S}$ dedotte col metodo di Weingarten *da una superficie S, applicabile sopra una superficie di rotazione, corrispondono per parallelismo delle normali alla superficie S' complementare di S ed hanno con S' a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura.*

§ 4. Le superficie Σ delle tre specie.

Applichiamo il metodo di Weingarten (§ 1) alle superficie $\overline{S}$ che soddisfano alla equazione (2), dove si assume:

$$\varphi = \sqrt{2q - p^2 - c} \quad (c \text{ costante}).$$

L'equazione (2) diventa allora:

$$2q - c - (r_1 + r_2)p + r_1 r_2 = 0, \tag{11}$$

ed ha un significato geometrico molto semplice. Per stabilirlo consideriamo la sfera descritta sul segmento fra i due centri di curvatura come diametro; le coordinate x_0, y_0, z_0 del suo centro sono date da:

$$x_0 = \overline{x} - \frac{r_1 + r_2}{2}\overline{X}, \qquad y_0 = \overline{y} - \frac{r_1 + r_2}{2}\overline{Y}, \qquad z_0 = \overline{z} - \frac{r_1 + r_2}{2}\overline{Z},$$

mentre pel suo raggio R si ha:

$$R = \left|\frac{r_1 - r_2}{2}\right|.$$

Indicando con d la distanza del centro di questa sfera dall' origine, la (11) può scriversi quindi:

$$d^2 = R^2 + c. \tag{11*}$$

Questa, se la costante c è positiva, esprime che la detta sfera taglia ortogonalmente la sfera fissa:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c,$$

mentre, se c è negativa, la medesima sfera taglierà secondo un circolo massimo l'altra:

$$x^2 + y^2 + z^2 = -c,$$

e infine se $c = 0$ la sfera considerata passerà per l' origine. È chiaro che, cangiando il valore della costante c senza mutarne il segno, si passa da una superficie $\bar{S}$ ad una sua omotetica.

Stabilito così il significato geometrico della (11), vediamo ora su quale superficie di rotazione sarà applicabile la corrispondente superficie S. Basterà per ciò ricorrere alla (4*), che nel nostro caso dà:

$$d s^2 = \tau\, d\psi^2 + \frac{1}{\tau - c}\, dp^2, \qquad \psi = \frac{1}{\sqrt{\tau - c}},$$

cioè:

$$d s^2 = \left(\frac{1}{\psi^2} + c\right) d\psi^2 + \psi^2\, dp^2.$$

Se $c = 0$, posto $\psi = e^u$, ne risulta la forma *parabolica*:

$$d s^2 = d u^2 + e^{2u}\, dp^2, \tag{a}$$

dell'elemento lineare delle superficie pseudosferiche.

Se c è negativa, passando dalla superficie $\bar{S}$ ad una sua omotetica, si può fare:

$$c = -1,$$

e ponendo allora:

$$\psi = \frac{1}{\cosh u},$$

ne verrà:

$$d s^2 = \operatorname{tangh}^4 u\, d u^2 + \frac{d p^2}{\cosh^2 u}. \tag{b}$$

Se in fine c è positiva, ponendo

$$c = 1, \qquad \psi = \frac{1}{\operatorname{senh} u},$$

ne risulta:

$$d s^2 = \coth^4 u\, d u^2 + \frac{d p^2}{\operatorname{senh}^2 u}. \tag{c}$$

Ora le forme (a), (b), (c) dell'elemento lineare appartengono alle superficie complementari delle pseudosferiche e precisamente nel caso (a) le geodetiche della superficie pseudosferica, rispetto alle quali la superficie complementare è costruita, partono da un punto reale all'infinito della superficie, nel caso (*b*) da un punto reale a distanza finita, nel caso (c) da un punto ideale ovvero, in questo caso, le geodetiche sono tutti ortogonali ad una medesima geodetica (L. pag. 242).

Per ciò le superficie Σ, dotate della proprietà geometrica espressa dalla (11), si diranno *ellittiche* quando le sfere, descritte sopra i segmenti fra i centri di curvatura come diametri, tagliano secondo circoli massimi la sfera fissa, *iperboliche* quando tagliano la sfera fissa ortogonalmente e in fine *paraboliche* se, riducendosi la detta sfera al suo centro O, tutte le sfere descritte vengono a passare per O.

§ 5. Immagini sferiche delle linee di curvatura delle superficie Σ.

Dal teorema alla fine del § 3 risulta che le superficie Σ delle tre specie hanno le medesime immagini sferiche delle linee di curvatura delle superficie pseudosferiche. Ma per le Σ iperboliche, affinchè la funzione:

$$\varphi = \sqrt{2q - p^2 - 1} \text{ (*)},$$

abbia un valore reale, bisogna aggiungere la condizione:

$$2q - p^2 > 1,$$

la quale, come subito si vede, esprime che la proiezione del centro O della sfera fissa sulla normale a Σ cade fra i due centri di curvatura.

Se si vuole, senza introdurre immaginarii, applicare ancora il metodo di Weingarten ad una regione di una Σ iperbolica, per la quale la detta proiezione di O sulla normale cade esternamente al segmento fra i due centri di curvatura, converrà fare invece:

$$\varphi = \sqrt{1 - (2q - p^2)}.$$

Con ciò l'equazione (11) resta naturalmente la stessa, ma l'elemento lineare della superficie S derivata, essendo:

$$\psi = \frac{-1}{\sqrt{1 - \tau}},$$

diventa:

$$d s^2 = \left(1 - \frac{1}{\psi^2}\right) d \psi^2 + \psi^2 d p^2,$$

e ponendo:

$$\psi = \frac{1}{\operatorname{sen} u},$$

(*) Qui si prende nuovamente per unità il raggio della sfera fissa.

assume la forma:

$$ds^2 = \cot^4 u\, du^2 + \frac{dp^2}{\mathrm{sen}^2 u}\,.$$

Questa appartiene alle superficie complementari di quelle a curvatura costante positiva $= +1$, rispetto ad un sistema di geodetiche uscenti da un punto fisso, e però la regione considerata della Σ ha in tal caso, pel teorema al § 3, le stesse immagini sferiche delle linee di curvatura di una superficie a curvatura costante positiva.

Riassumiamo i risultati ottenuti col teorema:

Le superficie Σ delle tre specie, rappresentate al modo di Gauss *sulla sfera, hanno le medesime immagini delle linee di curvatura delle superficie pseudosferiche. Per le Σ iperboliche però ciò ha luogo soltanto in quella loro regione, ove la proiezione del centro della sfera fissa sulla normale cade fra i due centri di curvatura; le regioni delle Σ iperboliche, ove la detta proiezione cade invece esternamente al segmento fra i due centri di curvatura, hanno a comune le immagini sferiche delle linee di curvatura colle superficie a curvatura costante positiva.*

§ 6. Una classe speciale di congruenze cicliche.

Dal risultato ultimamente conseguito e dal teorema a pag. 333 delle mie *Lezioni* segue che la congruenza delle normali ad una superficie Σ, di una qualunque delle tre specie, è sempre una congruenza ciclica. Per meglio conoscere la natura dei sistemi ciclici corrispondenti conviene generalizzare il problema a congruenze qualsiasi (non normali) e proporsi adunque la questione seguente:

Costruire tutte le congruenze per le quali le sfere descritte sui segmenti focali come diametri tagliano secondo circoli massimi, ovvero ortogonalmente, una sfera fissa.

Farò uso per ciò delle notazioni e dei risultati contenuti nel Cap. XIII del mio libro ed osservando che il raggio della sfera mobile è precisamente la semi-distanza focale ρ, la proprietà geometrica supposta si tradurrà nella relazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + c\,(c \text{ costante}), \tag{α}$$

ovvero, derivando, nelle due:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial y}{\partial u}+z\frac{\partial z}{\partial u}&=\rho\frac{\partial \rho}{\partial u}\\ x\frac{\partial x}{\partial v}+y\frac{\partial y}{\partial v}+z\frac{\partial z}{\partial v}&=\rho\frac{\partial \rho}{\partial v}.\end{aligned}\right\}\qquad(\beta)$$

Se poniamo:

$$\Omega=xX+yY+zZ=\Sigma xX,$$

derivando coll'osservare le formole (27) a pag. 262 delle *Lezioni*, otteniamo:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u}=\Sigma x\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial\rho}{\partial u}+2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\rho$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial v}=\Sigma x\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial\rho}{\partial v}-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\rho,$$

e quindi dalle (β), facendo uso delle equazioni ora citate, deduciamo:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)=2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\left(\frac{\Omega}{\rho}+1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)=2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{\Omega}{\rho}-1\right).$$

Ponendo:

$$\frac{\Omega}{\rho}=-\cos\sigma,$$

le precedenti si mutano nelle altre:

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial u}=2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}(\cos\sigma-1)$$

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial v}=2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}(\cos\sigma+1),$$

le quali esprimono che la congruenza è *ciclica* (L. pag. 330).

