# TRAITÉ

DE

# CRISTALLOGRAPHIE.

*Ouvrages de M. HAÜY qui se trouvent chez les mêmes Libraires.*

| | | |
|---|---|---|
| Traité élémentaire de Physique, 2 vol. in-8., avec 19 planches, | 15 fr. | » c. |
| Tableau comparatif des résultats de la Cristallographie, 1 vol. in-8°, | 5 | 50 |
| Traité des Caractères physiques des Pierres précieuses, 1 vol. in-8°, 1817, fig., | 6 | |

*Sous presse par souscription.*

Traité de Minéralogie, deuxième édition, entièrement refaite sur un plan nouveau, 4 vol. in-8° et Atlas d'environ cent-dix planches.

DE L'IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
RUE DU JARDINET-SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS, N° 12.

# TRAITÉ

DE

# CRISTALLOGRAPHIE,

SUIVI

D'UNE APPLICATION DES PRINCIPES DE CETTE SCIENCE A LA DÉTERMINATION DES ESPÈCES MINÉRALES,

ET

D'une nouvelle Méthode pour mettre les formes cristallines en projection;

PAR M. L'ABBÉ HAÜY,

Chanoine honoraire de l'Église métropolitaine de Paris, Membre de la Légion-d'Honneur, Chevalier de l'Ordre de Saint-Michel de Bavière, de l'Académie royale des Sciences, Professeur de Minéralogie au Jardin du Roi et à la Faculté des Sciences de Paris, de la Société royale de Londres, de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, des Académies royales des Sciences de Berlin, de Stockholm, de Lisbonne et de Munich; de la Société Géologique de Londres, de l'Université impériale de Wilna, de la Société Helvétienne des Scrutateurs de la Nature, et de celle de Berlin; des Sociétés Minéralogiques de Dresde et d'Iéna, de la Société Batave des Sciences de Harlem, de la Société Italienne des Sciences, de la Société Philomatique de Paris, etc.

TOME PREMIER.

PARIS,

BACHELIER ET HUZARD, GENDRES ET SUCCESSEURS DE Mme Ve COURCIER, LIBRAIRES POUR LES SCIENCES,

Rue du Jardinet-Saint-André-des-Arcs.

1822.

# INTRODUCTION.

La théorie, dont le développement est le principal objet de ce traité, touchait de près à sa naissance lorsque j'en ai publié, il y a environ trente-sept ans, les premiers résultats dans un ouvrage où je ne donnais mon travail que pour un simple essai, qui avait besoin d'être soumis à de nouvelles recherches pour qu'il fût permis de le ranger parmi les genres de connaissances dont le sort est fixé sans retour.

Je n'avais appliqué ma théorie qu'à un petit nombre d'espèces, et j'avais employé des méthodes particulières, soit pour déterminer les angles des cristaux qui appartiennent à ces espèces, soit pour vérifier les propriétés géométriques dont quelques-uns m'avaient offert les indices.

L'espérance que ces premiers résultats m'avaient fait concevoir pour la suite, s'est réalisée. Les nombreuses applications que j'ai faites des lois de la structure, et que j'ai consignées dans le Traité de Minéralogie, qui a paru en 1801, et dans divers mémoires que j'ai publiés depuis, ont donné une grande extension à la théorie dont il s'agit, et m'ont paru en confirmer de plus en plus la justesse. Elle s'est élevée au degré de généralité d'où dérivent ces formules analytiques si bien assorties au véritable esprit des sciences, à l'aide desquelles une multitude de faits, qui diffèrent en apparence les uns des autres, viennent se ranger autour d'un fait unique qui leur sert comme de ralliement.

C'est cette même théorie que je me suis proposé de présenter ici dans l'état auquel l'ont amenée mes efforts pour l'étendre et la perfectionner. Je vais donner une idée du plan que j'ai suivi, comme étant le plus propre à en faciliter l'étude.

