MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE

EXPOSANT

LES DIFFÉRENTES MÉTHODES

POUR DÉTERMINER ET MESURER LES FORCES MOTRICES,

AINSI QUE LE TRAVAIL MÉCANIQUE DES FORCES;

PAR

J. V. PONCELET,

CAPITAINE DU GÉNIE,
MEMBRE DE L'INSTITUT DE FRANCE, ACADÉMIE DES SCIENCES,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE MÉCANIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, ANCIEN PROFESSEUR DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
AUX MACHINES A L'ÉCOLE SPÉCIALE DE L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE METZ, ETC.

> Il est, dans la Géométrie et dans la Mécanique, certaines vérités élémentaires, palpables, fécondes, qui sont les premiers et les plus simples rapports des dimensions, des mouvements et des forces. Voilà les vérités dont il importe que chacun se rende un compte raisonné
>
> DUPIN, DISCOURS SUR LE PROGRÈS DES CONNAISSANCES DE GÉOMÉTRIE ET DE MÉCANIQUE, ETC., 1829, page 3

LIÉGE,
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET INDUSTRIELLE
DE H. LEROUX ET COMP.,
PASSAGE LEMONIER, N° 1.

BRUXELLES,
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE,
RUE DE LA MADELEINE, N° 9.

MONS,
GAND, NAMUR ET ANVERS,
LEROUX, LIBRAIRE.

1839

A MONSIEUR

LE BARON CHARLES DUPIN,

OFFICIER SUPÉRIEUR DU GÉNIE MARITIME, MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DE LA CHAMBRE DES DÉPUTÉS, PROFESSEUR DU COURS NORMAL DE GÉOMÉTRIE ET DE MÉCANIQUE APPLIQUÉES AUX ARTS ET MÉTIERS ET AUX BEAUX-ARTS.

MONSIEUR,

En vous dédiant, comme au fondateur et au promoteur de l'éducation industrielle en France, cette publication d'un Cours entrepris à votre invitation et en quelque sorte sous vos auspices, je me rends l'interprète des sentiments de reconnaissance que doivent à vos généreux efforts tous ceux qui désirent sincèrement l'accroissement de notre prospérité nationale, des sentiments que vous a depuis longtemps voués cette portion si intéressante et si éminemment utile des nations civilisées, que vous très-immédiat *du principe général de la transmission de l'action* ou *du travail mécanique des forces*, lequel revient, quant au fond, au *principe de d'Alembert* et à celui des *vitesses virtuelles*, dès qu'on envisage la force d'inertie comme une simple pression, et le *moment virtuel* comme l'expression de la *quantité d'action* ou de *travail instantané* de chaque force, par rapport au mouvement virtuel infiniment petit, qu'on suppose imprimé, au système, d'une manière indépendante et sous la seule condition qu'il puisse le prendre sans que l'action réciproque des différents corps et des véritables forces, relative à l'état réel de repos ou de mouvement, soit aucunement troublée. En effet, le principe de la transmission du travail, appliqué ensuite à ce mouvement réel, et en tenant compte, comme on vient de le dire, de toutes les forces intérieures et extérieures qui peuvent l'empêcher ou le favoriser, conduit immédiatement, par la sommation facile et tout à fait élémentaire des quantités de travail dues, en particulier, aux forces d'inertie, à l'énoncé le plus général du principe des forces vives ou de *l'égalité de la somme des forces vives et du double de la somme algébrique des quantités totales de travail développées, par les différentes forces, entre les positions ou instants extrêmes pour lesquels on considère le mouvement des corps.*

Envisagé sous ce point de vue, le principe de la transmission du travail comprend implicitement toutes les lois de l'action réciproque des forces, sous un énoncé qui en facilite infiniment les applications à la Mécanique industrielle, qu'on pourrait nommer la *Science du travail des forces*, et qui, dès les premiers pas des jeunes élèves dans l'étude, se présente à eux comme un axiome en quelque sorte évident par lui-même, et dont la démonstration leur semble superflue dès qu'ils ont bien saisi ce qu'on entend par *travail mécanique, quantité d'action*, et qu'il leur est clairement démontré que c'est ce travail qui, réduit en unités d'une certaine espèce, est, dans les arts, l'expression vraie de l'activité des forces.

Quoi de plus évident, par exemple, et de plus facile à saisir, au premier aperçu, que ces énoncés : « Le travail de la résultante de

« plusieurs forces égale la somme des travaux partiels que produi-
« sent, ou que pourraient produire, les forces composantes ; le tra-
« vail d'une ou de plusieurs puissances qui mettent en mouvement
« et font fonctionner une machine égale la somme des travaux
« particuliers que développent les résistances, de toute espèce,
« opposées à ce mouvement, etc. ? »

Et quand, ensuite, on voit ces propositions se vérifier constamment et rigoureusement dans toutes les applications, quand on les voit s'accorder sans cesse avec les données certaines de l'expérience, et avec le résultat d'autres principes non moins immédiats, non moins irrécusables, l'esprit ne peut se refuser à une conviction entière, à une conviction telle qu'il ne craint plus de s'abandonner aux conséquences variées qui découlent, avec une simplicité admirable, de ces mêmes axiomes dont il a saisi le véritable sens, et apprécié toute la fécondité et la justesse.

Je n'ai pas besoin d'ailleurs d'insister sur l'utilité du principe des forces vives, dans les questions variées de la Mécanique pratique ; cette utilité est bien constatée par les heureux résultats qui ont été obtenus, à diverses époques, de son application à la théorie de l'écoulement des fluides, à celle des différentes roues hydrauliques, et, en général, à toutes les théories concernant le jeu et les effets divers des machines. Mais il convient de rappeler ici que c'est plus particulièrement aux travaux de Daniel Bernouilli, de Borda, de Carnot, de Navier, ainsi qu'à ceux de mes anciens camarades à l'École polytechnique, MM. Petit, Roussel-Galle, de Coriolis, Burdin et Bélanger, qu'on doit cette importante application, et les développements les plus clairs, les notions les plus positives sur le principe des forces vives, pris pour base de la science des moteurs et des machines.

En citant ces travaux comme se rattachant plus spécialement à l'ordre des idées qui forment le caractère essentiel de cet ouvrage, je n'oublie aucunement la part qu'ont eue, aux progrès de la Mécanique pratique, les Parent, les de Parcieux, les Smeaton, les du Buat, les Bossut, les Coulomb, les Monge, les Prony, les Girard, les Arago, les Ampère, les Dupin, les Mongolfier, les d'Aubuisson, les Eytelwein, les Hachette, les Christian et tant d'autres savants distingués qui, par leurs recherches expérimentales, leurs écrits ou leurs leçons, ont puissamment contribué à éclairer, à étendre ou à propager les applications utiles et les saines doctrines de la Mécanique.

Appelé, comme je l'ai déjà dit, à créer, en 1825, le Cours de machines de l'École d'application de l'artillerie et du génie, j'adoptai, sans hésitation, le principe des forces vives et de la transmission du travail; et, mettant à profit tout ce qui avait été jusque-là écrit sur les applications de ce principe, notamment par MM. Navier, Burdin et de Coriolis, je tentai de donner une théorie générale des lois du mouvement des machines, un peu plus complète et plus rigoureuse que celles que l'on connaissait jusqu'alors. Ce sont les bases de cette même théorie, ce sont les notions que je me suis formées, depuis longtemps, sur l'action et le travail mécanique des forces, que j'ai essayé de mettre à la portée des intelligences les plus ordinaires, dans le cours gratuit que la Société académique de Metz m'a, depuis la fin de 1827, chargé de professer aux ouvriers et artistes de cette ville.

J'apprécie parfaitement toute la difficulté d'une tâche que j'ai entreprise dans l'unique désir de répandre parmi la classe industrieuse, et de lui rendre pour ainsi dire familières, des doctrines d'une utilité incontestable, des doctrines qu'elle ne peut ignorer sans préjudice, et qui, jusqu'ici, étaient presque exclusivement le partage du petit nombre des ingénieurs. Mais, ayant pour me guider les écrits des géomètres que je viens de citer, et ne perdant jamais de vue, dans l'exposition des vérités fondamentales de la science, la clarté et la rigueur de démonstration dont nos maîtres en Mécanique nous ont offert de si beaux modèles dans leurs Traités élémentaires, j'ai la confiance de ne m'être point égaré, et d'être compris par tout lecteur qui possède la connaissance des propositions les plus simples de la géométrie.

Les notions fondamentales dont il s'agit composent la matière des dix premières leçons de mon Cours, elles sont accompagnées d'applications nombreuses qui me paraissent propres à en faire ressortir le but et l'utilité. Les unes et les autres doivent être considérées comme une introduction indispensable à l'étude des principes plus généraux de la Mécanique, et de leurs applications spéciales aux différentes questions de la pratique. Je ne leur donnai point d'autre destination, dès la première année du Cours, lorsque je me proposai de professer la Mécanique suivant le plan exposé dans le texte des leçons normales du Conservatoire des arts et métiers ; et j'ai tout lieu de croire que le célèbre auteur de ces leçons approuvera les motifs qui m'ont fait adopter une telle marche, en faveur des résultats avantageux qu'il est possible d'en recueillir.

M. Dupin, lui-même, l'a dit dans un des passages de son beau *Discours sur le progrès des connaissances de Géométrie et de Mécanique dans la classe industrieuse,* passage d'une vérité et d'une justesse frappantes, et que nous avons adopté, sans hésitation, pour servir d'épigraphe à cet ouvrage ; M. Dupin l'a dit : « Il est, dans la Géo-« métrie et dans la Mécanique, certaines vérités élémentaires, pal-« pables, fécondes, qui sont les premiers et les plus simples rap-« ports des dimensions, des mouvements et des forces. Voilà les « vérités dont il importe que chacun se rende un compte rai-« sonné, etc. » Plus loin il a ajouté : « Pour obtenir de grands et « prompts résultats dans le développement de l'industrie d'un peu-« ple, je l'ai dit, je le redis encore, il faut répandre, avec largesse, « et ces vérités élémentaires et ces méthodes fondamentales qui « réunissent à la fois la simplicité, la rigueur et la facilité. »

N'est-ce pas, en effet, sur les premières notions, sur les notions si abstraites de la force, du temps et du mouvement, qu'il faut d'abord insister ? Ne sont-ce pas les propriétés physiques les plus simples des corps, les déductions les plus élémentaires relatives au changement d'état qu'ils subissent par l'action des forces, et les lois de leurs résistances diverses qu'il faut d'abord bien faire connaître? Et la Mécanique rationnelle est-elle autre chose qu'une science d'abstractions avant l'instant où on essaye de l'introduire, en quelque sorte, dans le monde physique et matériel tel que nous le présentent les ateliers des arts industriels? Enfin n'avoue-t-on pas, tous les jours, qu'un espace immense sépare la Mécanique, telle qu'on l'enseigne dans nos écoles, de ses applications mêmes les plus usuelles et les plus simples? Là c'est la compressibilité ou la flexibilité naturelles des corps; ici c'est leur inertie, ce sont les résistances, de toute espèce, qu'ils opposent au mouvement et à l'action des forces, qui viennent, si non démentir complétement, du moins modifier tellement les déductions théoriques, que les résultats diffèrent souvent du simple au quadruple ou au quintuple. Et que deviendraient nos jeunes industrieux si, abandonnant, faute de temps, l'étude de la Mécanique à l'instant où ils ont un peu appris de *statique* ou de *dynamique*, ils allaient reporter, dans leurs ateliers, les idées incomplètes et parfois fausses qu'ils auraient acquises sur l'équilibre absolu et le mouvement idéal des corps parfaitement durs ou parfaitement élastiques, sur les machines simples, qui ne sont, en effet, que des machines géométriques, la forme extérieure étant la seule chose qui leur reste?

A la vérité, les artistes sont peu enclins à prendre les abstractions pour des réalités, ils ne s'en dégoûtent même que trop facilement dès le début; et, en supposant qu'ils se soient laissé séduire pendant un temps, le danger ne serait pas grand pour des hommes qui, journellement, étudient, par le tact et par une longue pratique, les véritables qualités physiques et mécaniques de la matière. Toujours est-il qu'ils auraient perdu un temps précieux, et que les demi-connaissances qu'ils pourraient avoir acquises, loin de leur être profitables, ne feraient que leur inspirer une sorte d'éloignement et mépris pour les vérités positives de la science.

On conçoit bien, d'après cette manière de voir, que je veux, pour nos jeunes élèves, une instruction solide, appuyée de données positives et de chiffres exacts, nourrie de principes d'une application immédiate dans les arts, une instruction telle enfin qu'elle puisse porter des fruits dès les premiers pas de l'élève dans l'étude, et à quelque époque que la nécessité ou son peu de persévérance lui fasse quitter l'enseignement de la Mécanique. Et cette opinion, que je me permets de jeter en avant, à l'instant même où tant d'habiles professeurs, pour répondre à l'appel de M. Dupin, tentent d'ouvrir les voies les plus courtes et les plus faciles à l'enseignement de la classe industrieuse, cette opinion, dis-je, ne pourra être considérée comme une injuste agression envers les doctrines jusque-là reçues, mais bien comme une justification des moyens que j'ai cru utile de mettre en usage pour atteindre le but désiré. Elle servira aussi, j'espère, à me mettre à l'abri des critiques qui pourraient désapprouver que j'aie fait précéder la Mécanique de notions élémentaires sur la physique des corps, et que j'aie composé un volume entier sur le développement de principes en apparence très-simples, lorsque ces principes occupent à peine quelques pages dans les Traités ordinaires; de ce qu'enfin j'aie accordé tant d'espace à des applications qu'on a coutume de rejeter dans les recueils spéciaux, et qui semblent trop complexes pour servir de simples exercices numériques.

Loin de craindre, en effet, d'en avoir trop dit sur les applications, je regrette, au contraire, que le temps m'ait manqué pour donner tous les développements nécessaires à celles qui concernent l'action des moteurs animés ou inanimés, les divers frottements ou résistances nuisibles des corps, et la force de réaction qu'ils opposent directement à la traction, à la compression, à la rupture, etc. Ces applications eussent, en quelque sorte, complété le tableau et l'étude des différentes forces que présentent les phénomènes de la Mécanique industrielle; elles eussent servi à donner aux élèves une connaissance substantielle de ces causes de mouvement, dont la nature intime échappe à notre intelligence quoiqu'elle se manifeste à nous par des effets matériels si variés, si distincts, et avec lesquelles on ne saurait trop tôt se familiariser par l'étude réfléchie de ce qu'elles offrent de plus simple et d'immédiatement mesurable ou compréhensible. Je compte poursuivre ces applications un peu plus tard, si celles que je publie aujourd'hui sont favorablement accueillies, et s'il m'est démontré, par l'expérience ou par des avis éclairés, que je ne me suis pas engagé dans une fausse route. On remarquera, au surplus, que c'est fort souvent à cette connaissance des premiers éléments de la Mécanique que se bornent ses applications les plus usuelles aux arts industriels, ce dont on juge aisément à la lecture des ouvrages qui en traitent d'une manière spéciale. Les combinaisons des forces et du mouvement n'apparaissent que lorsqu'on se propose d'entrer plus avant dans l'étude des phénomènes, ou qu'il s'agit de les approfondir dans toutes leurs parties, et de remonter jusqu'aux causes, plus ou moins lointaines, qui les produisent.

Qu'il me soit permis, avant de terminer, de payer ici un juste tribut de reconnaissance à deux de mes collègues qui se sont empressés de coopérer à l'établissement du Cours de Mécanique industrielle dans la ville de Metz, et auxquels on doit presque entièrement tout ce que ce Cours a, jusqu'à présent, porté de fruits véritables. M. le capitaine du génie Gosselin, dont le zèle pour tout ce qui tient à l'enseignement, et dont les connaissances étendues en Mécanique sont appréciées de ses collègues, a bien voulu, dans l'état fâcheux de santé où je me trouvais, lors de mes premières leçons de 1827, prendre part à la rédaction lithographiée des *Préliminaires* du Cours, de ceux-là mêmes que je publie aujourd'hui avec des additions et des changements nombreux. D'après les sollicitations des auditeurs, il n'hésita pas à continuer seul de remplir, pour les leçons suivantes, cette tâche, rendue aussi délicate que pénible, par la nécessité de rédiger, à la hâte, chaque sommaire pour le distribuer dans l'une des plus prochaines séances. J'avais, il est vrai, adopté, pour ces dernières leçons, le texte du Cours de M. le baron Dupin ; mais, de légers changements, de légères additions tels qu'en apportent nécessairement le caractère de l'auditoire et du professeur, enfin l'impossibilité de distribuer gratuitement le texte imprimé au grand nombre d'ouvriers qui, la première année, suivirent les leçons de Mécanique, ou d'obtenir qu'ils se le procurassent à leurs frais, ont suffisamment motivé une pareille mesure qui semblerait d'abord un double emploi.

A la reprise du Cours, en novembre dernier, M. Gosselin a poursuivi, avec non moins de zèle, la rédaction des quatorze leçons qui succèdent aux *Préliminaires*. Nous lui devons également d'avoir continué, cette année, les intéressantes répétitions entreprises, dès la première, par M. Bardin. Bien que ces répétitions, qui ont pour base essentielle la majeure partie des applications qu'on trouvera à la fin de ce volume, n'aient pu être complétées entièrement, il nous est permis d'en attendre les plus heureux résultats, aux concours prochains des élèves, d'après ceux qu'avaient déjà obtenus M. Bardin.

Ce professeur, dont l'amour du beau et du bien est au-dessus de tout éloge, a parfaitement réussi, dès la création du Cours de dessin géométrique, à mettre en œuvre la méthode des moniteurs, qui désormais paraît devoir faire la base de l'enseignement industriel à Metz, et que M. Bergery vient d'approprier, avec tant de succès, à celui de la Géométrie élémentaire. M. Bardin ne craignit pas de joindre, aux fonctions pénibles qu'il remplissait alors pour son propre compte, celle d'organiser des conférences pour les élèves du Cours de Mécanique ; il en sentait, comme moi, la nécessité, et ce qu'il en recueillit d'avantages, dans le petit nombre des séances qui précédèrent l'instant où tant de fatigues l'obligèrent à suspendre la suite de ses utiles travaux, atteste l'excellence de sa méthode, et le rare talent qu'il a d'agir sur l'esprit des jeunes ouvriers : conférences particulières et préalables avec les moniteurs du Cours ; exercices généraux dirigés par chaque moniteur et présidés par le professeur ; travaux extérieurs concernant les questions d'application, la rédaction des épures, le calcul ; exercices sur le terrain, levers de bâtiments, d'outils et de machines, sous l'inspection respective des moniteurs, etc.; voilà, en peu de mots, ce qui constitue la méthode de M. Bardin. Elle est pénible sans doute pour le professeur, mais, en revanche, elle porte d'excellents fruits, et, je me plais à le redire, on lui doit, en majeure partie, le bien qu'a pu produire, dans la ville de Metz, l'enseignement de la Mécanique.

Il n'est aucun lecteur qui, en parcourant cet ouvrage, ne s'aperçoive, de suite, que j'ai dirigé tous mes efforts vers les moyens de ramener les lois abstraites de la Mécanique dans le domaine de la Géométrie, et d'en rendre ainsi l'accès facile à quiconque joint, à la connaissance des propriétés des figures semblables, celle du tracé des lignes assujetties à des lois déterminées ou données par des tables: or, M. Bardin, sentant bien l'importance de cette manière d'envisager l'étude de la Mécanique, avait eu le soin d'exercer particulièrement ses élèves aux tracés dont il s'agit. Que ne devions-nous donc pas attendre de sa coopération, si une maladie cruelle n'était venue malheureusement interrompre ses travaux, et ajourner ses succès! Déjà il était convenu, entre nous, que la partie descriptive des leçons de Mécanique serait immédiatement suivie de l'exécution et du tracé effectifs de chacun des détails qui constituent les éléments des machines et des outils; déjà M. Bardin et moi nous nous étions occupés des moyens de choisir et de réunir ceux de ces éléments que la théorie et l'expérience indiquent comme les plus parfaits; mais la nécessité veut que cet utile projet soit remis à une époque plus favorable; car je n'ai ni le temps ni la santé nécessaires pour remplir seul une pareille tâche, et personne, plus que M. Bardin, n'est capable de le faire avec succès.

Je n'oublierai pas, non plus, que je dois le dessin des planches jointes à cet ouvrage, à l'obligeance de M. Bardin, neveu, jeune élève sortant de l'École des mines, qui a suivi nos Cours industriels de cet hiver, et dont les talents acquis et la persévérance ont déjà obtenu une juste récompense. Je le prie de recevoir ici mes publics remercîments.

COURS

DE

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

PRÉLIMINAIRES.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA CONSTITUTION ET LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES CORPS.

ÉTATS PRINCIPAUX DES CORPS.

1. Les corps se présentent sous trois *états* principaux qui en comprennent une foule d'autres intermédiaires.

Corps à l'état solide, ou *solides :* tels sont les pierres, les bois, certains métaux, etc., qui résistent plus ou moins à la pression.

Cet état ne présente rien d'absolu : certains corps solides sont *durs, cassants, fragiles,* tels que le verre, l'acier trempé, le marbre, etc.; d'autres sont *mous, ductiles,* tels que le beurre, l'argile ou terre glaise, le plomb, l'or, le cuivre, le fer (principalement à chaud). On dit aussi des métaux ductiles qu'ils sont *malléables.*

La *ductilité* ou la *malléabilité* de certains métaux est de la plus haute importance pour les arts industriels; elle réside essentiellement dans la qualité qu'ont ces corps de pouvoir changer de forme d'une infinité de manières sans se rompre ni se diviser : nous verrons bientôt des exemples de la grande ductilité de l'argent, de l'or et du platine.

2. *Corps à l'état liquide*, ou *liquides;* tels sont l'eau, le vin, les

liqueurs en général, le métal appelé *mercure* ou *vif-argent*, etc.; lesquels se distinguent des corps solides par l'extrême mobilité de leurs parties. Cette mobilité s'observe à divers degrés dans les liquides : elle est très-grande dans les éthers, l'alcool ou l'esprit-de-vin rectifié; elle l'est moins dans l'eau, le vin ; elle l'est encore moins dans l'huile, les sirops, les graisses et les métaux fondus qui coulent difficilement, qui *filent* en tombant dans l'air au lieu de se diviser comme l'eau. On distingue cet état particulier des liquides en disant qu'ils sont *visqueux*, ou qu'ils ont de la *viscosité*. Enfin, un corps liquide peut se trouver dans un état très-voisin de celui des corps solides mous ; c'est celui des *pâtes* en général ou des *corps pâteux*.

3. *Corps à l'état gazeux*, nommés *gaz* et *vapeurs* : cette classe comprend *l'air* qui nous environne de toutes parts, dans lequel nous vivons, et tous les corps analogues qu'on nomme pour cette raison *aériformes*, corps qu'il ne faut pas confondre avec les *vapeurs condensées ou brouillards* ; ceux-ci étant simplement formés de bulles, de gouttelettes de liquide très-petites et suspendues dans l'air.

On nomme spécialement *vapeurs*, les gaz qu'on obtient des liquides, lorsqu'on les chauffe dans des vases clos de toutes parts ; elles sont presque toutes invisibles comme l'air : telle est, par exemple, la vapeur d'eau qui se forme dans l'intérieur des chaudières des machines à feu.

L'*oxygène* ou *air vital*, qui entretient essentiellement la combustion des corps et la respiration des animaux ; l'*azote*, dont le mélange avec l'oxygène constitue l'air ordinaire et sert à modérer les effets de celui-là, mais qui, employé seul, ne peut entretenir ni la combustion ni la respiration; l'*hydrogène* ou *air inflammable*, qui, à l'aide d'une certaine chaleur, se combine avec l'oxygène de l'air, et produit la flamme qui éclaire nos habitations ; l'*acide carbonique*, résultant de la combustion du charbon pur (carbone) ou de l'union de ce dernier avec l'oxygène, et dont la présence se fait sentir dans les chambres closes où brûle du charbon, dans les lieux où fermentent les raisins, le vin, etc., sont autant de gaz.

L'existence, la matérialité de l'air, des gaz et des vapeurs, est prouvée par toutes sortes de faits : enfermés dans des enveloppes flexibles et imperméables, ou qui ne se laissent pas traverser, par exemple dans une vessie, ils résistent à la pression comme les corps solides ordinaires. — Un verre renversé étant plongé dans l'eau, l'air qu'il contient ne cède point sa place au liquide, mais celui-ci remonte et remplit le verre dès l'instant où l'on pratique, à sa partie supérieure, une ouverture qui permette à l'air de s'échapper. Les vents, les ouragans qui ne sont que de l'air en mouvement, renversent des arbres et des maisons comme le feraient des torrents d'eau; l'air d'ailleurs s'oppose, aussi bien que cette dernière, au mouvement des corps solides, et c'est ce qu'on nomme sa *résistance*. Enfin, on sait encore que le vent est employé comme moteur des machines de l'industrie, et qu'il en est de même de la vapeur d'eau, quoique dans des circonstances bien différentes.

4. *Atmosphère*. Nous avons insisté principalement sur l'air, parce que c'est le gaz le plus universellement répandu sur notre globe, qu'il l'enveloppe tout entier bien au delà des plus hautes montagnes; que tous les corps y sont plongés, et qu'il joue un rôle essentiel dans tous les phénomènes naturels et dans ceux de la Mécanique industrielle. Remarquons d'ailleurs que cette masse d'air immense dans laquelle nous vivons et sommes plongés, se nomme *atmosphère;* ce qui a fait donner à l'air lui-même le nom *d'air atmosphérique*, pour le distinguer des autres gaz qu'on nomme quelquefois aussi des *airs*.

5. *Fluidité, changements d'état des corps*. Les liquides, les gaz et les vapeurs, se nomment en général des *fluides*, d'un mot latin qui signifie *couler;* les corps, comme nous l'avons dit, sont plus ou moins fluides, ils ne possèdent pas tous au même degré la *fluidité*.

Un grand nombre de corps connus peuvent, au moyen de la chaleur et sans subir aucune altération *intime* ou intérieure, prendre successivement l'état solide, liquide et gazeux : telle est l'eau, qui est solide à l'état de glace et de neige, liquide dans son état le plus ordinaire, gazeuse ou à l'état de vapeur quand on la chauffe dans des vases clos. On nomme *fusion, liquéfaction*, le passage de l'état solide à l'état liquide; *vaporisation, volatilisation*, le passage de l'état solide ou liquide à l'état de vapeur; enfin, *condensation*, le retour de ce dernier état aux précédents, et *solidification, congélation*, celui de l'état liquide à l'état solide. Certains corps ne sont susceptibles que de prendre deux de ces trois états, du moins par les moyens jusqu'ici connus; il en est d'autres qui ne se présentent constamment que sous un seul de ces états, tels sont les corps dits *infusibles* ou *réfractaires*, et les gaz nommés *permanents*, au nombre desquels on doit compter l'air; mais la classe de ces corps diminue tous les jours, à mesure que nos progrès en physique augmentent.

DIVISIBILITÉ DES CORPS.

6. *Fluides*. La divisibilité des corps est de toute évidence pour les liquides et les gaz ; on conçoit même que la *division* ou la *séparation* des parties pourrait y être poussée à un degré extrême ; et, comme tous les corps solides peuvent être amenés à l'état de fluides, au moyen des agents physiques et chimiques, c'est-à-dire en les dissolvant, en les chauffant, en les attaquant avec les acides, etc., on conçoit que la divisibilité est une propriété générale de la matière. Mais il n'est pas inutile de faire connaître les moyens particuliers qu'on peut mettre en usage pour opérer et apprécier physiquement, même dans les corps solides, cette extrême divisibilité de la matière, d'autant plus que ces moyens constituent l'objet principal d'un grand nombre d'arts industriels.

7. *Solides*. On divise les pierres, les bois, les métaux, etc., par le choc ou par le frottement, à l'aide de marteaux, pilons, meules, molettes, coins, ciseaux, scies, râpes, limes, rabots, etc.

On sépare les parties les plus fines des plus grossières, avec les tamis et les blutoirs ; on atteint encore mieux le but en employant la *décantation*, la *ventilation*, ou, dans certains cas, la *sublimation*.

La *décantation* consiste à verser dans l'eau les matières déjà pulvérisées, à les agiter, à laisser reposer le mélange pendant un temps plus ou moins long, selon l'état de division qu'on veut obtenir, puis à transvaser l'eau pour la laisser déposer de nouveau, et ainsi de suite. Il est des parties tellement fines, qu'elles emploient plusieurs jours pour se *précipiter*. La décantation exige, comme on voit, que la matière ne puisse se fondre, se dissoudre dans l'eau, et que, par son poids, elle puisse s'en précipiter.

La *ventilation* remplit le même but. L'air mis en mouvement par un soufflet, van ou ventilateur, entraîne les parties d'autant plus loin qu'elles sont plus fines. C'est ainsi qu'on divise quelquefois le charbon et le soufre dans les poudreries, et que, dans nos campagnes, on sépare les graines de blé de leur enveloppe.

La *sublimation* consiste à vaporiser les corps au moyen de la chaleur, dans des vases fermés, et à condenser les vapeurs par le refroidissement. C'est ainsi qu'on prépare la *fleur de soufre*, le mercure ou vif-argent, etc.

8. *Extrême divisibilité des corps.* Ces opérations donnent déjà une idée de la grande divisibilité de la matière ; en voici encore plusieurs exemples. — Quand on observe le cône lumineux produit par les rayons du soleil, qui traversent une petite ouverture pratiquée dans une chambre obscure où l'on a agité des poussières très-fines, on aperçoit une infinité de corpuscules ou grains de matière en mouvement, invisibles de toute autre manière, et qu'on ne peut palper ou sentir au simple toucher. — Cinq centigrammes ou un grain de carmin, dissous dans 15 kilog. d'eau, colorent toute cette masse, et le nombre total des parties colorantes visible, en supposant deux de ces parties seulement par centigramme d'eau, est de trois millions.

Un fil de platine recouvert d'argent, étiré à la filière, et remis ensuite à nu en dissolvant l'argent dans l'eau-forte, peut être amené à un tel degré de finesse, que son diamètre est seulement le $\frac{1}{1200}$ d'un millimètre, et que 3 000 pieds ne pèsent qu'un grain : il faudrait 140 de ces fils pour former un faisceau de la grosseur d'un seul brin de soie. Or, 3000 pieds valent 432000 lignes, et chaque ligne de longueur pouvant, sans difficulté, être partagée en dix parties au moins, cela fait plus de 4 millions de parties dans un grain de platine formant environ 2 millimètres cubes.

Ce dernier exemple prouve en même temps la grande *ductilité* du platine et sa *ténacité*. L'or et l'argent ne sont guère moins ductiles. Un calcul analogue à celui qui précède, démontre, par exemple, que l'or qui recouvre le fil doré du brodeur est réduit en lames qui ont au plus $\frac{1}{60000}$ de ligne d'épaisseur ; d'où il serait facile de conclure aussi l'extrême divisibilité de l'or.

La nature nous offre des exemples de corps organisés, où la ténuité et la division de la matière sont poussées plus loin encore : tels sont les *animaux infusoires* qu'on aperçoit seulement au microscope dans certains liquides, et qui paraissent constitués dans toutes leurs parties d'une manière analogue aux autres animaux, et doués des mêmes qualités physiques, quoique plusieurs milliers puissent tenir sur l'extrémité de la pointe d'une aiguille.

9. *Atomes, molécules, etc.* L'imagination et le raisonnement peu-

vent aller au delà encore ; mais s'ensuit-il que les parties des corps soient divisibles indéfiniment ? Les phénomènes de la chimie semblent prouver le contraire.

Dans la multitude presque infinie des combinaisons et des transformations possibles des corps, la matière sort intacte et avec toutes ses qualités primitives quand on l'a isolée convenablement. S'il n'en était pas ainsi, tout finirait par changer de nature et d'aspect sur notre globe, tout s'y anéantirait sans retour, et les lois immuables qu'on y observe depuis tant de siècles, cesseraient bientôt d'y régner.

Les dernières parties de la matière, qui ne sont divisibles ni altérables en aucune manière, se nomment *atomes*, et l'on appelle *molécule, particule*, l'ensemble de plusieurs atomes unis entre eux et formant un groupe.

POROSITÉ DES CORPS.

10. *Pores, volume réel, volume apparent.* On nomme en général *pores* les intervalles compris entre les atomes, les particules et les divers groupes de particules qui composent les corps. Les premiers sont tout à fait imperceptibles ; quant aux derniers, on peut, dans bien des cas, s'assurer de leur existence. — L'éponge offre l'exemple de pores de diverses grandeurs.

L'espace occupé par la matière propre d'un corps est ce qu'on nomme son *volume réel*.

L'espace limité par l'enveloppe extérieure d'un corps est son *volume apparent*.

La différence du volume apparent au volume réel est le volume des pores. Ainsi, plus le volume apparent diminue, plus il se rapproche du volume réel ; c'est ce qui a lieu, par exemple, dans l'éponge, qu'on peut comprimer jusqu'à un dixième, un vingtième de son volume primitif.

11. *Tissus, corps organiques.* La porosité est manifeste dans une infinité de corps qui se laissent pénétrer par les fluides : tous les tissus, les étoffes, les cuirs, les bois sont dans ce cas, et c'est sur cette propriété qu'est fondé l'emploi des *filtres*. — Les bois augmentent de poids et gonflent par l'humidité, ils se retirent sur eux-mêmes et diminuent de poids par la sécheresse, ainsi qu'on le voit

dans les planchers, portes et lambris de nos habitations; c'est pour éviter ces effets, autant que pour préserver les bois de la destruction, qu'on les recouvre de vernis ou de goudrons. — En insérant des coins de bois bien sec, dans une rainure pratiquée autour des blocs de pierres à extraire pour en former les meules de moulins, et en les humectant ensuite, ils produisent par leur gonflement des efforts qui suffisent pour détacher ces blocs des massifs qui les renferment. — Les cordes mouillées augmentent également en diamètre et diminuent en longueur; de là un moyen non moins puissant, employé par les anciens pour soulever d'énormes fardeaux.

Pierres. Certaines pierres, telles que le grès ou pierre de sable, servent de filtres comme les tissus; toutes augmentent de poids quand on les expose à l'humidité; sorties fraîchement des carrières elles sont humides, ce qui rend possible la taille même des plus dures, ainsi qu'il arrive, entre autres, pour la pierre à fusil.

Métaux. Les métaux eux-mêmes se laissent pénétrer par les fluides; c'est ce que prouve l'expérience qui a été faite à Florence, par les académiciens de *la Crusca,* sur une boule d'or, mince, remplie d'eau, et qui, soumise à une forte pression, laissait suinter le liquide par tous ses pores; expérience répétée depuis pour d'autres métaux.

12. *Preuve générale de la porosité.* Cependant il n'en est pas ainsi de tous les corps; le verre, en particulier, paraît être absolument imperméable aux liquides et aux gaz, et c'est ce qui le rend précieux dans une foule de circonstances; mais, comme il sera bientôt prouvé que tous les corps indistinctement, soit solides, soit fluides, diminuent de volume par la compression et le refroidissement, il demeure établi que tous aussi ont des pores entre leurs atomes et molécules.

DE LA COMPRESSIBILITÉ DES CORPS.

13. *Définition.* La compressibilité des corps est la propriété qu'ils ont tous d'être *réduits,* quand on les comprime, à un moindre *volume apparent.*

Tissus. Les tissus naturels et ceux des arts, tels que l'éponge, le cuir, les bois, les étoffes, qui sont très-poreux, sont aussi les plus compressibles des corps solides; cette propriété sert à en extraire les liquides qu'ils contiennent. Les étoffes mouillées, le papier sorti fraîchement de la cuve de fabrication, la betterave réduite en pulpes, abandonnent, sous l'action de la presse, les liquides renfermés dans leurs pores.

Pierres. On sait que les pierres empilées dans les colonnes et les murailles de nos édifices, s'affaissent, se tassent ou se compriment et s'écrasent même sous une charge considérable ; c'est ce que prouve en particulier l'accident survenu aux piliers qui supportent la coupole du Panthéon ou église Sainte-Geneviève, de Paris.

Métaux. Quand on les frappe à coups de marteau, de mouton, de balancier, ils *s'écrouissent,* ils deviennent plus compacts, leur volume est réduit ; c'est ce qui arrive en particulier dans le battage des monnaies.

Liquides. Ils sont en général beaucoup moins compressibles que les corps solides. — L'eau renfermée dans un canon de bronze de 3 pouces d'épaisseur (8 cent.), et comprimée fortement au moyen d'un *piston,* fait éclater la pièce avant que son volume ait diminué de $\frac{1}{20}$. Cette diminution de volume est seulement de $\frac{48}{1000000}$ pour chaque augmentation de pression de $1^{\text{kil}},033$ par *centimètre carré* de la surface de la *base* du piston, et il faut une pression de 1033 kilogr. ou 1000 fois aussi forte, pour que la pièce éclate *.

14. *Principe de l'égalité de pression des fluides.* Un principe très-important, découvert par Pascal, est celui de la répartition uniforme ou de l'*égalité* de la *pression* exercée par les liquides, en tous sens et *perpendiculairement* aux parois des vases qui les contiennent : ainsi, par exemple, dans l'expérience ci-dessus, la pression du liquide sur chaque centimètre carré de la *base* du piston, a lieu aussi sur chaque centimètre carré de la surface du fond et des parois cylindriques de la pièce ; ce principe qui sert de fondement à la construction des presses hydrauliques, s'étend d'ailleurs aux fluides aériformes dont il va être question. Il se démontre en pratiquant une ouverture dans une partie quelconque des parois, et la remplissant par un piston ; ce dernier est refoulé avec un effort qui est à celui de l'autre piston, dans le rapport de sa surface en

* Nous verrons plus loin comment la pression peut se mesurer à l'aide des poids ; il ne s'agit ici que d'énoncer des faits, des données de l'expérience. Voyez d'ailleurs les numéros suivants.

contact avec le liquide, à celle de la surface pareille du premier piston.

Par exemple, si la surface de la base du premier piston est de 5 centimètres carrés, et la pression qu'il supporte 66 kilog., tandis que la surface de base de l'autre piston est de 125 centimètres carrés, la pression exercée perpendiculairement à cette dernière sera de $\frac{125 \times 66}{5} = 1650$ kilog.

15. *Gaz.* Ils sont les plus compressibles de tous les corps. — Quand on refoule de l'air, au moyen d'un piston, dans un tube cylindrique fermé par un bout (pl. I, fig. 1), par exemple, dans le corps de pompe d'une seringue ou du *briquet à air,* dit *pneumatique,* il peut être réduit, par le seul effort de la main, au dixième, au vingtième de son volume primitif; ce volume diminue même à mesure qu'on augmente de plus en plus l'effort ou la pression; mais il ne peut se réduire à rien en aucune manière, attendu l'inaltérabilité, l'*impénétrabilité* des molécules de l'air ou des gaz; il y a donc une limite nécessaire à la compression. Quand on diminue ou qu'on cesse tout à fait la pression, le piston revient progressivement vers sa position primitive; et si, le tube étant prolongé convenablement au-dessus du piston, on éloigne ce dernier progressivement du fond, l'air se répand ou s'étend au-dessous, en occupant un espace de plus en plus considérable, sans qu'il paraisse y avoir de limite à cette augmentation de volume, qu'on appelle *expansion* des gaz, parce qu'en effet ils tendent continuellement à se répandre en tous sens, et à presser également (14) les parois des vases qui les contiennent.

16. *Loi de la compression des gaz.* Supposons que, dans l'exemple ci-dessus, la pression exercée par l'air *sous le piston* et par centimètre carré de sa surface, soit de 1 kilogramme quand cet air occupe un certain volume; si ce volume est réduit à moitié par le refoulement du piston, la pression de l'air intérieur sera double ou de 2 kilog.; elle sera triple ou de 3 kilog. si le volume est réduit au tiers, etc. Si ensuite on ramène, par degrés, le piston vers sa position primitive, la pression de l'air diminuera dans le même rapport que le volume augmentera, et reprendra précisément les mêmes valeurs pour les mêmes positions du piston : cette pression se répartissant également dans tous les sens, ou étant la même

pour chaque centimètre carré de surface pressée (14), on peut dire que *les volumes occupés successivement par une même quantité d'air sont réciproquement proportionnels à leur force de pression ou de ressort.*

Cette loi, découverte par Mariotte à l'aide d'expériences que nous ne pouvons ici faire connaître, s'étend à tous les gaz.

ÉLASTICITÉ DES CORPS.

17. *Définition.* L'*élasticité* est la propriété que possèdent les corps de reprendre leur état primitif quand une cause quelconque les en a fait changer ; c'est en cela que consiste proprement la qualité de ce qu'on nomme *ressort.* — Les ressorts sont d'une grande utilité dans les arts ; ils servent à suspendre les voitures, à faire mouvoir les montres et pendules, à diminuer les effets nuisibles des chocs, etc. ; c'est par leur élasticité, leur *ressort,* que le foin, les découpures de papier, prémunissent les marchandises emballées contre l'effet des secousses.

On distingue l'élasticité de *forme* et l'élasticité de *volume.* — Le ressort d'acier qui plie, qui change de forme sans changer sensiblement de volume, est un exemple de la première ; la deuxième est manifeste dans l'air, dont le volume apparent diminue par la compression, et redevient exactement ce qu'il était dès qu'elle cesse.

18. *Fluides.* L'élasticité de volume des liquides est parfaite. — L'eau, qui se divise et se déplace si facilement quand elle est libre, n'a point sensiblement d'élasticité de forme ; si on la fait diminuer de volume dans un espace clos et suffisamment résistant, et qu'ensuite on l'abandonne à elle-même, elle reprend exactement son volume primitif, et jouit ainsi à un très-haut degré de l'élasticité de volume.

L'air et les gaz en général sont parfaitement élastiques, et reviennent tout à fait à leur premier état, quelle que soit la pression à laquelle ils aient été soumis ; c'est pourquoi on les nomme quelquefois *fluides élastiques.*

19. *Solides ; oscillations, vibrations.* Les corps solides ne se comportent pas de la même manière ; il y a une limite de pression au

delà de laquelle ils sont plus ou moins déformés : le meilleur ressort d'acier se brise quand on le plie au delà d'un certain terme. — Les corps sont d'autant plus élastiques qu'ils peuvent revenir d'une déformation plus grande; sous ce point de vue donc une lame d'acier est plus élastique qu'une lame de verre, et une lame de verre est plus élastique qu'une lame de plomb ; cependant, sous une faible pression, la lame de plomb reprend exactement sa figure primitive, et, dans ce sens, on pourrait dire qu'elle est parfaitement élastique. Il en est de même de toutes les substances; l'élasticité n'est donc en réalité qu'une propriété *relative*.

Quand les corps solides ont la forme de cube ou de sphères, leur élasticité, moins apparente que quand ils sont en lames, n'en existe pas moins. — Une boule d'ivoire, enduite d'huile, et tombant d'une certaine hauteur sur une table de marbre ou de fonte, y laisse une tache plus ou moins large qui prouve qu'elle s'est aplatie ; elle rejaillit ensuite en s'élevant plus ou moins haut par l'effet du débandement de son ressort. — Une boule d'ivoire est plus élastique qu'une boule de plomb, parce qu'elle rejaillit à une plus grande hauteur et qu'elle reprend sa première forme, ce que ne fait pas cette dernière. — Une bande d'acier circulaire, comprimée dans un sens et abandonnée ensuite à elle-même, s'élargit bientôt en sens contraire, et fait une suite d'*oscillations* autour de sa forme primitive. Il en est de même de la bille d'ivoire et de tous les corps élastiques qui ont été choqués ou dérangés de leur position naturelle, et abandonnés ensuite à eux-mêmes ; ils font une suite d'oscillations de plus en plus faibles, avant de revenir à cette position.

Lorsque les oscillations deviennent tellement rapides qu'on ne peut plus les discerner d'une manière distincte, et qu'elles se convertissent en une sorte de frémissement, on les nomme *vibrations* : ce sont ces vibrations qui, transmises d'abord à l'air, puis par l'air à nos oreilles, y produisent la sensation des différents *sons*.

20. *Limite d'élasticité des solides.* Les corps solides étant susceptibles de perdre leur élasticité, et cette perte ne pouvant provenir que d'un dérangement, d'une altération moléculaires, il importe, dans les arts, de ne point les soumettre à des efforts de *traction* ou de *tension* qui dépassent certaines limites.

L'expérience apprend que, sous un effort surpassant 6 à 7 kilog. par millimètre carré de section transversale, une barre de fer, tirée dans le sens de sa longueur, commence à perdre son élasticité, et qu'elle se sépare ou se rompt sous une pression de 35 à 40 kilog. Il en est de même de tous les corps; ils perdent leur élasticité sous un effort bien moindre que celui qui occasionne leur rupture : le fer, la fonte de fer, les bois de chêne et de sapin, qui se rompent seulement sous des tractions de 35, de 13, de 9 kilog. environ par millimètre carré de leur section transversale, perdent leur élasticité sous des efforts de 6, de 3, de 2 kilog. environ. Par exemple, un barreau de fer d'un centimètre ou de 10 millim. de côté, ayant par conséquent 100 millim. carrés de section, pourra perdre son élasticité, si on le tire avec un effort longitudinal qui excède 600 kilog., quoiqu'il ne se rompe réellement que sous un effort 5 à 6 fois plus grand.

DILATABILITÉ DES CORPS.

21. La *dilatabilité* est la propriété qu'ont les corps d'augmenter de volume ou de se *dilater* quand on les chauffe, d'en diminuer ou de se *contracter* quand on les refroidit, de reprendre leur volume primitif quand on les ramène au même degré de chaleur.

Gaz. Ils sont de tous les corps ceux qui se dilatent le plus par la chaleur. On prouve la dilatabilité de l'air au moyen du *thermoscope* de Rumfort, qui consiste (pl. I, fig. 2) dans deux boules de verre, closes, remplies de ce fluide et communiquant entre elles par un tube horizontal dont le milieu est occupé par une goutte d'esprit-de-vin coloré. La chaleur de la main suffit pour dilater l'air de la boule dont on l'approche, ce qui refoule la bulle d'esprit-de-vin dans l'autre boule. En éloignant la main, le volume de l'air diminue, et la bulle revient à sa place primitive.

22. *Liquides ; thermomètres.* L'eau et les liquides en général sont aussi dilatables par la chaleur ; c'est ce que démontre le *thermomètre,* instrument connu de tout le monde, et qui consiste (Pl. I, fig. 3) en un tube de verre, terminé vers le bas par une boule, fermé par le haut et rempli en partie d'un liquide qui est ordinairement du mercure parce que ce métal jouit de plusieurs qualités essentielles que n'ont pas les autres liquides. Le verre étant très-peu dilatable et les liquides l'étant beaucoup, on conçoit que la moindre chaleur doit faire monter le niveau supérieur de ces derniers le long du tube, comme le moindre refroidissement doit le faire des-

cendre. — On gradue l'*échelle* du thermomètre en observant successivement la hauteur du liquide quand on plonge l'instrument dans l'eau bouillante et dans la glace fondante, deux degrés de chaleur qui sont constants et faciles à reproduire ; l'espace compris entre ces deux positions du liquide est ordinairement divisé en 100 parties égales, dont chacune indique les *degrés* intermédiaires de la chaleur ; c'est pourquoi on nomme ces thermomètres, *thermomètres centigrades*. Certains thermomètres sont divisés seulement en 80 parties égales, ce sont ceux dits de Réaumur ; dans les uns et dans les autres, la division est prolongée au-dessous du point qui répond à la chaleur de la glace fondante, et qu'on nomme le *zéro* de l'échelle ; cette division représente les *degrés de froid* dans le langage ordinaire, et l'on nomme *température* d'un corps le nombre des degrés du thermomètre, qui répondent à sa chaleur.

23. *Solides ; pyromètres.* Les corps solides se dilatent beaucoup moins que les liquides et les gaz ; leur dilatation est cependant rendue sensible lorsqu'on augmente suffisamment l'une de leurs dimensions. Une barre de métal ajustée d'abord entre deux talons (pl. I, fig. 4), n'y peut plus entrer quand on l'a chauffée à un certain degré. — On construit sur ce principe des instruments qui servent à mesurer la chaleur de nos foyers les plus ardents, de même que les thermomètres servent à mesurer les températures ordinaires : on les nomme *pyromètres*.

24. *Notions sur le calorique.* Dans ces phénomènes, le *calorique* ou la chaleur se comporte, à l'égard des corps absolument comme les liquides qui, en se logeant dans leurs interstices ou pores, les font gonfler (11). — En comprimant ou diminuant le volume des corps par un moyen mécanique quelconque, on en soutire une certaine quantité de chaleur qui devient très-sensible quand la compression a été suffisamment brusque et forte. — C'est ainsi qu'en frappant ou frottant violemment le fer, il finit par s'échauffer, et qu'en comprimant brusquement l'air dans un *briquet pneumatique*, il s'en dégage assez de chaleur pour enflammer de l'amadou. — Lorsque la compression se fait lentement, la chaleur ou le calorique s'écoule, se dégage d'une manière insensible. — Réciproquement, on observe que, quand un corps augmente de volume par une cause quelconque, il se refroidit, il enlève de la chaleur aux corps environnants :

ainsi, dans l'expérience rapportée n° 15, l'air se refroidit ou baisse de température quand on soulève le piston, et il refroidit aussi le tube qui le renferme.

25. *Application de la dilatabilité aux arts.* La propriété qu'ont en particulier les métaux de changer de volume par la chaleur et par la traction ou la compression a été mise à profit dans les arts. — C'est ainsi que M. Molard est parvenu, au moyen de *tirants* de fer chauffés, puis ensuite refroidis, à rapprocher et à remettre, dans leur aplomb, les murs du Conservatoire des arts et métiers de Paris; que l'on a consolidé la coupole de St-Pierre de Rome, d'un cercle de fer; c'est encore ainsi qu'on unit entre elles les jantes des roues de voiture, et qu'on *frette* une foule de corps, en les enveloppant avec force de bandes de fer placées à chaud. On conçoit, en effet, que, le métal venant à se refroidir et tendant à rentrer sur lui-même, fait effort contre les obstacles qu'on lui a présentés, de la même manière (17) que s'il avait été réellement allongé par une forte traction.

En se rappelant la dilatabilité des métaux, on évitera une foule de fautes dans les constructions. — On évitera, par exemple, de sceller à leurs extrémités des barres d'une certaine longueur, et dont le raccourcissement ou l'allongement serait nuisible; on laissera à toutes les pièces le jeu et la liberté nécessaires : ces précautions sont particulièrement indispensables dans l'établissement des lisses en fer des grands ponts, dans celui des tuyaux de conduite en fonte des fontaines, etc.

26. *Résultats d'expériences.* De 0 à 100° centigrades, l'allongement d'une barre de 1 mètre est, pour

	mèt.
L'acier, de	0,00124
Le fer, de	0,00122
Le cuivre rouge, de	0,00172
Le cuivre jaune, de.	0,00188
Le verre, de	0,00087

L'allongement est à peu près constant d'un degré à l'autre, pour l'intervalle de 0 à 100° du thermomètre; mais il n'en est pas tout à fait ainsi au delà.

D'après les belles expériences de M. Gay-Lussac, la dilatation ou l'augmentation du volume de l'air et de tous les gaz, pour chaque degré du *thermomètre centigrade,* est de $0,00375 = \frac{1}{267}$ de leur volume à zéro, la pression restant constante ou la même (14 et 15) : ainsi, par exemple, le volume d'un gaz à zéro étant 1^{me}, à 60° centigrades, il sera $1^{me} + \frac{60}{267} = 1^{me},225$, si la pression ou la tension n'a pas changé.

IDÉE DE LA CONSTITUTION INTIME DES CORPS.

27. Il résulte de tout ce qui précède que les corps se composent d'atomes inaltérables, indivisibles et dont la petitesse est telle qu'ils échappent tout à fait à nos sens ; que ces atomes sont séparés les uns des autres par des intervalles plus ou moins grands et qui sont susceptibles de varier dans différentes circonstances ; qu'enfin ces mêmes atomes résistent aussi bien aux causes extérieures qui tendent à les rapprocher qu'à celles qui tendent à les désunir, ce qui porte à supposer entre ceux qui sont voisins, des actions réciproques nommées par les physiciens *attraction* et *répulsion.* — Sans ces actions, les corps ressembleraient à des monceaux de poussière qui n'ont aucune consistance.

28. *Attractions, répulsion moléculaires, etc.* Les effets de l'attraction moléculaire se nomment, selon les cas, *affinité, adhésion, adhérence, cohésion, cohérence ;* ils se manifestent dans une infinité de circonstances, tant pour les liquides que pour les solides. Quant à la répulsion, elle est évidente dans les gaz dont les molécules se repoussent constamment et tendent à s'échapper en tous les sens : on s'accorde à supposer que le calorique *latent* ou la chaleur naturellement enfermée dans les corps, est la cause de la répulsion moléculaire, et que, sans cette chaleur, ils seraient tous à l'état solide.

29. *Attractions à distance.* L'attraction et la répulsion dont il s'agit n'ont lieu qu'entre les molécules voisines d'un même corps, ou au contact immédiat de deux corps différents ; il existe d'autres genres d'actions qui s'exercent de corps à corps et à des distances quelconques : telles sont l'*attraction* ou *pesanteur universelle* qu'on nomme aussi *gravité, gravitation,* les attractions et répulsions magnétiques, électriques, etc. La pesanteur considérée dans les corps

qui sont attirés par notre globe, est la seule qui puisse nous intéresser ici, parce qu'elle joue un rôle essentiel dans tous les phénomènes de la Mécanique industrielle.

DE LA PESANTEUR ET DE SES EFFETS.

30. Tous les corps tendent à tomber ou tombent sur la terre, quand ils cessent d'être soutenus, en suivant une direction qui, pour chaque lieu, est celle de la *verticale* indiquée par le *fil à plomb;* cette direction, comme on le sait par expérience et comme nous le démontrerons directement plus tard, est perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, qui se nomme *niveau ;* prolongée suffisamment vers le bas, elle va passer par le centre du globe terrestre : c'est là un des effets sensibles de l'attraction de ce globe sur les corps placés à sa surface. Mais si, au lieu d'être abandonné à lui-même, un corps est soutenu par un obstacle, par un fil, je suppose, il pèse sur l'obstacle, sur le fil ; et ce second effet, ce *résultat* de l'attraction terrestre, est ce qu'on nomme le *poids* du corps : les poids d'ailleurs se comparent entre eux et se mesurent au moyen d'instruments dont l'usage est généralement connu, et dont nous apprécierons les qualités essentielles quand nous aurons acquis les notions de Mécanique nécessaires.

31. *Unité de poids.* Le poids qui a été pris pour unité de mesure, en France, se nomme *gramme;* 10 grammes, 100 grammes, 1000 grammes font un *décagramme*, un *hectogramme*, un *kilogramme ;* 100 kilogrammes font un *quintal métrique*, et 1000 kilogrammes forment ce qu'on appelle un *tonneau,* dans la marine.

Le *gramme,* le *kilogramme*, le *quintal* et le *tonneau* sont les poids dont on se sert le plus fréquemment pour peser les corps. — On a aussi divisé, dans ces derniers temps, le kilogramme en 2 livres, la livre en 16 onces, etc.; mais il ne faut pas confondre cette livre métrique et légale avec l'ancienne qui est plus faible d'environ $\frac{1}{50}$, le kilogramme valant 2,0429 livres anciennes, ou l'ancienne livre ne valant que 0,4895.

Poids étalons. Les poids qui servent *d'étalons* ou de modèles de mesure en France, sont généralement en cuivre pour les petits poids, et en fonte de fer pour les grands ; mais, comme ces étalons peuvent à la longue se perdre ou s'altérer malgré toute leur solidité, on a, pour retrouver au besoin l'unité de poids avec l'unité de longueur, un moyen très-précis que nous ferons bientôt connaître.

32. *Poids absolus et relatifs.* Le poids d'une quantité donnée de matière est une chose absolue, invariable, là où l'action de la pesanteur reste la même ; on a beau changer de mille manières la forme extérieure d'un corps, le diviser en parties, le chauffer, le comprimer, son poids ou le poids total de ses parties ne change pas. — Il n'en est pas ainsi, comme on l'a vu, du *volume apparent* d'un corps; ce volume diminue par la compression ou le refroidissement, il augmente par la traction et l'échauffement ; d'où il résulte que la quantité et le poids de la matière de ce corps, contenus dans un certain volume, dans un mètre cube, par exemple, sont plus grands dans le premier cas, et moindres dans le second ; à plus forte raison, le poids d'un même volume de diverses substances peut-il différer pour toutes ces substances.

33. *Densité.* Le poids d'un corps, sous l'unité de volume apparent, est ce qu'on nomme sa *densité.* — L'or est plus *dense* que le fer, parce qu'un pied cube, ou un mètre cube d'or pèse plus qu'un pied cube ou un mètre cube de fer. Le cuivre à froid, le cuivre battu ou écroui est plus dense que le cuivre à chaud, le cuivre fondu ou coulé. On dit d'un corps que sa densité est *uniforme, constante* ou qu'il est *homogène,* quand la densité ou le poids de chacun des volumes égaux et très-petits dont il se compose, est le même pour tous.

34. *Densité de l'eau, fixation de l'unité de poids.* Par des expériences très-soignées, les physiciens ont reconnu que la densité de l'eau pure ou distillée est la plus grande possible ou à son *maximum,* à une température (22) d'environ 4° au-dessus du 0 du thermomètre centigrade. C'est ce *maximum* de densité qui a servi pour établir, d'une manière invariable, l'unité de poids en France, au moyen de l'unité de mesure : on a pris pour *kilogramme* le *poids d'un litre d'eau* ramenée à cet état; ainsi le *gramme* équivaut au poids d'un *centimètre cube* de cette eau, le *quintal métrique* à celui d'un *hectolitre,* et le *tonneau* ou 1000 *kilogrammes* à celui d'un *mètre cube.* — Dans les applications de la Mécanique industrielle aux arts, nous pourrons, sans inconvénient, supposer que la densité de l'eau ordi-

naire et non mélangée, est de 1000 kilogrammes pour un mètre cube, quelle que soit la température de l'air.

35. La *pesanteur spécifique* ou mieux le *poids spécifique* d'une substance solide ou liquide, est sa densité *comparée* à celle de l'eau, prise pour unité, c'est-à-dire le rapport de sa densité à celle de cette dernière. Ainsi la densité de l'eau étant 1, le poids spécifique de l'or coulé est de 19,258 ; parce qu'un pied cube ou un mètre cube d'or pèse 19,258 fois autant qu'un pied cube ou un mètre cube d'eau. Sachant que la densité ou le poids du mètre cube d'eau est de 1000 kil., et ayant le poids spécifique d'une autre substance, on calculera, par les règles de la Géométrie, le poids d'un volume quelconque de cette même substance. — Exemple : un lingot d'or, fondu ou coulé, de 5 cent. de largeur, 4 cent. de longueur et 2 cent. d'épaisseur, ou de 40 centimètres cubes, pèse 40 fois $19{,}258 \times 1^{\text{gram}} = 770^{\text{gram}}{,}32$ ou $0^{\text{kil}}{,}7703$, puisque le poids du centimètre cube d'eau pure est de 1^{gram} ou $0^{\text{kil}}{,}001$: tel est l'usage de la table suivante :

Table des poids spécifiques des principaux corps solides et liquides à 0° de température, donnant le poids du mètre cube de chaque substance, quand on multiplie les nombres par 1000^{kil}, *densité de l'eau.*

SOLIDES.

Platine. laminé	22,6690	Chaux carbonatée cristallisée	2,7182
Platine. purifié	19,5000	Cristal de roche pur	2,6530
Or . . . forgé	19,3617	Verre blanc de St.-Gobain	2,4882
Or . . . coulé	19,2581	Houille compacte	1,3292
Plomb coulé	11,3523	Bois de hêtre	0,8520
Argent coulé	10,4743	Frêne	0,7450
Cuivre en fil	8,8785	Bois d'orme	0,8000
Cuivre rouge coulé	8,7880	Sapin jaune	0,6570
Acier non écroui	7,8163	Glace	0,9300
Fer en barre	7,7880	Tilleul	0,6040
Étain coulé	7,2914	Peuplier ordinaire	0,3830
Fer fondu	7,2070	Liége	0,2400
Zinc coulé	6,8610		

LIQUIDES.

Mercure	13,5980	Eau distillée	1,0000
Acide sulfurique (*huile de vitriol*)	1,8409	Vin de Bourgogne	0,9215
Eau de la mer	1,0263	Huile d'olive	0,9153
Lait	1,0300	Alcool absolu	0,7920
		Éther sulfurique	0,7155

Remarque. La dilatation des corps solides et des liquides étant généralement très-faible pour de légers changements de température, on pourra, sans inconvénient, se servir de cette table dans les circonstances ordinaires de la pratique.

Voici maintenant les densités de quelques autres substances qui n'ont pu être déterminées d'une manière aussi précise; le *mètre cube* étant l'unité de volume :

SUBSTANCE.	POIDS.	SUBSTANCE.	POIDS.
	kil.		kil.
Pierre à plâtre ordinaire . . .	2168	Terre argileuse.	1600
Gypse ou Plâtre fin	2264	Terre glaise	1900
Pierre meulière.	2484	Maçonnerie de moellons ordinaires, depuis 1700 kil. jusqu'à	2300
Marbre noir et blanc de Namur .	2717	Chêne le plus pesant, le cœur. .	1170
Briques { les plus cuites . . .	2200	Chêne le plus léger, sec . . .	850
Briques { les moins cuites . . .	1500	Huile de lin..	940
Tuiles ordinaires.	2000	Huile de navette	919
Sable pur.	1900	Alcool ordinaire ou Esprit-de-vin.	837
Sable terreux.	1700		
Terre végétale	1400		

DU POIDS, DE LA DENSITÉ, DE LA PRESSION DE L'AIR ET DES GAZ.

36. *Poids des gaz.* Le poids des corps solides est un fait facile à constater par tout le monde ; mais il n'en est pas de même de celui de l'air et des autres gaz. — A l'aide d'une pompe à deux pistons, nommée *machine pneumatique,* on parvient à soutirer l'air qui est contenu dans un ballon ou boule creuse de verre, qu'on bouche ensuite au moyen d'un robinet; c'est ce qu'on appelle *faire le vide.* En pesant successivement ce ballon lorsqu'il est plein et lorsqu'il est vide, on trouve que son poids est plus grand dans le premier cas que dans le second ; cet excès est le poids de l'air contenu : en remplaçant pareillement l'air par d'autres gaz ou par un fluide quelconque, on obtient le poids d'un même volume de ces fluides, ou leurs densités relatives, pour les circonstances où on les considère.

C'est ainsi qu'on trouve que le mètre cube d'air atmosphérique, pris dans son état le plus ordinaire, pèse environ $1^{kil},29$, car le poids ou la densité de l'air varie un peu suivant les saisons, et selon qu'il est plus ou moins comprimé sur lui-même : si, par exemple, on introduisait avec force, au moyen d'une *pompe dite foulante,* ou d'un soufflet ordinaire, une nouvelle quantité d'air dans le ballon, il est évident que son poids augmenterait aussi bien que son ressort, c'est-à-dire, sa tension ou sa pression (14 et 16) ; car cela reviendrait à réduire, par la compression, le volume de l'air introduit, à un volume beaucoup moindre que celui qu'il occupait primitivement dans l'atmosphère.

En général, il résulte du principe de Mariotte (16), *que la densité ou le poids d'un même volume de gaz, sous différentes tensions ou pressions, est exactement proportionnel à ces pressions, la température restant constante* (26).

37. *Pression atmosphérique.* Puisque l'air est pesant comme les liquides, on conçoit que l'atmosphère (4) pèse sur la terre, et la presse de tout son poids, de même que fait un liquide, renfermé dans un vase, sur le fond de ce vase. L'air pèse aussi sur lui-même, et chaque couche de niveau de l'atmosphère supporte le poids de toutes celles qui sont placées immédiatement au-dessus, et elle presse à son tour celles qui sont au-dessous ; cette pression est tout à fait analogue à la pression qu'éprouve l'air comprimé sur lui-même dans l'intérieur d'un corps de pompe, fermé par un piston (15 et 16); d'où l'on peut inférer qu'elle s'exerce aussi bien sur les côtés qu'au-dessus et au-dessous : c'est là ce qu'on nomme la *pression atmosphérique,* pression qui diminue, comme on voit, à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface de la terre.

Voici comment on peut la constater directement au moyen de l'appareil déjà décrit n° 15 : chassez complétement l'air contenu dans l'intérieur du briquet ou corps de pompe, en poussant le piston jusqu'au fond, après avoir pratiqué à ce fond une ouverture pour laisser échapper l'air ; bouchez ensuite cette ouverture hermétiquement, puis retirez le piston ; vous formerez le *vide* au-dessous, et la pression de l'air, qui agit à son extérieur, s'opposera au mouvement avec un effort qui dépendra de l'étendue de la surface pressée du piston, et qui sera très-grande, par exemple, pour un piston circulaire de 10^{cent} de diamètre (de 80^{kil} au moins) ; débouchant ensuite l'orifice, l'air rentrera dans le vide avec sifflement, et sa pression sous le piston détruira celle de l'air extérieur ; de sorte qu'on n'aura plus à surmonter que le poids de ce piston et son frottement contre le cylindre, quand on essayera de l'éloigner du fond;

soustrayant l'un et l'autre de l'effort total exercé dans le premier cas, on aura la pression exercée par l'air extérieur sur la surface entière du piston, et par suite, sur chaque unité de cette surface. On trouverait ainsi que la pression atmosphérique, au niveau de la mer, est *moyennement* de $1^{kil},033$ sur chaque centimètre carré ou de 1033^{kil} par mètre carré, et l'on obtiendrait le même résultat de quelque façon qu'on inclinât le cylindre par rapport à l'horizon, pourvu qu'on le plaçât au même lieu. Cette pression moyenne est celle qu'on prend ordinairement pour terme de comparaison, et on la nomme, pour abréger, simplement *atmosphère*. — Ainsi, l'on dit 1 atmosphère, 2 atmosphères de pression, au lieu de $1^{kil},033$, $2^{kil},066$ de pression par *centimètre carré de surface*.

38. *Mesure de la pression de l'air et des gaz ; baromètre*. Le *baromètre*, instrument généralement connu de nos jours, offre un moyen plus commode de mesurer la pression atmosphérique, il consiste (pl. I, fig. 6), en un tube de verre vertical *ac*, fermé par le haut, et dont l'extrémité inférieure *ef*, ouverte, plonge dans une cuvette ABCD contenant du mercure. La pression est indiquée par le poids de la colonne *acdb* de ce fluide, soutenue dans le tube, au-dessus du niveau AB de la cuvette, par la pression que l'air exerce extérieurement sur la surface de ce niveau; mais il faut pour cela que le haut du tube, non occupé par le mercure, soit absolument privé d'air ou *vide*, ce qu'on obtient, lors de la fabrication, en remplissant complétement le tube de mercure, par le bout ouvert placé en haut, puis le renversant après l'avoir bouché, et le débouchant ensuite quand son orifice est suffisamment plongé dans le liquide de la cuvette pour qu'il ne puisse communiquer avec l'atmosphère ; on voit alors le mercure, qui remplissait totalement ce tube, descendre à la hauteur qui répond à la pression de l'air extérieur *. Ce n'est

* La raison de ce principe est fondée, comme nous le verrons plus tard, sur ce que, aucune pression n'existant sur le haut de la colonne, et la surface de niveau AB étant pressée par l'air comme par un piston, cette dernière pression est transmise (14) intégralement, par le mercure, sur la surface de la section *ab* du tube, correspondante à ce niveau, section qui supporte elle-même tout le poids de la colonne *ac*. Si l'on ouvrait, en effet, le haut du tube, l'air en y pénétrant, forcerait la colonne à s'abaisser jusqu'au niveau de la cuvette, et la pression qu'occasionnait le poids de cette colonne, serait remplacée par celle de l'atmosphère sur la base *ab* ; et, comme tout reste le même quant au surplus du fluide contenu dans la cuvette, il faut bien qu'en effet le poids de la colonne de mercure ou la pression qu'elle exerce sur la surface de *ab*, soit égale à la pression de atmosphère sur cette même surface.

pas ici le lieu d'entrer dans des détails sur la construction du baromètre ; il nous suffit de savoir que la hauteur de la colonne de mercure qui répond à la pression atmosphérique moyenne de $1^{kil},033$ par centimètre carré de surface, est de 76 centim. ou 760 millim. (28^{po}), parce qu'une telle colonne, ayant 1 centim. carré de base, pèse réellement (35) $1^{kil},033$; de sorte que, la pression étant généralement proportionnelle à la hauteur de la colonne qui lui répond, on trouvera aisément cette pression, dans chaque cas, par les indications du baromètre. Si l'on employait de l'eau, au lieu du mercure, pour former le baromètre, la colonne d'eau qui mesurerait la pression de $1^{kil},033$ serait $10^{mèt},33$ (environ 32 pieds anciens), parce que le poids d'une colonne d'eau de cette hauteur et de 1 cent. carré de base, pèse (34) effectivement 1033 grammes ou $1^{kil},033$.

39. *Manomètre.* On remarquera que le baromètre peut aussi bien servir à mesurer la tension ou pression des gaz, contenus de toutes parts dans des vases, que la pression atmosphérique elle-même ; il suffit pour cela de le placer dans l'intérieur de ces vases, ou d'y placer seulement sa cuvette en faisant attention de bien boucher l'ouverture par laquelle passe le tube (pl. I, fig. 6). On pourrait aussi se contenter de fermer hermétiquement le dessus de la cuvette (pl. I, fig. 7), et de mettre son intérieur A, en communication avec la capacité D, qui contient le gaz, par un bout de tuyau BC, etc. Ces appareils, qu'on varie de bien des manières, se nomment en général *manomètres.*

40. *Densité ; poids spécifique des gaz.* Sachant ainsi mesurer la pression des gaz, et leur température étant donnée dans chaque cas par le thermomètre, on pourra, à l'aide de la loi de Mariotte (16 et 37) et de celle de M. Gay-Lussac (26), déterminer, par un calcul facile et dont on aura des exemples plus tard, leur poids et leur densité quand on connaîtra ce poids et cette densité dans des circonstances déterminées, par exemple à 0° de température, et sous la pression barométrique de 76^c de mercure, qu'on prend ordinairement pour point de départ ou terme de comparaison : tel est l'usage de la table suivante.

Table des densités et des poids spécifiques des principaux gaz, la densité de l'air étant prise pour unité.

Noms des fluides élastiques.	Poids spécifique.	Poids du mètre cube, à 0° et 760$^{mil.}$ de pression.
		kil.
Air atmosphérique	1,0000	1,2931
Acide carbonique	1,5245	1,9805
Oxygène	1,1026	1,4323
Azote	0,9757	1,2675
Hydrogène	0,0688	0,0894
Vapeur d'eau	0,6235	0,8100

Remarque. Les gaz se dilatant également pour les mêmes élévations de température (26), et se comprimant de quantités proportionnelles (16) pour des augmentations de pression égales, conservent les mêmes rapports de densités à toute pression et à toute température : ainsi, par exemple, la densité de l'hydrogène, qui est environ les 0,069 ou $\frac{1}{15}$ de celle de l'air à 0° et à 76^c de pression, en sera toujours le quinzième à 100° et sous une pression 10 fois plus forte, c'est-à-dire de 10 atmosphères (37 et 38).

41. *Effets de la pression de l'air sur les corps.* On voit, par ce qui précède, que tous les corps plongés dans l'air atmosphérique, sont pressés par lui de toutes parts et en chaque point de leur surface immédiatement en contact ; or, il résulte de là plusieurs effets dont quelques-uns sont importants à connaître : 1° le corps est comprimé, refoulé sur lui-même, ce qui contribue à lui donner la forme *stable* ou solide qu'il doit principalement à l'adhésion, à la cohésion de ses molécules (27) ; 2° son volume est un peu plus faible (13) et sa densité un peu plus forte (33), que si la pression n'existait pas, ou qu'il fût placé dans un espace entièrement vide ; 3° la pesanteur n'est pas la seule cause qui le fasse mouvoir quand il est libre, ou qui le fasse presser sur les autres corps quand il est soutenu par eux ; en un mot, son poids pourrait bien n'être pas le même dans le vide que dans l'air, etc.

Relativement aux deux premiers effets, on observera qu'ils sont très-peu sensibles pour les corps solides et résistants, tels que les bois, les pierres, les métaux, aussi bien que pour les liquides contenus de toutes parts dans des vases, ou simplement en contact avec l'air par leur surface de niveau ; car ces corps peuvent supporter une pression qui soit le double, ou le triple de la pression atmosphérique (13), sans changer de volume d'une manière appréciable.

Quant au troisième effet, on s'assure par l'expérience et, comme nous le verrons, par les principes de la Mécanique, qu'il se réduit uniquement à diminuer le poids, qu'aurait le corps dans le vide, de tout celui du volume d'air que ce corps remplace ou déplace * ; diminution à peine appréciable pour les liquides et les solides dont la densité (35) surpasse généralement 500 fois celle de l'air atmosphérique, mais qui l'est à coup sûr beaucoup pour les fluides élastiques dont le poids, sous l'unité de volume, est très-comparable ou même moindre (40) que celui de cet air. Il en résulte, en effet, que certains gaz ou des corps creux remplis de ces gaz, au lieu de tomber ou de peser, s'élèvent ou font effort pour s'élever ; tout comme cela a lieu pour les corps plongés dans l'eau, lorsque leur densité est moindre que celle de cette eau, et comme on en a un exemple immédiat dans les aérostats ou ballons en taffetas verni, qui, enflés par le gaz hydrogène, s'élèvent jusque dans les nues, en vertu de la pression de l'air extérieur sur leur enveloppe.

Nous devons d'ailleurs faire remarquer que les poids et les densités des liquides, des gaz et des corps solides, qui se trouvent indiqués dans les tables précédentes, sont les densités et les poids absolus tels qu'on les obtiendrait en pesant ces corps dans le vide ; ce qui résulte de la méthode même par laquelle on les a obtenus, méthode exposée dans tous les Traités de physique.

* Nous pouvons, dès à présent, faire sentir la vérité de ce fait par un raisonnement fort simple, et qui s'applique à un corps plongé dans un fluide quelconque, par exemple dans l'eau. D'abord, puisque la pression du fluide diminue à mesure qu'on s'élève dans son intérieur (37), et qu'elle est la même pour tous les points d'une même couche de niveau, on conçoit que le corps doit être plus pressé par le bas que par le haut, et qu'il l'est à peu près également par les côtés ; mais c'est ce qu'on aperçoit plus rigoureusement en observant 1° que le corps tient la place d'une certaine masse de fluide, qui, étant terminé au même contour, à la même surface extérieure, serait, si elle existait, pressée de toutes parts par le fluide environnant, précisément comme l'est ce corps ; 2° que cette masse faisant partie intégrante de la masse totale du fluide, serait en repos malgré ces pressions et l'action de la pesanteur sur ses parties ; 3° que par conséquent l'effet de ces pressions extérieures se réduit à soutenir son poids ; 4° qu'enfin ces pressions étant les mêmes pour le corps, ont aussi uniquement pour effet de *diminuer le poids, qu'il aurait dans le vide, du poids du volume de fluide qu'il déplace,* ou de le pousser verticalement, de bas en haut, avec un effort égal à ce dernier poids.

42. *Conclusion.* Telles sont donc les circonstances principales où il faudra avoir égard aux effets de la pression de l'air ; pour toutes les autres, nous pourrons supposer que les choses se passent dans l'air comme dans le vide, ou comme si l'air n'existait pas. Nous en dirons tout autant des effets des tractions ou des pressions quelconques, de la chaleur, de l'humidité, etc., lorsqu'ils se réduiront à changer la forme, le volume ou la densité des corps, d'une manière peu sensible ou qui aurait peu d'influence sur les résultats pratiques; mais nous n'oublierons pas d'en tenir compte et d'en apprécier les effets quand cela sera nécessaire; et nous le pourrons d'après les documents qui précèdent, et les documents plus étendus ou plus précis que nous recueillerons en traitant chaque question spéciale. Enfin, non-seulement il nous arrivera quelquefois de ne pas tenir compte de certaines propriétés physiques des corps, peu influentes; mais nous pourrons même, par instants, les dépouiller tout à fait de leur poids ou de telle autre qualité essentielle de la matière, afin d'isoler et d'étudier séparément les effets dus à chacune d'elles, et d'être d'autant mieux en état d'en apprécier ensuite ou d'en calculer les effets combinés.

Au surplus, nous n'avons point encore fait l'énumération complète des propriétés physiques de la matière, ni des effets qui se produisent sur les corps dans différentes circonstances et par différentes causes. Nous n'avons rien dit, par exemple, de l'*inertie* des corps, ni de la *résistance* qu'ils éprouvent à se mouvoir dans les fluides, à glisser, à rouler, à se plier sur d'autres corps, ou à s'en séparer dans certains cas, résistances qu'on nomme *roideur*, *frottement*, *adhérence*, et qu'il importe surtout de considérer dans le calcul des machines; mais l'étude de ces propriétés, de ces effets, reviendra plus tard ; il nous suffit pour le moment de les avoir indiqués, afin qu'on ne soit pas tenté de faire de fausses applications des principes de la Mécanique aux arts industriels, et c'est aussi, en partie, le but que nous avons cherché à remplir dans ce qui précède.

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LE MOUVEMENT, LES FORCES ET LES EFFETS DES FORCES.

DE L'ESPACE ET DU TEMPS.

43. *L'espace* est l'étendue indéfinie, sans bornes, qui contient tous les corps, et dont chacun occupe une partie plus ou moins considérable qu'on nomme son *volume*, son *étendue* et quelquefois sa *capacité*.

On nomme souvent aussi *espace*, le volume, l'aire superficielle d'un corps, ou la distance, l'intervalle compris entre deux corps; mais alors on considère ces étendues comme occupant une certaine portion de l'espace, ce qui ne présente point d'équivoque.

44. *Temps, mesure du temps.* On conçoit un temps plus long ou plus court qu'un temps donné; le temps est donc une *grandeur;* il est donc susceptible d'être *mesuré* comme les lignes, les aires et les volumes. — Pour mesurer un temps quelconque, il ne s'agit que d'obtenir des temps égaux, et qui se succèdent sans discontinuité. En tombant d'une certaine hauteur sur un plan de niveau, un même corps emploie toujours le même temps; il en est de même pour des corps égaux tombant de la même hauteur. Supposez qu'aussitôt que le corps est arrivé sur le plan, un autre corps, égal, soit lâché du même point, et successivement un troisième, un quatrième, etc., vous aurez une suite de *temps égaux*, et leur somme sera le temps total. En représentant par 1, ou prenant pour unité l'un des *temps élémentaires*, vous pourrez exprimer un temps quelconque au moyen d'un nombre; en y joignant le nom du temps élémentaire, vous aurez l'expression complète du temps.

La *clepsydre* des anciens, nommée ordinairement *sablier*, offre un moyen plus commode d'obtenir des temps égaux ou d'égale *durée*, par l'écoulement de l'eau ou de sable fin qui se vide successivement d'un vase dans un autre (*voy.* pl. I, fig. 8). — Les pendules, les horloges et les montres, aujourd'hui en usage, sont des instruments encore plus commodes et surtout plus précis.