Si osservi però che il valore di σ sarà reale se la costante c del secondo membro della (α) è negativa o nulla, laddove se $c>0$ l'angolo σ sarà reale soltanto quando la proiezione del centro della sfera fissa (origine) sul raggio della congruenza cade fra i due fuochi. (*) Inoltre l'equazione:

$$\Omega+\rho\cos\sigma=0,$$

(*) Nel caso opposto pongasi invece $\frac{\Omega}{\rho}=\cosh\sigma$ e ne dedurremo:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\operatorname{senh}\frac{\sigma}{2}=\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix},\qquad\frac{\partial}{\partial v}\log\cosh\frac{\sigma}{2}=\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}.$$

esprimendo che tutti i piani dei circoli passano per l'origine, ne segue che i circoli stessi tagliano in punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente, la sfera fissa secondo che $c < 0$ o $c > 0$ e per $c = 0$ passano per l'origine.

Abbiamo dunque il risultato:

Ogni congruenza, dotata della proprietà voluta è ciclica ed i suoi circoli tagliano in punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente, la sfera fissa.

Inversamente se prendiamo una superficie qualunque S ed una sfera S_0 e costruiamo i circoli normali ad S e che tagliano in punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente, S_0, questo sistema di circoli è sempre un sistema normale e nella congruenza dei loro assi le sfere descritte sopra i segmenti focali come diametri tagliano secondo circoli massimi, ovvero ortogonalmente S_0. Così adunque possono costruirsi tutte le congruenze della specie richiesta.

È bene osservare che il calcolo superiormente eseguito dimostra anche che se in una congruenza ciclica tutti i piani dei circoli passano per un punto fisso, la congruenza apparterrà necessariamente alla classe ora considerata, cioè i circoli del sistema taglieranno in punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente, una sfera col centro nel punto fisso.

Se supponiamo ora che la congruenza considerata sia nello stesso tempo *normale*, dal teorema testè dimostrato e dall'altro a pag. 333 delle *Lezioni*, segue che le superficie Σ ortogonali alla congruenza hanno le medesime immagini sferiche delle linee di curvatura delle superficie pseudosferiche; si ottiene così nuovamente il teorema al § 5. (*) Di più vediamo ora che i circoli del sistema ciclico, aventi per assi le normali ad una superficie Σ, tagliano la sfera fissa in punti diametralmente opposti nel caso ellittico, la incontrano ortogonalmente nel caso iperbolico e in fine passano pel punto fisso nel caso parabolico.

Se la congruenza è normale cangiando i parametri u, v si può fare:

$$\sqrt{E} = \cosh\frac{\sigma}{2}, \qquad \sqrt{G} = \operatorname{senh}\frac{\sigma}{2},$$

onde vediamo direttamente che le Σ iperboliche, nelle regioni ove la proiezione del centro della sfera fissa sulla normale cade entro la sfera stessa, hanno a comune le immagini sferiche delle linee di curvatura colle superficie a curvatura costante positiva.

(*) Cf. anche la nota precedente.

§ 7. Le superficie Σ paraboliche riferite alle loro linee di curvatura.

Occupiamoci ora di stabilire le formole relative alle superficie Σ paraboliche, quando si riferiscono alle loro linee di curvatura; quelle relative alle superficie Σ ellittiche ed iperboliche potranno poi, come vedremo al § 11, dedursi da queste.

Secondo i §§ 4, 5, le superficie Σ paraboliche derivano da una coppia di superficie pseudosferiche complementari ed hanno a comune con una delle due superficie l'immagine sferica delle linee di curvatura.

Siano S, S' due tali superficie pseudosferiche complementari e prendiamo, per semplicità, il loro raggio eguale all'unità. Riferendo S, S' alle loro linee (corrispondenti) di curvatura u, v, siano:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 \\ ds'^2 &= \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

le espressioni dei loro elementi lineari, gli angoli θ, φ essendo legati dalle relazioni di Darboux:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

I raggi principali di curvatura della S essendo dati da:

$$r_1 = \operatorname{tang}\theta, \qquad r_2 = -\cot\theta,$$

se si denotano con (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) i rispettivi coseni di direzione delle tangenti alle linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ e della normale alla S, sussistono le formole:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\theta X_1, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\theta X_2 \\ &\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial v}X_2 + \operatorname{sen}\theta X_3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial v}X_1, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta X_1 \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial u}X_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}X_1 - \cos\theta X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \cos\theta X_2, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

colle analoghe in Y, Z, formole a cui conviene ricorrere nei calcoli seguenti.

Ora poniamo:

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \cos\varphi\cos\theta\, du + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\, dv \\ d\beta &= e^{\alpha}(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\, du - \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\, dv) \\ d\gamma &= e^{-\alpha}(\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\, du - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\, dv), \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

dove appunto le espressioni dei secondi membri, a causa delle (13), sono tre differenziali esatti, i cui integrali chiamiamo α, β, γ; le (12) possono allora anche scriversi così:

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= d\alpha^2 + e^{-2\alpha}d\beta^2 \\ ds'^2 &= d\alpha^2 + e^{2\alpha}d\gamma^2. \end{aligned}\right\} \qquad (12^*)$$

Se col metodo di Weingarten deriviamo dalla superficie S la corrispondente $\overline{S}$, che sarà qui una Σ parabolica, le formole (6) § 2 ci danno: (*)

$$\overline{x} = e^{\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial x}{\partial \beta}\right), \qquad \overline{y} = e^{\alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial y}{\partial \beta}\right), \qquad \overline{z} = e^{\alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial z}{\partial \beta}\right).$$

Osservando che, ove si esprimano u, v per α, β, si ha per le (15):

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = e^{-\alpha}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \beta} = -e^{-\alpha}\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta},$$

le formole superiori si cangiano nell'altra:

$$\overline{x} = (e^{\alpha}\cos\varphi + \beta\operatorname{sen}\varphi)X_1 + (e^{\alpha}\operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi)X_2, \qquad (15^*)$$

colle analoghe per $\overline{y}$, $\overline{z}$, e ci definiscono la superficie Σ parabolica, che dovrà trovarsi riferita alle sue linee di curvatura u, v, ciò che risulta confermato dai calcoli seguenti. Derivando la (15*) ed osservando le (13), (14), (15), otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} &= (e^{\alpha}\cos\varphi + \beta\operatorname{sen}\varphi)\,[\cos\varphi\cos\theta\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\, X_2 + \operatorname{sen}\theta\, X_3] \\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} &= (e^{\alpha}\operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi)\,[\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\, X_2 - \cos\theta\, X_3], \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

(*) Abbiamo qui cangiati i segni di $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, ciò che evidentemente non ha importanza alcuna.

indi per i coseni di direzione $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ della normale alla Σ:

$$\left.\begin{array}{c}\overline{X} = \operatorname{sen}\varphi X_1 - \cos\varphi X_2, \qquad \overline{Y} = \operatorname{sen}\varphi Y_1 - \cos\varphi Y_2, \\ \overline{Z} = \operatorname{sen}\varphi Z_1 - \cos\varphi Z_2,\end{array}\right\} \tag{17}$$

le quali confermano che le normali a Σ ed alla superficie S' complementare sono, in punti corrispondenti, parallele. Derivando le (17) abbiamo poi:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial u} = \operatorname{sen}\varphi\,[\cos\varphi\cos\theta X_1 + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta X_2 + \operatorname{sen}\theta X_3] \\ \dfrac{\partial \overline{X}}{\partial v} = -\cos\varphi\,[\cos\varphi\operatorname{sen}\theta X_1 + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta X_2 - \cos\theta X_3].\end{array}\right\} \tag{17*}$$

Queste, confrontate colle (16), ci dicono appunto che sulla superficie Σ le linee di curvatura sono le u, v. Per i raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 di Σ abbiamo in conseguenza:

$$\rho_1 = \beta - e^{\alpha}\operatorname{tg}\varphi, \qquad \rho_2 = \beta + e^{\alpha}\cot\varphi,$$

formole colle quali si verificherebbe subito la proprietà fondamentale della nostra Σ, di soddisfare cioè l'equazione:

$$\rho_1\rho_2 - p(\rho_1 + \rho_2) + 2q = 0.$$

§ 8. Le superficie Σ paraboliche complementari.