Dans la solution des problèmes d'analyse, dont le but est de représenter la marche de la nature, nous sommes conduits par des méthodes très expéditives à des résultats souvent inattendus, et dont quelques-uns même excitent notre surprise, par l'air de paradoxe sous lequel ils se présentent. Mais lorsque, guidés par le simple raisonnement, nous revenons ensuite pas à pas sur la route que le calcul avait franchie rapidement, nous finissons par apercevoir la manière d'agir des causes qui ont donné naissance aux résultats dont il s'agit. L'étude de la Cristallographie a surtout l'avantage de se prêter aux conceptions de ce genre. Les cristaux étant des assemblages de molécules similaires soumises à certaines lois d'arrangement, les projections qui les représentent sont autant de leçons parlantes pour un observateur attentif, et cela est vrai surtout d'une projection dans laquelle les formes des molécules sont rendues par de petits solides d'un volume sensible. Il en résulte que les faces du cristal qui en a fourni le modèle, et qu'il offre sous l'aspect de plans continus, par une suite de l'extrême petitesse des molécules, se montrent telles qu'elles sont réellement, c'est-à-dire comme des assemblages de bords ou d'angles solides situés sur les mêmes molécules, et dont les alignemens et la disposition retracent aux yeux de l'observateur la route que la cristallisation a suivie pour arriver à son but.

C'est en partant de ces considérations que j'ai divisé l'exposé de la théorie en deux parties, l'une synthétique et l'autre analytique. Dans la première, j'associe le simple raisonnement aux projections des formes cristallines, pour rendre sensible aux yeux ce que la théorie montre à l'esprit; ou si je me permets quelquefois l'usage du calcul, c'est seulement dans le cas où il s'agit d'un résultat de cristallisation qui, indépendamment de ce que le raisonnement nous en apprend, peut devenir l'objet d'une recherche intéressante, comme celle qui aurait pour but de déterminer, d'après certaines données qui se présentent comme d'elles-mêmes, le nombre de petits solides représentatifs des molécules dont le cristal est l'assemblage.

La partie analytique renferme l'exposé des formules dont j'ai parlé plus haut, et de leurs usages, soit pour déterminer les formes cristallines relatives à une même espèce, et pour les lier les unes avec les autres et avec la forme primitive dont elles dérivent, soit pour développer les propriétés géométriques émanées de leurs dimensions et de leur structure, qui ajoutent beaucoup à l'intérêt qu'inspire par elle-même l'étude de ces formes, et dont on n'aurait peut-être jamais soupçonné l'existence, si la théorie n'était venue nous en avertir. Les calculs qu'elle emploie ne supposent que la connaissance de l'algèbre ordinaire; mais il faut de l'exercice et une certaine sagacité pour assortir la construction des problèmes et la méthode de les résoudre à un sujet tout particulier, où la nature se montre si riche en produits d'une géométrie qui n'est qu'à elle. Pour simplifier les applications de la théorie, j'ai été attentif à chercher, parmi les différentes manières de résoudre un même problème, celle qui était la plus directe, et à n'y mettre que la juste mesure de calcul qui suffisait à mon but.

Je vais exposer, dans une analyse raisonnée, le plan que j'ai suivi, en traitant chacune des deux parties dont je viens de parler.

Je commence la première par un parallèle des minéraux avec les êtres organiques, qui me conduit à indiquer les différences remarquables qu'établit entre les uns et les autres la manière dont ils se forment et s'accroissent. Je donne ensuite une division générale des formes que l'on appelle *cristallines*, et remontant à la naissance des corps qui les présentent, et à l'ordre suivant lequel l'affinité a réuni leurs molécules, j'en déduis l'idée à laquelle est attaché le mot de *cristal*. Je fais ressortir un caractère distinctif très remarquable qui résulte de ce mode de formation auquel on a donné le nom de *cristallisation*, et qui consiste dans la faculté qu'ont les molécules d'un même minéral de donner naissance à une multitude de formes différentes, toutes régulières, tandis que les individus qui appartiennent à une même espèce de plante se ressemblent par la forme, le nombre et la disposition respective des organes de la fructification et par la manière d'être des autres parties, en sorte que chaque individu est censé représenter l'espèce entière.

Je donne ensuite une notion des formes cristallines, en me bornant à celles qui offrent les types des espèces, ou de celles qui sont comme les élémens dans lesquels elles se résolvent à l'aide d'une opération que je ferai bientôt connaître. Chacune des formes dont il s'agit étant susceptible de varier d'une espèce à l'autre par la mesure de ses angles, ou, ce qui revient au même, par les inclinaisons mutuelles de ses faces; pour détermi-ner ces inclinaisons, et en général toutes celles qui existent sur les formes cristallines relatives aux différentes espèces, j'emploie un instrument qui porte le nom de *goniomètre*, et dont on doit l'invention à M. Carangeau. J'en donne ici une description détaillée, et j'indique la manière d'en faire usage.