45. *Division, représentation géométrique du temps.* La fraction la plus petite du temps que donnent les pendules et les montres ordi-

naires, est la *seconde :* 60 secondes qu'on écrit ainsi 60″, font une *minute* ou 1′; 60′ font une *heure* ou 1^h; 24^h font 1 jour; enfin *l'année* complète, ou le temps compris entre deux retours successifs du soleil et de la terre aux mêmes positions relatives, est de 365^j 5^h 48′ 50″ environ ou 31 556 930″. — M. Breguet est parvenu à faire des montres qui ne varient pas d'une demi-seconde dans une année; certaines montres, appelées *chronomètres*, donnent jusqu'aux dixièmes de seconde.

Ainsi nous pouvons compter le nombre d'heures, de minutes, de secondes, etc., écoulées entre deux instants quelconques, avec autant de précision et de facilité que nous comptons le nombre de mètres, de décimètres, etc., contenus dans une longueur ou distance.—Nous pouvons même représenter les temps par des lignes en portant, sur une droite et à partir d'un même point, autant de distances égales qu'il y a d'unités de temps dans chacun d'eux. Voyez pl. I, fig. 9, l'exemple d'une échelle AB dont les parties égales représenteraient des secondes.

REPOS, MOUVEMENT, VITESSE, INERTIE.

46. Un corps est en *repos* quand il reste au même lieu de l'espace; il n'est peut-être dans l'univers aucun corps qui soit absolument en repos; et, comme tout démontre que notre globe tourne sans cesse sur lui-même et autour du soleil, rien n'y possède un repos *absolu*.—Le repos n'est donc que *relatif;* un corps est en repos, pour nous, quand il conserve la même position par rapport à ceux que nous regardons comme fixes. Un corps qui reste à la même place, dans un bateau, est en repos par rapport à ce bateau, quoiqu'il soit réellement en mouvement par rapport aux rives.

Un corps est en *mouvement* quand il occupe successivement diverses positions dans l'espace ; le mouvement n'est que relatif comme le repos. Un corps est en mouvement, pour nous, quand il change de place par rapport à ceux que nous considérons comme fixes.

Le mouvement est essentiellement *continu*, c'est-à-dire qu'un corps ne peut arriver d'une position à une autre sans avoir passé par une série de positions intermédiaires ; ainsi le mouvement d'un point décrit une *ligne* nécessairement *continue.* Quand on parle du chemin décrit par un corps, on entend essentiellement celui d'un certain point lié à ce corps, et dont la position indique celle du corps : par exemple, pour une boule sphérique, pour un cube, pour un cylindre, ce sera le centre de figure, etc.

47. *Distinction des mouvements, vitesse.* Le mouvement d'un point est dit *rectiligne* ou *curviligne*, selon que le chemin qu'il décrit est une droite ou une courbe. Quand le mouvement est curviligne, on peut le considérer comme ayant lieu sur un polygone rectiligne dont les côtés, extrêmement petits, se confondraient sensiblement avec la courbe. Les côtés successivement parcourus et prolongés indéfiniment, qui sont réellement des *tangentes* à la courbe, indiquent les *directions* correspondantes du mouvement.

Concevons que le temps total, employé par un point à parvenir d'une position à une autre, soit divisé en un grand nombre de parties égales et extrêmement petites, par exemple, en millièmes de secondes. Cela posé, si les portions de chemin, successivement décrites dans ces diverses parties du temps, sont égales entre elles, le mouvement sera *régulier* ou *uniforme*. S'il en est autrement, le mouvement sera *varié*. Il sera *accéléré* si les petits chemins successivement décrits sont de plus en plus grands, *retardé* si, au contraire, ces chemins sont de plus en plus courts. — L'aiguille des minutes d'une horloge, le cours régulier des eaux, etc., offrent l'exemple de mouvements sensiblement uniformes, parce que des espaces égaux sont décrits à chaque instant dans des temps égaux ; le mouvement de *rotation* de la terre autour de son axe, qui s'opère en un jour, est aussi dans ce cas. — Un corps qui tombe verticalement offre l'exemple du mouvement accéléré ; un corps qui s'élève aussi verticalement, celui du mouvement retardé. Dans le premier cas, le corps part avec un mouvement nul ; dans le second, son mouvement finit par s'éteindre.

Dans tous ces cas, la *rapidité* ou la *lenteur* du mouvement est indiquée, pour chacun des instants égaux et très-petits, par la longueur, plus ou moins grande, de l'espace ou du chemin décrit pendant cet instant : cette longueur mesure l'*intensité* de la *vitesse* à ce même instant. — Ainsi la *vitesse* est *constante* dans le mouvement uniforme, elle est *accélérée* ou *retardée* dans le mouvement accéléré ou retardé.

48. *Mouvement, vitesse uniformes.* Dans ce mouvement, le plus simple de tous, les petits espaces, parcourus dans les instants suc-

cessifs, étant égaux, il est clair que le chemin décrit dans un temps quelconque, se composera d'autant de parties égales d'espace qu'il y a de parties égales dans ce temps. — Ainsi, dans le mouvement uniforme, des *espaces égaux* sont décrits dans des *temps égaux* quelle que soit leur petitesse ou leur grandeur ; les espaces *croissent comme les temps,* dans le *rapport des temps,* ou sont *proportionnels aux temps* employés à les décrire ; enfin le rapport de chaque espace au temps employé à le décrire reste *constant.* Toutes ces expressions désignent la même chose d'après les définitions et propriétés connues des proportions. — E étant le nombre des unités de chemin parcourues pendant le nombre d'unités de temps T, e celui des unités de chemin parcourues pendant le temps t ; on a, selon ce qui précède,

$$E : e :: T : t, \quad \text{ou} \quad E : T :: e : t, \quad \text{ou} \quad \frac{E}{T} = \frac{e}{t}.$$

Puisque, dans le mouvement uniforme, les espaces sont proportionnels aux temps employés à les décrire, la vitesse peut être indiquée par la longueur de l'espace décrit durant un temps quelconque, ou pour la simplicité, pendant *l'unité de temps.* Ainsi l'on dit : la vitesse de tel corps est de 2^m par seconde, ou de 60 fois $2^m = 120^m$ par minute, ou de $0^m,2$ par dixième de seconde, etc.; ce qui revient au même, puisqu'ici le rapport de l'espace au temps ne change pas. — Quand on sait qu'un mobile a décrit uniformément un certain espace dans un certain nombre d'unités de temps, de *secondes* par exemple, on trouve la vitesse ou le chemin dans l'unité de temps, en partageant l'espace en autant de parties égales qu'il y a d'unités de temps, ou en *divisant* l'espace par le temps. — Exemple : l'espace décrit uniformément pendant $1'$ et $5''$ ou $65''$ étant de 260^m, la vitesse par seconde, ou l'espace décrit pendant $1''$, est de $\dfrac{260^m}{65} = 4^m$. Réciproquement, si l'on *multiplie* la vitesse par un certain nombre d'unités de temps, le produit donnera l'espace décrit uniformément pendant ce temps.

49. *Mouvement périodique constant.* Il arrive quelquefois, dans la pratique, que la vitesse n'est pas rigoureusement constante ou la même à chaque instant, quoique les espaces décrits au bout de certains temps égaux, soient égaux. Tels sont en particulier tous les

mouvements *oscillatoires*, *alternatifs* ou de *va-et-vient*, dont les diverses *périodes* ou *retours* s'exécutent régulièrement et dans le même temps, bien que la vitesse varie continuellement dans l'intervalle de chaque période. Tel est encore le mouvement d'une voiture, d'un piéton qui décrivent constamment le même chemin dans chaque heure, chaque quart d'heure, et dont néanmoins le mouvement, tantôt accéléré, tantôt retardé, varie à chaque instant. Tel est enfin le mouvement de la terre autour du soleil, qui, tantôt plus lent et tantôt plus rapide, redevient cependant le même au bout de chaque année ou période.

De semblables mouvements sont dits *périodiques*, et on les remplace, pour la simplicité, par des mouvements entièrement uniformes qui s'accompliraient dans le même temps. La *vitesse constante* qui résulte de cette considération est une *vitesse moyenne*; il ne faut pas la confondre avec la *vitesse effective* qui est variable à chaque instant : c'est ainsi que les astronomes ont substitué au mouvement *réel* ou *vrai* de la terre, qui n'est que périodique, un mouvement moyen, uniforme, bien moins compliqué, et qui s'accomplit, comme l'autre, dans le cours d'une année; de là aussi la distinction du *jour vrai*, du *temps vrai* et du *jour moyen*, du *temps moyen*, dont les premiers sont donnés par les *cadrans solaires* et les autres par les bonnes horloges.

50. *Représentation géométrique des lois du mouvement.* Supposons que nous ayons une *table à deux colonnes* ou espèce de *Barème*, qui, pour un certain mouvement, donne les espaces ou chemins décrits au bout de chaque temps écoulé; prenons une certaine longueur (1 millimètre, 1 cent., etc.), pour représenter l'unité de temps, la *seconde* par exemple, et une autre longueur (1 centimètre, 1 décim., etc.) pour représenter l'unité de chemin, le *mètre* par exemple. Cela posé, traçons une droite indéfinie OB (pl. 1, fig. 10), et portons sur cette droite (45), à partir d'un même point O, une distance Od représentant l'un des temps indiqués à la table; sur la perpendiculaire en d, à la droite OB, portons une distance $d'd$ représentant, d'après la table, le chemin décrit au bout du temps Od; faisons de même pour les autres temps et les chemins correspondants, on obtiendra une suite de points a', b', c', . . . qui, réunis deux à deux par des droites, donneront le polygone $a'b'c'$ . . . . Ce polygone finira par se confondre avec une courbe véritable, si l'on multiplie convenablement les points, ou si l'on prend, dans la table,

des temps suffisamment rapprochés les uns des autres. Il est clair aussi qu'au moyen du tracé de la courbe, on pourra obtenir, comme par la table, le chemin décrit pour chaque temps donné; de sorte que cette courbe en tiendra lieu pour représenter la *loi*, la *relation* entre les temps et les chemins, quel que soit le mouvement.

51. *Remarque générale.* Nous rappellerons que les lignes O*a*, O*b*..., se nomment, en général les *abscisses* de la courbe, O l'*origine* et OB l'*axe* de ces abscisses; que pareillement les perpendiculaires $a'a$, $b'b$, $c'c$..., sont nommées les *ordonnées* de la courbe, et l'ensemble de ces ordonnées et abscisses, qui se correspondent respectivement, les *coordonnées* de cette même courbe; qu'enfin, l'intervalle *cd* entre deux ordonnées consécutives telles que $c'c$, $d'd$, ou la différence de leurs abscisses, se nomme quelquefois l'*accroissement* de ces abscisses, comme la différence $d'd''$ entre ces mêmes ordonnées consécutives, se nomme aussi leur *accroissement* ou leur *décroissement*, selon que ces ordonnées vont en augmentant ou en diminuant, à mesure qu'elles s'éloignent de l'origine. — Quand les points consécutifs a', b', c'..., sont tellement rapprochés entre eux, que les droites $a'b'$, $b'c'$..., qui les unissent deux à deux, peuvent être censées se confondre avec les arcs correspondants de la courbe, on dit que ce sont des *éléments* de cette courbe; et, en général, les parties extrêmement petites d'une grandeur se nomment ses parties *élémentaires*, ses *éléments*.

52. *Représentation du mouvement uniforme.* Dans ce mouvement, les espaces *croissent comme les temps* (48); ainsi les ordonnées $a'a$, $b'b$, $c'c$.... (pl. I, fig. 11), y sont proportionnelles aux abscisses O*a*, O*b*, O*c*..., et partant telles que la ligne $a'b'c'$..., qui donne la loi du mouvement, est une *droite* (*voy.*, en Géométrie, la *théorie des lignes proportionnelles*). — Supposez qu'on partage l'*axe* OB des *abscisses* ou des *temps*, en un grand nombre de parties égales très-petites; puis qu'après avoir élevé les ordonnées correspondantes, on mène, par l'extrémité de chaque ordonnée, des parallèles à l'axe des abscisses, on formera une suite de petits triangles égaux et rectangles, tels que $c'd'd''$ par exemple, semblables aux triangles Oaa', Odd'..., et dont les côtés seront proportionnels à ceux de ces derniers. Observant donc que les hauteurs $d'd''$.... de ces petits triangles mesurent les espaces décrits pendant les *temps élémentaires* correspondants $c'd''$, ou *cd*, on pourra répéter, au moyen de la figure,

tout ce qui a été dit ci-dessus sur les lois du mouvement uniforme. Ainsi la vitesse, c'est-à-dire (47) l'espace décrit dans chacun des instants égaux ab, bc, cd..., est constante, et peut être donnée par l'espace quelconque $e'e$, par exemple, qui serait décrit dans un certain temps Oe, pris pour unité.

53. *Représentation des mouvements variés.* Dans ces mouvements, les espaces n'étant plus proportionnels aux temps, la ligne $a'b'c'$... (pl. I, fig. 12) n'est plus une droite : les petits espaces $b'b''$, $c'c''$..., décrits dans les temps élémentaires ab, bc.... sont inégaux ; par conséquent la vitesse (47) varie à chaque instant. Pour le cas de la figure, le mouvement et la vitesse sont *accélérés,* parce que les espaces $b'b''$, $c'c''$..., décrits dans des instants égaux, vont sans cesse en croissant. Supposons qu'à l'instant qui répond au point c', le mouvement cesse d'être accéléré, et se continue uniformément avec la vitesse qui a lieu en cet instant, le reste du mouvement, au lieu d'être représenté par une courbe, le sera par la droite indéfinie $c'm$, prolongement de $c'd'$; et, puisqu'à l'instant que l'on considère, le mobile parcourait l'espace $d'd''$ dans le temps élémentaire $c'd''$ ou cd, on voit qu'en vertu du mouvement censé devenu uniforme, il parcourrait, dans l'unité de temps, un espace qu'on obtiendra en cherchant l'ordonnée mn qui, pour la droite $c'm$, correspond à l'abscisse $c'n$ qui représente cette unité de temps.

L'espace mn, d'après ce que nous avons vu (48 et 52), n'est autre chose que la vitesse de ce mouvement uniforme ; or, si nous supposons que l'élément de temps cd est assez petit pour que la corde $c'd'$ puisse être censée confondue avec la courbe, la droite indéfinie $c'd'm$ deviendra précisément la tangente en c' à cette courbe : cette tangente se construira, dans certains cas, *géométriquement,* c'est-à-dire rigoureusement, et, dans d'autres, à *vue* ou par des *méthodes de tâtonnement ;* or son inclinaison sur la parallèle $c'n$ à l'axe des abscisses, donnera, comme nous venons de le dire, la *vitesse* ou le chemin mn qui serait décrit, dans l'unité de temps $c'n$, *si le mouvement devenait tout à coup uniforme.* On voit par là aussi que, si l'on connaissait exactement, en nombre et pour chaque instant très-petit cd ou $c'd''$, l'espace correspondant $d'd''$, on aurait la vitesse dont il s'agit au moyen de la proportion $c'd'' : d'd'' :: c'n$ ou $1 : mn$; d'où l'on tirerait pour cette vitesse, $mn = \frac{d'd''}{c'd''} \times 1 = \frac{d'd''}{cd}$.

Si, au lieu d'être accéléré, comme on vient de le supposer, le mouvement était *retardé,* la loi qui lie les temps aux espaces serait représentée par une courbe $a'c'f'$ (pl. 1, fig. 13), tournant sa *concavité* vers l'axe OB des temps; du reste, les raisonnements et les opérations pour trouver la vitesse, seraient absolument les mêmes. Si le mouvement, d'abord retardé, s'accélérait ensuite, la loi du mouvement serait évidemment représentée par une courbe telle que l'exprime la figure 13, dont la première partie $a'f$ tournerait sa concavité du côté de l'axe OB, et la seconde $f'k'$ du côté contraire; c'est-à-dire que cette courbe aurait une *inflexion* en f', au point qui correspond au changement du mouvement.

Enfin on voit que le mouvement *périodique constant,* tel qu'il a été défini ci-dessus (49), sera représenté par une courbe sinueuse ABC...... (pl. 1, fig. 14), dont les *ondulations* se font régulièrement autour d'une droite $a'b'c'd'$..., qui en représente le mouvement uniforme *moyen.*

54. *Observation.* Il est sans doute inutile de remarquer que les courbes précédentes, donnant uniquement la *loi* qui lie les *espaces* aux *temps,* ne doivent pas être confondues avec les lignes ou chemins mêmes parcourus par les mobiles : dans ces dernières lignes, les tangentes en chaque point donnent simplement (47) la *direction* du mouvement ou de la vitesse pour l'instant correspondant; et, selon ce qui précède (53), c'est le petit espace ou l'élément de chemin décrit sur la courbe du mobile, à cet instant, qui, étant divisé par le temps élémentaire employé à le décrire, donne pour quotient ce que nous avons nommé la *vitesse.*

55. Inertie de la matière. La matière est *inanimée* ou *inerte,* elle ne peut se donner du mouvement par elle-même, ni changer celui qu'elle a reçu. — Un corps en repos y persévère, à moins qu'une cause telle que la pesanteur, un moteur animé, ne l'en fasse sortir. — S'il a été mis en mouvement et dans une certaine direction *ab* (pl. 1, fig. 15), il continuera à se mouvoir, de *b* en *c,* sur le prolongement de la droite *ab;* car, arrivé en *b,* il n'y a pas de raison pour qu'il se dirige au-dessus ou au-dessous de *ab,* à moins qu'une cause ne le fasse dévier de sa route. Pareillement, s'il a une certaine vitesse de *a* en *b,* il conservera cette vitesse tant qu'une cause étrangère ne viendra pas ralentir ou accélérer son mouvement,

cette vitesse. — Si nous voyons la bille lancée sur un billard ralentir sans cesse de vitesse, cela tient à la résistance du tapis et de l'air ; si nous voyons un corps tomber verticalement quand on l'abandonne, et accélérer même de mouvement, cela tient à l'action de la pesanteur qui agit continuellement sur ce corps comme s'il était au repos : c'est tellement vrai, qu'en diminuant les obstacles qui s'opposent au mouvement de la bille, elle y persévère plus longtemps, et qu'en lançant le corps de bas en haut, sa vitesse diminue au lieu d'augmenter. Enfin, si la direction du mouvement (47) d'une bombe ou d'une pierre lancée obliquement, change à chaque instant, ou si elles décrivent des lignes courbes, c'est encore parce que la pesanteur tend sans cesse à ramener cette bombe ou cette pierre vers la terre.

Loi de l'inertie. Il résulte de là qu'en vertu de l'*inertie*, un corps qui se meut actuellement avec une certaine vitesse et dans une certaine direction, conserverait éternellement cette direction et cette vitesse, et que le mouvement serait rigoureusement rectiligne et uniforme, si rien ne venait à le déranger ; qu'enfin si, par une cause quelconque, le corps est forcé de décrire une ligne courbe ABC (pl. 1, fig. 16), cette même inertie (la cause venant tout à coup à cesser, à un certain instant), lui ferait décrire la *tangente* BT au point correspondant B de la courbe, et conserver la vitesse qu'il possédait en ce point.

DES FORCES, DE LEUR MESURE ET DE LEUR REPRÉSENTATION.

56. *Définition.* On appelle en général *forces*, les *causes* qui modifient actuellement l'état d'un corps, ou qui le modifieraient si d'autres forces ne venaient empêcher ou *détruire* l'effet des premières : l'*attraction*, la *pesanteur* (27 et suiv.), la *résistance* de l'air et des fluides, le *frottement*, le *calorique* considéré comme cause de la répulsion (28), sont de véritables forces, puisqu'ils peuvent changer l'état de repos ou de mouvement des corps. Nous ajoutons *ou qui le modifieraient*, etc. ; car un corps posé sur une table de niveau, par exemple, ou suspendu verticalement par un fil, ne paraît pas actuellement changer d'état ; mais il en a changé d'abord, et la pesanteur le presse sans cesse contre la table ou lui fait tirer le fil ; elle le ferait mouvoir enfin si la résistance de la table ou du fil ne s'opposaient continuellement à son action.

57. *Effets des forces.* Les forces produisent, comme on voit, des effets très-variés, suivant les circonstances : tantôt elles laissent les corps en repos, en se détruisant constamment les unes les autres, tantôt elles en changent la forme, elles les rompent, tantôt elles leur impriment du mouvement, elles accélèrent ou retardent celui qu'ils possèdent, ou en changent la direction, tantôt enfin ces changements s'opèrent avec lenteur, d'une manière imperceptible, tantôt ils s'opèrent au contraire avec rapidité, brusquement ; mais dans le fait, c'est toujours dans un temps fini et par degrés continus. — Si nous voyons quelquefois des corps changer brusquement d'état, de direction ou d'intensité de mouvement, c'est que la force, alors très-grande, produit son effet dans un temps dont la durée est seulement inappréciable à nos moyens de mesurer le temps. — Si la balle d'un fusil traverse un carreau de verre, une porte, une feuille de papier librement suspendue, sans leur imprimer un mouvement sensible, cela prouve seulement qu'elle opère cet effet avec une rapidité telle que les parties enlevées n'ont pas le temps de propager leur mouvement dans toute l'étendue des corps. — Si, d'après l'expérience qui en a été faite autrefois à la Rochelle, un canon suspendu verticalement à l'extrémité d'une corde, porte le boulet au même but que s'il était sur son affût, cela prouve seulement que la pièce n'avait point dévié d'une manière sensible avant l'instant où le boulet est sorti de l'âme, et qu'il lui faut un temps bien plus considérable qu'à ce boulet, pour acquérir une vitesse ou un mouvement qu'on puisse apprécier ou mesurer. — Nous examinerons, dans ce qui suit, comment le mouvement se propage, de proche en proche et d'une manière continue, dans toute l'étendue des corps, et comment il se fait que ceux qui ont le plus de poids et de densité, sont aussi ceux qui, dans un temps donné, reçoivent le moins de vitesse par l'effet d'une même force dont l'action est plus ou moins prolongée.

58. *Dénomination des forces.* Les forces qui donnent le mouvement aux corps s'appellent en général *forces motrices :* elles sont *accélératrices* quand elles accélèrent à chaque instant le mouvement, elles sont *retardatrices* quand elles le retardent. Souvent aussi on nomme *puissances* les forces qui agissent pour favoriser ou augmenter le mouvement, et *résistances* celles qui, au contraire, tendent à l'empêcher ou à le diminuer : d'après cette définition, les

forces accélératrices sont des puissances véritables, et les forces retardatrices des résistances. En général, on donne le nom de *puissance* aux forces qu'on regarde comme capables de produire un certain effet, et celui de *résistance* aux forces qui s'opposent à l'accomplissement de cet effet.

59. *Nature et comparaison des forces.* Nous avons, par nous-mêmes, une idée exacte du mode d'agir de la force. Quand nous poussons ou tirons un corps, qu'il soit libre ou qu'il ne le soit pas, nous éprouvons une sensation qui se nomme *pression, traction,* ou en général *effort :* cet effort est absolument analogue à celui que nous exerçons en soutenant un poids. Ainsi les forces sont pour nous de véritables pressions, comparables à ce qu'on nomme le *poids* des corps. La pression peut être plus forte ou plus faible ; c'est donc une grandeur, et, pour la mesurer, la représenter par des nombres, il ne s'agit que de choisir une pression quelconque pour unité ; ce qui ne sera pas difficile si nous pouvons trouver des pressions égales, comme nous avons trouvé des temps égaux (44).

Deux forces sont égales quand, substituées l'une à l'autre et dans les mêmes circonstances, elles produisent le même effet ou en détruisent une même troisième qui leur est directement opposée.

Suspendons (pl. I, fig. 17) un corps P à l'extrémité d'un fil AB ; en vertu de son poids, ce fil prendra la direction de l'*aplomb* ou de la *verticale* AB (30), et il faudra, en A, suivant AB, un certain effort pour le soutenir contre l'action de la pesanteur. Si deux forces, ainsi appliquées successivement à ce fil et de la même manière, maintiennent le corps P en repos, ces forces seront nécessairement *égales entre elles* et au *poids du corps :* une *force double, triple,* supportera *deux, trois corps* semblables au premier, suspendus les uns au-dessous des autres, par le même fil. Prenant donc pour unité l'une de ces forces, par exemple celle qui supporte un *centimètre cube d'eau pure,* ou le poids d'un gramme (34), une force quelconque sera exprimée par le nombre qui indique combien de grammes elle pourra supporter : c'est au gramme, ou plutôt au *kilogramme,* que désormais nous comparerons toutes les forces de *pression,* de *traction,* de *tension,* de *compression,* etc.

60. *Mesure des forces par les poids.* Nous savons que les poids se mesurent ou se comparent entre eux par le moyen de *balances ;*

d'après le caractère général ci-dessus auquel on reconnaît que deux forces sont égales, il devient facile de trouver le poids d'un corps, quelles que soient la justesse et la composition d'un tel instrument. Il suffit, pour cela, de s'assurer que ce corps, substitué dans les mêmes circonstances, à un certain nombre de poids étalons, produit le même effet sensible sur la balance, pour affirmer que le poids du corps est égal à celui des étalons. Sous ce rapport donc, tous les appareils quelconques peuvent être employés à mesurer le poids des corps, et par suite les forces.

Les ressorts, entre autres (17 et suiv.), quand ils sont susceptibles de conserver longtemps leur élasticité, peuvent servir et servent en effet à cet usage dans la pratique : tels sont plus particulièrement le *peson à ressort* du commerce (fig. 18), et le *dynamomètre de Régnier* (fig. 19), instrument plus compliqué et qui sert à mesurer des efforts de pression ou de traction supérieurs à 100 kilog. Dans l'un et dans l'autre, la grandeur de la flexion du ressort est indiquée par le mouvement d'une aiguille ou d'une tige qui parcourt les différentes divisions d'un limbe; ces divisions ayant été obtenues, lors de la fabrication, en suspendant directement des poids étalons à l'instrument, fournissent le moyen de mesurer ensuite le nombre des *kilogrammes* d'un effort quelconque. En se servant des balances à ressort, il ne faudra pas oublier de vérifier préalablement l'exactitude de leurs divisions au moyen de poids étalonnés, et de changer la valeur de la graduation, si l'élasticité se trouvait altérée depuis l'instant de la fabrication. Du reste, nous n'insisterons pas sur la description de ces instruments, parce que leur emploi dans les arts et leur intelligence n'ont rien de difficile, et qu'il nous suffit ici de savoir qu'il existe des moyens directs de mesurer les forces par des poids.

61. *Observations.* En proposant, comme nous venons de le faire, de mesurer les forces par des poids, nous supposons essentiellement que l'effort pour soutenir, contre l'action de la pesanteur, un corps quelconque, par exemple, un *litre* ou *décimètre cube* d'eau pure, soit constamment le même dans tous les temps et pour tous les lieux, et que par conséquent le *kilogramme,* poids de ce volume d'eau, soit une grandeur *absolue, invariable.* S'il n'en était pas ainsi, les poids ne pourraient aucunement nous servir pour mesurer les forces, et il faudrait recourir à quelque autre unité moins

sujette à changer. Or on sait, par expérience, que l'action de la pesanteur n'a pas varié avec le temps, du moins d'une manière sensible, et l'on peut croire qu'à moins d'événements extraordinaires, elle ne changera pas non plus dans l'avenir. A la vérité, l'action de la pesanteur diminue à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface de la terre; elle diminue pareillement à mesure qu'on s'éloigne des pôles pour s'approcher de l'équateur; de sorte que le même corps qui, dans notre pays et à la surface des plaines, fait, par son poids, fléchir un ressort jusqu'à un certain degré, le ferait fléchir un peu moins lorsqu'on le transporterait à l'équateur ou sur le sommet d'une montagne élevée; mais, pour l'étendue d'un pays comme la France, et pour des montagnes telles qu'il s'y en rencontre, la diminution du poids est à peine sensible : par exemple, pour une élévation verticale d'une lieue au-dessus des plaines, elle serait au plus de $\frac{1}{750}$ du poids mesuré au niveau de ces plaines.

Il suit de là donc que nous pouvons regarder le poids absolu des corps, ou la force qui soutient ce poids contre l'action de la pesanteur, comme une quantité tout à fait constante, du moins dans l'étendue ordinaire de nos travaux industriels, et que par conséquent nous pouvons aussi, sans crainte de commettre des erreurs appréciables, prendre pour unité de force l'unité de poids, conformément à ce qui a été proposé ci-dessus. Nous verrons d'ailleurs plus tard comment, à l'aide du *pendule,* on peut rendre sensible la variation de la pesanteur dans les divers lieux, variation généralement trop faible pour être appréciée, d'une manière facile et rigoureuse, par le moyen des ressorts ou d'instruments analogues.

62. *Point d'application, direction, intensité et représentation des forces.* Il faut distinguer dans une force, 1° *son point d'application*, c'est-à-dire le point où elle agit immédiatement; 2° sa *direction* indéfinie ou la droite que décrirait son point d'application, s'il obéissait librement à la force; 3° le *sens* de son action, qui peut s'exercer de la gauche vers la droite, du haut en bas, etc., ou inversement; 4° sa *grandeur absolue* ou son *intensité*, mesurée par des poids, par un certain nombre de kilogrammes.

Soit A (pl. I, fig. 20) le point d'application d'une force dont la droite AB est la direction indéfinie; portons, de A en P, sur cette droite et dans le sens de son action, un nombre d'unités de longueur, par exemple de *centimètres,* de *millimètres*, égal au nombre des kilogrammes, qui exprime son intensité ; il est évident que cette force sera complétement représentée. Ordinairement on exprime le sens de l'action au moyen d'une petite flèche, et l'intensité de la force par une lettre telle que P, et cela afin d'abréger ; ainsi l'on dit : une force P ou AP, une force Q ou BQ, comme on dirait une force de 10 kilogrammes, de 15 kilogrammes, etc. De cette manière, l'étude de la Mécanique est ramenée à celle de certaines figures de la Géométrie.

MODE D'ACTION DES FORCES SUR LES CORPS.

63. *Action directe*. Quand une force agit extérieurement à un corps solide et contre un point de sa surface, elle exerce une pression qui refoule les molécules les plus près de ce point ; le corps *plie, fléchit* ou se comprime suivant les circonstances ; les molécules se trouvant plus rapprochées au contact, font effort pour retourner à leur place, en vertu de leur *force de répulsion* naturelle (27 et 28), ou de l'élasticité plus ou moins grande qui appartient à toutes les substances (19) ; elles refoulent aussi les molécules qui leur sont immédiatement voisines, et, de proche en proche, les plus éloignées jusqu'à l'autre extrémité du corps. Si cette extrémité est fixe ou arrêtée par un obstacle, l'effet de la force se réduira à une compression, à un changement de forme du corps ; si, au contraire, cette extrémité est libre, elle s'avancera, de sorte que le mouvement aura été propagé ou communiqué à toutes les parties, et cela de proche en proche, ou successivement. Ce mouvement *intestin*, résultat d'une suite de compressions, prouve qu'il faut un certain temps (57) pour que la force ait produit son effet total, et l'absurdité de supposer que la vitesse finie puisse s'engendrer *instantanément* ou *tout à coup*. Les mêmes choses se passeraient d'ailleurs si, à l'inverse, la force était employée à détruire le mouvement acquis d'un corps ; elle détruirait d'abord la vitesse des molécules les plus près du point d'action, puis, de proche en proche, celle des molécules les plus éloignées, etc.

Nous avons supposé que la force appliquée extérieurement au corps, agissait pour le presser, le refouler sur lui-même ; mais, si elle s'exerçait du dedans au dehors de façon à le tirer, à l'étendre, les molécules seraient écartées au lieu d'être rapprochées, et feraient, en vertu de l'*attraction* qui les unit (27 et 28), effort pour reprendre leurs distances respectives, et pour s'entraîner ainsi, de proche en proche, d'une extrémité du corps à l'autre; d'où l'on voit qu'en vertu de cette attraction et de la répulsion, les molécules des corps se comportent comme si elles étaient maintenues entre elles et séparées par de *petits ressorts* qui s'opposeraient aussi bien aux forces qui tendent à les rapprocher, qu'à celles qui tendent à les désunir.

64. *Réaction; principe de la réaction.* D'après cette manière d'envisager l'action des forces sur les corps, entièrement fondée sur l'expérience de ce qui se passe quand on les tire ou qu'on les comprime, il est évident qu'un effort ne peut être exercé, en un point quelconque d'un corps, sans que les ressorts moléculaires de celui-ci n'agissent, en sens contraire, avec un effort précisément égal et contraire : c'est ce qu'on exprime en disant, d'après l'illustre Newton, que *la réaction est toujours égale et contraire à l'action,* principe démontr par toutes sortes de faits.—En pressant, par exemple, du doigt un corps, en le tirant avec une ficelle, ou en le poussant avec une barre, nous sommes pressés, tirés ou poussés, en sens contraire, de la même manière et avec le même effort. — Deux pesons à ressorts (60), placés (pl. I, fig. 21) aux extrémités, A et B, d'une telle ficelle ou d'une telle barre, indiquent le même degré de tension, quand une force P vient à agir, par leur intermédiaire et celui de la ficelle ou de la barre, sur un obstacle placé à l'extrémité opposée. En général, nous ne pouvons concevoir qu'une force exerce son action, sans faire naître à l'instant une résistance égale et directement contraire : si une molécule matérielle en attire une autre, réciproquement celle-ci attirera la première avec une force égale et contraire; si la pesanteur ou l'attraction terrestre sollicite les corps vers la terre (30), réciproquement ces corps sollicitent la terre à se rapprocher d'eux avec une force égale et directement opposée, etc. C'est là un des principes fondamentaux de la Mécanique.

65. *Hypothèses admises en Mécanique.* Dans tous les cas où une force agit, comme on vient de le dire, par l'intermédiaire d'une ficelle ou d'une barre tendue en ligne droite, l'action de cette force ne se transmet intacte, d'une extrémité à l'autre, que par une suite d'actions ou de réactions, égales et contraires, qui se détruisent ou se balancent réciproquement, et que les ressorts moléculaires exercent en chaque point de la droite suivant laquelle agit cette

force et la résistance opposée. C'est en vertu de cette considération qu'il est permis de supposer que *l'action d'une force s'opère ou se transmet en chacun des points de la droite matérielle qui l'unit à la résistance.*

Dans cette action réciproque des diverses parties de la barre et de la ficelle, celles-ci se trouvent raccourcies ou allongées jusqu'à un certain degré relatif à l'énergie de la puissance; mais, si cette énergie reste constante et ne surpasse pas d'ailleurs la force de résistance (20) de la ficelle ou de la barre, l'allongement ou le raccourcissement cessera d'augmenter. C'est d'après cette seconde considération que nous pourrons quelquefois regarder les corps solides et résistants, employés dans les arts pour transmettre l'action des forces, comme parfaitement *rigides* et *inextensibles;* d'autant plus qu'on les choisit, presque toujours, de façon qu'ils fléchissent en réalité très-peu sous l'action de ces forces, et que nous ne leur attribuerons cette qualité, dans toute autre circonstance, qu'après que le changement de forme aura déjà été opéré, et pour le temps seul où il restera invariable sous l'action constante des forces appliquées au corps.

Supposons, par exemple (pl. I, fig. 22), qu'une force P soit employée à pousser ou presser un obstacle solide K, par l'intermédiaire d'une barre ou d'un corps flexible quelconque, ABC, et concevons que cette force, ayant fait acquérir à la barre toute la flexion qu'elle peut recevoir d'après sa constitution, demeure constante; on pourra, dès lors, considérer ABC comme entièrement rigide, et supposer même que le point A soit réellement lié au point C, par une droite matérielle AC, suivant laquelle la pression de P se transmet exactement contre l'obstacle, puisque la réaction est nécessairement égale et contraire à l'action. Ainsi la force P produira en C, contre l'obstacle, précisément le même effet que si elle y était immédiatement appliquée, et elle fera naître, en ce point, une résistance Q égale et dirigée, de Q vers C, dans le prolongement de la droite AC ou de sa propre direction. On pourrait même remplacer cette force P par une autre qui lui serait égale, et qui tirerait le point A, vers C, par le moyen d'une barre ou d'une ficelle, sans que, pour cela, les effets soient aucunement modifiés; mais il faut nécessairement supposer que cette barre et cette ficelle soient inextensibles, ou qu'elles aient reçu, au moment où on les applique, le degré d'extension qui convient à l'énergie de la force.

Voilà comment on devra entendre les choses toutes les fois qu'il nous arrivera, par la suite, de considérer les corps comme entièrement roides, ou de supposer que le point d'application d'une force est transporté en un point quelconque de sa direction.

66. *De l'inertie considérée comme force.* Nous avons vu ci-dessus (63 et 64) que quand une force agit, à l'extérieur d'un corps libre, pour lui imprimer du mouvement ou pour détruire celui qu'il possède, ce corps réagit ou oppose une résistance égale et contraire à la force : cette résistance, cette réaction devant être considérée comme un résultat de l'inertie des diverses particules matérielles du corps, on voit que l'inertie est une force véritable qui peut se mesurer en poids. Pour un même corps, la résistance augmente évidemment avec le degré de vitesse imprimée ou détruite ; nous verrons plus tard qu'elle est exactement proportionnelle à ce degré, et qu'elle augmente aussi avec la quantité de matière renfermée dans chaque corps.

Quand on tire un corps libre par le moyen d'une ficelle, cette ficelle s'étend, s'allonge et peut même se rompre si elle est tirée brusquement, et cela d'autant mieux que le corps est plus *massif* ou plus *pesant :* le même effet serait produit évidemment si, le corps étant en mouvement, on essayait de le retenir par le moyen de la ficelle. — Si on suspend un corps à l'extrémité d'une ficelle verticale, et qu'on place un peson à ressort dans la ligne de *traction* ou de *tirage* de cette ficelle, le ressort indiquera le poids du corps dans le cas du repos ; mais, si on élève le corps avec une certaine vitesse, le ressort se pliera davantage, par suite de la résistance opposée par l'inertie de la matière. Le mouvement étant une fois acquis et demeurant régulier, uniforme (4), le ressort reprendra et conservera constamment l'état de tension qu'il avait dans le cas du repos, attendu que l'inertie ne se fait sentir (55), comme force, qu'autant que la vitesse du corps est altérée, et que la pesanteur, au contraire, agit, sans relâche, sur les corps qu'ils soient ou non en mouvement. On voit donc que l'état de tension du ressort peut servir à mesurer les variations de la vitesse du corps, et la grandeur de la résistance qu'en vertu de son inertie, il oppose à l'action de la puissance qui soulève la ficelle.

67. *Action combinée et réciproque des forces.* Nous n'avons, dans

ce qui précède, considéré que l'action simple d'une force appliquée en un point d'un corps, et nous avons vu qu'il naît, de cette action, une réaction égale et précisément contraire, provenant de l'inertie de la matière du corps, lorsqu'il est libre, ou de la résistance opposée par un obstacle extérieur quelconque, réaction qui est transmise d'une extrémité à l'autre de ce corps (63) par une suite d'actions et de réactions semblables qu'exercent entre elles les molécules, en vertu de leur force de ressort. Or, il se passe des choses absolument analogues quand plusieurs forces agissent à la fois en différents points d'un corps ; leurs effets se combinent tellement que chacune d'elles éprouve, de la part de ce corps, une réaction égale et contraire à la sienne propre, et que les autres forces lui transmettent encore par l'intermédiaire des ressorts moléculaires ; cette réaction peut donc être considérée comme un résultat plus ou moins immédiat de l'action de toutes les autres forces, ou comme la résistance qu'elles opposent à l'action directe de celle que l'on considère.

C'est ainsi qu'on devra entendre généralement le *principe de l'action égale et contraire à la réaction*, et que nous pourrons dire et concevoir désormais qu'une force en *détruit* ou *vainc* plusieurs autres, sans leur être directement opposée, bien que, dans la réalité, elle ne détruise ou n'empêche directement que l'effet qui serait produit par sa réaction, si, tout à coup, elle venait elle-même à s'anéantir ou à être détruite par une nouvelle force quelconque.

68. *Exemple de l'action combinée des forces.* Supposons qu'un cheval soit employé à tirer une voiture le long d'une route ; on pourra le considérer comme détruisant à chaque instant, par l'intermédiaire des traits, des palonniers, du timon, de la cheville ouvrière, etc., toutes les résistances qui s'opposent à son action, dans les diverses parties de la voiture. Si le mouvement est constamment le même ou uniforme, ces résistances proviendront uniquement du terrain et des divers frottements, l'inertie n'y entrant pour rien (55 et 66). Si la vitesse augmente à chaque instant, l'inertie, mise en action, s'ajoutera aux résistances précédentes ; enfin si la vitesse vient à diminuer par suite d'obstacles particuliers, l'inertie, qui tend à faire persévérer la voiture dans son état de mouvement, ajoutera son action à celle du cheval, pour vaincre ces obstacles et toutes les autres résistances.

C'est encore ainsi qu'on peut expliquer le principe de l'égalité de pression des fluides (14), en vertu duquel une pression quelconque, exercée contre une portion de la surface des parois du vase qui contient de toutes parts ce fluide, est transmise également sur toutes les parties de la surface de ces parois ; car cette répartition uniforme de la pression, cette réaction réciproque des parois du vase sur le fluide et du fluide sur les parois, ne peut évidemment provenir que de l'égalité des actions et des réactions qui s'exercent entre les différentes molécules de ce fluide. On voit aussi que, si le fluide n'était pas contenu, de toutes parts, au moyen de pistons, de parois solides ou par la réaction d'autres fluides tels que l'air, etc., le principe de l'égalité des pressions n'aurait plus lieu, du moins de la même manière, attendu que la pression, exercée en un certain point de sa surface extérieure, pourrait être employée, en partie, à vaincre l'inertie du fluide et toutes les autres forces qui s'opposent directement à son mouvement, à son changement de forme. Quant au principe de la réaction, il n'en subsistera pas moins pour toutes les forces appliquées aux différentes parties de ce fluide, et toujours l'action de chacune d'elles sera égale et contraire à la réaction qu'elle éprouve en son point d'application.

69. *Observations sur l'équilibre des forces.* Il arrive quelquefois qu'on nomme *équilibre* cette action réciproque des forces appliquées à un corps, par suite de laquelle une force quelconque peut être censée vaincre ou détruire, par l'intermédiaire de ce corps, l'action de toutes les autres qu'on regarde comme étant opposées à la sienne propre : c'est ainsi qu'on dirait, par exemple, du cheval qui, dans l'hypothèse ci-dessus, traîne une voiture le long d'une route, qu'il fait équilibre à toutes les résistances qui s'opposent au mouvement de cette voiture. Mais, quand il nous arrivera, par la suite, d'employer un langage aussi général, en parlant des actions réciproques exercées par les forces sur un corps, il ne sera uniquement question que de l'équilibre de ces forces considérées en elles-mêmes, et non de celui du corps ; car, d'après les idées généralement admises, l'équilibre des corps repose sur des notions tout autres, et que nous examinerons plus tard, lorsque nous aurons à étudier les effets combinés des forces. Il ne s'agit ici que de nous entendre sur la signification attachée à certains mots ; et, loin d'avoir à nous occuper d'une telle complication d'effets, nous devons nous

borner à poursuivre l'examen du cas simple et élémentaire où une force en détruit constamment une autre qui lui est égale et directement opposée ou qui lui fait équilibre. C'est à cela, en effet, que se réduit, en définitive, l'emploi des forces motrices dans les travaux industriels.

DU TRAVAIL MÉCANIQUE DES FORCES ET DE SA MESURE.

70. *Notions générales.* Travailler c'est vaincre ou détruire, pour le besoin des arts, des résistances telles que la force d'adhésion des molécules des corps, la force des ressorts, celle de la pesanteur, l'inertie de la matière, etc. — User, polir un corps par le frottement, le diviser en parties, élever des fardeaux, traîner une voiture le long d'un chemin, bander un ressort, lancer des pierres, des boulets, etc.; c'est travailler, c'est vaincre, pendant un certain temps, des résistances sans cesse renouvelées dans la durée de ce temps.

Le *travail mécanique* ne suppose pas seulement une résistance vaincue, une fois pour toutes, ou mise en équilibre par une force motrice, mais *une résistance reproduite le long d'un chemin parcouru par le point où s'exerce cette résistance et dans la direction propre de ce chemin.* — Pour enlever une parcelle de la matière d'un corps, avec un outil par exemple, non-seulement il faut un effort directement opposé à la résistance que présente cette parcelle, mais encore il faut faire avancer le point d'action de l'outil dans la direction de la résistance : plus cet avancement sera grand, plus la parcelle enlevée aura de longueur; d'un autre côté, plus sera grande la largeur ou l'épaisseur de cette parcelle, plus la résistance ou l'effort sera considérable; l'ouvrage fait, à chaque instant, croît donc avec l'intensité de l'effort et la longueur du chemin décrit dans sa direction propre. Un raisonnement analogue est applicable à tous les travaux industriels opérés par le secours des outils et des machines.

71. *Mesure du travail quand la résistance est constante.* Supposons que la résistance soit *constante*, ou reste la *même* à chaque instant, aussi bien que l'effort qui lui est égal et directement opposé; il est clair que l'ouvrage produit et le travail seront proportionnels au chemin décrit par le point d'application de la résistance, c'est-à-

dire qu'ils seront doubles si le chemin est double, triples si le chemin est triple, etc.; de sorte que, si l'on prend *pour unité* le travail qui consiste à vaincre directement la résistance, le long d'un chemin de 1 mètre, le travail total pourra être *mesuré* par le nombre des mètres et des fractions de mètre, parcourus. Mais si pour un autre travail, il arrivait que la résistance constante fût double, triple, etc., de ce qu'elle était dans le premier, à chemin égal décrit par le point d'action de cette résistance, le travail serait également double, triple, etc., de ce qu'il était. Si, par exemple, la résistance était de 1 kilogramme dans le premier cas, et qu'elle fût de 2, de 3, de 4 kilogrammes dans le second, le travail, pour chaque mètre de distance, vaudrait 2, 3, 4 fois celui qui, à chemin égal, répond à la résistance de 1 kilogramme.

En prenant donc pour *unité de travail mécanique* celui qui consiste à vaincre la résistance de 1 kilogramme le long de 1 mètre, on voit qu'un travail quelconque, dont l'objet est de vaincre directement une résistance qui reste la même, sera mesuré par le nombre des kilogrammes qui expriment cette résistance (60), répété autant de fois qu'il y a de mètres, et de fractions de mètre dans le chemin parcouru par le point d'action de cette résistance, c'est-à-dire par le *résultat de la multiplication* de ces deux nombres. — Supposons un moteur employé à traîner un corps sur un chemin horizontal et rectiligne, par le moyen d'une corde tirée dans le sens même de ce chemin; son travail consistera uniquement à vaincre le frottement constant exercé sur le terrain, et qui lui est directement opposé: si, par exemple, la résistance occasionnée par ce frottement, sur la corde, est de $37^{\text{kil}},50$, et que le chemin total décrit, dans un certain temps, soit de 64^{m}, il est clair qu'en prenant pour unité de travail celui qui consiste à vaincre la résistance d'un kilogramme le long d'un mètre de chemin, le travail total sera mesuré par le nombre $37{,}50 \times 64 = 2400$; c'est-à-dire, en d'autres termes, que, si l'on était convenu de payer un centime, je suppose, l'unité dont il s'agit, il faudrait payer 2400^{cent} ou $24^{\text{f}},00$ le travail total.

En général, on voit que le *travail mécanique que nécessite directement une certaine résistance constante, et qui se reproduit le long d'un certain chemin, a, pour mesure, le produit de cette résistance par le chemin que décrit son point d'action, dans sa direction propre, l'unité de travail étant toujours l'unité d'effort, mesuré en poids, parcourant l'unité de chemin ou de longueur.* Nous disons *directement*, parce qu'en effet, il ne s'agit ici que du travail d'une puissance qui serait directement opposée à la résistance, et non du travail d'un moteur qui agirait d'une manière quelconque sur cette résistance (75 et 76).

72. *Mesure du travail quand la résistance est variable.* Si la résistance, ou l'effort égal et opposé qui la détruit, au lieu d'être la même à chaque instant, variait sans cesse ainsi qu'il arrive dans bien des circonstances, le travail ne pourrait plus s'évaluer comme on vient de le dire; mais, attendu que, pour chacun des espaces très-petits décrits par le point d'action, la résistance peut être censée constante et sensiblement égale à la *moyenne* ou à la *demi-somme* de celles qui répondent au commencement et à la fin de cet espace, le petit travail qui y est relatif, pourra encore se mesurer par le produit de cette résistance moyenne et de l'élément de chemin dont il s'agit. Le travail total se composant de la somme des travaux partiels, sera mesuré également par la somme de tous les petits produits analogues qui leur correspondent.

Traçons, sur un plan ou tableau (pl. I, fig. 23), une courbe $O'a'b'c'$... dont les abscisses Oa, Ob, Oc, ... représentent (51) les chemins successivement décrits par le point d'action de la résistance, et dont les ordonnées OO', aa', bb', ... représentant, d'après une échelle convenable, les résistances ou efforts correspondants censés mesurés en kilogrammes. Supposons que Oa, ab, bc... soient les espaces égaux et très-petits décrits à chaque instant. Les travaux partiels ayant pour mesure les produits de ces petits espaces par les résistances moyennes correspondantes, censées constantes pour chacun d'eux, c'est-à-dire les produits $\frac{1}{2}(OO'+aa') \cdot Oa$, $\frac{1}{2}(aa'+bb') \cdot ab$, $\frac{1}{2}(bb'+cc') \cdot bc$,.... ces travaux seront représentés (voyez, en Géométrie, le *mesurage des surfaces*) par les aires des trapèzes $OO'a'a$, $aa'b'b$, $bb'c'c$,... et le travail total le sera par la surface de tous ces petits trapèzes réunis. Or on voit, d'une part, que cette surface différera d'autant moins de la surface $OO'ab'\ldots h'hO$, comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées OO', hh' qui correspondent au commencement et à la fin du travail, et, de l'autre, que la somme des travaux partiels, représentée par cette surface, s'approchera d'autant plus d'être égale au travail total, que le nombre des ordonnées ou des espaces successifs sera lui-même plus considérable. Si donc on multiplie convenablement ce nombre des ordonnées, on pourra, sans erreur, prendre la surface $OO'a'h'hO$ pour la mesure véritable du travail effectué pendant que le point d'application de la résistance décrit l'espace Oh.

On voit, d'après cela, que, quand on connaîtra, soit au moyen de l'expérience, soit de toute autre manière, la *loi* ou la *table* (50) qui lie la résistance variable aux chemins décrits par son point d'application, toute la question, pour trouver le travail mécanique relatif à un espace quelconque parcouru, consistera à tracer la courbe de cette loi, et à calculer, par petites parties, l'aire de la surface qui répond à cette longueur de chemin. Comme les unités de longueur qui ont servi à construire les ordonnées, représentent des unités d'efforts ou de poids d'une certaine espèce, et que les abscisses sont elles-mêmes composées d'unités de longueur représentant des unités de chemin parcouru, on voit que l'*unité de surface* des trapèzes ou de leur somme totale, sera réellement l'*unité d'effort* exercé ou répété le long de l'*unité de chemin* *.

73. *Valeur de l'effort moyen.* Lorsqu'on a ainsi trouvé la valeur du travail mécanique d'une résistance variable, pour une distance quelconque parcourue par son point d'action, en divisant cette valeur par cette distance, on obtiendra ce qu'on nomme l'*effort moyen* de la résistance, ou l'*effort constant* qui, étant répété le long du chemin, produirait la même quantité de travail ; car nous avons vu (71) que, pour une résistance constante, le travail se mesure simplement par le produit de cette résistance et du chemin total décrit par son point d'application.

La considération de l'effort moyen en vertu duquel un travail est censé s'opérer, n'est pas moins importante que celle de la vitesse moyenne dans le mouvement périodique (49); car il arrive, presque toujours, que la résistance du travail ne varie qu'entre *certaines limites fixes*, plus ou moins rapprochées, ou qu'elle croît et décroît alternativement sans devenir jamais plus petite qu'une certaine quantité, ni plus grande qu'une autre quantité; d'où il résulte que le travail se fait alors par *périodes* plus ou moins régulières, et qu'il se trouve représenté par une courbe sinueuse

* Voyez, à la fin de ces PRÉLIMINAIRES, une application de ces principes et une méthode expéditive et suffisamment exacte, pour calculer directement l'aire comprise entre une courbe, deux de ses ordonnées quelconques et l'axe des abscisses.

$O'a'b'c'...h'$ (pl. I, fig. 24) dont les ondulations s'écartent très-peu, de part et d'autre, d'une droite AC *parallèle* à l'axe OB des chemins. On conçoit que, dans ces circonstances qui se reproduisent fréquemment, il devient utile de substituer, au travail variable, un travail uniforme moyen donnant les mêmes résultats, et qui ne présente point autant de complication. C'est effectivement ce qu'on ne manque jamais de faire dans les applications de la Mécanique industrielle, quand les alternatives ou les périodes de travail sont fréquemment répétées.

74. *Divers exemples du travail mécanique.* Quand un moteur est employé à bander un ressort, il développe, à chaque instant, un effort égal et directement opposé à la résistance du ressort, et qui est d'autant plus grand que son point d'application a décrit plus de chemin dans sa direction propre ; cet effort peut même se mesurer directement (60), au moyen du peson ou du dynamomètre, pour chaque position du ressort, ou pour chaque position du point d'application de la force. On pourra donc aussi, d'après la méthode précédente, tracer la courbe qui donne la loi de ces efforts, et calculer approximativement la somme des travaux mécaniques effectués à chaque instant et qui composent le travail total.

Nous avons pris pour exemples (71) le travail produit par une force qui traîne un corps le long d'un plan de la part duquel il éprouve une résistance constante, et celui qui consiste à bander un ressort dont la résistance varie à chaque instant ; mais les mêmes raisonnements, les mêmes méthodes de calcul, s'appliquent à tous les travaux des arts, qui sont *purement mécaniques,* et qui supposent *une résistance à chaque instant reproduite et vaincue dans le sens même du chemin décrit par son point d'action.* — Un cheval tire-t-il après la barre d'un manége ? un homme élève-t-il de l'eau du fond d'un puits ? un ouvrier est-il employé à scier, à raboter du bois, à limer, à polir un métal, à arrondir un corps sur le tour, etc.? la quantité de travail mécanique que nécessite directement l'ouvrage fait, sera toujours mesurée par le produit, et de la résistance opposée par la barre, par le poids de l'eau ou par la matière soumise à l'action de l'outil, et du chemin décrit par le point d'application de cette résistance, si elle est constante (71), ou par la somme des produits semblables qui mesurent les travaux partiels, si la résistance est variable (72).

75. *Observations sur le travail des moteurs.* En cherchant ainsi à apprécier, en nombre, le travail mécanique, il faudra avoir soin de ne pas confondre celui que dépense effectivement le moteur avec celui qui résulte immédiatement de l'ouvrage fait; car on conçoit qu'une partie du premier travail peut être détruite par des résistances autres que celles qui proviennent de l'ouvrage : ce n'est qu'à cette dernière résistance que s'appliquent véritablement les considérations précédentes et la mesure du travail. Plus tard nous examinerons le mode particulier de l'action des différentes forces motrices, les circonstances qui modifient les résultats de cette action, et le déchet que peut éprouver le travail de la force selon ses diverses applications.

76. *Complication de certains travaux.* Pour montrer la complication réellement inhérente à certains travaux industriels, nous prendrons pour exemple le travail du limeur : il faut 1° qu'il appuie pour faire mordre ou enfoncer la lime; 2° qu'il exerce un effort pour faire glisser la lime le long du corps ; 3° qu'il promène cette lime avec une certaine vitesse, en avant et en arrière, et que, par conséquent, il vainque l'inertie de la matière de cette lime. La quantité de l'ouvrage fait est le résultat de ces diverses actions simultanées; mais on fait disparaître toute cette complication en séparant du travail tout ce qui n'y est pas indispensable, et en ne considérant que ce qui se passe à l'endroit même où la matière du métal est enlevée par la lime : là on n'aperçoit qu'une résistance qui suppose un effort égal et contraire, exercé dans la direction même du chemin que décrit le point d'action de la lime, et dont la quantité de travail pourra s'obtenir ainsi que nous l'avons dit. Le travail du moteur serait même réduit à ce grand degré de simplicité, s'il était employé à promener, d'un mouvement uniforme, la lime le long d'une grande barre de fer couchée horizontalement sur un plan de niveau, et que cette lime eût été chargée convenablement d'un certain poids, pour la faire mordre.

77. *Spécification du travail mécanique.* En général, quand il sera désormais question, dans ces PRÉLIMINAIRES, du *travail mécanique,* on devra entendre le travail qui résulte immédiatement de l'action simple d'une force sur une résistance qui lui est directement opposée et qu'elle détruit continuellement, en faisant parcourir un certain

chemin au point d'application de cette résistance et dans sa *direction propre*. Cette force, elle-même, devra être considérée (59 et 60) comme un agent simple, produisant un effort, une pression mesurable, à chaque instant, par un poids, et agissant dans une direction et sur un point déterminés, ainsi qu'on l'a supposé constamment dans ce qui précède. Il ne faudra pas confondre enfin l'expression de *travail* et de *force*, avec celles par lesquelles on désigne vaguement tous les effets, plus ou moins compliqués, des moteurs animés ou inanimés qui développent leur action sur des résistances : ainsi nous ne parlerons pas de la force d'un cheval, d'un homme, d'un outil ou d'une machine, sans indiquer, sans sous-entendre, tout au moins, son point d'application, son intensité et sa direction; nous ne parlerons pas de leur travail mécanique, sans spécifier ou sous-entendre la résistance, égale et directement contraire, que la force détruit, à chaque instant, tout en faisant parcourir, dans la direction propre de cette résistance, un certain chemin à son point d'application.

78. *De l'élévation verticale des fardeaux.* Le travail le plus simple, celui qui donne immédiatement l'idée de sa mesure, est l'élévation des fardeaux suivant la verticale ou l'aplomb; la quantité de l'ouvrage croît alors visiblement comme le poids et comme la hauteur parcourue dans la direction de la verticale que suit ce poids, c'est-à-dire qu'il est le produit de ce poids et de cette hauteur. Car, pour répéter encore une fois nos raisonnements, en élevant à la même hauteur verticale, un poids double, triple, etc.; le travail est bien double, triple, etc., de celui qui consisterait à élever le poids simple à cette hauteur; et, en élevant un même poids à une hauteur double, triple, etc., c'est bien comme si on l'avait élevé deux, trois fois à la hautour simple, ou une première fois à cette hauteur, puis une seconde fois, une troisième fois à cette même hauteur; peu importe d'ailleurs la manière dont pourrait s'y prendre un moteur pour produire ces effets partiels, il nous suffit que, considérés en eux-mêmes, on puisse les regarder comme parfaitement égaux ou identiques. Si donc on prend, pour unité de travail, l'unité de poids élevée à l'unité de hauteur, le travail total sera mesuré par le produit du nombre des unités de poids et de celui des unités de hauteur.

79. *Des autres moyens d'évaluer le travail.* L'utilité de la mesure

que nous avons prise pour le travail, résulte de sa simplicité même, et de la facilité qu'on a d'évaluer des efforts, des pressions, en poids, et des distances, des chemins, en unités de longueur. Du reste, on pourrait, dans bien des cas, prendre la quantité même de l'*ouvrage* effectué pour la mesure du travail mécanique des forces : par exemple, on pourrait se contenter de dire, de tel moteur, qu'il est capable de moudre 1, 2, 3 kilogrammes de blé ; c'est même ainsi qu'on en agit quelquefois, et qu'en agissent les meuniers et les propriétaires de moulins, pour spécifier la valeur mécanique de ces moulins ou des cours d'eau. Mais comme un même poids de blé présente des résistances différentes à la mouture, selon sa qualité, le genre de l'outil et de la machine, non-seulement les meuniers ne pourraient être compris de tout le monde, mais ils ne pourraient pas même s'entendre entre eux : il faut donc une mesure commune et qui ne soit pas susceptible de varier ou d'être interprétée diversement ; or telle est celle qui résulte de la considération de l'effort et du chemin décrit dans la direction de cet effort.

Restera ensuite à savoir combien chaque unité de travail, ainsi définie, sera capable, dans des circonstances déterminées, de moudre de kilogrammes de blé, de scier de mètres carrés de planches, etc. ; or c'est à quoi l'on parviendra par des observations et des expériences bien faites ; l'essentiel est surtout qu'il n'y ait rien d'arbitraire dans la manière d'évaluer le travail mécanique.

80. *Dénominations admises pour le travail.* On a donné différents noms au travail mécanique, tel que nous venons de le définir dans ce qui précède, travail qu'il ne faut pas, dans tous les cas, confondre avec l'*ouvrage*, puisque ce dernier n'en est véritablement que l'effet.

Smeaton, ingénieur anglais qui a beaucoup écrit sur les roues hydrauliques, a nommé le travail *puissance mécanique ;* Carnot le nomme *moment d'activité* (*voy.* ses *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*) ; Monge et Hachette (*voy.* le *Traité des Machines* de ce dernier) l'ont appelé *effet dynamique ;* Coulomb, Navier et plusieurs autres enfin, l'ont appelé *quantité d'action,* et cette dernière expression est assez généralement en faveur. Il nous arrivera souvent d'en faire usage, mais il faudra se rappeler qu'elle signifie la même chose que *quantité de travail, travail mécanique* *.

* En adoptant cette expression, nous n'avons fait que suivre l'exemple de M. de

Quelquefois aussi on nomme le travail mécanique *quantité de mouvement;* mais, comme on emploie généralement, en Mécanique, cette expression pour désigner tout autre chose, nous ne nous en servirons jamais pour désigner le travail. Les mêmes réflexions doivent s'appliquer à la dénomination de *force vive,* mise en usage par certains auteurs ; l'une et l'autre n'indiquent que les effets du travail mécanique d'une force qui a été employée à mettre un corps en mouvement ou à vaincre son inertie (66).

Nous ferons connaître bientôt le sens qu'on attache le plus ordinairement à ces mots ; quand donc il sera question, dans un ouvrage, de quantité de mouvement ou de force vive, il conviendra de s'assurer s'il s'agit, ou non, du travail mécanique tel que nous l'avons défini.

Un des caractères distinctifs du travail mécanique, c'est qu'il est la chose qu'on paye dans l'exercice de la force, et que sa valeur, son prix en argent, croissent précisément comme sa quantité. Car, si l'on ne considère que le travail nécessité directement par la résistance à vaincre, par l'ouvrage à confectionner, il demeure, comme on l'a vu précédemment, exactement proportionnel à la quantité de ce dernier. Mais, redisons-le, ce qui le distingue surtout des autres grandeurs mécaniques, c'est qu'il suppose une résistance, exprimable en poids, à chaque instant vaincue et reproduite, dans le sens même d'un certain chemin parcouru.

81. *Choix de l'unité de travail.* Le travail mécanique, ainsi défini et entendu est donc, en lui-même, une chose absolue, qui ne suppose que l'idée d'un effort exercé et d'un chemin parcouru ; mais son expression, en nombres, peut changer selon les circonstances et les conventions admises pour l'unité de chemin ou d'effort, et aussi selon que le travail est ou n'est pas continué uniformément pendant un certain temps. Car, d'une part, l'unité de chemin et l'unité d'effort étant tout à fait arbitraires, l'unité de travail qui en dérive, l'est aussi ; et, de l'autre, si le travail est longtemps continué d'une manière à peu près uniforme, son expression, en nombres,

Coriolis, savant ingénieur des ponts et chaussées, qui a écrit sur les applications de la Mécanique, et qui s'en sert dans les répétitions qu'il donne aux élèves de l'École polytechnique. Elle offre l'avantage particulier de se définir en quelque sorte par elle-même, et d'être d'une grande simplicité.

peut devenir embarrassante par sa longueur ; de sorte qu'on se voit alors obligé, pour la simplicité, de ne considérer qu'une certaine fraction du travail total, relative à la durée d'un certain temps, qu'on prend à son tour pour unité. C'est de cette manière que l'idée du temps est introduite dans la notion du travail mécanique, bien que, envisagé sous un rapport plus absolu, ce dernier en soit véritablement indépendant : c'est ainsi, par exemple, qu'on dit d'un cheval attelé à une voiture, à un manége, qu'il exerce *moyennement* (73) un effort de tant de kilogrammes en parcourant un chemin de tant de mètres par minute ou par seconde, et d'un outil, d'une machine, qu'ils développent moyennement une telle quantité de travail dans tel temps. Mais alors il convient de ne pas oublier la durée effective du travail total en ajoutant, par exemple, qu'il est de tant d'heures pour chaque jour, chaque relais, etc.

On conçoit, d'après cela, quelle est la difficulté de choisir une unité de travail qui puisse servir dans tous les cas possibles et avec un égal avantage : tantôt l'expression du travail, en cette unité, se trouvera composée d'un très-grand nombre de chiffres entiers; tantôt elle exigera, pour la précision, un très-grand nombre de chiffres décimaux ; tantôt enfin elle devra être accompagnée de la désignation du temps auquel elle se rapporte, lorsque le travail, étant continué uniformément pendant un ou plusieurs jours, on n'en considérera, pour la simplicité des calculs, qu'une certaine partie relative à l'unité de temps.

82. *Unités de travail proposées ou adoptées.* Les mécaniciens sentant l'importance de fixer une unité de travail et de lui donner un nom, comme on l'a fait pour le *gramme*, le *litre*, etc., en ont proposé de diverses espèces ; mais on n'est point, jusqu'à présent, tombé d'accord sur le choix de cette unité, et il est probable qu'on ne le sera pas plus pour cet objet que pour désigner l'unité de vitesse, qui dépend à la fois de l'unité de temps et de l'unité de longueur. — MM. Mongolfier, Hachette, Clément, etc., ont pris, pour cette unité, 1 mètre cube d'eau ou 1000 kilogrammes élevés à 1 mètre de hauteur, et ils ont nommé cette unité, *unité dynamique*, *dynamie*. M. Dupin, de son côté, a proposé (*voy.* ses *Leçons de Géométrie et de Mécanique*, tome III, *Dynamie*) 1000 mètres cubes d'eau ou 1000 *tonneaux* (31) élevés à 1 mètre de hauteur, et il a supposé que ce travail, qu'il nomme *dyname*, s'opérait dans les 24 heures. Mais

aucune de ces unités n'a été définitivement, ni spécialement adoptée dans l'industrie manufacturière.

Enfin, depuis que les machines à vapeur commencent à se répandre en France, les mécaniciens constructeurs emploient assez généralement, d'après l'exemple des Anglais de qui nous viennent ces machines, une unité de travail qu'ils nomment *force, pouvoir de cheval,* ou simplement *cheval-vapeur.* La force du cheval n'a pourtant rien de bien défini, elle varie suivant une infinité de circonstances, suivant l'âge et la qualité des individus; si seulement on s'entendait sur sa valeur *fictive,* et si le gouvernement la consacrait par une loi comme les autres unités de mesure, on pourrait, sans inconvénient, s'en servir comme de terme de comparaison pour tous les travaux mécaniques des machines et des moteurs, qui sont continués d'une manière uniforme et pendant un certain temps; mais il n'en est pas ainsi. Toutefois la valeur qui paraît le plus généralement accréditée, d'après Watt et Boulton, soit en Angleterre, soit en France, et que les Anglais nomment pour cette raison *unité routinière,* s'écarte fort peu du travail mécanique qui suppose un effort de 75 kilog. exercé le long du chemin de 1 mètre, censé parcouru uniformément dans chaque seconde. Telle est du moins l'idée qu'on peut prendre de sa valeur approximative dans l'industrie manufacturière; car, s'il est des constructeurs qui adoptent, pour l'effort constamment exercé, 80 kilog., il en est d'autres aussi qui ne le supposent que de 70 kilog. seulement; de sorte que l'effort de 75 kilog., équivalant aux $\frac{3}{4}$ du quintal métrique, est véritablement un terme moyen qui diffère rarement de plus du $\frac{1}{15}$ de la valeur admise, dans les divers cas, par les parties directement intéressées.

83. *Conventions générales.* Sans rejeter précisément aucune des dénominations et des évaluations précédentes de l'unité de travail, lesquelles peuvent avoir leur avantage particulier dans certaines circonstances, nous prendrons le plus communément pour unité d'effort le *kilogramme,* et pour unité de distance le *mètre;* de sorte que l'unité de travail mécanique ou d'action sera l'effort de 1^{kil} exercé le long du chemin de 1^{met}, quantité qu'avec M. Navier, nous représenterons ainsi $1^{k \times m}$ ou $1^{k.m}$ ou enfin 1^{km}, et qui se lit ordinairement *un kilogramme élevé à un mètre de hauteur;* parce qu'on rapporte volontiers tous les travaux mécaniques à celui qui consiste dans l'élévation verticale des corps pesants, l'effet produit ou l'ou-

vrage fait étant alors (78) la mesure même du travail. — Supposons, par exemple, un effort moyen ou constant (73) de 225^{kil} soutenu le long du chemin de 7 mètres, le travail qui en résulte aura pour valeur $225^{k} \times 7^{m} = 1575^{km}$, c'est-à-dire 1575 kilog. élevés à la hauteur de 1 mètre. Cette phrase étant un peu longue à lire, et rappelant d'ailleurs l'idée d'un travail particulier, qu'il n'est pas indispensable d'exprimer, nous conviendrons de nommer simplement *kilogrammètre* chacune des unités 1^{km} ; de sorte que le travail ci-dessus équivaudra à 1575 kilogrammètres.

Cette dernière convention et celle qui consiste à placer l'indice ^{km} à droite et un peu au-dessus du nombre qui exprime la grandeur du travail, peuvent s'étendre à toutes les hypothèses que, selon les cas, on se croirait obligé de faire sur la valeur de l'unité de travail ou des unités d'effort et de chemin. — S'agit-il d'unités de travail dont chacune équivaut à 100, à 1000 kilog. élevés à un mètre, c'est-à-dire à un *quintal métrique*, à un *tonneau* (31), élevés à 1^{met}, on pourra les écrire ainsi 1^{qm}, 1^{tm}, et les nommer *quintalmètre, tonneaumètre;* par quoi l'on devra toujours entendre qu'il est nécessairement question de quintaux métriques et non des anciens quintaux. — S'agit-il d'unités dont chacune équivaut à 1 livre, à 100 livres élevées à 1 pied, à 1 toise de hauteur, on pourra les écrire 1^{lp}, 1^{lt}, 1^{pq}, 1^{qt}, et les nommer respectivement *livrepied, livretoise, quintalpied, quintaltoise ;* bien entendu qu'alors tout se rapporte à l'ancienne division des unités de poids et de longueur, appliquée soit aux anciennes valeurs de ces unités, soit aux nouvelles valeurs appelées, dans le commerce, *légales* ou *métriques* (31).

84. *Observations particulières.* Il serait inutile de s'occuper des unités de travail, telles que celle qui consisterait dans l'élévation de 1^{kil} à 1000^{met} ou à 1 kilomètre, par exemple ; car, d'après nos principes, cette unité est la même que celle qui équivaut à 1^{tm} ou au tonneaumètre, c'est-à-dire à 1000^{kil} élevés à 1^{met}. On n'éprouvera donc aucune difficulté à exprimer numériquement et à dénommer la valeur d'un travail quelconque, quelle qu'en soit la grandeur et quelles que soient les conventions qu'on adopte pour l'unité ; en spécifiant ensuite, si cela est nécessaire (81) et conformément à ce qui a été dit ci-dessus, le temps pendant lequel ce travail s'opère, on aura une idée complète de sa valeur. C'est ainsi, par exemple, que le travail du cheval-vapeur, *en une seconde,* pourra

être indifféremment représenté par 75^{km} (75 *kilogrammètres*), ou par 450^{lp} (450 *livrepieds*), la livre et le pied étant ici la nouvelle livre et le nouveau pied, adoptés légalement en France et dont l'un vaut le tiers de mètre et l'autre le demi-kilogramme. Si d'ailleurs on voulait simplifier encore davantage l'expression du travail quand elle dépend, comme ci-dessus, de l'unité de temps, on pourrait écrire les nombres en cette manière : $4500^{km'}$, $27000^{lp'}$, ou $75^{km''}$, $450^{lp''}$, selon qu'il s'agirait de la *minute* ou de la *seconde*.

Il arrive assez ordinairement que, pour les travaux soutenus des moteurs, on ne considère ainsi que la longueur du chemin décrit pendant la seconde, prise pour unité de temps, afin d'avoir de petits nombres à considérer. Cette longueur étant aussi celle qu'on adopte le plus volontiers (48 et suiv.), pour exprimer la vitesse même du mouvement, on voit que le travail, pendant l'unité du temps, se trouve réellement mesuré par le produit d'un effort ou d'un poids et d'une vitesse. C'est, comme nous le verrons un peu plus loin, ce qui fait quelquefois confondre (80) le *travail mécanique* ou la *quantité d'action* avec la *quantité de mouvement*, quoique leurs significations et leurs mesures soient, dans le fond, très-différentes.

DES CONDITIONS DU TRAVAIL MÉCANIQUE.

85. *Première condition générale.* D'après nos définitions, le travail mécanique des forces suppose à la fois une résistance vaincue et un chemin décrit dans la direction de cette résistance ; d'où il résulte que, dès qu'il n'y a pas de résistance vaincue ou de chemin décrit, il n'y a pas non plus de travail mécanique. Mais il n'en faudait pas conclure, à l'inverse, qu'il y a nécessairement travail toutes les fois qu'une puissance exerce, d'une manière soutenue et pendant un temps plus ou moins long, un effort dans la direction du chemin parcouru par son point d'application; car il faut encore que le mouvement actuel de ce point ne soit pas indépendant de l'action de la force motrice et de la résistance, ou que ces forces puissent être considérées comme la cause directe et nécessaire qui modifie ou qui entretient le mouvement. Sans cette condition, en effet, il n'y aurait point de travail produit, et tout se réduirait, de la part du moteur, à exercer un certain effort, pendant le temps même où il serait entraîné, avec

la résistance, dans le mouvement général et indépendant de sa propre action.

Nous savons bien, par exemple, que la terre tournant sans cesse sur elle-même, et entraînant avec elle les corps placés à sa surface, on n'y peut exercer un effort quelconque, sans qu'en même temps le point d'application de cet effort ne décrive continuellement un certain chemin dans l'espace absolu (46). Or, il est évident en soi que, si le point d'application du moteur et de la résistance reste en repos par rapport aux objets environnants qu'on regarde comme fixes, il n'y a pas eu véritablement de travail produit : c'est qu'en effet le mouvement de transport général de la terre est indépendant de l'action de ces forces, et n'en continue pas moins quand cette action cesse.— Un homme qui, placé dans une voiture ou sur un bateau, tirerait sur un point fixe, c'est-à-dire fermement attaché à cette voiture, à ce bateau, ne travaillerait pas davantage ; et il en serait de même de deux hommes qui se tireraient, sur cette voiture, ce bateau, sans bouger de place, sans s'entraîner réciproquement ; car le mouvement de la voiture et du bateau étant indépendant de leur propre action, ils ne dépenseraient, en eux-mêmes, rien pour l'entretenir.

Mais si, dans ces divers cas, l'obstacle ou le point d'application des forces égales et opposées, venait à céder à leur action, en décrivant un certain chemin dans le sens même de cette action, indépendamment de celui qui résulte du transport général, alors il y aurait un travail produit, mesurable, à chaque instant, par le résultat de la multiplication de l'effort exercé et du petit chemin relatif décrit par le point d'application de cet effort, c'est-à-dire du chemin décrit par rapport aux objets qu'on peut regarder comme immobiles sur la terre, sur la voiture ou sur le bateau.

86. *Seconde condition générale.* Ceci étant entendu une fois pour toutes, et le chemin que l'on considère dans la mesure, en nombres, du travail mécanique, étant le chemin relatif véritable en vertu duquel ce travail s'opère, on conclut naturellement, des procédés par lesquels on obtient (71 et 72) cette mesure, d'une part qu'elle sera nulle en elle-même, toutes les fois qu'il en sera ainsi de l'un quelconque des facteurs dont elle se compose ; et, de l'autre, que ce serait fort mal estimer la valeur purement mécanique, le pouvoir de production d'une machine, d'un moteur

quelconque, que de se borner, comme on le fait quelquefois, à tenir compte simplement, ou de la grandeur de l'effort dont ils sont capables en certains points, ou de la vitesse que possèdent, de la longueur d'espace que parcourent, dans un temps donné, leurs diverses parties; qu'en un mot, sous le point de vue qui nous occupe, la grandeur de l'*effort absolu*, ou du plus grand effort que les moteurs peuvent exercer sans faire mouvoir sensiblement leur point d'application, n'est pas plus un signe de leur puissance de travail, que ne le sont et la *vitesse* et le *chemin absolus*, la plus grande vitesse et le plus grand chemin qu'ils peuvent prendre ou parcourir, sans exercer d'effort dans la direction propre de cette vitesse ou de ce chemin.

87. *Réflexions sur le travail des moteurs animés.* Ainsi, par cela seul qu'un homme, un cheval marcheraient plus ou moins longtemps et avec une vitesse plus ou moins grande, sur un chemin horizontal, nous ne dirons pas qu'ils travaillent; nous n'en conclurons pas même que ce seraient de bons travailleurs, qu'ils produiraient beaucoup d'ouvrage, si on les appliquait à une machine, à une charrue ou à un outil quelconque. Pareillement encore, de ce qu'un homme, un cheval seraient capables de soutenir, en repos, contre l'action de la pesanteur, un poids plus ou moins considérable; de ce que tirant, au moyen de traits, un obstacle qui reste fixe, ils seraient capables de bander ces traits avec un effort plus ou moins grand, on n'en saurait conclure qu'ils développent beaucoup de travail mécanique, qu'ils sont bons travailleurs, ni qu'ils seraient capables de produire d'une manière soutenue, une grande quantité d'ouvrage, si l'obstacle venait à cheminer tout en résistant à leurs efforts.—Ainsi l'*Hercule du Nord*, tant vanté pour sa force prodigieuse, n'eût probablement pas, dans un travail réellement utile et longtemps continué, pu soutenir le parallèle avec un de nos bons manœuvriers ordinaires; ainsi les coureurs, les coursiers qui franchissent si rapidement de longs espaces, seraient généralement peu capables, sous d'autres rapports, de rendre les services d'un homme moins agile, d'un coursier moins rapide, mais bons travailleurs.

Il est tellement vrai qu'exercer un effort ou soutenir un fardeau sans se mouvoir, ce n'est pas proprement travailler, qu'on peut toujours alors remplacer un moteur par un corps inerte, tel qu'un *support*, une *colonne*, un *trait*, un *tirant*, etc.; et il ne l'est pas moins de dire que le mouvement, sans effort exercé, sans résistance vaincue, ne peut constituer un véritable travail, puisqu'en vertu de l'inertie de la matière (55), le mouvement une fois acquis se continue, de lui-même, indéfiniment et sans perte si, comme on le suppose, rien d'extérieur ne tend à le modifier, à le ralentir.