La superficie Σ parabolica definita dalle formole (15*) ha a comune colla superficie pseudosferica S', complementare di S, l'immagine sferica delle linee di curvatura. Possiamo considerare similmente la superficie Σ' parabolica, dedotta col metodo di Weingarten dalla S', e che può del resto variare in una serie di superficie parallele. Essa avrà a comune colla superficie pseudosferica primitiva l'immagine sferica delle linee di curvatura. Due tali superficie Σ, Σ' paraboliche si diranno *complementari* e dimostreremo il notevole teorema:

Le congruenze delle normali a due superficie Σ paraboliche complementari sono polari reciproche l'una dell'altra rispetto ad una sfera col centro nel punto fisso.

Indicando con x', y', z' le coordinate di un punto di S', il cui elemento lineare è dato dalla seconda delle (12*) e con $\overline{x'}$, $\overline{y'}$, $\overline{z'}$ quelle del corrispondente punto di Γ', avremo:

$$\overline{x'} = e^{-\alpha}\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} - \gamma \frac{\partial x'}{\partial \gamma}\right),$$

colle analoghe per $\overline{y'}$, $\overline{z'}$. Osservando le formole:

$$x' = x + \cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2,$$

e quelle che se ne ottengono per derivazione, le formole precedenti diventano:

$$\overline{x'} = e^{-\alpha}(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2) - \gamma\, X_3, \tag{18}$$

e pei coseni di direzione della normale alla Σ' si ha semplicemente:

$$\overline{X'} = X_3, \qquad \overline{Y'} = Y_3, \qquad \overline{Z'} = Z_3. \tag{19}$$

Ora se indichiamo con x_0, y_0, z_0 le coordinate del piede P_0 della perpendicolare abbassata dall'origine O sulla normale a Σ e similmente con x'_0, y'_0, z'_0 quelle del piede P'_0 della perpendicolare calata da O sulla normale di Σ', troviamo:

$$x_0 = e^{\alpha}\ (\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2)$$
$$x'_0 = e^{-\alpha}(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2),$$

colle analoghe per y_0, y'_0; z_0, z'_0. Ne risulta che $P_0\, P'_0$ sono in linea retta con O e il prodotto dei segmenti $O\,P_0$, $O\,P'_0$ è eguale all'unità. Siccome poi due normali corrispondenti di Σ, Σ' sono fra loro ortogonali, vediamo che esse sono rette polari reciproche rispetto alla sfera col centro in O e di raggio unitario, ciò che dimostra il teorema enunciato.

Ora è ben notevole che la proprietà contenuta in questo teorema è *caratteristica* per le superficie Σ paraboliche cioè:

Se due congruenze normali sono polari reciproche rispetto ad una sfera, le superficie ortogonali ai raggi delle due congruenze sono superficie Σ paraboliche complementari.

E infatti siano (n), (n') due congruenze normali e polari reciproche rispetto ad una sfera di raggio $= R$. Invertendo per raggi vettori reciproci, rispetto ad una sfera concentrica di raggio $= R\sqrt{2}$, le rette della congruenza (n'), si ottiene un sistema ∞^2 *normale* di circoli uscenti dal centro della sfera ed aventi per assi precisamente i raggi di (n); dunque, pei risultati al § 6, le superficie ortogonali ai raggi di (n) sono Σ paraboliche rispetto al centro O della sfera, ecc.

§ 9. Teorema di Weingarten.

Come ho detto nella prefazione, Weingarten ha osservato che sussiste il teorema:

Ogni inversione per raggi vettori reciproci, col centro nel punto fisso O, cangia ogni superficie Σ parabolica in un' altra Σ parabolica.

Per dimostrarlo basta ricorrere alle seguenti formole generali relative alla inversione per raggi vettori reciproci. Essendo S una superficie qualunque ed avendo x, y, z; X, Y, Z; r_1, r_2 il solito significato, poniamo ancora:

$$p = xX + yY + zZ, \qquad 2q = x^2 + y^2 + z^2.$$

Sia S' la superficie dedotta da S colla inversione rappresentata dalle formole (*):

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Indicando cogli accenti le quantità relative a S, avremo:

$$X' = X - \frac{px}{q}, \qquad Y' = Y - \frac{py}{q}, \qquad Z' = Z - \frac{pz}{q}$$

$$2q' = \frac{1}{2q}, \qquad p' = -\frac{p}{2q}$$

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{2q}{r_1} - 2p, \qquad \frac{1}{r'_2} = \frac{2q}{r_2} - 2p.$$

Con queste formole si vede subito che se S soddisfa l'equazione:

$$\frac{2q}{r_1 r_2} - p\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + 1 = 0,$$

cioè è una Σ parabolica, la superfici inversa S soddisferà l'equazione omologa:

$$\frac{2q'}{r'_1 r'_2} - p'\left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}\right) + 1 = 0,$$

e sarà quindi essa stessa una Σ parabolica c. d. d.

(*) Prendiamo $= 1$ il raggio della sfera d'inversione.

§ 10. Sistemi ciclici con una serie di Σ paraboliche.

Dal teorema di Weingarten e dalle proprietà già dimostrate per le Σ paraboliche segue ora l'importante teorema:

Se si considera una superficie Σ ellittica, iperbolica o parabolica ed il sistema ciclico, che ha per assi le normali di Σ, le superficie normali ai circoli sono Σ paraboliche.

Supponiamo dapprima che la superficie Σ considerata sia parabolica e indichiamo con Σ' la sua complementare. Invertendo per raggi vettori reciproci rispetto ad una sfera col centro in O e di raggio $= \sqrt{2}$ il sistema (Σ') delle superficie parallele a Σ', otterremo un sistema di superficie (Σ''), che saranno paraboliche pel teorema di Weingarten, ed avranno per traiettorie ortogonali dei circoli uscenti da O, i cui assi saranno appunto le normali di Σ, ciò che per una superficie Σ parabolica dimostra il teorema.

Ora consideriamo il caso di una Σ ellittica od iperbolica e sia S una delle superficie ortogonali ai circoli C che hanno per assi le normali di Σ e i cui piani passano tutti pel centro O della sfera fissa. Ad ogni tale circolo C sostituiamo il circolo C' uscente da O e tangente a C nel punto, ove questo circolo incontra normalmente S. Il sistema ∞^2 di circoli C' è evidentemente un sistema normale e nella congruenza degli assi dei circoli C' le sviluppabili della congruenza corrispondono, come quelle della congruenza parallela degli assi dei circoli C, alle linee di curvatura di S. Le due congruenze hanno dunque a comune l'immagine sferica delle loro sviluppabili e per ciò la prima è una congruenza normale, come la seconda. Dunque le superficie ortogonali ai raggi della prima congruenza sono Σ paraboliche e quindi, per quanto sopra si è visto, tutte le superficie ortogonali ai circoli C', in particolare la S, sono Σ paraboliche c. d. d.

Inversamente prendasi ad arbitrio una Σ parabolica e descritta una sfera S_0 col centro in O, si costruiscano i circoli C normali a Σ e che tagliano S_0 in punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente. La congruenza degli assi dei circoli C è una congruenza normale, come la congruenza parallela degli assi dei circoli C' calati dal punto fisso O normalmente a Σ. E dai risultati del § 6 segue che le superficie ortogonali ai raggi della detta congruenza sono Σ ellittiche od iperboliche.

Abbiamo quindi il teorema:

Se si prende ad arbitrio una superficie Σ parabolica ed una sfera S_0

col centro nel punto fisso O, i circoli C normali a Σ e che tagliano in punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente, la sfera S_0 ammettono una serie di superficie ortogonali, che sono in tutti i casi altrettante Σ paraboliche e la congruenza degli assi dei circoli C ammette una serie di superficie ortogonali, le quali sono Σ ellittiche se i circoli C tagliano in punti diametralmente opposti S_0, Σ iperboliche se l'incontro dei circoli C con S_0 ha luogo ortogonalmente e si riducono in fine a Σ paraboliche quando la sfera S_0 si riduce al suo centro.

§ 11. Le superficie Σ ellittiche ed iperboliche.

Il teorema superiore ci dà in particolare una costruzione geometrica colla quale dalle Σ paraboliche possono farsi derivare le Σ ellittiche ed iperboliche ed ora appunto, giovandoci di questa costruzione, vogliamo stabilire le formole relative a queste ultime superficie.