88. *Distinction du travail intérieur et du travail extérieur.* Malgré ces réflexions sur la nullité du travail mécanique produit par les moteurs dans les circonstances précitées, on remarquera que chacun de ces emplois de la force peut quelquefois avoir son genre particulier d'utilité dans les arts, surtout relativement aux moteurs animés, et qu'on peut même, sous certains rapports, les considérer comme une sorte de travail dès lors qu'ils produisent la fatigue, et qu'ils supposent des *résistances intérieures* sans cesse renouvelées et vaincues; mais il ne s'agit ici expressément que du travail *extérieur* et *effectif* des moteurs, travail qui est le *résultat* d'actions plus ou moins compliquées qui ne peuvent être aucunement l'objet de nos investigations (75 et suiv.). Or ce travail extérieur doit être considéré comme nul, sous le point de vue purement mécanique et dans les circonstances qui viennent d'être spécifiées; de la même manière que nous regarderions comme nul le travail d'une machine qui marcherait *à vide*, c'est-à-dire dont l'*outil* ne rencontrerait point de résistance, ne confectionnerait point d'ouvrage, ou celui d'une machine dont l'outil, soumis à une trop forte résistance, ne pourrait marcher malgré l'action des forces motrices qui y sont appliquées; et, en effet, le cas est tout à fait semblable, attendu qu'ici la puissance n'en a pas moins consommé, comme on va le voir, ou n'en consomme pas moins une certaine quantité de travail pour vaincre les résistances intérieures et inhérentes aux pièces de la machine.

89. *Tout mouvement, toute action des forces supposent un travail.* Si nous considérons les choses sous un point de vue plus rigoureux encore et plus absolu, nous arriverons à reconnaître qu'il n'y a point d'action sans effet plus ou moins sensible, et d'effet sans dépense de travail plus ou moins appréciable.

D'une part, les corps ne pouvant se mouvoir, sur notre globe, sans éprouver tout au moins une certaine résistance (3) de la part de l'air, et ne pouvant sortir du repos sans que leur inertie ne se soit d'abord opposée (66) à l'action de la puissance, on voit qu'en résultat, le mouvement, de quelque nature qu'il puisse être à la surface de la terre, suppose toujours une certaine quantité de travail, soit actuellement, soit primitivement dépensée par un moteur.

D'une autre part, puisque tous les corps sont plus ou moins compressibles et extensibles, une force motrice ne peut jamais agir, même contre des obstacles fixes, sans produire et dépenser une certaine quantité de travail mécanique. Car le point où cette force est appliquée a plus ou moins cédé (63); le corps a plié, s'est aplati, ou s'est allongé; les ressorts moléculaires ont opposé de la résistance, il y a eu un petit chemin décrit par le point d'application de la force et dans sa direction propre. D'abord l'effort, ou la résistance égale et contraire (64), étaient nuls; ensuite ils ont augmenté progressivement jusqu'à ce qu'ayant atteint leur valeur *maximum*, leur plus grande valeur, et le corps sa plus grande déformation possible, l'action de la force motrice s'est réduite à maintenir le corps ou l'obstacle à son état de tension et au repos, sans produire désormais aucun travail mécanique.

90. *Quand et comment ce travail peut être censé nul.* Nous venons de prouver que tout mouvement acquis, toute action des forces sur les corps supposent ou nécessitent réellement une certaine dépense de travail. Mais, attendu que la résistance opposée par l'inertie d'un corps, dans son passage de l'état de repos à celui de mouvement, et la résistance que présente sans cesse l'air à ce mouvement, exercent, comme nous le verrons bientôt, une influence très-faible toutes les fois que la vitesse n'est pas fort grande, ou ne surpasse pas 5 à 6 mètres en une seconde par exemple, ce qui est bien le cas des moteurs ordinaires; et, attendu d'ailleurs que les corps qui reçoivent ou transmettent directement l'action des forces, sont généralement (65) assez résistants, assez roides pour ne pas fléchir d'une manière sensible sous cette action, on conçoit que, dans la plupart des cas, le travail effectif, ainsi développé par le moteur, sera une fraction très-petite de celui qu'il pourrait produire si le mouvement était moins prolongé ou moins rapide, ou si l'obstacle, tout en opposant une certaine résistance, cheminait de façon que l'espace décrit devînt très-grand par rapport à celui qui résulte de la simple déformation de cet obstacle,

Or, c'est sous ce rapport seulement, et quelquefois aussi sous celui de la *non-utilité* des résultats, que, dans la pratique, il est permis, selon les cas, de ne point tenir compte du travail extérieurement développé par les moteurs, ou même de le considérer comme entièrement nul et inutile; car, sous le rapport purement mécanique, il va sans dire (85 et 86), qu'exercer un effort, sans le répéter le long d'un chemin, ou cheminer sans exercer d'effort, ce n'est point travailler.

91. *Action d'une force perpendiculaire au mouvement.* Des réflexions analogues sont applicables toutes les fois qu'une force, agissant en un certain point d'un corps en mouvement, ce point ne cède pas sensiblement à l'action de la force et dans sa direction propre, vu que le chemin qu'il est contraint de décrire, par suite de sa liaison avec d'autres corps, demeure, à chaque instant, perpendiculaire à la direction de la force. Celle-ci ne faisant donc que comprimer inutilement le corps, et ne produisant aucun travail effectif dans le sens du mouvement, sa quantité de travail ou d'action devra encore être censée nulle, tout comme pour le cas d'un moteur qui agit sur un obstacle fixe. — Un homme qui tirerait ou pousserait sur le côté d'une voiture en mouvement et perpendiculairement au chemin qu'elle décrit, n'aiderait en rien le travail des chevaux; son effet serait absolument nul quant à l'*objet utile* du travail. La même chose pourrait se dire à l'égard d'un homme qui tirerait ou pousserait contre la barre d'un manége, dans le sens de la longueur de cette barre et non dans celui de son mouvement circulaire, etc. Cependant le moteur n'en aurait pas moins, dans ces deux cas, réellement dépensé et développé une certaine quantité d'action, en comprimant ou distendant le corps auquel il est appliqué.

92. *Transport horizontal des fardeaux.* Enfin c'est encore là le cas d'un homme ou d'un animal quelconque qui chemine horizontalement en portant un fardeau; car l'action du poids est perpendiculaire à celle du chemin; elle ne tend qu'à comprimer les parties sur lesquelles ce poids repose; il n'y a pas sensiblement (89) de résistance vaincue, et par conséquent de travail produit dans le sens du mouvement horizontal du point où agit le fardeau, bien que le moteur se fatigue; bien qu'il développe intérieurement une certaine quan-

tité de travail; bien qu'enfin le transport horizontal d'un fardeau ait en lui-même un but d'utilité dans les arts, et qu'il puisse, sous un certain rapport, être considéré comme un travail d'une espèce particulière, tout à fait distincte, et qui, comme l'autre, a son unité de mesure, son prix en argent.

Le transport horizontal des fardeaux, par les moteurs animés est, au surplus, le seul ouvrage dont la mesure ne puisse se rapporter directement à celle que nous avons jusqu'ici adoptée; et cela seulement en tant qu'il ne suppose pas, en lui-même, une résistance vaincue dans le sens propre du mouvement, et que le corps est immédiatement supporté par le moteur; car lorsqu'un moteur est employé à traîner un corps horizontalement sur un traîneau, une voiture ou un bateau, il se développe, de la part du terrain, des essieux de la voiture ou du fluide, des résistances qui s'opposent directement à l'action de ce moteur, et qui nécessitent une dépense plus ou moins forte de travail mécanique effectif et mesurable comme il a été expliqué précédemment (71 et 72). Aussi faudra-t-il bien se garder, par la suite, de confondre ce dernier travail avec le premier, et de lui supposer la même unité de mesure ni la même valeur en argent.— L'expérience prouve, par exemple, qu'il est plus facile à un homme de transporter à dos et à 6 lieues de distance horizontale, un corps qui pèse 50 kilogrammes, que d'exercer, d'une manière soutenue et le long du même chemin, un effort de 10 kilogrammes seulement.

93. *Observations sur le transport horizontal.* On voit, d'après cela, quelle serait l'erreur que l'on commettrait si, voulant, par exemple, estimer le travail mécanique nécessaire pour transporter, sur un chemin horizontal, un fardeau par le moyen d'une voiture, on se contentait de multiplier le poids de ce fardeau et de cette voiture par le chemin décrit, ou si l'on confondait l'effet utile, l'ouvrage avec le travail mécanique même que développe le moteur, par l'intermédiaire des traits. On n'en a pas pas moins nommé, d'après notre célèbre ingénieur Coulomb, qui a fait beaucoup d'expériences sur le travail de l'homme considéré dans diverses circonstances, on n'en a pas moins nommé *quantité d'action* le travail qui consiste à transporter directement un corps sur un chemin horizontal. Et, non-seulement on a mesuré ce travail par le produit du poids supporté par le moteur et du chemin qu'il décrit ho-

rizontalement, à peu près de la même manière que nous avons mesuré le travail mécanique véritable par le produit de l'effort et du chemin décrit dans le sens de cet effort; mais encore on a quelquefois comparé entre eux ces deux genres de travaux, d'autant plus distincts, que l'un est absolument nul à l'égard de l'autre, ainsi que nous l'avons expliqué ci-dessus.

Mais ce qui prouve incontestablement que, sous le point de vue purement mécanique, et lorsqu'on n'a point égard au mode particulier d'agir des moteurs animés, lesquels peuvent se fatiguer sans absolument rien produire d'extérieur, ce qui prouve, disons-nous, que le transport horizontal des corps ne suppose pas en lui-même une dépense nécessaire de travail mécanique, c'est qu'on peut diminuer indéfiniment cette dépense par des appareils ou des dispositifs matériels convenables, tels que des voitures, des bateaux, des chemins de fer, etc. *, qui ont la propriété de diminuer l'effet des résistances de toute espèce; c'est qu'on peut même le concevoir indépendamment de ces résistances, tandis que tous les autres genres de travaux industriels, analogues à ceux qui ont été cités nos 70 et suivants, exigent nécessairement une certaine dépense de travail mécanique; c'est qu'enfin le résultat de ce transport horizontal ne peut jamais être directement la source d'un nouveau travail, tandis que cela arrive très-souvent pour l'autre, comme on aura bientôt occasion de le voir.

94. *Réflexions générales.* En général, et il faut bien le redire encore (75 et 77), nous ne considérons le travail mécanique que par rapport à lui-même, c'est-à-dire d'une manière absolue et indépendamment du degré de fatigue qu'il suppose de la part des moteurs animés, ou des circonstances qui, dans les arts, font varier son emploi, son prix ou sa valeur en argent. Et, quoiqu'il puisse bien arriver, par exemple, que telle quantité de travail mécanique,

* En effet, on sait par expérience qu'un cheval marchant au pas, ne peut porter à dos qu'environ 80 kilogrammes de poids, sur un chemin horizontal et d'une manière soutenue, tandis que, sans se fatiguer davantage, il peut transporter jusqu'à 1000 kilogrammes sur une bonne route ordinaire et au moyen d'une voiture; qu'il en peut transporter 10 000 sur un chemin de fer, et jusqu'à 20 000 sur un canal horizontal. Enfin, en plaçant le fardeau sur des rouleaux convenablement disposés, il pourrait, comme nous le verrons plus tard, en transporter bien davantage encore. Il est évident qu'il n'y a aucun moyen pareil de diminuer le travail nécessaire pour élever verticalement les corps contre l'action de la pesanteur, ou pour changer la forme même de ces corps, etc.

employée par un moteur à élever verticalement un corps à une certaine hauteur, coûte plus ou moins de fatigue et d'argent, que la même quantité de travail employée à transporter horizontalement, sur une voiture, un autre corps à une certaine distance, nous n'en regarderons pas moins ces quantités comme rigoureusement égales; parce qu'en effet on peut, à l'aide de machines, d'appareils convenables, transformer immédiatement l'une de ces opérations en l'autre, et que c'est même là l'objet de la Mécanique industrielle, telle que nous l'envisageons plus spécialement dans cette première partie du Cours.

Cela ne nous empêchera pas, un peu plus tard, de revenir sur tout ce que nous aurons fait, et d'établir, d'après les données de l'expérience, la comparaison exacte entre les divers genres de travaux des machines et des moteurs animés ou inanimés. Que si d'ailleurs nous sommes entrés aussi avant dans les discussions précédentes, c'est afin de bien préciser le point de vue sous lequel nous prétendons envisager le travail mécanique des forces, et d'éviter qu'on ne le confonde avec les autres résultats de l'exercice de ces forces.

DE LA CONSOMMATION ET DE LA REPRODUCTION DU TRAVAIL.

95. *Consommation inutile du travail.* Ces réflexions, ces discussions, au surplus, ne sont pas en elles-mêmes sans importance; car elles nous avertissent, d'une part, que si les moteurs animés peuvent se fatiguer sans produire de travail effectif, d'une autre, ces moteurs et les forces motrices en général, peuvent aussi travailler, et développer une certaine quantité d'action, sans produire d'effet appréciable, ou d'effet véritablement utile et qui contribue à augmenter celui qu'en définitive, il est question de produire : c'est ce qui a lieu (91), par exemple, quand le moteur agit perpendiculairement au chemin décrit par son point d'application. Mais, comme la plupart des travaux industriels ne s'effectuent que par l'intermédiaire des diverses pièces, des divers agents matériels qui constituent les outils, les machines, et que ces pièces ne peuvent opérer sur la résistance ou transmettre le mouvement et la force, sans être comprimées ou distendues, on aperçoit de suite que, même lorsque le point d'application de la force motrice est mis en mouvement dans la direction propre de cette force, il doit d'abord se

dépenser une certaine quantité de travail, pour amener les pièces au degré de tension relatif à la plus grande intensité de l'action, ou à l'état régulier du travail et du mouvement. Or il pourra arriver que ce premier travail de la puissance soit totalement perdu si, l'action de celle-ci venant à diminuer ou à cesser, les corps conservent la forme qu'ils ont acquise par suite du travail; c'est-à-dire, s'ils ne sont pas élastiques (19), ou, plus généralement encore, si les ressorts moléculaires (63) en se débandant, ne contribuent pas à accroître le travail, à l'instant où l'action de la puissance cesse, comme ils ont contribué à l'amoindrir, lorsqu'ils ont été primitivement bandés par l'effet de cette action.

On conçoit même que, si l'action du moteur, ou celle de la résistance produite par le travail, varie d'une manière irrégulière, c'est-à-dire si elle a de fréquentes *intermittences* ou interruptions, de telle sorte que tantôt elle devienne plus faible, tantôt plus forte; que tantôt elle s'exerce dans un sens, tantôt dans un sens contraire; qu'en un mot, si les corps sont souvent comprimés, puis distendus, la perte de travail pourra, à la longue et surtout quand les efforts exercés seront considérables, devenir très-comparable au travail total de la puissance; ce qui n'aurait pas lieu, si l'action de cette dernière était constamment la même, ou si elle ne variait seulement qu'aux reprises et aux cessations complètes du travail.

96. *Moyens d'éviter la consommation inutile du travail.* Ces réflexions nous font déjà entrevoir tout l'avantage qu'il y a d'éviter, dans les machines, les *chocs* ou secousses qui développent des pressions considérables; de régulariser l'action des forces elles-mêmes et le mouvement des pièces qui la transmettent, quand il s'agit de leur faire opérer, d'une manière continue, un travail industriel quelconque; d'employer enfin, pour ces pièces, des corps en même temps roides et élastiques; c'est-à-dire très-peu susceptibles de changer de forme sous l'action des forces, et capables, quand cette action cesse, de reprendre leur forme primitive, sans avoir subi aucune altération moléculaire ou intime (20); car cette altération est la cause finale de la *déperdition* ou de la consommation inutile du travail.

Voilà précisément pourquoi on préfère généralement, dans la construction des machines, se servir de roues qui tournent uniformément autour d'axes fixes, pour recevoir et communiquer le mouvement ou même pour servir d'outils ; car, d'après la petite étendue des ateliers consacrés aux travaux de l'industrie, le mouvement uniforme et longtemps continué est impossible pour les pièces qui sont assujetties à décrire des lignes droites. Voilà pourquoi aussi on se sert, pour travailler les bois, les métaux, etc., de marteaux, de burins, de couteaux, de limes, de ciseaux, de scies en acier trempé, et dont les dimensions, les proportions sont tellement combinées, qu'ils fléchissent en réalité très-peu sous l'action des forces qui les mettent en jeu, et des résistances qu'ils doivent vaincre. Car, non-seulement des outils en fer doux, en cuivre, en plomb, travailleraient fort mal, non-seulement ils exigeraient de fréquentes réparations, mais encore ils consommeraient ou absorberaient, en pure perte, une grande quantité de travail mécanique, sans produire beaucoup d'ouvrage. Or ces réflexions sont d'autant plus importantes, qu'elles s'appliquent à tous les outils employés dans les arts, si ce n'est à ceux pour lesquels un certain degré de flexibilité est une qualité essentielle, tels que les *spatules*, les *pinces*, les *ressorts*, etc.; encore faut-il que la matière de ces outils soit suffisamment résistante ou *dure*, en elle-même, pour ne pas s'user aisément, et qu'elle soit assez élastique pour ne pas perdre promptement sa forme.

97. *De la reproduction du travail par les ressorts.* Pour démontrer clairement comment le ressort des corps peut développer ou restituer, lors du débandement, une certaine quantité de travail mécanique qu'il a primitivement absorbée, il ne s'agit que de voir ce qui se passe à l'instant où un corps revient progressivement à sa forme primitive après avoir été comprimé, et se rappeler ce que nous avons dit précédemment (72 et suiv.) sur la manière de mesurer la quantité de travail d'une force qui varie à chaque instant.

Supposons qu'un moteur soit employé à bander un ressort quelconque (pl. I, fig. 25), en développant, sur un même point A de ce ressort, et dans la direction propre du chemin que tend à décrire ce point, des efforts F qui sont de plus en plus grands (15 et 89) à mesure que la compression ou la distension augmentent ; formons, comme nous l'avons expliqué (72), une courbe $Oa'b'c'\ldots$ (pl. I, fig. 26), dont les abscisses représentent les chemins successivement décrits, par le point d'action A (fig. 25) de la force F, dans la direction propre de cette force, et dont les ordonnées représentent les valeurs, en kilogrammes, des efforts correspondants exercés sur le ressort, efforts que détruit la réaction égale et directement contraire de ce ressort ; la quantité de travail développée ou absorbée, pour un petit chemin quelconque *cd* (fig. 26), sera mesurée (72) par le trapèze *cc'd'd* formé sur ce chemin et les ordonnées correspondantes *cc'*, *dd'*, et le travail total le sera par l'aire entière O*d'h'h*O comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la dernière ordonnée *hh'*, représentant le plus grand effort.

Supposons maintenant que le ressort (fig. 25), arrivé à cette position, soit employé à vaincre une résistance qui cède à son action dans la direction même du chemin primitivement décrit par le point d'application A de la force F ; ce ressort va développer, contre la résistance, une quantité de travail qu'on pourra calculer en appréciant, en poids, les diverses pressions qui correspondent à chaque position du ressort, depuis l'instant où la compression est la plus forte, jusqu'à celui où elle est nulle, et où le ressort est parvenu à la position qu'il peut conserver par lui-même. Si le corps reprend, à ce dernier instant, exactement la forme qu'il avait avant d'être bandé ; si d'ailleurs les pressions qui répondent aux mêmes degrés de tension, aux mêmes positions, sont les mêmes ; si en un mot, le corps possède, dans son retour vers sa forme primitive, la même énergie qu'auparavant, ce qui suppose nécessairement qu'il soit parfaitement élastique, et que sa constitution intime n'ait pas été altérée ; dans ces circonstances, disons-nous, la quantité de travail produite par le débandement du ressort contre la résistance, sera nécessairement égale à celle qu'il a fallu dépenser primitivement pour le bander, puisque la courbe, qui donne la loi des pressions et des espaces décrits, sera la même de part et d'autre. Si, au contraire, le corps n'est pas parfaitement élastique, non-seulement il ne reviendra pas à sa première forme, mais aussi les pressions seront moindres dans le débandement ; le travail restitué sera aussi moindre que celui qui a été d'abord dépensé, et une certaine portion de ce dernier sera, comme nous l'avons déjà avancé ci-dessus (95), totalement perdue pour l'effet : c'est évidemment celle qui est nécessaire pour produire les altérations moléculaires qui sont survenues dans le corps.

98. *Des ressorts considérés comme réservoirs d'action.* Nous avons vu (15 et 18) qu'il n'y a guère que l'air et les gaz qui soient à la

fois très-compressibles et parfaitement élastiques, lorsqu'on les enferme dans des espaces clos et qu'on les y refoule au moyen d'un piston mobile, etc. De tels ressorts peuvent donc servir à *emmagasiner* le travail mécanique, à faire fonction de *réservoir,* en les bandant jusqu'à un certain point, et les maintenant à ce point par des moyens faciles à imaginer; car, lorsqu'ensuite on viendra à les abandonner à eux-mêmes contre des résistances à vaincre et qui céderont à leur action, ils restitueront, en se débandant, exactement la quantité du travail qu'ils auront d'abord consommée. — Tel est, entre autres, l'usage bien connu du fusil à vent, qui n'est véritablement qu'un réservoir d'air comprimé, dans lequel on a accumulé une certaine quantité de travail pour s'en servir à lancer des balles au besoin. — Les *catapultes,* les *balistes,* les *arcs,* machines employées par les anciens, lançaient pareillement des pierres, des flèches, etc., par le débandement de ressorts ordinairement formés avec des cordes ou des pièces de bois flexibles.

Mais les ressorts ne servent pas seulement à lancer des *projectiles,* on peut aussi leur faire mouvoir des machines quelconques, et produire des travaux industriels. — C'est par de semblables moyens, par exemple, que les montres et les pendules reçoivent le mouvement pendant des jours, des mois entiers, par le débandement d'un ressort d'acier roulé en spirale, et que l'on a quelquefois tenté, quoique infructueusement, de mettre en mouvement des voitures, etc. En un mot, l'élasticité permet d'enfermer, dans les corps inertes, une force capable de les faire travailler à la manière des moteurs animés, tels que l'homme et le cheval.

99. *De la production du travail par la chaleur.* Le calorique qui dilate les corps (21 et 24) en s'insinuant entre leurs diverses molécules, rend, par là même, ces corps capables de développer du travail mécanique; car il met en jeu leur force de répulsion (27), il bande les ressorts moléculaires; et, quand des obstacles, des résistances quelconques s'opposent à leur libre extension, ces résistances sont vaincues en même temps qu'un certain chemin est décrit par leur point d'application. A l'inverse, quand on vient à refroidir un corps chaud par un moyen quelconque, quand on en fait sortir une certaine quantité de calorique, les ressorts moléculaires, abandonnés à leur libre action, tendent à retourner vers leur position primitive, et font effort contre les résistances qui s'y opposent, absolument de

la même manière que si le corps avait été réellement distendu par des forces extérieures quelconques. On peut même admettre, comme fait de l'expérience, que, dans les changements de volume des corps chauffés ou refroidis, la quantité de travail développée par les ressorts moléculaires, est précisément la même que celle que dépenseraient des forces, appliquées extérieurement au corps, pour produire des effets égaux si la température (22) restait la même.

Nous avons déjà donné (25) quelques exemples des effets de la chaleur et de l'usage qu'on en peut faire, dans les arts, pour consolider les édifices ou rapprocher les diverses parties des corps; en voici d'autres d'une espèce toute différente. — Quand on enferme hermétiquement de l'eau dans un canon de fusil ou dans une chaudière, et qu'on la chauffe à un certain degré, elle tend à se transformer en vapeur (3); elle fait de toutes parts effort contre les parois de l'enveloppe, et finit, lorsqu'on augmente suffisamment la chaleur, par faire éclater cette enveloppe, et par en lancer violemment les débris dans tous les sens. La chaleur, employée à produire l'inflammation de la poudre à canon, produit des effets non moins terribles et bien connus d'ailleurs. Dans l'un et dans l'autre cas, la *force d'explosion* est produite par le développement rapide des gaz ou vapeurs qui tendent (15 et 21) à s'échapper en tout sens, par suite de l'élévation de la température. De là, au surplus, les accidents graves survenus aux chaudières de certaines machines à vapeur et aux marmites dites *autoclaves*.

100. *Usage du calorique comme moteur.* Nous avons vu (26) combien est faible, en général, la dilatation des corps solides; celle des liquides ne l'est guère moins, tant qu'on ne les chauffe pas de manière à les convertir entièrement en vapeur; il en résulte donc que les solides, et les liquides proprement dits, ne font décrire au point d'application des résistances à vaincre, qu'un espace en général fort petit; et qu'ils ne peuvent développer un travail notable qu'autant que ces résistances sont très-grandes. Voilà précisément pourquoi on les emploie rarement quand il s'agit d'effectuer, dans les arts et par l'application de la chaleur, des travaux soutenus qui exigent qu'un certain chemin, plus ou moins grand, soit décrit dans chaque unité de temps. Les gaz et les vapeurs n'ont pas cet inconvénient (21 et 26), aussi peuvent-ils être avantageusement employés comme moteurs dans ces sortes de travaux : la vapeur d'eau surtout,

qu'on se procure à si peu de frais, sert spécialement à cet usage dans l'industrie manufacturière.

101. *Condition générale de l'emploi des moteurs.* Des réflexions analogues sont applicables à tous les agents qui peuvent servir de moteurs, et montrent la limite de l'utilité de leur emploi dans les arts; ils expliquent, par exemple, pourquoi on fait aujourd'hui si rarement usage de la force des ressorts ou de celle des bois et des cordages mouillés (11), pour servir de moteurs dans des travaux soutenus, indépendamment de leur cherté propre, et de l'inconvénient qu'ils ont de mettre en jeu de grands efforts qui consomment, en pure perte (95), une certaine portion de la quantité de travail qui leur est appliquée.

102. *De la reproduction du travail par la pesanteur.* La pesanteur offre, comme l'élasticité des corps, un moyen d'emmagasiner le travail mécanique des forces, et de la rendre disponible au besoin.

Quand un moteur a élevé un corps à une certaine hauteur, en dépensant une certaine quantité de travail, mesurée (78) par le produit du poids de ce corps et de la hauteur à laquelle il a été élevé; ce corps, employé ensuite à vaincre des résistances, soit directement, soit par le moyen de machines, pourra restituer, dans sa descente, précisément la même quantité de travail que celle qui a été dépensée primitivement. C'est ainsi que le mouvement est communiqué aux grandes horloges, aux tournebroches, etc., et que l'eau, en s'échappant des réservoirs où elle est contenue et a été accumulée par la nature ou par l'art, fait mouvoir, par son poids, les roues de nos moulins, de nos usines diverses.

Nous disons que la quantité de travail restituée dans la descente verticale d'un poids, d'une certaine hauteur, est précisément égale à celle qui a été primitivement dépensée pour l'élever à cette hauteur; car l'intensité d'action de la pesanteur est sensiblement la même (61), soit qu'un corps monte, soit qu'il descende; et par conséquent la pression exercée par le poids de ce corps contre une résistance à vaincre, ne varie pas dans les deux cas; de sorte que, pour un même chemin vertical décrit, le travail ne varie pas non plus. Mais, quand bien même on admettrait que l'intensité de la pesanteur n'est pas constante pour toutes les hauteurs du corps, on n'en conclurait pas moins que le travail développé dans la descente, est égal au travail consommé dans la montée, attendu que le poids est, pour chaque position distincte d'un corps, une grandeur absolue (61) et qui ne varie pas avec le temps. En effet, les raisonnements seraient ici semblables à ceux que nous avons employés (97) pour le cas des ressorts parfaitement élastiques, et ils s'appliqueraient également à tous les cas où des forces motrices, agissant sur des corps, redeviendraient constamment les mêmes, pour les mêmes positions relatives de ces corps.

103. *De la consommation du travail sans restitution.* Cette circonstance de la reproduction complète du travail n'arrive pas toujours; nous en avons déjà eu des exemples (95 et suiv.) à l'occasion de la compression des corps en général ou des ressorts imparfaits; on peut même prévoir qu'elle n'arrive jamais rigoureusement dans les travaux industriels, attendu les résistances nuisibles ou inutiles qui accompagnent nécessairement le mouvement des corps ou l'exercice des forces appliquées à ces corps : ainsi la résistance de l'air et des fluides en général, celle du frottement, de l'adhérence des corps qui glissent, qui roulent les uns sur les autres, sont autant de causes qui détruisent, sans retour, une portion plus ou moins grande du travail développé par les moteurs.

En général, on peut remarquer que, toutes les fois qu'une certaine quantité de travail mécanique aura été dépensée pour détruire directement la force d'agrégation ou d'affinité des molécules des corps (28), cette quantité sera totalement anéantie; en ce sens qu'elle ne pourra nullement être restituée par les corps après qu'ils auront subi le changement d'état. C'est ainsi que le travail employé pour limer, pour polir, pour rompre ou diviser les corps solides d'une manière quelconque, est consommé sans retour; parce qu'on a séparé, les unes des autres, certaines molécules, qu'on a détruit leur force de ressort, et que les molécules des corps solides, une fois ainsi séparées, ne possèdent plus l'énergie qui leur est nécessaire pour se rejoindre, même quand on remet les parties en contact immédiat.

104. *De la consommation nécessaire ou utile du travail.* Il faut distinguer soigneusement la consommation de travail, nécessitée par des résistances telles que celles qui viennent de nous occuper en dernier lieu, de la consommation de travail occasionnée par des ré-

sistances étrangères à l'effet qu'on veut réellement produire; car cette première consommation est essentiellement utile et la dernière ne l'est pas; celle-ci diminue l'effet, la quantité d'ouvrage, et l'autre le constitue essentiellement. Enfin on peut, jusqu'à un certain point, éviter les résistances nuisibles, on peut même les amoindrir beaucoup, par des dispositions bien entendues et que nous ferons connaître plus tard; mais on ne peut diminuer, en aucune manière, la consommation de travail, nécessitée rigoureusement par les résistances inhérentes à l'*effet utile* lui-même.

Il suit de là, par conséquent, que tout ouvrage réclame une dépense absolue de travail. Or nous verrons, par la suite, que la seule chose qu'il soit possible d'obtenir par les machines, les outils, les ressorts, etc., c'est que la force motrice n'en dépense pas beaucoup plus, ou que celle qu'elle produit soit presque entièrement employée d'une manière utile.

105. *Toute production de travail suppose une consommation.* Ce que nous disons des machines industrielles peut s'étendre aux agents de toute espèce que présente la nature, lesquels, considérés en eux-mêmes, nous paraissent quelquefois doués d'une énergie d'action qui leur est propre et qui ne suppose point une consommation primitive de travail; mais c'est une erreur qui vient de ce que nous ne réfléchissons pas toujours attentivement aux causes plus ou moins immédiates de cette action. — Cette eau (102) que nous voyons tomber, du haut du réservoir où elle est retenue, sur la roue d'un moulin qu'elle fait marcher, par son poids, en produisant du travail mécanique, a été d'abord amenée là par l'action de la gravité qui l'a fait descendre de la partie supérieure des vallées, où elle jaillit de sources naturelles; ces sources elles-mêmes, sont entretenues par les pluies qui tombent sur le sommet des montagnes et s'infiltrent lentement à travers le sol. Or les pluies proviennent des nuages ou brouillards supérieurs, et les nuages sont produits par l'action de la chaleur du soleil, qui a vaporisé l'eau et l'humidité contenues sur la surface de la terre, et les a contraintes de s'élever malgré la force de la pesanteur; de sorte que la quantité de travail que nous recueillons dans nos moulins, nos usines *hydrauliques*, est, en réalité, une bien faible portion de celle qui a été primitivement dépensée par la force motrice de la chaleur solaire.

Il résulte, par exemple, des observations très-précises faites, depuis plusieurs annés, à l'École d'application de l'artillerie et du génie, par M. le garde du génie Schuster, qu'à Metz et aux environs, il tombe annuellement, sur toute la surface du sol, une quantité d'eau de pluie capable de couvrir cette surface sur une hauteur de 50 à 60^{cent}; ce qui produit, sur la superficie seulement d'une lieue carrée de poste ayant 4000^{met} de longueur, l'énorme volume de $4000^{m} \times 4000^{m} \times 0^{m},5 = 8\,000\,000$ mètres cubes, au moins; lesquels pesant 8 000 000 de tonneaux (34), et étant tombés de la hauteur des nuages qu'on peut fixer moyennement à 1200^{m}, ont ainsi exigé, de la part de la chaleur, un développement de travail mécanique (83) équivalent à $8\,000\,000^{t} \times 1200^{m} = 9\,600\,000\,000^{tm}$, représentant un travail continuel et uniforme (45 et 81) de $\frac{9\,600\,000\,000\,000}{31\,556\,930} = 304\,212^{km}$ par seconde, ou (82) de 4 506 chevaux-vapeur environ.

Les animaux, la chaleur même, sources primitives du travail mécanique, exigent, quand on les considère dans leur application immédiate aux travaux de l'industrie manufacturière, une certaine dépense en nourriture, en combustible, etc., qui, à son tour, est la représentation d'un certain travail mécanique; de sorte qu'il est réellement impossible de créer, de toutes pièces, de la force motrice, ou plutôt du travail, sans qu'il y en ait eu de consommé primitivement. — Ainsi la houille ou charbon de terre qui alimente les chaudières des machines à vapeur, a été extrait du fond des mines qui la recèlent, et amenée sur les lieux de sa consommation, au moyen de voitures ou de bateaux traînés par des chevaux; elle a exigé en outre des chargements et des déchargements successifs; et, si l'on calculait tout ce qu'elle a coûté de travail mécanique, avant de recevoir sa destination utile et définitive, on trouverait que, dans certains cas, ce travail égale presque celui qu'elle produit effectivement en convertissant l'eau en vapeur pour la faire agir sur les machines, et, par l'intermédiaire des machines, sur les outils, sur la matière à confectionner. Ce n'est pourtant point un motif de croire qu'il fût avantageux, même dans de telles circonstances, de renoncer à cette manière de reproduire le travail, puisqu'on obtient ce travail coercé dans un petit espace, et sous une forme infiniment commode, infiniment avantageuse pour les besoins de l'industrie manufacturière.

106. *De la consommation et de la reproduction du travail par*

l'inertie. Jusqu'ici nous avons examiné le travail de la force lorsqu'elle est employée à vaincre la pesanteur et les résistances inhérentes à l'état d'agrégation des corps, ou à leur force d'affinité, à leur force de ressort, etc.; il nous reste à apprécier la résistance que tous les corps opposent au mouvement par suite de leur inertie, et la manière dont cette inertie, considérée (66) comme une force véritable, sert tantôt à consommer, tantôt à produire le travail mécanique, de la même manière que la pesanteur et les ressorts. Et, en effet, nous n'en avons nullement tenu compte dans ce qui précède, bien que réellement on ne puisse, en aucune manière, la séparer des autres genres de forces, quand il s'agit de travailler.

Nous avons déjà remarqué (68 et 76), par exemple, que le limeur est obligé de vaincre l'inertie de la matière propre de sa lime, le cheval attelé à une voiture, l'inertie de la matière de cette voiture et du fardeau qu'elle supporte; nous avons même fait voir (66) que cette inertie se comporte véritablement comme les autres forces motrices, quand la vitesse du mouvement vient à changer. Il est donc fort important d'apprécier, à sa juste valeur, la quantité de travail qu'un corps donné absorbe ou restitue pour acquérir ou pour perdre un certain degré de vitesse, indépendamment de ce qu'il arrive souvent que le mouvement est le but utile même du travail, comme lorsqu'il s'agit de lancer des projectiles, des boulets par le ressort des gaz ou des corps solides, genre de travail qui constitue l'art de la *balistique* mis en usage par tous les peuples pour combattre; indépendamment enfin de ce qu'il arrive aussi très-souvent qu'au lieu d'appliquer directement une puissance à la production d'un travail, on la fait agir d'abord sur un corps libre, et qu'on se sert du mouvement acquis par ce corps, pour effectuer le travail par le moyen du choc ou de toute autre manière, comme cela a lieu, par exemple, dans les machines à pilons, à marteaux, à volants, etc., où l'inertie de la matière est employée à restituer une certaine quantité de travail primitivement dépensée par un moteur pour la mettre en action. Mais il est indispensable d'exposer d'abord les lois suivant lesquelles le mouvement peut être communiqué ou détruit par l'action des forces motrices constantes et variables.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LES FORCES MOTRICES CONSTANTES.

107. *Notions générales*. Le cas le plus facile et le plus simple de

la communication du mouvement, est celui d'un corps qui est poussé à chaque instant par une force motrice constante, égale et directement contraire (66) à la résistance opposée, par l'inertie, dans la direction propre du mouvement. Or il est clair que, la pression étant la même, à chaque instant, *l'accroissement* ou le *décroissement très-petit* de la vitesse (53) sera aussi le même, ou constant pour le même corps. Ainsi, dans le cas dont il s'agit, la vitesse, à partir d'un certain instant, sera augmentée ou diminuée de *quantités proportionnelles au temps écoulé depuis cet instant :* c'est ce qu'on appelle le *mouvement uniformément varié* en général ; mouvement qui est *uniformément accéléré ou retardé*, selon que la force motrice constante agit pour *augmenter* ou pour *diminuer* la vitesse du corps.

Si l'action de la force motrice constante a commencé avec le mouvement même du corps, c'est-à-dire à partir de l'instant où il était au *repos*, la *vitesse totale acquise*, au bout d'un temps quelconque mesuré depuis cet instant, sera *proportionnelle à ce temps ;* ou si l'on veut, elle sera double pour un temps double, triple pour un temps triple, etc. Si, au contraire, l'action de la force motrice ne commence qu'à partir d'un certain instant, ou que le corps ait déjà une *vitesse acquise* à cet instant; cette vitesse, qu'on nomme ordinairement la *vitesse initiale* du corps, aura, au bout d'un temps quelconque, augmenté ou diminué d'une quantité qui sera encore proportionnelle à ce temps, et qu'on pourra calculer quand on connaîtra la vitesse que la force motrice imprime ou détruit constamment, dans un certain temps, par exemple dans l'unité de temps, la seconde, etc. En effet, il ne s'agira que de multiplier le temps total écoulé, par la vitesse qui répond à cette unité de temps ; ajoutant ensuite la vitesse ainsi calculée à la vitesse initiale, ou l'en retranchant selon les cas, on aura la vitesse même du mouvement au bout du temps que l'on considère.

Mais, pour bien saisir l'objet de ces calculs, il est nécessaire de se rappeler que, dans le mouvement varié, la vitesse acquise à un certain instant, est mesurée (53) par le chemin que décrirait le corps, dans l'unité de temps et à compter de cet instant, si, la force motrice cessant tout à coup son action, le corps continuait à se mouvoir uniformément; ce qu'il ferait véritablement en vertu de son inertie (55) et du degré de vitesse qu'il possède déjà.

108. *Du mouvement uniformément accéléré.* Occupons-nous d'a-

bord du cas où le corps part du repos sous l'action de la force motrice constante, et proposons-nous de découvrir toutes les circonstances du mouvement de ce corps.

Nous pouvons encore représenter ici, par le dessin, la loi qui lie, aux temps, les vitesses acquises par le corps au bout de ces temps, en traçant (pl. I, fig. 27) une ligne $Oa'b'\ldots h'$ dont les abscisses Oa, Ob,.... Oh, représentent les temps écoulés depuis l'origine du mouvement, et dont les ordonnées aa', bb', cc'.... hh', représentent les vitesses acquises à la fin de ces temps respectifs.

Cela posé, puisque, dans le cas du mouvement uniformément accéléré, les vitesses aa', bb', cc'.... hh', sont proportionnelles aux temps écoulés Oa, Ob, Oc.... Oh, il est clair que la ligne $Oa'b'c'\ldots h'$ est une ligne droite qui passe par l'origine O des abscisses ; car le mobile est ici censé partir du repos à l'instant où la force motrice commence son action, de sorte que le temps et la vitesse sont nuls à la fois à cet instant. Supposez qu'on ait partagé l'axe OB des abscisses ou des temps en un grand nombre de parties égales très-petites, puis qu'on ait élevé les ordonnées correspondantes, et qu'enfin on ait mené, par les extrémités de ces ordonnées, des parallèles à l'axe des abscisses, on formera une suite de petits triangles Oaa', $a'b'b''$, $b'c'c''$.... égaux et rectangles. Les côtés aa', $b'b''$, $c'c''$.... de ces triangles marqueront les accroissements successifs de la vitesse, accroissements qui seront égaux comme les petits instants qui leur correspondent, Oa, ab, bc,.... conformément à la définition du mouvement uniformément accéléré.

Les intervalles de temps successifs Oa, ab, bc.... étant donc supposés extrêmement petits, on peut regarder le corps comme se mouvant, d'une manière sensiblement uniforme, pendant l'un quelconque $cd = c'd''$ de ces intervalles, et avec une vitesse moyenne égale à la demi-somme de celles cc', dd' qui répondent au commencement et à la fin de chacun d'eux. Or, dans le mouvement uniforme (48), l'espace décrit dans un temps quelconque est mesuré par le produit de la vitesse et de ce temps ; donc l'espace décrit ici, pendant le temps élémentaire cd, sera égal à cd multiplié par la vitesse moyenne $\frac{1}{2}(cc' + dd')$, qui correspond à ce temps élémentaire. Ce produit n'étant autre chose que la mesure de l'aire du petit trapèze $cc'd'd$, cette aire pourra ainsi représenter l'espace parcouru pendant le temps élémentaire cd : pour un autre intervalle quelconque de égal au premier, l'espace décrit sera encore représenté par le trapèze $dd'e'e$; donc l'espace total décrit, pendant le temps

Oh, par exemple, a sensiblement pour mesure la somme ou surface totale des trapèzes élémentaires $aa'b'b$, $bb'c'c$...., $gg'h'h$, augmentée du petit triangle Oaa' qui mesure évidemment l'espace décrit dans le premier instant Oa; c'est-à-dire la surface même du triangle correspondant Ohh'. Donc enfin cette dernière surface est la mesure exacte et rigoureuse de l'espace décrit pendant le temps total Oh, puisqu'on peut supposer que ce temps a été divisé en un nombre indéfini de parties égales et infiniment petites; le raisonnement étant ici le même que celui qui a été mis en usage (72) pour trouver la mesure du travail quand l'effort est variable.

109. *Lois du mouvement uniformément accéléré.* Le chemin décrit au bout d'un temps quelconque, étant, pour le mouvement uniformément accéléré, représenté par la surface du triangle qui a pour base ce temps et pour hauteur la vitesse acquise au bout de ce même temps; on en peut déduire, de suite, plusieurs conséquences importantes, et qui permettent de calculer les circonstances de ce genre de mouvement.

D'abord, puisque la surface de tout triangle Ohh' a pour mesure la moitié du rectangle de même base et de même hauteur, et que ce dernier est aussi la mesure (48) du chemin qui serait décrit uniformément pendant un temps égal à Oh et avec la vitesse hh' acquise au bout de ce temps, on voit que,

1° *Dans le mouvement uniformément accéléré, le chemin décrit, au bout d'un temps quelconque et à partir de l'origine du mouvement, est la moitié de celui que le mobile décrirait, dans un temps égal, s'il se mouvait uniformément avec la vitesse qu'il a acquise à la fin du premier temps.*

Ensuite, puisque les chemins décrits, au bout de deux temps quelconques Ob, Oe, sont représentés par les triangles Obb', Oee'; puisque ces triangles sont semblables, et que, d'après les principes démontrés en géométrie, leurs surfaces sont comme les carrés des côtés homologues, il en résulte encore que,

2° *Dans le mouvement uniformément accéléré, les chemins décrits, au bout de deux temps quelconques et à compter de l'origine du mouvement, sont entre eux comme les carrés de ces temps.*

3° *Ces mêmes chemins sont aussi entre eux comme les carrés des vitesses acquises au bout des temps correspondants.*

110. *Formules relatives au mouvement uniformément accéléré.*

Lorsque, dans le mouvement que nous considérons, on se donne la vitesse ee' acquise au bout d'un temps quelconque Oe, par exemple au bout d'une seconde prise pour unité de temps, la loi du mouvement, ou la droite Ok' qui la représente, est entièrement déterminée ; c'est-à-dire qu'on peut la construire. On doit donc aussi pouvoir construire et calculer alors la vitesse et l'espace qui répondent à un autre temps quelconque.

En effet, représentons par e_1, v_1 le chemin et la vitesse qui répondent à la première seconde ; soient E, V le chemin et la vitesse qui répondent à un nombre quelconque de secondes, représenté par T, et qui seraient censées écoulées depuis l'origine du mouvement ; on aura d'abord, en vertu de la première des propositions ci-dessus,

$$e_1 = \tfrac{1}{2}\, v_1 \times 1'' = \tfrac{1}{2}\, v_1, \qquad E = \tfrac{1}{2}\, V \times T;$$

puis, en vertu de la deuxième,

$$e_1 : E :: 1'' \times 1'' : T \times T \text{ ou } T^2;$$

d'où l'on tire

$$E = e_1 \times T^2 = \tfrac{1}{2}\, v_1 \times T^2;$$

puis enfin, en vertu de la troisième,

$$e_1 \text{ ou } \tfrac{1}{2}\, v_1 : E :: v_1^2 : V^2; \quad \text{d'où } V^2 = 2\, v_1 \times E.$$

Nous avons d'ailleurs, en vertu même de la définition du mouvement uniformément accéléré (107),

$$v_1 : V :: 1'' : T; \quad \text{d'où } V = v_1 \times T.$$

Ces différentes formules serviront à calculer la valeur de deux quelconques des quantités E, V, T quand on connaîtra celle de la troisième, ainsi que le chemin e_1 ou la vitesse v_1 qui correspondent à l'unité de temps 1″; il ne s'agira que de remplacer chaque lettre par le nombre d'unités de temps ou de longueur qu'elle représente, et d'effectuer les opérations indiquées *.

* La relation $E = \frac{1}{2}\, v_1 \times T^2$, et la relation $V^2 = 2v \times E$ qui indique que la *vitesse* V *est moyenne proportionnelle* entre $2v_1$ et E, ou *entre le double du chemin décrit dans la première seconde et celui qui est décrit au bout du temps* T, présentent seules quelques difficultés pour le calcul de T et de V; mais on peut parvenir au résultat par le moyen des constructions graphiques connues, ou par les tables que nous ferons connaître plus tard, ou enfin par l'*extraction* directe de la *racine carrée* du quotient de 2E par v_1 et du produit $2v_1 \times E$, qui donnent, en chiffres, les valeurs de T^2 et de V^2.

111. *Cas où le corps part avec une vitesse déjà acquise.* Dans ce qui précède, nous avons supposé que le corps partait du repos ou avec une vitesse nulle, de sorte que la droite Oh', qui donne la loi de son mouvement, passait par l'origine O des temps; mais, s'il avait déjà une vitesse acquise antérieurement, cette droite passerait par le point O' (pl. I, fig. 28), extrémité de l'ordonnée OO' qui représente cette vitesse du départ. En menant la parallèle $O'B'$ à OB, on verra que la vitesse cc', qui répond à un temps quelconque Oc, écoulé depuis l'origine O du mouvement, se composera de la vitesse cc'', égale à la vitesse *initiale* OO'', augmentée de la vitesse $c'c''$, que le corps acquerrait, sous l'action de la force motrice constante et au bout du temps correspondant Oc ou $O'c''$, si le corps partait réellement avec une vitesse nulle, comme dans le cas précédent; car la droite $O'd'$ donne, dans ce cas, par rapport à $O'B'$, prise pour axe des temps, la loi de l'accélération de la vitesse. Connaissant donc la vitesse que la force imprimerait au corps au bout de la première seconde, s'il partait du repos, on aura tout ce qu'il faut pour construire Od' par rapport à $O'B'$, et par conséquent par rapport à Od; d'où il sera aisé de déduire toutes les circonstances du mouvement, et de les calculer même au moyen des propriétés géométriques de la figure, si l'on se rappelle les diverses notions déjà établies précédemment.

Qu'il s'agisse, par exemple, de calculer le chemin décrit par le corps au bout du temps Od, lequel est ici représenté par l'aire du trapèze $Odd'O'$; on apercevra, de suite, qu'il *se compose du chemin* $OO'd''d$, *qui, pendant ce temps, serait décrit uniformément, en vertu de la vitesse initiale* OO', *augmenté de celui* $O'd'd''$, *qui dans le même temps, serait décrit, sous l'action de la force motrice constante et d'un mouvement uniformément accéléré, si le corps partait du repos au lieu de partir avec une vitesse déjà acquise.* Or, nous avons appris ci-dessus à calculer l'un et l'autre de ces chemins.

112. *Du mouvement uniformément retardé.* Si nous supposons maintenant que la force motrice constante, au lieu d'augmenter sans cesse et par degrés égaux la vitesse *initiale* OO' (fig. 29), la diminue au contraire à chaque instant, le mouvement sera alors *uniformément retardé.* En menant la parallèle $O'B'$ à OB, on verra que la vitesse cc', qui répond à un temps quelconque Oc, écoulé depuis l'origine O du mouvement, n'est autre chose que la vitesse

primitive OO' diminuée de la vitesse $c'c''$ que le corps acquerrait, sous l'action de la force motrice, au bout du temps Oc, si ce corps partait du repos.

L'aire du trapèze $OO'c'c$ étant encore ici la représentation du chemin décrit au bout du temps Oc, en vertu du mouvement retardé, on voit que ce *chemin est égal à celui* $OO'c''c$ *qui serait décrit uniformément, pendant ce même temps, et avec la vitesse primitive* OO', *moins celui* $O'c'c''$, *qui, dans ce même temps, serait décrit, sous l'action de la force motrice constante et d'un mouvement uniformément accéléré, si le corps partait du repos au lieu de posséder une vitesse déjà acquise.* On pourrait donc encore calculer, dans le cas actuel et au moyen de la figure, toutes les circonstances du mouvement, si seulement on connaissait la vitesse initiale OO', ainsi que la diminution de vitesse $c'c''$, due à la force retardatrice, au bout d'un temps quelconque Oc, ou, si l'on veut, à la fin de la première seconde de temps écoulé.

Supposons, entre autres, qu'on veuille trouver le temps Oe' au bout duquel la force motrice aura éteint entièrement la vitesse du corps; on aura, par les triangles semblables $O'c'c''$ et $OO'e$, la proportion

$$c'c'' : O'c'' \text{ ou } Oc = 1'' :: OO' : Oe; \quad \text{d'où } Oe = \frac{OO' \times 1''}{c'c''} = \frac{OO'}{c'c''}.$$

Quant au chemin total décrit par le corps, depuis l'instant où la force retardatrice a commencé son action jusqu'à celui où la vitesse est devenue nulle, il sera donné par la surface du triangle $OO'e$, ou par le produit

$$\tfrac{1}{2}\, OO' \times Oe = \tfrac{1}{2}\, OO' \times \frac{OO'}{c'c''} = \tfrac{1}{2}\, \frac{\overline{OO'}^2}{c'c''}.$$

Une remarque très-importante à faire, c'est que, si l'on suppose que la force motrice constante, après avoir anéanti complétement la vitesse initiale du corps, continue à agir en lui imprimant à chaque instant des degrés de vitesse égaux à ceux qu'elle avait détruits d'abord, le corps retournera dès lors en arrière, en reprenant les mêmes vitesses quand il repassera par les mêmes positions. C'est ce qu'indique la ligne $O'e$, en supposant que les temps soient comptés à partir de e vers O, c'est-à-dire de l'instant où le mouvement du corps est éteint; car la force motrice, qui est devenue accélératrice, aura imprimé, en sens contraire, la vitesse *dd'* au bout du temps *ed*, la vitesse *cc'* au bout du temps *ec*, etc.

DES LOIS DU MOUVEMENT VERTICAL DES CORPS PESANTS.

113. *Causes qui influent sur le mouvement des corps dans l'air*. L'un des exemples les plus importants du mouvement uniformément accéléré, est celui que nous présente la chute des corps pesants, suivant la direction de la verticale ou de l'aplomb. Mais, avant de l'exposer, faisons connaître les circonstances qui, à la surface de la terre, accompagnent et modifient ce mouvement.

Déjà nous avons vu (61) que la pesanteur pouvait être considérée comme une force sensiblement constante dans l'étendue ordinaire des travaux de l'industrie. Mais, à la surface de notre globe, tous les corps sont plongés dans l'air, et cet air est lui-même (3 et 4) un corps matériel qui les presse de toutes parts (37), et qui, en vertu de son inertie, de son impénétrabilité, s'oppose avec plus ou moins d'énergie, à toute espèce de mouvement (66). Nous avons vu (41) que l'effet de la pression de l'air, sur les corps solides, se réduit sensiblement à diminuer le poids de ces corps d'une quantité égale au poids du volume du fluide qu'ils déplacent; de sorte que cette diminution est d'autant plus sensible que, à égalité de volume d'un corps, son poids est moindre. Quant à la résistance que l'air oppose au mouvement des corps, en vertu de son inertie et de sa force de ressort (63), l'expérience apprend que cette résistance varie selon l'étendue et la forme de la surface extérieure des corps; mais surtout selon la rapidité plus ou moins grande du mouvement. — En frappant l'air avec une palette plane et mince, la résistance qu'on éprouve est d'autant plus grande que la vitesse du mouvement est plus considérable, tandis qu'elle est à peine sensible quand le mouvement s'opère avec lenteur. Si au lieu de frapper l'air avec toute la surface du plan de la palette, on fait mouvoir cette palette de *biais*, la résistance est moindre à vitesse égale, et elle est la plus petite possible quand on oppose tout à fait le *chan* ou le côté mince de la palette à l'action de l'air; c'est-à-dire quand on dirige sa face plane dans le sens même du mouvement.

Des choses analogues se passent à l'égard de tous les corps qui se meuvent dans l'air; et l'on observe que la résistance croît généralement 1° avec l'étendue de la *surface antérieure* des corps, de celle qui se présente directement à l'action de l'air; 2° avec la difficulté plus ou moins grande que, par suite de la forme même de ces corps, l'air éprouve à glisser le long de leur surface, à se dévier ou à leur faire place; 3° avec la grandeur de la vitesse qu'ils possèdent, et cela dans un rapport qui croît beaucoup plus rapidement que cette grandeur, et qui surpasse même un peu son carré.

114. *Chute verticale des corps dans l'air.* On conçoit, d'après tout ce que nous venons de dire, que la présence de l'air doit apporter des modifications, plus ou moins sensibles, aux lois de la chute verticale des corps qui sont abandonnés librement à l'action de la pesanteur; et l'on peut même prévoir à l'avance et expliquer une infinité de faits que l'expérience journalière confirme ; tels que l'ascension *spontanée* ou naturelle (41) de certains corps, leur équilibre à une certaine hauteur dans l'atmosphère, la chute plus ou moins rapide des corps solides, etc. — En laissant tomber, dans l'air et d'une même hauteur, des corps solides, on observe, en effet, que ceux qui pèsent plus sous le même volume, ou qui sont les plus denses (33), ceux qui présentent le moins de surface à l'action directe de l'air et dans le sens du mouvement, sont aussi ceux qui arrivent les premiers au bas de leur chute. Ainsi une balle de plomb pleine tombe plus vite qu'une balle de plomb creuse ou qu'une balle de bois pleine, égale en grosseur, en diamètre; celle-ci tombe aussi plus vite qu'une balle de liége, etc.; enfin, un même poids de la même substance peut aussi tomber, plus ou moins vite, selon que cette substance est plus ou moins compacte, moins ou plus divisée. La raison en est toute simple : dans le premier cas, la diminution du poids des différents corps et la résistance de l'air sont les mêmes pour chacun d'eux, tandis que (35 et 41) leurs poids absolus, leurs poids dans le vide qui mesurent véritablement l'énergie de la pesanteur sur chacun d'eux sont très-différents; dans le second cas, au contraire, le poids absolu reste le même, mais la diminution de ce poids, résultante de la pression de l'air, et la résistance que cet air occasionne sur la surface extérieure des corps, est aussi moins forte pour les corps compacts que pour les autres.

115. *Chute dans le vide, mode d'action de la pesanteur.* Si l'on faisait tomber les corps ci-dessus dans un espace entièrement vide ou privé d'air, chacun d'eux, en descendant toujours de la même hau-

teur, arriverait nécessairement en moins de temps ou plus vite au bas de sa chute; car l'action de la pesanteur conserverait alors toute son intensité. L'expérience qui confirmerait un tel aperçu n'aurait donc rien qui dût nous surprendre; mais il n'en serait pas de même si elle nous apprenait que les corps tombent tous également vite d'une même hauteur; car nous sommes naturellement portés à croire que les corps qui ont plus de poids, étant sollicités avec une force plus énergique, doivent aussi acquérir un degré de vitesse plus grand; nous ne faisons pas attention, en effet, que la pesanteur a aussi plus de matière à mettre en mouvement, dans le premier cas, que dans le second, de sorte que la résistance de l'inertie (66) est réellement plus grande.

Or c'est ce que les physiciens ont constaté en faisant le vide (36) dans un grand tube de verre (pl. I, fig. 30), après y avoir préalablement introduit des corps solides de diverses espèces, depuis les plus légers jusqu'aux plus denses : ces corps parvenaient tous à la fois au bas de leur chute, quand, par un moyen quelconque et facile à imaginer, on les lâchait en même temps et de la même hauteur. Ils ont, de plus, remarqué que ces corps tombaient dans le même ordre, et conservaient les mêmes distances respectives dans toute la durée de leur chute; ce qui prouve que la pesanteur leur imprimait, à chaque instant, le même degré de mouvement; nous pouvons donc admettre, comme parfaitement démontré, ce principe général qu'il est important de retenir :

La pesanteur ou gravité agit indistinctement sur toutes les particules de la matière quelle qu'en soit la nature particulière, et leur imprime, à chaque instant, le même degré de vitesse dans le même lieu et dans le vide.

On s'assure d'ailleurs très-simplement que la pesanteur agit aussi bien sur les molécules intérieures des corps que sur celles du dehors, en observant qu'un même corps pèse également à l'air libre ou placé dans l'intérieur d'un autre corps, par exemple, dans une chambre, dans une boîte; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que l'action de la pesanteur se fasse sentir à travers la matière même de cette chambre, de cette boîte.

On voit aussi que *le poids absolu des corps* n'est autre chose que le *résultat* de toutes les petites actions réunies de la pesanteur sur les molécules matérielles de ces corps. Il ne faut donc pas confondre le *poids* avec la *pesanteur*, qui est véritablement la *force élémentaire* qui sollicite ces diverses molécules à se mouvoir avec le même degré de vitesse.

116. *Expérience sur la chute des corps.* Nous venons de voir que les corps les plus denses tels que l'or, le plomb, le cuivre, sont ceux qui, à égalité de surface, tombent le plus vite dans l'air, parce que la résistance est alors très-faible par rapport au poids total du corps. Mais, quand la hauteur de chute ne surpasse pas 5 mètres, par exemple, on trouve, par l'expérience, que des balles de ces diverses substances tombent dans le même temps, et qu'elles ne tombent même guère plus vite que des balles de marbre et de cire, égales en volume, dont le poids est 7 fois, 20 fois moindre. Or cela prouve évidemment que la présence de l'air exerce réellement, pour de petites chutes, une influence peu sensible sur le mouvement de ces corps; de sorte qu'on peut très-bien admettre, par exemple, que la loi que suit la balle d'or, en tombant, dans l'air, d'une hauteur moindre que 5 mètres, est, à très-peu de chose près, la même que celle qu'elle suivrait si elle tombait de cette hauteur, dans un espace entièrement vide.

Galilée, célèbre physicien italien, qui a le premier découvert cette loi par des expériences directes et suffisamment précises, a trouvé que le mouvement vertical des corps était véritablement un mouvement uniformément accéléré. La pesanteur est donc (107) une *force accélératrice constante*, et qui agit avec une intensité égale, à chaque instant et quelle que soit la vitesse déjà acquise par le corps. Atwood, physicien anglais, en reprenant depuis les expériences de Galilée avec des moyens plus ingénieux et plus perfectionnés, a obtenu les mêmes résultats. Nous pouvons donc énoncer les principes généraux qui suivent (109).

117. *Lois de la chute des corps dans le vide.* Lorsqu'un corps tombe verticalement et d'une certaine hauteur, dans le vide,

1° *Les vitesses acquises aux divers instants, sont proportionnelles aux temps écoulés depuis le commencement de la chute;*

2° *Les espaces totaux parcourus aux mêmes instants, ou les hauteurs de chute, sont proportionnels aux carrés des temps écoulés;*

3° *Ces mêmes hauteurs sont proportionnelles aux carrés des vitesses acquises au bout de chacune d'elles;*

4° *La vitesse acquise, au bout d'un certain temps, est double de la hauteur de chute déjà parcourue avant cet instant.*

Pour le point du globe où nous nous trouvons, le chemin décrit au bout de la *première seconde*, est égal à $4^{m}.9044$; donc la *vitesse acquise* au bout de ce temps, est 2 fois $4^{m},9044$ ou $9^{m}8088$. Cette dernière vitesse est ordinairement représentée par g dans les traités de Mécanique : ainsi $g = 9^{m},8088$: c'est la connaissance de cette grandeur qui sert à calculer (110) toutes les circonstances du mouvement accéléré des corps tombant d'une certaine hauteur dans le vide, ou des corps très-denses tombant d'une petite hauteur dans l'air.

118. *Formules et applications.* Ordinairement on représente par la lettre h ou H, la hauteur, en mètres, d'où le corps est tombé à un certain instant ; en nommant toujours T le temps employé, par ce corps, à décrire le chemin vertical H, ou à tomber de H, et V la vitesse qu'il a acquise à la fin de ce temps, on aura, d'après ce qu'on a trouvé (110) pour le mouvement uniformément accéléré en général,

$$H = \tfrac{1}{2}V \times T,\ H = \tfrac{1}{2}g \times T^2,\ V^2 = 2g \times H,\ V = g \times T,\ g = 9^{m},8088,$$

formules très-fréquemment rappelées en Mécanique, et d'un grand usage pour calculer les circonstances de la chute des corps pesants.

Supposons qu'on veuille trouver la vitesse acquise V, et le chemin H décrit au bout de 7″ de chute ; T représentant ici les 7″, on aura $V = g \times T = 9^{m},809 \times 7 = 68^{m},66$ environ, $H = \frac{1}{2}g \times T^2 = 4^{m},9044 \times 49 = 240^{m},316$.

Si l'on se donnait seulement la hauteur H de chute, on calculerait la vitesse acquise, au bas de cette chute, au moyen de la relation $V^2 = 2g \times H$. Supposons, par exemple, que $H = 10^{m}$, on aura $V^2 = 19^{m},6176 \times 10^{m} = 196,176$ mètres carrés ; et il ne s'agirait que de trouver la racine carrée de 196,176, ou le nombre qui, multiplié par lui-même, donnerait cette quantité. Or cette racine est ici 14^{m} environ, puisque 14×14 ou $14^2 = 196$.

Pour montrer une nouvelle application des principes ci-dessus, nous supposerons que deux corps différents tombent verticalement d'un même point A (pl. I, fig. 31), où ils étaient d'abord au repos, mais ne tombent que l'un après l'autre, et à un intervalle de temps qui soit seulement de $\frac{1}{100}$ de seconde ou 0″,01. Cela posé, nous nous demanderons à quelle distance A′B′ se trouveront ces deux corps à la fin de la première, de la deuxième seconde, écoulées depuis l'instant du départ du second corps.

Puisque ce corps ne part, du point A, que 0″,01 après le premier, il en résulte que celui-ci aura déjà parcouru un certain espace AB avant l'instant où l'autre aura été lâché de A ; cherchons d'abord cet espace au moyen de la formule $H = \frac{1}{2} g \ T^2 = 4^m,9044 \times T^2$ (118). Ici $T = 0'',01$; donc

$$H = 4,9044 \times 0,01 \times 0,01 = 4^m,9044 \times 0,0001 = 0^m,00049;$$

c'est-à-dire que la distance AB, entre les deux corps, n'est pas même de $\frac{1}{2}$ millimètre.

Cherchons maintenant à quelle distance A'B' se trouveront, l'un de l'autre, les mêmes corps, à l'instant où une seconde entière se sera écoulée depuis l'instant du départ du deuxième corps; et, pour cela, calculons séparément les chemins AB', AA' décrits par chacun de ces corps, à partir du point A, en observant que, puisque la durée de la chute AA' du second corps est de 1'', celle de la chute AB' du premier est $1'' + 0'',01 = 1'',01$; on aura l'espace

$$AA' = 4^m,9044 \times 1'' \times 1'' = 4^m,9044, \text{ et l'espace}$$
$$AB' = 4^m,9044 \times 1,01 \times 1,01 = 4^m,9044 \times 1,0201 = 5^m,003;$$
$$\text{donc l'intervalle } A'B' \text{ ou } AB' - AA' = 5^m,0030 - 4^m,9044$$
$$= 0^m,0986 \text{ ou environ } 10^{cent}.$$

A la fin de la 2^e^, de la 3^e^ seconde de chute, les deux corps seraient déjà à une distance, l'un de l'autre, de près de 20, de 30^cent^, etc.

Ces résultats expliquent très-bien pourquoi les *jets d'eau* des jardins, des pompes à incendie, qui s'élèvent verticalement, ou sous une certaine inclinaison, en filets compacts et continus, retombent, au contraire, en se divisant en gouttelettes, en pluie plus ou moins fine; car la résistance de l'air, loin de séparer les parties, comme on pourrait le croire d'abord, tend au contraire à les réunir en diminuant la rapidité du mouvement de celles qui redescendent les premières. C'est aussi là l'explication très-simple de l'effet si connu des cascades naturelles, dont l'eau, en se précipitant du haut des montagnes, se divise en une pluie tellement fine qu'elle ressemble à un véritable brouillard. Nous verrons, par la suite, que de telles remarques ne sont pas seulement un objet de curiosité, mais qu'elles peuvent aussi recevoir des applications dans les arts.

119. *Observations diverses.* L'opération, par laquelle il s'agit de trouver la vitesse V, acquise à la fin de la chute verticale d'un corps, au moyen de la hauteur H de cette chute, se reproduit très-fréquem-

ment dans la Mécanique pratique ; aussi a-t-on construit des tables exprès, qui fournissent immédiatement la vitesse répondant à une hauteur donnée : nous les ferons connaître lorsqu'il sera question des lois de l'écoulement des fluides.

On dit ordinairement que la *vitesse* V *est due à la hauteur* H, et réciproquement que cette *hauteur est due à la vitesse* V, expressions abrégées qu'il est essentiel de retenir.

Enfin on devra se ressouvenir que, dans l'air, les corps ne tombent pas réellement avec la vitesse qui répond aux données du calcul ; mais que cette vitesse et les autres circonstances du mouvement diffèrent très-peu des véritables, dans les cas qui ont déjà été spécifiés plus haut (116). Nous ferons d'ailleurs connaître, à la fin de ces PRÉLIMINAIRES, les moyens par lesquels on peut calculer exactement le mouvement des corps qui tombent ou s'élèvent verticalement dans l'air ; et, en les appliquant à la théorie des parachutes et des ballons, nous démontrerons ainsi l'utilité immédiate des principes de la mécanique.

120. *Ascension verticale des corps pesants.* Lorsqu'un corps, une balle de fusil par exemple, est lancé, de *bas en haut*, selon la verticale, la pesanteur agit, à chaque instant, avec la même intensité, pour diminuer, par degrés égaux, la vitesse primitive ; le mouvement sera donc *uniformément retardé*, et, d'après ce qui précède (112), la vitesse finira par s'éteindre, quand le corps sera arrivé à une certaine hauteur, puis il redescendra, en vertu de l'action de la gravité, en reprenant tous les degrés de vitesse qu'il possédait en montant et pour les mêmes positions. Ainsi à 1^m, à 2^m, à 3^m au-dessus de terre, le corps possédera exactement les mêmes vitesses, soit dans l'ascension, soit dans la chute ; il n'y aura que la direction du mouvement de changée : par exemple, lors de sa chute ou de son retour au point de départ, la pesanteur lui aura précisément restitué la vitesse qu'il avait primitivement. Nommant H la plus grande élévation à laquelle il soit parvenu, et V cette vitesse, on aura donc $V^2 = 2gH$; d'où il sera facile de déduire H quand on aura V, et réciproquement, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (118).

On pourra d'ailleurs calculer toutes les autres circonstances de l'ascension verticale du corps, par les méthodes du n° 112 ; mais il ne faudra pas oublier, je le répète, que les résultats, ainsi obtenus, supposent que l'air n'existe pas ou n'exerce aucune influence sensible sur le mouvement. Car, dans la réalité, les corps montent à une hauteur un peu moindre que celle qui *répond* ou est *due* à leur vitesse *initiale*, et, de plus, en retombant, ils acquièrent une vitesse un peu moindre que celle qui est *due* à la hauteur réelle de leur chute ou de leur ascension.

FORCE VIVE, MASSE ET QUANTITÉ DE MOUVEMENT DES CORPS.

121. *Travail relatif à la vitesse de chute des corps.* Nous pouvons maintenant apprécier la quantité de travail ou d'action que dépense la pesanteur pour engendrer une certaine vitesse dans un corps, ou pour vaincre l'inertie de ce corps. Nommons, en effet, P le nombre des kilogrammes que pèse le corps, c'est-à-dire l'effort total (60 et 115) que la pesanteur exerce sur ce corps, et qu'il faudrait employer pour le soutenir à une certaine position; ce sera aussi la mesure de l'effort constant exercé sur le corps pendant sa descente de la hauteur H. La quantité de travail développée par la pesanteur et consommée par l'inertie (66), pendant cette chute, sera donc représentée (78) par le produit $P \times H$; et cette quantité de travail aura engendré, dans le corps, la vitesse V calculée (118) par l'équation $V^2 = 2g\,H$. Mais, si l'on divise le produit $2g \times H$ ou V^2 par l'un de ses facteurs $2g$, on aura l'autre $H = \frac{V^2}{2g}$; et par conséquent, $P \times H$ est la même chose que $P \times \frac{V^2}{2g}$ ou $\frac{1}{2}\,\frac{P}{g} \times V^2$.

Ainsi donc la quantité de travail, développée par la pesanteur pour imprimer une certaine vitesse V à un corps, est égale à la moitié du produit obtenu en multipliant le carré de cette vitesse par le poids P de ce même corps, divisé par la vitesse g ou $9^m,8088$ que la pesanteur imprime, à tous les corps (117), au bout de la première seconde de leur chute.

122. *Force vive des corps; sa relation avec le travail mécanique.* Le produit $\frac{P}{g} \times V^2$ étant précisément ce que les mécaniciens sont convenus de nommer la *force vive du corps dont le poids est* P *et la vitesse actuelle* V, on voit que *la quantité d'action ou de travail, dépensée par la pesanteur pour produire la chute verticale d'un corps, est la moitié de la force vive imprimée au bas de cette chute;* ou, si l'on

veut, *la force vive imprimée est le double de la quantité de travail dépensée par la pesanteur.* Lorsque le corps est lancé verticalement de bas en haut, avec une certaine vitesse, le travail de la pesanteur, toujours mesuré par le produit du poids et de la hauteur à laquelle le corps à été élevé verticalement, est employée, au contraire, à détruire cette vitesse. Par conséquent, dans les deux cas de la descente et de la montée, la moitié de la force vive acquise ou détruite, mesure la quantité de travail nécessaire pour vaincre l'inertie du corps ; c'est-à-dire, que cette mesure reste la même, soit que la pesanteur imprime une certaine vitesse à un corps, soit qu'elle détruise une vitesse égale et qu'il possédait déjà.

Nous prouverons bientôt que ce principe est général, quelle que soit la force motrice qui ait communiqué le mouvement au corps, et quelle que soit la direction et la nature de ce mouvement. Mais il est nécessaire auparavant de faire plusieurs remarques, et de poser quelques autres définitions admises par les mécaniciens.

123. *Comment on doit entendre la force vive.* L'expression de *force vive,* employée pour désigner le produit $\frac{P}{g} \times V^2$, pouvant induire en erreur beaucoup de personnes, il est bon de remarquer ici que, d'après notre manière de voir, ce n'est point à proprement parler (59) une *force,* pas plus que la quantité $P \times H$, que nous avons nommée, en général, *quantité d'action, quantité de travail;* c'est tout simplement le résultat de l'activité d'une force motrice ou de pression, *exprimable en poids,* qui a été employée, pendant un temps plus ou moins long (57), à vaincre l'inertie de la matière d'un corps, à imprimer un certain mouvement, une certaine vitesse à ce corps. Sous ce point de vue, la force vive n'est véritablement que *l'effet dynamique* (80) de la force motrice, ou plutôt le double de cet effet, puisque $\frac{P}{g} \times V^2 = 2P \times H$.

Lors donc que nous emploierons le mot *force vive,* ce ne sera jamais que pour désigner la valeur numérique d'une certaine quantité essentiellement relative au mouvement actuel d'un corps, ou au mouvement qu'il pourrait réellement acquérir dans des circonstances déterminées ; et, sans s'arrêter aucunement à la signification propre des mots par lesquels on l'indique dans le discours, il faudra seulement se ressouvenir que *sa valeur, en nombre, équivaut au produit* *du carré de la vitesse effective d'un corps, par le poids de ce corps, divisé par g ou* $9^{m},8088$. Ainsi nous ne confondrons pas, comme on le fait quelquefois (80), la force vive des moteurs avec la quantité de travail qu'ils développent contre des résistances qui leur sont opposées; et, s'il nous arrivait, par exemple, de parler de la force vive d'un homme ou d'un cheval, nous entendrions uniquement spécifier le produit ci-dessus concernant leur vitesse et leur poids réels, produit qui est bien différent de celui qui mesure la quantité de travail mécanique même développée par ces moteurs, à chaque instant ou pendant un certain temps, lorsqu'ils sont appliqués à une machine, à un outil quelconque (74 et 77).

124. *Réflexions sur la force vive et les forces motrices en général.* Ce qui a porté autrefois les mécaniciens à adopter le mot *force vive,* c'est qu'ils ont confondu l'*effet* avec la *cause,* le *résultat du travail* d'une force motrice avec ce *travail même;* par la seule raison que les mesures, en nombres, de ce travail, de cet effet ou de ce résultat, sont directement comparables entre elles, et ont une certaine relation numérique. Ayant d'ailleurs admis l'expression de *force* pour désigner les effets, les résultats de l'activité d'un moteur qui travaille, et voulant la distinguer de l'*effort* ou *pression simple* (59) que ce moteur exercerait sur un corps qui resterait en repos ou qui ne céderait pas à son action, ils ont dit que c'était une *force vive,* et cette pression, cet effort, ils l'ont nommé *force morte.* De là aussi la dispute qui s'est élevée, parmi les géomètres du dernier siècle, sur la manière de mesurer la force vive et la force morte, et de les distinguer entre elles; dispute fort oiseuse et qui n'a fait qu'embrouiller des choses très-claires par elles-mêmes, puisqu'il est impossible de confondre l'effort, la pression simple qu'exerce un moteur sur un corps, avec son travail mécanique; et ce travail avec le mouvement actuel ou acquis d'un corps.

A la vérité, un corps mis en mouvement, un certain *effet dynamique* (123) peut, à son tour, devenir une cause, une source de travail : c'est ainsi, par exemple, qu'un corps lancé verticalement de bas en haut, est élevé, en vertu de sa vitesse, à une certaine hauteur, tout comme il le serait par l'action d'un moteur animé. Mais il arrive ici la même chose que lorsqu'une force motrice a développé une certaine quantité de travail pour bander un ressort élastique (97) : l'inertie de la matière a été mise en jeu de la même manière que les ressorts moléculaires l'ont été dans ce dernier cas ; cette inertie (106), quand elle a été ainsi vaincue, devient capable de restituer la quantité de travail dépensée, de même que le fait le ressort qui a été bandé. En un mot, l'inertie comme les ressorts (98), sert à *emmagasiner* le travail mécanique, en le transformant en force vive ; de sorte que la force vive est un véritable *travail disponible*.

Nous avons vu (102) qu'on peut en dire tout autant d'un corps qui a été élevé à une certaine hauteur, par un moyen quelconque ; ce corps, sollicité par la pesanteur, est la source d'une quantité de travail, dont on peut disposer subséquemment pour produire effectivement du travail mécanique. Mais, de même que nous ne disons pas, en termes absolus, que ce corps, actuellement élevé à une certaine hauteur, est une *force*, qu'un ressort bandé est une *force ;* de même aussi il est peu exact de dire qu'un corps en mouvement, que $\frac{P}{g}V^2$ est une *force*. Ces réflexions sont également applicables d'ailleurs aux *hommes*, aux *animaux* en général, aux *combustibles* ou au *calorique* enfermé dans les corps (99), aux *cours d'eau*, au *vent*, etc. ; ce sont des *agents* de travail, des *moteurs* si l'on veut, mais non de simples forces, de simples pressions (59).

L'objet de la Mécanique industrielle consiste principalement à étudier les diverses transformations ou métamorphoses que peut subir le travail des moteurs par le moyen des machines ou des outils, à comparer entre elles les quantités de ce travail, à les évaluer en argent ou en ouvrage de telle ou telle espèce, etc.

125. *Définition de la masse des corps.* Puisque la pesanteur agit indistinctement sur toutes les particules matérielles d'un corps, et tend, à chaque instant, à leur imprimer, le même degré de vitesse dans le même lieu (115), on voit que le poids de ce corps, qui est le résultat de toutes ces actions partielles, peut donner, jusqu'à un certain point, une idée de la *quantité de matière* qu'il renferme ou de sa *masse*. Suivant cette notion, la *masse* serait donc proportionnelle au poids ; souvent même on prend, dans les applications, les poids pour les masses. Mais, comme l'intensité de la pesanteur varie d'un lieu à un autre (61), et que la quantité de matière ou la *masse absolue* d'un même corps ne varie pas, on voit que cette dernière serait, dans certains cas, mal définie par le poids simple de ce corps.

Or, l'expérience apprend que la vitesse imprimée, par la pesanteur, au bout de la première seconde de chute, demeure constamment proportionnelle à son intensité; c'est-à-dire (117 et 121) que le rapport $\frac{P}{g}$ reste le même pour tous les lieux. Ainsi, P et P' étant les *poids absolus* (60) et dans le vide, d'un même corps transporté, par exemple, à deux hauteurs différentes; g et g' les vitesses qu'à ces hauteurs, la pesanteur imprime, dans le vide et à la fin de la 1re seconde de leurs chutes, à chaque particule de matière, on a

$$P : P' :: g : g' \quad \text{ou} \quad \frac{P}{g} = \frac{P'}{g'}.$$

C'est donc à ce rapport invariable $\frac{P}{g}$, et non au poids P lui-même, que s'applique véritablement, en Mécanique, la définition de la *masse* d'un corps; et l'on commettrait souvent des erreurs de calcul fort graves, en prenant le poids pour la mesure de la masse.

126. *Expression abrégée de la masse et de la force vive, dans les calculs.* Ordinairement on représente la valeur de la masse par la lettre m ou M : on a donc $M = \frac{P}{g}$, et, par suite, $P = M \times g = Mg$; P exprimant l'effort absolu exercé par la pesanteur sur un certain corps, et g la vitesse qu'elle lui imprime, dans le même lieu et dans le vide, au bout de la première seconde de sa chute verticale.

D'après cette convention, la valeur ci-dessus $\frac{P}{g} \times V^2$ de la *force vive* d'un corps (121) se trouve aussi représentée, dans les calculs mécaniques, par $M \times V^2$ ou MV^2, c'est-à-dire par *le produit de la masse de ce corps et du carré de sa vitesse acquise ou actuelle.*

127. *Quantité de mouvement des corps.* Les mécaniciens sont également convenus de nommer *quantité de mouvement* d'un corps, *le produit de sa masse,* définie comme on vient de le dire, *par la vitesse simple et actuelle que possède cette masse,* c'est-à-dire que $M \times V$ ou $\frac{P}{g} \times V$, qu'on écrit aussi MV, $\frac{PV}{g}$ pour la simplicité, est ce qu'on nomme une *quantité de mouvement* en Mécanique. Cette quantité est, comme on voit, très-différente de ce que nous avons appelé (80) la *quantité d'action* ou *de travail* des moteurs; et on ne

peut la confondre avec cette dernière, qu'autant (84) que l'on confondrait aussi l'effort d'un moteur avec le poids réel, ou plutôt avec la masse d'un corps ; ce qui n'est evidemment pas permis *.

128. *Observations générales*. Dans le fait, c'est principalement pour abréger et simplifier, tout à la fois, les calculs et les raisonnements qu'on emploie les dénominations de *masse*, de *quantité de mouvement*, et qu'on les représente par des lettres particulières ; on pourrait aisément s'en passer, ainsi que du mot *force vive*, dans l'exposition des principes de la Mécanique industrielle. Mais, comme tous les auteurs en ont fait usage, il devient important de bien se pénétrer de leur véritable signification, et de ne pas oublier qu'elles se rapportent toutes à des corps matériels et au mouvement véritable de ces corps ; ou plutôt qu'elles sont des expressions purement conventionnelles pour exprimer, d'une manière commode, certaines grandeurs numériques, certains résultats qui se présentent fréquemment dans les applications de la Mécanique.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LES FORCES MOTRICES EN GÉNÉRAL.

129. *Rapport des forces motrices au mouvement qu'elles impriment.* Nous venons de voir que la pesanteur imprime, à un même corps et au bout de la première seconde de sa chute verticale, des vitesses qui sont constamment proportionnelles à son intensité, ou au poids absolu du corps dans chaque lieu. Mais cette propriété provient

* Nommons Q la valeur, en nombre, de $\frac{P}{g} \times V$, on aura $Q = \frac{P}{g} \times V$, ou, ce qui revient au même, $Q : P :: V : g$. Mais P est le poids véritable d'un certain corps, g, ou $9^{m},8088$, est la vitesse que la pesanteur imprime à ce corps, au bout de la première seconde de chute et dans le lieu où nous sommes ; donc Q n'est autre chose que le poids absolu du même corps dans le lieu où la gravité serait capable de lui imprimer la vitesse V au bout de la première seconde de chute, c'est-à-dire l'effort qui soutiendrait le corps contre l'action de cette gravité. On voit aussi que la force vive $M \times V^2$ ou $MV \times V$ n'est elle-même que le produit de ce dernier poids, de cet effort, par la vitesse V, ou par le chemin que décrirait uniformément le corps, dans l'unité de temps, en vertu de sa vitesse acquise. Ces observations peuvent servir à distinguer entre elles, d'une manière absolue, la quantité de mouvement et la force vive, ainsi qu'à montrer l'identité de nature que, sous un certain point de vue, les mécaniciens ont attribuée à ces deux sortes de grandeurs, ainsi qu'au poids et au travail mécanique véritables ; elles expliqueront aussi comment on regarde quelquefois la quantité de mouvement comme une *force morte* (124), comme un poids ou un effort sans énergie, et la quantité de travail comme une force vive. Au surplus, nous n'avons nullement besoin de nous inquiéter de pareilles distinctions, de pareilles subtilités.

uniquement de ce que la pesanteur varie, en effet, très-peu (61) dans toute la hauteur de cette chute; de sorte que la vitesse totale, acquise en une seconde, est proportionnelle *aux degrés égaux* de vitesse imprimés à chaque instant (107 et suiv.). Lorsque la force motrice, au lieu d'être constante, varie à chaque instant, il est évident qu'alors son intensité ne peut plus se mesurer par la vitesse qu'elle imprime, à un même corps, au bout de l'unité de temps, et qu'elle dépend uniquement du *petit degré de vitesse* qu'elle lui communique à un instant donné.

L'observation de ce qui se passe à la surface du globe terrestre et dans les mouvements de notre système planétaire, prouve que

Les forces motrices ou de pression sont réellement proportionnelles aux degrés de vitesse très-petits, qu'elles impriment, à un même corps, dans des temps égaux infiniment petits.

Ce fait sert de base à toute la Mécanique du mouvement, et doit être considéré comme une loi générale des forces motrices de la nature.

130. *Mesure des forces motrices et d'inertie par la vitesse imprimée et réciproquement.* Soit F la mesure, en *kilogrammes,* d'une certaine force de pression; soit v le degré très-petit de vitesse qu'elle imprime à un corps, à une époque quelconque et pendant le temps très-petit t; soit pareillement P la pression que la pesanteur exerce, en un certain lieu, sur le corps, ou le poids de ce corps, et v' le petit degré de vitesse qu'elle lui imprime dans le même temps t. On aura, d'après ce qui précède,

$$\mathrm{F} : \mathrm{P} :: v : v'; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{v'} \times v.$$

Mais, d'après la première loi de la chute des corps (117), nous avons

$$v' : g :: t : 1''; \quad \text{d'où} \quad v' = gt; \quad \text{donc}, \mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{g} \times \frac{v}{t} = \mathrm{M} \times \frac{v}{t},$$

M étant la masse du corps (125).

Ainsi, quand on connaîtra la vitesse v imprimée dans le petit temps t, par la force F, on pourra calculer cette force, qui est égale et contraire à la résistance qu'oppose au mouvement (66), l'inertie de la matière de ce corps, *résistance* que nous avons nommée simplement la *force d'inertie*, et qu'on pourrait aussi appeler la *force dynamique* des corps. La relation $F = M \times \frac{v}{t} = M\frac{v}{t}$, nous apprend donc que

La force d'inertie F *croît proportionnellement à la masse du corps et aux degrés de vitesse* v *qu'il reçoit dans des temps élémentaires* t, *égaux et infiniment petits.*

De la relation ci-dessus, on tire réciproquement la valeur $v = \frac{F \times t}{M}$; donc

Le degré de vitesse *qu'une force motrice imprime à un corps, pendant un même temps élémentaire ou très-petit, croît proportionnellement à l'intensité de la force motrice et inversement à la masse de ce corps ou de son poids.*

131. *Rapport des forces motrices aux quantités de mouvement imprimées.* D'après nos définitions (127), le produit $M \times v$ ou Mv n'est autre chose que ce qu'on nomme une *quantité de mouvement*, en Mécanique. On voit donc que la première des propositions ci-dessus, revient à dire que

« La force d'inertie croît proportionnellement à la quantité de « mouvement communiquée dans un même instant très-petit t. »

Ou que

« Les forces motrices communiquent, dans des instants égaux et « infiniment petits, des quantités de mouvement qui leur sont pro- « portionnelles. »

Soient, en effet, F et F' deux forces motrices ou pressions quelconques agissant, pendant un même instant très-petit t, sur deux corps différents, de masses M et M'; soient v et v' les degrés de vitesse qu'elles leur impriment respectivement à la fin de cet instant, on aura, d'après ce qui précède, $F = M\frac{v}{t}$, $F' = M'\frac{v'}{t}$; et par conséquent

$$F : F' :: M\frac{v}{t} : M'\frac{v'}{t} :: Mv : M'v'.$$

Si donc les forces motrices F, F', ou les forces d'inertie qui leur sont directement opposées, avaient la même intensité, la même valeur en kilogrammes, les quantités de mouvement qu'elles imprimeraient, dans le même instant très-petit t, le seraient aussi;

ce qui résulte immédiatement de ce qu'on aurait alors

$$M\frac{v}{t} = M'\frac{v'}{t}, \quad \text{ou } Mv = M'v'.$$

On voit enfin que, si deux forces motrices, appliquées à deux corps différents, demeurent sans cesse égales entre elles et aux mêmes instants ; c'est-à-dire, si elles varient de la même manière, les *quantités de mouvement totales et finies* qu'elles auront imprimées à ces corps, entre deux instants quelconques, seront aussi *égales* entre elles ; car chacune d'elles sera la somme de quantités de mouvement partielles telles que Mv, $M'v'$, qui ont les mêmes valeurs pour les divers instants successifs et égaux dont se compose le temps total.

C'est ainsi qu'il faut entendre le principe par lequel les auteurs admettent quelquefois que les *forces motrices égales* impriment les mêmes quantités de mouvement *finies* à des corps quelconques ; car quelle que soit la petitesse de la durée du temps pendant lequel elles agissent, ce temps n'est pas *nul* (57) ; et quelle que soit la grandeur de leur intensité, elles ne sont pas *infinies ;* elles peuvent se mesurer en kilogrammes comme toutes les forces de pression, de traction, etc. Au surplus, je le répète, ces discussions sont parfaitement inutiles pour nous, qui n'admettons le mot *quantité de mouvement* que pour désigner un certain résultat des calculs, et pour abréger les énoncés des principes (128).

132. *Autre mesure des forces motrices et d'inertie.* Revenons maintenant à la considération simple d'une force unique F, agissant sur un corps de poids P ou de masse M (130) et supposons qu'à une certaine époque du mouvement d'un corps, cette force cesse tout à coup de varier, ou continue d'agir sur le corps avec l'intensité qu'elle possède à cette époque ; la vitesse augmentant ou diminuant dès lors de quantités proportionnelles au temps (107), cette intensité pourra être encore mesurée par la *vitesse finie* qu'elle imprimerait au corps, à la fin de la première seconde, s'il partait du repos au commencement de cette seconde. Désignant par V_1 cette vitesse finie, on aura

$$V_1 : v :: 1'' : t; \text{ d'où } V_1 = \frac{v}{t}, \text{ et } F = M \times \frac{v}{t} = MV_1.$$

Ainsi, dans le mouvement varié en général, la force motrice, égale et contraire à la force d'inertie, à la force dynamique, est *mesurée*, à chaque instant, par la *quantité de mouvement qu'elle imprimerait, au bout d'une seconde, si, au lieu de varier, elle demeurait ce qu'elle est à cet instant.*

133. *Calcul des mêmes forces par la loi géométrique du mouvement.* Ces dernières considérations sur la force motrice, dans le mouvement varié, sont analogues à celles qui concernent la vitesse même du mouvement (53), et on peut les reproduire également à l'aide d'une figure. Soit tracée (pl. II, fig. 32), comme il a été dit n° 108, pour le mouvement uniformément accéléré, la ligne $O'a'b'\ldots f'$, qui représente la loi des temps et des vitesses; soient cc', dd' les vitesses qui répondent au commencement et à la fin du très-petit temps cd ou t. Menons, par c', la parallèle $c'd''m$ à l'axe des temps OB; elle retranchera, de l'ordonnée dd', la petite longueur $d'd''$, représentant le *degré de vitesse* imprimé par la force motrice, dans la durée du petit temps $cd = c'd''$, degré dont nous avons désigné la valeur en nombre par v. Or, si l'on suppose qu'à partir du commencement de ce temps t, la force motrice devienne constante, ou (107) qu'elle imprime, dans les instants successifs égaux à t, des degrés de vitesse aussi égaux à $d'd''$; la loi des vitesses acquises sera exprimée (108) par une droite $c'n$, prolongement de $c'd'$, et qui sera tangente à la courbe $O'a'b'\ldots f'$, puisque l'intervalle cd ou t est censé excessivement petit. Prenant donc $c'm = 1''$, et élevant l'ordonnée mn, celle-ci ne sera autre chose que la vitesse V_1 acquise, au bout de l'unité de temps, en vertu de la force motrice supposée constante; et l'on aura, à cause des triangles semblables $c'\,d'd''$ et $c'mn$, la proportion

$$c'd'' \text{ ou } t \;:\; d'd'' \text{ ou } v \;::\; c'm \text{ ou } 1'' \;:\; mn \text{ ou } V_1;$$

d'où l'on tire, comme ci-dessus, $V_1 = \frac{v}{t}$.

Ainsi, quand on connaîtra la loi qui lie les temps aux vitesses imprimées, ou la courbe qui représente cette loi, on pourra, pour chaque instant, et par le tracé d'une tangente de cette courbe, déterminer la vitesse V_1; et, par suite, calculer, comme il a été expliqué précédemment (130 et 132), la valeur $MV_1 = \frac{P}{g} \times V_1$ de la force motrice F qui produit l'accélération du mouvement du corps, ou, ce qui est la même chose (130), la résistance égale et contraire, que l'inertie de la matière du corps oppose, à chaque instant, à l'action de cette force.

134. *Trouver la loi du mouvement quand on a celle de la force.* Réciproquement, si l'on connaît, pour chaque instant et par le moyen d'une table ou d'une courbe, la valeur de la force motrice F, on en déduira les valeurs correspondantes de $V_1 = \frac{F}{M} = \frac{g.F}{P}$, inclinaisons des tangentes $c'n$ de la courbe des vitesses; car la mesure de ces inclinaisons est donnée par le rapport $\frac{mn}{c'm} = V_1$. Si l'on connaît d'ailleurs la *vitesse initiale* OO′ du corps, vitesse nulle quand ce corps part du repos, rien ne sera plus facile que de tracer la courbe des vitesses successivement acquises sous l'action de la force motrice; puisqu'au moyen des inclinaisons des tangentes correspondantes à chaque abscisse ou à chaque temps Oa, Ob, Oc,.... on pourra, de proche en proche, construire les positions consécutives $O'a'$, $a'b'$, $b'c'$,.... des éléments rectilignes de cette courbe, et en déduire les ordonnées correspondantes aa', bb', cc', qui mesurent les vitesses acquises par le corps à la fin des divers temps Oa, Ob, Oc....

Par exemple, la vitesse initiale du corps étant OO′, on mènera $O'm'$ parallèle à OB et égale à l'unité de temps; puis, ayant calculé la valeur de V_1 relative à l'intensité de F au moment où l'action commence, on portera cette valeur sur l'ordonnée $m'n'$, de m' en n'; traçant $O'n'$, ce sera la direction de l'élément $O'a'$; et l'ordonnée aa', qui répond au premier instant Oa, donnera, en la terminant à la droite $O'n'$, la grandeur de la vitesse à la fin de cet instant : en répétant les mêmes opérations pour le point a', on en déduira b' et bb', etc. On pourra d'ailleurs diminuer la longueur des tracés, en construisant quelque part (fig. 33) les inclinaisons successives pn, pn', pn'',.... des tangentes relatives aux divers instants; car on en déduira, de suite, les accroissements de vitesses tv, tv', tv'',.... acquises par le corps à la fin des instants égaux représentés par pt.

Il est évident que plus sera grand le nombre des parties égales

7*

dans lesquelles on aura divise le temps total, où l'on suppose que la force motrice opère, plus la courbe, ainsi construite, s'approchera de représenter la véritable loi du mouvement communiqué par cette force. Enfin on remarquera que les trapèzes $bb'c'c$, $cc'd'd$, ... fig. 32, représentent encore ici (108) les chemins élémentaires décrits, par le corps ou par le point d'application de la force, dans les petits temps correspondants bc, cd. ... ; car nous supposons expressément (130) que cette force agit dans le sens même du mouvement du corps, et que toutes les parties de ce dernier marchent *parallèlement* et de la *même quantité*. On trouvera donc aussi le chemin décrit par le corps, au bout d'un temps quelconque et sous l'action de la force motrice variable, en mesurant l'aire totale de tous les petits trapèzes relatifs à ce temps, c'est-à-dire la surface même du trapèze curviligne $OO'f'f$, par exemple, qui répond à ce temps. Or cette surface s'obtiendra aisément à l'aide du procédé de calcul qu'on trouvera exposé à la fin de ces PRÉLIMINAIRES, et que nous avons déjà signalé (72), à l'occasion de la mesure du travail mécanique variable.

DE LA FORCE VIVE DES CORPS EN GÉNÉRAL ET DE SA RELATION AVEC LE TRAVAIL MÉCANIQUE.

135. *Mesure du travail des forces motrices et d'inertie.* A l'aide des notions qui précèdent, nous pouvons calculer la quantité de travail que doit dépenser, contre un corps de poids P, une force de pression qui varie à chaque instant en demeurant égale et contraire à la force d'inertie, pour imprimer à ce corps une certaine vitesse, ou plus généralement, pour augmenter ou diminuer sa vitesse d'une quantité donnée.

En effet, cette quantité de travail est mesurée, pour chaque instant très-petit t, par le produit de la *valeur moyenne* (72) de la force motrice dans la durée de ce temps, valeur que nous nommerons F, et du chemin élémentaire décrit, dans ce même instant, par le point d'application de la force, et dans la direction propre de cette force. Ce petit chemin, comme on vient de le rappeler, est donné sur la fig. 32, par l'aire du trapèze élémentaire $cc'd'd$, par exemple, formé (108) sur la vitesse moyenne correspondante $\frac{1}{2}(cc' + dd')$, que nous nommerons V, et sur l'élément de temps cd ou t; c'est-à-dire par le produit $V \times t$. Donc la quantité de travail élémentaire en question est $F \times V \times t$ pour chaque instant, ou pour chaque petit accroissement $d'd''$ de la vitesse, dont la valeur a déjà été nommée v. Or nous avons trouvé ci-dessus (130) que la valeur correspondante de F était $M \times \frac{v}{t}$, ainsi cette quantité de travail est $M \times V \times v$.

C'est la somme de toutes ces quantités de travail partielles qui composent le travail total, et cette somme est facile à trouver par la considération d'une figure. A partir du point O (pl. II, fig. 34), pris pour origine, portons, sur la droite OB, les divers accroissements successifs Oa, ab, bc, cd.... de la vitesse, répondant aux divers instants égaux écoulés depuis celui du départ du corps, accroissements qui ne seront point égaux dans le cas du mouvement varié; il est clair que les longueurs Oa, Ob, Oc, Od.... seront les vitesses totales acquises aux instants correspondants. Portons ces mêmes longueurs sur les ordonnées correspondantes aa', bb', cc', dd'....; de telle sorte qu'on aura $Oa' = Oa$, $bb' = Ob$, $cc' = Oc$....; la suite des points $Oa'b'c'$.... va former une ligne droite inclinée à 45°, sur l'axe des abscisses OB. Cela posé, considérons en particulier l'accroissement de vitesse $d'd''$ qui a été nommé v, le produit $V \times v$ de cet accroissement par la vitesse moyenne correspondante $V = \frac{1}{2}(cc' + dd')$ sera ici représenté par l'aire du petit trapèze $cc'd'd$. Donc la somme cherchée de tous les produits $V \times v$, a pour mesure celle des petits trapèzes correspondants, ou l'aire comprise entre la courbe, l'axe OB des abscisses et les ordonnées qui représentent la vitesse au commencement et à la fin de l'intervalle de temps pour lequel on veut calculer le travail de la force motrice.

136. *Relation entre le travail développé et la force vive acquise.* Supposons en premier lieu que le corps parte du repos, et qu'il s'agisse de trouver la somme des produits $V \times v$, relative à la vitesse acquise dd', que nous nommerons V'; cette somme étant représentée par l'aire du triangle Odd', aura pour mesure $\frac{1}{2} dd' \times Od$ ou $\frac{1}{2} dd' \times dd' = \frac{1}{2} V'^2$. Donc, *la quantité de travail correspondante à la vitesse acquise* V' *et consommée par l'inertie du corps, sera mesurée* (135) par $\frac{1}{2} M \times V'^2 = \frac{1}{2} MV'^2$, ou *par la moitié de la force vive communiquée à ce corps depuis l'instant du départ* (122 et 126). Ce principe a donc lieu aussi pour un mouvement quelconque et pour une force motrice différente de la pesanteur.

Pour une autre vitesse ff' ou V'' plus grande que la première, la consommation de travail sera également mesurée par $\frac{1}{2}M \times V''^2$ ou $\frac{1}{2}MV''^2$; et par conséquent, pour l'intervalle compris entre les positions du corps qui répondent aux vitesses V' et V'', la quantité de travail consommée sera mesurée par la différence $\frac{1}{2}MV''^2 - \frac{1}{2}MV'^2$, correspondante au trapèze $dd'f'f$. Or MV'^2 et MV''^2 sont les *forces vives* possédées par le corps au commencement et à la fin de l'intervalle de temps pour lequel on considère le travail de la force; c'est donc encore l'*accroissement* de la force vive, ou la force vive *communiquée et acquise* dans cet intervalle; de sorte que le principe ci-dessus peut s'appliquer à deux instants quelconques du mouvement d'un corps. C'est-à-dire que

La quantité de travail, dépensée par une force motrice quelconque qui agit directement dans le sens du mouvement d'un corps, a, dans tous les cas, pour mesure la moitié de la force vive communiquée ou acquise par le corps, entre les instants où l'on considère ce travail.

C'est aussi évidemment la mesure même du travail consommé par l'inertie du corps (130), ou qu'elle développe, en sens contraire, contre l'action de la force motrice.

137. *Cas où la force motrice est opposée au mouvement du corps.* On remarquera que ce qui précède suppose que la vitesse du corps augmente sans cesse; s'il en était autrement, ce serait un signe que la force motrice serait opposée au mouvement ou serait *retardatrice;* de sorte qu'elle agirait alors comme une véritable *résistance* (58). Du reste, tous nos raisonnements demeureraient encore applicables, et l'on trouverait que la quantité de travail ou d'action développée par cette résistance, toujours égale et directement contraire à la force d'inertie devenue *puissance,* serait, pour un certain intervalle de temps pendant lequel la vitesse antérieurement acquise V' aurait été réduite à V'', par exemple, égale à $\frac{1}{2}(MV'^2 - MV''^2)$ ou à la moitié de la force vive qui a été *perdue* ou *détruite.*

Ainsi la diminution de la force vive d'un corps entre deux instants suppose qu'une quantité de travail ou d'action, égale à la moitié de cette diminution, a été développée par l'inertie de ce corps contre des obstacles ou des résistances, comme son augmentation suppose, de la part d'une puissance, une consommation de travail égale à la moitié de cette augmentation; principe qu'on peut énoncer généralement ainsi :

La perte ou le gain de force vive éprouvés par un corps, entre deux instants quelconques, a pour mesure le double de la quantité de travail développée par l'inertie de ce corps ou par la force motrice égale et directement contraire.

138. *Transformation du travail en force vive et réciproquement.* On voit clairement maintenant comment, en général, l'inertie de la matière sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail ; ou, pour nous exprimer comme nous l'avons fait précédemment (124), à l'occasion du mouvement vertical des corps pesants, on voit que l'inertie sert à *emmagasiner* le travail des moteurs en le convertissant en force vive, et à le *restituer intégralement* ensuite, lorsque cette force vive vient à être détruite contre des résistances.

Les arts industriels nous offrent une infinité de circonstances où ces transformations successives s'opèrent par le moyen des machines, des outils, etc. L'eau renfermée dans le réservoir d'un moulin représente une certaine quantité de travail *disponible*, qui se change en force vive quand on ouvre la *vanne* de retenue ; à son tour, la force vive acquise par cette eau, en vertu de sa chute du réservoir, se change en une certaine quantité de travail quand elle agit contre la roue du moulin, et celle-ci transmet ce travail aux meules, etc., qui confectionnent l'ouvrage. — L'air refoulé dans le réservoir d'un fusil à vent représente la valeur mécanique du travail dépensé, par un certain moteur, pour l'y emprisonner (98) ; en lâchant la détente, l'air chasse la balle et convertit une certaine portion de ce travail en force vive : si la balle est lancée contre un ressort ou un corps élastique quelconque retenu par un obstacle, ce ressort va se bander, se comprimer en opposant une résistance, de plus en plus forte (97), égale et contraire à la force d'inertie de la balle, et qui finit par éteindre le mouvement quand la quantité de travail développée par la résistance du ressort atteint une valeur égale à la moitié de la force vive que possédait la balle. Le ressort étant maintenu, à cet instant, par un moyen quelconque, la force vive s'y trouvera emmagasinée ou convertie en quantité de travail disponible, de la même manière que s'il avait été bandé par une force motrice quelconque (97) ; si donc on vient à supprimer l'obstacle qui maintient le ressort dans sa dernière position, ou si on le laisse réagir immédiatement contre la balle, celle-ci sera lancée, en sens contraire, avec une vitesse telle que la force vive qu'elle acquerra sera le double de la quantité d'action ou de travail restituée, par le ressort, dans son débandement (136).

139. *Restitution et consommation de la force vive dans le choc des corps.* Si on suppose que le ressort soit parfaitement élastique, la vitesse transmise à la balle sera précisément égale à celle que le fusil à vent lui avait d'abord imprimée dans une direction contraire; car le travail développé dans le débandement sera aussi égal (97) à celui qui, d'abord, a été emmagasiné, etc. Ainsi, dans l'exemple dont il s'agit, la *quantité de travail* a été alternativement changée en *force vive*, et la *force vive* en *quantité de travail*, sans qu'il y ait eu rien de perdu ni de gagné. Mais, si le ressort n'est pas parfaitement élastique, une portion de la force vive imprimée à la balle, sera employée (103) à détruire les forces moléculaires de ce ressort.

Ainsi, dans le choc des corps non parfaitement élastiques, il y a toujours une perte de quantité de travail, mesurée par la moitié de la force vive détruite. Presque tous les corps étant dans ce cas, et la quantité de travail consommée inutilement par les forces moléculaires étant comparable à celle que développe l'inertie pendant que les corps se compriment, on voit que, si la masse de ces corps et la vitesse en vertu de laquelle leur choc s'opère, est considérable, il y aura eu, dans un très-petit temps, une grande perte de quantité d'action; et voilà pourquoi, comme nous l'avons déjà observé (96), il faut surtout éviter les chocs dans le mouvement des machines industrielles. Au surplus, nous reviendrons bientôt sur ce sujet, dont l'examen circonstancié ne serait pas ici à sa place, et dérangerait l'ordre naturel des idées.

140. *Réflexions nouvelles sur l'impossibilité d'augmenter le travail mécanique.* On voit encore, par tout ce qui précède, qu'il est aussi impossible de se servir de la force de ressort que de celle de la gravité (120) pour imprimer à un corps une vitesse plus grande que celle qu'il possédait primitivement, ou pour augmenter le travail quelconque d'une puissance; et qu'au contraire, cette vitesse restituée sera toujours moindre que la vitesse primitive. Mais, comme la portion de vitesse ou de force vive, détruite dans le choc, a été employée réellement à vaincre certaines résistances moléculaires,

et par conséquent à produire un certain travail, nous avons pu dire ci-dessus (138) que la force d'inertie restitue *intégralement* la quantité de travail qui a été dépensée pour la mettre en jeu : seulement il arrive ici qu'une portion de ce travail est, dans certains cas, *étrangère* à l'ouvrage qu'il s'agit réellement de produire, ou n'est point considérée comme faisant partie de l'*effet utile*, ainsi qu'il a déjà été expliqué généralement (104), à l'occasion des autres forces motrices.

141. *Examen particulier du mouvement périodique*. Nous venons de montrer, par des exemples, comment la quantité de travail peut être transformée alternativement en force vive, et la force vive en travail par le moyen des ressorts et des machines qui les emmagasinent et les restituent successivement. Ces transformations se présentent, en général, toutes les fois que le mouvement d'un corps, sollicité par une puissance motrice, est, par sa liaison avec d'autres corps, contraint de varier à chaque instant, de manière à devenir tantôt accéléré et tantôt retardé; genre de mouvement que nous avons déjà examiné et défini en lui-même (49), et qui se rencontre spécialement dans les pièces des machines qui *oscillent*, qui *vont et viennent* entre deux positions extrêmes qu'elles ne peuvent dépasser, et pour lesquelles leur vitesse devient nulle forcément en changeant de direction. Le mouvement des scies, des rabots, des limes, des pistons de pompe et de la plupart des outils employés dans les arts manuels est évidemment dans ces cas.

Or, lorsque la vitesse du corps augmente, ce qui arrive nécessairement au commencement de chaque *période* ou *alternation*, c'est un signe (136) qu'une certaine portion du travail du moteur agit dans le sens du mouvement pour accroître la force vive d'une quantité égale au double de cette portion; le surplus du travail étant absorbé par les autres résistances. Lorsque, au contraire, la vitesse du corps vient à ralentir vers la fin de chaque période, c'est un signe (137) qu'une certaine portion de la force vive précédemment acquise, a été dépensée, contre les mêmes résistances, pour augmenter le travail du moteur d'une quantité égale à la moitié de cette portion, et ainsi de suite selon le nombre des alternatives du mouvement.

Comment se comporte l'inertie dans ce mouvement. On voit, d'après cela, que, quand la vitesse ou la force vive d'un corps oscille entre certaines limites, c'est une preuve que l'inertie absorbe et restitue successivement des portions du travail de la puissance, qui sont égales pour tous les instants où la vitesse est redevenue la même ; c'est-à-dire que, dans l'intervalle de deux quelconques de ces instants, il n'y a eu rien de perdu ni de gagné, et que la puissance doit être considérée comme ayant été entièrement employée à vaincre les résistances autres que l'inertie. Mais, si dans un intervalle de temps quelconque, la vitesse, après avoir subi également des alternatives de grandeur, ne redevient pas ce qu'elle était d'abord, la moitié de la différence des forces vives qui répondent à la fin et au commencement de cet intervalle, mesure (136 et 137) la quantité de travail qui a été réellement consommée ou restituée par l'inertie du corps. Par conséquent, si le corps était parti du *repos*, la quantité de travail consommée, par l'inertie, à un instant quelconque, serait mesurée seulement par la moitié de la force vive acquise à cet instant.

142. *Démonstration des mêmes choses par la Géométrie.* On remarquera que tous les raisonnements qui précèdent peuvent être reproduits directement à l'aide de la fig. 34 ci-dessus, et des considérations du n° 136. Car, lorsque la vitesse du corps diminue après avoir augmenté pendant un certain temps, il en est de même de l'abscisse et de l'ordonnée de la droite Of, qui représentent cette vitesse : ainsi l'ordonnée ff', par exemple, après s'être éloignée de l'origine jusqu'à un certain point, en *balayant des aires triangulaires* Oaa', Obb'....Off', proportionnelles à la quantité de travail absorbée par l'inertie, ou à la moitié de la force vive acquise par le corps, se rapproche ensuite de cette même origine, en soustrayant, de la plus grande aire ou du plus grand triangle Off', des surfaces trapézoïdes $ff'e'e$, $ee'd'd$,.... qui diminuent, de plus en plus, l'aire de ce triangle relatif à la plus grande force vive ; de sorte que, l'ordonnée étant arrivée au point O, qui correspond à une vitesse nulle, le travail absorbé par l'inertie sera également nul. Si ensuite la vitesse augmente de nouveau, le travail consommé par l'inertie croîtra, comme dans la première période, de quantités mesurées, à chaque instant, par l'aire du triangle qui correspond à la vitesse acquise à cet instant ; et ainsi de suite alternativement.

Enfin, si on considère le mouvement entre deux instants quelconques pour lesquels la vitesse serait représentée par bb' et ee', par exemple, il est bien clair, d'après nos raisonnements, que le travail absorbé ou développé par l'inertie, sera mesuré par l'aire du trapèze *bb'e'e* formé sur ces vitesses, et sur leur accroissement ou leur diminution *be*.

143. *Exemples particuliers relatifs au mouvement périodique*. Une voiture qui chemine avec une vitesse, tantôt plus grande, tantôt plus petite, offre l'exemple de ce que nous venons de dire : d'abord les chevaux dépensent une certaine quantité de travail pour la mettre en mouvement au pas ou au trot ; puis, lorsque la vitesse de la voiture vient à ralentir par suite de l'augmentation des résistances, ou de la diminution d'action des chevaux, cette même inertie développe contre ces résistances une portion du travail qu'elle avait d'abord absorbée, et qui est égale à la moitié de la diminution qu'a éprouvée la force vive. Si on suppose que les choses continuent ainsi alternativement, et qu'à la fin la voiture soit remise au repos, la quantité de travail restituée par l'inertie se trouvera précisément être égale à la quantité de travail même qu'elle a consommée d'abord ; de sorte qu'en réalité, il n'y aura rien eu de perdu. Il est entendu d'ailleurs que les diminutions de vitesse, éprouvées par la voiture, ne proviennent pas du fait même des chevaux, comme cela arrive quelquefois dans les descentes rapides où on les fait *retenir*, ni de ce qu'on aurait *enrayé* les roues, puisqu'alors ces chevaux ou l'*enrayure* auraient servi à augmenter les véritables résistances, et à consommer la force vive d'abord acquise, sans utilité immédiate pour l'objet du transport.

Lorsqu'un moteur est employé à élever verticalement des fardeaux, il prend le corps au repos ; de là une consommation de travail pour vaincre l'inertie de ce corps, et l'amener à un certain état de mouvement ; arrivé à la hauteur voulue, le moteur ralentit sa propre vitesse pour remettre de nouveau le corps au repos. Dans ce ralentissement, la force vive acquise par le corps est employée à détruire une portion de l'effet de la pesanteur sur ce même corps, ou plutôt elle sert à l'élever verticalement d'une certaine hauteur ; c'est ce qu'on aperçoit très-bien, en effet, dans les mouvements d'ascension tant soit peu rapides ; ainsi donc l'inertie a réellement rendu ce qu'elle avait absorbé primitivement.

Les mêmes réflexions peuvent être appliquées encore au travail du limeur, du scieur, etc., puisqu'à la fin de chaque oscillation de l'outil, la vitesse devient nulle comme elle était au commencement.

On remarquera que, dans tous les exemples qui précèdent, le mouvement est censé naître ou s'éteindre par degrés insensibles, c'est-à-dire lentement et sans secousses, de sorte que les pertes de force vive, qui proviennent de la réaction mutuelle des parties qui communiquent ou reçoivent ce mouvement (95 et suiv.) sont réellement inappréciables. Mais il n'en serait pas ainsi du cas où, la vitesse changeant brusquement à la fin et au commencement de chaque période, il y aurait choc entre corps non parfaitement élastiques, ainsi qu'il arrive dans certaines dispositions vicieuses des pièces qui entrent dans la composition des machines; et l'on ne doit pas oublier qu'alors une portion, plus ou moins notable (139), de la force vive, peut être employée inutilement à détruire la force d'agrégation des molécules, ou à changer la forme des corps qui se choquent.

144. *Du rôle que joue l'inertie dans divers procédés des arts.* Afin de donner une idée plus complète encore du rôle que joue l'inertie des corps dans les travaux industriels, et de montrer comment elle peut servir à expliquer une infinité de procédés des arts, nous allons ajouter quelques exemples à tous ceux qui ont été rapportés jusqu'à cette heure.

Pour faire sortir le ciseau d'une varlope, l'ouvrier frappe le bois sur le derrière; en imprimant ainsi brusquement de la vitesse à ce bois, le ciseau et son coin résistent par leur inertie, ou ne cèdent qu'en partie au mouvement. — En frappant brusquement sur la douve qui porte la bonde d'un tonneau, on imprime à cette douve un mouvement très-rapide, auquel résiste cette bonde comme si elle était retenue fortement par la tête; en conséquence, elle est séparée de la douve, en vertu de sa seule inertie, avec un effort supérieur à celui qu'on pourrait obtenir par des moyens plus directs et cependant très-puissants : c'est à peu près de la même manière encore que les clous, les boulons d'assemblage, etc., sont arrachés par l'effet des chocs et des secousses. — On emmanche souvent un outil, par exemple un marteau, en frappant la queue du manche dans le sens de sa longueur; ce manche chemine, et l'inertie de la matière qui tend à maintenir le marteau au repos résiste au mouvement imprimé, de la même manière que si ce marteau eût été réellement appuyé contre un obstacle fixe.

Voici encore quelques exemples de la manière dont l'inertie des corps sert à transformer le travail en force vive et la force vive en travail. — La *toupie*, lancée à terre, tourne et chemine en vertu de la force vive qui y a été primitivement accumulée par le déroulement accéléré de la ficelle, déroulement produit par le travail de la main qui tend cette ficelle tout en lançant la toupie. — Le *diable* est un autre exemple du moyen qu'on peut employer pour accumuler, de plus en plus, la force vive dans un corps mobile autour d'un axe horizontal. — Le jouet que les enfants nomment *tourniquet* reçoit d'abord sa vitesse par le déroulement du fil enveloppé autour de son axe et tiré rapidement avec la main; en vertu de l'inertie du *volant* placé sur cet axe, le mouvement continue et sert à enrouler le fil, en sens contraire, en le tirant avec un effort semblable à celui qu'a d'abord exercé la main : ce moyen peut même être employé dans les grandes machines pour transformer le travail des moteurs en force vive, puis la force vive en travail ordinaire. — On se sert avec avantage, dans les arts, du *tour à pédale* et *à ressort* pour les pièces légères et de petites dimensions, parce que l'inertie exerce alors peu d'influence et que les *alternations*, les changements de direction du mouvement, s'opèrent sans secousses et sans danger pour les différentes pièces : mais l'emploi de ce tour aurait des inconvénients fort graves pour les grosses pièces et surtout pour les pièces de métal; c'est ce qui fait qu'alors on substitue à ce tour, le *tour à mouvement de rotation continu* ou qui chemine toujours dans le même sens.

145. *Observations sur ces exemples.* Nous engageons le lecteur à méditer attentivement ces divers exemples, que nous ne faisons en quelque sorte qu'indiquer, et d'en agir de même à l'égard de tous ceux que la pratique des arts pourrait offrir à ses méditations : ils serviront à lui bien faire concevoir comment l'inertie de la matière se comporte, tantôt comme une simple résistance, tantôt comme une véritable puissance, absolument de la même manière que la pesanteur des corps et les ressorts élastiques (97 et 102).

Au surplus, nos derniers exemples concernent principalement l'inertie des pièces qui ont un mouvement de rotation, et tout ce que nous avons dit jusqu'à présent de la force vive, est uniquement (130 et suiv.) relatif au mouvement de transport des corps, dont les diverses parties sont animées de la même vitesse. Mais nous verrons plus tard que les principes qui précèdent, sur la force vive et le travail mécanique, peuvent s'étendre à tous les cas, et nous apprendrons même à calculer rigoureusement la valeur de ce travail, de cette force vive, quel que soit le mouvement d'un corps ou d'une machine. Pour le moment, il nous suffira de donner une série d'applications, en nombres, relatives au mouvement de transport parallèle, afin de faire apprécier, à sa juste valeur, l'influence de l'inertie dans les travaux industriels, et de montrer l'exactitude, l'utilité des principes de la Mécanique, dans les questions variées que présente la pratique des divers arts.

Ces applications doivent être considérées, par nos lecteurs, comme une partie essentielle de ce Cours, et comme un exercice indispensable pour bien saisir le but et l'esprit des vérités fondamentales de la science. Il s'en présentera, par la suite, un grand nombre d'autres très-importantes; mais, avant de les exposer, il sera nécessaire d'entrer plus avant dans l'étude des lois du mouvement et de l'action des forces; car, dans toute cette première partie, nous supposons constamment les choses ramenées à cet état final de simplicité où des forces, quoique variables à chaque instant, en direction et en intensité, exercent néanmoins leurs actions réciproques suivant une droite qui est unique pour ce même instant, et qui se confond avec la direction propre du chemin décrit par le point d'application où on suppose, en quelque sorte, ces actions et le mouvement des corps concentrés. Les principes subséquents montreront d'ailleurs comment cette supposition, jusque-là gratuite, est rigoureusement permise.

FIN DES PRÉLIMINAIRES.

APPLICATIONS,

EXERCICES ET DÉVELOPPEMENTS DIVERS.

QUESTIONS CONCERNANT L'INERTIE ET LA FORCE VIVE.

146. *Travail nécessaire pour vaincre l'inertie d'une voiture.* Considérons une voiture de roulier cheminant sur une route horizontale; supposons qu'elle pèse, en tout, 10000 kil., et qu'elle doive être mise en mouvement, par des chevaux, avec une vitesse moyenne (49) de 1^{m} par seconde; la consommation de travail pour vaincre, dans les premiers instants, son inertie indépendamment des autres résistances, sera (136) $\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 = \frac{1}{2}\frac{10000}{9,81} \times 1^{m} \times 1^{m} = 510^{km}$, puisque nous avons $P = 10000^{k}$, $V = 1^{m}$, $g = 9^{m},81$ environ.

Or on sait, par expérience, qu'un bon cheval de roulier, marchant régulièrement huit heures par jour, en 2 relais et avec la vitesse du pas ordinaire qui est d'environ 1^{m} par seconde, développe *moyennement* (81), un travail d'au moins 70^{km} dans chacune de ces secondes. Si donc il y en avait huit, de cette force, attelés à la voiture, ils donneraient au moins 560^{km} dans le même temps; de sorte que le travail que devraient dépenser les chevaux, pour mettre cette voiture en mouvement dans les premiers instants, ne serait pas même égal à celui qu'ils peuvent développer, d'une manière soutenue et par seconde, quand la voiture chemine régulièrement; d'où l'on voit le peu d'influence exercée alors par l'inertie propre d'une aussi grande masse.

Si la voiture devait aller avec la *vitesse du trot,* qui est de 2^{m} environ par seconde, alors le travail absorbé par l'inertie serait $510 \times 2 \times 2 = 2040^{km}$, c'est-à-dire quadruple; si elle devait aller *au galop ordinaire* de 4^{m} par seconde, la consommation de travail serait $510 \times 4 \times 4 = 8160^{km}$, c'est-à-dire 16 fois celle qui répond à la vitesse de 1^m.

On voit, par là, que le travail nécessaire pour vaincre l'inertie dans les premiers instants, augmente très-rapidement avec la vitesse imprimée à la voiture ; ce qui tient à ce que la force vive croît elle-même *comme le carré* de cette vitesse.

147. *Temps nécessaire pour imprimer le mouvement à la voiture.* Il est essentiel de remarquer qu'on ne peut rien inférer, de ce qui précède, relativement à la durée du temps qu'emploient les chevaux pour mettre effectivement la voiture en mouvement à partir du repos. Car, d'un côté, nous avons fait abstraction de la résistance du terrain et des divers frottements, et, de l'autre, il peut bien arriver que la voiture acquière, au bout de la première seconde et sous l'effort réuni des huit chevaux, une vitesse qui soit plus petite ou plus grande, par exemple, que celle de 1^m considérée dans le premier des cas ci-dessus : cela dépend principalement de l'intensié absolue de cet effort (129 et suiv.) dans chaque instant infiniment petit.

Pour mettre la chose dans tout son jour, nous supposerons que l'effort des huit chevaux soit seulement de 560 kil., c'est-à-dire égal à celui qui répond à l'allure du pas ordinaire, et qu'au lieu de varier, comme cela arrive effectivement au moment du départ, il demeure constamment le même ; on trouvera facilement, d'après la formule $V_1 = \frac{F}{M} = \frac{g.F}{P}$ des n^{os} 132 et 134, la valeur de la vitesse qui serait transmise, par cet effort, au bout de la première seconde de temps écoulé. Car nous avons ici, $F = 560^{kil}$, $M = \frac{P}{g} = \frac{10000^{kil}}{9^m,81} = 1020$ environ ; et la vitesse cherchée $V_1 = \frac{F}{M} = 0^m,549$: cette vitesse est loin d'égaler un mètre ; mais aussi le chemin décrit et le travail développé, par les chevaux, pendant la première seconde de temps, sont bien moindres que 1^m et 560^{km}. En effet, nous savons que le chemin, décrit au bout de la première seconde sous l'action d'une force constante (110), est égal à la moitié de la vitesse acquise à la fin de cette seconde ; c'est-à-dire qu'il est ici $\frac{1}{2}\,0^m,549 = 0^m,275$, de sorte que les chevaux n'ont réellement développé, dans la supposition ci-dessus, qu'une quantité de travail de $560^k \times 0^m,275 = 154^{km}$, sous l'effort des 560 kil., censé constant.

Pour développer réellement, dans la première seconde, la quantité de travail qui répond à la vitesse de 1^m acquise par la voiture, il faudrait que les chevaux exerçassent, à partir du repos, un effort constant qu'on trouvera au moyen de la relation $F = MV_1$; car ici V_1 doit être égal à 1^m, et par conséquent $F = MV_1 = 1020$ kil.; ce qui donne, pour chaque cheval, $\frac{1}{8}\, 1020 = 127^k,5$. Or on sait, par expérience, que l'effort d'un cheval ordinaire, contre un obstacle qui cède peu au mouvement, peut être beaucoup plus grand et surpasser même 350 kil.; d'où il résulte qu'en réalité, nos huit chevaux mettraient beaucoup moins d'une seconde de temps à imprimer la vitesse d'un mètre à la voiture, s'ils n'avaient pas à vaincre, en outre de l'inertie, la résistance du terrain, des essieux, etc.

148. *Observation générale sur le travail des moteurs.* Ce que nous venons de dire du travail des chevaux, dans les premiers instants du mouvement de la voiture, s'applique, comme on le verra plus tard, généralement à tous les moteurs : l'effort qu'ils exercent sur les corps est d'autant plus grand que leur vitesse est moindre, et il diminue, d'une manière plus ou moins sensible, à mesure que la rapidité du mouvement augmente, jusqu'à devenir tout à fait nul quand enfin la vitesse égale la plus grande vitesse que ces moteurs peuvent s'imprimer ou acquérir par le développement libre et complet de toute leur activité. C'est ainsi, par exemple, qu'un homme, un cheval qui courraient ou se mouvraient, d'une manière quelconque, avec toute la vitesse qu'ils peuvent prendre, ne seraient susceptibles (86 et suiv.) d'aucun effort extérieur un peu soutenu.

On peut donc déjà prévoir que, pour toute espèce de moteur, il existe un degré de vitesse qui est le plus avantageux possible sous le rapport du travail produit, puisque ce travail devient sensiblement nul (90) dans les deux cas extrêmes dont il s'agit. Mais c'est ce qui sera démontré plus clairement, par la suite, quand nous en viendrons à examiner les conditions du *maximum* d'effet, relatives à chacun des moteurs en usage dans l'industrie manufacturière.

149. *Exemples relatifs à la force vive des fardeaux et des eaux courantes des rivières.* Supposons qu'un moteur soit employé à élever,

à une certaine hauteur verticale, un poids de 5000 kil., soit directement, soit par l'intermédiaire d'une machine quelconque, et que la vitesse du mouvement, à l'instant où elle est la plus grande (143), soit de $0^m,3$ par seconde, ce qui est déjà une vitesse considérable pour un si lourd fardeau; le travail consommé par l'inertie, avant l'instant où ce degré de vitesse est acquis, aura pour valeur $\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 = \frac{1}{2}\frac{5000^k}{9,81} \times 0,09 = 23^{km}$ environ. Si le moteur devait élever seulement le fardeau à 1^m de hauteur, il dépenserait $5000^k \times 1^m = 5000^{km}$, c'est-à-dire, au moins 210 fois le travail qui est nécessaire pour vaincre l'inertie dans les premiers moments; encore arriverait-il que cette inertie restituerait (143), dans le ralentissement du fardeau vers le haut de sa course, le travail qu'elle avait primitivement absorbé.

Considérons encore le mouvement des eaux d'une rivière, telle que la Moselle, par exemple : on sait qu'à Metz, en particulier, elle fournit, même dans les grandes sécheresses, au moins 10 mètres cubes d'eau par chaque seconde, dont le poids (34) est environ 10000 kil. Or cette eau coule naturellement, soit au-dessous, soit au-dessus de la ville et dans les endroits où il n'existe pas de barrages ni d'obstacles, avec une vitesse qu'on a mesurée et qui est moyennement de $0^m,80$ par seconde; donc la force vive du volume de fluide qui passe par chacun de ces endroits, dans une seconde de temps, est $\frac{10000^k}{9^m,81} \times 0^m,8 \times 0^m,8 = 652^{km}$ environ; ce qui répond à une quantité de travail disponible (136 et suiv.) égale à $\frac{1}{2}\,652 = 326^{km}$, c'est-à-dire (82), d'environ $4\frac{1}{3}$ chevaux-vapeur, et qu'on pourrait utiliser directement contre une roue de moulin, etc. Mais si, au lieu de se servir de la vitesse possédée par l'eau dans son lit naturel, on construit des barrages ou digues, comme on l'a fait à Metz, on pourra élever son niveau et l'obliger à descendre, du haut de ces barrages, pour opérer sur les machines par son poids ou de toute autre manière : si, par exemple, le barrage fait élever ce niveau de $2^m,5$ seulement, comme cela a effectivement lieu dans certaines parties de la ville, la quantité de travail disponible, répondant aux mêmes 10^{mc} d'eau et qu'ils pourraient fournir, dans chaque seconde, par leur descente de la hauteur de $2^m,5$, sera égale à $10000^k \times 2^m,5 = 25000^{km} = 333\frac{1}{3}$ chevaux-vapeur; quantité qui est, comme on voit, presque 77 fois plus grande que celle qu'on obtiendrait en utilisant simplement la force vive naturelle des eaux de la rivière. Or cela explique suffisamment l'utilité des barrages artificiels dans la pratique des usines hydrauliques.

150. *Exemples relatifs à l'art de lancer l'eau à distance.* Nous venons de montrer comment le mouvement acquis d'une certaine masse d'eau, qui coule et se renouvelle constamment dans chaque seconde, représente une quantité de travail mécanique qu'on peut immédiatement calculer en chevaux de machines à vapeur; recherchons, à l'inverse, combien il faudrait de ces chevaux pour imprimer continuellement une vitesse donnée à un certain volume d'eau qui devrait être extrait d'un bassin ou réservoir quelconque où le liquide est en repos. Ce problème trouve son application particulière dans le jeu des pompes à incendie, où il s'agit de lancer, sur des parties embrasées d'un édifice et d'une certaine distance, un volume d'eau qui suffise pour éteindre le feu, et dont la vitesse de projection doit ainsi être d'autant plus grande que le trou ou l'*orifice* par lequel sort l'eau, se trouve à une distance plus considérable du but qu'on veut atteindre. Supposons, par exemple, qu'il faille lancer cette eau, par l'orifice, avec une vitesse uniforme de 15^m par seconde, et qu'il doive en arriver continuellement, sur le lieu de l'incendie et dans chaque seconde de temps, un volume de 6 litres pesant 6 kil.; la force vive à imprimer, dans ce même temps, sera donc égale à $\frac{6^k \times (15)^2}{9,81} = 137,6$ environ, dont la moitié $68^{km},80$ mesurera la quantité de travail nécessaire pour imprimer le mouvement à l'eau. Ce travail devant se reproduire dans chaque seconde, nécessitera, comme on voit, la force de $\frac{4}{3}\,0,688 = 1,03$ de cheval-vapeur environ : mais il est clair qu'il faudrait en appliquer davantage au balancier de la pompe, attendu les frottements et résistances de toute espèce, qui consommeraient, en pure perte (103), une portion notable du travail-moteur.

S'il s'agissait de lancer continuellement, ou dans chaque seconde, un volume d'eau de 40 litres avec la vitesse de 30^m, on trouverait, par les mêmes calculs, que le travail strictement nécessaire à dépenser serait de 1835^{km} par seconde; ce qui équivaut à une force de 24 et $\frac{1}{2}$ chevaux-vapeur environ. On peut croire que, par l'intermédiaire d'une machine à pistons, analogue aux pompes à incendie, le moteur devrait développer le travail d'au moins 30 de ces chevaux; c'est-à-dire, qu'il faudrait employer une machine à vapeur de cette force, au moins, pour mettre la pompe en mouvement et produire l'effet désiré.

On remarquera que la vitesse de l'eau, à sa sortie de l'orifice, et le volume qui s'en écoule uniformément dans chaque seconde de temps, étant donnés, les dimensions de cet orifice et la grosseur du jet à sa sortie, ne sont pas arbitraires, et doivent être calculées suivant les règles de l'hydraulique qui seront enseignées dans la seconde année de ce Cours. On trouve, par exemple, que, si l'orifice est percé dans une paroi plane et mince du réservoir, et qu'il soit à une distance convenable des parois latérales, son diamètre devra être d'environ 28 millim. dans le premier cas, et de 52 millim. dans le second.

151. *Observations particulières sur les jets verticaux et inclinés.* Au moyen de la formule $V^2 = 2gH$ du n° 118, qui donne $H = \frac{V^2}{2g}$, on trouvera sans peine, qu'avec la vitesse de 15 mètres, relative au premier cas, l'eau pourrait s'élever *verticalement* à la hauteur de $11^m,47$, qui est celle des étages supérieurs des maisons ordinaires, dans ce pays; et qu'avec la vitesse de 30^m qui répond au second cas, elle s'élèverait à une hauteur de $48^m,88$; mais, à cause de la résistance de l'air, le jet atteindrait véritablement des hauteurs un peu moindres. Il faudrait recourir à d'autres principes, que nous exposerons par la suite, pour calculer la distance et la hauteur auxquelles le jet parviendrait dans le cas où on lancerait l'eau sous une certaine inclinaison; néanmoins, comme il conviendrait peu alors de revenir sur les applications particulières qui font le sujet de cet article, et que non-seulement ces applications sont utiles pour apprécier les effets des pompes à incendie, mais qu'elles ont trait encore à des questions d'une haute importance pour la défense des places de guerre, nous ajouterons, en faveur des lecteurs qui voudraient approfondir de telles questions, quelques remarques qui ne seront peut-être pas sans utilité.

Nous avons vu (118), qu'il est impossible qu'une nappe d'eau retombe, même d'une hauteur médiocre, sans se diviser en parties plus ou moins fines ; or c'est un effet qu'on doit chercher à éviter quand on se propose de concentrer l'eau en masse sur un point déterminé. Car, non-seulement la divergence naturelle du mouvement des parties ainsi désunies augmentera avec le chemin parcouru dans la descente, de sorte que l'effet sera disséminé sur une grande surface ; non-seulement la résistance de l'air aura alors (116) plus d'action pour retarder le mouvement et diminuer le chemin décrit ; mais encore cet air absorbera ou s'appropriera, en vertu d'une de ses propriétés physiques bien connues, une portion beaucoup plus grande de la masse de l'eau ; de sorte que, si le trajet doit être tant soit peu long, il pourra, dans certains cas, arriver que rien n'atteigne le but. Ces considérations prouvent donc qu'il est indispensable de diriger l'eau sous un angle tel que le sommet de la courbe qu'elle suit dans son mouvement s'élève très-peu au-dessus du point qu'on veut atteindre : la résistance de l'air ayant nécessairement peu de prise sur la portion ascendante du jet, on pourra la négliger, et calculer toutes les circonstances du mouvement, comme s'il avait lieu dans le vide, d'après les méthodes connues et que nous exposerons en leur lieu.

Dans le cas ci-dessus, par exemple, où la vitesse de l'eau, à son point de départ, est seulement de 30^{m}, on trouve que, la hauteur du but au-dessus de ce point étant de 15 mètres, la distance horizontale parcourue ou la *portée* atteindrait à peine 30 à 32 mètres ; et que, si le but se trouvait de très-peu élevé au-dessus du point de départ, sa distance à ce point ne devrait pas surpasser de beaucoup 35^{m}, sans quoi la dispersion du fluide deviendrait considérable. Pour obtenir des portées plus grandes, doubles par exemple, il faudrait d'ailleurs augmenter la vitesse de projection de façon qu'elle fût de 42 mètres au lieu de 30 ; on trouverait alors que la force de la machine propre à lancer, dans chaque seconde, les 40 litres d'eau à cette distance, devrait être d'au moins 60 chevaux-vapeur ; de sorte que, si on ne pouvait réellement disposer que de la moitié de cette force, il faudrait aussi se résoudre à ne lancer qu'un volume d'eau de 20 litres par seconde.

152. *Réflexions sur l'influence de l'inertie.* Les exemples qui précèdent donnent une idée de l'influence qu'exerce l'inertie des corps dans certains travaux industriels, et des cas où il est permis de la

négliger ainsi que les variations de la force vive : on voit bien, par exemple, que, dans le mouvement lent des corps, le travail que représente cette force vive, a, presque toujours, une valeur très-faible même pour des masses considérables ; ce qui tient, ainsi que nous l'avons déjà dit, à ce que ce travail croît ou décroît comme le carré de la vitesse.

En général, lorsqu'un moteur est employé à faire mouvoir, pendant un certain temps, des corps ou machines quelconques pour produire du travail mécanique, ou pour vaincre des résistances autres que l'inertie propre de ces corps, on peut, sans inconvénient, ne pas tenir compte de cette inertie, toutes les fois que le mouvement sera constamment uniforme pendant la durée du travail, ou qu'il ne variera qu'entre des limites plus ou moins resserrées ; car, dans l'un et dans l'autre cas, la dépense de travail, pour vaincre l'inertie, se réduira (141 et suiv.), une fois pour toutes, à celle qui répond à la différence des forces vives possédées par les corps au commencement et à la fin de l'action du moteur ; différence qui sera nulle toutes les fois que ce moteur prendra ou laissera les corps dans le même état de mouvement, et qui sera généralement une fraction très-faible du travail total, quand le mouvement sera longtemps continué.

N'oublions pas néanmoins que cela suppose expressément que les pièces, qui agissent les unes sur les autres pour communiquer le travail du moteur aux résistances, n'éprouvent point d'altérations intérieures ou moléculaires sensibles pendant le mouvement (103), et surtout qu'il n'y ait pas de chocs plus ou moins violents, plus ou moins répétés qui, presque toujours, entraînent de pareilles altérations (139).

Comme jusqu'ici nous n'avons parlé de la communication du mouvement par le choc que d'une manière générale, il convient de nous y arrêter quelques instants, et de montrer comment on peut, dans plusieurs des cas de la pratique, estimer, d'une manière suffisamment exacte, la perte de force vive qui en résulte et les circonstances particulières qui l'accompagnent.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LE CHOC DIRECT DES CORPS.

153. *Considérations générales.* Quand deux corps, en mouvement, réagissent l'un sur l'autre par leurs vitesses acquises ou se choquent,

ils présentent en général plusieurs circonstances qui permettent de partager en trois époques distinctes la durée entière du phénomène : dans la 1re, les corps se compriment, se refoulent ou bien se tirent mutuellement s'ils sont liés entre eux par des traits, des barres non tendues avant le choc ; dans la 2me, leur déformation est devenue la plus grande possible, et ils ont nécessairement acquis la même vitesse aux points de leur action réciproque ; dans la 3me, enfin, les corps reviennent à leur forme primitive, et tendent, de plus en plus, à se séparer en vertu de l'énergie plus ou moins grande de leurs forces de ressort.

Comme les phénomènes du choc des corps se reproduisent, d'une manière analogue, dans tous les cas possibles, nous nous bornerons à étudier, avec quelques détails, l'un des plus simples d'entre eux, et qui se présente le plus fréquemment dans les applications de la Mécanique à l'industrie : c'est celui où un corps en repos est choqué par un autre corps déjà en mouvement ; il sera très-facile ensuite d'étendre les raisonnements à des cas plus compliqués ou présentant des circonstances différentes.

154. *Principe relatif au choc direct des corps.* Il ne peut être ici question encore que du *choc direct* des corps, c'est-à-dire de celui où deux corps (A) et (A'), fig. 35, réagissent continuellement l'un sur l'autre dans la direction propre de leurs mouvements, de telle sorte que la perpendiculaire ou normale AA', qui est commune à leur surface au point de contact T où se fait le choc, soit précisément la direction de la vitesse de chaque corps, et cela pour tous les instants de ce choc. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, dans le cas où deux boules sphériques marcheraient *parallèlement à elles-mêmes* avant le choc, et de façon que leurs centres A, A' demeurassent continuellement sur une ligne droite LN. Or on peut établir, pour ce cas, un principe général qui demeure applicable, quels que soient et l'intensité et le sens du mouvement de chacun des corps aux divers instants du choc ; il suffit, pour cela, de se rappeler ce qui a été dit au n° 131.

En effet, il naîtra de la réaction mutuelle des deux corps, une force de pression mesurable, à chaque instant (63), par un certain nombre de kilogrammes, et qui agira, dans le sens de la droite AA', pour repousser le corps (A) de T vers L, et une autre force de pression égale et précisément contraire (64), qui agira pour repousser le corps (A′) de T vers N. Nommant donc F la valeur commune de ces forces à un instant quelconque du choc, v le petit degré de vitesse perdu ou gagné, au même instant, par le corps (A), v' celui que perd ou gagne le corps (A′), enfin P et M, P′ et M′, étant respectivement les poids et les masses des deux corps (A) et (A′), on aura, d'après le principe du n° 131,

$$Mv = M'v';$$

c'est-à-dire *que les quantités de mouvement, perdues ou gagnées par les deux corps, seront égales entre elles pour chaque instant infiniment petit du choc :* et la même égalité aura lieu aussi entre les quantités de mouvement totales imprimées, à chaque corps, entre deux instants quelconques de leur réaction mutuelle, c'est-à-dire entre les quantités de mouvement totales, soit perdues, soit gagnées par chaque corps en particulier.

155. *Du choc des corps pendant la compression.* Nous supposerons ici que le corps (A′) était au repos à l'instant où l'autre (A) est venu le rencontrer avec une vitesse finie et précédemment acquise, que nous nommerons V ; ces corps se comprimeront donc réciproquement en vertu de l'inertie de (A′) qui tend à s'opposer au mouvement de (A), et, dès lors, la force de pression F agira pour diminuer, à chaque instant, la quantité de mouvement MV du premier corps, de quantités qui seront égales à celles qu'elle fera naître dans l'autre. Les choses continuant ainsi tant que (A) conservera, dans le sens de L vers N, une vitesse supérieure à (A′), on voit bien qu'il arrivera un instant où, la compression, la déformation des corps étant au *maximum*, ces corps auront acquis la même vitesse et marcheront, en quelque sorte, de *compagnie*, du moins pendant un très-petit instant.

156. *Vitesse des corps au moment de leur plus grande compression.* Nommons U la vitesse commune dont il s'agit, la quantité de mouvement gagnée ou acquise par (A′) sera, au même instant, M′U, et celle qui a été perdue par (A) sera MV — MU, laquelle, d'après ce qui précède, devra être égale à la première M′U. La quantité de mouvement totale MV, primitivement possédée par le système des corps, se trouvant donc être augmentée, d'une part, et diminuée, de l'autre, de quantités égales, celle $MU + M'U = (M + M')\,U$

qui leur reste à l'instant dont il s'agit, sera aussi égale à la quantité de mouvement primitive MV; de sorte qu'on aura

$$(M + M')\,U = MV;\ \text{d'où}\ U = \frac{MV}{M + M'}.$$

Ainsi, sans connaître la manière dont les corps se compriment et dont varie l'intensité de F à chaque instant du choc, on n'en peut pas moins calculer la vitesse qui a lieu à l'instant de la *plus grande compression : cette vitesse est égale à la quantité de mouvement possédée par* (A) *avant le choc, divisée par la somme des masses des deux corps.*

157. *Du choc pendant le retour des corps vers leur forme primitive.* La plupart des corps tendant à revenir (19 et 97), avec une énergie plus ou moins grande, vers leur forme primitive, quand ils ont été comprimés à un certain degré, on voit que les ressorts moléculaires vont, en se débandant, forcer (A) et (A') à réagir de nouveau l'un sur l'autre, mais pour s'écarter mutuellement, ce qui tend nécessairement à augmenter le mouvement déjà acquis de (A'), et à diminuer au contraire, de plus en plus, celui de (A); et, comme l'action est toujours égale à la réaction, il est clair, d'après ce qui précède (154) que les quantités de mouvement gagnées par (A') seront sans cesse égales à celles qui sont perdues par (A). Les choses continuant ainsi tant que la force de réaction F n'est pas nulle, on voit bien qu'il pourra arriver un instant où la quantité de mouvement MV, primitivement possédée par (A), soit entièrement détruite, après quoi la force F, qui continue à repousser ce corps, lui imprimera, en sens contraire, un mouvement de plus en plus rapide, et qui ne cessera d'augmenter que quand F sera nulle; ce qui arrivera nécessairement à l'instant où les deux corps, ayant pris une forme telle qu'ils puissent la conserver naturellement sans qu'aucune force extérieure leur soit appliquée, se sépareront, l'un de l'autre, en vertu de leurs vitesses respectivement acquises.

158. *Du mouvement des corps après le choc.* Il est clair, d'après ce qui précède, que ce mouvement ne peut, en général, se calculer, puisque nous ne connaissons pas non plus, en général, la loi que suivent les forces de compression F pendant la réaction des corps. Cependant le calcul est possible dans deux circonstances principales qui servent comme de limites à toutes les autres, et qui répondent,

l'une, au cas où les corps seraient entièrement privés d'élasticité, l'autre, au cas où, au contraire, ils seraient parfaitement élastiques.

Premier cas, des corps non élastiques. Nous avons vu (17) qu'il n'existe réellement pas de corps qui soient entièrement privés d'élasticité, ou qui ne tendent, jusqu'à un certain point, à retourner vers leur forme primitive, quand ils ont été comprimés. Toutefois on doit remarquer que, non-seulement les corps mous, les liquides, etc., sont extrêmement peu élastiques quand ils ne sont pas maintenus, dans tous les sens, par des enveloppes solides; mais qu'aussi la plupart des corps, qu'on regarde comme plus ou moins élastiques, peuvent perdre entièrement (20) cette élasticité par suite de la grande compression, de la grande déformation qu'ils éprouvent pendant le choc; or, pourvu qu'ils ne se divisent, ne se rompent, ou ne se séparent pas à l'instant de la plus grande compression, ils continueront à *cheminer ensemble,* en vertu de leur vitesse acquise, sans réagir désormais l'un sur l'autre; de sorte que cette vitesse sera donnée, par la formule ci-dessus, toutes les fois que l'un des corps se trouvera au repos à l'instant où le choc arrive.

Deuxième cas, des corps parfaitement élastiques. Toutes les fois que les corps seront suffisamment élastiques pour revenir exactement à leur forme primitive, après l'instant de la plus grande compression, la force de réaction F reprenant, dans le débandement des corps, les mêmes valeurs (97) pour les mêmes positions relatives de ces corps, il est clair que les vitesses imprimées ou détruites seront précisément égales à celles qui l'ont été pendant la compression, si, comme on le suppose ordinairement, les corps se séparent à l'instant même où ils ont repris leur forme primitive. Or de là résulte un moyen de calculer, à l'avance, la vitesse des deux corps après le choc.

Pour le cas qui nous occupe, par exemple, la vitesse perdue par le corps (A) à l'instant de la plus grande compression, étant (156) V — U, il perdra de nouveau (157), dans le débandement, une vitesse égale à V — U, et par conséquent la vitesse qu'il conservera, après le choc, sera U — (V — U), ou 2U — V, si V — U est moindre que U, ce qui indique que (A) continue à marcher dans le même sens après le choc, ou (V — U) — U = V — 2U, si V — U surpasse U, ce qui indique que (A) retourne en arrière après le choc. Quant au corps (A′), la force F lui a d'abord communiqué (156) la vitesse U; elle lui imprimera donc, après l'instant de la plus grande compression, un nouveau degré de vitesse égal à U, c'est-à-dire que sa vitesse, après le choc, sera 2U. Mais nous savons calculer (156) la vitesse U ; donc nous saurons aussi calculer celle des corps parfaitement élastiques au moment où ils se séparent après le choc.

Nommant W et W′ respectivement, ces vitesses des corps (A) et (A′), on aura, selon les cas spécifiés,

$$\left.\begin{array}{ll} W = 2U - V, & W' = 2U, \\ W = 2V - U, & W' = 2U, \end{array}\right\} \quad U = \frac{MV}{M + M'}.$$

159. *Remarques relatives à l'application des formules.* Il est une infinité de circonstances où les corps marchent forcément de *compagnie,* avec la *même vitesse,* après le choc, sans que, pour cela, ces corps aient été entièrement privés d'élasticité avant le choc, ou qu'ils la perdent complètement par l'effet de ce choc : c'est ce qui arrive, par exemple, quand une balle d'argile ou de cire molle, lancée contre un corps résistant et élastique, demeure collée après ce corps, ou quand une balle dure et élastique, lancée contre un bloc de bois suspendu librement au bout d'une corde ou d'une barre, demeure enfoncée dans l'intérieur de ce bloc. Or il est bon de remarquer que les conséquences qui précèdent, relatives au cas des corps totalement privés d'élasticité, demeurent alors exactement applicables, parce qu'elles ne supposent uniquement que l'égalité de la vitesse U conservée, par ces corps, à la fin du choc. Quelle que soit en effet la *cause* ou la *force* qui oblige ces corps à demeurer réunis, comme cette force ne peut agir sur l'un d'eux, sans qu'une force égale et directement contraire agisse au même point et en même temps sur l'autre (64), on conçoit que, pendant toute la durée du choc, les quantités de mouvement perdues ou acquises par chaque corps, seront les mêmes pour tous deux ; de sorte que finalement (A′) aura encore gagné précisément ce que (A) aura perdu (156).

Quant au cas où les corps se séparent après le choc, on ne peut jamais affirmer que les choses se passent comme le supposent les calculs ci-dessus, même pour des corps qui seraient parfaitement élastiques et qui reprendraient exactement leur forme primitive après ce choc ; car il peut bien arriver, par exemple, que, pendant le débandement des ressorts, les corps soient retenus momentanément, l'un contre l'autre, par leur adhérence réciproque ou par toute autre force qui empêcherait que les quantités de mouvement, imprimées alors, soient aussi grandes que celles qui l'ont été en premier lieu. Enfin il peut aussi arriver que les corps aient subi, dans leur intérieur, des altérations moléculaires plus ou moins sensibles, sans qu'aucune trace ne s'en manifeste quant à leur forme extérieure, etc.

Ces considérations, jointes à ce qu'il n'existe, en réalité (17 et suiv.), qu'un très-petit nombre de corps qu'on puisse regarder comme parfaitement élastiques, expliquent pourquoi généralement les valeurs de la vitesse, à la fin du choc des corps solides, diffèrent toujours plus ou moins de celles que donnent les calculs, et se rapprochent plus ou moins de celles qui sont relatives au cas où les corps sont entièrement privés d'élasticité. Cependant il est des corps élastiques, telles que les billes de verre, d'ivoire, etc., qui, dans certaines circonstances de leurs chocs, présentent des phénomènes et acquièrent des vitesses qui s'accordent, à peu de chose près, avec ce qu'indiquent les calculs.

160. *Exemples particuliers.* Faisons maintenant connaître quelques-unes des conséquences de nos formules. Supposons, par exemple, que la masse M′ du corps choqué (A′), fig. 35, soit très-petite par rapport à celle M du corps choquant (A) ; la valeur de U sera sensiblement égale à $\frac{MV}{M} = V$, c'est-à-dire que la vitesse de M sera très-peu altérée à l'instant de la plus grande compression ; et, comme, dans le cas des corps parfaitement élastiques (158), on a $W = 2U - V$, $W' = 2U$, on voit qu'à la fin du choc, elle ne le sera pas davantage, mais que le petit corps s'éloignera de l'autre avec une vitesse W′ double. Supposons, au contraire, que la masse M du corps choquant soit très-petite par rapport à celle M′ du corps choqué ; on voit que le dénominateur $M + M'$ de U sera aussi très-grand par rapport au facteur M de son numérateur, et que par conséquent la vitesse U, à l'instant de la plus grande compression, sera également une très-petite fraction de la vitesse V que possédait le corps choquant ; de sorte que, si M′ est, pour ainsi dire, infiniment grand par rapport à M, la vitesse U pourra être considérée comme sensiblement nulle. Si donc les deux corps étaient doués d'une élas-

ticité parfaite, la vitesse W', acquise par le corps choqué, serait elle-même infiniment petite, tandis que celle $W = V - 2U$ du corps choquant serait V ; c'est-à-dire précisément égale et contraire à celle qu'il possédait avant le choc.

Ceci explique, entre autres, pourquoi les cordonniers placent, sur leurs genoux, une forte pierre pour recevoir les coups du marteau dont ils frappent les semelles de souliers, et comment il est possible de forger du fer sur une forte enclume posée sur le corps d'un homme ou sur le plancher fléxible d'un étage supérieur, sans blesser cet homme, sans endommager sensiblement ce plancher et les murailles de la maison. On voit, en effet, que la vitesse communiquée à la pierre ou à l'enclume, et par suite aux corps qui les supportent, est extrêmement faible comparativement à celle que possède le marteau ; de sorte que la flexibilité, l'élasticité naturelle de ces corps suffit pour amortir les effets du coup sans qu'il survienne d'accidents.

On s'expliquera aussi facilement une infinité de phénomènes, relatifs aux corps élastiques ou non élastiques, qui se passent journellement sous nos yeux : il n'est personne, par exemple, qui n'ait observé que, quand une bille de billard vient à en choquer une autre *directement,* c'est-à-dire de la manière dont nous l'avons entendu précédemment (154), il arrive qu'elle s'arrête tout à coup dans la place même qu'occupait cette autre, tandis que celle-ci chemine avec toute la vitesse de la première ; or, c'est ce que montrent très-bien nos formules. Les masses M et M' de deux corps sont ici égales, l'élasticité, est pour ainsi dire, parfaite, de sorte que la vitesse U, commune aux deux corps à l'instant de la plus grande compression, égale $\frac{MV}{2M} = \frac{1}{2} V$, celle W de M après le choc égale $2U - V = 0$, et enfin celle W' de la bille choquée égale $2U$ ou V.

161. *De la force vive des corps après le choc.* D'après ce que nous avons déjà dit, nos 97 et 139, on peut prévoir que, dans le choc des corps parfaitement élastiques, la force vive perdue pendant la compression doit être précisément égale à celle qui est restituée dans le débandement, tandis que, dans le choc des corps qui ne reprennent pas exactement leur état primitif après l'instant de la plus grande compression, la somme des forces vives doit être altérée

d'une quantité précisément égale au double de la quantité de travail nécessaire pour produire l'altération de forme ou de constitution éprouvée par les deux corps ; quantité qu'on pourrait directement calculer (136 et 137) si l'on connaissait, pour chaque instant du choc et pour chaque corps, la valeur moyenne de la force de réaction F et celle du petit *enfoncement* qu'elle produit dans ce corps. Il est évident, en effet, que le travail, relatif à cet instant, serait mesuré (72 et 86) par le produit de F et de la somme des enfoncements qui lui correspondent dans les deux corps. Mais, comme on ne connaît ni la loi que suit cette force, ni celle de l'enfoncement, on n'a d'autre moyen de mesurer, soit le travail, soit la force vive développés ou perdus dans le choc des corps, qu'en les déduisant directement des vitesses que possèdent ces corps avant et après l'instant du choc, vitesses qu'on ne peut calculer rigoureusement d'ailleurs (159) que dans un petit nombre de cas.

Par exemple, ayant appris, dans les cas ci-dessus (156) où un corps en choque un autre au repos, à calculer la vitesse U qui leur est commune à l'instant de la plus grande compression, nous pourrons aussi trouver la force vive qu'ils possèdent à cet instant, et la perte de force vive due à la réaction de leurs ressorts moléculaires. En effet, la force vive totale (122 et 126) était, avant le choc, MV^2, et, à l'instant que l'on considère, elle est $MU^2 + M'U^2$ ou $(M + M')\,U^2$; donc la perte de force vive a pour valeur

$$MV^2 - (M + M')\,U^2.$$

Mais on a trouvé (156)

$$U = \frac{MV}{M + M'}\text{ ; donc } (M + M')\,U^2 = (M + M')\frac{M^2V^2}{(M + M')^2} = \frac{M^2V^2}{M + M'}.$$

D'une autre part, MV^2 est la même chose que

$$\frac{(M + M')\,MV^2}{M + M'},\quad \text{ou que } \frac{M^2V^2}{M + M'} + \frac{M'MV^2}{M + M'};$$

donc enfin la perte de force vive est égale à

$$\frac{M'MV^2}{M + M'},\ \text{ ou } \frac{M'}{M + M'}\,.\,MV^2,$$

c'est-à-dire à *la force vive que possédait la masse* M *avant le choc*, *multipliée par le quotient de la masse M′ et de la somme de ces masses* *.

La moitié de cette valeur sera donc aussi (138) la mesure du travail développé, par la force de réaction F, pour opérer la compression des deux corps.

Si le choc finit à l'instant de la plus grande compression, que les corps soient ou non sans élasticité (159), la quantité ci-dessus donnera encore la perte de force vive occasionnée par le changement d'état ou de forme de ces corps.

Mais, si le choc continue après l'instant dont il s'agit, une portion de cette force vive sera restituée dans le débandement des ressorts moléculaires; et, si les corps étaient parfaitement élastiques, cette même force vive serait entièrement restituée. C'est, en effet, ce qu'on trouve par des opérations analogues à celles ci-dessus, appliquées aux valeurs des vitesses qui, selon le n° 158, ont lieu alors après le choc.

162. *Conséquences particulières.* Supposons que la masse M′ du corps choqué (A′), fig. 35, et qui est au repos avant le choc, soit très-petite par rapport à celle M du corps choquant (A), M′ sera aussi très-petit par rapport à M + M′; et par conséquent la perte de force vive $\frac{M'}{M+M'}\,MV^2$, relative au cas où ces corps ne sont pas élastiques, se réduira à une très-petite fraction de celle MV^2 qu'ils possédaient avant le choc. On peut, dans des circonstances semblables, négliger une telle perte dans le calcul des résistances d'une machine, pourvu que le choc ne soit pas fréquemment répété (95); mais il en est tout autrement quand la masse M′ du corps en repos est très-grande par rapport à celle M du corps choquant; car la fraction $\frac{M'}{M+M'}$ pourra approcher beaucoup de l'unité, et par conséquent la perte de force vive, de la force vive MV^2 possédée par ce dernier corps avant le choc. Supposant seulement $M' = M$, la valeur de cette fraction sera $\frac{1}{2}$, et la perte s'élèvera déjà à la

* Nous engageons les lecteurs peu accoutumés aux calculs avec des lettres, à répéter la série des raisonnements sur un exemple particulier, en se rappelant (125) que la *masse* d'un corps est le quotient de son poids par g ou $9^m,8088 = 9^m,81$ environ.

moitié de MV^2. On voit donc combien il est essentiel d'éviter, dans la construction des machines, qu'un corps vienne inutilement choquer un autre corps en repos, dont le poids est comparable au sien propre.

Nous disons *inutilement*, parce qu'en effet, il est quelquefois utile d'opérer par le choc sur la matière à confectionner; c'est ainsi, par exemple, que procèdent les forgerons pour donner différentes formes aux métaux, et que les cordonniers parviennent à étendre les semelles de cuir et à augmenter leur densité, leur roideur ou leur force de ressort; mais alors même un ouvrier, qui a l'expérience de son art, ne manque jamais d'employer des marteaux, des enclumes bien aciérés et trempés, ou tout autre corps plus ou moins élastique, conformément à la remarque qui en a déjà été faite n° 96; de sorte que la consommation de force vive qui a lieu alors (159), est, du moins en très-grande partie, employée à produire le changement de forme de la matière à confectionner.

C'est encore ici le lieu de rappeler (95) qu'il ne suffit pas que les corps soient élastiques pour qu'on puisse affirmer qu'il n'y ait pas eu consommation inutile de travail; car il faut encore que la force vive, qui est restituée par les ressorts moléculaires après le choc, soit utilement employée. C'est bien ce qui arrive, par exemple, à l'égard du marteau des forgerons, puisque l'élasticité, en *renvoyant le coup*, sert à élever le marteau contre l'action de la pesanteur, et aide la main de l'ouvrier habile qui sait en profiter; mais le contraire peut aussi arriver, si, par exemple, l'enclume est assise sur un terrain mou : la force vive qu'acquiert cette enclume est alors, en partie, consommée à produire l'enfoncement du sol; aussi les maîtres de forge entendus ont-ils soin de placer de gros blocs de bois ou des charpentes très-élastiques sous leurs enclumes. Il n'est pas moins indispensable aux ouvriers de tous les autres états, de choisir, pour leurs chantiers et établis, des corps à la fois élastiques et peu flexibles; il faut en outre qu'ils soient suffisamment lourds, car alors ils prendront peu de mouvement (160), et, acquérant une force vive très-faible, ils auront très-peu d'action pour comprimer le sol; de sorte que, malgré le peu de ressort que ce dernier possède, il se comportera néanmoins alors (19) comme un corps parfaitement élastique.