Prendiamo a tale oggetto la superficie Σ parabolica data dalle formole (15*) § 7 e costruiamo i circoli C del teorema. Se con ξ_0, η_0, ζ_0 indichiamo le coordinate del centro di uno di essi e con R il suo raggio, avremo:

$$\xi_0 = \bar{x} + R(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2),$$

ossia:

$$\xi_0 = [(e^\alpha + R)\cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi] X_1 + [(e^\alpha + R)\operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi] X_2,$$

colle analoghe per η_0, ζ_0. Ora, pel modo come i circoli C sono costruiti, deve aversi:

$$\Sigma \xi_0^2 = (e^\alpha + R)^2 + \beta^2 = R^2 - k, \tag{20}$$

essendo k una costante, positiva o negativa secondo che i circoli C tagliano in punti diametralmente opposti, ovvero ortogonalmente, la sfera fissa di raggio $= \sqrt{\pm k}$. Dalla (20) si ricava:

$$e^\alpha + R = \frac{1}{2}\left[e^\alpha - (\beta^2 + k)\, e^{-\alpha}\right],$$

onde:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 = &\left[\frac{1}{2}\left\{e^\alpha - (\beta^2 + k)\, e^{-\alpha}\right\}\cos\varphi + \beta\operatorname{sen}\varphi\right] X_1 + \\ &+ \left[\frac{1}{2}\left\{e^\alpha - (\beta^2 + k)\, e^{-\alpha}\right\}\operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi\right] X_2. \end{aligned}\right\} \tag{20*}$$

Siccome la normale al piano del circolo ha i coseni di direzione X_3, Y_3, Z_3, le coordinate ξ, η, ζ di un punto mobile sopra una delle superficie normali agli assi dei circoli saranno date dalle formole (L. pag. 255):

$$\xi = \xi_0 - t X_3, \qquad \eta = \eta_0 - t Y_3, \qquad \zeta = \zeta_0 - t Z_3,$$

dove t è da calcolarsi con una quadratura dalla formola:

$$d t = \Sigma X_3 \frac{\partial \xi_0}{\partial u} \cdot d u + \Sigma X_3 \frac{\partial \xi_0}{\partial v} d v.$$

Questa, per le (20*) e per le (14), diventa:

$$\left.\begin{aligned} d t = & \left[\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} - (\beta^2 + k) e^{-\alpha}\right\} \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi\right] \operatorname{sen}\theta \, d u - \\ & - \left[\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} - (\beta^2 + k) e^{-\alpha}\right\} \operatorname{sen}\varphi - \beta \cos\varphi\right] \cos\theta \, d v, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

e facilmente si verifica, tenendo conto delle (13), (15), che il suo secondo membro è effettivamente un differenziale esatto.

Così adunque la formola:

$$\left.\begin{aligned} \xi = & \left[\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} - (\beta^2 + k) e^{-\alpha}\right\} \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi\right] X_1 + \\ & + \left[\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} - (\beta^2 + k) e^{-\alpha}\right\} \operatorname{sen}\varphi - \beta \cos\varphi\right] X_2 - t X_3, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

colle analoghe per η, ζ, ove t si calcoli con una quadratura dalla (21), daranno una superficie Σ ellittica, iperbolica o parabolica secondo che k è positiva, negativa o nulla. Questa superficie Σ ha a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura colla superficie pseudosferica S primitiva, come risulta confermato dal calcolare le derivate di ξ, η, ζ, per le quali troviamo le formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \left[\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} + (\beta^2 + k) e^{-\alpha}\right\} \cos\theta + t \operatorname{sen}\theta\right] X_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \left[\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} + (\beta^2 + k) e^{-\alpha}\right\} \cos\theta - t \cos\theta\right] X_2 . \end{aligned}\right\} \tag{22*}$$

I raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 di Σ hanno per conseguenza i valori seguenti:

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} + (\beta^2 + k) e^{-\alpha}\right\} \operatorname{tang}\theta - t$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{2}\left\{e^{\alpha} + (\beta^2 + k) e^{-\alpha}\right\} \cot\theta - t,$$

onde osservando che per la superficie Σ le quantità:

$$2q = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad p = \xi X_3 + \eta Y_3 + \zeta Z_3,$$

sono date da:

$$2q = \frac{1}{4}\left\{e^{\alpha} - (\beta^2 + k)\, e^{-\alpha}\right\}^2 + \beta^2 + t^2$$

$$p = -t,$$

si potrà direttamente verificare che le superficie (22) soddisfano l'equazione a derivate parziali:

$$2q + k - (\rho_1 + \rho_2) p + \rho_1 \rho_2 = 0,$$

cioè sono Σ ellittiche, iperboliche o paraboliche secondo che $k > 0$, $k < 0$ o $k = 0$.

Questi calcoli danno altresì, come si vede, la dimostrazione analitica della seconda parte del teorema in fine al § 10.

§ 12. Costruzione delle Σ ellittiche ed iperboliche dalle Σ paraboliche.

Le formole (22), colle quali abbiamo costruito le superficie Σ ellittiche ed iperboliche, sono suscettibili di una semplice interpretazione geometrica che ritroviamo scindendo in queste formole il secondo membro in due parti, l'una indipendente dalla costante k, l'altra che moltiplica k. E in primo luogo scindendo in tal modo la funzione t, possiamo porre per la (21):

$$t = \gamma' - \frac{1}{2} k \gamma,$$

la funzione γ avendo il significato dato dalla terza (15) § 7 e la γ' essendo definita dalle altre formole:

$$\frac{\partial \gamma'}{\partial u} = \left\{\frac{1}{2}(e^{\alpha} - \beta^2 e^{-\alpha}) \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi\right\} \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \gamma'}{\partial v} = -\left\{\frac{1}{2}(e^{\alpha} - \beta^2 e^{-\alpha}) \operatorname{sen}\varphi - \beta \cos\varphi\right\} \cos\theta.$$

Allora se chiamiamo ξ_0, η_0, ζ_0 i valori che assumono ξ, η, ζ per $k = 0$, le (22) ci danno:

$$\xi = \xi_0 - \frac{1}{2} k \overline{x}', \qquad \eta = \eta_0 - \frac{1}{2} k \overline{y}', \qquad \zeta = \zeta_0 - \frac{1}{2} k \overline{z}', \tag{B}$$

le $\overline{x}'$, $\overline{y}'$, $\overline{z}'$ essendo date dalla (18) § 8 e dalle analoghe per $\overline{y}'$, $\overline{z}'$.

La superficie descritta dal punto (ξ_0, η_0, ζ_0), ottenendosi dalle (22) per $k=0$, è una Σ parabolica che ha a comune colla superficie pseudosferica primitiva S l'immagine sferica delle linee di curvatura e lo stesso, pel § 7, accade della superficie descritta dal punto $(\overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$.

Ora è facile accertarsi che queste due Σ paraboliche sono due *qualunque* di quelle che corrispondono per parallelismo delle normali e per linee di curvatura alla S. Per vederlo non si ha che a porre le formole che definiscono ξ_0, η_0, ζ_0, cioè:

$$\xi_0 = \left\{\frac{1}{2}(e^\alpha - \beta^2 e^{-\alpha})\cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi\right\} X_1 +$$

$$+ \left\{\frac{1}{2} e^\alpha - \beta^2 e^{-\alpha}) \operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi\right\} X_2 - \gamma' X_3,$$

sotto la forma (18) § 8:

$$\xi_0 = e^{-\alpha'}(\cos\varphi' X_1 + \operatorname{sen}\varphi' X_2) - \gamma' X_3,$$

ciò che si ottiene ponendo:

$$e^{-\alpha'} = \frac{e^\alpha + \beta^2 e^{-\alpha}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi' &= \frac{(e^\alpha - \beta^2 e^{-\alpha})\cos\varphi + 2\beta\operatorname{sen}\varphi}{e^\alpha + \beta^2 e^{-\alpha}} \\ \operatorname{sen}\varphi' &= \frac{(e^\alpha - \beta^2 e^{-\alpha})\operatorname{sen}\varphi - 2\beta\cos\varphi}{e^\alpha + \beta^2 e^{-\alpha}}, \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

ed osservando che ne seguono le altre:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = -\operatorname{sen}\varphi'\cos\theta, \qquad \frac{\partial\varphi'}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = \cos\varphi'\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial u} = -\cos\varphi'\cos\theta, \qquad \frac{\partial\alpha'}{\partial v} = -\operatorname{sen}\varphi'\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial\gamma'}{\partial u} = e^{-\alpha'}\cos\varphi'\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial\gamma'}{\partial v} = -e^{-\alpha'}\operatorname{sen}\varphi'\cos\theta.$$