163. *Formules relatives au cas le plus général du choc direct.* Jus-

qu'ici nous nous sommes uniquement occupés du cas où l'un des deux corps est en repos; mais il n'est pas inutile de montrer comment on peut étendre immédiatement les raisonnements à celui où les corps seraient animés de vitesses quelconques avant le choc.

A cet effet, nommant M, M′ les masses, V, V′ les vitesses respectives des deux corps avant le choc, et U leur vitesse commune à l'instant de la plus grande compression, on observera que, quand les corps cheminent dans le même sens, fig. 36, la force de réaction F (154), diminuant la quantité de mouvement MV du corps (A) de quantités égales à celles qu'elle ajoute à la quantité de mouvement M′V′ de (A′), la somme MV + M′V′ des quantités de mouvement primitives, reste encore la même à toutes les époques du choc. On a donc, à l'instant où la vitesse est U pour les deux corps,

$$MU + M'U \text{ ou } (M + M')\,U = MV + M'V'; \text{ d'où } U = \frac{MV + M'V'}{M + M'},$$

tandis que, dans le cas où les deux corps (A) et (A′) vont à la rencontre l'un de l'autre, fig. 37, animés des quantités de mouvement MV, M′V′, la force de réaction diminuant chacune d'elles de la même valeur (154), leur différence absolue MV — M′V′ ou M′V′ — MV demeure aussi la même à tous les instants; de sorte qu'en supposant que MV surpasse M′V′, on aura, à l'instant où la vitesse est U pour les deux corps,

$$MU + M'U \text{ ou } (M + M')\,U = MV - M'V'; \text{ d'où } U = \frac{MV - M'V'}{M + M'},$$

la vitesse U étant nécessairement dirigée dans le sens de celle V, qui répond à la plus grande quantité de mouvement primitive MV.

Quant aux forces vives possédées ou perdues au moment de la plus grande compression, on les calculerait aisément au moyen de la vitesse U, mais on peut arriver immédiatement à la valeur de cette perte, qu'il est souvent essentiel de connaître, en observant que, dans les deux cas dont il s'agit, la réaction des corps s'opère uniquement en vertu des vitesses *relatives* (46 et 85) dont ces corps sont animés avant le choc; de sorte que les valeurs de F et les changements d'état ou de forme qui lui correspondent sont, à chaque instant, les mêmes que si, le corps (A′), par exemple, étant au repos, le corps (A) venait le choquer avec une vitesse V — V′ égale à la différence des deux vitesses pour le premier cas, et avec une vitesse $V + V'$ égale à la somme des mêmes vitesses pour celui où les corps marchent en sens contraire.

La perte de force vive, qui dépend uniquement (139) de l'intensité de la réaction des deux corps à chaque instant du choc, sera donc (161), au moment de la plus grande compression, pour le cas où les corps marchent dans le même sens,

$$\frac{MM'(V - V')^2}{M + M'},$$

et, pour celui où les corps marchent en sens contraire,

$$\frac{MM'(V + V')^2}{M + M'}.$$

Cette dernière quantité est, comme on voit, de beaucoup supérieure à la première; cela prouve combien il est surtout essentiel, dans la construction des machines, d'éviter que des corps se choquent inutilement avec des vitesses contraires.

Enfin, si les corps étaient parfaitement élastiques, on trouverait tout aussi facilement les vitesses qu'ils conservent à la fin du choc : il suffirait, pour cela, de reprendre les raisonnements du n° 158, relatifs au cas où l'un des corps est en repos au commencement de ce choc. Mais, comme on aura rarement occasion d'appliquer ces résultats à la pratique, nous ne nous y arrêterons pas, non plus qu'aux diverses conséquences qu'on pourrait, dès à présent, déduire des formules qui précèdent.

164. *Remarques relatives aux applications numériques.* On devra se rappeler que, lorsqu'il s'agit de calculer, en nombres, les valeurs des forces vives perdues ou conservées par les corps après le choc, il conviendra toujours de prendre (145 et suiv.), pour chaque masse, le quotient du poids du corps par $g = 9^m,8088$, tandis qu'on pourra s'en dispenser dans le cas où l'on n'aura que les vitesses simples à calculer. Il est aisé de voir, en effet, qu'on pourra alors remplacer les *masses* par les *poids mêmes* des corps, dans les fractions qui donnent ces vitesses, attendu qu'en supprimant la division de ces poids par g, cela reviendra tout simplement à multiplier à la fois, le numérateur et le dénominateur de la fraction dont il s'agit, par cette même quantité, ce qui ne change pas le résultat comme on sait. Ainsi, on aura, dans le cas général ci-dessus (163), P, P' étant

les poids des deux corps dont les masses ont été nommées M et M',

$$U = \frac{PV + P'V'}{P + P'} \quad \text{ou} \quad U = \frac{PV - P'V'}{P + P'},$$

selon le sens du mouvement des corps avant le choc.

C'est d'après de tels exemples, qu'on se croit quelquefois autorisé à prendre généralement le poids d'un corps pour sa masse (125); mais on commettrait une erreur grave si l'on en agissait ainsi dans les calculs relatifs à la force vive des corps.

Par exemple, dans les cas ci-dessus (163) de deux corps qui se choquent en marchant dans le même sens, nous avons trouvé que la perte de force vive, à l'instant de la plus grande compression, qui répond à la fin du choc quand les corps ne sont pas élastiques, avait pour valeur

$$\frac{MM'(V - V')^2}{M + M'},$$

tandis que, selon l'autre manière de voir, elle serait

$$\frac{PP'(V - V')^2}{P + P'}.$$

Or il est facile de s'assurer que, par la suppression de la division des poids P, P' pour obtenir les masses M, M', on aurait multiplié réellement deux fois le numérateur de la fraction par g et seulement une fois le dénominateur ; de sorte que le véritable résultat se trouverait en effet multiplié par g. Si donc on voulait obtenir ce véritable résultat en se servant des poids, il faudrait diviser la dernière des fractions ci-dessus par g ou $9^m,8088$, ce qui donnerait

$$\frac{PP'(V - V')^2}{g(P + P')}.$$

Ainsi on pourra, dans la vue de simplifier un peu les calculs, se servir de cette dernière formule au lieu de celle qui contient les masses ; quant à la précédente, on doit bien voir maintenant qu'elle est absolument fautive. On pourra d'ailleurs appliquer des simplifications analogues aux diverses autres formules ou résultats des calculs concernant le choc des corps.

165. *Comparaison des effets des chocs et des pressions simples.* On

a quelquefois essayé de mesurer directement les chocs par les pressions ou les poids : ainsi l'on a dit, d'une manière absolue, qu'*un certain poids, tombant de telle hauteur sur un corps, équivalait à une pression de tant de kilogrammes, exercée sur ce corps ;* or, il est bien évident que ces deux choses sont tout à fait distinctes, et ne peuvent se rapporter à la même unité de mesure, dans le sens absolu dont il s'agit. Mais il en est tout autrement quand on entend parler des effets mêmes que peuvent produire les chocs et les poids ou pressions simples qui agissent sur les corps *sans vitesse acquise;* car un poids posé, par exemple, sur une certaine substance, s'y *enfonce* ou la comprime plus ou moins (63), et développe, dans sa descente, une quantité de travail (89) qui est tout à fait comparable à la force vive que perdrait un autre corps (161), pour produire la même compression, le même effet.

Dans les deux cas, on a à considérer une suite de pressions variables à chaque instant, et qui se succèdent, *sans interruption quelconque,* tout en produisant le changement de forme du corps. Or cette succession n'est pas une pression simple et unique ; on ne peut pas non plus la mesurer en kilogrammes par une somme de pressions, puisque cette somme est infinie, même pour un très-petit temps de l'action des forces et pour un mouvement extrêmement lent; mais, comme il y a à la fois pression ou effort et chemin décrit dans chaque instant très-petit, il y aura aussi un petit travail développé dans cet instant; et c'est la somme finie de ces travaux partiels qui, dans tous les cas, mesure l'effet produit.

Il est bon de remarquer d'ailleurs que les mêmes géomètres qui mesurent les effets du choc par des sommes de pressions, nomment ces sommes des *forces de percussion*, et les considèrent comme égales aux quantités de mouvement qui ont été imprimées ou détruites dans l'acte du choc; tandis que, d'après l'autre manière de voir, qui est aussi simple et d'ailleurs parfaitement d'accord avec les résultats de l'expérience, nous sommes conduits naturellement à mesurer ces mêmes effets du choc par la force vive directement employée à les produire.

APPLICATIONS PARTICULIÈRES RELATIVES AU CHOC DIRECT.

166. *Exemple du choc d'un corps qui tombe, d'une certaine hauteur, sur une substance plus ou moins molle.* Supposons qu'on laisse

tomber, d'une certaine hauteur, un corps cubique et très-résistant P, fig. 38, tel qu'un cube de fer pesant 300 kil., sur une substance plus ou moins molle, terminée par un plan de niveau AB, et dans laquelle il pénètre par une de ses faces *ab*, parallèle à ce plan. Soit $1^m,30$ la hauteur *b'c* d'où le cube est tombé avant d'atteindre AB, et $0^m,02$ la quantité totale *bc* de l'enfoncement à l'instant où le choc est terminé ; il sera donc descendu réellement de la hauteur $1^m,30 + 0^m,02 = 1^m,32$, et la quantité de travail développée par la pesanteur, dans cette descente, sera mesurée par le produit $300^k \times 1^m,32 = 396^{km}$; c'est donc là aussi la mesure du travail nécessaire pour produire l'enfoncement des $0^m,02$ avec des circonstances semblables , ou pour produire un effet identiquement égal.

Cette conséquence résulte immédiatement de ce qui a été dit précédemment (158 et suiv.) sur le choc des corps durs qui rencontrent des corps mous ou privés d'élasticité ; car ici le corps P atteint le plan AB avec une force vive égale à $2 . 300^k . 1^m,30 = 780$ (122), et cette force vive peut être considérée comme presque entièrement consommée (162) pour produire le changement de forme de AB, attendu que l'altération du cube est négligeable, et que la masse de la substance AB qui reçoit le choc, étant ici censée très-grande par rapport à celle de P, ou étant censée faire partie du sol, soit directement, soit par l'intermédiaire des corps qui la supportent, la vitesse, et par conséquent la force vive conservée après le choc, sera extrêmement petite (160 et suiv.), de sorte qu'on pourra la négliger par rapport à celle que possédait P avant le choc. Or cette dernière force vive se convertit, à partir de l'instant où le corps atteint le plan AB, en une quantité de travail égale (136) à la moitié de sa valeur, c'est-à-dire à 390^{km} ; de plus, la gravité y ajoute, pendant que le corps s'enfonce, une quantité mesurée par le produit du poids 300^k de ce corps et de la hauteur *bc* de l'enfoncement ; donc, au total, la résistance qu'éprouve le cube pendant qu'il pénètre dans la substance AB et de la part de cette substance, développe bien réellement, contre le mouvement, une quantité de travail égale à $390^{km} + 300^k . 0^m,02 = 390^{km} + 6^{km} = 396^{km}$, quelle que soit d'ailleurs la manière dont varie l'intensité propre de cette résistance aux divers instants de l'enfoncement.

Maintenant, si l'on pose doucement, sur AB, un prisme vertical R de même base que le cube, et dont la hauteur et le poids soient tels qu'au bout d'un temps plus ou moins long, il s'enfonce des mêmes 2 centimètres *bc*, la quantité d'action que la pesanteur aura développée, sur le prisme, pendant sa descente de cette hauteur, et qu'aura consommée la résistance de AB, sera le produit de $0^m,02$ par le poids R de ce prisme, c'est-à-dire $0^m,02 \times R$. Mais, comme les effets produits par le prisme et par le cube sont identiques, les quantités de travail que ces effets supposent, de la part de la résistance de AB, doivent être regardées aussi comme égales, et partant on a

$$R \times 0^m,02 = 396^{km}; \quad \text{d'où } R = \frac{396}{0,02} = 19800^{kil}.$$

Tel est donc le poids qui pourrait produire, dans un temps plus ou moins long, un effet égal à celui qui résulte, dans un temps généralement très-court, d'un poids 66 fois moindre, lancé avec la *vitesse* de $5^m,05$ *due à la hauteur* de $1^m,30$ (118).

167. *Calcul hypothétique de la durée de l'enfoncement produit par le choc.* La valeur effective du temps que le corps P met à s'enfoncer des $0^m,02$ ci-dessus, ne peut s'obtenir qu'autant que l'on connaîtrait, par des expériences spéciales, la loi que suit la résistance du sol aux divers instants, ce qui n'est pas. Mais, pour offrir un exemple de calcul, nous supposerons la résistance constante, ou plutôt nous la supposerons remplacée, dans les divers instants, par sa *valeur moyenne* (73); de sorte qu'elle sera censée (107 et 112) retarder uniformément le mouvement du prisme ou du cube.

Or nous savons que, pendant la durée du choc, elle développe une quantité de travail égale à 396^{km}, donc (73) elle a pour valeur moyenne $\frac{396}{0,02} = 19800^{kil}$; c'est-à-dire qu'elle est précisément égale au poids du prisme qui produit le même enfoncement ou le même effet; ce à quoi on devait bien s'attendre en la supposant tout à fait constante *. Cette résistance étant directement opposée à l'action du poids des 300^{kil} du cube, ce dernier sera sollicité, pendant l'en-

* Puisque la résistance est ici égale au poids du prisme, ce dernier ne s'enfoncerait pas, conséquence qui prouve assez que l'hypothèse d'une résistance constante n'est point admissible; cette résistance croît nécessairement à partir de l'instant où l'enfoncement commence, et c'est ce qui paraît évident en soi, vu la facilité qu'a alors la matière de se déplacer latéralement ou sur les côtés du cube et du prisme.

foncement, par une force motrice constamment égale à

$$19800^{k} - 300^{k} = 19500^{kil},$$

et agissant, *de bas en haut,* pour retarder son mouvement primitivement acquis, ou pour détruire la vitesse de $5^{m},05$ qu'il possède à l'instant où il atteint AB.

Avec ces données, il ne sera pas difficile de trouver le temps que la résistance mettrait à éteindre complétement la vitesse en question ; car puisqu'on la suppose constante, elle imprimerait, au bout de l'unité de temps, une vitesse V_1 qui sera donnée par la formule

$$F = MV_1 \text{ ou } V_1 = \frac{F}{M}, \text{ du n}^{o}\ 132 : \text{or ici } F = 19500^{kil},$$

$$M = \frac{300^{k}}{9^{m},81} = 30,58 ; \text{ donc } V_1 = \frac{19500}{30,58} = 637^{m},67.$$ Mais, puisque la force constante est capable d'imprimer la vitesse de $637^{m},67$ au bout d'une seconde, il est évident (110) qu'elle mettra, à imprimer ou détruire la vitesse de $5^{m},05$, un temps t qu'on obtiendra au moyen de la proportion $637^{m},67 : 1'' :: 5^{m},05 : t$; d'où

$$t = \frac{5,05}{637,67} = 0'',008, \text{ ou } \frac{1}{125} \text{ de seconde à peu près.}$$

Les mêmes résultats s'obtiendraient immédiatement d'ailleurs au moyen de la formule $F = M\frac{v}{t}$ du n° 130, en observant qu'ici les raisonnements sont applicables à une vitesse et à un temps quelconque ; car elle donne pour le temps t qui répond à la vitesse de $5^{m},05$, $t = \frac{M \times 5,05}{F} = \frac{30,58 \times 5,05}{19500} = 0'',008$ environ, comme ci-dessus.

168. *Cette durée est d'autant moindre que le corps choqué est plus roide.* Nous venons de trouver que, dans l'hypothèse d'une résistance constante, le temps nécessaire pour produire l'enfoncement des 2^{c}, est de 8 millièmes de seconde environ. Si la substance qui reçoit le choc était assez résistante, assez dure pour que l'enfonce-

ment fût seulement de $0^{m},001$, dans les mêmes circonstances, on trouverait, en recommençant les calculs qui précèdent, que le poids R du prisme qui produirait cet enfoncement, serait de

$\frac{396}{0,001} = 396000^{kil}$, et que la force de réaction qui agit pendant le

choc, aurait pour valeur moyenne ces mêmes 396000^{k} diminués de 300^{k} ou 395700^{kil}, qu'enfin la durée de l'enfoncement serait seulement de $0'',00039$, ou environ vingt fois moindre que dans le premier cas; par quoi l'on voit combien doit être excessivement courte la durée du choc des corps roides tels que le marbre, l'acier, l'ivoire, dont les dépressions sont quelquefois si faibles qu'il est comme impossible de les apprécier par des moyens directs.

A la vérité, nous avons supposé, pour parvenir à ces résultats, que la résistance des corps à l'enfoncement était constante; mais la même conséquence peut se déduire de nos principes quelle que soit la loi de la résistance; car la force vive détruite, par exemple, pendant la première période (156) du choc de deux corps quelconques ou pendant leur compression, étant généralement très-comparable à celle qu'ils possédaient avant le choc, il en sera de même (136) du travail développé par leur force de réaction réciproque F. L'enfoncement étant donc extrêmement petit, il faut nécessairement (97) que la courbe du travail $Oa'b'c'$.... (pl. I, fig. 26), s'éloigne considérablement de l'axe OB des abscisses, du moins à compter d'une petite distance de l'origine; de sorte que les ordonnées, qui mesurent les valeurs de la force de réaction F, devront aussi être extrêmement grandes. Or de là on conclut, sans difficulté, soit par la

formule $t = \frac{Mv}{F}$ déjà citée, soit par la construction de la courbe

des vitesses (134, fig. 32), que le temps, nécessaire pour produire l'enfoncement ou la compression, doit être, de son côté, d'autant plus petit que les valeurs de F sont elles-mêmes plus considérables et l'enfoncement total moindre. Mais, attendu que l'aire comprise entre cette dernière courbe et l'axe des abscisses mesure effectivement les espaces décrits ou les enfoncements, il n'est pas même nécessaire de recourir à la courbe des pressions, fig. 26, pour voir que, si l'enfoncement total est extrêmement petit tandis que la vitesse conserve une grandeur donnée, la durée du mouvement doit elle-même être extrêmement courte.

169. *Observations générales sur la communication du mouvement par le choc.* C'est à cause de l'excessive petitesse de la durée du choc des corps très-résistants, que les mécaniciens se sont crus autorisés à regarder généralement comme entièrement nulle cette durée, et que, par suite, ils ont été conduits à supposer infinies les forces de réaction qui se développent pendant la compression réciproque des corps. Mais nous voyons bien clairement maintenant que, puisqu'il n'existe pas de corps infiniment durs, on ne peut dire, non plus, en termes absolus, qu'il y ait changement brusque ou *instantané* de leur vitesse; la communication du mouvement par le choc ne diffère, en effet, de celle qui a lieu par les forces motrices ordinaires, telles que la pesanteur, etc., que parce que généralement cette communication s'opère dans un temps réellement très-court, et que la force de réaction acquiert ainsi une très-grande valeur. Encore devons-nous remarquer qu'il arrive souvent que des corps réagissent, l'un sur l'autre, par leurs vitesses acquises, sans que la pression soit excessive, sans que la durée de la réaction soit très-courte; et que réciproquement des forces motrices, qu'on ne peut se refuser de regarder comme des pressions ordinaires, telles que celles qui résultent, par exemple, du ressort des gaz de la poudre, etc., communiquent cependant aux corps une vitesse très-grande dans un très-petit temps, attendu la grande intensité de leur action. La distinction qu'on voudrait établir entre des phénomènes qui ont autant de connexion entre eux, ne pourrait donc servir qu'à compliquer l'étude de la Mécanique, en y introduisant, sans utilité immédiate, un ordre de considérations qui n'y est point indispensable.

170. *Utilité du choc dans les arts; battage des pilots de fondation.* Maintenant on doit bien concevoir comment il est possible de comparer les effets des chocs, sur les corps, à celui des pressions ordinaires qui produisent des mouvements plus ou moins lents; on conçoit très-bien aussi que, le choc produisant, dans un temps extrêmement court, un travail ou un effet comparable à celui que produisent, dans un temps généralement beaucoup plus long, les pressions ordinaires, il y ait souvent avantage, nécessité même

d'employer ce mode d'action dans les arts, malgré les inconvénients qui y sont attachés (162). Car, toutes les fois que la pression ou l'effort direct dont on pourra disposer pour produire un travail mécanique, sera au-dessous de la résistance à vaincre, il faudra recourir au choc qui développe des pressions considérables et toujours en rapport avec la force de réaction.

On s'expliquera encore aisément le but qu'on se propose en plaçant, sous les fondations des édifices très-lourds, tels que les piles de ponts, les palais, les remparts, etc., de forts *pieux* ou *pilots* affûtés vers le bas et enfoncés, sous le sol, à *coups de mouton*. Le poids dont est chargé verticalement chaque tête de pilot par les constructions établies directement au-dessus, représente celui R du prisme dont il a été question au n° 166, et le mouton remplace également le cube; seulement ici ce n'est pas l'enfoncement de la tête du pilot qu'il s'agit de produire, mais bien celui de sa pointe inférieure, dans le sol; c'est pourquoi on cherche à éviter le premier enfoncement, qui consommerait, en pure perte, une partie notable de la force vive du mouton, et l'on a soin de consolider la tête du pilot par une forte frette, quand la violence du choc pourrait la déformer rapidement; et, comme il ne s'agit pas davantage d'en briser la pointe, on a l'attention de la durcir au feu ou de la coiffer d'un *sabot en fer*. Enfin on dresse, on arrondit, le mieux possible, les côtés du pilot pour diminuer les résistances qui s'opposent à son enfoncement: de cette façon, la plus grande portion de la force vive du mouton est transmise à l'extrémité inférieure du pilot, et sert immédiatement à l'enfoncer dans le sol jusqu'à ce que, arrivée sur le roc, le tuf ou quelque autre terrain solide, les coups redoublés du mouton ne puissent plus la faire descendre, d'une manière sensible, auquel cas on dit que le pilot est parvenu *au refus*.

171. *Conditions du battage de pilots et conséquences qui en résultent.* On exige ordinairement, pour un pilot de $0^{m},25$ de diamètre et de 3 à 4^{m} de longueur, que l'enfoncement produit par chacune des dernières *volées* de 30 coups, d'un mouton de 300 à 400^{kil}, tombant d'une hauteur de $1^{m},30$, soit, au plus, de 4 à 5 millimètres; moyennant quoi il devient permis, d'après les observations du célèbre Perronet, de charger chaque tête de pilot jusqu'à 25000^{kil}, sans qu'on ait à craindre aucun accident fâcheux pour la solidité des constructions.

Pour comparer cette donnée de l'expérience avec les résultats du calcul, nous observerons qu'ici les 30 coups de mouton équivalent (166) à une quantité de travail de $30 \times 300^{k} \times 1^{m},3 = 11700^{km}$ au moins. Ce travail produisant un enfoncement de $0^{m},005$ au plus, le poids qui, placé sur la tête des pilots, produirait le même enfoncement, serait d'au moins $\frac{11700}{0,005} = 2340\,000^{kil}$: ce poids est environ 94 fois celui que Perronet assigne comme limite de la charge des pilots; mais il faut observer 1° que les bois sont susceptibles de s'altérer plus ou moins à la longue, de sorte qu'ils peuvent alors s'écraser ou s'affaisser sous une charge moindre que celle qu'ils seraient capables de supporter momentanément; 2° que l'élasticité naturelle du bois et du sol qu'on frappe à coups de mouton, empêche que toute la force vive soit employée contre les résistances de ce sol, et tend même à diminuer la profondeur de l'enfoncement, en relevant, à chaque coup, le pilot d'une certaine quantité; 3° enfin qu'il ne convient pas non plus que l'on statue sur un abaissement de $0^{m},005$, pour les fondations d'un édifice qui doit présenter les caractères de la plus grande solidité, tel qu'un pont, etc. C'est pourquoi l'on peut admettre, d'après la règle posée par Rondelet, qu'en général, quand il s'agit de constructions monumentales, on ne doit prendre, pour charge des pilots, que la 94^{me} partie du poids qu'assigne la théorie.

Les calculs qui précèdent supposent d'ailleurs que la force vive du mouton soit tout entière consommée contre les résistances du sol, qui s'opposent à l'enfoncement, tandis que, dans la réalité (170), une portion plus ou moins grande de cette force vive est consommée pour écraser la tête du pilot : on peut même admettre que le ressort du bois est tout à fait négligeable dans les circonstances actuelles où le choc s'opère avec violence; de sorte que ce choc finit à l'instant même (158) de la plus grande compression éprouvée par la tête du pilot. Il est aisé de juger, d'après cela, que les observations du n° 162 sont applicables au cas actuel; c'est-à-dire que, pour diminuer, le plus possible, la perte inutile de force vive sur la tête du pilot, il convient de donner au mouton un poids qui excède de beaucoup celui de ce pilot; on doit par conséquent employer des moutons d'*autant plus lourds,* que les pilots à chasser le sont eux-mêmes davantage. Dans la pratique, le poids du mouton est assez ordinairement compris entre deux fois et trois fois celui du pieu, de sorte que (162) la perte de force vive est aussi comprise entre le $\frac{1}{3}$ et le $\frac{1}{4}$ de celle qui opère le choc : en se servant de moutons encore plus pesants, la perte diminuerait, mais la manœuvre deviendrait embarrassante dans bien des cas, et occasionnerait d'autres consommations inutiles du travail moteur.

La perte de force vive, provenant de la déformation de la tête des pilots, étant donc généralement une fraction assez faible, et d'ailleurs à peu près constante, de celle qui est imprimée au mouton, il résulte, de ce qui précède (166), que les *enfoncements* ou *effets* du choc de divers moutons doivent être *proportionnels à leurs poids ainsi qu'à leurs hauteurs de chute,* ou *aux carrés des vitesses qu'ils acquièrent au bas de ces chutes ;* ce que confirme parfaitement l'expérience, non-seulement dans l'opération du battage des pieux de fondation, mais encore dans une infinité d'autres circonstances où les effets sont directement comparables, comme lorsqu'on laisse tomber un corps dur sur une pièce de bois, de fer, etc., posée horizontalement sur deux appuis.

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT PAR LE RESSORT DES GAZ, OU DU TIR DES PROJECTILES.

172. *Observations générales.* Nous avons déjà donné un aperçu (138) de la manière dont l'élasticité de l'air, comprimé fortement dans le réservoir d'un fusil à vent, peut servir à lancer des balles ou à convertir une certaine quantité de travail, accumulé dans cet air, en force vive. Or, en admettant, comme on le fait ordinairement, que la tension des fluides élastiques suive exactement la loi de Mariotte (16) quelle que soit la manière dont s'opère leur compression ou leur débandement, c'est-à-dire leur *détente,* non-seulement on pourra calculer la vitesse totale imprimée à la balle à l'instant où elle sort du canon, au moyen de la quantité de travail développée, sur elle, par les pressions successivement décroissantes du volume d'air qu'on laisse échapper, à chaque coup, de l'intérieur du réservoir, mais encore on sera en état (129 et suiv.) de calculer toutes les autres circonstances de son mouvement pendant le temps où elle chemine dans l'âme du canon, et de résoudre plusieurs questions intéressantes telles que de trouver la *vitesse de recul* du fusil, le temps que la balle met à parcourir l'âme, la lon-

gueur de cette âme qui donne le plus ***grand effet*** ou la plus grande vitesse de sortie, vitesse qu'on nomme aussi la ***vitesse initiale*** des projectiles dans l'art de la *Balistique*.

Nous n'entreprendrons pas de résoudre ici toutes ces questions, parce que le fusil à vent est d'un usage très-borné de nos jours, et que nous avons à traiter divers sujets, plus ou moins analogues, qui sont d'un intérêt plus immédiat et également très-propres à servir d'exemples de l'application des principes. Nous ferons seulement remarquer, relativement à la recherche du *maximum* d'effet, que la plus grande vitesse imprimée à la balle, répond à l'instant même où la pression de l'air intérieur est, par suite de sa détente, réduite à la pression de l'air atmosphérique extérieur (37), augmentée du frottement qu'éprouve la balle de la part des parois du canon : pression et frottement qu'il n'est permis de négliger qu'autant que l'âme aurait peu de longueur, ou que ces résistances demeureraient constamment, et de beaucoup, inférieures à la force motrice qui pousse la balle en avant : or, c'est ce qui a lieu précisément dans le tir ordinaire des projectiles, par le moyen de la poudre, dont nous allons maintenant nous occuper avec quelques détails. Nous reviendrons plus tard sur ce qui concerne l'air en particulier.

173. *De la communication du mouvement par les gaz de la poudre.* Le tir des balles et des boulets, par l'inflammation d'une certaine quantité de poudre enfermée dans le fond de l'âme d'un canon, et à laquelle on a mis le feu, présente des circonstances tout à fait analogues à celles qui sont relatives au fusil à vent; car ce tir consiste encore (99) à employer le ressort des gaz de la poudre, qui sont le résultat de sa combustion, pour imprimer progressivement la vitesse au projectile : ces gaz, en se dilatant, par l'action de la chaleur (26), remplissent ici, en effet, la fonction d'un ressort véritable : ils pressent le boulet avec des forces qui, partant de zéro, croissent d'une manière extrêmement rapide, jusqu'à un certain terme qui s'approche plus ou moins de l'instant où la poudre est entièrement enflammée, puis décroissent ensuite à mesure que les gaz se refroidissent ou que leur température baisse (21 et suiv.) par le contact des corps environnants, à mesure que les *pertes* ou *fuites* de ces gaz augmentent de plus en plus, par l'effet du *vent* ou *jeu* du boulet dans la pièce et de l'ouverture assez forte de la lumière, à

mesure enfin que le boulet, cheminant en avant, agrandit, de plus en plus, l'espace occupé par les différents gaz (16).

Quoiqu'on ne connaisse ni la loi de ces pressions ni celle de l'inflammation *nécessairement progressive* de la poudre, on peut, cependant, déduire, de nos principes, plusieurs conséquences conformes aux résultats bien connus de l'expérience ; car le cas est ici tout à fait semblable à celui de la communication du mouvement par le choc des corps (154 et suiv.), où l'on ne connaît aucunement la loi que suit la force de réaction, et où l'on parvient néanmoins à diverses conséquences rigoureuses et utiles. Aussi doit-on s'attendre à voir reparaître un ordre de considérations analogues, et qui se présente généralement toutes les fois qu'il s'agit de la communication du mouvement par la réaction mutuelle des corps.

Comme on ne saurait trop insister sur les principes de pareilles applications, je pense qu'il ne sera nullement superflu de revenir sur les démonstrations très-simples qui en ont déjà été données précédemment, nos 131 et 153.

Soit F, à un instant donné, la force motrice qui pousse en avant le boulet et qui presse, en sens contraire et avec une intensité égale (14), le fond de l'âme de la pièce ; soient P et P′ les poids du boulet et de la pièce y compris son affût, etc.; soient v et v' respectivement les petits degrés de vitesse qui leur sont imprimés à un instant quelconque et dans la durée du très-petit temps t ; on aura (130) la proportion

$$\mathrm{F} : \mathrm{P} :: v : gt, \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}v = \mathrm{F} \times gt.$$

On aura, de même, pour la pièce et son affût,

$$\mathrm{F} : \mathrm{P}' :: v' : gt, \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}'v' = \mathrm{F} \times gt;$$

ainsi $$\mathrm{P}v = \mathrm{P}'v', \quad \text{ou} \quad v : v' :: \mathrm{P}' : \mathrm{P},$$

comme on le conclurait immédiatement des résultats du no 131. Par conséquent *les degrés de vitesse imprimés au boulet et à la pièce, dans un très-petit temps, sont réciproquement proportionnels aux poids de ce boulet et de cette pièce.*

Puisque le produit $\mathrm{P} \times v$ répond au petit temps t, la somme des produits partiels, relatifs aux divers instants écoulés depuis le point de départ du boulet jusqu'au moment où, quittant la pièce, il a acquis toute sa vitesse V, aura pour valeur le produit du poids P par la somme des degrés de vitesse v, successivement imprimés, ou par la vitesse totale V, c'est-à-dire $P \times V$. La somme des produits $P' \times v'$, pour le même intervalle de temps, sera pareillement $P' \times V'$, V' étant la vitesse finie communiquée à la pièce et à l'affût quand celle du boulet est V. Mais les petits produits $P \times v$ et $P' \times v'$, relatifs aux divers instants écoulés, sont continuellement égaux entre eux d'après ce qui précède; donc aussi $P \times V = P' \times V'$; c'est-à-dire que

Les vitesses finies, imprimées à la pièce et au boulet à l'instant où celui-ci a acquis tout son mouvement, sont réciproquement entre elles comme les poids de cette pièce et de ce boulet.

174. *Observations sur la vitesse du recul des pièces.* Les gaz de la poudre continuant à agir sur le fond de l'âme après l'instant où le boulet a quitté la pièce, on voit que la *vitesse totale* de cette pièce ou du *recul* sera un peu plus forte que ne le suppose la proportion ci-dessus. On voit aussi pourquoi le recul est beaucoup moindre quand on tire à poudre seulement, que quand on tire à boulet. On se rappellera d'ailleurs (172) qu'il faudrait, pour rendre plus exacts les raisonnements ci-dessus, diminuer F de toute la pression exercée, dans le sens opposé au mouvement, par l'air atmosphérique, sur la surface extérieure du boulet, ainsi que du frottement qu'il éprouve de la part de l'âme de la pièce, pression et frottement qui sont toujours, comme on le verra ci-dessous, très-faibles par rapport à la pression totale de la poudre. Enfin on remarquera que, le poids P du boulet étant généralement très-petit par rapport au poids P' de la pièce et de l'affût, la vitesse V' est aussi très-petite par rapport à V : dans la plupart des cas, P' est au moins 300 fois P; ainsi la vitesse du recul surpasse rarement le 300^{me} de la vitesse communiquée au boulet, à sa sortie de la pièce.

175. *Mesure du travail total développé par la poudre contre la pièce et le boulet.* Pour calculer directement cette quantité de travail, il faudrait (72) connaître, par expérience, la loi ou la courbe qui lie les pressions F aux chemins correspondants décrits par le boulet dans l'âme de la pièce, ce qui n'est pas jusqu'à présent. Mais, comme nous savons (136) que cette quantité de travail est la moitié de la force vive imprimée, nous pourrons l'obtenir au moyen des vitesses V et V' acquises effectivement par le boulet et la pièce; ce qui sup-

pose toujours qu'on néglige les résistances étrangères à l'inertie, vu leur peu d'influence. En effet, la force vive du boulet étant (126) égale à $\frac{1}{2}$ MV², et celle de la pièce à $\frac{1}{2}$ M'V'², la quantité de travail totale, dépensée par la poudre, a pour mesure (136),

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 + \frac{1}{2}\frac{P'}{g}V'^2.$$

Considérons, par exemple, une pièce de 24, dont le boulet pèse environ 12^{kil}, et dont la charge ordinaire est approchante de 4^{kil}; on sait, par expérience, que la vitesse totale V de ce boulet s'éloigne peu de 500^m par seconde; $\frac{1}{2}\frac{P}{g} \times V^2$ sera donc égal, g étant environ $9^m,81$, à 152955^{km}. Pour trouver $\frac{1}{2}\frac{P'}{g} \times V'^2$, nous admettrons que le poids P' soit seulement 300 fois le poids P ou égal à 3600^{kil}; et, puisqu'on a $P \times V = P' \times V'$, on en tire $V' = \frac{1}{300}V = \frac{1}{300}500^m = 1^m,67$, pour la vitesse du recul. Ainsi, on aura pour la valeur de la quantité de travail développée par la poudre contre l'affût, ou pour $\frac{1}{2}\frac{P'}{g} \times V'^2$, 503^{km} environ; c'est-à-dire $\frac{1}{300}$ de celle qui a été dépensée sur le boulet, comme on pouvait l'apercevoir sans calcul.

176. *Conséquences relatives aux vitesses initiales des projectiles, leur accord avec l'expérience.* Le travail consommé par la pièce et son affût, étant très-petit par rapport à celui qu'exige le boulet, on peut le négliger, et se *contenter, dans la pratique,* de mesurer simplement les effets de la poudre d'après la quantité de travail nécessaire pour imprimer la vitesse au boulet; d'autant plus que la force vive du recul est, dans la réalité, bien moindre que ne le supposent les calculs, vu que la pièce n'est pas entièrement libre, et qu'elle éprouve, de la part du terrain, des essieux, etc., des résistances absolument comparables aux pressions exercées par la poudre. Or, les effets de cette poudre devant, dans des circonstances semblables d'ailleurs, être proportionnels à sa quantité, c'est-à-dire à son poids, on voit que *les charges seront sensiblement proportionnelles aux forces vives imprimées aux boulets, ou aux produits du poids de ces derniers,*

par le carré de leurs vitesses initiales; de sorte que *les vitesses initiales seront aussi entre elles comme les racines carrées des charges et inverses des racines carrées des poids du boulet.*

Ces résultats de notre théorie sont parfaitement d'accord avec les expériences faites en Angleterre, par Hutton *, non-seulement pour des pièces d'un même calibre, mais encore pour des pièces de calibres différents, considérées dans les circonstances ordinaires de la pratique. Ces expériences ont prouvé toutefois qu'en allongeant l'âme des pièces, la vitesse initiale du boulet, pour des charges égales, se trouvait aussi un peu augmentée; ce qui doit être, puisqu'alors les gaz de la poudre développent, par leur détente prolongée, une plus grande quantité de travail, et par conséquent de force vive (138); mais il paraît que cette augmentation est, en général, très-faible par suite des causes déjà énoncées, n° 173. Nous reviendrons bientôt sur les effets de la détente prolongée des gaz pour augmenter la vitesse des projectiles.

Ces mêmes considérations prouvent encore que la *force vive totale* ou la *vitesse finale,* imprimée au boulet par une même charge de poudre, *reste à très-peu près la même,* soit qu'on empêche tout à fait le recul par un obstacle solide, soit qu'on suspende librement la pièce; car nous venons de voir que, dans ce dernier cas, la force vive communiquée à la pièce et à l'affût est réellement une très-petite fraction de celle qu'acquiert le boulet; de sorte que l'action de la poudre est presque tout entière consommée contre ce boulet, comme cela arrive quand le recul est empêché. Cette nouvelle conséquence de la théorie est exactement conforme encore aux résultats des expériences de Hutton, qui, de plus, ont appris que la manière de *bourrer* n'avait aucune influence sensible sur la vitesse initiale : c'est qu'en effet, le bourrage ne fait qu'augmenter un peu les frottements, au premier instant, sans diminuer le vent du boulet, et que la résistance occasionnée par ce frottement est excessivement faible comparativement à la pression totale des gaz sur ce boulet. On remarquera que le bourrage se fait ordinairement avec des substances très-légères, et que, s'il en était autrement, l'inertie de ces substances consommerait une grande portion de la quantité de travail développée par la poudre, au détriment de celle

* *Nouvelles expériences d'artillerie*, traduction due à M. O. Terquem, de Metz, docteur ès sciences, officier de l'université, etc.; Paris, 1826, chez Bachelier.

qui est transmise au boulet; connaissant le poids de la bourre, on pourrait même déterminer exactement la diminution de force vive éprouvée par ce dernier, etc., etc.

177. *Du travail de la poudre comparé à celui des machines à vapeur; son effort moyen et absolu,* etc. D'après les calculs ci-dessus, la quantité de travail totale, développée par la poudre sur le boulet et sur la pièce, est d'environ 152 955^{km} + 503^{km} = 153 458^{km}; la force du cheval des machines à vapeur étant (82), pour chaque seconde, de 75^{km}, on voit qu'une telle force motrice emploierait $\frac{153458}{75} = 2046'' = 34'$ environ, pour lancer le boulet avec la vitesse de 500^{m}; ou, si l'on veut, il faudrait une machine de 2046 chevaux de force pour lancer un pareil boulet à chaque seconde. Attendu qu'il faut un certain temps pour charger la pièce et pour la pointer, etc., on compte seulement 1 coup par 5 minutes, ou par 300'' dans le service ordinaire des pièces avec la poudre; ainsi la machine à vapeur, pour fournir à ce service, devrait être d'environ $\frac{2046}{300} = 6,82$ chevaux, en supposant d'ailleurs qu'il n'y eût pas de perte de force motrice et que tout fût transmis au boulet; ce qui ne peut avoir lieu quelle que soit la machine ou les dispositifs qu'on adopte pour communiquer le mouvement à ce boulet (103).

Comme la longueur de l'âme des pièces de 24 est d'environ 3^{m},10 et son diamètre de 0^{m},15 ou 15 centimètres, il sera facile de calculer (73) *l'effort moyen et constant* que les gaz de la poudre devraient exercer, contre le boulet et le fond de la pièce, pour développer la quantité d'action ci-dessus 153458^{km}, pendant que le boulet parcourt la longueur de l'âme, longueur que nous réduirons à 2^{m},75 environ à cause de la place occupée par la poudre, etc. En divisant 153458^{km} par 2^{m},75 on trouvera, en effet, 55803^{kil} environ pour cette pression moyenne; comme elle est répartie, avec la même intensité, sur la surface du cercle de section de l'âme, qui a 0^{m},15 de diamètre, ou sur la surface $3,1416 \times \frac{(15)^2}{4} = 176$ centimètres carrés environ; on voit que chacun de ces centimètres carrés sera pressé avec un effort de $\frac{55803}{176} = 317^{kil}$. La pression, exercée par l'air atmosphérique sur chaque centimètre carré de la surface d'un corps, étant de $1^k,033$ environ dans les circonstances mentionnées au n° 37, l'effort moyen ci-dessus équivaut donc, à très-peu près, à 307 *atmosphères;* l'effort réel et moyen des gaz de la poudre est au moins de 308 atmosph., attendu qu'indépendamment de l'inertie du boulet, cet effort doit vaincre aussi la pression de l'air extérieur.

En calculant, comme on l'a fait dans le n° 167, à l'occasion du choc des corps, le temps que mettrait cet effort moyen censé constant, à imprimer la vitesse de 500^m au boulet, on le trouvera égal à

$$\frac{12^k \times 500^m}{9^m,81 \times 55803^k} = 0'',011, \text{ ou } \frac{1}{19} \text{ de seconde environ.}$$

Mais il serait aisé de prouver, d'après la rapidité avec laquelle croît la pression dans les premiers instants de l'inflammation de la poudre, que la durée du temps que le boulet met à parcourir l'âme de la pièce doit être moindre encore.

Il faut distinguer *l'effort moyen* de *l'effort réel* exercé, par la poudre, dans chaque position du boulet; ce dernier effort est nécessairement variable, suivant cette position. D'après ce qui a été dit n° 172, on peut juger que, dans les cas ordinaires, il est au-dessous de l'effort moyen, à l'instant où l'inflammation commence et à celui où le boulet sort de la pièce; qu'il le surpasse de beaucoup vers le moment de l'inflammation complète de la poudre; qu'enfin cet effort moyen diffère considérablement de *l'effort absolu* et total que peuvent exercer les gaz de la poudre, lorsqu'ils sont contenus dans l'espace très-étroit occupé par le volume même de cette poudre, et qu'ils ne peuvent s'étendre en aucune manière. D'après Rumfort, cette pression absolue surpasserait 50000 atmosphères, d'après d'autres, elle serait beaucoup plus faible. M. Brianchon, savant professeur à l'école d'artillerie de Vincennes, a trouvé, par des calculs basés sur des considérations de physique et de chimie très-ingénieuses et très-plausibles, que la pression absolue de la poudre ne s'élève pas au delà de 4,000 atmosphères; mais on conçoit que la manière dont on essaye la poudre et dont on entend sa pression, doit exercer une très-grande influence sur les résultats. Suivant les calculs hypothétiques de Hutton, par exemple, qui a fait ses expériences avec des canons ordinaires, la plus forte pression exercée sur le boulet serait environ 2000 fois celle de l'atmosphère; mais, comme, suivant d'autres expériences directes (13), une pièce de bronze de trois pouces d'épaisseur éclate avant que la pression soit de 1000 atmosphères, tandis que des pièces, de moindre épaisseur, ne sont pas même endommagées après un grand nombre de coups tirés à poudre, on peut présumer que ce résultat de Hutton est de beaucoup trop fort *.

178. *Examen et prix comparés du travail de la poudre et de la vapeur d'eau.* Si on voulait remplacer l'action de la poudre par celle de la vapeur d'eau introduite directement dans l'âme de la pièce, ainsi qu'on l'a proposé dans ces derniers temps, il faudrait, selon ce qui précède, employer, dans le cas d'une pièce de 24, cette vapeur sous une *pression constante* d'au moins 308 atmosphères, pour lancer le boulet avec la vitesse de 500^m, la longueur d'âme parcourue par ce boulet étant de $2^m,75$. En donnant à l'âme environ 8,8 fois cette longueur ou $24^m,2$, il suffirait d'employer la vapeur à une tension de 35 atmosphères, comme le propose l'ingénieur anglais Perkins ; mais il faudrait qu'elle affluât constamment avec cette force derrière le boulet, et que, par conséquent, elle ne subît aucun refroidissement (172) pendant qu'il parcourt la longueur de la pièce. Si le boulet devait être lancé seulement avec une vitesse moitié moindre ou de 250^m, il suffirait évidemment d'une pression moyenne égale au quart de 308^{at} ou de 77 atmosphères, en conservant la longueur d'âme ordinaire, et d'une longueur d'âme de 6^m, si la pression constante de la vapeur n'était que de 35 atmosphères; car les effets étant mesurés par la force vive imprimée dans chaque cas, sont entre eux comme les carrés des vitesses initiales du boulet.

On voit donc que l'emploi direct de la vapeur ne serait pas sans inconvénients dans les circonstances dont il s'agit, même en mettant de côté les dangers de toute espèce qu'il présente, parmi lesquels il faut surtout citer celui qui provient de la facilité qu'a la vapeur de passer, d'une tension déjà considérable, à une tension double ou triple, par suite d'une légère élévation de la température.

Du reste, on peut démontrer que la force motrice de la vapeur

* Le calcul de l'effort moyen exercé sur le boulet est indépendant de toute hypothèse ; et, si l'on connaissait, par des expériences bien faites, cet effort ou la vitesse initiale correspondante pour des pièces de même calibre et de différentes longueurs d'âme, on en déduirait aisément la loi même des pressions exercées par les gaz de la poudre sur le boulet, car le frottement du boulet étant extrêmement faible, il n'y a pas lieu d'en tenir compte dans les calculs.

serait d'un usage beaucoup plus économique que celle de la poudre. Car, en admettant que le kilogramme de poudre de guerre coûte seulement 2 francs au gouvernement, chaque coup d'une pièce de 24, revient à $4 \times 2 = 8^{fr}$. Or les machines à vapeur les plus désavantageuses n'exigent guère que 5 à 6 kilogrammes de houille par heure et par chaque cheval de force ; et nous avons vu ci-dessus (177) qu'il faudrait 34 minutes, environ une demi-heure, de travail d'une telle force, pour lancer le boulet avec la vitesse de 500^{m} ; donc il en coûterait moins de 3^{kil} de houille par coup, c'est-à-dire moins de 9 centimes, en comptant la houille à 30^{fr} les 1000^{k}, tandis qu'on dépense actuellement, en employant la poudre, une somme environ 90 fois aussi forte.

179. *Aperçus sur les moyens d'utiliser l'action de la vapeur pour lancer les projectiles.* Il ne sera peut-être pas impossible de mettre à profit, un jour, cette grande économie de la force motrice de la vapeur, pour la défense des places de guerre ou des côtes ; mais il faudra probablement renoncer à l'emploi direct de la vapeur à de hautes tensions ou pressions, et l'on devra se borner à rechercher les moyens d'utiliser directement la force des machines à vapeur actuelles pour imprimer la vitesse aux projectiles. Le ressort de l'air atmosphérique paraît, sous ce rapport, offrir des avantages tout particuliers ; on conçoit, en effet, très-bien comment, dans l'état de perfection actuel des arts industriels, il serait possible, en se servant de la force des machines à vapeur ordinaires, de comprimer fortement (15) un certain volume d'air atmosphérique, de manière à lui faire occuper un espace beaucoup moindre ; et comment cet air, ainsi comprimé, pourrait être employé à lancer les boulets avec des canons ordinaires, un peu modifiés, de la même manière qu'on lance les balles avec le fusil à vent. Il suffirait de comprimer cet air dans un grand cylindre de fer d'une capacité de 1 à 2 mètres cubes, par exemple, et absolument semblable à celui des chaudières de machines à vapeur, puis de mettre momentanément l'intérieur de ce cylindre en communication avec l'espace compris entre le boulet et le fond de l'âme de la pièce, et de fermer cette communication à un instant convenable.

Supposons, pour offrir une nouvelle application de nos principes, que la capacité du cylindre servant de réservoir d'air comprimé, soit de $1^{mc},6$ ou de 1600 litres ; ce volume sera environ 29 fois celui de l'âme du canon de 24 ; car, d'après les données ci-dessus (177), ce dernier volume $= 3^{m},1 \times 0^{mq},0176 = 0^{mc},0546$ ou 55 litres, à très-peu près. Si donc on laisse échapper, de l'intérieur du réservoir, contre le boulet, une portion du volume total égal à 55 litres, ou plutôt, si on laisse ouverte la communication entre le réservoir et l'âme, jusqu'à l'instant où le boulet quitte la pièce, l'air occupant, à ce même instant, un volume égal à $1 + \frac{1}{29} = \frac{30}{29}$ de son volume primitif, la tension de cet air sera, d'après le principe de Mariotte (16), aussi réduite aux $\frac{29}{30}$ de sa valeur primitive ; et par conséquent, si cette tension était d'abord de 315 atmosphères, par exemple, elle se trouverait réduite à $315 \cdot \frac{29}{30} = 304,5$ atmosphères au moment où le boulet quitterait la pièce. Or on peut présumer que, puisque les valeurs extrêmes de la tension diffèrent peu entre elles dans la supposition actuelle, l'effort moyen (73) de l'air, contre le boulet, différera aussi très-peu de celui qui répond à la *moyenne arithmétique* ou à la demi-somme $\frac{1}{2}(315 + 304,5) = 309,75$ atmosphères de ces valeurs extrêmes : cette moyenne surpassant l'effort moyen qui a été trouvé plus haut (177) pour le boulet de 24, chassé par la poudre, il est clair aussi que, abstraction faite des pertes, la pression qui lui correspond suffirait pour imprimer, à ce boulet, la vitesse de 500^{m} ; et que, s'il s'agissait seulement de lui communiquer une vitesse de 250^{m}, on pourrait se borner à comprimer l'air à 78 atmosphères seulement.

Néanmoins, attendu le frottement du boulet contre l'âme de la pièce, mais surtout à cause du *jeu* ou du *vent* qui laisserait échapper, en pure perte, une portion notable du fluide, il conviendrait d'augmenter de quelque chose la tension de l'air dans le réservoir, si mieux encore on ne préférait y faire arriver, par la machine à vapeur, de nouvel air pour remplacer celui qui se perd à chaque instant, de manière à rendre la tension à très-peu près constante ; car on voit bien, par les raisonnements qui précèdent, que, dans le cas contraire, la pression diminuerait, à chaque coup, d'un 30^{me} environ de la valeur qu'elle avait à la fin du coup précédent ; de sorte qu'après un certain nombre de coups, il s'en faudrait considérablement que la vitesse de 500^{m} fût transmise au boulet. C'est précisément là l'inconvénient attaché au fusil à vent ordinaire, et qui, joint à d'autres, a fait renoncer à son emploi malgré les avantages qu'il possède sous d'autres rapports.

Enfin, au lieu de procéder de l'une ou de l'autre de ces manières, on pourrait aussi, mais non sans augmenter beaucoup les difficultés et les dangers d'explosion, se contenter de mettre en usage de très-petits réservoirs en bronze, d'une capacité égale, par exemple, à celle de la gargousse employée dans le tir ordinaire à poudre, laquelle, comme on vient de voir, occupe, dans les pièces de 24, un *espace cylindrique* d'environ 6 litres, tout compris, ou du 9^{me} de celui de l'âme entière. En se servant d'un aussi petit réservoir, il faudrait comprimer l'air à une tension de beaucoup supérieure à 300 atmosphères, et telle que, dans sa *détente* graduelle, il développât, contre le boulet et pendant que ce boulet parcourt la longueur de l'ame, la quantité de travail nécessaire pour lui imprimer la vitesse de 500^m. Nous n'avons pas d'ailleurs à examiner comment ces petits réservoirs, indépendants de la pièce comme les gargousses elles-mêmes, pourraient s'adapter solidement au fond de l'ame, ou dans le renflement de la culasse, et jouer absolument le rôle de la poudre lorsqu'on viendrait à lâcher la détente qui retient l'air; il nous suffit ici que l'hypothèse soit assez plausible, en elle-même, pour exciter quelque intérêt, et appeler l'attention du lecteur sur les applications des théories de la Mécanique.

C'est, au surplus, l'occasion de faire connaître la méthode de calcul que nous avons promise n° 72, méthode due au géomètre anglais Thomas Simpson, et par laquelle on peut évaluer, d'une manière très-approchée, le *travail mécanique variable,* ou, plus généralement, l'*aire superficielle* des figures planes limitées par des contours quelconques.

MÉTHODE GÉNÉRALE DES QUADRATURES POUR CALCULER L'AIRE SUPERFICIELLE DES COURBES PLANES.

180. *Démonstration géométrique de la méthode.* Soit $a'd'g'ga$ (fig. 39) une aire plane limitée par une portion de courbe $a'd'g'$, par la droite OB, servant d'axe des abscisses (51), et par les deux ordonnées extrêmes aa', gg', perpendiculaires à cet axe. Supposons qu'on ait divisé la distance ag, de ces ordonnées, en un *nombre pair* de parties égales, par exemple en 6 parties, aux points b, c, d, e, f, et qu'on ait élevé, en ces points, les nouvelles ordonnées bb', cc', ... ff', terminées à la courbe; on aura une première valeur approchée de l'aire mixtiligne $aa'd'g'ga$, en calculant les surfaces de chacun des trapèzes rectilignes $aa'b'b$, $bb'c'c$,.... $ff'g'g$, dont

elle se compose, puis ajoutant entre eux tous les résultats ; ce qui revient à remplacer la courbe par le polygone rectiligne $a'b'c'd'....g'$ qui lui est inscrit. Mais on obtient, sans être obligé de multiplier davantage les points de division, une valeur beaucoup plus approchée de l'aire cherchée en procédant comme il suit.

Ayant numéroté le rang des diverses ordonnées, comme on le voit sur la figure 39, on considérera, à part (fig. 40), l'aire mixtiligne $cc'd'e'ec$, limitée aux deux ordonnées impaires quelconques cc', ee', qui se suivent et qui comprennent entre elles l'ordonnée dd' de rang pair ; la surface totale des trapèzes rectilignes correspondants $cdd'c'$, $dee'd'$, aura pour mesure, puisque $de = cd$,

$$\tfrac{1}{2} cd\,(cc' + dd') + \tfrac{1}{2} de\,(dd' + ee') = \tfrac{1}{2} cd\,(cc' + 2dd' + ee').$$

Mais on obtiendrait évidemment une valeur plus approchée de l'aire $cc'd'e'e$, si, partageant cette aire en trois autres aires trapézoïdes $cmm'c'$, $mnn'm'$, $nee'n'$, par des nouvelles ordonnées équidistantes mm', nn', c'est-à-dire telles que $cm = mn = ne = \frac{2}{3} cd$, on prenait, pour cette valeur, la somme de trois trapèzes rectilignes inscrits correspondants, c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2} cm\,(cc' + mm') + \tfrac{1}{2} mn\,(mm' + nn') + \tfrac{1}{2} ne\,(nn' + ee'),$$

ou, attendu que $\frac{1}{2} cm = \frac{1}{2} mn = \frac{1}{2} ne = \frac{1}{6} ce = \frac{1}{3} cd$,

$$\tfrac{1}{3} cd\,(cc' + 2mm' + 2nn' + ee').$$

Or, pour s'éviter la peine de tracer les nouvelles ordonnées mm', nn', et pour obtenir néanmoins une approximation égale ou même supérieure, on remarquera que la corde $m'n'$ vient couper l'ordonnée intermédiaire dd', qui est à égale distance de mm' et de nn', en un point o tel que $od = \frac{1}{2}(mm' + nn')$, et que, par conséquent, $4od = 2mm' + 2nn'$; la valeur de l'aire rectiligne $cc'm'n'e'e$ devient donc simplement $\frac{1}{3} cd\,(cc' + 4od + ee')$.

Nous n'avons pas, il est vrai, l'ordonnée od immédiatement, mais elle diffère extrêmement peu de l'ordonnée véritable dd' de la courbe, que nous connaissons ; en remplaçant donc od par dd' dans les calculs, nous obtiendrons une mesure très-approchée, quoique un peu trop forte, de l'aire polygonale dont il s'agit. Mais, puisque cette aire est elle-même un peu plus faible que la véritable aire terminée à la courbe, il se fera une sorte de compensation * si nous prenons, pour mesure de cette dernière, la quantité

$$\tfrac{1}{3}\, cd\, (cc' + 4dd' + ee').$$

On aura de même, (fig. 39),

$acc'a' = \frac{1}{3}\, cd\, (aa' + 4bb' + cc')$, $egg'e'e = \frac{1}{3}\, cd\, (ee' + 4ff' + gg')$;

donc la surface totale $agg'd'a'$ qu'il s'agit de calculer, a, pour mesure,

$$\tfrac{1}{3}\, cd\, (aa' + 4bb' + cc' + cc' + 4dd' + ee' + ee' + 4ff' + gg'),$$

ou $$\tfrac{1}{3}\, cd\, [aa' + gg' + 4(bb' + dd' + ff') + 2(cc' + ee')],$$

c'est-à-dire *le tiers du produit qu'on obtient en multipliant, par l'intervalle constant compris entre les ordonnées de la courbe, la somme des ordonnées extrêmes, augmentée de deux fois celle des autres ordonnées de rang impair, et de quatre fois celle des ordonnées de rang pair.*

Les mêmes raisonnements demeurant applicables quel que soit le nombre des ordonnées équidistantes, pourvu qu'il soit *impair,*

* Il est évident qu'en prenant dd' pour od, on augmente l'aire polygonale de $\frac{1}{3} cd\,.\,4od'$; mais, en traçant les nouvelles cordes $m'd'$, $n'd'$, il sera aisé de voir que la surface du triangle rectiligne $m'n'd'$ a pour mesure $\frac{1}{2}\, mn \times od'$; car il se compose des triangles $m'od'$, $on'd'$, dont la somme des surfaces

$$= \tfrac{1}{2} od'\,.\,md + \tfrac{1}{2}\, od'\,.\,dn = \tfrac{1}{2}\, od'\,(md + nd) = \tfrac{1}{2}\, od'\,.\,mn;$$

et comme $mn = \frac{2}{3}\, cd$, la surface du triangle $m'd'n'$ sera $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\,.\,cd\,.\,od' = \frac{1}{3} cd\,.\,od'$. On a donc augmenté l'aire du polygone rectiligne $cc'm'n'e'ec$ de 4 fois le triangle $m'd'n'$, tandis qu'il faudrait l'augmenter de la somme des aires des segments compris entre la courbe et les cordes $c'm'$, $m'n'$ et $n'e'$. Par conséquent, si cette somme équivaut à 4 $m'd'n'$, la compensation sera exacte et la méthode rigoureuse; dans tous les cas, on ne risquera de se tromper que de la différence de cette somme et de 4 $m'd'n'$, différence qui ne sera généralement qu'une petite fraction de chacune d'elles, excepté pour quelques points *singuliers* de la courbe.

On voit, d'après cela, que, quand il s'agit de calculer, avec une grande exactitude, l'aire d'une figure plane limitée par des contours quelconques, il convient, non-seulement de multiplier beaucoup les ordonnées et de bien choisir l'axe des abscisses pour éviter la trop grande obliquité de ces ordonnées par rapport aux courbes, mais encore de partager l'opération en plusieurs opérations distinctes, soit qu'on multiplie davantage les ordonnées dans certaines parties, soit qu'on rapporte les courbes à plusieurs axes différents; en un mot, il faudra éviter que les trapèzes rectilignes ne diffèrent nulle part, d'une trop grande quantité, de trapèzes curvilignes correspondants. Il paraît bien clair d'ailleurs que, par la formule de Simpson, on approche, dans les circonstances ordinaires, non-seulement plus de la vérité qu'en calculant les valeurs des trapèzes rectilignes inscrits et limités aux ordonnées simples, mais même davantage encore que si l'on calculait celle des trapèzes relatifs à des ordonnées plus rapprochées d'un tiers.

on voit que la règle est générale; mais il est clair qu'elle ne donnera des résultats très-approchés, pour les parties de la courbe qui s'écarteraient considérablement de la forme d'une ligne droite, qu'autant qu'on divisera les intervalles, compris entre les ordonnées extrêmes, en un nombre pair de parties égales, assez grand pour que les trapèzes rectilignes inscrits ne diffèrent nulle part beaucoup des trapèzes véritables, ou qu'autant qu'on resserrera convenablement les ordonnées vers les parties dont la courbure est très-prononcée.

Il est également essentiel de remarquer que le calcul donnera des résultats un peu trop petits pour les parties de la courbe qui présentent leur concavité à l'axe des abscisses (*voyez* fig. 39), et un peu trop grands pour celles où cette courbe tourne sa concavité vers cet axe, comme cela a lieu pour la courbe de la fig. 41, par exemple.

DU TRAVAIL PRODUIT PAR LA DÉTENTE DES GAZ.

181. *Exemple de la manière de calculer ce travail.* Reprenons maintenant la dernière des questions du n° 179, et appliquons-y la méthode qui précède, en négligeant d'ailleurs, comme nous l'avons fait alors, le recul de la pièce qui est (175) presque toujours insensible. Cherchons, à cet effet, la loi que suivent les pressions de l'air à mesure qu'il se développe ou se *détend* en poussant le boulet en avant, c'est-à-dire (50) formons la *table* qui donne, pour chaque chemin parcouru par ce boulet dans l'intérieur de la pièce, la pression correspondante. Soit Oi (fig. 41) la longueur totale de l'âme, Oa la portion de cette longueur occupée primitivement par l'air, supposé comprimé à 1200 atmosphères; d'après ce qui a été admis à la fin du n° 179, Oa sera le $\frac{1}{9}$ de Oi, et le $\frac{1}{8}$ de l'espace ai parcouru par le boulet; divisant donc ai en 8 parties égales aux points b, c, d. . . . h, elles seront aussi toutes égales à Oa, et représenteront chacune des volumes cylindriques de l'âme, égaux à celui qu'occupe l'air comprimé. Ainsi, quand le boulet sera successivement arrivé en b, en c, en d, en e, ... en i, le volume primitif Oa de cet air, sera double, triple, quadruple. . . . nonuple. Donc, selon la loi de Mariotte (16), la pression exercée par cet air, sur le boulet, qui d'abord était de 1200 atmosphères, n'en sera plus que la $\frac{1}{2}$,

le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, ... le $\frac{1}{9}$; c'est-à-dire qu'elle sera respectivement

de.	1200,	600,	400,	300,	240,	200,	171,	150,	133	atmosph.
aux points.	*a*,	*b*,	*c*,	*d*,	*e*,	*f*,	*g*,	*h*,	*i*,	
ayant pour n^os^. . .	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	

Élevant les perpendiculaires aa', bb', cc', ... ii', sur Oi, et portant, sur ces perpendiculaires, des longueurs proportionnelles aux pressions correspondantes, on formera la courbe $a'b'c'....i'$, nommée *hyperbole équilatère*. La surface de cette courbe, limitée aux ordonnées aa', ii' et à l'axe ai, représente, d'après le n° 72, la valeur du travail variable développé par le ressort de l'air contre le boulet; mais il n'est pas nécessaire de tracer la courbe elle-même pour obtenir la valeur de ce travail; le tableau ci-dessus suffit, en y appliquant la méthode du n° 180, car l'intervalle total ai se trouve justement divisé en un nombre pair de parties égales par les diverses ordonnées.

On a ici, en effet, pour

la somme des ordonnées extrêmes, ...	$1200 + 133$	$= 1333^{atm}$
2 fois celle des autres ordonnées impaires, .	$2(400 + 240 + 171)$	$= 1622$
4 fois celle des ordonnées paires, .	$4(600 + 300 + 200 + 150)$	$= 5000$
	Total	7955^{atm}

Il faudrait multiplier ce résultat (177) par $1^k,033$, puis par la surface de 176 centimètres carrés du cercle de section de l'âme, c'est-à-dire par $181^k,81$, pour avoir la somme des pressions véritables. Pour obtenir le travail total résultant de ces pressions, il faudra, de plus, multiplier cette somme par $\frac{1}{3}\ ab = \frac{1}{3}\ Oa$; le résultat sera donc $\frac{1}{3}\ Oa \times 7955^{at} = 2651^{at},7 \times Oa$ multipliés encore par $181^k,81$, ce qui donne finalement $482105^k,6 \times Oa$.

La courbe des pressions tournant sa convexité vers l'axe OB des abscisses, il est clair (180) que le résultat obtenu doit surpasser un peu le véritable; on voit aussi que la courbe diffère beaucoup d'une ligne droite dans la partie qui répond aux points *b, c, d, e*; il y a donc lieu de craindre que l'excès dont il s'agit soit assez considérable pour qu'on ne puisse le négliger; en conséquence, il conviendra de multiplier davantage les opérations vers les points *b, c, d, e*. Pour ne pas être obligé de recommencer tous les calculs, nous considérerons, à part, la portion de courbe comprise depuis aa' jusqu'à ee', et nous subdiviserons les intervalles primitifs des ordonnées en deux parties égales aux nouveaux points m, n, p, q ; chacune d'elles sera donc égale à $\frac{1}{2}$ Oa, et les espaces occupés successivement par le volume primitif Oa de l'air, seront respectivement $Oa + \frac{1}{2} Oa = \frac{3}{2} Oa$ en m, $(2 + \frac{1}{2}) Oa = \frac{5}{2} Oa$ en n, $(3 + \frac{1}{2}) Oa = \frac{7}{2} Oa$ en p, enfin $\frac{9}{2} Oa$ en q. Par conséquent, d'après la loi de Mariotte, les pressions correspondantes seront les $\frac{2}{3}$, les $\frac{2}{5}$, les $\frac{2}{7}$ et les $\frac{2}{9}$ de la pression de 1200^{at} relative au point a; en joignant à ces pressions, celles déjà calculées plus haut relativement aux points b, c, d, e, on formera, pour la portion ae, la nouvelle table qui suit :

pressions.	1200,	800,	600,	480,	400,	343,	300,	267,	240	atmosph.
points.	a	m	b	n	c	p	d	q	e	
nos.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Par conséquent,

somme des pressions extrêmes.	$1200 + 240$	$= 1440$ atm
2 fois celle des pressions impaires.	$2(600 + 400 + 300)$	$= 2600$
4 fois celle des pressions paires. . .	$4(800 + 480 + 343 + 267)$	$= 7560$
	Total.	11600atm

qu'il faut d'abord multiplier par $\frac{1}{3} am = \frac{1}{6} Oa$, ce qui donne pour résultat $\frac{1}{6}\ 11600 \times Oa = 1933^{at},3 \times Oa$, et ensuite par $181^{k},81$. Mais, comme cette dernière multiplication se reproduirait à la fin de chaque résultat, et que nous ne voulons ici que comparer entre eux les chiffres de ces résultats, nous négligerons de l'effectuer, dans ce qui va suivre, afin d'abréger les calculs; seulement on devra se ressouvenir, dans les applications particulières, que, pour obtenir le travail véritable, il restera encore à multiplier chaque nombre trouvé, par la pression totale qui répond à la surface de section de l'âme et à la pression atmosphérique moyenne.

En recherchant, comme on vient de le faire pour la partie $aa'e'e$, le surplus $ee'i'i$ de la surface de la courbe, et bornant simplement les opérations aux points de divisions f, g, h, qui donneront alors une approximation suffisante, on la trouvera égale à

$$\frac{1}{3} Oa\,[240 + 133 + 2 . 171 + 4(200 + 150)]$$
$$= \frac{1}{3}\,2115 . Oa = 705^{at} \times Oa.$$

Le total général est donc $1933^{at},3 . Oa + 705^{at} . Oa = 2638^{at},3 . Oa$, quantité très-peu moindre que celle $2651^{at},7$. Oa trouvée précédemment ; ce qui prouve toute l'excellence de la méthode.

182. *Pression moyenne de l'air, vitesse imprimée, etc.* Puisque $ai = 8\,Oa$ représente la longueur d'âme $2^m,75$ décrite par le boulet, il est clair que $2638^{at},3 \,.\, Oa$, divisé par $8\,Oa$, ou $329^{at},8$, est précisément (177) la *pression moyenne*, sur chaque centimètre carré de surface, qu'exerce l'air dans sa détente contre ce boulet. On voit donc, sans aller plus loin, que la vitesse imprimée à ce dernier surpasserait 500^m dans les suppositions actuelles, puisque l'effort moyen de la poudre, pour imprimer cette vitesse, s'élève, au plus, à 308 atmosphères (177).

Il est très-facile, au surplus, de calculer quelle est la tension que devrait recevoir le volume ou la charge d'air, représentée par Oa, pour imprimer au boulet la vitesse juste des 500^m, tout restant le même d'ailleurs et la pression des 1200^{at} étant seule changée; il est évident, en effet, que les résultats partiels et totaux des opérations ci-dessus demeurent proportionnels à la pression primitive. On posera donc la proportion

$$329,8 : 1200 :: 308 : x = \frac{1200 \,.\, 308}{329,8} = 1121 \text{ atmosphères},$$

qui est la tension demandée. Pour obtenir un tel degré de tension à l'aide d'une machine à compression ou d'une pompe foulante, (179), il faudrait, d'après la loi de Mariotte, coercer, dans le petit espace représenté par Oa, un volume d'air, pris à la tension atmosphérique moyenne, qui serait égal à 1121 fois Oa; et, comme les densités sont *proportionnelles* aux pressions (36), on voit que le mètre cube de l'air ainsi condensé, pèserait aussi 1121 fois celui de l'air ordinaire dont le poids est, à peu près (40), de $1^k,3$, c'est-à-dire 1457^{kil}: la densité de l'air du réservoir devrait donc égaler presque $1\frac{1}{2}$ fois celle de l'eau, et son poids, qui serait (179) de

$$0^{mc},006 \times 1457^k = 8^k,742,$$

surpasserait même le double du poids de la charge dans le tir avec la poudre (177). Or il pourrait bien se faire que, par suite d'un tel rapprochement des parties, l'air se convertît en un liquide véritable, ainsi qu'il arrive pour plusieurs autres corps gazeux et notamment pour les vapeurs (3 et 5), lorsqu'on les comprime seulement de quelques atmosphères.

Quoi qu'il en soit, il paraît difficile d'admettre qu'on puisse, de longtemps encore, obtenir l'air à un pareil état de condensation, et il y a lieu de croire par conséquent que la poudre, qui nous représente également un grand volume de gaz coercés dans un petit espace, et dont la tension est *neutralisée* par la force d'affinité ou d'agrégation des parties, que la poudre, qui est si facilement transportable, continuera, à moins de découvertes chimiques majeures, à remplir dans les combats le rôle qu'elle y joue depuis tant de siècles, malgré l'élévation de son prix comparé à celui des autres moteurs, et malgré l'inconvénient, quelquefois très-grave, qu'elle présente de rendre inhabitables les lieux clos où l'on en fait usage.

183. *Des avantages de la détente prolongée et de sa limite utile.* Nous avons supposé la pièce de la longueur ordinaire, mais on gagnerait nécessairement quelque chose, sur la tension primitive de l'air, en augmentant cette longueur; car ici les effets du refroidissement (173) ne paraissent pas, à beaucoup près, avoir autant d'influence que lorsqu'il s'agit des gaz de la poudre. Il n'en serait pas de même évidemment des pertes croissantes dues au jeu du boulet dans la pièce, au frottement, à la résistance de l'air atmosphérique extérieur, et il est probable que, passé un certain terme, on retirerait, en raison de ces pertes, fort peu d'avantages en augmentant les dimensions de l'âme : calculons néanmoins le surcroît d'effet produit par la détente prolongée de l'air, en négligeant tout à fait les pertes dont il s'agit.

Supposons d'abord que Oi (fig. 41) soit augmentée de deux parties ij, jk, égale chacune à Oa ou à $\frac{1}{9}$ de la longueur totale Oi de l'âme, considérée dans le premier cas (183); on trouvera, pour les pressions exercées en i, j, k respectivement,

$$\tfrac{1}{9}\,1200^{at} = 133^{at},\quad \tfrac{1}{10}\,1200^{at} = 120,\quad \tfrac{1}{11}\,1200^{at} = 109^{at}.$$

Donc (80 et 81) la surface de $ii'k'k$ aura, pour mesure, $\frac{1}{3}\,Oa\,(133 + 109 + 4\,.\,120) = Oa \times \frac{1}{3}\,722 = 240^{at},7 \times Oa$ environ; c'est-à-dire qu'en donnant à l'âme une longueur totale de $3^m,10 + \frac{2}{9}\,3^m,10 = 3^m,80$, la quantité de travail de l'air sera augmentée d'à peu près $\frac{1}{10}$ de sa valeur $2638^{at},3 \times Oa$ relative à la longueur de $3^m,10$.

En prolongeant de nouveau l'âme de $kr = ik = 2\,Oa$, on trouverait, de la même manière, que l'augmentation de travail du fluide serait de $200^{at} \times Oa$; la somme totale du travail développé par la détente de ce fluide, pour la longueur d'âme de $4^m,48$ qui excède, de près de moitié, la longueur primitive, serait donc

$$(2638,3 + 240,7 + 200)\, Oa = 3079^{at} \times Oa,$$

c'est-à-dire qu'elle surpasserait de $\frac{1}{6}$ celle qui se rapporte à cette dernière longueur; de sorte que la force vive imprimée au boulet serait aussi plus forte de $\frac{1}{6}$. Quant à la pression moyenne, dans le cas actuel, on la trouvera en divisant le travail total $3079^{at} \times Oa$ par $ar = 12\, Oa$, longueur d'âme décrite par le boulet, ce qui donne $\dfrac{3079^{at} \times Oa}{12 \times Oa} = 256^{at},6$ environ : cette pression est, comme on voit, moindre que celle qui répond au tir ordinaire avec la poudre (177), quoique la force vive imprimée soit réellement augmentée dans le rapport de la quantité de travail $3079^{at} \times Oa$ à celle $308^{at} \times 8\, Oa = 2464^{at} \times Oa$, qui est relative à ce dernier cas, la longueur d'âme étant alors $8\, Oa$.

S'il s'agissait seulement d'imprimer au boulet la vitesse de 500^m, comme dans ce dernier cas il suffirait (182) de comprimer l'air du réservoir à la tension de $\dfrac{1200 \times 2464 \times Oa}{3079 \times Oa} = 960$ atmosphères environ. Pour une vitesse moitié ou de 250^m, il suffirait (178 et 182) de donner le quart de 1200^{at} ou 300 atmosphères de pression à l'air du réservoir, dans le cas de la pièce courte, et $\frac{1}{4}\, 960 = 240$ atmosphères dans le cas de la pièce longue. En allongeant de plus en plus l'âme, il est clair que le travail, produit par la détente, irait aussi en croissant; de sorte que, pour produire les mêmes effets, la pression absolue dans le réservoir pourrait être progressivement diminuée; mais on remarquera que, passé un certain terme, cet accroissement et cette diminution deviendraient extrêmement peu sensibles, considérés même abstraction faite de toutes les causes de pertes rappelées ci-dessus. Car nous avons trouvé, par nos diverses opérations, que le travail était proportionnel à $1933^{at},3$, pour le point e (fig. 41), à $1933^{at},3 + 705^{at} = 2638^{at},3$ pour le point i, à $2638^{at},3 + 240^{at},7 + 200^{at} = 3079^{at}$ pour le point r; de sorte que, dans la première partie ae de la détente, il est près du triple de celui qui répond à la seconde partie $ei = ae$, et près du quintuple de celui qui est développé dans la troisième

$ir = ae$. A une distance du point a égale à 100 fois ae, ou à 400 fois Oa, la pression serait réduite à environ $\frac{1200^{at}}{400} = 3^{at}$, et le travail, sur une longueur égale à ae ou $4\,Oa$, serait, au plus, $4\,Oa \times 3^{at} = 12^{at} \times Oa$, ou $\frac{1}{161}$ de celui qui est produit dans le premier intervalle ae, etc. Or on conçoit que les résistances et pertes de toute espèce suffiraient alors pour absorber ces faibles augmentations du travail.

En calculant d'ailleurs le travail total développé, par la détente de l'air, dans cette longueur d'âme de 100 fois ae, on le trouvera égal à environ $7200^{at} \times Oa$, quantité qu'il faut diminuer, tout au moins, de celle $1^{at} \times 400\,Oa = 400^{at} \times Oa$, qui est absorbée par la pression de l'air atmosphérique extérieur; ce qui la réduit à $6800^{at} \times Oa$, qui surpasse très-peu le double de la quantité de travail $3079^{at} \times Oa - 1^{at} \times 12\,Oa = 3065^{at} \times Oa$ relative au point r; mais, attendu les autres genres de pertes, cette première quantité de travail serait bien moindre encore.

184. *Examen particulier des différentes causes qui diminuent les effets de la détente des gaz.* Nous avons déjà plusieurs fois remarqué que le frottement du boulet, dans l'âme de la pièce, est une quantité très-faible et qu'on peut toujours négliger, tandis qu'il en est tout autrement de la perte de gaz, occasionnée par le vent du boulet, laquelle tend continuellement à diminuer la densité et la pression intérieures, de manière à les faire différer de plus en plus de celles qui, selon la loi de Mariotte, auraient lieu, sans cette perte, pour chaque position du boulet. Connaissant le jeu de ce dernier dans l'âme, il ne serait pas impossible, à la rigueur, de calculer la perte de gaz dont il s'agit, d'après les lois de l'hydraulique qui seront enseignées dans la seconde année de ce Cours; car cette perte est proportionnelle à la vitesse avec laquelle le fluide tend à s'échapper en vertu de la pression intérieure, et à la surface du vide qui règne au pourtour du boulet, surface qui, à largeur égale, croît à peu près comme le calibre des pièces ou la circonférence du boulet.

Mais il est une autre cause de déchet de la force motrice, et qui exerce une influence peut-être plus grande encore sur la vitesse du boulet : c'est celle qui provient de l'inertie même du fluide. En effet, la force de ressort de ce fluide n'est pas uniquement employée contre le boulet; une portion sert à imprimer le mouvement à ses propres molécules, et il en résulte une perte de travail mesurée (136) par la moitié de la somme des forces vives qui leur correspondent. Or la vitesse de ces molécules et leur poids total (182) étant généralement très-comparables à la vitesse et au poids du boulet, on conçoit que la perte dont il s'agit est généralement aussi très-appréciable, et mériterait d'être prise en considération, s'il s'agissait de calculer rigoureusement les circonstances du mouvement.