Fissato l'angolo φ, cioè il sistema di linee geodetiche parallele sulla superficie pseudosferica S, rispetto al quale la seconda Σ parabolica è costruita, l'angolo φ' definito dalle (C) contiene una costante arbitraria effettiva, cioè quella additiva in β, e però il sistema di geodetiche parallele corrispondente può essere uno qualunque dei sistemi di questa specie sopra S oltre (φ), quindi la prima Σ parabolica può coincidere, come si era asserito, con una qualunque di quelle che hanno le immagini delle linee di curvatura a comune con S. Dopo di ciò è chiaro che le formole (B) possono interpretarsi mediante la costruzione geometrica seguente:

Prese due superficie Σ paraboliche, siano Σ_1, Σ_2, che abbiano a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura e del resto qualunque (purchè non parallele nè omotetiche (*)*) e fissata la corrispondenza dei punti di Σ_1, Σ_2 per parallelismo delle normali, sopra ogni segmento $\overline{M_1 M_2}$, che unisce due punti corrispondenti, si prenda un punto M che lo divida in un rapporto costante; il luogo del punto M sarà una Σ ellittica od iperbolica, avente la medesima immagine sferica delle linee di curvatura di Σ_1, Σ_2.*

L'essere la superficie Σ derivata ellittica piuttosto che iperbolica dipende dal segno della costante k, cangiando il quale il punto M passa dall'interno all'esterno del segmento $\overline{M_1 M_2}$, o viceversa. Per ben fissare quando ha luogo l'un caso e quando l' altro, consideriamo una Σ parabolica e sulla superficie pseudosferica S, che corrisponde a Σ per parallelismo delle normali e linee di curvatura, quel sistema (g) di geodetiche parallele rispetto al quale la Σ è costruita, intendendo che il senso positivo delle geodetiche g sia quello secondo cui concorrono nel punto comune all' infinito. La perpendicolare calata dall'origine O alla normale in un punto P di Σ è parallela alla tangente nel corrispondente punto di S di quella geodetica g che vi passa. Ora il senso da O verso il piede di ciascuna di queste perpendicolari può coincidere col senso positivo di quella tangente o coll'opposto, ma possiamo sempre supporre che abbia luogo il primo caso, bastando nel secondo sostituire alla Σ la sua simmetrica rispetto all' origine per ritornare al primo. Ciò posto ed ammesso che per ambedue le superficie Σ_1, Σ_2 del teorema valga il primo caso, un attento esame delle nostre formole dimostra che: *la superficie luogo del punto M sarà una Σ ellittica od iperbolica secondo che M divide il segmento $M_1 M_2$ internamente od esternamente.*

(*) Quando Σ_1 Σ_2 siano parallele od omotetiche la superficie Σ ottenuta colla costruzione del testo è evidentemente essa stessa una Σ parabolica.

§ 13. Considerazioni infinitesimali sui sistemi ciclici con Σ paraboliche.

Secondo quanto abbiamo visto al § 10, esistono infiniti sistemi ciclici cui appartiene una *data* Σ parabolica; un tale sistema risulta perfettamente definito quando, oltre la Σ, si dia il raggio del circolo del sistema, che in un determinato punto P della Σ la incontra ortogonalmente. Ora consideriamo una Σ parabolica e, nel piano condotto per la normale in un punto P di Σ e pel punto fisso O, tracciamo una curva arbitraria Γ normale alla Σ nel punto P. La superficie Σ e il circolo C osculatore della curva Γ nel punto P individuano, secondo quanto abbiamo detto sopra, un sistema ciclico in cui le superficie ortogonali ai circoli sono Σ paraboliche e i piani dei circoli passano tutti per O. In questo sistema ciclico consideriamo la superficie Σ' infinitamente vicina a Σ, che incontrerà la curva Γ normalmente nel punto P' successivo a P. Partendo ora dalla superficie Σ' parabolica e dalla medesima curva Γ, si costruisca similmente il circolo C' osculatore di Γ in P' e, nel sistema ciclico individuato da Σ' e da C', la superficie Σ'' parabolica successiva a Σ' e così via di seguito. Le superficie della serie infinita:

$$\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \ldots,$$

in tal modo costruite, apparterranno ad un sistema triplo ortogonale e le loro traiettorie ortogonali saranno, come Γ, curve piane, i cui piani passano pel punto fisso O.

Le considerazioni infinitesimali ora esposte ci conducono così a ritenere che sussista probabilmente il teorema:

Data ad arbitrio una superficie Σ parabolica ed una curva Γ normale in un punto a Σ e situata in un piano per O, esiste un sistema triplo ortogonale, al quale appartiene una serie di superficie Σ paraboliche contenente la Σ data, mentre le traiettorie ortogonali di queste Σ, fra le quali figura la curva data Γ, sono curve piane in piani per O. Inoltre i sistemi ciclici osculatori (*) *di un tale sistema* (Σ) *lungo una qualunque superficie Σ parabolica appartengono alla classe del* § 10.

Nei seguenti paragrafi dimostriamo analiticamente, in tutto rigore, che il teorema enunciato effettivamente sussiste.

(*) Lezioni, ecc., pag. 471.

§ 14. Formole effettive pei sistemi tripli ortogonali precedenti.

Consideriamo, come al § 7, una coppia S, S' di superficie pseudosferiche complementari e la superficie Σ parabolica, data dalle formole (15*) ibid., che ha a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura colla S'. Ora teniamo fissa la superficie S e facciamo variare la complementare S'; questa descriverà allora, come sappiamo, una serie ∞^1 appartenente ad un sistema triplo ortogonale e precisamente ad un sistema ciclico di Ribaucour, che dà all'elemento lineare dello spazio la forma:

$$ds^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \mathrm{sen}^2\varphi\, dv^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 dw^2, \tag{23}$$

dove w figura come parametro, o costante arbitraria, nella soluzione più generale φ delle equazioni simultanee (13), ove la θ si mantenga fissa.

Per ciascuna complementare S' consideriamo una corrispondente Σ parabolica data dalle (15*), e cerchiamo se è possibile scegliere queste Σ in guisa che facciano parte di un sistema triplo ortogonale. Basterà per ciò che le curve (w), definite dalle (15*) stesse quando ad u, v si diano valori fissi u_0, v_0, taglino ortogonalmente tutte le superficie Σ, che cioè le derivate:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial w}, \quad \frac{\partial \overline{y}}{\partial w}, \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial w},$$

calcolate dalle (15*) siano proporzionali rispettivamente a:

$$\mathrm{sen}\,\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2, \qquad \mathrm{sen}\,\varphi\, Y_1 - \cos Y_2, \qquad \mathrm{sen}\,\varphi\, Z_1 - \cos\varphi\, Z_2,$$

che rappresentano i coseni di direzione della normale ad una Σ (formole (17) § 7).

Posto dunque per abbreviare:

$$H_1 = e^{\alpha}\cos\varphi + \beta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad H_2 = e^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \beta\cos\varphi, \tag{24}$$

le condizioni imposte si traducono nell'unica equazione:

$$\cos\varphi \frac{\partial H_1}{\partial w} + \mathrm{sen}\,\varphi \frac{\partial H_2}{\partial w} = 0,$$

ossia:

$$\beta \frac{\partial \varphi}{\partial w} = - e^{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial w}, \tag{25}$$

formola colla quale sarà nota β in termini finiti, appena conosciuta α.

D'altronde basta che α soddisfi le due equazioni:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \cos\varphi \cos\theta\,, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta\,, \tag{26}$$

che seguono dalla prima delle (15), perchè la β, tratta dalla (25), soddisfi le altre due:

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = e^{\alpha} \operatorname{sen}\varphi \cos\theta\,, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} = - e^{\alpha} \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\,, \tag{26*}$$

cioè la seconda delle (15). E invero se si deriva la (25) una volta rapporto ad u, una seconda rapporto a v, tenendo conto delle (13) § 7 e delle superiori (26), si trovano appunto le (26*).

D'altra parte le (26) possono anche scriversi:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}\,, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}}\,,$$

e integrate danno la formola:

$$e^{\alpha} = W \frac{\partial \varphi}{\partial w}\,, \tag{27}$$

che ci definiscono α, restando W una funzione arbitraria di w. Dopo di ciò la (25) ci dà per β il valore:

$$\beta = -\left[W \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial w}} + W' \right], \tag{27*}$$

indicando W' la derivata di W. Con questi valori (27), (27*) per α, β le condizioni imposte sono soddisfatte e sostituendoli in H_1, H_2, le formole corrispondenti:

$$\bar{x} = H_1 X_1 + H_2 X_2 \tag{28}$$

colle analoghe per $\bar{y}$, $\bar{z}$, definiranno un sistema triplo ortogonale (u, v, w), in cui le superficie w sono Σ paraboliche.

§ 15. Verifica delle proprietà dei sistemi tripli ortogonali costruiti.

Dalle (28) si ha:

$$\bar{x} X_3 + \bar{y} Y_3 + \bar{z} Z_3 = 0\,,$$

onde, essendo X_3, Y_3, Z_3 indipendenti da w, segue che le curve (w) del sistema triplo ortogonale (28) sono piane e i loro piani passano per l'origine.

Derivando le (38), coll'aver riguardo alle varie formole precedenti, si trova:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = H_1 [\cos\varphi \cos\theta X_1 + \operatorname{sen}\varphi \cos\theta X_2 + \operatorname{sen}\theta X_3]$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = H_2 [\cos\varphi \operatorname{sen}\theta X_1 + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta X_2 - \cos\theta X_3]$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial w} = \left(e^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial w} - \frac{\partial \beta}{\partial w}\right)(\cos\varphi X_2 - \operatorname{sen}\varphi X_1).$$

Per l'elemento lineare ds dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale (28), si ha dunque:

$$\left.\begin{aligned} &ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2 \\ &H_1 = e^\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi, \quad H_2 = e^\alpha \operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi, \quad H_3 = e^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial w} - \frac{\partial\beta}{\partial w}. \end{aligned}\right\} \quad (28^*)$$

Questo sistema è dedotto evidentemente dal sistema ciclico di Ribaucour (23) per trasformazione di Combescure, l'orientazione del triedro principale nei due sistemi essendo la stessa in punti corrispondenti (u, v, w) dello spazio. La presenza della funzione arbitraria W nelle nostre formole permette poi di dare, come subito si vede, ad *una* delle curve piane (w) la forma che più ci piace. Così il teorema enunciato al § 13 è perfettamente stabilito. Resta in fine che dimostriamo come ogni sistema ciclico osculatore del nostro sistema (28) lungo una Σ parabolica appartenga alla classe del § 10. Ora ciò si vede subito osservando: 1.° che i piani dei circoli di un tale sistema passano tutti per O; 2.° che i loro assi sono rispettivamente paralleli alle normali della superficie pseudosferica S e le sviluppabili della congruenza di questi assi corrispondono alle linee u, v, cioè alle linee di curvatura di S. (Cfr. § 6.)

§ 16. Ricerca di nuovi sistemi tripli ortogonali con Σ paraboliche.

I sistemi tripli ortogonali, con una serie di Σ paraboliche, considerati nei §§ precedenti sono dedotti per trasformazione di Combescure da quei particolari sistemi tripli ortogonali con una serie di superficie pseudosferiche di egual raggio (sistemi di Weingarten), nei quali le traiettorie ortogonali di queste superficie sono circoli.

Ora prendiamo più in generale un sistema (u, v, w) di WEINGARTEN, che dia all'elemento lineare dello spazio la nota forma (M. n.° 4):

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2, \tag{29}$$

dove la funzione θ di u, v, w soddisfa le equazioni simultanee alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) = \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right) = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\\
&\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}.
\end{aligned}\right\} \tag{30*}$$

Supponiamo subito, essendo poi tale condizione necessaria per il seguito, che la flessione di questo sistema di WEINGARTEN (M. n.° 12) sia >1, che cioè l'espressione:

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2,$$

la quale in ogni caso è una funzione della sola w, sia positiva (*).

Per ciascuna superficie pseudosferica S del sistema (29) consideriamo una superficie S' complementare definita da una funzione $\varphi(u, v, w)$ che soddisfi le solite equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

e deduciamo colle formole (15*) § 7:

$$\bar{x} = H_1 X_1 + H_2 X_2, \tag{32}$$

$$H_1 = e^\alpha\cos\varphi + \beta\operatorname{sen}\varphi, \qquad H_2 = e^\alpha\operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi, \tag{32*}$$

una corrispondente superficie Σ parabolica, la cui immagine sferica delle linee di curvatura coincide con quella della superficie pseudosferica S'.

(*) Cangiando il parametro w si può fare senz'altro l'espressione stessa $=1$.

Trascriviamo ancora le equazioni cui debbono soddisfare rispettivamente α, β, cioè:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \cos\varphi\cos\theta, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \tag{33}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = e^{\alpha}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} = -e^{\alpha}\cos\varphi\operatorname{sen}\theta, \tag{33*}$$

e in fine le formole che danno le derivate parziali dei nove coseni di direzione:

$$(X_1,\ Y_1,\ Z_1), \qquad (X_2,\ Y_2,\ Z_2), \qquad (X_3,\ Y_3,\ Z_3),$$

delle normali alle rispettive superficie u, v, w del sistema di Weingarten (29):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v} X_2 + \operatorname{sen}\theta X_3, && \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u} X_2, && \frac{\partial X_1}{\partial w} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} X_3\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{\partial \theta}{\partial v} X_1, && \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \theta}{\partial u} X_1 - \cos\theta X_3, && \frac{\partial X_2}{\partial w} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} X_3\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta X_1, && \frac{\partial X_3}{\partial v} = \cos\theta X_2, && \frac{\partial X_3}{\partial w} = -\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} X_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} X_2.
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Procedendo ora come al § 14, vediamo che il sistema triplo (u, v, w), definito dalle (32), sarà ortogonale se le derivate:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial w}, \qquad \frac{\partial \bar{y}}{\partial w}, \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial w},$$

risulteranno rispettivamente proporzionali a:

$$\operatorname{sen}\varphi X_1 - \cos\varphi X_2, \qquad \operatorname{sen}\varphi Y_1 - \cos\varphi Y_2, \qquad \operatorname{sen}\varphi Z_1 - \cos\varphi Z_2.$$

Queste condizioni si traducono nelle due equazioni:

$$\cos\varphi \frac{\partial H_1}{\partial w} + \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial H_2}{\partial w} = 0$$

$$\frac{H_1}{\cos\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} + \frac{H_2}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w} = 0,$$

ovvero, per le (32*), nelle altre:

$$\beta \frac{\partial \varphi}{\partial w} = -e^{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial w} \tag{35}$$

$$\beta\left[\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right] + e^{\alpha}\left[\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial w} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial w}\right] = 0. \tag{36}$$

§ 17. Discussione delle equazioni di condizione.

Se deriviamo la (35) prima rispetto ad u, poi a v, ponendo mente alle (33), (33*) troviamo le due equazioni:

$$\left.\begin{aligned}\beta\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}+\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}\right]+e^\alpha\cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}=0\\ \beta\left[\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}\right]-e^\alpha\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}=0,\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

dalle quali, supponendo come è naturale:

$$\frac{\partial\theta}{\partial w}\neq 0,$$

segue evidentemente la (36), che può dunque omettersi.

D'altronde, eliminando β fra le (37), troviamo:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\theta}{\partial w}=0, \tag{38}$$

cioè precisamente quell'equazione in termini finiti per determinare φ che porta dal sistema (θ) di Weingarten ad un complementare (φ) (M. n.° 20). Essendo, per ipotesi, il sistema (θ) a flessione >1, la (38) dà due valori essenzialmente distinti per φ, i quali soddisfano le equazioni (31) (M. ibid.).

Ora se fra la (35) e l'una e l'altra delle (37) eliminiamo β, otteniamo le due:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial w}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}+\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}\right]-\cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0\\ \frac{\partial\alpha}{\partial w}\left[\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}\right]+\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\theta}{\partial w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0,\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

che sono naturalmente concordanti, a causa della (38). Si noti poi che i coefficienti di β nelle (37), ossia quelli di $\frac{\partial\alpha}{\partial w}$ nelle (39), non possono essere nulli, perchè se uno di essi fosse nullo lo sarebbe, per la (38), anche l'altro e si avrebbe allora:

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2=0,$$

cioè il sistema (θ) sarebbe a flessione (costante) $=1$ contro l'ipotesi.

Ciò posto, le (33) associate all'una o all'altra delle (39) danno il differenziale totale di α e fanno quindi conoscere, a meno di una costante additiva, la funzione α con una quadratura, le condizioni d'integrabilità trovandosi d'altronde identicamente soddisfatte a causa delle (30*) e (31). Calcolata α, si otterrà esplicitamente β dalla (35) e il valore così ottenuto soddisferà alle (33*), come si verifica derivando.