Il résulte de là d'ailleurs, que la pression éprouvée effectivement par le boulet, de la part des gaz, diffère plus ou moins de celle qu'il éprouverait, dans les mêmes positions ou pour les mêmes détentes, s'il était sans mouvement, ainsi que le suppose expressément la loi de Mariotte (16), que nous avons prise pour base de tous nos calculs; et cette remarque s'applique aussi à la tension qu'exerce le fluide sur les différents autres points des parois de la pièce ou sur lui-même, laquelle, d'après le principe de Pascal (14), se trouverait répartie également et en tout sens, s'il y avait repos. Cette tension varie d'un point à un autre de la longueur de l'âme, conformément à la remarque du n° 68 : elle est plus faible là où le fluide éprouve plus de facilité à se mouvoir, c'est-à-dire près du boulet; elle est plus forte, au contraire, là où il éprouve le plus de résistance, c'est-à-dire vers le fond de l'âme, puisqu'elle doit y vaincre à la fois la résistance provenant de l'inertie du boulet et de tout l'air interposé. Enfin il n'est pas moins évident que la vitesse du fluide varie, de son côté, selon la distance du boulet au fond de l'âme, et qu'elle est plus forte près du boulet qu'à la culasse où elle peut même devenir tout à fait nulle quand le recul (174) est empêché.

On voit, d'après cela, qu'il existe une relation nécessaire entre la vitesse et la tension ou la densité (36) des molécules en chaque point; de telle sorte que, cette densité étant précisément la plus faible là où la vitesse est la plus forte et réciproquement, il en résulte nécessairement aussi que la force vive des différentes *tranches* élémentaires du fluide, comprises entre des sections perpendiculaires à l'axe de la pièce, est une quantité toujours très-faible comparativement à celle qu'auraient ces mêmes tranches, si, conformément au principe de Pascal, la densité du fluide était la même partout, et si sa vitesse était aussi, dans les différentes tranches, égale à celle du boulet; c'est-à-dire que la force vive totale possédée par le fluide est, en réalité, une fraction toujours très-petite du produit de sa masse totale par le carré de la vitesse du boulet. Enfin il paraîtra non moins évident que, puisque la pression contre le fond de l'âme est plus forte que celle qui a lieu contre le boulet, la quantité de mouvement imprimée à la pièce (173) et qui produit le recul quand cette pièce est libre, doit être aussi plus grande que celle que reçoit le boulet ; de sorte que la vitesse du recul est, par un double motif (174), un peu plus forte que ne l'assigne le principe du nº 173.

185. *Réflexions nouvelles sur la déperdition inévitable du travail dans la réaction des corps, et sur les courtes mais rapides détentes des gaz.* Ce ne serait pas ici le lieu d'entrer dans de plus grands développements sur les lois du mouvement et de l'action des fluides élastiques, lois qui se reproduisent, d'une manière analogue, dans le choc ou la réaction plus ou moins brusque (153 et suiv.) des corps élastiques ; nous avons voulu seulement donner une idée de la nature des causes qui empêchent que la détente ait son entier effet, et prouver surtout que l'inertie des molécules des gaz, lorsque cette détente est rapide, peut exercer une certaine influence sur le mouvement transmis au boulet, et occasionner des pertes d'effet tout aussi appréciables que celles qui proviennent des fuites et des diverses résistances. Il est donc bien vrai de dire (140, 103 et suiv.) que la quantité de travail qui a été primitivement dépensée, pour changer la forme, la position ou en général l'état d'un corps, ne peut jamais être restituée d'une manière complète, ou sans qu'il y en ait une certaine portion de consommée, en pure perte, pour l'effet utile ; car il s'agit ici de gaz qui sont des corps éminemment élastiques.

A la vérité, on diminue considérablement les pertes de travail, occasionnées par l'inertie des molécules des gaz, en utilisant leur force de ressort contre des masses ou des résistances plus grandes que celles d'un boulet de canon ordinaire, et qui ne cèdent que lentement ou avec peu de vitesse à leur action ; mais alors les fuites augmentent rapidement avec le temps ; et si, dans la vue d'éviter ces fuites, on cherche à supprimer le jeu du boulet, qui est véritablement indispensable, on augmente considérablement le frottement de ce boulet contre l'âme de la pièce. Enfin, en admettant même que ces différentes causes de perte n'existassent pas, il arriverait encore qu'on ne pourrait utiliser complétement le travail recélé dans le volume primitif des gaz, puisque le cylindre où se fait la détente, ne saurait recevoir, dans l'exécution, qu'une longueur fort restreinte par rapport à celle que lui assigne la théorie pour le *maximum* d'effet.

Ces dernieres réflexions sont principalement applicables à la détente de la vapeur, dont il sera fait mention un peu plus loin; mais il ne faudrait pas en conclure généralement que la détente des fluides élastiques présente peu d'avantages, et que tout son effet est absorbé, dès les premiers instants où elle s'opère; car l'expérience prouve, même pour les gaz de la poudre dont l'action diminue beaucoup (173) par le refroidissement, que, si cet effet a une limite nécessaire dans chaque cas, cette limite n'est pourtant point aussi rapprochée qu'on pourrait d'abord le présumer d'après ce qui précède. On peut admettre, par exemple, que la détente, dans le cas examiné ci-dessus, et quand le vent est réduit à ce qui est strictement nécessaire, ne cesse pas d'être avantageuse tant que le volume occupé par les gaz n'excède pas le 40^e ou le 50^e du volume primitif. Nous verrons bientôt d'ailleurs que la limite relative aux machines à vapeur ordinaires est beaucoup plus restreinte.

On est obligé, dans l'artillerie, de se servir de pièces très-courtes, telles que les obusiers et mortiers qui servent à lancer des boulets creux; il semblerait donc, au premier aperçu, que les effets de la détente devraient y être à peu près nuls, de sorte qu'à charge égale de poudre, la force vive imprimée au projectile y serait beaucoup moindre que pour les pièces longues, ce qui n'est pas. Mais on doit observer que, dans les premières pièces, la charge est toujours très-faible par rapport au poids de l'obus ou de la bombe, et que le rapport du volume occupé par la poudre au volume total de l'âme, ne diffère pas beaucoup de celui qui est relatif aux pieces longues : or il en résulte que les quantités de travail totales développées par la détente des gaz doivent, à circonstances semblables, être encore à peu près les mêmes dans les deux cas, et que la seule différence doit consister en ce que la force motrice, la pression sur le projectile, est plus grande dans le dernier et opère son effet total dans un temps beaucoup plus court. C'est ce que démontrent, en effet, les principes qui suivent.

186. *Principes relatifs au travail produit par la détente des gaz.* L'un des plus importants d'entre eux consiste, lorsqu'on l'envisage

sous son point de vue le plus général, en ce que, quelle que soit la manière dont on fasse agir un volume donné de gaz comprimé à un certain degré, sur une résistance qui cède à son action, le travail développé sera, toutes choses égales d'ailleurs, constamment le même pour la même détente ou la même augmentation du volume primitif. Comme ce principe a de nombreuses applications dans les arts, nous ne croyons pas inutile de nous arrêter un instant à sa démonstration, en prenant pour exemple le cas des mortiers.

On sait que, dans ces armes, la poudre est enfermée dans une cavité cylindrique particulière ABCD (fig. 42), nommée *chambre*, et dont le diamètre est beaucoup plus petit que celui de l'âme ou du projectile; or, si nous faisons abstraction des propriétés physiques particulières de cette poudre, pour ne nous occuper que des effets de la simple détente des gaz qu'elle produit par son inflammation, si nous supposons, en d'autres termes, qu'elle soit remplacée par un volume égal de gaz comprimé à 1200 atmosphères, par exemple, comme dans le cas examiné plus haut, il nous sera facile de calculer la quantité de travail que, abstraction faite des pertes, ce gaz produira par sa détente dans l'intérieur de l'âme, en concevant toujours, pour la simplicité, le projectile remplacé par une sorte de piston ou cylindre de même diamètre que celui de l'âme, et qui serait terminé par une face plane MN du côté du fluide, hypothèse qui n'altère en rien les résultats, attendu qu'on prouve aisément, par les principes qui seront établis plus tard, que le travail, communiqué par le fluide, est indépendant de la forme du projectile pourvu qu'il remplisse exactement le contour de l'âme. Tout consistera donc encore à déterminer la valeur de la pression totale exercée, par le gaz, pour les diverses positions du plan MN.

Supposons, par exemple, que, le piston étant arrivé en *b*, le volume occupé alors par ce gaz soit égal à 6 fois le volume primitif ABCD; d'après la loi de Mariotte, la pression sur chaque centimètre carré de la surface de la section MN correspondante à *b*, sera aussi $\frac{1}{6}$ de 1200 atmosphères ou 200^{at}; par conséquent la pression totale, sur cette section, dont la surface est $\frac{22}{7} \cdot \frac{\overline{MN}^2}{4}$, que nous représenterons par A, aura pour valeur $A \times 200^{at}$, chaque atmosphère valant $1^k,033$. Supposons encore que le piston chemine jusqu'en b', de telle sorte que le volume devienne les $\frac{1000}{999}$ de ce qu'il était en b, la pression sera donc aussi les $\frac{999}{1000}$ de A $\times$ 200^{at} ou A $\times$ 199^{at},8, et la quantité de travail, développée sur MN le long du petit chemin bb' que nous nommerons e, aura pour mesure très-approchée (72),

$$\tfrac{1}{2}\, bb'\,(\text{A} \times 200^{at} + \text{A} \times 199^{at},8) = \tfrac{1}{2}\, bb' \,.\, \text{A} \times 399^{at},8 = e \times \text{A} \times 199^{at},9.$$

Maintenant, si nous considérons ce qui se passerait dans une pièce dont la section de l'âme serait beaucoup plus petite, et pour des positions du boulet répondant aux mêmes volumes du gaz ou aux mêmes degrés de détente; que nous représentions pareillement par a l'aire de cette section, et par E l'espace qui sépare les deux positions consécutives et correspondantes du piston, nous trouverons de même, pour la mesure du travail élémentaire développé par le gaz dans l'intervalle E dont il s'agit, E $\times$ a $\times$ 199^{at},9; de sorte qu'elle sera à la précédente dans le rapport de $e \times$ A à E $\times$ a. Mais ces produits mesurent les augmentations du volume des gaz dans les intervalles e, E, et nous avons supposé que ces augmentations étaient les mêmes; donc les quantités de travail développées, dans les deux cas, sont aussi égales entre elles; et, comme nos raisonnements sont indépendants du degré de petitesse de l'accroissement égal du volume des gaz, comme ils s'appliquent à tous les accroissements pareils successivement éprouvés par le volume primitif, et quelle que soit la manière dont varient les sections MN ou la forme des vases qui contiennent les fluides moteurs, il en résulte une démonstration générale du principe ci-dessus qu'on peut énoncer ainsi :

Les quantités de travail totales, développées par un même volume de différents gaz sous une tension donnée, sont aussi les mêmes pour des détentes égales de ces gaz, quelle que soit d'ailleurs la manière dont s'opère cette détente par des moyens purement mécaniques, et pourvu que les circonstances soient semblables sous d'autres rapports.

Il est évident, en effet, que, si le jeu, le frottement des pistons et la vitesse de la détente n'étaient pas sensiblement les mêmes de part et d'autre, ou si la perte d'effet qui leur correspond différait beaucoup dans les deux cas, les quantités de travail, transmises à ces pistons, ne seraient pas non plus égales. Mais, quand il sera permis de négliger ces causes de pertes vis-à-vis de l'effet total, ou qu'on en tiendra compte, le principe sera rigoureusement vrai et applicable, pourvu toutefois que les gaz restent dans des circonstances physiques semblables ; car nous avons vu (26) que leur tension est susceptible de varier avec la température, et que certains d'entre eux peuvent même se condenser ou se liquéfier par le refroidissement et la compression (3, 5 et 182).

La réciproque du principe ci-dessus se démontrerait d'une manière absolument semblable ; et, en admettant les mêmes restrictions, on pourra dire que,

Pour réduire de quantités égales un volume donné de différents gaz pris à une tension déterminée, il faut toujours dépenser la même quantité de travail, quelle que soit la manière dont on s'y prenne pour opérer mécaniquement cette réduction.

Ces principes sont évidemment des extensions de ceux des nos 97 et 98, lesquels supposent également qu'il n'y ait aucun obstacle extérieur, aucune résistance étrangère, autres que ceux qui constituent la force de ressort et la force motrice directement opposée, qui viennent consommer inutilement du travail mécanique. Ces mêmes principes peuvent aussi être considérés comme de simples conséquences de celui de la réaction (64 et 68) ; car, puisque les gaz sont censés des corps parfaitement élastiques, il paraît, en quelque sorte, évident en soi que, pour amener leurs diverses molécules au même degré de tension ou de rapprochement, au même degré de mouvement, ou généralement au *même état*, il faut aussi dépenser la même quantité de travail de quelque façon qu'on opère mécaniquement ; et qu'à l'inverse, un gaz comprimé doit restituer, dans sa détente, une quantité de travail qui est uniquement relative à l'augmentation de son volume ou à la diminution de sa tension, toutes les fois que sa force vive n'a pas été sensiblement modifiée (142 et 184) ; mais c'est ce qui résulte aussi directement des propositions qui seront rigoureusement et généralement démontrées par la suite. Enfin, on conclut encore, de la démonstration ci-dessus, ainsi que des considérations mises en usage aux nos 181 et suivants, que,

Lorsque l'on comprime ou laisse détendre des gaz différents et pris à des tensions différentes, d'une même fraction de leur volume primitif, les quantités de travail développées contre la résistance, ou consommées par la puissance, sont directement entre elles comme les produits de ces tensions et de ces volumes.

Cette proposition se démontre, en effet, aisément par la considération géométrique de la courbe du travail relative à la détente des gaz (181, fig. 41), et elle servira utilement pour abréger les calculs dans certaines circonstances dont nous aurons des exemples dans ce qui va suivre.

DU TRAVAIL PRODUIT PAR L'ACTION MÉCANIQUE DE LA VAPEUR.

187. *Première idée du mode d'action de la vapeur dans les machines.* Le calcul du travail produit, par la détente de la vapeur, sur un corps qui cède à son action, s'effectue absolument de la même manière que pour l'air atmosphérique et les gaz permanents, quand on suppose que la vapeur ne subit point de refroidissement sensible pendant sa détente, et que par conséquent elle ne se condense ni en totalité ni en partie, ou ne se convertit pas à l'état liquide (3 et 5). Cette supposition n'est pas permise dans tous les cas, mais elle l'est sensiblement dans celui des machines ordinaires mues par la *vapeur d'eau ;* parce que la détente n'y est jamais poussée très-loin, et parce que, indépendamment des précautions qui sont prises pour empêcher le refroidissement extérieur des cylindres où se fait cette détente, la vapeur les traverse très-rapidement, et se renouvelle fréquemment ; de sorte qu'elle les maintient et les fait parvenir, au bout d'un certain temps, à un degré de chaleur très-peu différent de celui qu'elle possède elle-même. Il est évident que cela n'aurait pas lieu pour des cylindres froids, et pour les premiers instants où l'on y introduirait de la vapeur ; ces cylindres rempliraient la fonction des vases *réfrigérants* qui servent à condenser les vapeurs dans la distillation ordinaire par les alambics ; car, une partie de cette vapeur se trouvant réduite en eau, ce qui en resterait ne remplirait plus autant l'espace vide, et n'aurait plus le même degré de tension ; comme le prouvent très-bien les expériences entreprises par les physiciens, et dont les résultats seront exposés dans la seconde année de ce Cours. Ce que nous en disons ici est seulement pour éviter qu'on fasse de fausses applications des calculs et des principes.

Concevez (fig. 43) un cylindre LMNO, en métal et parfaitement solide, dans lequel se meut verticalement un piston AB parallèle aux fonds inférieur et supérieur NO, ML, et dont la tige CD traverse ce dernier fond, par une petite ouverture bien garnie d'*étoupes* huilées et disposées de manière à empêcher la vapeur de s'échapper. Concevez, de plus, que le fond du cylindre communique, par un bout de tuyau EF, avec une chaudière fermée FJGH, demi-pleine d'eau et sous laquelle se trouve le foyer G, qui sert à chauffer cette eau et à la convertir en vapeur; supposez enfin que le tuyau EF puisse être fermé à volonté par un robinet en E, qui empêche la vapeur de se répandre sous le piston AB, quand cela est nécessaire. Enfin, concevez un second tuyau IQK, muni également d'un robinet en I, et qui serve à faire communiquer le cylindre LMNO avec un second cylindre fermé (X), nommé *cylindre de condensation* ou *condenseur,* quand on veut se débarrasser de la vapeur que le premier contient, et opérer son refroidissement, dans (X), par une gerbe d'eau fraîche, très-divisée, qu'on y fait arriver ou qu'on y *injecte* continuellement; vous aurez ainsi une idée exacte, quoiqu'incomplète, de ce que c'est qu'une machine à vapeur à *simple effet*, mais qui sera suffisante pour comprendre parfaitement l'objet actuel de nos calculs.

188. *Exemple de la manière de calculer le travail produit par la détente de la vapeur.* Nous supposerons que la température, la capacité de la chaudière (26) et la génération de la vapeur y soient telles qu'en ouvrant le robinet en E (fig. 43), la tension de cette vapeur (37 et suiv.) se maintienne constamment à $3\frac{1}{2}$ atmosphères sous le piston AB; de sorte que chaque centimètre carré de sa surface inférieure sera pressé, de bas en haut, avec un effort de $1^{k},033 \times 3\frac{1}{2} = 3^{k},6155 = 3^{k},62$ environ, pendant tout le temps où la communication sera établie entre le cylindre et la chaudière. Supposant, en outre, que le diamètre du piston soit de $0^{m},8$ ou 80 cent., sa surface sera de $3,1416 \,.\, (40)^2 = 5026,56$ centimètres carrés, et la pression totale qu'il supporte de $5026,56 \times 3^{k},6155 = 18174^{kil}$ à très-peu près. En vertu de cette pression, il sera capable de soulever un poids ou de vaincre une résistance égale qui agirait à l'extrémité supérieure D du piston, et par conséquent de transmettre, à cette extrémité, une quantité de travail qui sera mesurée (71) par le produit de cette pression et du chemin parcouru, par le piston, pendant le temps où la communication avec la chaudière reste ouverte.

Par exemple si, à l'instant où le piston est arrivé en AB, à une distance *a*O du fond du cylindre, égale à $0^{m},32$, on ferme le robinet en E, la quantité de travail, produite par la vapeur agissant avec toute sa tension de $3^{at}\frac{1}{2}$ sur le piston, sera égale à $18174^k \times 0^m,32 = 5816^{km}$ environ. Maintenant, si nous admettons qu'on laisse détendre la vapeur jusqu'à occuper un volume égal à $4\frac{1}{2}$ fois environ son volume primitif représenté ici par Oa, le dessous du piston s'élèvera aussi à une hauteur Oe égale à $4\frac{1}{2}$ fois $Oa = 0^m,32$, ou à $1^m,44$; or il sera facile de calculer, par la méthode du n° 180, quel sera, dans cette hypothèse, le travail total communiqué par la vapeur au piston.

Pour cela, divisons la longueur $ae = 1^m,44 - 0^m,32 = 1^m,12$ de la course du piston, en un nombre pair de parties égales, par exemple en 4 parties, aux points b, c et d; chacune d'elles vaudra donc $\frac{1}{4}\ 1^m,12 = 0^m,28$ ou 28 centimètres. Et, en désignant par P la pression totale au point a, qui est de 18174^k, on pourra former la table suivante des espaces parcourus et des pressions successivement exercées par la vapeur, aux différents points, en se rappelant toujours la loi de Mariotte (16) relative à la compression des gaz, et qui est ici applicable également (186) à la vapeur d'eau :

positions du piston, . . .	a,	b,	c,	d,	e,
espaces parcourus, . . .	32^c,	60^c,	88^c,	116^c,	144^c,
pressions correspondantes,	P,	$\frac{32}{60}$ P,	$\frac{32}{88}$ P,	$\frac{32}{116}$ P,	$\frac{32}{144}$ P,
ou, simplifiant, ...	P,	$\frac{1}{15}$ 8P,	$\frac{1}{22}$ 8P,	$\frac{1}{29}$ 8P,	$\frac{1}{36}$ 8P,
ou enfin, ...	18174^k,	$9692^k,8$,	$6608^k,7$,	$5013^k,5$,	$4038^k,7$,
n° des pressions, ...	1,	2,	3,	4,	5

Donc on aura

		kil
somme des pressions extrêmes, ...	$= 18174^k + 4038^k,7$	$= 22212,7$
2 fois celle des autres pressions impaires, ...	$= 2 \times 6608^k,7$	$= 13217,4$
4 fois celle des pressions paires, ...	$= 4(9692^k,8 + 5013^k,5)$	$= 58825,2$
	Total	94255,3

Par conséquent la valeur approchée du travail produit par la détente de la vapeur, sera (180) $= \frac{1}{3}\ 0^m,28 \times 94255^k,3 = 8797^{km}$, en nombre rond. En y ajoutant le travail de 5816^{km}, produit, avant l'instant de la détente, comme on l'a trouvé ci-dessus, on aura, pour le travail total communiqué par la vapeur pendant la course entière du piston, $14613^{km} = 146,13 + \frac{1}{3}\ 146,13 = 194,84$ chevaux (82).

189. *Méthodes abrégées de calcul employées dans l'industrie; com-*

paraison de ces méthodes avec la précédente. Si, pour obtenir une première valeur approchée du travail produit pendant la détente, on se fût borné à partager l'intervalle *ae* en deux parties égales au point *c*, on eût trouvé, pour cette valeur, . . . $\frac{1}{3}\,ac\,(18174^k + 4038^k,7 + 4 \times 6608^k,7) = \frac{1}{3}\,0^m,56 \times 48647^k,5 = 9081^{km}$, quantité de $\frac{1}{30}$ environ plus forte que celle 8797^{km} trouvée par la première opération, et à laquelle on pourrait, pour la simplicité des calculs, s'arrêter dans l'estimation pratique de la force des machines à vapeur. En effet, si on ajoute ce travail à celui qui a été développé avant l'instant de la détente, on trouvera au total 14897^{km}, qui ne surpasse que de $\frac{1}{51}$ environ le total relatif au premier mode d'opérer, et qui diffère extrêmement peu du véritable, comme on peut s'en assurer en subdivisant encore les intervalles *ab, bc*.... en deux ou trois parties égales.

Les mécaniciens et les constructeurs de machines à vapeur se contentent souvent de prendre, pour la valeur du travail relatif à la détente, le *produit de la demi-somme ou de la moyenne des pressions extrêmes par la longueur de l'espace parcouru pendant cette détente.* Ainsi, dans notre cas, ils obtiendraient

$$\tfrac{1}{2}\,ae\,(18174^k + 4038^k,7) = 1^m,12 \times 11106^k,35 = 12439^{km},$$

quantité qui surpasse de beaucoup celle 8797^{km} qui résulte de nos calculs, et qu'on ne saurait adopter que comme une approximation très-grossière, et d'autant plus insuffisante que, règle générale, il vaut mieux estimer la force des moteurs au-dessous qu'au-dessus de sa véritable valeur, afin de ne pas s'exposer à des mécomptes dans l'établissement des machines de l'industrie.

On voit bien d'ailleurs que cette méthode, qui revient à prendre, pour l'aire du trapèze curviligne *aa'c'e'e* (fig. 43), la mesure du trapèze rectiligne *aa'e'e*, ou à supposer que le travail de la détente s'opère en vertu d'une pression constante (171), moyenne arithmétique entre les extrêmes, on voit bien, dis-je, que cette méthode n'est guère plus simple que celle qui consiste à considérer une troisième pression intermédiaire *cc'*, et que nous avons proposée ci-dessus comme suffisamment exacte dans les applications ordinaires.

190. *Notions plus étendues sur les machines à vapeur à simple et* *à double effet.* Nous avons laissé ci-dessus (187) le piston au moment où il est parvenu au haut de sa course : *or* il faut concevoir qu'à cet instant, le robinet en I s'ouvre et laisse passer la vapeur dans le *condenseur* (X) par le tuyau IQK ; le robinet, en E, restant toujours fermé, et la tension diminuant considérablement sous le piston, ce dernier descend par son poids ou par le jeu de la machine qui reçoit le mouvement du sommet de la tige CD. Le dessous du piston étant donc arrivé au bas de sa course en NO, il faut supposer que le robinet, en I, se ferme aussitôt, et que celui, en E, s'ouvre pour laisser arriver, de nouveau, la vapeur de la chaudière sous le piston, et recommencer le même travail que dans l'ascension précédente, et ainsi de suite alternativement. C'est, en effet, là ce qui se passait dans les anciennes machines à *simple effet,* dites de *Newcomen ;* seulement la vapeur n'y agissait pas avec détente ; elle affluait *en plein,* de la chaudière, pendant toute la course du piston ; enfin la condensation de la vapeur s'opérait dans l'intérieur même du cylindre LMNO, ce qui le refroidissait considérablement à chaque *oscillation,* et produisait (187) un déchet énorme de la force motrice.

On doit à Watt, célèbre mécanicien anglais, l'invention et l'usage du *condenseur* séparé (X) ; et on lui doit également l'idée d'avoir fait agir la vapeur aussi bien dans la descente que dans la montée du piston ; ce qui constitue véritablement les *machines* dites *à double effet.* Pour avoir une idée des moyens qu'il employa, afin d'atteindre ce but, il faut concevoir un troisième tuyau TSR, qui mette en communication la chaudière FHGJ avec le dessus du piston, au moment où celui-ci est parvenu au haut de sa course, et qui porte un robinet en R pour intercepter la vapeur à l'instant convenable de la descente du piston ; il faut aussi concevoir un 4^e tuyau UVZ avec un robinet en U, qui serve, comme le tuyau IQK, à évacuer la vapeur dans le condenseur (X) au moment où, le piston étant arrivé au bas de sa course, il doit de nouveau remonter par l'action de la vapeur qu'on fait affluer au-dessous, à l'aide du tuyau EF, alors ouvert en E. Enfin il faut concevoir que les mêmes choses, que nous avons expliquées précédemment pour la montée du piston et la vapeur agissant en dessous, se reproduisent, de la même manière, pour sa descente et la vapeur qui agit alors au-dessus ; de telle sorte que les robinets E, U, qui s'ouvrent simultanément pour la montée, restent au contraire fermés pendant toute la descente, et qu'à l'inverse, les robinets, en I et R, qui se ferment à la fois pour toute la montée, s'ouvrent au contraire à l'instant de la descente.

191. *Du travail effectif des machines à vapeur, à basse pression, sans détente, et des effets de la pompe à air.* Dans les machines qui portent encore, de nos jours, le nom de *Watt,* la vapeur agit en *plein,* ou sans détente, pendant chaque course du piston, c'est-à-dire au-dessous pendant la montée et en dessus pendant la descente, de sorte que sa tension est constamment la même que dans la chaudière; de plus, cette tension ne surpasse que, de très-peu, celle d'une atmosphère (d'un quart environ), ce qui a fait nommer ces machines, *machines à basse pression et sans détente.* On voit, d'après cela, combien leur calcul devient facile à l'aide du principe du n° 71, puisque le travail produit, soit pendant la montée, soit pendant la descente du piston, a pour mesure le *produit de la longueur effective de sa course par la pression totale qu'exerce, sur sa surface,* la vapeur qui afflue de la chaudière, pression que nous savons bien calculer (188).

Toutefois, il est essentiel d'observer que, pendant sa montée comme pendant sa descente, le piston devant chasser, devant lui, la vapeur qui se rend dans le condenseur (X), il éprouve, de la part de cette vapeur, une certaine résistance dont il faut nécessairement tenir compte dans les calculs. En effet, cette vapeur ne se réduit pas instantanément ni complétement à l'état liquide ou en eau; le refroidissement n'est pas assez considérable pour que cela ait lieu; et, quand bien même il le serait assez, l'air atmosphérique, qui est amené continuellement, de la chaudière, avec la vapeur, et qui provient de ce que l'eau ordinaire en contient toujours une petite quantité entre ses molécules, de la même manière que le vin de Champagne mousseux, par exemple, contient du gaz *acide carbonique* (3), cet air, disons-nous, empêcherait encore que le vide (36) fût parfait dans le condenseur, ou que la tension y fût totalement anéantie. Bien mieux, l'eau et l'air s'accumulant sans cesse dans ce condenseur, la tension y croîtrait de plus en plus, de manière à empêcher tout à fait le jeu de la machine; c'est pourquoi on ne manque jamais, d'après Watt, de joindre à cette machine une pompe séparée, dite *pompe à air,* et dont le piston, mis en mouvement par elle, sert à aspirer l'air et l'eau du condenseur (X) au moyen d'un petit tuyau de communication, débouchant en Y. Malgré cette précaution importante, il reste encore assez de vapeur et d'air dans la capacité (X), pour que la tension, exercée contre le piston moteur AB, s'élève dans les bonnes machines ordinaires, de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{5}$ d'atmosphère ou de $0^k,10$ à $0^k,20$ par centimètre carré de surface ; il en résulte donc, qu'il faudra diminuer la quantité de travail mentionnée ci-dessus, de toute celle qui est développée, en sens contraire du mouvement, par la pression dont il s'agit ; ce qui ne présente point de difficulté, comme on le verra tout à l'heure (193).

Mais ce n'est pas là tout encore, le piston AB laisse fuir une certaine portion de la vapeur qui produit son mouvement ; il frotte contre le cylindre, quelle que soit la perfection avec laquelle son intérieur ait été dressé ou *alésé,* et ce frottement est ici très-considérable ; enfin la machine se compose de beaucoup d'autres pièces qui frottent également, et elle doit, en outre, faire mouvoir la *pompe à air ;* de sorte qu'il ne parvient réellement à la roue dont l'arbre porte le *volant* de la machine, et de laquelle se prend le mouvement-moteur dans les applications de la vapeur aux diverses machines industrielles, il ne parvient, disons-nous, à cette roue qu'une portion assez faible du travail qui a été directement développé par la vapeur contre le piston *. Dans le cas des bonnes machines à vapeur ordinaires de Watt, de la force effective de 10 à 12 chevaux, on devra compter seulement sur les $0,55 = \frac{11}{20}$ du travail de la vapeur, calculé comme il a été dit plus haut : pour les machines beaucoup plus fortes, les résistances et pertes sont proportionnellement moindres, parce que les plus influentes d'entre elles s'exercent simplement sur le pourtour ou la circonférence des pistons, tandis que la pression motrice agit sur la surface entière de ces mêmes pistons : on peut prendre alors, pour la valeur de la quantité de travail utile, les 0,6 ou $\frac{3}{5}$ de celle que donne le calcul. Enfin, par un motif tout opposé, on devra, pour les machines de 6 chevaux et au-dessous, prendre les 0,5 ou $\frac{1}{2}$ seulement de ce même

* Nous n'avons pas mentionné l'influence qui pourrait être exercée par l'inertie propre des molécules de la vapeur (184), par celle du piston et des diverses autres pièces de la machine ; car, d'une part, le mouvement est toujours ici très-lent ou surpasse généralement peu la vitesse de 1^m par seconde (*voy.* la fin du n° cité), et, de l'autre, ce mouvement se rapportant à ceux que nous avons nommés *périodiques* (49), il n'y a, sous ce double rapport (141 et 152), aucun motif d'en tenir compte dans les calculs.

travail. Ces chiffres doivent être considérés d'ailleurs comme des données fondées sur la comparaison des résultats du calcul à ceux de l'expérience ; nous les rapportons ici pour que le lecteur puisse, dès à présent, appliquer utilement ces calculs à la pratique, et sans craindre de commettre des erreurs ou des méprises graves.

192. *Notions relatives aux machines à vapeur, à moyenne pression, avec détente.* On appelle ainsi les machines à double effet dans lesquelles la vapeur agit à une tension de 3 à 4 atmosphères au plus ; ces machines ont pris le nom de *Woolf* qui, le premier, a réalisé et mis à profit les avantages de la détente déjà annoncés par Watt; elles sont aujourd'hui généralement adoptées en France, où elles ont été introduites, depuis 1815, par M. *Edwards,* mécanicien anglais très-habile, et elles ne diffèrent absolument des machines de Watt, dont il vient d'être question, qu'en ce qu'elles ont deux cylindres et deux pistons moteurs distincts ; de sorte que la vapeur, au lieu de se rendre tout d'abord de la chaudière au cylindre LMNO (fig. 44), n'y parvient qu'après avoir agi, *sans détente,* sous le piston A'B' d'un premier cylindre L'M'N'O', dont la hauteur est à peu près la même, mais dont le diamètre est beaucoup plus petit et ordinairement moitié de celui du grand. Le mouvement des deux pistons AB, A'B' est lié à celui d'une même machine par le moyen de tiges, de balanciers, etc., de façon qu'ils s'élèvent ou s'abaissent, à chaque instant, de quantités à peu près égales.

La vapeur arrive dans le cylindre L'M'N'O', et en sort exactement de la manière qu'il a été expliqué ci-devant (190), si ce n'est qu'en quittant la chaudière, elle se rend d'abord dans un *réservoir* particulier qui enveloppe, de toutes parts, les deux cylindres, et qui est formé d'une sorte de *chemise,* en fonte de fer, exactement fermée : l'objet de ce *réservoir enveloppe* est de garantir la vapeur qui agit sur les pistons des cylindres moteurs, de tout refroidissement extérieur et d'assurer ainsi (184 et 187) les effets de sa détente. Mais, comme c'est au détriment du calorique contenu dans la vapeur qui arrive de la chaudière, qu'on obtient un tel avantage, cette disposition, à laquelle Woolf et ses successeurs attachent une certaine importance, n'est pas très-heureuse en elle-même, et il semble qu'il eût été beaucoup plus convenable, dans tous les cas, de faire servir au même objet, la vapeur qui a déjà produit son effet sur les pistons, en la faisant circuler dans le réservoir enveloppe après sa sortie du grand cylindre LMNO. Quoi qu'il en soit, on remarquera que la vapeur arrive, du petit cylindre L'M'N'O', dans le grand cylindre LMNO, par le moyen des tuyaux l'G'L, U'G'O, qui mettent le dessous du piston AB en communication avec le dessus du piston A'B', ou réciproquement ; et qu'après avoir agi par détente sous ce dernier piston, elle se rend directement au condenseur (X), par les moyens déjà expliqués dans le n° précédent.

Il nous suffit ici que l'on comprenne bien le rôle que joue la vapeur dans cette disposition ; nous entrerons dans les détails descriptifs nécessaires quand il s'agira d'étudier spécialement les propriétés de la vapeur considérée comme moteur des machines de l'industrie. Or, d'après ce qui a été dit du cas (190) d'un seul piston, on conçoit très-bien, par exemple, que les robinets en R', I', I, étant fermés, et les robinets en U', U étant ouverts au moment où les pistons A'B' et AB, après être arrivés à la fois au bas ou à la fin de leur course descendante, vont en recommencer une autre nécessairement ascendante ; on conçoit, dis-je, très-bien que le piston A'B', tout en recevant par dessous l'action de la vapeur qui afflue constamment par le tuyau EF, va chasser devant lui la vapeur placée au-dessus et qui y est arrivée dans la course descendante, de manière à en être pressé, en sens contraire, et à la refouler de plus en plus sous le grand piston AB, à mesure que, l'un et l'autre, ils s'élèvent d'un mouvement commun dépendant des résistances de la machine. Le piston AB va donc aussi être poussé, de bas en haut, avec un effort mesuré, à chaque instant, par la tension de la vapeur qui occupe à la fois les deux capacités A'B'L'M', ABON ; et cette tension qui, en vertu du principe de Pascal (14), se répartit encore uniformément sur tous les points, attendu que la vitesse du mouvement est ici très-faible (184 et 191), sera, par suite de la loi de Mariotte (16), toujours relative au rapport du volume qu'elle occupait d'abord dans la capacité entière du petit cylindre L'M'N'O', au volume total A'B'L'M' + ABON qu'elle occupe maintenant à la fois, dans les deux cylindres. Enfin on conçoit que le piston AB chassant devant lui, dans le condenseur (X), la vapeur qui est au-dessus, il s'en trouve pressé avec un effort répondant à une tension d'environ (191) $0^k,15$ par centim. carré.

Maintenant, si l'on suppose les pistons arrivés au haut des cylindres, et que les communications qui étaient fermées s'ouvrent, et que celles qui étaient ouvertes se ferment, la vapeur de la chaudière affluera au-dessus du piston A'B' par le tuyau TR, et chassera, dans le second cylindre, celle qui est au-dessous, de sorte que les mêmes choses s'opéreront en sens inverse.

Quelle que soit cette complication apparente d'effets, le calcul du travail transmis aux pistons ne présente pas plus de difficultés que dans les suppositions très-simples du n° 188; bien mieux, il n'y a absolument rien à y changer; car, en vertu des principes du n° 186, nous sommes sûrs que, si la tension et le volume primitifs de la vapeur, introduite, à chaque oscillation, de la chaudière dans les cylindres, sont les mêmes de part et d'autre, et qu'il en soit ainsi également du volume occupé par cette vapeur à la fin de son action, c'est-à-dire, à l'instant où elle va se rendre dans le condenseur (X), la quantité totale de travail, qu'elle aura transmise à la machine par l'intermédiaire des tiges de pistons, sera aussi la même dans les deux cas *.

* La vérité de cette conséquence particulière est très-facile à établir directement. En effet, soit A la surface, en mètres carrés, du piston AB, A' celle du piston A'B', e, e', les espaces infiniment petits Aa, Aa', décrits, pendant un même instant très-court, par ces mêmes pistons; soit enfin p la moyenne valeur de la pression variable (72) exercée, par la vapeur, dans la durée de cet instant et pour un mètre carré de la surface des pistons, pression qui est la même pour tous deux (14), et qui agit pour augmenter le travail de AB et pour diminuer celui de A'B'; la pression totale sur AB sera pA, et sur A'B', pA'. Par conséquent, le travail total, produit pendant que le volume ABON+A'B'L'M' devient abON+$a'b'$L'M', ou augmente de la quantité abBA$-a'b'$B'A', aura pour mesure (72) $p \cdot A \times e - p \cdot A' \times e' = p\,(A \times e - A' \times e')$; mais les produits $A \times e$, $A' \times e'$ sont respectivement égaux aux volumes abBA, $a'b'$B'A'; donc le travail dont il s'agit a, pour valeur, le produit de la pression p par l'augmentation de volume de la vapeur comprise entre les deux pistons. Ce produit étant aussi (186) la mesure du travail qui serait développé, dans le cas d'un seul cylindre (188), par une égale détente d'un volume égal de vapeur pris à la même tension, il est clair que tous les travaux partiels analogues seront aussi égaux, et que conséquemment le travail total sera le même, de part et d'autre, si la tension et le volume sont aussi les mêmes à la fin de la détente.

Cette proposition est, comme on le voit, entièrement indépendante des diamètres et de la longueur de course des divers pistons; et il en résulte, en particulier, que la méthode fort simple que nous avons prescrite, dans le texte, pour calculer le travail des machines à détente et à deux pistons, doit, quant aux résultats, coïncider parfaitement avec la formule approximative qui a été proposée, pour le même objet, par M. de Prony, dans son intéressant *Rapport sur les machines à vapeur du Gros-Caillou, à Paris*, inséré au tome 12 des *Annales des mines*, année 1826. Cette formule basée, comme nos règles de calcul, sur la méthode des quadratures de Thomas Simpson (180), suppose d'ailleurs qu'on partage seulement en deux parties égales l'intervalle relatif aux positions extrêmes de la course des pistons; ce qui conduit naturellement (189) à des résultats un peu plus forts que les véritables, principalement pour les détentes qui excèdent 4 fois le volume primitif de la vapeur.

193. *Calcul de la force des machines à vapeur à moyenne pression avec détente.* Supposons que la tension dans la chaudière soit la même que dans le n° 188, et que le volume de vapeur, à cette tension, introduite, par chaque *demi-oscillation* des pistons AB et A'B', dans le cylindre L'M'N'O', volume qui a pour mesure la surface de A'B' en mètres carrés par la longueur entière de la course, soit précisément égal au volume de vapeur introduit, de la même manière et avant l'instant de la détente, sous le piston AB (fig. 43), du n° 188. Supposons enfin que le volume de la détente soit également $4\frac{1}{2}$ fois le volume primitif dans les deux cas, ce qui revient évidemment à admettre que le volume *cylindrique* de la course du grand piston AB (fig. 44), soit égal à $4\frac{1}{2}$ fois celui de la course du petit piston A'B', et par conséquent aussi égal au volume cylindrique de celle du piston de la fig. 43, il en résultera (188) que la quantité de travail, transmise par la vapeur, à la machine, pendant la demi-oscillation dont il s'agit, aura pour valeur totale 14613^{km}. Mais, attendu (191) que la vapeur du condenseur presse le dessus du piston AB (fig. 44) avec un effort d'environ $0^k,15$ par centimètre carré, il faudra diminuer la quantité de travail ci-dessus, de toute celle que développe, en sens contraire du mouvement, ce même effort pendant la course entière de AB ; or cette dernière quantité de travail est précisément égale encore à celle que développe la vapeur du condenseur contre le piston de la fig. 43 ; donc elle a pour valeur, d'après les données du n° 188,

$$0^k,15 \times 5026,56 \times 1^m,44 = 1086^{km} \text{ environ ;}$$

de sorte que le travail de la vapeur se trouve réduit à

$$14613^{km} - 1086^{km} = 13527^{km}$$

pour une demi-oscillation des pistons, et à $2 \times 13527^{km} = 27054^{km}$ pour une oscillation entière, puisque le travail produit pendant la montée est exactement le même que celui qui est produit dans la descente. Partant, si la machine fait régulièrement 15 de ces oscillations entières par minute ou par 60″, le travail produit, dans chaque seconde, sera égal à $\frac{15}{60}\,27054^{km} = \frac{1}{4}\,27054^{km} = 6763^{km},5$, ce qui équivaut à une force de $\frac{4}{3}\,67,635 = 90,18$ chevaux-vapeur.

Les machines de Woolf, à deux pistons moteurs, étant composées d'un plus grand nombre de pièces que celles de Watt, qui n'en ont qu'un seul, le frottement y a aussi plus d'influence, et l'on peut admettre que le travail de la vapeur y est réduit aux 0,45 de sa valeur pour les machines de la force de 10 à 12 chevaux, aux 0,50 pour celles qui sont beaucoup plus puissantes, et aux 0,40 pour celles qui n'ont que la force de 5 à 6 chevaux. Nous avons trouvé ci-dessus, pour le travail développé, par la vapeur, dans chaque seconde, la quantité de 90,18 chevaux; donc le travail effectivement transmis à l'arbre du volant de la machine (191), équivaudra à la force de $\frac{1}{2}$ 90,18 = 45 chevaux au moins, puisque cette dernière quantité surpasse de beaucoup 12 chevaux.

C'est de cette manière qu'on devra se conduire dans tous les cas où il s'agira de calculer la force d'une machine à vapeur, à détente, quelque compliquée qu'elle soit. On n'aura qu'à s'informer exactement ou à s'assurer, par des mesures directes, 1° de la tension de la vapeur dans la chaudière; 2° du volume de cette vapeur introduit à chaque course des pistons; 3° du rapport de ce volume à celui qu'elle occupe à la fin de la détente; 4° enfin de la tension dans le condenseur, qu'on estimera d'ailleurs approximativement (191), si on manque de mesures directes. Cela étant, on supposera tout simplement que ce même volume de vapeur est introduit sous le piston d'un cylindre unique de diamètre quelconque, et l'on agira comme il est expliqué dans le n° 188 et celui-ci.

194. *Des machines à haute pression, sans condenseur.* Ces machines ne diffèrent des précédentes que parce que la vapeur y agit à une tension de 6 à 10 atmosphères, et qu'on y a supprimé le condenseur, qui n'a d'utilité réelle que quand on peut se procurer, sans trop de difficultés, une certaine quantité d'eau fraîche; car cette eau devant être renouvelée à chaque oscillation de la machine, il en faut souvent une masse très-considérable, ainsi qu'on le verra dans la seconde année de ce Cours. L'usage de ces machines s'est principalement borné, jusqu'ici, à mouvoir des chariots sur les chemins de fer, ce qui les a fait nommer *locomotives,* et c'est à l'ingénieur anglais Trevithick qu'on doit cette application. Néanmoins Olivier Evans, dans les États-Unis d'Amérique, les a employées comme moteurs *stationnaires* des autres machines de l'industrie; mais elles sont peu usitées en France, à cause des inconvénients et des désavantages qu'elles présentent. On conçoit, en effet, que les dangers doivent augmenter avec la tension de la vapeur, et que les fuites, les frottements qui ont lieu autour des pistons, doivent y être

aussi plus considérables que dans les machines à basse ou à moyenne pression ; et, comme la face du piston opposée à l'action de la vapeur y est en communication directe avec l'air extérieur par les soupapes U et I (fig. 43 et 44), qui sont alors ouvertes, il résulte, du principe de Pascal (14), que cette face est repoussée, en sens contraire du mouvement, avec une force (37) d'environ $1^k,033$ par chaque centimètre carré de surface ; ce qui occasionne un déchet de travail énorme, qui n'a pas lieu au même degré (191), dans les machines avec condenseur.

D'après cette courte notice sur les machines à haute pression, on comprend que le calcul du travail qu'elles produisent peut s'effectuer absolument de la même manière que pour les autres machines, soit qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas détente, et qu'il s'agit seulement de remplacer la tension $0^k,15$, provenant du condenseur, par $1^k,033$ environ, et de diminuer le résultat obtenu dans une proportion un peu plus forte, vu l'augmentation du frottement des pistons, des fuites de la vapeur et du refroidissement beaucoup plus grand qu'elle éprouve à la haute température qui répond à 8 ou 10 atmosphères. Ce ne sera pas trop, sans doute, de supposer que l'effet utile est réduit aux 0,4 ou même aux 0,35 du résultat donné par le calcul, selon les circonstances plus ou moins favorables de l'établissement de la machine.

Un ingénieur français, M. Frimot, a imaginé, dans ces derniers temps, d'utiliser l'action de la vapeur qui, dans les machines à haute pression s'échappe, en pure perte, dans l'atmosphère, en la faisant passer directement, après sa sortie du cylindre moteur, sous le piston d'une machine à détente ordinaire avec condenseur. Il est évident qu'on n'éprouvera pas plus de difficulté à calculer, pour ce cas, le travail utile de la vapeur, si on connaît bien les conditions de son emploi ; car il s'agit véritablement de deux machines distinctes, dont l'une reçoit directement la vapeur de la chaudière, et l'autre la reçoit de la première machine, sous une tension et un volume déterminés. On appliquera, d'ailleurs, aux résultats séparés des calculs, les différentes corrections qui, selon ce qui précède, sont relatives à chaque genre de machines, et au mode plus ou moins avantageux de l'emploi de la vapeur.

195. *Limite utile de la détente dans les machines à vapeur.* Revenons aux calculs et aux considérations très-simples du n° 188, il

nous sera facile ensuite d'étendre les conséquences de nos raisonnements au cas des machines à deux cylindres. Supposons donc que le cylindre LMNO (fig. 43), étant prolongé indéfiniment vers sa partie supérieure, on laisse la vapeur se détendre, de plus en plus, au-dessous du piston AB ; il est clair que le travail s'accroîtrait sans cesse, si à mesure qu'elle augmente de volume, cette vapeur ne perdait pas de son énergie naturelle, par suite du refroidissement plus ou moins sensible qu'elle éprouve, ou des fuites qui se font toujours entre le piston et le cylindre; négligeons néanmoins ces causes de perte, et voyons jusqu'à quel point la détente peut être prolongée sans inconvénient.

S'il n'y avait pas de frottements dans la machine, ou si ces frottements étaient très-faibles, il conviendrait de laisser la vapeur se détendre jusqu'à l'instant où la pression deviendrait égale à celle, $0^k,15$, qui a lieu dans le condenseur (191) : la tension qui a lieu dans la chaudière, étant (188) de $3^k,6155$, on voit que le volume de la vapeur introduite à chaque demi-oscillation, devrait être les

$\frac{0^k,15}{3^k,6155} = \frac{1500}{36155} = \frac{1}{24}$ environ de l'espace cylindrique total décrit par le piston AB, ou, en d'autres termes, la hauteur totale de la course de ce piston, devrait être 24 fois celle qui répond à l'instant où la communication EF se ferme. Mais, comme les résistances de toute espèce, inhérentes à la machine, consomment ici environ la moitié (191 et 193) du travail de la force motrice, on comprend aisément qu'une telle augmentation de la détente serait non-seulement sans utilité, mais même nuisible à l'effet de la machine, vu que ces résistances resteraient à peu près les mêmes pour les diverses positions du piston. En effet, puisque les résistances en question absorbent, à elles seules (193), la quantité de travail $\frac{1}{2}$ $13527^{km} = 6763^{km},5$ pendant la longueur de course $Oe = 1^m,44$, leur valeur moyenne (73), qui est sensiblement constante pendant cette même course, sera

environ $\frac{6763^{km},5}{1^m,44} = 4697^{kil}$; or on voit, par le tableau du n° 188

et sans aller plus loin, que la pression, exercée par la vapeur, ne serait pas même suffisante pour vaincre cette énorme résistance à l'instant qui répond à la position e du piston, où le volume de la vapeur est devenu $4\ \frac{1}{2}$ fois son volume primitif répondant au point a de la course. A plus forte raison, serait-elle incapable de communiquer un excès de travail à la tige CD du piston, si sa détente était prolongée au delà du point e.

Ce serait donc une disposition très-vicieuse que celle où on laisserait développer la vapeur beaucoup au delà de 4 fois son volume primitif, dans une machine à un seul cylindre. A la vérité, on pourrait, dans la vue de diminuer le travail des résistances nuisibles, diminuer plus ou moins la longueur de course du piston, et se contenter d'augmenter le diamètre du cylindre de façon que le volume de vapeur, primitivement introduit à chaque demi-oscillation, occupât moins de hauteur sous ce piston, par exemple une hauteur égale à la moitié ou au tiers de Oe, tout en produisant ensuite une quantité égale de travail par sa détente; mais on augmenterait par là beaucoup aussi la surface frottante du piston contre l'intérieur du cylindre, et les pertes dues à l'augmentation des fuites ou à la pression produite par la vapeur du condenseur sur la face opposée de ce piston.

Ces divers inconvénients n'ont pas lieu, au même degré, dans les machines à deux cylindres (fig. 44); car il suffit, pour augmenter la détente, d'augmenter convenablement le diamètre du grand cylindre, sans rien changer au petit; de sorte que la vapeur agit avec les mêmes avantages avant l'instant de sa détente, et n'éprouve une diminution d'effet qu'à partir de son entrée dans le grand cylindre. C'est là probablement un des motifs qui, en France, ont fait, malgré leur complication, accorder la préférence aux machines à deux cylindres sur les autres; d'autant plus que, dans ces machines, la pression varie moins que dans celles-ci, attendu, qu'au moment même où la pression est la plus faible sur le grand piston, elle est la plus forte sur le petit, et réciproquement; ce qui tend à régulariser beaucoup le jeu des pièces de la machine, et fait épargner (95 et 96) une portion plus ou moins grande du travail de la vapeur.

Toutefois l'augmentation de la détente, au delà d'un certain terme, n'en occasionne pas moins, dans les différents cas, un surcroît de pertes de travail, qui absorbe, en totalité, les avantages propres à cette détente, et ceci explique suffisamment pourquoi les artistes habiles, qui construisent les machines à vapeur d'après le système de Woolf, ne prolongent jamais la détente au delà de 4 à 5 fois le volume primitif, malgré l'exagération des promesses que leur font les théories abstraites de beaucoup d'auteurs, qui oublient de prendre en considération, dans la recherche du *maximum* d'effet de la vapeur, l'énorme réduction qu'il éprouve de la part des résistances de toute espèce. Nous ne pouvons d'ailleurs présenter ici le calcul de ces résistances et du *maximum* d'effet qui y est relatif, il ne serait pas à sa place; nous y reviendrons, avec quelques détails, dans la partie de ce Cours qui est spécialement destinée à l'examen des moteurs *.

196. *Méthode abrégée pour calculer le travail des machines à vapeur.* Nous avons donné, dans ce qui précède (193), un exemple de la manière dont on doit s'y prendre pour calculer, dans chaque cas, la quantité de travail produite par un volume donné de vapeur agissant sur les pistons d'une machine ; mais il ne sera pas inutile de faire connaître un moyen d'abréger les calculs relatifs à la détente, en se servant du dernier des principes énoncés au n° 186. On voit en effet (192), qu'il suffira de calculer, une fois pour toutes, une table qui donne le travail transmis au piston d'une machine à détente quelconque, par un certain volume de vapeur prise à une tension déterminée, et pour les diverses hypothèses qu'on peut faire sur cette détente ou sur le rapport du volume occupé par la vapeur au moment où elle va se rendre au condenseur, à celui qu'elle occupait à l'instant où elle s'est détendue sous le piston de la machine; car on en conclura facilement ensuite, dans chaque cas particulier et par une simple proportion, la valeur même du travail que, dans toute autre circonstance, elle serait capable de développer sur les pistons d'une machine différente.

Supposons, par exemple, que nous sachions, d'après la table, qu'un *mètre cube* de vapeur introduite, à la tension *atmosphérique* ordinaire, sous les pistons d'une machine dans laquelle la détente est de $4\frac{1}{2}$ fois le volume primitif, communique à ces pistons, dans une course entière ou demi-oscillation de la machine, une quantité de

* Voilà près de trois années que nous exposons les idées qui précèdent dans notre Cours de l'École d'application de l'artillerie et du génie ; nous avons même tenté, dans les leçons de l'année dernière, de donner la formule complète qui exprime l'effet utile des machines à deux cylindres avec détente, en tenant compte de tous les genres de résistances. Il en résulte que, pour chaque disposition particulière des pièces et pour une dépense du travail moteur déterminée, cette détente, ou le rapport des volumes du grand et du petit cylindre, a une limite assez rapprochée ; que la vitesse des pistons doit être généralement très-petite, sans nuire à la régularité du mouvement ; que la longueur du balancier doit être au contraire la plus grande possible sans nuire à la solidité et sans entraîner dans de trop fortes dépenses, etc.

travail représentée par F, et qu'il s'agisse de calculer quel travail x produira, pour la même détente, un volume de vapeur de $0^{mc},25$, sous une tension de $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ atmosphères, on n'aura qu'à écrire (186) la proportion

$$1^{mc} \times 1^{at} : \tfrac{7}{2}^{at} \times 0^{mc},25 :: F : x; \text{ d'où } x = \frac{7 \times 0,25}{2 \times 1 \times 1} F = \tfrac{7}{2} 0,25 F = 0,875 F.$$

Restera à diminuer cette valeur de x de la quantité de travail que développe, en sens contraire, la vapeur du condenseur, dans une course entière de celui des pistons, qui est en communication directe avec ce condenseur ; après quoi on achèvera le calcul comme il a été expliqué n^os^ 193 et suiv. On conçoit très-bien au surplus, d'après tout ce que nous avons dit jusqu'à présent de la détente de la vapeur et des gaz en général, comment on peut former une telle table en prenant pour base des calculs, afin de simplifier les opérations subséquentes, le travail qui serait produit par 1^{mc} de vapeur, agissant à 1^{at} de pression sur un piston dont la surface, d'ailleurs arbitraire (186), serait, pour la commodité, prise égale à un mètre carré. C'est, en effet, ainsi que nous avons obtenu la table suivante.

Tables des quantités de travail totales produites, sous différentes détentes, par 1 mètre cube de vapeur d'eau prise à la tension de 1 atmosphère.

VOLUME APRÈS LA DÉTENTE.	QUANTITÉ DE TRAVAIL CORRESPONDANTE.	VOLUME APRÈS LA DÉTENTE.	QUANTITÉ DE TRAVAIL CORRESPONDANTE.	VOLUME APRÈS LA DÉTENTE.	QUANTITÉ DE TRAVAIL CORRESPONDANTE.
	km		km		km
1,25	12 635	4,25	25 277	7,25	30 794
1,50	14 518	4,50	25 867	7,50	31 144
1,75	16 111	4,75	26 426	7,75	31 483
2,00	17 490	5,00	26 955	8,00	31 811
2,25	18 707	5,25	27 459	8,25	32 129
2,50	19 795	5,50	27 940	8,50	32 437
2,75	20 780	5,75	28 399	8,75	32 736
3,00	21 679	6,00	28 839	9,00	33 027
3,25	22 506	6,25	29 261	9,25	33 310
3,50	23 271	6,50	29 655	9,50	33 585
3,75	23 984	6,75	30 055	9,75	33 854
4,00	24 650	7,00	30 451	10,00	34 116

Nota. Quand il n'y a pas détente ou que le volume reste égal à 1, le travail produit par l'action directe du mètre cube de vapeur est 10330^{km}.

197. *Application particulière.* Pour montrer comment on doit se servir de cette table, nous prendrons encore pour exemple les données des nos 188 et 193, où la vapeur est introduite dans la machine, sous la tension de $3\frac{1}{2}$ atmosphères, et doit se détendre jusqu'à occuper $4\frac{1}{2} = 4,50$ fois le volume primitif. La première chose à calculer est la valeur de ce volume primitif, ce qui est toujours facile quand on connaît bien la constitution de la machine : dans le cas du n° 188, ce volume est évidemment, en mètres cubes, $3,1416 \times (0^m,4)^2 \times 0^m,32 = 0^{mc},16085$; la table donne, pour la même détente du mètre cube de vapeur à 1^{at}, la quantité de travail 25867^{km} ; donc, d'après ce qui vient d'être dit (196), celle qui répond à $3\frac{1}{2}{}^{at}$ et aux $0^{mc},16085$, sera les $\frac{7}{2}$ $0,16085 \times 25867^{km}$ ou $0,56297 \times 25867^{km} = 14562^{km}$. Cette quantité est un très-petit peu moindre (de $\frac{1}{287}$ environ) que la valeur qui a été trouvée au n° 188 pour une demi-oscillation du piston ; ce qui doit être (180), attendu que nous avons poussé très-loin le degré d'approximation pour les nombres du tableau.

Connaissant ainsi le travail développé par la vapeur dans une demi-oscillation de la machine, on achèvera le calcul de la manière indiquée nos 191, 193 et 194, c'est-à-dire qu'on aura soin de diminuer les résultats de tout ce qui est consommé par les résistances nuisibles ; il faudra ne pas oublier, d'ailleurs (195), que pour les détentes qui excèdent 5 fois le volume primitif, il s'en faut de beaucoup que les résultats soient aussi forts que l'indiquent les nombres du tableau. On devra généralement supposer, au contraire, que, quand la détente est poussée au delà de 6 ou 7 fois le volume primitif, la quantité de travail utile est plutôt moindre que supérieure à celle qui répond à 5 fois ce volume.

198. *Observations générales.* Avant de terminer le sujet qui vient de nous occuper, je dois encore une fois prévenir les lecteurs qu'en parlant des principales machines en usage, je n'ai point eu l'intention d'en faire la nomenclature complète ni même une description qui suffise à l'intelligence de leur mécanisme : on les trouvera dans les recueils et traités spéciaux sur ces machines, ainsi que dans le t. III du Cours de M. Dupin, où elles sont décrites avec toute la clarté et les développements nécessaires pour en bien faire saisir l'ensemble. Quant à l'histoire de la découverte des machines à vapeur, on consultera, avec une entière confiance, l'excellente *Notice*

qui vient d'en être donnée, par M. Arago, dans l'*Annuaire du bureau des longitudes* pour l'an 1829*, et où ce célèbre académicien a rétabli, à l'aide de recherches critiques difficiles et impartiales, les droits que les mécaniciens français, notamment *Salomon de Causs* et *Papin*, ont acquis à cette importante découverte; on y trouvera également une description claire et précise des parties essentielles des machines à vapeur, et des perfectionnements successifs qu'elles ont reçus jusqu'à nos jours.

On ne doit pas oublier enfin que nous avons entendu nous occuper uniquement de l'action mécanique directe de la vapeur considérée dans l'état où elle parvient de la chaudière aux cylindres : en exposant, par la suite, les qualités physiques de cette vapeur par rapport au calorique qui la produit et dans l'action duquel réside véritablement la force motrice (99 et suiv.), nous ferons connaître quelles sont les autres modifications, les autres déchets que cette force éprouve avant d'être transformée en travail effectif et immédiatement applicable aux besoins de l'industrie. Pour le moment, il nous suffira de dire, comme résultat de l'expérience, que le travail d'un cheval coûte environ 5^k de bonne houille, par heure, dans les machines de Watt, bien construites et de force moyenne; qu'elle en coûte moitié moins, ou environ $2^k,5$, dans les meilleures machines de Woolf; qu'enfin les machines à haute pression et à détente, telles que les construisait Olivier Evans, à Philadelphie, consommaient presque autant que les machines de Watt, et qu'on peut présumer que les machines *locomotives* de cette espèce, ou qui servent à traîner les chariots sur les routes en fer, en consomment de 8 à 10^k, toujours par heure, par cheval et pour une force de 10 à 12 chevaux.

Quant aux machines à haute pression qui, telles que celles de M. Frimot (194), utilisent en plus grande partie l'action de la vapeur en la faisant détendre sous les pistons de plusieurs cylindres analogues à ceux des machines de Woolf; l'expérience semble démontrer qu'elles offrent, sous le rapport de la consommation du combustible, un avantage à peu près égal à celui de ces dernières machines agissant sous des pressions moyennes de 3 à 4 atmosphères seulement.

* Ce petit ouvrage, qui se vend au prix modique de 1 fr., ne saurait être trop recommandé aux personnes qui n'en ont point encore la connaissance, pour la foule de données et de documents précieux qu'il contient sur les arts et les sciences d'application.

DE LA RÉSISTANCE DES FLUIDES HOMOGÈNES ET INDÉFINIS, OU DE L'ACTION QU'ILS EXERCENT SUR LES CORPS SOLIDES.

199. *Lois générales de cette résistance.* Quand un corps solide se meut, avec une vitesse constamment uniforme (48 et 52), dans un fluide indéfini et en repos, c'est-à-dire dans un fluide dont l'étendue est très-grande par rapport à celle de ce corps, tel que serait, par exemple, l'air atmosphérique relativement aux corps ordinaires qui le traversent, ou la mer, un lac, un étang, une très-large rivière par rapport aux vaisseaux ou aux bateaux qui les parcourent; dans cette circonstance, disons-nous, le corps éprouve, de la part du fluide et dans le *sens* même de son mouvement, une *pression*, une *résistance* mesurable à chaque instant en kilogrammes, et qui varie, comme on l'a déjà dit (113) à l'occasion de l'air, suivant la forme, les dimensions et la vitesse du corps.

Pour faire saisir à peu près les lois que suit cette résistance dans chaque cas particulier, nous supposerons qu'un corps (A), fig. 45, de forme quelconque et qui est plongé dans un fluide indéfini, se meuve *parallèlement à lui-même,* de A vers B, avec une certaine vitesse V et de manière, par exemple, à décrire constamment (48) le chemin $e = V \times t$ dans le très-petit temps t; il est évident que ce corps va pousser devant lui un certain nombre de molécules du fluide, et les forcer à s'éloigner, de part et d'autre de sa surface, avec une certaine vitesse. Or, à circonstances égales d'ailleurs, la somme de ces molécules sera d'autant plus grande que le corps occupera lui-même un plus grand espace dans le sens perpendiculaire au mouvement; c'est-à-dire que, si on projette, par exemple, ce corps sur un plan CD perpendiculaire à AB, ce qui revient à lui circonscrire un cylindre parallèle à la direction du mouvement et à couper ce cylindre par le plan CD, la quantité totale des molécules déplacées ou repoussées croîtra, pour des surfaces ou corps semblables dans toutes leurs parties, et qui seraient mus de la même manière dans le fluide, avec l'étendue de la projection dont il s'agit.

Mais elle croîtra aussi comme l'espace ou le chemin e décrit dans chacun des instants égaux à t; nommant donc Q le volume total, en mètres cubes, de ces molécules entraînées par le corps (A), et A l'aire ou la surface, en mètres carrés, de la projection de (A) suivant CD, on conclura, par un raisonnement analogue à celui qui a été mis en usage dans les nos 71 et 78, que Q croîtra comme $A \times e$, c'est-à-dire deviendra double, triple, etc., quand Ae sera double, triple, etc., pour le même corps ou pour des corps différents dont la surface serait semblable et semblablement dirigée par rapport au mouvement.

D'un autre côté, le corps (A), en cheminant dans le fluide, imprime aux molécules de Q une vitesse d'autant plus grande que la sienne l'est elle-même davantage : il est clair, par exemple, que, si le corps décrit, dans le même temps élémentaire, un chemin double ou triple, il faut bien aussi, toutes choses égales d'ailleurs, que les molécules de Q décrivent un chemin double ou triple dans ce temps, pour lui faire place ; conséquemment la vitesse de chacune de ces molécules croît comme V, et leur force vive (122) comme V^2. Nommant donc p le poids, en kilogrammes, d'un mètre cube du fluide ou sa densité (33), et observant (35) que le poids total du volume Q de ce fluide est mesuré par pQ, la force vive, qui lui a été imprimée par le corps, sera proportionnelle (122) à $\frac{pQ}{g} \times V^2$ ou à $\frac{pAe}{g} \times V^2$, puisque Q est lui-même proportionnel au produit Ae.

Le corps ayant donc communiqué une telle force vive au fluide qu'il chasse devant lui, il faut bien aussi (135 et suiv.) que l'inertie des molécules de ce fluide ait opposé, au mouvement uniforme du corps et dans le sens de AB, une résistance totale R qui, restant la même pour toute la longueur e du chemin décrit par le corps, ait détruit (71) une quantité de travail $R \times e$ proportionnelle à $\frac{1}{2}\frac{pAe}{g}V^2$; de sorte qu'il faut bien encore que le nombre des kilogrammes, R, contenus dans cette même résistance, soit proportionnel à $\frac{1}{2}\frac{pAe}{g}V^2$ divisée par e, c'est-à-dire à $pA\frac{V^2}{2g}$, ou simplement à $p \cdot A \cdot V^2$, puisque $2g$ a la même valeur (117) pour tous les cas. Donc enfin :

La résistance que les fluides, en repos, opposent au mouvement des corps de figures semblables, dirigés de la même manière, croît comme la densité p *de ces fluides, comme le carré de la vitesse* V *de ces corps, et comme l'aire* A *de la projection de ces mêmes corps sur un plan perpendiculaire au mouvement.*

On se rappellera (118 et 119) que la quantité $\frac{V^2}{2g}$ n'est autre chose que la *hauteur* due à la vitesse V du corps ; de sorte que le produit de cette quantité par l'aire A, représente le volume d'un prisme ou cylindre qui a $\frac{V^2}{2g}$ pour hauteur et A pour base : $\frac{1}{2}\frac{pA}{g}V^2$ ou $pA \times \frac{V^2}{2g}$ est donc (35) le poids d'un tel volume du fluide ; ce qui fait dire ordinairement que *la résistance est proportionnelle au poids d'un prisme de fluide qui a pour base la projection transversale du corps, sur un plan perpendiculaire au mouvement, et, pour hauteur, la hauteur due à la vitesse.*

Nous venons de supposer que le corps seul était en mouvement ; mais, s'il restait au repos (fig. 46), et qu'une masse de fluide indéfinie, animée, dans tous ses points, de vitesses égales et parallèles, vînt, à l'inverse, le rencontrer ou le choquer, des raisonnements analogues seraient encore applicables, et conduiraient aux mêmes conséquences relativement à l'intensité de la résistance opposée, par le corps, au mouvement du fluide, ou à l'intensité constante de la pression qu'il supporte de la part de ce fluide. Enfin, si le fluide et le corps étaient à la fois en mouvement suivant une même direction rectiligne AB et avec des vitesses constantes U et V, ces conséquences auraient également lieu, pourvu qu'à la place des vitesses absolues U et V qu'ils possèdent par rapport aux objets fixes (46), on ne considérât que leur *vitesse relative*, c'est-à-dire, la différence U — V ou V — U de leurs vitesses absolues, quand ils marchent dans le même sens, et la somme U + V de ces mêmes vitesses, quand ils marchent en sens contraire ; à peu près de la même manière que nous en avons agi (163) dans la question relative au cas général du choc direct des corps.

200. *Modifications que ces lois subissent dans certains cas.* Les expériences faites par les physiciens et les géomètres, sont venues confirmer ces aperçus de la théorie, à quelques restrictions près qui, pour chaque cas, ressortent de la nature même du phénomène, et de la manière dont les choses se passent autour du corps.

1° L'adhérence des molécules fluides (28), soit entre elles, soit avec le corps, produit des effets d'autant plus sensibles que ce corps a plus de longueur, dans le sens du mouvement, par rapport à sa largeur ou à sa hauteur, et que la vitesse relative est plus faible : elle fait croître alors la résistance un peu plus rapidement que le carré de la vitesse, parce qu'une plus grande masse de fluide participe au mouvement du corps, et agit par son inertie (199), pour le ralentir. Il est clair, en effet, que le nombre des molécules entraînées par la force d'adhésion, augmente avec l'étendue de la surface latérale du corps, et que, quand la vitesse du mouvement est très-faible, cette même force qui unit entre elles les molécules voisines du fluide, a aussi plus de temps (57, 63, 129 et suiv.) pour propager la vitesse, de proche en proche et jusqu'à une certaine distance du corps. On voit également que, plus sera grande la force d'adhésion des molécules fluides soit entre elles, soit avec le corps, plus sera grande aussi la masse des molécules entraînées, à circonstances égales ; de sorte que, par exemple, pour une même vitesse, un même corps aura plus de peine à se mouvoir dans un fluide visqueux (2) tel que les huiles, les sirops, etc., dont les molécules ont beaucoup d'adhérence entre elles et avec la plupart des corps, qu'il n'en éprouverait dans l'eau, dont la densité p est néanmoins, à peu près, égale à la leur, ou même un peu plus forte.

2° Ces effets de l'adhérence, qui peuvent être totalement négligés pour des fluides tels que l'air et l'eau quand la vitesse relative surpasse 20 à 30^c par seconde, ce qui est le cas le plus ordinaire de la pratique, ne sauraient l'être, en aucune manière, pour des fluides beaucoup *moins parfaits,* beaucoup *plus consistants,* ou pour des corps mous, analogues aux pâtes, aux terres, aux bois de diverses espèces, etc., qui se laisseraient *pénétrer* avec plus ou moins de facilité par des corps très-durs animés d'une certaine vitesse. L'expérience semble prouver qu'alors, sauf pour les premiers instants de l'enfoncement du corps dans le *milieu* pénétrable, où l'étendue de la surface de contact, suivant laquelle la réaction s'opère, varie nécessairement en augmentant de plus en plus ; l'expérience prouve, disons-nous, que cette résistance demeure à très-peu près constante, quelle que soit la vitesse et malgré le ralentissement continuel que cette vitesse éprouve, pourvu que le milieu soit partout homogène, et que les circonstances du mouvement ne changent pas.

Il parait en effet, que, dans des cas pareils, le corps dur ne fait que refouler, en avant et sur les côtés, les molécules qui s'opposent à son passage, sans les entraîner, sans leur communiquer, dans le sens de son propre mouvement, une vitesse relative appréciable; de sorte que la résistance dépend bien plus alors du frottement que le milieu exerce sur la surface du corps dur, de la ténacité, de la force de cohésion et de la contexture particulière de ce milieu, que de sa densité ou de la vitesse du mouvement. Nous verrons plus loin comment ces considérations s'accordent avec celles des nos 153 et suiv., sur le choc des corps plus ou moins durs; contentons-nous ici de remarquer que, d'après l'expérience, la résistance, pour des corps durs sphériques, a été trouvée, à très-peu près, proportionnelle à l'aire A de leur projection transversale ou à la surface de leurs grands cercles *, comme cela paraît assez naturel dans ce cas.

3° Pour des corps solides semblables dans toutes leurs dimensions et des fluides parfaits, tels que l'eau et l'air, la résistance, à vitesse égale, paraît croître un peu plus rapidement que la surface A de la projection transversale du corps; ce qui provient, sans doute, de la plus grande difficulté qu'éprouvent les molécules fluides à fuir en avant du corps, et à remplir l'espace en arrière, par suite de la longueur du chemin, de plus en plus grand, qu'elles ont à parcourir : cette augmentation de la résistance n'est, au surplus, très-appréciable que pour les plans et surfaces minces qui, dans le fond, ne peuvent aucunement être considérés comme des corps semblables.

4° Quand un corps est plongé dans l'eau et qu'il se meut parallèlement à sa surface de niveau, la résistance croît un peu plus rapidement que ne l'indique la valeur (199) du produit pAV^2, à mesure qu'il se rapproche de cette surface. Cette circonstance provient de ce que l'eau *gonfle* ou que son niveau s'élève, de plus en plus, en avant du corps, qu'elle s'abaisse ou se *déprime*, de plus en plus, en arrière, de sorte qu'alors elle pèse aussi sur lui ou le presse par son poids, un peu plus en *amont* qu'en *aval*.

5° Quand le corps *flotte* à la surface de l'eau, il se forme également à la partie antérieure ou d'amont un *remou*, et à la partie postérieure ou d'aval une *dépression*, lesquelles se nomment en général *dénivellation*, et dont l'effet est aussi d'augmenter la pression en

* Voyez l'ouvrage de Hutton déjà cité, n° 176, ainsi qu'un *Mémoire sur la pénétration et l'effet des projectiles*, par M. le chef de bataillon du génie Augoyat, inséré au 7e n° du *Mémorial de l'officier du génie*. Ce Mémoire est un résumé précis et complet des données de l'expérience et de la théorie sur cette importante matière. *Voy.* plus loin nos 216 et suiv.

avant, de diminuer la pression en arrière, et de faire croître la résistance plus rapidement que ne l'indique le produit pAV^2, A étant toujours la projection de la partie du corps, qui est plongée au-dessous du niveau du fluide.

6° Quand le corps se meut dans un fluide très-compressible, tel que l'air, la densité de ce fluide augmente (36) en avant du corps et diminue en arrière, à mesure que la vitesse devient de plus en plus grande ; ce qui fait croître la résistance plus rapidement que le carré de cette vitesse.

7° Enfin, l'expérience prouve encore que, à circonstances égales d'ailleurs, la résistance n'est pas la même pour un corps qui se meut dans un fluide en repos, et pour un corps immobile dans un fluide en mouvement. Cette résistance est un peu plus forte dans le dernier cas que dans le premier : pour celui-ci, les molécules fluides, en mouvement autour du corps, décrivent des lignes telles que l'indique la fig. 45, et, dans l'autre, ces lignes sont analogues à celles de la fig. 46.

201. *Observations sur la résistance comparée des corps de formes dissemblables.* Ces remarques concernent spécialement la résistance exercée, de la part des fluides, contre un même corps ou des corps semblables ; mais, quand les corps diffèrent totalement, soit par la forme, soit par la manière dont ils reçoivent l'action du fluide, les résistances qu'ils éprouvent, dans des circonstances semblables sous tout autre rapport, ne peuvent nullement se comparer. Ainsi, bien que, pour deux tels corps, la densité p du fluide, la section ou projection transversale A de ces corps, et la vitesse relative du fluide et de chaque corps, soient les mêmes de part et d'autre, la résistance n'en est pas moins très-distincte, et il n'y a que l'expérience qui puisse la faire connaître pour chaque forme particulière : néanmoins il paraîtrait que, pour le cas des plans et surfaces minces, la figure du contour exerce peu d'influence, à circonstances égales d'ailleurs ; de sorte que, par exemple, une palette plane et mince de 1^{mq} de surface, qui serait mue avec une vitesse donnée dans l'air ou dans l'eau, éprouverait, à très-peu près, la même résistance, soit que son contour eût la forme d'un triangle, d'un cercle ou d'un carré.

On juge aisément encore, d'après ce qui précède, que la forme de la partie antérieure du corps exerce une très-grande influence selon qu'elle est plus ou moins aiguë, et que sa longueur ou l'étendue de sa surface, mesurée dans le sens du mouvement, en exerce également une, quoique bien moindre. Il n'est donc pas permis de confondre la résistance d'un plan mince avec celle d'un prisme ou d'un cube, de même base, bien qu'ils soient placés dans des circonstances entièrement semblables sous tout autre rapport; mais, ce qu'il est surtout essentiel de remarquer, et ce qu'on ne prévoirait pas aisément sans le concours de l'expérience, c'est que la face *postérieure* ou d'*arrière* du corps exerce non moins d'influence que les faces latérales, selon qu'elle facilite, plus ou moins bien, le dégagement du fluide à l'instant où il quitte le corps, et qu'elle remplit, plus ou moins bien, *l'espace vide* qui tend à se former vers cette partie. Cet espace croît nécessairement avec la vitesse relative et l'étendue de la section A du corps, et son effet est de supprimer tout à fait, dans certains cas où le mouvement est extrêmement rapide, et de diminuer plus ou moins en général, la pression qu'exercerait naturellement le fluide (14 et 37), par son poids et le poids de l'atmosphère, sur l'arrière du corps, s'il remplissait exactement le vide dont il s'agit comme dans le cas du repos; or, les mêmes circonstances n'ayant pas lieu sur l'avant du corps, on conçoit que cette diminution de pression augmente d'autant l'action qui est opposée au mouvement.

Nous croyons essentiel d'ajouter à toutes ces remarques, qu'il ne s'agit ici que de la résistance qui naît directement du mouvement horizontal relatif des corps solides et des fluides, et nullement de celle qui peut provenir (41) de la différence de leurs densités, ou plutôt de l'action du fluide en vertu de laquelle le corps est poussé, de bas en haut (note de la p. 24), avec une force égale à la différence de son poids absolu dans le vide, à celui du fluide qu'il déplace. Nous verrons bientôt comment cette force influe pour modifier le mouvement du corps quand ce mouvement n'est pas horizontal, et particulièrement quand il se fait suivant la direction de l'aplomb.

RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES FAITES SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES.

202. *Règle ou formule générale pour calculer cette résistance dans les différents cas.* Nous avons vu plus haut (199), que l'effort R exercé, de la part d'un fluide, contre un même corps, en repos ou en mouvement dans son intérieur, est sensiblement proportionnel à la

quantité $pA\frac{V^2}{2g} = pAH$; p, A, ayant les significations indiquées en cet endroit, et V, H représentant la *vitesse relative* du corps et du fluide ainsi que la hauteur due (119) à cette vitesse. Le rapport de R à pAH est donc, d'après ce qui précède (200), à très-peu près constant pour les fluides parfaits et pour les valeurs ordinaires de p, de A, de H et de V, ou, si l'on veut, le produit $p \times A \times H$ est une fraction déterminée de R; de sorte qu'il suffira, pour obtenir, dans chaque cas spécial, la valeur en kilogrammes de ce dernier, de multiplier celle du produit en question par un certain nombre qui restera à très-peu près le même pour le même corps, ou pour des corps différents mais parfaitement semblables. Désignant donc par k ce nombre, qu'on peut nommer le *multiplicateur de la résistance théorique*, nous aurons la formule

$$R = k \times pA\frac{V^2}{2g} = kpA\frac{V^2}{2g}, \quad \text{ou } R = kpAH,$$

qui nous permettra de calculer la valeur de la résistance R, toutes les fois que nous connaîtrons, par expérience, la valeur du multiplicateur k dont il s'agit. Nous verrons bientôt des exemples de ce calcul.

Voici maintenant, principalement d'après les recherches de M. Navier *, les différentes valeurs que prend le multiplicateur k, dans les cas les plus ordinaires des applications; valeurs qui sont déduites des résultats comparés des expériences faites par divers physiciens français et étrangers, au nombre desquels on doit surtout citer Borda, Dubuat, Bossut et Smeaton.