Le formole (32), ove per α, β in H_1, H_2 si pongano i valori trovati, danno adunque un sistema triplo ortogonale (u, v, w), nel quale le superficie w sono Σ paraboliche. Questo sistema (32) ha il triedro principale orientato come quello del sistema (φ) di WEINGARTEN, complementare del primitivo (θ), cui corrisponde la forma:

$$ds^2 = \cos^2\varphi\, d u^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, d v^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 d w^2, \tag{40}$$

dell'elemento lineare dello spazio; l'un sistema cioè deriva dall'altro per trasformazione di COMBESCURE.

§ 18. I sistemi tripli ortogonali (Σ) complementari.

Come il sistema (Σ) dato dalle (32) è dedotto per trasformazione di COMBESCURE dal sistema (φ) di WEINGARTEN, così possiamo trovarne un secondo nel quale l'orientazione del triedro principale sia identica a quella del sistema (θ) primitivo.

Ricorriamo per ciò attualmente alle formole (18) § 7:

$$\overline{x}' = e^{-\alpha}(\cos\varphi\, X_1 + \operatorname{sen}\varphi\, X_2) - \gamma\, X_3, \tag{41}$$

dove φ deve soddisfare le (31) ed α le (33), mentre γ soddisfa le altre:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = e^{-\alpha} \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial v} = - e^{-\alpha} \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \tag{42}$$

equivalenti alla terza delle (15) § 7.

Le (41) ci definiranno un sistema triplo ortogonale se le derivate:

$$\frac{\partial \overline{x}'}{\partial w}, \quad \frac{\partial \overline{y}'}{\partial w}, \quad \frac{\partial \overline{z}'}{\partial w},$$

calcolate da queste formole, riusciranno proporzionali rispettivamente a:

$$X_3, \ Y_3, \ Z_3.$$

Queste condizioni danno le due equazioni:

$$\frac{\partial}{\partial w}(e^{-\alpha}\cos\varphi) = \frac{-\gamma}{\cos\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(e^{-\alpha}\operatorname{sen}\varphi) = \frac{-\gamma}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w},$$

dalle quali, con un calcolo del tutto simile a quello del § precedente, si trae che le funzioni φ ed α restano determinate dalle medesime equazioni; per determinare γ troviamo poi:

$$\gamma\frac{\partial\theta}{\partial w} + e^{-\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial w} = 0, \tag{43}$$

e riesce ben facile verificare che la γ tratta di qui soddisfa effettivamente le (42). Sostituendo nelle (41) si avrà dunque un sistema triplo ortogonale (u, v, w) nel quale ciascuna superficie w è una Σ parabolica complementare della corrispondente Σ nel sistema (32); per ciò questi due sistemi si diranno *complementari.*

Derivando le (41), si trova subito:

$$\frac{\partial\overline{x}'}{\partial u} = -(e^{-\alpha}\cos\theta - \gamma\operatorname{sen}\theta)X_1,\qquad \frac{\partial\overline{x}'}{\partial v} = -(e^{-\alpha}\operatorname{sen}\theta + \gamma\cos\theta)X_2,$$

$$\frac{\partial\overline{x}'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial\gamma}{\partial w} + e^{-\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)X_3,$$

onde risulta nuovamente che il sistema (42) è dedotto per trasformazione di Combescure dal sistema (θ) di Weingarten. Siccome qui φ è suscettibile di due valori distinti, corrispondenti ai due diversi sistemi di Weingarten complementari di (θ), ne concludiamo:

Da ogni sistema di Weingarten *a flessione* > 1 *si deducono, per trasformazione di* Combescure *con quadrature, due diversi sistemi tripli ortogonali, nei quali le superficie di una serie sono* Σ *paraboliche.*

Si aggiunge che questi due sistemi (Σ) derivati sono perfettamente determinati a meno di un'omotetia, dipendente dalla costante arbitraria additiva in α.

§ 19. L'inversione per raggi vettori reciproci applicata ai sistemi Σ.

Dal teorema di WEINGARTEN (§ 9) risulta che se si inverte per raggi vettori reciproci, rispetto ad una sfera col centro nel punto fisso O, uno dei sistemi (Σ) con una serie di Σ paraboliche, si ottiene di nuovo un sistema della medesima specie. Questi nuovi sistemi (Σ) provengono alla loro volta, come si vedrà, per trasformazione di COMBESCURE da altri sistemi di WEINGARTEN, onde sembrerebbe a prima vista che la considerazione dei sistemi (Σ) desse un nuovo modo di dedurre da un sistema noto di WEINGARTEN nuovi tali sistemi. Però si vedrà che i nuovi sistemi di WEINGARTEN sono già compresi nella serie, infinita nei due sensi, dei sistemi di WEINGARTEN complementari del primitivo (θ).

Consideriamo il sistema (Σ) definito dalle formole (32) § 15; assumendolo a sistema coordinato, esso dà all'elemento lineare dello spazio la forma:

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2, \tag{44}$$

avendo H_1, H_2, H_3 i valori seguenti:

$$H_1 = e^\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi, \quad H_2 = e^\alpha \operatorname{sen}\varphi - \beta\cos\varphi, \quad H_3 = e^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial w} - \frac{\partial\beta}{\partial w}. \tag{45}$$

Costruendo per questo sistema le quantità (L. pag. 467):

$$\beta_{ki} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k} \; (\rho_1 = u, \; \rho_2 = v, \; \rho_3 = w),$$

troviamo:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}, && \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v} = -\frac{\partial\varphi}{\partial v}, && \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} = -\operatorname{sen}\varphi, \\ &\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w}, && \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v} = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w}, && \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} = \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

cioè i valori stessi che le β_{ki} hanno pel sistema (φ) di WEINGARTEN, ciò che era prevedibile a priori, i due sistemi corrispondendosi per trasformazione di COMBESCURE.

Ora invertiamo il nostro sistema (Σ) per raggi vettori reciproci rispetto alla sfera col centro nell'origine e di raggio unitario. Ponendo:

$$\sigma = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = e^{2\alpha} + \beta^2, \tag{47}$$

i nuovi valori delle H pel sistema inverso (Σ') saranno:

$$H'_1 = \frac{H_1}{\sigma}, \qquad H'_2 = \frac{H_2}{\sigma}, \qquad H'_3 = \frac{H_3}{\sigma}. \tag{48}$$

Derivando la (47), otteniamo:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 2 e^{\alpha} \cos\theta\, H_1, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 2 e^{\alpha} \operatorname{sen}\theta\, H_2, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial w} = -2\beta H_3, \tag{49}$$

formole di cui occorrerà tener conto.

Costruendo pel sistema (Σ') trasformato le quantità analoghe delle (46), troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{H'_1}\frac{\partial H'_2}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2 e^{\alpha}\cos\theta \frac{H_2}{\sigma}, \qquad \frac{1}{H'_2}\frac{\partial H'_1}{\partial v} = \\
&= -\frac{\partial \varphi}{\partial v} - 2 e^{\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{H_1}{\sigma}, \qquad \frac{1}{H'_3}\frac{\partial H'_1}{\partial w} = -\operatorname{sen}\varphi + \frac{2\beta H_1}{\sigma}, \\
&\frac{1}{H'_1}\frac{\partial H'_3}{\partial u} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w} - 2 e^{\alpha}\cos\theta \frac{H_3}{\sigma}, \qquad \frac{1}{H'_2}\frac{\partial H'_3}{\partial v} = \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} - 2 e^{\alpha}\operatorname{sen}\theta \frac{H_3}{\sigma}, \qquad \frac{1}{H'_3}\frac{\partial H'_2}{\partial w} = \cos\varphi + \frac{2\beta H_2}{\sigma}.
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Supponendo quindi che questo sistema (Σ') derivi per trasformazione di Combescure da un sistema di Weingarten:

$$d s^2 = \cos^2\varphi'\, d u^2 + \operatorname{sen}^2\varphi'\, d v^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial w}\right)^2 d w^2, \tag{51}$$

ed eguagliando conseguentemente le quantità β_{ki} corrispondenti, dovranno sussistere le formole:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\varphi' = \cos\varphi + 2\beta \frac{H_2}{\sigma}, \qquad && \operatorname{sen}\varphi' = \operatorname{sen}\varphi - 2\beta\frac{H_1}{\sigma} \\
&\frac{\partial \varphi'}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2 e^{\alpha}\cos\theta \frac{H_2}{\sigma}, && \frac{\partial \varphi'}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} + 2 e^{\alpha}\operatorname{sen}\theta \frac{H_1}{\sigma} \\
&\frac{1}{\cos\varphi'}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial u \partial w} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial w} - 2 e^{\alpha}\cos\theta \frac{H_3}{\sigma}, && \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi'}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial v \partial w} = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial w} - 2 e^{\alpha}\operatorname{sen}\theta \frac{H_3}{\sigma}.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Ora si riscontra subito che le prime due (52) sono compatibili e successivamente derivate traggono seco le rimanenti equazioni (52); ciò basta già per concludere che la (51) definisce un sistema (φ') di Weingarten, proveniente per trasformazione di Combescure dal nuovo sistema (Σ'). D'altronde si verifica subito la formola:

$$\frac{\cos\varphi'}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}+\frac{\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w}=\frac{\partial\theta}{\partial w},$$

la quale ci dimostra che il sistema (φ') è complementare di (θ) e cioè adunque il secondo sistema complementare dopo (φ).