203. *Plans ou planchettes minces.* Pour des plans minces exposés au choc direct ou perpendiculaire d'un fluide, k augmente avec l'aire A de ces plans, conformément à ce qui a été observé ci-dessus (200), et l'on a, à très-peu près, quand

A = 0,010	mètres carrés, ...	k = 1,40
A = 0,025	*id.*, ...	k = 1,50
A = 0,056	*id.*, ...	k = 1,64
A = 0,100	*id.*, ...	k = 1,90
A = 5,500	*id.*, ...	k = 2,50

* Voyez la note (*db*), page 339 de la nouvelle édition de l'*Architecture hydraulique de Bélidor*, due à ce célèbre ingénieur, et que nous avons déjà mise à profit dans ce qui précède.

Ces valeurs de k paraissent (200) devoir être un peu moindres, à circonstances égales d'ailleurs, lorsque c'est le plan qui se meut dans un fluide en repos ; ainsi, par exemple, pour A = 0^{mq},100, on aurait, suivant Dubuat, seulement k = 1,43, valeur qui paraît un peu trop faible.

Quand le plan MN, fig. 47, fait un certain angle BAN avec la direction AB du mouvement, la résistance, estimée ou mesurée toujours dans le sens AB de ce mouvement, diminue d'autant plus que l'angle BAN est plus petit, ou que la projection CD = A de la surface résistante, sur un plan perpendiculaire à AB, devient elle-même moindre ; mais elle ne diminue pas dans la même proportion. D'après les expériences de Hutton, on a, entre ces quantités, la relation indiquée par la table suivante.

DEGRÉ de BAN.	RAPPORT de CD à MN.	VALEUR de la résistance.	DEGRÉ de BAN.	RAPPORT de CD à MN.	VALEUR de la résistance.	DEGRÉ de BAN.	RAPPORT de CD à MN.	VALEUR de la résistance.
1°	0,017	0,003 R	25°	0,42	0.24 R	50°	0,77	0,77 R
5	0,087	0,018 R	30	0,50	0,35 R	60	0,87	0,89 R
10	0,174	0,046 R	35	0,57	0,46 R	70	0,94	0,96 R
15	0,259	0,091 R	40	0,64	0,58 R	80	0,99	0,99 R
20	0,343	0,156 R	45	0,71	0,68 R	90	1,00	1,00 R

La lettre R représente, dans ce tableau, la valeur de la résistance calculée, selon ce qui a été dit ci-dessus, pour le cas où le plan serait perpendiculaire à la direction AB du mouvement.

On se rappellera (201) que la forme du contour de la planchette n'exerce point d'influence sensible sur la valeur de la résistance.

204. *Plans minces avec rebords et surfaces minces.* Quand on garnit le pourtour d'une planchette de petits rebords minces formant saillie du côté où s'exerce principalement l'action du fluide, la résistance est, d'après les expériences de M. Christian, augmentée du $\frac{1}{5}$ ou du $\frac{1}{6}$ de la valeur qu'elle a, selon ce qui précède (203), pour un plan sans rebords ; elle est aussi un peu plus forte pour une portion de surface mince légèrement courbe, et qui présente sa concavité à l'action du fluide, comme les voiles de vaisseaux et les parachutes des ballons, etc. : il paraît que la *flèche* ou le creux d'une

telle surface ne doit pas surpasser le $\frac{1}{3}$ ou le $\frac{1}{4}$ de sa largeur moyenne ou de la distance moyenne mesurée entre les bords, quand on veut que la résistance soit un *maximum*, et l'on peut admettre que cette résistance, comparée à celle d'un plan mince qui aurait la même projection transversale, serait alors à peu près augmentée comme pour les rebords ci-dessus.

205. *Corps prismatiques*. Pour des prismes droits terminés aux deux bouts par des faces planes, fig. 48, et dont l'axe est dirigé dans le sens du mouvement, la résistance diminue, jusqu'à un certain point, avec la longueur, ainsi qu'il suit :

1° Le corps étant en repos et le fluide en mouvement, on a, à très-peu près, quand le carré de la longueur est

$\frac{1}{4}$ de la surface A de la section transversale, . .	$k = 1,60$
1 fois A, ce qui est le cas des corps cubiques, . .	$k = 1,46$
de 9 à 36 fois A, ...	$k = 1,34$

Quand la longueur du prisme surpasse 6 fois sa largeur moyenne, ou que son carré surpasse 36 A, la résistance augmente de plus en plus (200) par suite de l'adhérence du fluide sur les faces latérales du corps.

2° Lorsque le corps est mobile et le fluide au repos, on a seulement, quand le carré de sa longueur est

1 fois environ la surface A, ...	$k = 1,20$
de 9 à 36 fois A, ...	$k = 1,10$

206. *Corps prismatiques avec proues et poupes*. Une *poupe* ajoutée à la face postérieure ou d'arrière d'un prisme droit (fig. 49) dont la longueur est 5 à 6 fois la largeur, ne diminue la résistance que de $\frac{1}{10}$ environ de ce qu'elle serait sans cette poupe (205) : elle la diminue d'autant plus qu'elle est plus longue et plus aiguë.

En ajoutant, à un corps prismatique, comme on le fait pour les bateaux, pour les piles de ponts, etc., une *proue* sur la face antérieure qui reçoit le choc, la résistance diminue selon la forme et la saillie de cette proue.

1° Quand la proue se compose de deux plans verticaux, fig. 50, dont la saillie bd ou $b'c'$ égale la largeur ac du prisme, la résistance est réduite à environ moitié de ce qu'elle serait pour un prisme, de même longueur, sans proue, ou qui serait terminé *carrément*. La *base horizontale* de la proue étant un demi-cercle *abc*, fig. 51, on obtient à peu près la même diminution.

2° La base de cette proue étant un triangle *abc*, fig. 52, dont la hauteur *bd* est double de la largeur *ac* du prisme, la résistance est réduite aux $\frac{2}{5}$ de ce qu'elle serait sans proue.

3° A saillie égale, les proues, fig. 53, dont la base est un triangle mixtiligne *abc*, formé de deux arcs de cercle *raccordés* avec les faces latérales du prisme, sont celles qui diminuent le plus la résistance.

4° Une proue, fig. 54, formée par le prolongement des faces latérales d'un bateau prismatique, et coupée en dessous par un plan incliné au tiers d'un angle droit, réduit la résistance au $\frac{1}{3}$ de ce qu'elle serait sans cette proue, ou si le bateau était terminé carrément.

207. *Vaisseaux*. La figure des grands vaisseaux diffère de celle des bateaux ordinaires en ce que leur proue (fig. 55, plan et élévat.) forme une arête aiguë qui se raccorde aux flancs du vaisseau par des courbes horizontales, telles que *abc*, qui présentent une *inflexion*. La longueur de la coupe *horizontale moyenne abc, a'b'c'*, répondant au milieu de la partie de la carène qui est plongée dans l'eau, doit être de 5 à 6 fois sa plus grande largeur *ac*, et cette plus grande largeur doit se trouver un peu au delà du milieu de la longueur, à compter du point *b*.

Selon les expériences de Bossut, un prisme droit, terminé carrément à ses extrémités, dont la section avait la forme du maître-couple ABC d'un vaisseau, et dont la longueur égalait 5 fois environ la largeur, a donné k un peu plus grand que 1, tandis que, pour un modèle de vaisseau, ayant la même section, k a été trouvé de $\frac{1}{6} = 0,17$ seulement : les vaisseaux paraissent approcher beaucoup de la forme qui présente le moins de résistance à l'action des fluides.

208. *Observations relatives au calcul de la résistance des bateaux qui naviguent sur les rivières*. Pour les bateaux et généralement pour les corps flottants dont une partie excède le niveau du fluide, on prend (200,5°), pour A, la surface de la plus grande section transversale de la partie *plongée* ou comprise au-dessous de ce niveau. On néglige ainsi la résistance de l'air extrieur, qui est peu de

chose comparativement à celle de l'eau. Pour calculer d'ailleurs cette dernière résistance, on devra d'abord rechercher celle d'un prisme de mêmes section et longueur que celles du bateau, mesurées au milieu de la partie plongée, puis diminuer cette résistance du $\frac{1}{10}$ si le bateau a une poupe; enfin diminuer encore ce dernier résultat, selon la forme plus ou moins avantageuse de la proue, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus (206), et comme on en verra bientôt un exemple.

Ces calculs supposent d'ailleurs que le fluide est indéfini, ou a une très-grande étendue par rapport aux dimensions du bateau; ils ne peuvent s'appliquer au cas d'un bateau naviguant sur un canal ou sur une rivière, dont la largeur serait comparable à la sienne propre, et n'excéderait pas 5 à 6 fois au moins cette dernière largeur.

Selon Dubuat, on a, pour un bateau prismatique sans proue, la formule

$$R' = R \times \frac{8{,}46A}{2A + A'},$$

dans laquelle R est la résistance du bateau pour un fluide indéfini, calculée comme il a été dit précédemment, R′ celle du même bateau dans un canal ou une rivière, A′ l'aire de la section transversale de l'eau dans ces derniers, enfin A l'aire de la plus grande section transversale du bateau.

Lorsque le corps flottant est terminé par une proue, Dubuat représente les résultats de l'expérience par cette autre formule :

$$R'' = RR' \left\{ 1 - 0{,}183 \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(\frac{A'}{A} - 1\right) \right\}$$

dans laquelle R, R′, A, A′ ont les mêmes valeurs que ci-dessus, R″ est la résistance à calculer, q le rapport de la résistance du corps sans proue, à celle du même corps avec sa proue, calculées l'une et l'autre pour un fluide indéfini, suivant les règles du n° 206.

209. *Résistances des cônes, des sphères, etc.* Concevez une sphère entière, une demi-sphère terminée par un plan diamétral et un cône droit dont la hauteur égale le diamètre de la base circulaire, ces derniers ayant leur base perpendiculaire à la direction du mouvement; on aura, que le fluide soit l'eau ou l'air, et si la vitesse est

médiocre, c'est-à-dire au-dessous de 4^m,

pour la sphère entière, ...	$k = 0,60$
pour la demi-sphère, la convexité étant en avant, . . .	$k = 0,58$
pour *id.* le plan diamétral en avant, ...	$k = 1,29$
pour le cône, le sommet étant en avant, ...	$k = 0,61$
pour *id.* la base en avant, ...	$k = 1,40$

Selon Hutton, ces nombres, déduits d'expériences pour lesquelles la surface A égalait environ $0^{mq},021$, devraient être un peu diminués pour des valeurs de A beaucoup plus petites ; mais on peut négliger une telle diminution qui est à peine de $\frac{1}{30}$ quand on compare la résistance d'une sphère de 7^c de diamètre à celle d'une sphère de 4^c. D'après ces mêmes expériences, un plan mince circulaire, qui avait aussi pour surface $0^{mq},021$, et qui était mû dans l'air, perpendiculairement à sa direction, avec la vitesse des corps ci-dessus, donnait, pour k, la valeur 1,43 ; ce qui s'accorde parfaitement avec les nombres consignés au n° 203, et prouve qu'on peut les admettre avec confiance, lorsqu'il s'agit de corps qui se meuvent dans l'air avec une vitesse médiocre.

210. *Loi particulière de la résistance de l'air.* Lorsque la vitesse du corps, dans ce fluide, devient considérable, les valeurs de k, que nous venons de rapporter, et toutes celles qui précèdent augmentent, de plus en plus, avec la rapidité du mouvement (200), suivant une loi qui, pour la sphère, est indiquée par la table ci-dessous déduite des résultats de Hutton. Nous y avons ajouté, pour la commodité des calculs dans certains cas, les valeurs des racines carrées du multiplicateur k de la résistance.

	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
V....	1,	3,	5,	10,	25,	50,	100,	200,	300,	400,	500,	600,
k.....	0,59,	0,61,	0,63,	0,65,	0,67,	0,69,	0,71,	0,77,	0,88,	0,99,	1,04,	1,01,
$\sqrt{k}$..	0,77,	0,78,	0,79,	0,81,	0,82,	0,83,	0,85,	0,88,	0,95,	1,00,	1,02,	1,01.

Au moyen de cette table, on trouvera aisément d'ailleurs les différentes valeurs de k qui répondent à une autre surface que la sphère ; il suffira de multiplier celle que lui assignent, dans chaque cas, les règles précédentes pour une médiocre vitesse, par les quotients des valeurs de k données dans la table et du nombre constant 0,60 qui se rapporte à la sphère.

QUESTIONS PARTICULIÈRES CONCERNANT LA RÉSISTANCE DE L'AIR ET DE L'EAU.

211. *Préparation de la formule pour ce cas, calcul de la densité des gaz.* Les applications les plus ordinaires des règles précédentes concernent l'air et l'eau ; il est donc nécessaire de déterminer d'abord la valeur de la densité p (199) qui leur correspond. Nous avons vu (34) que, pour l'eau, on a sensiblement $p = 1000^{k}$ dans les cas ordinaires ; quant au poids du mètre cube d'air, il varie (40) selon la température et la pression barométrique, et il est nécessaire de le calculer dans chaque cas particulier, comme il suit. Supposons que la température actuelle de l'air soit de 12° centigrades, et que la colonne de mercure qui, dans le baromètre (38), mesure la tension de cet air, soit de 75^{c}, ce qui est, à peu près, la température et la pression moyennes qui répondent à l'automne et au printemps dans notre climat. Selon la table du n° 40, la densité ou le poids du mètre cube d'air à 0° de température et à 76^{c} de pression, est de $1^{k},2991$; cherchant donc, d'après la loi de Mariotte (16 et 87), et celle de Gay-Lussac (26), quel volume occuperait cette même quantité d'air à la pression et à la température ci-dessus, nous en conclurons aisément son poids sous l'unité de volume. Supposons d'abord que la pression $0^{m},76$ reste la même, et que la température s'élève à 12°, son volume deviendra (26), puisqu'ici le gaz est libre de se détendre sous cette pression,

$$1^{mc} + 12 \times 0^{m},00375 = 1^{mc} + 0^{mc},045 = 1^{mc},045.$$

Cherchant, de même, ce que ce dernier volume devient à la pression de $0^{m},75$, on aura, d'après la première des lois citées, la proportion

$$75^{c} : 76^{c} :: 1^{mc},045 : x = 1^{m},045 \times \frac{76}{75} = 1^{mc},059.$$

Mais ce volume d'air pèse $1^{k},2991$; donc 1^{mc} d'air pareil pèsera $\dfrac{1^{k}.2991}{1^{mc},059} = 1^{k},2267$, et par conséquent c'est là aussi la densité de l'air à la température de 12° et sous une pression barométrique de 75^{c} ; celle de l'eau étant 1000^{k}, on voit que la première est environ les $\frac{1,2267}{1000} = 0,001227$ ou $\frac{1}{815}$ de la seconde, tandis qu'à 0° et sous 76c de pression, elle en est les $\frac{1,2991}{1000} = \frac{1}{770}$ à très-peu près.

Sous une pression plus faible que 75c, et une température plus forte que 12°, il est clair que la densité de l'air serait encore moindre que nous ne l'avons trouvée. En général, si nous nommons n le nombre des degrés centigrades qui indiquent, à un certain instant, la température de l'air, et h la hauteur barométrique, en centimètres, qui répond à sa tension, on trouvera, en raisonnant absolument comme on vient de le faire dans un cas particulier, que la densité p, ou le poids du mètre cube de cet air, aura pour valeur la quantité

$$p = \frac{h}{76} \times \frac{1^k,2991}{1 + 0,00375\,n}, \quad \text{ou } p = \frac{0,0171h}{1 + 0,00375\,n},$$

formule qui donnera, de suite, cette densité sans passer par la série des raisonnements qui précèdent, et qui permettra aussi de calculer la densité d'un autre gaz quelconque en y remplaçant le poids $1^k,2991$ de l'air à 0° et 76c de pression, par celui qui, dans la table du n° 36, répond au gaz dont il s'agit. Il est d'ailleurs entendu, relativement aux vapeurs (3 et 5), que leur quantité est supposée rester la même, c'est-à-dire, que cette quantité n'est ni augmentée par la vaporisation d'une nouvelle portion de liquide, ni diminuée par la condensation d'une portion même de la vapeur.

D'après ces données, la formule générale du n° 202, qui sert à calculer la résistance des fluides, deviendra (118),

pour l'eau ordinaire,

$$R = 1000\,kAH = \frac{1000}{19,618}\,k\,AV^2 = 50,975\,kAV^2 \text{ kilogr.},$$

et, pour l'air à 12° et 75c,

$$= 1,2267\,kAH = \frac{1,2267}{19,618}\,kAV^2 = 0,06253\,kAV^2 \text{ kilogr.},$$

ce qui diminuera le nombre des opérations à effectuer dans chaque cas particulier.

212. *Exemples concernant la navigation des bateaux sur les canaux et les rivières.* Considérons un des grands bateaux qui naviguent sur la Moselle, et dont la forme, assez avantageuse, est à peu près telle que l'indique la fig. 56, en plan, coupe et élévation.

Supposons que sa plus grande largeur, prise extérieurement et au niveau de l'eau ou de la *flottaison*, soit de 3^m ; que la profondeur du fond au-dessous de ce niveau, ou le *tirant d'eau*, soit de $0^m,70$; l'aire A, de la section plongée dans le fluide, sera un peu moindre que $3^m \times 0^m,7 = 2^{mq},10$, soit $1^{mq},60$ la valeur exacte de cette aire. Les bateaux dont il s'agit ont une longueur qui est environ 5 à 6 fois leur plus grande largeur ; s'ils étaient sans proue ni poupe, ou que ce fussent de véritables prismes terminés par des plans perpendiculaires à leur axe, la valeur du multiplicateur k serait (205) environ 1,10, attendu qu'ici le bateau est censé se mouvoir dans le fluide, et que la longueur AB de la partie plongée se trouve comprise entre 3 fois et 6 fois la largeur moyenne. Mais, comme il y a une poupe, on doit d'abord (106) diminuer ce nombre de $\frac{1}{10}$ de sa valeur, c'est-à-dire de 0,11, ce qui donne $k = 0,99$; en outre, le bateau a une proue dont les faces latérales sont raccordées par des demi-cercles avec les flancs, et dont le dessous est un plan incliné d'environ $\frac{1}{3}$ d'angle droit et raccordé pareillement avec le fond, on peut croire que la résistance ou la valeur de k se trouve réduite, au moins, à $\frac{1}{3}$ de 0,99 ou à 0,33. Nous prendrons donc définitivement $k = 0,33$ pour les bateaux dont il s'agit ; de sorte que la résistance aura (211), pour valeur,

$$R = 50,975 \times 0,33 \times 1^{mq},6 \times V^2 = 25,20V^2 \text{ kilog.}$$

Si le bateau se mouvait dans un canal qui eut moins de 5 à 6 fois sa propre largeur, il faudrait augmenter un peu le multiplicateur 25,20, conformément à ce qui a été expliqué à la fin du n° 208 : le contraire ayant lieu ici, nous conserverons ce nombre tel qu'il est. Supposant donc que le bateau se meuve, dans une eau tranquille, avec la vitesse de 1^m par seconde, on aura

$$V^2 = 1^m \times 1^m = 1^{mq}, \quad \text{et } R = 25^k,20.$$

La quantité de travail que devraient dépenser directement, par seconde, des hommes ou des chevaux, pour faire avancer le bateau avec cette vitesse, serait donc de $25_k,20 \times 1^m = 25^{km},20$: c'est ce qui aurait lieu, à peu près, dans les canaux intérieurs de la ville de Metz, parce que la Moselle n'y a qu'une vitesse insensible. Mais, s'il s'agissait de remonter la rivière dans des endroits où la vitesse de l'eau serait de $1^m,2$ par exemple, en faisant toujours avancer le bateau de 1^m par seconde par rapport aux rives, ce bateau étant choqué (199) avec la *vitesse relative* de $1^m,2 + 1^m = 2^m,2 = V$, la résistance deviendrait alors $25,20 \times 2^m,2 \times 2^m,2 = 122^k$ environ, et la quantité de travail à dépenser, par seconde, aurait pour valeur 122^{km}. Si, au contraire, le bateau devait descendre le même courant avec la vitesse propre de ce dernier, il n'y aurait point de travail à dépenser, car la vitesse relative V serait nulle aussi bien que R; mais, s'il devait descendre avec une vitesse de $2^m,20$ par seconde, la vitesse relative étant $2^m,20 - 1^m,2 = 1^m$, la résistance et le travail seraient, comme dans le premier cas, égaux à $25^k,2$, et $25^{km},2$ respectivement; par quoi l'on voit toute l'influence qu'exerce la vitesse relative du corps et du fluide.

Ces chiffres montrent aussi combien le transport des marchandises, sur bateaux, est désavantageux quand il s'agit de l'effectuer, avec une certaine vitesse, par l'entremise des canaux et des rivières; car, à circonstances égales d'ailleurs, la résistance croît comme le *carré de la vitesse relative*, et le travail dépensé par seconde comme le produit de ce carré par la vitesse absolue du bateau ou du moteur. Plus le canal sera petit d'ailleurs par rapport à la section du bateau, plus la résistance sera considérable; enfin cette résistance et par conséquent le travail, augmenteront proportionnellement à la largeur du bateau et au *tirant d'eau.*

Ce tirant d'eau se calcule aisément, à l'avance, quand on connaît le poids du bateau et de la charge qu'il contient. En effet, nous savons (*voy.* la note de la p. 24) que ce poids total égale celui du volume de fluide déplacé par le bateau, ou 1000^{kil} multipliés par ce même volume qui sera ainsi connu, et d'où l'on conclura, d'après la forme donnée de la carène du bateau, la hauteur de la flottaison au-dessus du fond, ou le tirant d'eau.

A l'inverse, on calculera aisément la charge du bateau quand on connaîtra son propre poids, et qu'on se donnera la hauteur dont son fond doit être abaissé au-dessous du niveau de l'eau. Supposons, par exemple, que, dans le cas ci-dessus, le poids de toute la charpente du bateau soit de 16000^{kil}, et que la longueur réduite de sa carène soit de 25^m vers le milieu de la partie plongée; sa section d'eau A, étant d'ailleurs d'environ $1^{mq},6$, le volume total du fluide déplacé sera $1^{mq},6 \times 25 = 40^{mc}$, et son poids 40000^{kil}; retranchant, de ce nombre, les 16000^k que pèse le bateau, il restera 24000^k pour le poids de la charge utile qui correspond au tirant d'eau de $0^m,70$, supposé ci-dessus.

213. *Exemples concernant les volants à ailettes.* Les tournebroches et les horloges, qui reçoivent le mouvement par la descente de contre-poids, sont armés, comme on sait, de volants à ailettes planes et minces, fixées à l'extrémité de tiges ou de bras montés sur des axes de rotation; ces ailettes, en se mouvant circulairement dans l'air, éprouvent, de sa part, une résistance qui croît rapidement avec la vitesse que leur imprime le poids moteur par l'intermédiaire des rouages, et servent ainsi à *régulariser* le mouvement, ou à empêcher qu'il ne s'accélère indéfiniment comme cela aurait lieu (113 et suiv.) si aucune résistance ne s'opposait à la descente du contre-poids, ou si celle que lui opposent directement la broche, les rouages, etc., était constamment au-dessous de l'action qu'il éprouve de la part de la gravité.

Soit $A = 0^m,05 \times 0^m,06 = 0^{mq},003$ l'aire de la surface de la palette, on aura, dans le cas présent (203), la palette étant à peu près perpendiculaire à la direction du chemin qu'elle décrit, $k = 1,4$ pour des vitesses comprises (210) depuis 0 jusqu'à 3^m, $k = 1,4 \dfrac{0,62}{0,60} = 1,45$ pour des vitesses comprises depuis 3^m jusqu'à 5 mètres, $k = 1,4 \dfrac{0,64}{0,60} = 1,50$, pour des vitesses comprises depuis 5 jusqu'à 10^m, etc. Supposons, par exemple, qu'ayant calculé la vitesse d'après le nombre des révolutions du volant, autour de son axe, en une minute, on ait trouvé $V = 4^m$; on aura donc,

à peu près, $k = 1,45$,

et (211) $R = 0,0625 \times 1,45 \times 0^{mq},003 \times 4^m \times 4^m = 0^k,0044$,

résistance assez faible, mais qui deviendrait (210)

$$\frac{0,68}{0,60}\, 0^k,44 = 0^k,48,$$

ou environ 109 fois plus forte, si la vitesse était de 40 mètres au lieu de 4^m, et qu'il faudrait doubler s'il y avait deux ailettes de même surface, octupler au moins (203) si, en outre, les dimensions de ces ailettes étaient elles-mêmes doublées, etc.

214. *Exemples relatifs au mouvement des moteurs animés*, etc. On voit bien maintenant pourquoi la résistance de l'air peut être négligée toutes les fois que les corps, sans avoir une étendue de sur-

face excessive, ne possèdent pas une très-grande vitesse (90). Ainsi, par exemple, la surface de la projection verticale d'un homme ordinaire debout, étant au-dessous de $0^m,4 \times 2^m = 0^{mq},80$, et le multiplicateur k de la résistance qu'il éprouve, étant nécessairement au-dessous de celui 1,20 qui convient (205) à un prisme très-peu allongé dans le sens du mouvement, puisqu'ici le corps est arrondi en avant et en arrière, la résistance sera aussi moindre que $0,0625 \times 1,20 \times 0,8\,V^2 = 0,06 \times V^2$ kil. Si donc la vitesse de cet homme était de 1^m par seconde, la résistance qu'il éprouverait, de la part de l'air, serait moindre que $0^k,06$; pour 2^m de vitesse, elle serait moindre que $0,06 \times 2 \times 2 = 0^k,24$; par conséquent aussi le travail (71), dépensé par cet homme pour vaincre, à chaque instant, une telle résistance, serait au-dessous de $0^{km},06$ dans le premier cas, et au-dessous de $0^k,24 \times 2^m = 0^{km},48$ dans le second. Mais, si la vitesse était de 6^m, ce qui est à peu près la plus grande vitesse qu'un coureur puisse s'imprimer d'une manière un peu soutenue, la résistance s'élèverait (210) à plus de

$$0^k,06 \times 6^m \times 6^m = 2^k,16,$$

et le travail à plus de $2^k,16 \times 6^m = 12^{km},96$; ce qui est déjà considérable par rapport au travail que peut développer habituellement un homme, même robuste, et nous fait ainsi découvrir l'erreur de chiffres du nº 90 où l'on a écrit 5 à 6^m au lieu de 1 à 2^m.

Les chevaux ne présentent pas, à l'action directe de l'air, une surface beaucoup plus grande que celle de l'homme; et comme leur forme est plus allongée, mieux disposée en tous points, la résistance (206) égale au plus $0,04 \times V^2$ kilogrammes ; elle est donc très-faible pour une vitesse de 1 à 2 mètres, c'est-à-dire pour celle du pas et du trot ordinaires; mais il en est autrement pour la vitesse de course qui, dans certains cas fort rares il est vrai, peut s'élever jusqu'à 12 et même 14^m; en effet on a alors

$$R = 0,04 \times 14 \times 14 = 7^k,84,$$

et le travail par seconde $= 7^k,84 \times 14_m = 110^{km}$; ce qui est énorme et approche du double de la quantité de travail que fournissent ordinairement (146) les bons chevaux de rouliers marchant au pas. Aussi les coursiers les plus agiles ne peuvent-ils soutenir un semblable travail pendant plus de 8 à 10 minutes consécutives, tandis que le cheval de roulier soutient le sien, sans se fatiguer à beaucoup près autant, durant au moins huit heures chaque jour, c'est-à-dire pendant 48 fois autant de temps que celui dont il s'agit. Nous avons donc eu raison de dire (90 et 148) que la quantité de travail extérieur que produisent les moteurs animés, quand ils s'impriment la plus grande vitesse possible, peut être négligée par rapport à celle qu'ils développeraient si la vitesse était moindre. On doit aussi sentir combien il importe, dans les courses rapides, de diminuer, par des moyens convenables, l'étendue des surfaces qui reçoivent le choc de l'air ; de donner à ces surfaces la forme la plus avantageuse, et d'éviter surtout (204) que des draperies et ornements quelconques, mal ajustés au corps ou qui ne flotteraient pas librement, viennent présenter, ainsi que le font les voiles de navires, constamment leur concavité à l'action du courant.

On ne s'étonnera pas d'ailleurs que les ouragans, dont la vitesse surpasse quelquefois 40^m par seconde, puissent renverser des arbres et des maisons. Considérons, en effet, un mur de jardin qui aurait 4^m de hauteur sur 12^m de longueur, et qui serait choqué directement ou perpendiculairement par le vent, avec une telle vitesse : on aura $A = 48^{mq}$ et $k = 2,50$ au moins (203 et 210), attendu qu'on peut ici négliger l'épaisseur du mur relativement à l'etendue de sa surface. Par conséquent (211) la résistance

$$R = 0,063 \times 2,5 \times 48V^2 = 7,56V^2 = 7^k,56 \times 40^m \times 40^m = 12096^{kil}.$$

Si, au lieu de la résistance de l'air, on considérait celle de l'eau dont la densité est environ 815 fois plus grande (211), tous les nombres ci-dessus devraient être multipliés par 815, puisque la résistance R est, à circonstances égales, proportionnelle à la densité p du fluide.

215. *Calcul de la résistance de l'air contre les boulets de canon.* Pour dernier exemple, nous considérerons un boulet sphérique, en fer fondu, de $0^m,15$ de diamètre ; la surface de projection A d'un tel boulet sera (177) de $0^m,0176$ mètres carrés, son volume de $\frac{4}{3}\,0^m,0176 \times \frac{1}{2}\,0^m,15 = \frac{2}{3}\,0,15 \times 0,0176 = 0^{mc},00176$, et son poids (35) de $7207^k \times 0^m,00176 = 12^k,68$. Ce poids surpasse un peu celui qui a été adopté au n° 175 ; mais on doit considérer qu'il ne s'agissait là que d'un à peu près, et que la densité de la fonte de fer n'est pas une grandeur bien constante ni parfaitement déter-

minée pour chaque circonstance particulière*. D'après ces données, la résistance du boulet, dans l'air atmosphérique dont la température est d'environ 12° et la pression 76^c, a (211), pour mesure générale, $R = 0{,}06253 \times 0^{mq}{,}0176 \times kV^2 = 0{,}0011kV^2$ kilogrammes, dans laquelle k prend les différentes valeurs indiquées dans la table du n° 210, selon celles de la vitesse V.

Supposant, par exemple, la vitesse de 1^m, on aura $k = 0{,}59$ et $R = 0{,}0011 \times 0{,}59 \times 1 \times 1 = 0^k{,}00065$. Pour $V = 2$, on aurait $k = 0{,}6$ et $R = 0{,}0011 \times 0{,}6 \times 2 \times 2 = 0^k{,}00264$; continuant ainsi, on pourra former cette table :

Vit.	2^m,	4^m,	6^m,	8^m,	10^m,	12^m,	14^m,	16^m,	18^m,	20^m
Rés.	0^k003,	0^k011,	0^k025,	0^k045,	0^k072,	0^k103,	0^k140,	0^k183,	0^k235,	0^k293
Vit.	25^m,	50^m,	75^m,	100^m,	125^m,	150^m,	200^m,	300^m,	400^m,	500^m, 600^m
Rés.	0^k461,	1^k898,	4^k33,	7^k81,	12^k55,	18^k7,	34^k,	79^k,	174^k,	281^k, 400^k

On voit, par cette table, qu'à 125 mètres de vitesse, l'effort de l'air, contre le boulet, égale environ le poids de ce boulet; qu'à 200^m, il en est près du triple; qu'à 500 mètres de vitesse, la résistance surpasse 22 fois ce même poids. Si le diamètre du boulet n'était que le $\frac{1}{3}$ de $0^m{,}15$ ou 5^c, la surface A qu'il présente à l'action de l'air, serait réduite au neuvième de sa valeur relative à $0^{mq}{,}0176$ ou à $0^{mq}{,}00195$; par conséquent, à égalité de vitesse, la résistance serait aussi réduite au neuvième de la valeur qu'indique la table. Si ce même diamètre n'était que le $\frac{1}{5}$ de $0^m{,}15$ ou 3^c, la résistance serait réduite au $\frac{1}{25}$ de sa valeur. Le boulet étant toujours en fonte de fer, son poids diminuerait dans une proportion bien plus grande encore : il serait seulement $\frac{1}{27}\,12^k{,}68 = 0^k{,}469$ pour le diamètre de 5^c, et $\frac{1}{125}\,12^k{,}68 = 0^k{,}1014$ environ pour celui de 3^c.

Ces circonstances tiennent évidemment à ce que les *volumes* et les *poids* des sphères *homogènes* (33) sont entre eux comme les *cubes des diamètres*, et que les *surfaces* de leurs grands cercles, représentées par A, sont simplement entre elles comme les *carrés de ces mêmes diamètres*. Enfin, si, au lieu d'être en fonte de fer, les boulets étaient en bois, ou en toute autre substance moins dense, leurs poids diminueraient en conséquence, mais la résistance de l'air resterait

* Il paraîtrait que la densité des boulets français, tels qu'on les fabriquait autrefois, est seulement de 7166 kil., le mètre cube, tandis que celle des boulets anglais serait 7435^k, environ $\frac{1}{27}$ plus forte (voyez le *Mémoire* déjà cité n° 200); ce qui doit tenir en partie au mode de coulage et de fabrication.

la même pour un même diamètre, parce qu'elle ne dépend que de la forme et de l'étendue de la surface du corps.

RÉSISTANCE DES FLUIDES IMPARFAITS ET INDÉFINIS, OU PÉNÉTRATION DES CORPS DURS DANS LES CORPS MOUS.

216. *Considérations préliminaires.* Nous avons déjà dit (200, art. 2°) ce qu'on devait entendre par les mots *fluides imparfaits;* nous avons aussi prévenu que leur résistance ne suit pas la même loi que celle des fluides d'une mobilité parfaite, et que les expériences connues portent à la considérer comme tout à fait constante à partir de l'instant où le mobile est convenablement enfoncé dans le milieu; enfin nous avons ajouté que cette même résistance paraît être, notamment pour les corps durs sphériques, proportionnelle à l'étendue de la projection transversale CD (fig. 45) du corps sur un plan perpendiculaire au mouvement; proposition qu'on peut aussi admettre, en attendant de nouvelles expériences, pour les premiers instants de l'enfoncement d'un corps dur dans un milieu résistant qui serait terminé par une surface perpendiculaire à la direction du mouvement, pourvu qu'on ne prenne que la projection transversale de la portion de surface déjà enfoncée dans ce milieu.

Il est certain que ces propositions n'auraient plus lieu pour des corps quelconques, notamment pour des cylindres ou des prismes très-allongés dans le sens du mouvement, parce que l'adhérence et le frottement sur les faces latérales acquerraient une certaine influence (200, 1°); nous avons déjà eu occasion d'en faire la remarque dans le n° 167, et c'est ce que nous démontrerons, d'une manière plus positive, quand nous en serons venus à l'examen particulier de la résistance des outils et de la forme la plus avantageuse à leur donner, selon les circonstances; nous prétendons seulement ici rapporter les résultats principaux des expériences faites sur la pénétration des boulets dans diverses substances consistantes, afin d'offrir de nouveaux exemples de l'application des principes contenus dans les *Préliminaires* et concernant ce mode d'action des forces.

217. *Formule pour calculer la résistance.* Nommant, en général, R la résistance totale exercée, par le milieu, contre le mobile, sup-

posé toujours assez dur pour ne pas être déformé sensiblement pendant toute la durée de la réaction; appelant d'ailleurs d son diamètre; cette résistance R, calculée pour un même milieu compressible et homogène, sera donc proportionnelle à

$$\tfrac{1}{4}\,\pi\, d^2 = \tfrac{1}{4}\,3{,}1416\, d^2 = 0{,}7854\, d^2,$$

π étant le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre; et, en raisonnant comme au n° 202, on trouvera que, pour avoir sa valeur absolue dans chaque cas particulier, il faudra encore multiplier $\frac{1}{4}\pi d^2$ par un certain facteur k relatif ici au degré de dureté ou de consistance du milieu, et qui représentera, en kilogrammes, la pression sur l'*unité de surface* de la projection transversale du corps, par exemple sur 1 mètre carré, d étant exprimé en mètres linéaires, ou sur un centimètre carré, d étant exprimé en centimètres linéaires.

On remarquera en outre que, si le milieu est tellement consistant que le passage du corps ne se referme pas immédiatement en arrière à mesure qu'il s'y enfonce, ce corps sera de plus pressé, dans le sens du mouvement et par l'air atmosphérique, en vertu d'un effort mesuré (37) par environ $\frac{1}{4}\pi d^2 \times 10330$ kilog., d^2 étant ici estimé en mètres carrés, ainsi que nous l'admettrons dans tout ce qui va suivre. Mais la valeur de cet effort est, comme nous le verrons à l'instant, tout à fait négligeable par rapport à la résistance qu'opposent la plupart des substances cohérentes au mouvement des corps; c'est pourquoi nous nous dispenserons d'en tenir compte dans la question dont il s'agit. Nous pourrons donc prendre, pour base de nos calculs et en négligeant d'ailleurs les effets qui se produisent avant l'instant où la résistance a atteint sa valeur *maximum*, ce qui sera permis toutes les fois que l'enfoncement total excédera 8 à 10 fois au moins le diamètre du projectile, nous pourrons, dis-je, nous servir de la formule générale

$$R = k \times \tfrac{1}{4}\,\pi\, d^2 = \tfrac{1}{4}\, k\, \pi\, d^2 = 0{,}7854\, kd^2.$$

218. *Résultats des expériences connues.* Il a été fait à diverses époques, sur les enfoncements des projectiles en plomb et en fonte de fer, dans des substances de différentes natures, des expériences qui malheureusement ne sont pas encore assez nombreuses ni assez précises, du moins quant aux milieux très-consistants tels que les métaux et les maçonneries, pour permettre de déterminer, avec une exactitude suffisante, la valeur du multiplicateur k qui représente la dureté des milieux. Nous rapporterons néanmoins ici, à cause de leur grande utilité, quelques-unes des valeurs qui ont été calculées avec beaucoup de soin, par M. le chef de bataillon du génie Augoyat, dans son important Mémoire cité page 190, en observant que celle qui concerne les balles de plomb n'est applicable qu'autant que la réaction ne serait pas suffisante pour déformer ces balles pendant la durée de l'enfoncement; car leur aplatissement consomme une partie de la force vive qu'elles possédaient avant de pénétrer dans le milieu, et fait croître, en outre, la résistance tout au moins en raison de l'accroissement de la surface variable, qui en résulte. Enfin, nous devons aussi remarquer qu'il s'agit de milieux qui ont de très-grandes dimensions par rapport à celles des projectiles.

Désignation du milieu, etc.		*Résistance pour 1 mètre carré de surface.*		
		kil.		atm.
Terres légères rassises depuis longtemps; balles de plomb non déformées, vitesse de 200m, . . .	$k =$	2002000	—	193,8.
Terres de parapets anciennes; boulets de fer, . .	$k =$	1900000	—	183,9.
Mêmes terres nouvellement remuées et damées,	$k =$	1520000	—	147,1.
Chêne très-sain et très-dur, ...	$k =$	5200000	—	503,4.
Vieux chêne passé, ...	$k =$	4500000	—	435,6.
Orme sain et dur, dans la direction des fibres, . .	$k =$	4930000	—	477,3.
Bois de sapin, ...	$k =$	2860000	—	276,9.
Maçonnerie de briques, ...	$k =$	9040000	—	875,1.
Maçonnerie en moellons avec parements de pierres dures, ...	$k =$	13000000	—	1290,2.

Ce dernier résultat est une réduite ou moyenne entre plusieurs autres et sur laquelle il reste encore beaucoup d'incertitude; il semble, en effet, que, dans de pareils cas, il conviendrait d'estimer séparément la résistance pour le parement dur et pour l'intérieur des maçonneries, attendu que les circonstances du mouvement changent nécessairement dans le passage du projectile, d'un milieu dans un autre. On pourra néanmoins l'admettre en attendant de nouvelles expériences plus précises; et, dans tous les cas, les résultats rapportés dans le tableau serviront à donner une idée de la résistance ou de la dureté comparée de certains corps. Nous verrons bientôt d'ailleurs comment ces mêmes résultats ont pu être déduits directement, par M. Augoyat, des enfoncements observés dans les diverses circonstances.

219. *Calcul de la durée et de la profondeur de la pénétration.* Maintenant nous remarquerons que la force R, qui produit le ralentissement continuel du mouvement du projectile, étant constante pour un même milieu, il s'ensuit (107) que le mouvement sera uniformément retardé, et qu'on en pourra calculer toutes les circonstances au moyen des principes des nos 110, 112, 130 et suivants. Ainsi on sera en état de calculer le temps que le mobile met à parcourir un espace donné, dans le milieu, ou à ralentir sa vitesse primitive d'une quantité donnée, enfin la durée et la profondeur totales de son enfoncement, etc.; mais, comme nous avons déjà présenté des exemples de ce calcul dans les nos 147, 167, 168, et 177, nous nous contenterons d'ajouter quelques remarques particulières relatives à l'objet dont il s'agit ici.

La question la plus importante qu'on ait ordinairement à se proposer sur l'enfoncement des projectiles, c'est de trouver la totalité de cet enfoncement correspondant à une vitesse donnée du projectile, et pour un milieu dont le degré de consistance ou de résistance se trouve indiqué dans la table. Or cet enfoncement se calculera facilement dans chaque cas, puisque nous savons que la force vive détruite, pendant la pénétration, est précisément égale à la force vive possédée par le projectile à l'instant où il a atteint le milieu, et a, par conséquent, pour valeur (136), le double de la quantité de travail développée, par la résistance constante R, pendant toute la durée du mouvement dans l'intérieur de ce milieu; car nous supposons expressément que la masse de ce dernier soit très-grande par rapport à celle du projectile, auquel cas la vitesse générale imprimée à cette masse est tout à fait insensible (160). En nommant donc, à l'ordinaire, P, M, V le poids, la masse et la vitesse du projectile à son entrée dans la substance pénétrable, E l'enfoncement total de ce projectile, on aura (71 et 137), pour calculer E, l'égalité

$$MV^2 = \frac{P}{g}V^2 = 2RE, \quad \text{ou} \quad PV^2 = 2REg.$$

Mais, si nous supposons que le projectile soit un boulet de diamètre d, son volume sera $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}d^3$ ou $\frac{2}{3}d \times \frac{1}{4}\pi d^2$, π étant le rapport de la circonférence du cercle au diamètre, c'est-à-dire 3,1416 environ ; par conséquent son poids aura aussi pour mesure la quantité $\frac{2}{3} d \times \frac{1}{4} \pi d^2 \times D$, D étant la densité (35) de la matière qui le compose. Enfin nous aurons $R = k \times \frac{1}{4} \pi d^2$; donc l'égalité ci-dessus revient, en divisant chacune de ses parties par le double $2 . \frac{1}{4} \pi d^2$ de la surface du grand cercle de la sphère, à celle-ci,

$$\tfrac{1}{3} dDV^2 = kEg; \text{ d'où } E = \frac{dD}{3kg} V^2,$$

dans laquelle $g = 9^m,8088$, comme on sait.

Considérant, par exemple, le boulet de 24, du n° 175, qui est animé d'une vitesse de 500^m, et supposant qu'il s'agisse de connaître son enfoncement dans le bois de chêne dur, on aura (35 et 218), $d = 0^m,15$, $D = 7200^k$, $V = 500^m$, $g = 9^m,81$ et $k = 5200000^{kil}$, en nombres ronds, et par conséquent,

$$E = \frac{0^m.15 \times 7200^k}{3 \,.\, 9^m,81 \,.\, 5200000^k} \times (500^m)^2 = \frac{0,5 \,.\, 72}{9,81 \,.\, 52} 25 = 1^m,76.$$

Telle serait donc, à peu près, la profondeur totale de l'enfoncement du boulet dans le bois de chêne.

S'il s'agissait de calculer la profondeur de la pénétration relative à l'instant où le projectile aurait perdu une portion quelconque de sa vitesse, on la trouverait de même, par la formule ci-dessus, en remplaçant V par cette vitesse perdue ; car le principe des forces vives (137) s'applique à un instant quelconque du mouvement.

On conçoit bien d'ailleurs comment M. Augoyat est parvenu à calculer, d'après le résultat des expériences connues, les valeurs du multiplicateur k pour les différentes substances pénétrables ; car l'égalité $\frac{1}{3} dDV^2 = kEg$ donne aussi

$$k = \frac{dDV^2}{3Eg};$$

de sorte qu'ayant déterminé exactement la valeur de la vitesse V par les moyens qui seront enseignés plus tard, ainsi que les valeurs de la pénétration correspondante et totale E, il est facile d'en conclure celle de k.

220. *Principe relatif au volume de l'impression.* On remarquera que, puisque la résistance R est proportionnelle à la surface de la projection transversale $\frac{1}{4} \pi d^2$. du mobile, la *quantité de travail* $R \times E$ développée, par cette résistance, contre le mouvement, est, de son

côté, proportionnelle au *volume* $\frac{1}{4}\pi d^2 \times E$ de *l'impression* ou du *vide* laissé, en arrière du boulet, à mesure qu'il chemine dans l'intérieur du milieu; car ce vide peut être considéré, à très-peu près, comme un cylindre droit à base circulaire, en négligeant la petite différence provenant de la portion hémisphérique située en avant, par rapport au surplus de ce vide. Mais on peut démontrer la proposition généralement en admettant, selon ce qui a déjà été observé ci-dessus (216) et conformément à l'opinion de plusieurs savants, qui se trouve également appuyée du résultat de quelques expériences spéciales *, que la résistance demeure proportionnelle à l'étendue de la plus grande section transversale de la surface en contact avec le milieu, même dans les premiers instants de la pénétration.

Il est facile de voir en effet, par un raisonnement analogue à celui du n° 186, que, si le mobile est lancé perpendiculairement à la surface qui limite le milieu, et que e soit, à un instant quelconque, la quantité très-petite dont ce mobile s'y enfonce, et enfin que a soit la moyenne valeur correspondante de la plus grande section transversale de l'impression, $a \times e$ sera aussi la mesure du petit accroissement de volume de cette même impression ou du vide formé par le projectile dans le milieu. Mais le petit accroissement du travail, pendant la durée de l'instant dont il s'agit, est $ka \times e$ (172 et 217); donc *la somme de ces petits volumes, ou le volume total et effectif du vide, est proportionnelle à la somme des quantités de travail partielles correspondantes, ou au travail total développé, dans les divers instants, par la résistance variable du milieu, contre le projectile.*

Le même raisonnement serait d'ailleurs applicable aux corps d'une forme quelconque, symétriques par rapport à un axe, et qui seraient mus dans la direction de cet axe, si on pouvait admettre, pour de tels corps, le principe relatif à la loi de la résistance; ce qui, je le répète, ne serait pas exact dans tous les cas.

221. *Méthode pour calculer la profondeur et la durée des petites impressions.* En supposant vrai le principe ci-dessus, pour les corps

* *Voyez*, dans la nouvelle *Architecture hydraulique* de M. de Prony, tom. 1, p. 219, et dans la note (x) de l'*Architecture hydraulique* de Bélidor, tom. 1, p. 76, nouvelle édition de M. Navier, une théorie particulière du choc, d'après D. G. Juan, savant espagnol qui a écrit sur les applications de la Mécanique à l'art maritime.

sphériques, comme il paraît effectivement l'être alors, on voit qu'on n'aura pas beaucoup plus de difficulté pour calculer la profondeur de l'impression, dans le cas où le projectile pénétrerait très-peu dans le milieu résistant, que dans celui où il s'y enfoncerait d'une quantité très-appréciable, et telle qu'on pût considérer sensiblement le volume du vide comme un cylindre de même section que la projection transversale du mobile, et ayant pour longueur la profondeur totale de l'impression.

En effet, si nous nommons B le volume de cette impression, le travail correspondant aura pour valeur kB; de sorte que, selon le principe précédent, on aurait aussi

$$\frac{P}{g} V^2 = 2kB\,; \text{ d'où } B = \frac{PV^2}{2kg}\,;$$

formule qui donnera le volume de l'impression *maximum* relative à une vitesse initiale V du projectile, et d'où l'on déduira ensuite aisément la profondeur de la pénétration totale par les principes de la Géométrie élémentaire; car on apercevra tout d'abord si le volume B surpasse ou non le volume de la demi-sphère antérieure du projectile ou $\frac{1}{12}\pi d^3$. Dans le premier cas, B se composera d'une portion cylindrique, de diamètre d, et de l'hémisphère qui la termine; retranchant donc le volume de cette hémisphère, de B, on aura le volume et par suite la longueur de la portion cylindrique; augmentant cette longueur de $\frac{1}{2}\,d$, on obtiendra la profondeur totale de l'enfoncement. Dans le second cas, l'impression se réduira à un *segment sphérique* ayant une seule base et dont la *flèche* se calculera, par tâtonnement, selon les règles de la Géométrie : c'est-à-dire qu'on fera diverses suppositions sur la valeur de cette flèche, et qu'on calculera les volumes des segments sphériques correspondants pour les comparer au volume B de l'impression, qui a été trouvé par les premières opérations.

Considérons, par exemple, le boulet de 24 dont il a été question ci-dessus, et supposons qu'il soit lancé avec une vitesse de 250^{m} seulement, dans le même milieu; on aura, en supposant $P = 12^{k}$ comme au n° 175,

$$B = \frac{12^{k} \times (250^{m})^2}{19^{m},62 \times 5200000^{k}} = \frac{2 \times 625}{3,27 \times 52000} = \frac{62,5}{327 \times 26} = 0^{mc},00735.$$

Le volume de la sphère entière du projectile a été trouvé (215) de $0^{mc},00176$, lequel est beaucoup au-dessous de la valeur de B ; retranchant donc, comme nous venons de le dire, $\frac{1}{2}\,0^{mc},00176$ ou $0^{mc},00088$, de $0^{mc},00735$, le reste $0^{mc},00647$ sera le volume de la partie cylindrique de l'impression ; divisant ensuite ce volume par la surface $0^{mq},0176$ du cercle de base de ce cylindre (177), on obtiendra, pour sa longueur, $0^{m},368$, à quoi il faudra ajouter la moitié du diamètre $0^{m},15$ du boulet, pour obtenir la profondeur totale de l'enfoncement, ce qui donne $0^{m},443$.

Si le volume B de l'impression eût été, au contraire, moindre que $0^{mc},00088$, il eût fallu opérer par tâtonnement ainsi qu'on l'a expliqué; mais nous ne saurions nous arrêter ici à donner un exemple de ce calcul qui ne présente guère plus de difficulté, et qui sera principalement utile dans les cas où le projectile sera animé d'une faible vitesse, ou viendra choquer directement un corps dont la dureté sera comparable à la sienne propre, tel que du fer forgé, de la pierre, etc. Ce même calcul servira aussi à déterminer, d'après des expériences bien faites, la résistance k du milieu sur l'unité de surface : il ne s'agira que de mesurer, avec une grande précision, le volume B de l'impression pour chaque cas, ainsi que la vitesse V du projectile à l'instant où il va frapper normalement la surface qui limite extérieurement le milieu.

Quant à la durée de l'impression, il faudrait, pour l'obtenir, calculer séparément sa valeur pour l'intervalle où la résistance R varie, et pour celui où cette valeur reste constante. Ce dernier cas ne présente pas de difficulté, ainsi que nous l'avons déjà observé (219), et l'autre se traiterait par la méthode du n° 134 ; mais, comme nous aurons occasion, un peu plus loin, de résoudre des questions absolument analogues, nous nous contenterons d'y renvoyer le lecteur *.

* On trouve, par les principes des calculs transcendants, que, quand le volume total de l'impression est très-petit par rapport à celui du projectile, ce qui arrive dans beaucoup de circonstances, on a, en nommant e la profondeur de l'impression, à un instant qui répond au nombre t de secondes écoulées depuis le commencement de la réaction et à la vitesse v conservée par le projectile, on a, dis-je, en conservant d'ailleurs aux autres lettres la même signification que dans les numéros précédents, et nommant a^2 le rapport donné de d^2D à $6kg$,

$$t=a\times arc\left(\sin=\frac{e}{aV}\right),\quad v^2=V^2-\frac{e^2}{a^2},\quad e^2=\frac{MV^2-Mv^2}{k\pi d}=a^2(V^2-v^2);$$

d'où il sera aisé de déduire, soit au moyen des tables connues, soit par une extraction de racine carrée, la valeur des quantités t, v ou e, quand on se donnera l'une quelconque d'entre elles. On aura de même, en nommant T, E la durée et la profondeur totales

222. *Observations concernant la dureté du projectile et l'épaisseur du milieu.* On ne doit pas perdre de vue que nos calculs supposent au projectile une dureté telle qu'il ne change pas de forme, d'une manière sensible, en s'enfonçant dans le milieu résistant. Dans le cas contraire, une portion plus ou moins notable de la force vive, dont il était animé avant son entrée dans ce milieu, serait employée (161 et 218) à produire ce changement de forme; il arriverait aussi, dans le même cas, que l'aplatissement du projectile ferait, comme nous l'avons déjà observé, croître la surface, sur laquelle s'opère la résistance et par suite cette résistance elle-même, suivant une loi qu'on ne pourrait apprécier sans des expériences spéciales sur la dureté propre de la matière du projectile : ce cas arrive, en particulier, pour les balles de plomb qui s'aplatissent à mesure qu'elles pénètrent plus avant dans l'intérieur des terres, des bois, etc.; aussi faudra-t-il bien se garder d'y appliquer les calculs ci-dessus, sauf pour de très-faibles vitesses, ou pour des milieux peu résistants.

Nous avons également supposé que l'épaisseur du milieu, dans le sens du mouvement, était assez grande pour qu'il ne fût pas traversé entièrement par le projectile; lorsqu'il en est autrement et que ce milieu est limité par deux faces perpendiculaires au mouvement, la force vive du projectile est seulement, en partie, employée à vaincre la résistance de ce même milieu, et celle qu'il en conserve, après en être sorti, sert à le faire cheminer plus avant dans l'air. Connaissant l'épaisseur du milieu et la valeur de k qui lui correspond,

de l'impression,

$$T=\frac{\pi a}{2}=\frac{\pi E}{2V},\ e=aV,\ \text{dans lesquelles}\ a=\sqrt{\frac{Dd^2}{6kg}},\ g=9^m,8088,\ \pi=3,1416.$$

La formule, qui donne T au moyen de a, montre que, quand le volume de la plus grande impression est, comme on le suppose, négligeable par rapport au volume du projectile, la durée de cette impression devient sensiblement indépendante de sa profondeur, ainsi que de la vitesse primitive V du même projectile. Cette conséquence, qui s'étend aisément au choc de deux corps quelconques, quand l'impression est infiniment petite, est analogue à celle qui concerne les faibles oscillations du pendule, dont il sera fait mention plus tard, et dont la durée est également indépendante de l'amplitude de l'arc parcouru, etc. La valeur de T montre d'ailleurs que la durée de l'impression est d'autant plus petite que la résistance ou la dureté de la matière du corps choqué, représenté ici par k, est plus grande, conformément à ce qui a déjà été remarqué n° 168. Dans la réalité et qu'elle que soit la petitesse de l'impression, sa durée est toujours un peu moindre que ne l'indique la formule; de sorte que celle-ci ne donne véritablement qu'une limite supérieure de cette durée, d'autant plus exacte que l'impression est plus faible.

on trouvera aisément la force vive qui reste au projectile : elle sera égale (137) à *la force vive primitive, diminuée du double de la quantité de travail qui est relative à l'épaisseur traversée,* et qui a pour mesure le *produit de la résistance* k, sur l'unité de surface, *par le volume total de l'impression, formant ici un véritable cylindre.*

DES LOIS DE L'IMPRESSION DANS LES MILIEUX TRÈS-CONSISTANTS ET D'UNE ÉTENDUE LIMITÉE.

223. *Influence de l'inertie et de la flexibilité des milieux dont le mouvement est gêné par des obstacles.* Nos calculs supposent que la masse du milieu soit très-grande par rapport à celle du projectile, et que, si ce milieu compose un corps solide peu épais, tel qu'une planche de bois, cette planche ne fléchisse pas, d'une manière sensible, pendant l'impression. En effet, dans le cas contraire, une portion de la force vive primitive serait employée à vaincre l'inertie des molécules du solide ou à produire sa flexion ; cette portion aurait pour valeur (97 et 138) le double du travail que devrait développer, dans le sens du mouvement du projectile et au point où il agit, une force de pression quelconque pour amener la pièce au même degré de tension finale. On en tiendra donc aisément compte quand on aura observé cette flèche par expérience, ou qu'on l'aura déterminée à l'aide du calcul, ce qui n'est nullement impossible comme nous le verrons plus tard, puisque nous connaissons ici la loi que suit la pression. Quant à la portion de la force vive du mobile, qui est employée, dans le même cas, à communiquer une certaine vitesse aux molécules du milieu, elle sera d'autant plus grande que la masse de ce milieu sera moindre, et que son mouvement sera moins empêché par des obstacles étrangers. Nous verrons bientôt comment on peut calculer cette portion de force vive quand le milieu a la liberté de se mouvoir en tous les sens ; examinons d'abord ce qui arrive dans le cas où son mouvement général est empêché par quelque obstacle solide, et tâchons de démêler le rôle que jouent séparément l'inertie et la force de ressort des parties.

Supposons, par exemple, que la planche ci-dessus qui constitue le milieu solide, soit appuyée, à ses extrémités, contre deux poteaux invariables ; elle s'opposera donc au mouvement d'une balle qui s'y enfoncerait, non-seulement par sa force de ressort, mais aussi par l'inertie de ses différentes parties ; néanmoins, comme à l'instant où l'enfoncement de la balle cesse, la flexion est aussi à son *maximum* et la vitesse nulle, l'inertie des parties de la planche qui, dans les premiers instants de la flexion, a absorbé de la force vive, a dû ensuite (141) et lors du ralentissement de la vitesse, restituer cette même portion de force vive; de sorte que, dans la réalité, il n'y a eu, à l'instant dont il s'agit, de consommée que la quantité de travail nécessaire pour produire l'enfoncement et la flexion.

La force vive, primitivement possédée par la balle, se trouve donc égaler le double de cette quantité de travail, que, par hypothèse, on sait estimer; car les poteaux qui sont des masses inébranlables et très-grandes, par rapport au projectile, n'ont, par cela même (160 et 162), rien ou très-peu absorbé. Ainsi on pourra encore, pour l'instant dont il s'agit, calculer l'enfoncement total, qui, d'ailleurs, sera nécessairement un peu moindre que dans le cas où la planche serait appuyée solidement dans toutes ses parties, ou serait suffisamment épaisse pour ne pas fléchir.

224. *Influence de l'élasticité du milieu.* Si le ressort de la planche ci-dessus n'a pas été détruit par suite de sa flexion générale, cette planche retournera en arrière, et exécutera, autour de sa position primitive, une suite d'oscillations (19) de plus en plus petites, et qui finiront bientôt par s'éteindre, attendu les résistances de toute espèce qui s'opposent à ce mouvement. Si donc la balle s'est tellement enfoncée dans la planche, que la compression et le frottement qu'elle y éprouve, suffisent pour l'empêcher d'en sortir lors du mouvement général de retour, elle exécutera une série d'oscillations avec cette planche; de sorte qu'au bout d'un certain temps, la force vive employée à mettre en jeu la force de ressort de celle-ci, n'en sera pas moins perdue inutilement pour l'impression. Je dis inutilement, bien qu'il soit évident qu'à l'instant où la planche revient en arrière avec une vitesse croissante, la balle, qui était au repos, résiste par son inertie et reçoit, à son tour et de la part du milieu, un choc qui tend à l'y enfoncer un peu plus qu'elle ne l'était d'abord; mais, comme la vitesse *rétrograde* de la planche diminue de plus en plus, et que la balle résiste à ce ralentissement (66) en vertu de son inertie, il arrive bientôt aussi qu'elle tend à s'en séparer avec la vitesse contraire qu'elle a acquise; or, si son inertie est, à cet instant, vaincue par le frottement, etc., qu'elle éprouve de la part du corps, elle a dû l'être aussi dans la

première période du retour ; de sorte qu'en réalité, l'enfoncement n'a pas dû augmenter ; et attendu que les mêmes raisonnements s'appliquent aux oscillations suivantes, il est bien vrai de dire que le travail, recélé par la force de ressort de la planche, a été consommé sur des résistances étrangères à l'impression. Ainsi donc, quoique le milieu soit plus ou moins élastique, la force vive possédée d'abord par la balle, se trouvera partagée, à peu près, comme on l'a dit n° 223.

Quand, au contraire, la balle se détachera de la planche, lors du mouvement de retour, ce qui arrivera généralement toutes les fois que l'impression sera peu profonde, cette balle sera, conformément à ce qui a été admis aux nos 97, 115 et suiv., projetée en arrière avec une certaine vitesse ; toutefois la force vive correspondante sera une bien faible portion, non-seulement de celle que possédait d'abord la balle, mais même de celle qui a été absorbée par la flexion générale de la planche ; car le projectile quitte cette planche précisément à l'instant où elle a acquis sa plus grande vitesse de retour, et où elle a ainsi converti, en force vive et pour son propre compte, la majeure partie du travail qu'avait absorbé sa force de ressort.

On peut donc aussi affirmer que l'accroissement de l'impression, résultant du choc en retour, est également une quantité très-faible ; de sorte qu'on pourra, dans bien des cas, admettre que *la force vive initiale du projectile se compose seulement du double de la quantité de travail qui répond et à la flexion générale et au volume de l'impression*, comme dans le cas où la planche est sans élasticité (223). Cette relation servira d'ailleurs à calculer la profondeur de l'impression quand on sera certain que cette impression persiste, ou que l'élasticité du milieu a été complétement détruite dans l'endroit même où elle s'est opérée ; autrement, en effet, la vitesse restituée à la balle pourrait être très-appréciable, et sa force vive très-comparable à sa force vive primitive.

225. *Conclusions relatives à la pénétration des milieux flexibles retenus par des obstacles.* On voit, par l'examen qui précède, que la force vive primitive du projectile sera composée, dans tous les cas, et de celle que conserve ce projectile après le choc, et du double de la quantité de travail qui a été absorbée tant pour produire l'impression persistante, que pour imprimer à la planche la vitesse et la flexion qu'elle conserve à l'instant où elle est quittée par la balle, Or l'expérience prouve que la vitesse de retour de la balle est généralement très-faible par rapport à celle qu'elle possédait d'abord, si ce n'est quand cette dernière est elle-même fort petite, et que la matière des corps qui se choquent est suffisamment roide et élastique pour que l'impression *maximum* soit, pour ainsi dire, insensible; ce qui n'est pas le cas que nous avons spécialement en vue ici.

On peut donc admettre généralement que la majeure portion de la force vive que possédait primitivement le projectile, a été consommée effectivement, soit à produire l'enfoncement du milieu ou l'aplatissement de ce projectile, soit à infléchir ce milieu d'une manière permanente, s'il est dépourvu de l'élasticité nécessaire pour reprendre sa forme primitive, soit enfin à lui imprimer, dans le cas contraire, des oscillations ou des vibrations, plus ou moins rapides, plus ou moins étendues.

Nous sommes entrés dans tous ces détails, afin de bien faire voir comment la force vive se consomme ou se détruit, inévitablement et sans retour, dans la réaction des corps, et pour éclairer, de plus en plus, les principes théoriques que nous avons exposés dans les *Préliminaires*, notamment ceux qui concernent la communication du mouvement, lesquels trouvent des applications nombreuses dans les questions que présentent la pratique des arts et l'établissement des machines. Ces mêmes considérations serviront aussi à faire pressentir, à l'avance, les résultats de certains phénomènes, ou à apprécier certains effets plus ou moins compliqués de l'action des forces, qu'il serait impossible, en aucune manière, de soumettre à un calcul rigoureux; et elles empêcheront, tout au moins, de commettre des fautes graves, quand il s'agira d'établir des projets dont les résultats se fondent sur les données de la Mécanique. C'est dans cette vue que nous allons ajouter quelques développements à tous ceux qui précèdent, concernant la réaction des corps solides libres.

226. *De la pénétration des milieux limités et entièrement libres.* Nous avons supposé jusqu'ici que la masse du milieu soit très-grande par rapport à celle du projectile, en sorte qu'il n'en reçoive aucun mouvement sensible, ou qu'ayant des dimensions finies, il soit tellement appuyé, en certains points, contre des obstacles, que les

parties voisines de celle où se fait l'impression, prennent seules un mouvement général de flexion, dépendant, soit de l'intensité de la force de réaction, de la pression exercée par le projectile, soit de la durée même de cette réaction ou de la profondeur de l'impression. Or il est essentiel de remarquer que cette flexion aura également lieu quand la pièce choquée sera parfaitement libre de se mouvoir dans le sens du chemin suivi par le projectile, ainsi qu'il arriverait, par exemple, si cette pièce était simplement suspendue à l'extrémité d'une corde très-flexible.

En effet, le mouvement serait d'abord communiqué aux parties voisines du point où se fait l'impression, et il ne se propagerait que successivement et progressivement aux parties les plus éloignées; celles-ci résistant donc par leur inertie, et demeurant un instant stationnaires, tandis que les autres ont déjà reçu, en grande partie, le mouvement du projectile et cheminent en avant, il est clair que la pièce doit nécessairement fléchir à mesure que ce projectile s'y enfonce, et fléchir d'autant plus que la masse, et par conséquent l'inertie des parties reculées, sont plus considérables.

Ainsi, dans le cas dont il s'agit, les choses se passent, en réalité, à très-peu près comme si le corps était appuyé contre des obstacles fixes vers les parties éloignées du centre d'impression, si ce n'est qu'immédiatement après l'instant de la plus grande flexion, et attendu la grande force de cohésion qui unit entre elles toutes les molécules du milieu, la vitesse se trouve propagée *, du centre d'action aux extrémités, de telle sorte que les différentes parties se sont mises en harmonie de mouvement avec la masse du projectile, conformément à ce qui a déjà été expliqué (155 et suiv.). La formule du n° 156 donnera donc la vitesse commune dont il s'agit, et celle du n° 161 la portion de la force vive du projectile, qui a produit l'impression, la flexion ou tout autre changement d'état moléculaire éprouvé, par les deux corps, à l'instant où cette impression atteint sa limite.

Par conséquent, si le milieu résistant est sans élasticité ou a perdu sa force de ressort à ce même instant, et que la dureté du projectile soit d'ailleurs très-grande par rapport à la sienne propre, *la portion de force vive* $\frac{M'MV^2}{M+M'}$ dont il s'agit, et dans laquelle M′ re-

* *Voyez*, plus bas, les nos 231 et 232.

présente la masse entière du milieu, cette portion, dis-je, *se trouvera alors égaler le double de la quantité de travail relative* (221) *au volume total de la pénétration du projectile dans l'intérieur de ce milieu, plus au double de celle qui a été absorbée pour produire la flexion générale et permanente de ce même milieu.*

Cette dernière quantité de travail, qui pourra s'estimer à peu près comme dans le cas (223) où le milieu est retenu par des obstacles fixes, sera d'ailleurs négligeable toutes les fois que ce milieu aura assez d'épaisseur, assez de roideur, pour ne pas éprouver de flexion générale sensible, et qu'il sera assez mou, par rapport au projectile, pour que ce dernier puisse s'enfoncer, d'une quantité plus ou moins considérable, dans son intérieur, sans en être expulsé (224).

227. *Du cas où le milieu libre est flexible et élastique.* Si le corps solide, qui constitue le milieu résistant, conserve, à l'instant de la plus grande flexion, assez d'élasticité pour retourner vers la forme générale qu'il avait avant le choc, sans en avoir assez pour que l'impression soit complétement effacée et que les corps se séparent immédiatement, il se passera des choses absolument analogues à celles qui ont lieu (224), pour le cas où le milieu est retenu fixement par les extrémités; c'est-à-dire qu'il ne reprendra pas instantanément sa forme définitive, et qu'il n'y parviendra qu'après une série d'oscillations ou de vibrations de plus en plus faibles et relatives à sa force de ressort, oscillations en vertu desquelles il arrivera que, tantôt ce seront les extrémités qui marcheront en avant, et tantôt le point où a commencé l'ébranlement.

On voit aussi qu'une certaine portion de la force vive du projectile aura été employée à produire ces oscillations et le mouvement général de transport du milieu, etc. Mais, comme il n'existe point ici d'obstacles extérieurs, le travail absorbé par la flexion aura servi, en majeure partie, et après les oscillations terminées, à augmenter la vitesse générale ou la force vive du milieu; de sorte qu'on peut admettre que *la force vive initiale du projectile se trouve simplement décomposée, après le choc, en deux parties, dont l'une égale le double de la quantité de travail relative au volume total de l'impression ou de l'enfoncement produit par ce projectile, et l'autre à la somme des forces vives finales conservées à la fois par les deux corps.*

Cette somme de forces vives se calculant d'ailleurs encore au moyen de la formule du n° 156, puisqu'ici les corps sont censés ne pas se quitter après l'impression (159), il en résulte nécessairement que *la perte de force vive* (161) $\frac{MM'V^2}{M+M'}$, ***sera aussi égale au double de la quantité de travail nécessaire pour produire cette impression,*** comme pour le cas où le milieu est sans élasticité, et ne reçoit d'ailleurs aucune flexion générale sensible.

228. *Applications et formules particulières relatives au pendule balistique.* Ces dernières circonstances se présentent, entre autres, dans les expériences qui ont pour objet de déterminer directement la vitesse initiale des boulets de canons au moyen du *pendule balistique,* dont nous donnerons la description dans la seconde partie de cet ouvrage. Il nous suffit ici de savoir que ce pendule consiste tout simplement en un gros bloc de bois suspendu verticalement à des tiges très-minces, de manière à avoir toute liberté de se mouvoir à l'instant où il est choqué et pénétré par la masse du projectile qu'on lance perpendiculairement à une de ses faces. Or on voit, d'après ce qui vient d'être dit, que, non-seulement on pourra calculer sa vitesse U, à l'instant de la plus grande impression, ou de la pénétration complète du boulet dans son intérieur, quand on connaîtra la dureté k de ses parties (218) ainsi que la vitesse d'arrivée V du projectile, mais qu'on pourra, à l'inverse, calculer cette dernière vitesse au moyen de la première, par l'égalité $(M+M')\,U=MV$ du n° 156, et déterminer pareillement la valeur du multiplicateur k de la résistance, à l'aide de cette autre égalité (219 et 226)

$$\frac{M'}{M+M'} \times MV^2 \text{ ou } \frac{P'}{P+P'} \times \frac{P}{g} V^2 = 2k \times \tfrac{1}{4}\pi d^2 \times E = \tfrac{1}{2}k\pi d^2 E,$$

quand on connaîtra en outre, d'après l'expérience, la valeur de la pénétration totale E subie par le pendule.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse encore du projectile des n^{os} 175 et 219, lancé, avec la vitesse de 500 mètres, contre un bloc de bois de chêne pesant 1800^{kil}; la vitesse U, imprimée à ce bloc à la fin de l'impression, sera, d'après la formule citée du n° 156, égale à

$$\frac{MV}{M+M'} \text{ ou } \frac{P}{P+P'}\,V = \frac{1800^k}{12^k+1800^k} \times 500^m = \tfrac{1}{151}500^m = 3^m{,}311;$$

et, comme on a ici (219)

$$k = 5200000^{k},\quad \tfrac{1}{2}\pi d^2 = 2 \times 0^{mq},0176 = 0^{mq},0352,$$

on obtiendra, pour la profondeur de l'enfoncement du projectile dans le bloc pendule (175),

$$E = \frac{P'}{P+P'} \times \frac{2MV^2}{k\pi d^2} = \tfrac{150}{151} \times \frac{2 \times 152955^{km}}{352 \times 520} = 1^{m},66,$$

au lieu de $1^{m},76$ qui a été trouvé, n° 219, pour le cas où le mouvement du bloc serait tout à fait empêché, soit par suite d'obstacles étrangers, soit parce que son poids serait, pour ainsi dire, infini par rapport à celui du boulet.

Si, à l'inverse, la vitesse $U = 3^{m},311$ eût été donnée immédiatement, d'après l'observation du mouvement qu'acquiert le pendule, aussi bien que la profondeur $E = 1^{m},66$ de l'enfoncement du projectile dans l'intérieur de sa masse, on eût trouvé, à l'aide des mêmes formules, $V = 500^{m}$ et $k = 5200000^{k}$. Par cette manière de procéder, qui a été mise spécialement en usage par Hutton, géomètre que nous avons déjà souvent cité, on obtient donc deux résultats pour chaque expérience, et l'on remplit un double objet d'utilité pour l'avancement de la science.

229. *Observations et conséquences particulières relatives à la profondeur de l'impression.* Il est essentiel de remarquer qu'attendu que $M + M'$ surpasse M', la force vive qui entre dans la première des égalités ci-dessus, sera aussi moindre que la force vive MV^2 possédée par le projectile; de sorte que, tant pour ce motif qu'à cause que la pénétration est toujours accompagnée d'une flexion générale qui lui est étrangère, la valeur de E, dans le cas dont il s'agit d'un corps mobile, sera généralement plus faible que si ce corps était appuyé, de toutes parts, contre des obstacles solides; et cela d'autant plus que $M + M'$ surpassera davantage M', ou que la masse M' du corps choqué sera moindre par rapport à celle M du projectile. Il est évident, au surplus, que la même conséquence s'applique également au cas où le milieu, sans être parfaitement libre, serait appuyé simplement contre des ressorts très-compressibles ; car ces ressorts, en cédant sous la pression qu'ils éprouvent, absorberaient encore une portion plus ou moins grande de la force vive transmise au milieu, portion que, à la rigueur on pourrait calculer (97) si l'on savait exactement comment varie, à chaque

instant, l'énergie de ces ressorts selon leur état de compression ou de flexion.

En partant de ces données, on pourrait arriver à quelques conséquences utiles relativement aux précautions à prendre quand il s'agit de se garantir de l'atteinte des projectiles, à l'aide de *masques couvrants* ou de *boucliers,* plus ou moins épais et consistants, destinés à recevoir l'impression immédiate du choc. On voit, par exemple, que, si l'on tient à diminuer, autant qu'il est possible, leur épaisseur, il conviendra de ne pas les priver de toute mobilité, de toute flexibilité, et de les appuyer plutôt par des ressorts très-compressibles, contre le corps à garantir, que par des obstacles ou pièces très-solides; qu'il n'est pas moins à propos de réduire, au *minimum,* leur masse ou leur poids, en diminuant, à cet effet, l'étendue de leurs dimensions transversales; de sorte que, sous ce rapport comme sous tous ceux qui précèdent, il y aurait de l'avantage à les composer de plusieurs pièces distinctes et entièrement isolées, mais se recouvrant convenablement les unes les autres.

Pour réaliser, en particulier, la condition d'une grande mobilité, on pourrait notamment appuyer les masques, par des ressorts, contre des chars très-légers et très-roulants, ou contre de petits traîneaux portés sur des rouleaux évidés, etc. De tels dispositifs pourraient bien n'être pas les plus économiques et les plus avantageux dans tous les cas; mais ils n'en constitueraient pas moins les masques qui, à égalité d'épaisseur et de matière, seraient capables d'offrir le plus de sécurité, le plus de résistance à la pénétration, s'il était permis de supposer d'ailleurs, comme on l'a fait dans les nos 226 et suivants, que le mouvement se soit effectivement propagé, et la vitesse en quelque sorte disséminée également, dans toute l'étendue de la masse couvrante, à l'instant même où la pénétration du projectile est arrivée à son terme. Or, c'est ce qui paraît effectivement admissible pour cet instant, et quand il s'agit de milieux solides très-consistants, d'une étendue médiocre dans le sens transversal, et assez épais d'ailleurs pour ne pas être traversés entièrement par le projectile; car toutes ces circonstances influent sur la durée de la propagation du mouvement, comme nous allons entreprendre de le faire sentir par le raisonnement et par des exemples.

DE LA PROPAGATION DU MOUVEMENT DANS L'INTÉRIEUR DES MILIEUX DE DIVERSES NATURES, ET DES EFFETS DE SA DURÉE.

230. *Idée de l'influence que cette durée exerce sur les lois de la résistance des milieux indéfinis.* Ce qui distingue essentiellement les corps solides des fluides parfaits, c'est, comme nous l'avons déjà observé (200), la grandeur de la force de cohésion qui unit entre elles leurs diverses parties. Dans les fluides, cette force est très-faible, de sorte que leurs molécules, qui sont séparées entre elles (27) par des pores d'une dimension comparable à la leur propre, jouissent d'une mobilité, d'une indépendance de mouvement pour ainsi dire parfaites; dans les solides et les corps mous, cette force est considérablement plus grande; et si, dans certains corps, tels que les terres légères et sèches, les sables, etc., qui sont composés de parties plus ou moins grossières et en apparence indépendantes, cette force de cohésion n'existe que très-peu ou même point du tout, elle se trouve, jusqu'à un certain point, remplacée, quant aux effets, par le frottement et la force de réaction qui, dans leur contact mutuel, naît de la différence et de l'opposition de leur mouvement.

Il résulte de là, pour les fluides en particulier, que la vitesse ne peut se transmettre qu'avec lenteur aux parties de la masse qui se trouvent à une certaine distance du point où se fait l'impression, et que, pour peu que cette distance soit grande, ou que la vitesse du mobile soit considérable, le mouvement ne s'y propage, en quelque sorte, jamais. Aussi arrive-t-il, dans ce cas, que la force vive totale, imprimée aux molécules du fluide, se réduit sensiblement à celle qu'ont acquise les parties qui avoisinent immédiatement le mobile, et dont le nombre ainsi que la vitesse étant directement en rapport avec la vitesse, la forme et l'étendue de ce mobile, permettent (199) de mesurer uniquement, par la force vive imprimée, la grandeur du travail nécessaire, à chaque instant, pour faire cheminer en avant le mobile avec sa vitesse constante, ou pour vaincre continuellement les forces d'inertie qui, presque seules alors, s'opposent à son passage.

Dans le cas des milieux consistants, au contraire, le mouvement imprimé directement par le mobile aux parties en contact, se propage, par l'intermédiaire des forces de cohésion et des résistances, dans toute l'étendue de la masse, avec une rapidité d'autant plus grande que ces forces sont plus considérables. C'est ce que prouve, en effet, la formule $F \times t = M \times v$ du n° 130, qui donne $v = \frac{Ft}{M}$, c'est-à-dire un accroissement v de vitesse d'autant plus grand, pour un même instant infiniment petit t, et une même masse élémentaire m, que la force F, qui unit cette masse aux parties dont elle reçoit immédiatement le mouvement, est elle-même plus considérable. Il en résulte donc une *diffusion*, un *partage général* des quantités de mouvement (131 et 154), communiquées par le mobile aux parties qu'il choque directement, en vertu desquels la force vive transmise au milieu, dépend bien plus de l'étendue entière de ce dernier ou de sa masse totale, que de la forme extérieure et des dimensions propres du mobile, conformément à ce qui a été admis généralement dans les nos 153 et suivants, ainsi que dans le n° 226.

Voilà pourquoi aussi nous avons pu dire, n° 200, art. 2, que, quand un milieu solide a des dimensions pour ainsi dire infinies par rapport à celles du corps dur qui le pénètre, la vitesse qu'il communique aux parties voisines, et dans le sens de son propre mouvement, doit, puisqu'elle est presque aussitôt disséminée dans la masse entière du milieu, être considérée comme tout à fait inappréciable (160) par rapport à la sienne propre. L'action se réduisant donc sensiblement alors à vaincre ou à détruire et le frottement, et les forces de cohésion qui s'opposent directement au passage du mobile, il arrive que la résistance en dépend presque uniquement, et peut leur être censée proportionnelle pour une étendue et une forme déterminées du corps dur.

231. *Conséquences générales et observations relatives aux milieux limités*. En résumé, on voit que le travail, qui devrait être dépensé par un moteur pour entretenir, au même état, le mouvement d'un corps dans l'intérieur d'un milieu résistant quelconque, se compose en réalité, à la fois, et du travail nécessaire pour vaincre les forces d'inertie des molécules de ce milieu, et de celui qui est nécessaire pour vaincre, à chaque instant, les forces de toute espèce qui unissent entre elles les différentes parties. Or, la pression totale exercée, sur le mobile, dans le sens de son mouvement, dépend essentiellement des premières forces pour les fluides parfaits, et des secondes pour les milieux qui ont beaucoup de consistance; mais, pour tous les états intermédiaires qui diffèrent beaucoup de

l'état qui constitue la fluidité ou la solidité parfaites, cette pression ne peut s'estimer rigoureusement ni par les simples forces d'inertie, ni par les simples forces de cohésion du milieu.

Nos raisonnements supposent expressément d'ailleurs que le milieu soit assez étendu pour que la masse entière ne reçoive, par l'action du mobile, aucun mouvement de transport général sensible, ou que, quand sa masse est limitée et comparable à celle de ce dernier, on ne considère que la portion de travail nécessaire pour produire immédiatement la séparation et le déplacement relatif de ses molécules, abstraction faite du mouvement général imprimé à toute sa masse : cette portion, qui a évidemment pour mesure le produit de la résistance R, exercée extérieurement contre le mobile, par le petit chemin relatif qu'il décrit à chaque instant dans l'intérieur du milieu, constitue véritablement (223) l'impression et la flexion souffertes par ce milieu. On a pu se convaincre, en effet (226 et suiv.), que, dans le cas d'un milieu limité, le travail total que devrait développer, contre le mobile, une puissance extérieure pour entretenir son mouvement absolu dans l'espace, ou, ce qui revient au même, la moitié de la force vive absolue qu'il perd à chaque instant, a, pour mesure, et le travail qui augmente la vitesse générale du milieu, et le travail qui produit immédiatement la pénétration et la flexion ou le déplacement relatif des molécules de ce milieu.

Nommons E le chemin absolu décrit, par le mobile, dans l'espace et dans un très-petit temps quelconque, E′ celui que décrit pareillement la masse entière du milieu, enfin e le chemin relatif que décrit le mobile dans l'intérieur de ce milieu, en vertu de la flexion générale et de la pénétration que ce dernier éprouve, on a évidemment $E = E' + e$, $RE = RE' + Re$; ce qui revient au principe énoncé, R étant la pression que le mobile éprouve dans le sens de son mouvement, et RE, RE′ étant d'ailleurs équivalents (186 et 137), l'un à la moitié de la force vive perdue par le mobile, l'autre à la moitié de la force vive gagnée par la masse entière du milieu ; de sorte que $Re = RE - RE'$ est véritablement égal à la moitié de la force vive détruite (161 et 226) dans la durée du choc. Quand le milieu limité est un fluide parfait, Re a sensiblement pour valeur la moitié de la force vive due aux mouvements relatifs qui ont été imprimés aux molécules qui avoisinent le mobile, et elle se mesure comme on l'a expliqué à la fin du n° 199.

Quand le milieu est très-consistant, Re a pour valeur approchée le travail même que nécessitent le rapprochement, l'écartement ou la désunion des molécules dont il s'agit, soit entre elles, soit par rapport aux molécules de la surface extérieure du mobile, et on la mesure comme il a été expliqué nº 216 et suiv.

232. *Aperçus sur la durée de la propagation du mouvement dans l'intérieur des milieux.* Nous avons vu ci-dessus (230) que, quand un milieu est choqué ou pénétré, en un certain point, par un corps dur quelconque, le mouvement, communiqué aux parties immédiatement en contact, se propage d'autant plus rapidement, à une distance donnée de ce point, que les forces de diverses espèces qui unissent ces parties à celles qui leur sont voisines, ont une plus grande intensité par rapport au poids ou à la masse de ces mêmes parties ; ce qui résulte bien clairement, ainsi que nous l'avons expliqué, de la formule du nº 130, qui donne également $t = \frac{M}{F} v$, et dans laquelle on suppose que M est la masse d'une certaine molécule, F la force qui l'unit à la molécule voisine déjà en mouvement, et v le degré de vitesse qu'elle en reçoit pendant le temps infiniment petit t. Or il est évident aussi que, pour un même milieu, le temps nécessaire à la propagation du mouvement, croît avec la distance dont il s'agit ; car il faut un certain temps t, quelle qu'en soit la petitesse, pour que chaque molécule ait reçu, de la précédente, ou imprimé à la suivante, son accroissement de vitesse v par l'intermédiaire des forces F qui l'unissent à elles, et cela successivement et de proche en proche ; ou, si l'on veut, le temps croît avec le nombre des molécules interposées entre celles qui touchent immédiatement le mobile et celles qui en sont séparées par l'intervalle que l'on considère. Enfin il n'est pas moins évident encore que le temps, nécessaire pour que les molécules, situées à cette distance, reçoivent un certain degré de vitesse donné et fini, est d'autant plus petit, à circonstances égales d'ailleurs, que le mobile agit immédiatement sur un plus grand nombre des molécules du milieu, ou par une plus grande surface ; car chacune des molécules éloignées de celles-là, en recevra, à la fois et dans un temps donné, une plus grande quantité de mouvement.

On voit donc que la durée de la propagation ou de la diffusion générale du mouvement, dans toute l'étendue du milieu, dépend à la fois de la position de ses différentes parties par rapport au centre d'impression, de la forme qui limite extérieurement son étendue ou son volume, de la densité et de la force d'adhésion de ces mêmes parties, enfin de la forme et de l'étendue de la surface agissante du mobile. Quelle que soit, au surplus, l'intensité de la force de cohésion des molécules du milieu, la petitesse de son étendue par rapport à celle de la surface agissante, etc., on voit qu'il s'écoulera nécessairement un certain temps, fini et plus ou moins facile à apprécier, avant que le mouvement se soit distribué également entre toutes les parties, conformément à ce qui a été avancé dans les n^{os} 57 et 63, et à ce qu'indique le résultat d'une infinité d'expériences relatives à la réaction des corps *.

233. *Exemple particulier de l'influence qu'exerce la durée de la propagation du mouvement.* Nous avons déjà rapporté (57) qu'une balle de fusil traverse une feuille de papier, un carreau de verre, une planche mince librement suspendus, sans leur communiquer une vitesse sensible, ce dont on peut être étonné au premier aperçu ; mais, en considérant, d'une part, qu'il faut un temps fini et appréciable pour que la vitesse se propage du centre d'impression aux points qui en sont à une certaine distance ; et, en considérant, d'une autre, que la feuille ou la planche ci-dessus ayant une faible épaisseur, la quantité de travail, qui se développe pendant la durée de la pénétration, est aussi une quantité très-petite (219) par rapport à la force vive primitive de la balle, on s'explique facilement la raison du phénomène.

En effet, par suite de cette dernière circonstance, la force vive de la balle sera très-peu diminuée et par conséquent le mouvement

* On remarquera qu'il s'agit spécialement ici du mouvement de transport général des molécules, en vertu duquel elles décrivent des espaces finis et croissants avec le temps, et non du mouvement *vibratoire* de ces molécules (19), par suite duquel elles ne feraient qu'osciller autour de leurs positions moyennes en s'écartant et se rapprochant alternativement les unes des autres. Ce dernier mouvement suit, à certains égards, des lois très-distinctes, quoiqu'il puisse coexister dans un même corps avec le premier : le plus léger ébranlement, imprimé à une ou plusieurs molécules, suffit pour le produire, et c'est particulièrement ce mode de mouvement qui produit la sensation des *sons aigus* ou des *sons graves*, selon qu'il est plus ou moins rapide.

L'étude difficile des phénomènes variés auxquels donne lieu la vibration moléculaire des corps, fait aujourd'hui l'objet des recherches de nos plus grands géomètres : elle a été préparée par les travaux de Chladni, et surtout, par les belles et récentes découvertes qui ont valu, à M. Felix Savart, la place qu'il occupe à l'Académie royale des sciences.

très-peu ralenti ; la pénétration aura donc lieu dans un temps excessivement court, et à peu près égal au quotient (48) de l'épaisseur traversée et de la vitesse moyenne, tandis que, par suite de la grande étendue transversale du milieu relativement aux dimensions propres du projectile, le mouvement n'aura pas pu, dans l'intervalle très-court dont il s'agit, se propager même à une assez petite distance du point d'action de la balle. Il est vrai que, dans les instants suivants, la vitesse reçue par les parties voisines de celles qui ont été enlevées, se répand, de proche en proche, dans toute l'étendue du milieu, et qu'il en résulte bientôt un mouvement de transport général ; mais il est aisé d'apercevoir par le calcul, que ce mouvement est extrêmement faible dans les hypothèses admises, même en ne tenant pas compte * de la quantité de mouvement et de la force vive communiquées à la portion, du milieu, enlevée par la balle, lesquelles sont nécessairement en déduction de la quantité de mouvement et de la force vive qui seraient transmises aux parties voisines, s'il y avait simplement *déchirement* et non *arrachement.*

Pour faire ce calcul, on devra d'ailleurs observer 1° que, d'après le principe du n° 154 qui s'applique à un instant quelconque du choc ou de la pénétration, *la quantité de mouvement perdue par la balle à l'instant où elle quitte le milieu, est égale à la quantité totale de mouvement qu'ont reçue, au même instant, les différentes parties de ce milieu;* 2° que la force vive primitive de la balle se compose (226 et suiv.) de celle qu'elle conserve en quittant le milieu, plus de celle qu'elle a communiquée à ce milieu, plus du double de la quantité de travail qui a produit la pénétration, quantité que

* C'est aussi ce que nous avons négligé de faire au n° 222, et c'est ce qui se fait ordinairement en traitant de pareilles questions, où il conviendrait, en outre, de tenir compte de la flexion, de la déformation générales et permanentes éprouvées par le milieu. La première circonstance exerce évidemment une grande influence sur les résultats du phénomène, quand la masse des parties enlevées est comparable à celle du projectile, ce qui arrive principalement pour les corps durs et cassants ; l'autre en exerce une également très-appréciable quand le milieu est assez ductile pour céder au choc sans se laisser entamer ou enlever, et que son élasticité forcée ne lui permet pas de reprendre sa forme primitive (*voy.* nos 234 et 235). Pour tenir compte d'ailleurs de ces effets dans les calculs, il faudrait ajouter à la force vive conservée par la balle, la force vive communiquée aux parties enlevées et qui ont acquis une vitesse égale à celle de cette balle, plus le double du travail nécessaire pour produire l'arrachement et la flexion persistante. Si, en outre, le projectile était déformé dans l'acte du choc, il faudrait y ajouter encore le double du travail nécessaire pour produire cette déformation ; mais il est clair, comme nous l'avons déjà observé, que l'une et l'autre de ces dernières quantités ne pourraient s'obtenir qu'à l'aide d'expériences spéciales.

nous avons appris ci-dessus à évaluer dans certains cas ; mais ce calcul exigeant, à la rigueur, l'emploi de l'algèbre, et étant plus curieux qu'utile, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

Nous nous contenterons de remarquer, d'après toutes les réflexions qui précèdent, que l'étendue du milieu, sa forme, sa masse, sa flexibilité, la nature et la force de cohésion de ses parties, jouent un très-grand rôle dans le phénomène dont il s'agit, et qu'il ne convient pas de les négliger. On voit, par exemple, que, si la surface de la feuille ou de la planche ci-dessus est seulement égale ou très-comparable à celle du projectile ; que, si d'ailleurs son épaisseur et son poids sont faibles et sa force de cohésion très-grande, non-seulement sa vitesse pourra différer peu de celle de la balle, mais qu'il pourra arriver encore qu'elle soit entraînée sans être pénétrée ni même déchirée.

234. *Autre exemple relatif aux corps durs très-fragiles.* Un phénomène, non moins digne de remarque que celui qui vient d'être expliqué, et que l'on concevrait difficilement si l'on ne tenait pas compte de la nature particulière du milieu et du temps que le mouvement met à se propager à ses extrémités, c'est celui que présente un carreau de vitre qui, frappé par une balle, est percé d'un trou circulaire très-régulier, sans que le surplus de sa surface soit endommagé, tandis que le choc du même corps, animé d'une vitesse beaucoup moindre, ou la simple pression du doigt, peuvent suffire pour le briser en morceaux. Or ce fait s'explique très-bien en observant que, non-seulement le milieu est très-consistant, très-dur, mais qu'encore il est cassant, fragile, quoique doué d'une élasticité relative assez grande (19) ; ce qui annonce que ses molécules sont très-peu susceptibles de changer de place, c'est-à-dire de s'écarter ou de se rapprocher, entre elles, sans se désunir totalement. Il en résulte, en effet, que, même avant l'instant où le mouvement ait pu se propager à une faible distance autour du centre d'impression, les molécules qui sont immédiatement en contact avec la balle, cèdent à son action, et se séparent brusquement des molécules voisines, sans les entraîner et sans qu'il survienne par conséquent une flexion générale sensible, dans la surface du verre.

Dans le cas d'un mouvement lent, au contraire, ce mouvement a le temps de se propager et la flexion générale de se produire avant que les molécules en contact soient assez écartées, des molécules voisines, pour s'en séparer ; et alors, selon la forme du carreau de verre et la manière dont il est appuyé à ses extrémités, il éclate à la fois dans tous les points où l'écartement et le rapprochement des parties ont atteint leurs limites.

Il est évident que ces raisonnements ne seraient plus applicables aux corps mous ni aux corps ductiles (1 et 8) ; car leurs molécules pouvant subir comparativement un très-grand écartement ou un très-grand rapprochement sans se désunir, ils peuvent aussi prendre une grande flexion sans se briser, soit qu'on les choque avec une certaine vitesse ou qu'on les presse lentement.

235. *Caractères qui distinguent la dureté de la ductilité.* Nous venons d'énoncer la différence essentielle qui existe entre les corps durs, qui sont tous plus ou moins cassants ou fragiles et d'ailleurs très-élastiques, et les corps mous, les corps ductiles qui le sont généralement peu. Dans ces derniers, la force de cohésion est telle qu'elle décroît lentement avec l'écartement des parties, et qu'elle peut même croître, jusqu'à un certain point, par leur rapprochement ; dans les corps très-durs, au contraire, la force de cohésion semble être à son *maximum* par suite de l'arrangement des molécules, de sorte qu'elle décroît très-rapidement pour de très-faibles compressions ou de très-faibles allongements. On sait en effet, par expérience, qu'on ne peut faire subir un changement sensible, de forme ou de volume, à un corps cassant sans le rompre ; tandis qu'en réduisant le volume des corps ductiles, en les *écrouissant* par le choc ou la simple compression (13), on augmente à la fois leur ténacité et leur densité jusqu'à un certain terme, passé lequel leur constitution semble se rapprocher de celle des corps durs et fragiles, qui, d'après les expériences récentes de Perkins, se réduisent complétement en poussière lorsque, étant contenus de toutes parts, on les soumet à des pressions de plusieurs milliers d'atmosphères ; circonstance qui peut provenir d'ailleurs de la réaction qui s'opère à l'instant où l'on cesse brusquement la compression.

On s'explique également, par là, comment les corps durs peuvent résister à des efforts de tension très-considérables, sans se rompre et sans s'allonger d'une manière sensible, tandis qu'ils cèdent, au contraire, sous le plus petit choc ; en effet, ce choc, comme nous l'avons déjà dit (170), développe toujours, en un temps extrêmement court, des quantités de travail finies, et les efforts qui en résultent n'on d'autre limite (154 et 168) que celle de la dureté même et de la force d'inertie des corps ; tandis que les pressions, sans vitesse acquise, ne peuvent développer un travail appréciable qu'autant qu'elles auraient une intensité suffisante pour vaincre cette résistance à l'instant où elle acquiert une certaine valeur par l'effet de la compression. Enfin on s'explique aussi pourquoi des vases de cristal, dont la matière est très-dure, peuvent être brisés par suite de l'augmentation ou, en quelque sorte, de l'accumulation progressive du mouvement vibratoire qui a été imprimé, à leurs molécules, au moyen d'un archet ou de la simple vibration excitée dans l'air qui les environne ; tandis que la même chose n'a pas lieu pour un vase composé d'une substance beaucoup moins dure, mais très-ductile, telle que le fer, l'argent, etc. En effet, les molécules de ces dernières substances peuvent supporter des déplacements beaucoup plus grands sans se désunir complétement.

236. *Procédé usité dans les arts pour mesurer la dureté des corps par le choc ou la pression.* Nous avons vu (220) que, pour un milieu d'une grande étendue par rapport à celle du corps qui vient le choquer, les volumes des impressions totales sont sensiblement proportionnels aux forces vives de ce corps, et que le multiplicateur k de la résistance, qui mesure la dureté du milieu ou sa consistance, était sensiblement constant pour des substances homogènes ; il en résulte donc qu'en laissant tomber, d'une même hauteur ou de hauteurs différentes, un même corps sur diverses substances, le rapport des hauteurs totales (166), d'où le corps est tombé, au volume de l'impression, ou à sa profondeur si ce volume peut être considéré à peu près comme un cylindre, pourra servir de mesure à la force de cohésion ou à la dureté du milieu. C'est, en effet, ainsi qu'on procède dans les arts, pour reconnaître la valeur comparée de cette force dans certains cas, et c'est ainsi, entre autres, que M. Vicat procède pour faire l'essai de la résistance comparée des matériaux qui entrent dans les constructions *, en mesurant les enfoncements de tiges d'acier très-dur, dans ces matériaux.

Cette méthode convient spécialement dans tous les cas où la substance à essayer présente un certain degré de consistance ; mais,

* *Voyez* son important ouvrage ayant pour titre : *Résumé sur les mortiers et ciments calcaires* ; 1 vol. in-4°, Paris 1828.

pour des corps très-mous, la simple pression produite par le poids d'une tige verticale posée doucement sur la substance (165 et suiv.), pourrait servir au même objet, si elle n'avait l'inconvénient d'exiger plus de temps, et d'offrir moins de certitude dans ses résultats que celle où l'on opère par le choc. En effet, dans ce dernier procédé, le poids du corps dur étant toujours très-faible par rapport à la résistance du milieu, l'impression arrive rapidement à sa limite, et l'on ne peut se tromper que d'une très-petite quantité, sur sa profondeur totale, en la mesurant à l'instant où la vitesse est devenue insensible. Dans l'autre procédé, au contraire, il arrive, ou que le poids de la tige excède de très-peu les premières valeurs de la résistance, et alors l'impression est extrêmement faible et s'opère avec une excessive lenteur, ou que ce poids excède de beaucoup les valeurs dont il s'agit, et alors il peut bien se faire que, la resistance croissant très-lentement dans les instants suivants, ou devenant même tout à fait constante (216), elle n'atteigne qu'au bout d'un temps fort long ou pour une impression très-profonde, une valeur qui puisse détruire complétement l'accélération de vitesse occasionnée par le poids de la tige; il peut même arriver, dans certains cas, que cette résistance soit constamment au-dessous du poids, et alors le mouvement ne s'éteindrait, pour ainsi dire, jamais, comme on en aura bientôt des exemples relatifs au mouvement des corps dans l'air.

D'ailleurs, en tenant compte de la force vive conservée par la tige à un instant quelconque, si sa valeur mérite d'être prise en considération par rapport au travail correspondant développé (166) par la gravité dans toute la descente de cette tige, et retranchant la moitié de cette valeur du travail dont il s'agit, on obtiendra encore la mesure du travail qui a produit l'impression correspondante, et dont le rapport avec le volume ou la profondeur de cette impression, pourra servir directement à apprécier (219) la résistance ou la dureté de la matière, soit qu'il s'agisse d'une même tige ou de tiges distinctes ayant la même forme et les mêmes dimensions vers la partie en contact avec le milieu. Ainsi, en surmontant la tige d'un poids assez lourd pour que la grandeur de l'impression soit exactement et facilement appréciable, on obtiendra, par cette dernière méthode, des résultats parfaitement comparables avec ceux qui résultent de l'emploi du choc; en observant de plus, avec soin, la marche ou la vitesse de la tige aux divers instants, on pourra même acquérir des notions utiles sur la loi que suit la résistance.

237. *Observations diverses sur ces procédés.* On voit, d'après ces discussions et tout ce que nous avons dit jusqu'ici concernant la résistance des milieux consistants, que les expériences, sur la dureté des corps, exigent beaucoup de précision et d'attention pour qu'on en puisse conclure des résultats rigoureux et comparatifs. Si l'on opère en particulier par le choc, il conviendra d'ajouter (166) la profondeur de l'impression à la hauteur de chute, et il faudra, dans certains cas (223 et suiv.), tenir compte de l'inflexion générale et du mouvement éprouvés par le milieu, ainsi que de la manière dont il est soutenu ou contenu : il est clair, par exemple, que, s'il s'agit d'une substance molle, elle présentera plus de résistance quand elle sera enfermée dans un vase solide, ouvert seulement à la partie supérieure, que quand elle sera simplement appuyée sur un plan de niveau, et qu'elle pourra y prendre un mouvement d'extension horizontal. On voit encore qu'il conviendra d'avoir égard à la déformation du mobile (222) quand sa dureté ne surpassera pas notablement celle du milieu, ainsi qu'à l'influence de la forme de ses faces antérieures et latérales en contact avec ce même milieu ; car la résistance varie avec cette forme, etc., etc.

Les faces latérales, entre autres, quand bien même elles forment une surface parfaitement cylindrique, éprouvent, de la part du milieu, une résistance qui croît avec la profondeur de l'impression : pour se débarrasser d'une telle cause de variation, qui ne tient aucunement à la dureté de la substance pénétrée, il conviendrait de donner aux tiges d'épreuve une base un peu plus large que le reste de ces tiges, ou de les terminer par une sorte de tête qui seule éprouverait les effets du frottement latéral, etc. Mais, quels que soient les procédés qu'on adopte, la résistance sera toujours compliquée des effets du frottement et de l'adhérence, qui sont étrangers à la dureté même du milieu ; de sorte qu'on n'obtiendra que des valeurs relatives à chaque appareil et non des valeurs absolues; on doit du moins faire en sorte que les circonstances des épreuves soient semblables sous tous les rapports, et c'est ce qu'on obtiendra, entre autres, si on ne fait varier que le poids ou la hauteur de chute des tiges, de manière à obtenir des effets à peu près identiques (165 et suiv.).

238. *Autres procédés moins parfaits pour mesurer la dureté des*

corps. Lorsque les corps sont très-durs, lorsqu'ils ont une étendue limitée ou qu'ils sont fragiles (235), tels que le verre, l'acier, les cristaux, etc., on ne peut plus faire usage des méthodes précédentes, et l'on a recours à des moyens, à la vérité plus imparfaits encore que ceux qui précèdent, mais qui suffisent aux constructeurs, aux physiciens, aux naturalistes, aux lapidaires, etc., pour classer les différentes substances, naturelles ou artificielles, suivant leur ordre respectif de dureté. L'un d'entre eux consiste à agir, sur la substance qu'on veut soumettre à l'essai, par un foret en acier, chargé d'un certain poids et auquel on imprime un mouvement de rotation, puis à comparer entre elles les profondeurs auxquelles il est descendu pour un nombre donné de tours : c'est la méthode employée d'abord par Rondelet pour mesurer la dureté comparée des pierres, puis en dernier lieu, par M. Vicat, pour éprouver celle des mortiers, des ciments, etc. Un second moyen est celui qu'emploient les ouvriers, qui essayent les corps avec la lime, les burins et les outils tranchants en général. Enfin la méthode principalement en usage parmi les naturalistes et les lapidaires, consiste à faire glisser ou frotter les corps entre eux, en les pressant de manière à reconnaître celui qui raye, entame ou use l'autre : c'est ainsi qu'on reconnaît que le diamant est le plus dur des corps connus, que l'acier est plus dur que le verre, le verre plus que le fer, le cuivre, etc.

Il est évident que ces divers moyens ne sont pas, dans le fond, aussi différents qu'ils paraissent l'être au premier aspect, et qu'on pourrait obtenir, de tous, des résultats presque aussi rigoureux que de celui qui a été exposé n° 236, si on avait l'attention de faire les essais dans des circonstances parfaitement semblables, sous le rapport de la forme, des dimensions des parties agissantes, de la profondeur de l'impression, et qu'on n'oubliât pas d'ailleurs de tenir compte exactement de la force avec laquelle on comprime chaque corps sur l'autre, et de celle qui est nécessaire pour le faire cheminer avec une vitesse donnée. Mais nous aurons occasion de revenir plusieurs fois encore sur cet important sujet, à l'occasion de la résistance que les corps opposent à leur rupture, à leur flexion, à l'action des outils, etc.

EXAMEN DES PRINCIPALES CIRCONSTANCES DU MOUVEMENT HORIZONTAL ET VERTICAL DES CORPS DANS LES FLUIDES, ET SPÉCIALEMENT DANS L'AIR.

239. *Considérations préliminaires.* Nous n'avons jusqu'ici donné que de simples aperçus (113 et suiv.) sur la manière dont l'air agit, contre les corps, pour modifier et ralentir leur mouvement; les données des nos 202 et suiv., jointes aux principes fondamentaux qui ont été exposés dans les *Préliminaires*, nous mettent en état d'apprécier et de calculer même rigoureusement, les lois de ce mouvement pour deux circonstances importantes : celle où le corps serait lancé, avec une certaine vitesse, dans la direction d'un plan horizontal solide qui supporterait, détruirait, à chaque instant, son poids ou l'action de la pesanteur, et celle où il serait lancé ou tomberait naturellement, dans la direction de la verticale, sans être aucunement soutenu contre cette même action. Nous apprendrons plus tard à calculer les lois du mouvement des corps qui, tels que les bombes et les boulets, sont lancés obliquement à l'horizon, et décrivent des courbes, au lieu de lignes droites, par l'action combinée et non directement contraire des différentes forces. On devra d'ailleurs remarquer que tous nos calculs et nos raisonnements demeureraient exactement applicables au cas où le corps serait mis en mouvement dans un fluide autre que l'air atmosphérique, par exemple dans l'eau, en y introduisant les modifications nécessaires et qui sont relatives à la densité, à la résistance de ce fluide.

Pour résoudre la question dans les cas particuliers et très-simples dont il s'agit ici, il est d'abord nécessaire de rechercher, pour chacun d'eux, la valeur de la force motrice ou dynamique (130) qui accélère ou retarde la vitesse du mouvement. Nous conserverons d'ailleurs toutes les dénominations des nos 199 et suiv., et nous continuerons de représenter par F, la valeur, en kilogrammes, de la force totale dont il s'agit, par P le poids, par $M = \frac{P}{g}$ la masse du corps, et par V le degré de vitesse qu'imprime, à ce même corps, la force F dans le temps infiniment court *t*.

240. *Valeur de la force motrice dans le cas où le corps se meut sur un plan de niveau.* L'action de la pesanteur, sur le mobile, étant détruite par le plan qui le supporte, la force motrice se réduit alors

uniquement à la résistance du milieu, qui correspond à la vitesse V possédée à chaque instant par ce mobile; on a donc (211 et 215), par exemple, $F = R = 0,06253kAV^2 = 0,0011kV^2$ kil., pour le cas particulier du boulet du n° 215 et l'air atmosphérique dont il s'agit ici spécialement. On voit, par là, que le corps ayant été lancé avec une certaine vitesse initiale, cette vitesse sera de plus en plus diminuée et le mouvement ralenti, dans chacun des instants egaux à t, suivant une loi qui sera donnée (130) par la formule

$$v = \frac{F}{M} \times t = \frac{gF}{P} \times t = \frac{gR}{P} \times t = \frac{9^m,8088 \times 0,0011kV^2}{12^k,68}$$

$$= 0,00085V^2 \times t, \text{ puisque } P = 12^k,68 \text{ (215).}$$

Mais, comme la résistance R décroît très-rapidement avec la vitesse V du projectile, le mouvement ne sera pas uniformément retardé (107 et 112); il le sera, de moins en moins, pour des instants t égaux et très-petits, ainsi que le démontre la formule ci-dessus, qui donne les diminutions v de la vitesse pour chacun de ces instants. De plus, comme cette diminution est une fraction d'autant moindre de la vitesse V, possédée à cet instant, que cette vitesse est plus faible, on voit qu'à la rigueur, le mouvement ne pourra jamais s'éteindre complétement, quoiqu'il aille sans cesse en diminuant d'intensité; en d'autres termes, ce n'est qu'après un temps excessivement long que la vitesse sera réduite à zéro.

241. *Ce n'est qu'après un temps infini, que la vitesse s'éteint ou parvient à sa limite, quand la force motrice diminue sans cesse.* Pour démontrer ce principe d'une manière positive, et qui s'applique généralement à tous les cas où la force motrice tend à s'affaiblir, de plus en plus et indéfiniment, sans jamais changer le sens de son action; nous observerons que la formule, citée dans le numéro précédent, donne également, pour le temps t qu'une telle force met à imprimer au corps le petit degré de vitesse v, la valeur

$$t = \frac{M}{F} \times v = \frac{P}{gF} \times v,$$

laquelle indique qu'à mesure que F diminue, la valeur de la fraction $\frac{M}{F}$ croissant indéfiniment, il faut bien aussi que le temps t, nécessaire pour imprimer un même degré de vitesse v, devienne de plus en plus grand, et finisse par devenir énorme même pour de très-petites valeurs de v. Quand, par exemple, F sera réduit à $0^k,00000001$, pour le cas du boulet ci-dessus dont le poids $P = 12^k,68$, le temps t, nécessaire pour diminuer ou pour augmenter la vitesse de la quantité $v = 0^m,001$, ou de 1 millimètre seulement par seconde, devra être de $\frac{12^k,68 \times 0^m,001}{9^m,81 \times 0^k,00000001} = \frac{12680000}{781} = 129256''$ ou environ 36 heures. On voit donc que la vitesse du mouvement ira sans cesse en croissant ou en diminuant d'intensité, sans jamais atteindre sa valeur limite, sa plus grande valeur, ou sans jamais devenir complétement nulle quoiqu'au bout d'un temps plus ou moins long, elle acquière une valeur qui diffère extrêmement peu de celle vers laquelle elle converge sans cesse.

Ainsi règle générale : *Toutes les fois que l'action d'une force motrice ou de pression ordinaire, agissant constamment ou sans interruption, sur un corps, soit pour augmenter, soit pour diminuer, à chaque instant, son mouvement, varie avec la vitesse même de ce mouvement, de manière à décroître sans cesse par une loi continue, ce n'est qu'au bout d'un temps infini qu'elle aura anéanti complétement la vitesse du corps, ou qu'elle lui aura fait acquérir une vitesse constante, une vitesse qui cesse désormais de changer, quoiqu'au bout d'un temps, souvent fort court, le corps parvienne sensiblement à l'un ou à l'autre de ces états.*

Ce principe est, en quelque sorte, évident par lui-même, puisqu'une force qui agit toujours fait nécessairement varier la vitesse à chaque instant, quelle que soit sa petitesse; mais il est clair aussi que, si son intensité ne dépendait pas uniquement de la vitesse, et qu'elle pût devenir nulle au bout d'un temps plus ou moins long, le corps acquerrait, au bout de ce temps même, la limite de son mouvement; or nous verrons bientôt qu'il existe de semblables forces motrices dans la nature.

242. *Réflexions sur la manière dont le mouvement s'éteint ou s'accomplit à la surface de la terre.* S'il paraît quelquefois, comme dans le cas de la communication du mouvement par le choc, par le ressort des gaz de la poudre, etc., que des forces motrices décroissantes impriment aux corps toute leur vitesse, après un temps souvent fort court, c'est qu'en effet ces forces, par elles-mêmes excessivement grandes, font, au bout d'un très-petit temps, parvenir

les corps à un état de mouvement qui approche beaucoup de celui qui répond à la limite ; c'est que les forces motrices ne suivent pas exactement les lois de décroissement que nous leur supposons à la première vue ; c'est que leurs effets se compliquent des effets d'autres forces qui acquièrent de l'influence à mesure que celle des premières va en s'affaiblissant, ou plutôt c'est que nous ne tenons pas un compte exact de toutes les forces, distinctes de l'inertie, qui agissent sur le corps ; car la force motrice, dont nous entendons parler ici, est le résultat combiné de toutes ces forces ; elle produit seule (130) le mouvement, et vainc seule l'inertie ou la force dynamique. C'est qu'enfin nous admettons volontiers, pour la facilité des considérations, que les corps, en se séparant après leur réaction mutuelle ou après leur choc, sont parvenus à un état de mouvement stable ; qu'ils ont acquis toute leur vitesse finale, et ne sont plus sollicités par aucune force ; tandis que, dans la réalité, ils restent encore soumis à l'action des forces moléculaires ou de ressort qui ont été mises en jeu (223 et suiv.) dans leur intérieur, et qui ne rentrent dans leur état d'équilibre ordinaire, qu'après que chaque corps a exécuté une infinité d'oscillations autour de cette position d'équilibre.

Au surplus, il faut bien le reconnaître d'après le résultat des belles expériences de l'illustre Coulomb et de beaucoup d'autres observateurs habiles, il existe des forces motrices et des résistances, telles que la pesanteur, les divers frottements, l'adhérence des corps en contact, la résistance des corps solides à la compression, à la pénétration, etc. (216), qui sont indépendantes de la vitesse du mouvement, et qui demeurent même constantes quelle que soit cette vitesse. Or tous les mouvements qui s'accomplissent à la surface de notre globe, étant nécessairement soumis, tôt ou tard, à l'action de semblables forces, il arrive toujours que ces mouvements s'anéantissent complétement, ou qu'ils parviennent à leur limite en un temps qui n'est jamais infiniment long, et qui même est en général fort court.

Voilà aussi pourquoi le mouvement ne peut s'entretenir ici-bas, dans les corps, sans une dépense continuelle de travail ou d'action ; et voilà pourquoi le *mouvement perpétuel*, que rêvent des hommes privés des premières notions de la Mécanique et de la Physique, est une véritable chimère, quand on le recherche ailleurs que dans l'action immuable des forces de la nature, qui font mouvoir les corps célestes dans un espace vide ou privé de toute résistance, et qui, sur la surface de la terre, servent, par leur renouvellement périodique plus ou moins régulier, à faire fonctionner nos machines de diverses espèces.

243. *Idée de la manière dont le mouvement horizontal des corps peut s'anéantir complétement, même en un temps fort court.* Nous avons supposé ci-dessus (240) que le mouvement horizontal du corps était uniquement retardé par l'effet de la résistance de l'air, qui, diminuant sans cesse d'intensité avec la vitesse, ne peut jamais parvenir à réduire entièrement le corps au repos; mais nous n'avons pas tenu compte d'un autre genre de résistance qui naît de ce que ce corps ne peut se mouvoir horizontalement sans être soutenu par un plan matériel qui détruise, à chaque instant, l'action de la gravité sur ses propres parties, et sans presser ce plan materiel avec un effort égal à son poids; d'où résulte une compression réciproque qui use les deux corps, ou altère, plus ou moins promptement, leur forme aux dépens de la force vive de celui qui est mobile. Or, les expériences de Coulomb, que nous ferons connaître plus tard, prouvent que la résistance qui provient de cette cause, est indépendante de la vitesse, ou reste la même à chaque instant, et qu'elle est une fraction déterminée, bien qu'assez faible, du poids du mobile, soit qu'il roule ou ne fasse simplement que glisser en cheminant en avant.

Nommant donc f cette petite fraction, nous aurons (240), $F = R + fP$; de sorte que, quelle que soit la vitesse V du corps à un certain instant, et par conséquent la valeur de R, la force motrice F, qui ralentit le mouvement, fera perdre à ce corps, dans chaque temps t, une portion de vitesse qui sera au moins égale à $\frac{fP}{M} \times t = fg \times t$, ou qui serait exactement fgt, si la résistance de l'air ne venait l'augmenter; et, comme ici f, ou le frottement, est constant, on voit bien qu'au bout d'un temps plus ou moins long T, il aura détruit, à lui seul (112), une vitesse fgT, qui pourra être une fraction notable de celle que possédait primitivement le corps, ou lui être même tout à fait égale : supposant, par exemple, la vitesse initiale de 500^m, et $f = \frac{1}{30}$ seulement, on aura, pour calculer le temps T, qui répond à la fin du mouvement,

$$500^m = \tfrac{1}{30}\, 9^m{,}81 \times T = 0^m{,}327 \times T; \quad \text{d'où } T = 1529'',$$

environ $25''\frac{1}{2}$. Mais, attendu que la résistance de l'air joint son action à celle du frottement du plan, et que cette action a une intensité très-grande dans les premiers instants (215); on voit qu'en réalité, il faudra un temps considérablement moindre encore pour que le mouvement soit complétement anéanti, comme on l'observe en effet dans tous les cas analogues.

Ce qui suit présente l'exemple de phénomènes de mouvement où la même circonstance se reproduit par l'action constante de la pesanteur.

244. *Valeur de la force motrice dans le cas où le corps est lancé verticalement de bas en haut.* Il est évident que le mouvement est à la fois retardé alors, et par la résistance R du milieu, et par l'action de la pesanteur sur le corps, ou de son poids P; mais il convient ici (41, 113 et suiv.) de diminuer ce poids de celui du volume d'air qu'il déplace, puisqu'en vertu de la pression atmosphérique extérieure, il est poussé, de bas en haut, avec une force mesurée par ce dernier poids, que nous nommerons P', et qu'il sera facile de calculer connaissant la densité p du fluide (211). Nous aurons donc (202)

$$F = R + P - P' = kp\frac{AV^2}{2g} + P - P'.$$

S'il s'agit, par exemple, du boulet du n° 215, en mouvement dans un air dont la densité est $1^k,227$, on aura, attendu que, sous le même volume, les poids sont comme les densités (33 et suiv.), et qu'ici la densité de la fonte est censée de 7207^k,

$$P' = \frac{1^k,227}{7207^k}P = 0,00017\ P = 0,00017 \times 12^k,68 = 0^k,0022,$$

quantité excessivement petite par rapport au poids propre du boulet, et qu'on peut, sans inconvénient, négliger dans le cas actuel; de sorte qu'on aura simplement (240)

$$F = 0,0011kV^2 + 12^k,68.$$

Le mouvement sera donc alors de plus en plus retardé, comme dans le cas qui précède (243), mais d'une manière bien autrement rapide; et l'on voit que, la force retardatrice conservant, à tous les instants, une valeur qui surpasse $12^k,68$, il faudra bien que le mouvement finisse par s'éteindre complétement, même en un temps fort court.

Mais, si le corps, au lieu de la densité 7207^{kil}, en avait une beaucoup moindre et comparable à celle de l'air, ou si c'était une boule creuse extrêmement légère, remplie d'un gaz quelconque, il ne serait évidemment plus permis d'en agir ainsi. Dans le cas, par exemple, d'un ballon, en taffetas verni, gonflé par du gaz hydrogène dont la densité est environ le $\frac{1}{15}$ de celle de l'air (40) ou $\frac{1}{15}\, 1^k,227 = 0^k,082$ pour 1^{mc}, le poids de l'enveloppe, réuni à celui du gaz qu'il contient, c'est-à-dire P, pourrait même devenir moindre que le poids du volume d'air déplacé ; et alors, non-seulement il ne faudrait pas imprimer de vitesse initiale à ce ballon pour le faire partir, mais encore il tendrait, par lui-même, à s'élever avec une force mesurée par $P' - P$, et qui lui imprimerait un mouvement uniformément accéléré (108), si la résistance R ne venait aussitôt le ralentir ; la force motrice totale serait donc alors

$$F = P' - P - R = P' - P - kp\,\frac{AV^2}{2g}.$$

245. *Exemple particulier relatif à l'ascension verticale des ballons.* Supposons, fig. 57, un ballon sphérique de 10^m de diamètre, son volume sera à très-peu près $523^{mc},6$; par conséquent le poids du volume d'air qu'il déplace sera $523^{mc},6 \times 1^k,227 = 642^k,5$, et celui du gaz hydrogène qu'il contient $\frac{1}{15}\, 642^k,5 = 42^k,8$ environ. Si donc le poids de son enveloppe, de la nacelle en osier qui est suspendue au-dessous et de tout le surplus de son équipage équivaut à $399^k,7$, ce qui suppose que la nacelle porterait des objets fort lourds, tels que des hommes, etc., le ballon serait enlevé avec une force constante de $642^k,5 - 42^k,8 - 399^k,7 = 200^{kil}$, qui sera diminuée, à chacun des instants du mouvement ascensionnel, de toute la résistance opposée par l'air, laquelle sera ici, à vitesses égales (215), les $\left(\frac{10^m}{0^m,15}\right)^2 = \left(\frac{200}{3}\right)^2 = \frac{40000}{9}$ de celle $0,0011\, kV^2$ qui a été trouvée pour le boulet de $0^m,15$ de diamètre, attendu que les résistances sont sensiblement entre elles comme les carrés des diamètres ; c'est-à-dire, en un mot, qu'on aura

$$R = \tfrac{40000}{9} \times 0,0011\, RV^2 = \tfrac{44}{9}\, kV^2 = 4,89\, kV^2 \text{ environ,}$$

$$\text{et } F = 200^k - 4,89\, kV^2.$$

On voit que le ballon partira, de terre, avec une vitesse d'abord nulle, et qui augmentera, de plus en plus, tant que la résistance

$4,89\,kV^2$ sera moindre que 200^k ; mais, quand elle égalera ce poids, c'est-à-dire quand la vitesse V approchera de 8^m par seconde, la valeur de k étant alors (210) d'environ 0,64, et la force motrice F devenant nulle, le ballon conservera, en vertu de l'inertie (55), constamment la vitesse de 8^m qu'il possède à cet instant, ou se mouvra *uniformément*, avec ce degré de vitesse, tant que les circonstances resteront les mêmes, c'est-à-dire, tant que la densité de l'air et la force de la pesanteur ne changeront pas pour les diverses positions du ballon, en effet il est clair qu'alors F restera aussi constamment nulle. Or c'est ce qu'il n'est pas possible d'admettre (37 et 61), même pour les ascensions les plus habituelles des voyages aérostatiques, d'autant plus que l'expérience a appris que la température de l'air, qui influe notablement sur sa densité (211), diminue, comme la gravité, à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface des plaines. En effet, la hauteur de ces ascensions surpasse généralement 2000 à 3000 mètres; et l'on a vu, dans un célèbre voyage entrepris uniquement pour le progrès des sciences, un célèbre physicien français, M. Gay-Lussac, s'élever verticalement dans les airs à une hauteur de 7015^m au-dessus du niveau des mers; ce qui est la plus grande élévation qu'aient encore pu atteindre les hommes.

Ainsi les calculs qui précèdent ne peuvent concerner que des élévations médiocres, et qui ne surpasseraient pas, par exemple, 300 à 400 mètres de hauteur verticale; dans toute autre circonstance, on ne devra les considérer que comme de simples approximations servant à donner une idée des phénomènes, et qui souvent pourront suffire pour l'objet qu'on se propose. Il ne serait pas impossible, à la rigueur, de tenir compte de la variation de densité des couches atmosphériques, qui exerce le plus d'influence; on sait la calculer assez exactement quand on connaît la température et la pression barométrique au niveau de la terre, et pour un lieu déterminé; mais ce serait nous jeter dans des calculs qui ne seraient pas ici à leur place, d'autant plus qu'ils n'auraient d'utilité que pour la question des ballons *, et qu'on peut se dispenser d'y avoir égard pour celle des projectiles qui, tels que les bombes, sont

* Nous rappellerons, à cette occasion, que les ballons aérostatiques furent découverts, en 1782, par le célèbre Montgolfier d'Annonay, et que Pilatre du Rosier, physicien distingué, né à Metz, périt, en 1785, victime de son zèle pour les progrès d'un art qui était encore dans son enfance, lorsqu'il tenta de franchir le détroit qui sépare la France de l'Angleterre. Il fut aussi le premier qui, au mois d'octobre 1783, c'est-à-dire quelques

élevés dans l'air, par la force de la poudre, à des hauteurs généralement médiocres.

246. *Calcul de la force motrice dans le cas où le corps est lancé verticalement, de haut en bas, ou tombe par son propre poids.* Cette force tend nécessairement à accélérer le mouvement du corps, toutes les fois que la densité de ce dernier est très-grande par rapport à celle du fluide : elle se compose évidemment alors du poids P de ce corps dans le vide, poids qui mesure proprement l'action de la gravité sur ses différentes parties, diminué et du poids P′ du volume d'air qu'il déplace, et de la résistance R qu'il éprouve, à chaque instant, de la part de l'air extérieur; on aura donc, pour le cas dont il s'agit,

$$F = P - P' - R = P - P' - kp\frac{AV^2}{2g},$$

et le mouvement s'accélérera continuellement, tant que le poids P — P′ du corps dans l'air surpassera la résistance R, qui lui est opposée. Mais, de même que pour le cas ci-dessus des ballons, il s'accélérera de moins en moins, attendu que la résistance R croîtra rapidement avec la vitesse, et il arrivera bientôt un instant où le mouvement ne s'accélérera, pour ainsi dire, plus du tout, quand R approchera d'être égale à P — P′, ou quand la vitesse différera très-peu de celle qui est donnée, par l'égalité

$$P - P' = R = kp\frac{AV^2}{2g}, \text{ ou } V^2 = \frac{2g(P - P')}{kpA},$$

au moyen de l'extraction de la *racine carrée* du quotient de $2g(P - P')$ par kpA. Ainsi le mouvement tendra sans cesse, dans le cas dont il s'agit, à devenir uniforme, et il le deviendrait rigoureusement si le mobile pouvait effectivement acquérir la vitesse ci-dessus qui en est la limite.

Ces circonstances supposent essentiellement que P — P′ surpasse R, dès l'origine du mouvement ou à l'instant du départ du

mois seulement après l'époque où les frères Montgolfier firent leur brillante expérience d'Annonay, eût le courage de se frayer une nouvelle route dans les airs, à l'aide des ballons. La ville de Boulogne-sur-Mer, près de laquelle eut lieu la chute de du Rosier, a fait élever, à sa mémoire, un monument modeste naguère en ruine, et que la Société académique de cette même ville vient généreusement de restaurer, en honorant ainsi une seconde fois, le courage malheureux d'un savant qui lui fut étranger.

mobile ; s'il en était autrement, et que P fût d'ailleurs plus grand que P', comme on vient de le supposer, la vitesse serait évidemment diminuée ou retardée par l'action d'une force

$$F = R - (P - P'),$$

et le serait continuellement jusque vers l'instant où, la résistance R, diminuant de plus en plus, deviendrait telle qu'ajoutée à P', elle serait simplement égale au poids P du corps dans le vide ; ce qui arriverait pour la vitesse donnée par l'égalité

$$P - P' = R = kp\frac{AV^2}{2g}, \text{ ou } V^2 = \frac{2g(P - P')}{kpA}.$$

Cette vitesse limite étant la même que celle du cas précédent quand le corps et le milieu sont aussi les mêmes, on voit que, *quelle que soit la vitesse avec laquelle on lance, du haut en bas et dans la direction verticale, un corps donné, dans un fluide indéfini dont la densité est moindre que la sienne propre, ce corps tendra toujours à acquérir la même vitesse limite, et il l'atteindrait sensiblement, au bout d'un temps plus ou moins long, si aucun obstacle étranger ne venait suspendre tout à coup son mouvement.*

Enfin, si la densité de l'air surpassait celle du mobile, ou que P' fût plus grand que P, la vitesse serait de plus en plus retardée tant par l'action de P' que par l'action de la résistance R, de sorte qu'on aurait, dans le même cas,

$$F = R + P' - P;$$

quelle que fût la valeur de cette résistance ou de la vitesse.

La valeur de R + P' surpassant constamment P, il est clair que le mouvement finira par s'éteindre, comme dans le cas du nº 244 ; et, attendu qu'on aura, à cet instant, $V = 0$, $R = 0$, $F = P' - P$, on voit que le corps tendra aussitôt à rebrousser chemin, ou à remonter en vertu d'une force motrice

$$F = P' - (P + R);$$

il suivra donc dès lors absolument les mêmes lois que celles qui se rapportent à l'ascension des ballons (244 et 245) ; ce qui nous dispense de poursuivre davantage l'examen de son mouvement. Ce cas est d'ailleurs analogue à celui que présente un corps dense, lancé, de bas en haut, avec une certaine vitesse, et qui, parvenu à sa plus grande élévation, redescend ensuite en vertu de l'action prépondérante de son poids sur celui du volume d'air qu'il déplace.

247. *Exemples de calcul relatifs à la plus grande vitesse de chute des boulets.* Dans le cas du boulet du n° 215, le mouvement deviendra uniforme à l'instant où l'on aura

$$12^{k},68 = 0,0011\, kV^2,$$

puisqu'on peut négliger alors P′ vis-à-vis de P (244); or on voit de suite, d'après la table du n° 215, que cette condition est satisfaite pour une vitesse d'à peu près 126^{m} par seconde, répondant (210) à la valeur 0,73 du multiplicateur k de la résistance. Telle est donc aussi la plus grande vitesse qu'un boulet, de ce poids et de cette dimension, puisse acquérir en tombant verticalement dans l'air. Cette vitesse serait évidemment moindre pour un boulet d'eau congelée ou de bois de même diamètre; car la résistance, à vitesse égale, resterait toujours la même, tandis que le poids P serait diminué.

Par exemple, pour un boulet en bois d'orme dont la densité est environ (35) le neuvième de celle de la fonte de fer, on aurait $\frac{1}{9}\, 12^{k},68 = 0,0011\, kV^2$, et la vitesse limite V serait un peu supérieure à $\frac{1}{3}\, 126^{m} = 42^{m}$, ou plus exactement à $43^{m},50$, attendu que la valeur de k est ici (210) 0,69 au lieu de 0,73. Un boulet de platine, ayant de même 15^{c} de diamètre, tomberait, au contraire, avec une vitesse qui surpasserait 126^{m}, à peu près de $0,73 \times 126 = 92^{m}$. Enfin, pour des boulets, en fonte de fer, qui auraient un diamètre au-dessous de 15^{c}, la plus grande vitesse de chute serait nécessairement moindre que 126^{m} : pour un boulet de 3^{c} de diamètre, par exemple, on aurait (215) l'égalité

$$\frac{1}{125}\, 12^{k},68 = \frac{1}{25}\, 0011\, k\, V^2, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{5}\, 12^{k},68 = 0,0011\, k\, V^2;$$

ce qui donne, en supposant d'abord approximativement $k = 0,7$,

$$V^2 = \frac{2,536}{0,00077} = 3293^{mq},5;$$

d'où on tire, en extrayant la racine carrée, $V = 57^{m},4$ pour la plus grande vitesse de chute; et, comme, d'après la table du n° 210, la valeur de k relative à cette vitesse est effectivement 0,70, il n'y a pas lieu à recommencer le calcul pour obtenir un plus grand degré d'approximation dans les résultats.

248. *Observations sur le mouvement des parties très-fines des corps.* Ceci explique pourquoi les poussières extrêmement ténues (7) tombent, dans l'air et à plus forte raison dans l'eau, avec une si grande lenteur, quoique leur densité surpasse de beaucoup celle du fluide qui les renferme ; nos formules peuvent même servir à calculer quel devrait être le diamètre d'un grain sphérique d'une substance connue, pour que la vitesse de chute ne surpassât jamais une vitesse donnée : par exemple, pour un grain de fer coulé tombant dans l'air, dont la vitesse limite devrait être seulement de $1^{mil} = 0^m,001$, et dont n serait le rapport du diamètre à celui du boulet de 15^c, on aura (210)

$$n^3 \times 12^k,68 = n^2 \times 0,0011 \times 0,59 \times (0,001)^2,$$

ou $$12^k,68\ n = 0,000000000649;$$

et par conséquent $n = \dfrac{0,000000000649}{12,68} = 0,00000000005$ environ;

donc enfin le diamètre du grain

$$= 0,00000000005 \times 0^m,15 = 0^m,0000000000075,$$

quantité moindre qu'un cent-millionième de millimètre.

Les mêmes considérations peuvent aussi servir à expliquer pourquoi les courants d'air entraînent les poussières, d'un même corps, d'autant plus loin qu'elles sont plus ténues ; tandis que ces mêmes parties sont, à l'inverse, celles qui vont le moins loin quand on les lance, dans un air en repos, avec une certaine vitesse horizontale ou ascensionnelle. Enfin on se rendra parfaitement raison de l'énorme différence qui existe entre les vitesses de chute de plusieurs corps, qui, sous le même volume, ont des densités ou des poids également très-distincts : la diversité des formes en apporte d'au moins aussi grandes comme on va le voir.

249. *Calcul de la plus grande vitesse de descente des parachutes.* On sait que les parachutes, à l'aide desquels les aéronautes peuvent abandonner leurs ballons et descendre, sans danger, des régions supérieures de l'atmosphère, sont à peu près disposés comme les parapluies ordinaires, fig. 58, si ce n'est qu'ils reçoivent des dimensions beaucoup plus grandes, et qu'ils portent, à l'extrémité inférieure de leur tige verticale, une gondole ou petite nacelle en osier propre à recevoir le voyageur. On peut juger, d'après ce qui a été

observé nº 204, que l'ouverture la plus avantageuse du cône formé par la surface du parachute est celle qui donne à ce cône une hauteur égale environ au $\frac{1}{3}$ ou au $\frac{1}{4}$ du diamètre de sa base ; considérant donc (211) la résistance $R = 0,06253\ kAV^2$ kilog., que présenterait la surface concave d'un tel parachute ayant 8^m de diamètre ou 4^m de rayon à sa base, on aura (203 et 204)

$$A = 3,1416 \times 4^m \times 4^m = 50^{mq},2656, \qquad k = 2,50 + \tfrac{1}{5}\ 2,5 = 3,$$

au moins, et par conséquent

$$R = 0,06253 \times 3 \times 50^{mq},2656\ V^2 = 9,4293\ V^2 \text{ kilog.}$$

Supposant que le poids du voyageur et de tout le surplus de l'équipage soit de 85^{kil} environ, on aura, pour déterminer la plus grande vitesse qu'acquerra le parachute, dans sa descente, la condition $9,4293\ V^2 = 85^{kil}$, ou $V^2 = 9^{mq}$ environ ; d'où la vitesse cherchée $V = 3^m$ par seconde. Une telle vitesse, en supposant même qu'elle pût être atteinte par le parachute, serait assez faible pour prévenir tout accident à l'instant où la gondole toucherait terre.

Nous ajoutons *en supposant qu'elle pût être atteinte,* car nous n'avons pas tenu compte de la résistance de la gondole, des tiges du parachute, etc., et les calculs ne se rapportent qu'à la plus grande vitesse de chute que puisse acquérir le système, à celle qui répond à l'instant où le mouvement est devenu entièrement uniforme (245 et suiv.) Or il est aisé de se convaincre que, dans la réalité, les corps qui tombent ou s'élèvent verticalement dans l'air ne peuvent, ainsi que nous l'avons déjà insinué (246) et conformément au principe du nº 241, jamais parvenir rigoureusement à cet état de mouvement, quoiqu'ils en approchent sans cesse, et que, dans certains cas où la force motrice F possède une grande valeur par rapport au poids P ou à la masse M du corps, ils puissent en approcher, de très-près, au bout d'un intervalle de temps même médiocre.

250. *Démonstration géométrique de l'impossibilité que le mouvement continu atteigne rigoureusement une parfaite uniformité.* Quoique ce fait résulte immédiatement des discussions du nº 241 déjà cité, il ne sera pas superflu de le démontrer directement, sans calculs et par les seules considérations de la Géométrie, d'autant plus que le principe est important, et s'applique indistinctement à tous les cas où le mouvement tend, sans cesse, à se régulariser par l'action

d'une force dynamique qui varie, en même temps que la vitesse, suivant une loi exactement continue et mathématique.

Traçons (fig. 59 et 60), une courbe ABC dont les abscisses Ot', Ot'', Ot''',.... représentent (50) les temps successivement écoulés depuis l'origine du mouvement, qui répond ici au point O, et dont les ordonnées $t'v'$, $t''v''$, $t'''v'''$, ... correspondantes représentent, au bout de ces temps respectifs, les vitesses acquises par le point du corps où est censée appliquée la force motrice ; il est clair que, si cette force motrice et par conséquent la vitesse augmentent (fig. 59), ou diminuent (fig. 60), constamment, par succession insensible et par une loi rigoureusement continue, la courbe s'éloignera ou s'approchera aussi, sans cesse, de l'axe des abscisses OT. Si donc la vitesse doit devenir, à la fin, constante ou uniforme, la courbe devra également, dès lors, se confondre avec une ligne droite parallèle à OT; mais, comme une courbe diffère essentiellement, dans sa nature, d'une simple ligne droite ; comme son tracé géométrique, sa loi mathématique sont essentiellement distincts du tracé et de la loi de celle-ci ; comme enfin nous avons supposé que le décroissement de la force motrice est essentiellement continu et suit une loi invariable, il faut nécessairement admettre aussi que la courbe ABC des vitesses ne dégénère jamais, rigoureusement parlant, en une simple ligne droite, mais bien qu'elle en approche de plus en plus et indéfiniment ; de sorte, par exemple, qu'au bout d'un temps excessivement long, ou à une distance excessivement grande de l'origine O, les vitesses ou les ordonnées diffèrent aussi extrêmement peu de celles qui appartiennent à une droite DE parallèle à l'axe OT des temps ou des abscisses. Or cette droite est ce qu'on nomme une *asymptote* dans la Géométrie des courbes, et c'est la valeur constante OD de ses ordonnées que nous avons, tout à l'heure, déterminée pour le cas du mouvement vertical des corps dans l'air.

Telle est l'interprétation géométrique très-simple du fait qui nous a d'abord été signalé par le calcul et le raisonnement, fait qui se reproduit dans une infinité de circonstances, parce qu'il existe aussi une infinité de lois, une infinité de courbes qui donnent lieu à des *asymptotes*, dont le caractère général est, comme on voit, de *s'approcher continuellement et indéfiniment d'une certaine branche de courbe, sans néanmoins pouvoir jamais l'atteindre*, et que l'on considère aussi quelquefois comme de véritables tangentes au point situé à l'infini sur une telle branche.

Les *hyperboles*, entre autres *, dont nous avons rencontré un exemple particulier dans le n° 181, possèdent deux asymptotes pareilles, quand on les trace dans toutes leurs parties ; car elles ont aussi deux branches infinies ; mais toutes les courbes qui ont de telles branches n'ont pas pour cela des asymptotes : la *parabole*, entre autres, est dans ce cas **. On doit voir, par là, combien l'étude des courbes géométriques est utile pour la Mécanique, puisque chacune de leurs propriétés répond essentiellement aussi à une propriété relative à une des lois du mouvement des corps ou de l'action des forces motrices.

251. *Réflexions sur la manière dont les moteurs communiquent le mouvement aux machines.* Quand un moteur animé ou inanimé est appliqué à une machine industrielle quelconque, il commence par la mettre en mouvement avec un effort qui d'abord est très-grand (148), il détruit à la fois, au point où il opère immédiatement, et la réaction provenant de l'inertie des pièces de la machine et celle des diverses résistances nuisibles ou utiles ; la force dynamique F, qui accélère le mouvement, est donc alors égale à l'excès de l'effort total du moteur sur l'effort que lui opposent directement celles des résistances dont il s'agit, qui sont indépendantes de l'inertie. Or, comme ces résistances ou restent sensiblement les mêmes à chaque instant, ou augmentent de plus en plus avec la vitesse, et que l'effort du moteur décroît, au contraire (148), de plus en plus, il en résulte que le mouvement s'accélère, de moins en moins, à peu près comme dans les cas qui précèdent, de sorte qu'il tend sans cesse à se régulariser ou à devenir uniforme ; mais ce n'est qu'au bout d'un temps, souvent fort long, que la vitesse atteint sensiblement la limite de sa valeur, à laquelle elle ne parvient même jamais mathématiquement parlant.

Toutefois les moteurs animés différant essentiellement des autres en ce qu'ils ont la faculté de maintenir, pendant un certain temps, l'intensité entière de leur effort primitif, malgré l'augmentation de la vitesse, puis de le diminuer tout à coup, et de le réduire à celui qui est strictement nécessaire pour vaincre les résistances étrangères à l'inertie, ou pour entretenir la vitesse du mouvement au

* Consultez à ce sujet la 13e leçon du *Cours de Géométrie* de M. Dupin, 1er vol., pag. 314, ou la page 92 de la *Géométrie des courbes* de M. Bergery.

** Voyez les ouvrages cités dans la note ci-dessus, pages 321 et 103 respectivement.

point où elle est parvenue à un certain instant, on voit que la proposition ci-dessus n'est plus exactement applicable, et que la machine peut atteindre, au bout de très-peu de temps, l'état moyen de mouvement qu'elle doit conserver. Or la même chose aura lieu (241) toutes les fois que la force motrice suivra une loi arbitraire, et qui ne dépendra pas uniquement de la vitesse.

CALCUL DES LOIS DU MOUVEMENT HORIZONTAL ET VERTICAL DES CORPS DANS LES FLUIDES INDÉFINIS.

252. *Méthode pour trouver le temps qui répond à une vitesse donnée ou acquise par le corps.* Nous avons fait connaître (134) une méthode générale pour trouver, par des tracés géométriques, la loi du mouvement des corps quand celle de la force motrice est donnée, ce qui est le cas actuel; mais cette méthode, bonne comme moyen de démonstration et pour faire comprendre la liaison étroite qui subsiste entre le temps, la vitesse, la force et l'espace décrit à chaque instant, ne l'est pas quand il s'agit de calculer effectivement toutes les circonstances du mouvement; parce qu'elle serait peu rigoureuse d'une part, et que, de l'autre, elle donnerait lieu à des opérations trop multipliées, trop pénibles. Or on peut atteindre le but par un procédé exempt de ces inconvénients, et qui est fondé sur le principe de Thomas Simpson (180) pour calculer l'aire des courbes. Ayant d'ailleurs appris, dans les numéros précédents, comment on peut, dans chaque cas et pour les vitesses successivement acquises par un même corps, trouver, en kilogrammes, la valeur de la force motrice F, qui modifie le mouvement à l'instant qui répond à chacune de ces vitesses, on n'éprouvera aucune difficulté à appliquer la méthode aux diverses circonstances que présente le mouvement vertical ou horizontal des corps dans les fluides indéfinis.

Nous avons (130), d'après ce qui a déjà été souvent rappelé dans ces *Applications*, pour calculer le temps t que met la force F, à accroître, de la quantité v, la vitesse V d'un corps dont le poids est P, la formule

$$t = \frac{P}{gF} \times v = \frac{P}{9^m{,}8088F} \times v.$$

Cela posé, concevons une courbe $O'b'f'h'$ (fig. 61), dont les abscisses Oa, Ob, Oc, ... Og, représentent les valeurs successives, en mètres, de la vitesse V du corps, et dont les ordonnées OO', aa', bb', ... gg', représentent les valeurs, en nombres, du quotient de P par $9^m,8088 \times F$, relatives aux diverses abscisses ou vitesses correspondantes. Supposons, en outre, que les intervalles égaux Oa, ab, bc, ... gh représentent la valeur très-petite et censée constante, de chacun des accroissements ou de chacune des diminutions v, de vitesse, successivement éprouvés, par le mobile, dans des instants qui ici ne seront pas en général égaux, puisque le mouvement n'est point uniformément accéléré ou retardé (107 et suiv.); il s'agira de trouver, pour chaque abscisse telle que Oc, par exemple, ou pour chaque valeur correspondante de la vitesse V du mobile, la mesure du produit de l'ordonnée cc' par v ou par cd, puis de faire la somme totale de ces produits pour l'intervalle de mouvement ag, je suppose, qu'on veut considérer ; car, d'après la formule, on obtiendra ainsi la valeur du temps qui s'est écoulé dans cet intervalle, et qui est la quantité que nous cherchons à calculer. Or, en raisonnant ici comme on l'a fait dans les nos 72, 107, 135, etc., il sera aisé d'apercevoir que la somme dont il s'agit, n'est autre chose que la superficie de l'aire trapézoïde $aa'\,c'\,g'\,ga$, comprise entre la courbe, l'axe OV des abscisses et les deux ordonnées aa', gg', qui répondent à l'intervalle de mouvement ag, pour lequel on se propose de calculer le temps écoulé, par le moyen des vitesses Oa, Og, qui sont censées données immédiatement : le calcul de ce temps se fera donc aisément par la méthode du n° 180.

253. *Applications particulières relatives à la chute des corps dans l'air.* Prenons, pour exemple, une balle en bois d'orme de 3^c de diamètre, son poids sera (35 et 247) $\dfrac{12^k,68}{9 \times 125} = 0^k,0113$ environ, et les résistances que lui opposera l'air, seront le $\frac{1}{25}$ de celles du tableau du n° 215, pour les mêmes vitesses. Supposons que, cette balle étant tombée naturellement dans l'air, d'une certaine position pour laquelle la vitesse initiale était par conséquent nulle, il s'agisse de trouver quel sera le temps qu'elle mettra pour acquérir une vitesse de 8^m, représentée par Od, je suppose. On divisera cette vitesse en un certain nombre pair de parties égales, et on calculera les valeurs correspondantes de F (246), puis celles des ordonnées ou des quotients de P par gF. En partageant seulement l'intervalle Od ou les 8^m de vitesse, en 4 parties égales aux points a,

b, c, on pourra dresser la table suivante des diverses grandeurs relatives à la question (215 et 247), en observant que le poids du volume d'air déplacé peut encore ici être négligé par rapport à celui du corps dans le vide, puisqu'il en est, au plus, le 652ième,

points.	O,	*a,*	*b,*	*c,*	*d,*
vitesses.	0^m,	2^m,	4^m,	6^m,	8^m,
résistances R de l'air.	0^k,	$0^k,0001$,	$0^k,0004$,	$0^k,0010$,	$0^k,0018$,
valeurs de F.	$0^k,0113$,	$0^k,0112$,	$0^k,0109$,	$0^k,0103$,	$0^k,0095$,
valeurs de $\frac{P}{gF} = \frac{0,00115}{F}$ . . .	0,1018,	0,1027,	0,1055,	0,1117,	0,1211.

Par conséquent, on aura

somme des valeurs extrêmes de $\frac{P}{gF}$.	0,1018	+	0,1211	=	0,2229
2 fois celle des autres valeurs impaires.	2	×	0,1055	=	0,2110
4 fois celle des valeurs paires.	4 (0,1027	+	0,1117)	=	0,8576
				Total.	1,2915

Cette somme totale, multipliée par le $\frac{1}{3}$ de l'intervalle constant *ab* entre les vitesses successives, qui est ici 2 mètres, donne $\frac{1}{3}\, 2 \times 1,2915 = 0'',861$, parce que g répond (117) à une seconde qui est ainsi l'unité de temps. Si le corps fût tombé dans le vide, il eût acquis la vitesse des 8^m, dans un temps qu'on obtient par la formule $V = gT$ du nº 117, laquelle donne $T = \dfrac{V}{g} = \dfrac{8^m}{9^m,81} = 0'',815$; ce temps est donc un peu moindre que celui qui répond à la chute dans l'air, comme cela doit être.

Si on se fût contenté de diviser l'intervalle de O à *d*, ou de zéro à 8^m, en deux parties égales seulement, en *b*, l'on eût trouvé, pour la valeur du temps écoulé, $\frac{1}{3}\, 4^m \times (0,1018 + 0,1211 + 4 \times 0,1055) = 0'',860$, laquelle ne diffère que de $\frac{1}{861}$ de celle qui a été obtenue précédemment; or cela provient (180) de ce que la méthode est ici très-approchée, attendu que la première partie de la courbe, $O'a'b'c'e'$, diffère très-peu d'une ligne droite, et que les 8^m de vitesse sont encore loin de la limite $19^m,70$, relative au plus grand mouvement de la balle (247). On pourra donc, dans des cas semblables, abréger beaucoup le calcul du temps écoulé.

Cherchons maintenant le temps relatif à une vitesse de 16^m, laquelle approche de la vitesse limite $19^m,70$: en partageant l'intervalle, de 8^m à 16^m, en 4 parties égales répondant aux vitesses de 10^m, de 12^m et de 14^m, on trouvera pour résultat final, en opérant comme ci-dessus, $1'',389$, pour le temps écoulé entre l'instant où la vitesse est de 8^m et celui où elle est de 16^m. Si l'on eût seulement divisé cet intervalle en deux parties égales, on eût trouvé $1'',397$, nombre qui ne surpasse le précédent que de $\frac{1}{174}$ environ de sa valeur, et qui, même pour des opérations délicates, serait suffisamment approché. En ajoutant $1'',389$ à $0'',861$, temps qui répond à la vitesse de 8^m antérieurement acquise, le temps total relatif aux 16^m, sera $2'',250$, tandis que, dans le vide, le temps de la chute serait seulement $\frac{16^m}{9^m,809} = 1''631$.

Pour trouver le temps que le corps mettrait à acquérir la vitesse de 18^m qui approche encore plus de la vitesse limite, il suffirait de partager l'intervalle des 2^m, compris depuis 16^m jusqu'à 18^m, en deux parties égales ; on trouverait ainsi que le temps, écoulé dans cet intervalle, est d'environ $0'',845$, c'est-à-dire peu différent de celui qui, dans les premiers instants de la chute, a suffi pour imprimer la vitesse de 8^m à la boule. Ainsi le corps acquerra, en $2'',250 + 0'',845$ ou en moins de $3'',1$, une vitesse de 18^m très-approchante de la plus grande vitesse de chute $19^m,7$, qu'il ne peut atteindre (250) réellement qu'après un temps infini ou excessivement long. Dans le vide, le temps relatif aux 18^m de vitesse serait seulement de $1'',84$.

Il faudra opérer, d'une manière absolument semblable, quand il s'agira de trouver le temps qu'un corps quelconque, tel qu'un boulet, un ballon, un parachute, met pour ralentir ou augmenter sa vitesse horizontale ou verticale d'une quantité donnée, par suite de l'action de la pesanteur et de la résistance du milieu ; seulement il faudra avoir soin, si on tient à une grande rigueur, de resserrer davantage les opérations vers les parties de la courbe qui diffèrent beaucoup de la ligne droite ; et l'on fera bien, sous ce rapport, de construire approximativement, dans chaque cas, cette même courbe, afin d'en étudier à l'avance la forme et les propriétés. Quant aux recherches qui exigent moins d'exactitude, on pourra diminuer le nombre des opérations : voulant, par exemple, calculer, tout d'un coup, le temps qui répond à la vitesse des 16^m ci-dessus, on se bornera à partager cette vitesse en deux parties égales de 8^m chacune, et, ayant trouvé que les valeurs du quotient de P par gF, qui répondent à 0^m, à 8^m et à 16^m, sont 0,1018, 0,1211, 0,2875, respectivement, on obtiendra la quantité $\frac{1}{3}\,8^m\,(0{,}1018 + 0{,}2875 + 4.0{,}1211) = 2'',33$, pour valeur approchée du temps dont il s'agit, laquelle est ainsi trop forte de $\frac{1}{28}$ environ; en partageant l'intervalle en 4 parties égales, on trouverait $2'',256$, qui ne diffère plus que de $\frac{1}{375}$ de la valeur $2'',25$ trouvée ci-dessus.

254. *Trouver l'espace qui répond à une vitesse donnée du corps.* Ayant calculé, selon ce qui précède, la table ou la loi qui donne les vitesses relatives aux temps écoulés, il ne sera pas difficile, d'après le n° 134, de calculer aussi l'espace décrit, par le corps, pendant que sa vitesse a été augmentée ou diminuée d'une quantité donnée; mais, cette méthode exigeant que l'on ait préalablement calculé la loi dont il s'agit, ou qu'elle soit donnée immédiatement, deviendrait beaucoup trop laborieuse dans le cas où l'on ne connaîtrait que la loi qui lie la force motrice à la vitesse, ce qui est le cas actuel. On peut alors obtenir directement l'espace décrit sans calculer les temps écoulés.

En effet, nous avons, e étant l'espace décrit pendant le temps élémentaire t (108, 134 et 135),

$$e = \mathrm{V} \times t = \mathrm{V} \times \frac{\mathrm{P}}{g\mathrm{F}} \times v = \frac{\mathrm{PV}}{9^m{,}809\mathrm{F}} \times v.$$

Raisonnant donc comme dans le cas précédent (252), et calculant, pour chaque valeur de la vitesse V, la valeur correspondante du quotient PV par $9^m{,}809$F, on pourra former une nouvelle courbe $Oa''b''\ldots g''$ (fig. 61), ayant ces quotients pour ordonnées, et toujours pour abscisses les valeurs correspondantes de la vitesse V. Or la surface comprise entre cette courbe, l'axe OV des abscisses et les ordonnées qui répondent à l'intervalle de mouvement qu'on veut considérer, donnera évidemment la somme des valeurs successives des éléments d'espace e, et par conséquent la longueur totale du chemin parcouru par le mobile dans cet intervalle : cette surface se calculera d'ailleurs absolument de la même manière que celle qui donne le temps, par la méthode du n° 180.

255. *Applications particulières relatives à la chute verticale des corps dans l'air.* Qu'il s'agisse, par exemple, de calculer, pour la

balle de bois d'orme ci-dessus, l'espace décrit quand cette balle a acquis la vitesse de 8^m; on formera, en multipliant simplement, par les valeurs de V, les quotients déjà trouvés (253) de P par gF, ou de 0,0015 par F, la table suivante :

vitesses.	0^m,	2^m,	4^m,	6^m,	8^m
valeurs de $\frac{P}{gF}\times V = \frac{0{,}0015}{F}\times V$,	0,	0,2054,	0,4220,	0,6702,	0,9688

espace parcouru $\frac{1}{3}\,2^m\,[0+0{,}9688+2.0{,}4220+4(0{,}2054+0{,}6702)]=3^m{,}54.$

Dans le vide, l'espace décrit serait donné (118) par la formule

$$V^2=2gH;\quad \text{d'où}\quad H=\frac{8^m\times 8^m}{19^m{,}618}=3^m{,}26,$$

puisqu'ici nous avons $V=8^m$. La balle devrait donc tomber de plus haut dans l'air que dans le vide, pour acquérir la vitesse en question, ce qui est naturel.

En recommençant les mêmes calculs pour la vitesse de 16^m, on trouvera que la hauteur correspondante de la chute serait de $21^m{,}30$ pour l'air, et de $13^m{,}05$ seulement pour le vide : nous n'avons divisé l'intervalle, de 0^m à 16^m, qu'en quatre parties égales, ce qui suffit ici. On voit, par là, que les espaces décrits croissent d'une manière beaucoup plus rapide que les temps employés à les décrire (253) ; ce qui paraît évident d'après la seule inspection des courbes qui leur correspondent dans la fig. 61, et ce qui tient d'ailleurs à ce que les ordonnées aa'', bb'',.... gg'' croissent elles-mêmes plus rapidement que les ordonnées aa', bb',.... gg', puisqu'elles ont, pour valeurs (252 et 254), les produits de celles-ci par les valeurs correspondantes de la vitesse V ou des abscisses.

256. *Observations générales relatives au calcul des autres circonstances du mouvement, et conclusion.* — Les méthodes des nos 252 et 254 serviront, quelle que soit la loi que suive la force motrice F par rapport aux vitesses, pour trouver directement l'espace et le temps qui répondent à une vitesse donnée; mais, si c'était, au contraire, le temps où l'espace qui fût donné, et qu'il s'agît de calculer le vitesse correspondante, les opérations seraient beaucoup plus pénibles : on n'arriverait au résultat que par des tâtonnements plus ou moins longs, ou par la formation d'une table complète des temps

et des espaces qui répondent aux différentes vitesses, table qu'on calculerait, dans chaque cas, de la manière dont cela a été expliqué, nos 253 et 255, pour quelques valeurs particulières de la vitesse. Néanmoins une certaine habitude des calculs et le tact qu'on acquiert toujours en traitant une question spéciale, serviront à diminuer beaucoup le nombre des tâtonnements et feront pressentir d'abord certaines limites entre lesquelles se trouvera comprise la valeur cherchée.

En dire davantage sur ces opérations, ce serait sortir tout à fait du cadre de cet ouvrage, sans en recueillir immédiatement un degré d'utilité qui pût compenser la longueur des développements. Nous ferons seulement remarquer, à ceux des lecteurs qui désireraient entreprendre de pareils calculs, que la Balistique, qui est devenue de nos jours une science à part très-difficile et très-étendue, offre des méthodes particulières pour diminuer, mais non pour éviter entièrement les tâtonnements, et cela à l'aide des tables nommées *logarithmiques et trigonométriques*. Ces tables donnent, dans certains cas, la valeur toute calculée de la quantité qu'on cherche; mais généralement elles ne la fournissent qu'après qu'on a effectué un certain nombre d'opérations numériques sur les grandeurs données, ou qu'après qu'on a préparé convenablement ces quantités pour que le résultat se trouve immédiatement ramené à celui qui est contenu dans les tables. C'est ainsi, par exemple, que la table de multiplication ordinaire fait obtenir le produit ou le quotient des nombres par une suite d'opérations particulières sur ces nombres, et que la table du no 196 permet de calculer, par une simple proportion, la quantité de travail développée, par la vapeur, contre les pistons d'une machine à détente quelconque.

J'avais entrepris, en faveur des sous-officiers de l'artillerie et du génie, qui suivent ce Cours de mécanique, de montrer comment le calcul des lois du mouvement dans l'air peut se ramener, sans l'emploi de considérations transcendantes, et par les simples propriétés des figures géométriques, aux opérations qui se trouvent immédiatement effectuées dans les tables de logarithmes, dont il eût ici suffi de donner un extrait de quelques pages seulement; mais j'en ai été détourné par l'idée d'allonger par trop ce volume, qui l'est déjà beaucoup sans doute. En effet, la formule qui donne les valeurs de la force dynamique F, relative au mouvement des projectiles dans l'air, variant, dans son expression, suivant les circonstances particulières de ce mouvement (240 et suiv.), il en résulte qu'on a huit questions distinctes à traiter, lesquelles, à la vérité, ont beaucoup d'analogie entre elles; mais n'en exigent pas moins un certain développement, pour être convenablement exposées à des personnes qui ignorent les calculs transcendants et l'usage des tables. Je donnerai néanmoins, par la suite, la solution de quelques-unes des plus importantes d'entre elles, si l'occasion favorable vient à s'en présenter, ou si l'on juge que la chose offre, en elle-même, un but suffisant d'utilité.

TABLE DES MATIÈRES.

PRÉLIMINAIRES.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA CONSTITUTION ET LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES CORPS.

États principaux des corps.

Divisibilité des corps.

Porosité des corps.

NOTIONS FONDAMENTALES SUR LE MOUVEMENT, LES FORCES ET LES EFFETS DES FORCES.

De l'espace et du temps.

Repos, mouvement, vitesse, inertie.

Des forces, de leur mesure et de leur représentation.

Mode d'action des forces sur les corps.

De la force vive des corps en général et de sa relation avec le travail mécanique.

APPLICATIONS, EXERCICES ET DÉVELOPPEMENTS DIVERS.

Questions concernant l'inertie et la force vive.

De la communication du mouvement par le choc direct des corps.

Du travail produit par la détente des gaz.

Du travail produit par l'action mécanique de la vapeur.

De la résistance des fluides homogènes et indéfinis, ou de l'action qu'ils exercent sur les corps solides.

Calcul des lois du mouvement horizontal et vertical des corps dans les fluides indéfinis.

FIN.