§ 20. Le due serie di sistemi (Σ) dedotte da una serie di sistemi complementari di Weingarten.

Riprendiamo a considerare il sistema (Σ') del § precedente dedotto per inversione dal sistema (Σ). Ponendo:

$$e^{\alpha'}=\frac{e^{\alpha}}{\sigma},\qquad \beta'=\frac{-\beta}{\sigma},$$

si vericherà che sussistono le formole omologhe delle (45):

$$H'_1=e^{\alpha'}\cos\varphi'+\beta'\operatorname{sen}\varphi',\quad H'_2=e^{\alpha'}\operatorname{sen}\varphi',-\beta'\cos\varphi',\quad H'_3=e^{\alpha'}\frac{\partial\varphi'}{\partial w}-\frac{\partial\beta'}{\partial w}.$$

Di più sussistendo anche le altre:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi'}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}=-\operatorname{sen}\varphi'\cos\theta, && \frac{\partial\varphi'}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=\cos\varphi'\operatorname{sen}\theta\\
&\frac{\partial\alpha'}{\partial u}=-\cos\varphi'\cos\theta, && \frac{\partial\alpha'}{\partial v}=-\operatorname{sen}\varphi'\operatorname{sen}\theta\\
&\frac{\partial\beta'}{\partial u}=-e^{\alpha'}\operatorname{sen}\varphi'\cos\theta, && \frac{\partial\beta'}{\partial v}=e^{\alpha'}\cos\varphi'\operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}$$

che corrispondono appunto alle (31), (33), (33*), dalle quali si deducono mutando φ in φ' e θ in $\pi+\theta$, vediamo che le Σ paraboliche del sistema (Σ') derivano col metodo di Weingarten dalle superficie pseudosferiche del sistema (θ) e corrispondono per parallelismo delle normali e per linee di curvatura alle superficie del sistema complementare (φ').

Ora se per indicare questo sistema (Σ') introduciamo la notazione $(\theta_{\varphi'})$, l'altro sistema (Σ) del § 16 dovrà essere indicato col simbolo (θ_φ) e, per quanto si è visto, i due sistemi:

$$(\theta_\varphi),\ (\theta_{\varphi'}),$$

si deducono l'uno dall'altro con un'inversione per raggi vettori reciproci.

Ciò premesso, se consideriamo la serie, infinita nei due sensi, dei sistemi di WEINGARTEN dedotti dal sistema (θ) per successive trasformazioni complementari, sia:

$$\ldots(\omega'),\ (\varphi'),\ (\theta),\ (\varphi),\ (\omega)\ldots,$$

ne dedurremo due serie infinite di sistemi (Σ) da indicarsi coi simboli:

$$\ldots(\varphi'_\theta),\ (\theta_\varphi),\ (\varphi_\omega)\ldots$$

$$\ldots(\varphi'_{\omega'}),\ (\theta_{\varphi'}),\ (\varphi_\theta)\ldots,$$

Ma l'una serie nasce dall'altra con un'inversione per raggi vettori reciproci.

Pisa, Agosto 1896.

AGGIUNTA AL § 3.

Non sarà privo di interesse il far conoscere le formole e la costruzione geometrica che, data una superficie S applicabile sopra una superficie di rotazione, determinano direttamente la superficie $\overline{S}'$ dedotta col metodo di WEINGARTEN dalla complementare S' di S e che ha quindi a comune con S l'immagine sferica delle linee di curvatura. Indicando con $\overline{x}'$, $\overline{y}'$, $\overline{z}'$ le coordinate di un punto di $\overline{S}'$ corrispondente al punto (x, y, z) di S e ritenendo le notazioni del § 3, le formole accennate si scrivono:

$$\overline{x}' = r\frac{\partial x}{\partial u} - \tau X, \qquad \overline{y}' = r\frac{\partial y}{\partial u} - \tau Y, \qquad \overline{z}' = r\frac{\partial z}{\partial u} - \tau Z, \tag{I}$$

la funzione τ di u, v essendo determinata, a meno di una costante additiva, dal suo differenziale totale:

$$d\tau = r(D\,du + D'\,dv), \tag{II}$$

il cui secondo membro, a causa delle formole di CODAZZI (L. pag. 91), è appunto un differenziale esatto.

Per verificare che le (I) danno effettivamente la superficie richiesta, osserviamo che derivandole si ottengono le formole:

$$\frac{\partial \overline{x}'}{\partial u} = (r' + \tau D)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\tau D'}{r^2}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \overline{x}'}{\partial v} = \tau D'\frac{\partial x}{\partial u} + \left(r' + \frac{\tau D''}{r^2}\right)\frac{\partial x}{\partial v},$$

colle analoghe per $\overline{y}'$, $\overline{z}'$, le quali dimostrano intanto che le normali alla $\overline{S}'$ e alla S in punti corrispondenti sono parallele. Osservando poi le formole:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -D\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D'}{r^2}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -D'\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D''}{r^2}\frac{\partial x}{\partial v},$$

e procedendo come al § 3, si vede che lungo una linea di curvatura di $\overline{S}'$ debbono sussistere le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} (r' + \tau D)du + \tau D' dv + \rho(D du + D' dv) = 0 \\ \tau D' du + (r' r^2 + \tau D'')dv + \rho(D' du + D'' dv) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

indicando con ρ il corrispondente raggio (principale) di curvatura. Eliminando ρ fra le (III) si ottiene l'equazione differenziale delle linee di curvatura di $\overline{S}'$, che coincide appunto con quella relativa alla S, onde si vede che S, $\overline{S}'$ hanno a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura. Se si elimina invece fra le (III) il rapporto $\frac{du}{dv}$, si trova l'equazione di secondo grado in ρ, le cui radici ρ_1, ρ_2 sono i due raggi principali di curvatura di $\overline{S}'$:

$$(\tau + \rho)^2 K - (\tau + \rho) r' H + r'^2 = 0, \qquad \text{(IV)}$$

indicando con K, H rispettivamente la curvatura totale e la curvatura media di S. In particolare si avrà:

$$(\tau + \rho_1)(\tau + \rho_2) + \frac{r'^2 r}{r''} = 0, \qquad \text{(V)}$$

alla quale equazione, osservando che le quantità $2q$, p calcolate per la $\overline{S}'$ sono:

$$2q = r^2 + \tau^2, \qquad p = -\tau,$$

si può dare facilmente la forma dell' equazione (2) § 1 con φ funzione di $2q - p^2$.

Dalle formole (I) si vede che le coordinate x_0, y_0, z_0 del piede della perpendicolare abbassata dall'origine sulla normale di $\overline{S}'$ sono date da:

$$x_0 = r\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad y_0 = r\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad z_0 = r\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Di qui risulta per determinare la superficie $\overline{S}'$, nota la superficie S, la costruzione geometrica seguente:

Data una superficie S qualunque applicabile sopra una superficie di rotazione, si conducano per un punto fisso O dello spazio le parallele alle tangenti delle deformate dei meridiani e sopra ciascuna di queste tangenti si stacchi, a partire da O, un segmento OM, eguale (o proporzionale) al raggio del parallelo, indi per l'estremo M si conduca la retta n parallela alla normale di S. La congruenza delle rette n è una congruenza normale e le superficie ortogonali ai suoi raggi hanno a comune con S l'immagine sferica delle linee di curvatura e sono dedotte, col metodo di WEINGARTEN, *dalla complementare S' di S.*

Terminiamo coll'osservare che applicando la formola (V) alle tre forme ellittica, parabolica ed iperbolica dell'elemento lineare di una superficie pseudosferica:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{senh}^2 u\, dv^2$$
$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2$$
$$ds^2 = du^2 + \cosh^2 u\, dv^2,$$

non che alla forma:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u\, dv^2,$$

dell'elemento lineare della sfera, si ottengono direttamente i risultati del § 4.

FINE DEL TOMO XXIV.° (SERIE II.ª)