De là je passe aux variations que subissent les formes cristallines originaires d'une même espèce, et particulièrement à celles qui ne sont qu'acci-dentelles, en sorte qu'elles laissent subsister le nombre et les inclinaisons respectives des faces, et n'influent que sur leurs dimensions et leurs figures, sans toutefois que la symétrie soit altérée. Les variations dont il s'agit ont lieu surtout dans les cristaux qui résultent de la combinaison de plusieurs formes simples qui existent ou peuvent exister séparément parmi les individus de l'espèce, et elles proviennent de ce que certaines faces d'un même ordre sont plus voisines ou plus éloi-gnées du centre dans tel cristal que dans tel autre. Je fais voir que ces variations peuvent sou-vent être ramenées à une limite géométrique qui dépend de la condition que l'ensemble de toutes les faces soit le plus simple possible. Au reste, je ne fais qu'ébaucher ici ce sujet, me réservant à y revenir avec plus de détail dans la partie analy-tique.

Arrivé à l'explication des faits, je dirai comment un prisme hexaèdre de chaux carbonatée, qui, en se détachant du groupe auquel il adhérait, avait laissé à découvert une petite portion de son intérieur, m'a offert en cet endroit une indication de sa structure, qui n'avait besoin que d'être suivie pour qu'elle devînt comme la clef d'une théorie. Je décrirai l'opération à l'aide de laquelle, en partant de l'indication dont j'ai parlé, j'ai extrait du prisme hexaèdre régulier un rhomboïde obtus de 104 $^{d}$ $\frac{1}{2}$ (1), qui lui servait comme de noyau; et j'exposerai les résultats de toutes les opérations du même genre, auxquelles celle-ci a servi de modèle, ce qui m'a conduit au principe fondamental de la théorie dont j'ai parlé. Il consiste en ce que tous les cristaux de diverses formes qui appartiennent à un même minéral, renferment un solide que l'on peut en extraire en enlevant successivement toutes les lames qui le recouvrent, et dont la forme est constante tant que l'espèce reste la même, mais varie d'une espèce à l'autre. Les différens noyaux que la division mécanique des minéraux a offerts jusqu'ici, se rapportent à cinq genres de solides dont je donne la définition.

---

(1) Cet angle est celui que forment entre elles deux faces prises vers un même sommet du rhomboïde.

A la suite du résultat précédent, j'en expose un autre qui lui est lié, et auquel on parvient en continuant de pénétrer dans le mécanisme de la structure par la division du noyau parallèlement à ses différentes faces et quelquefois à d'autres plans encore. Cette division donne de petits solides, tous semblables entre eux, et qui, par des sous-divisions successives, se résolvent en d'autres de la même forme, qui n'en diffèrent que par un moindre volume. Les plus petits que nous puissions apercevoir à l'aide du microscope, sont, pour ainsi dire, les diminutifs des premiers; et nous ne pouvons douter qu'il n'en soit de même de ceux que nous ne voyons plus que par la pensée, jusqu'aux derniers qui représentent les molécules que j'appelle *intégrantes*, savoir celles qui se sont réunies dans le liquide où elles étaient suspendues, pour former le cristal qui a été le sujet de l'opération. D'autres molécules, que j'appelle *molécules principes* ou *molécules élémentaires*, sont celles qui entrent dans la composition des molécules intégrantes, et qui ne peuvent être séparées les unes des autres qu'à l'aide de l'analyse chimique.

Maintenant, pour mieux faire ressortir ce que le résultat qui vient d'être décrit offre de très remarquable, j'observe qu'un polyèdre ne pouvant pas avoir moins de quatre faces, les trois formes les plus simples possibles, à raison du nombre et de la disposition respective de leurs faces, sont le tétraèdre, le prisme triangulaire et le parallélipipède. Or telles sont celles des molécules intégrantes, données par la sous-division de tous les cristaux connus. C'est du petit espace dans lequel ces trois formes se trouvent resserrées que sort cette diversité presque infinie de formes cristallines que la nature est susceptible d'offrir à nos observations. On reconnaît ici ce qui caractérise en général les lois émanées de la puissance et de la sagesse du Dieu qui l'a créée et qui la dirige. Economie et simplicité dans les moyens, richesse et fécondité inépuisables dans les résultats.

Ce n'est pas tout; la manière dont les molécules intégrantes sont assorties dans les cristaux qui en offrent les assemblages, ajoute un nouveau degré de simplicité à celui qu'elles empruntent de leurs formes. Pour faire concevoir en quoi il consiste, je choisirai comme exemple le prisme hexaèdre régulier, considéré comme forme primitive d'un minéral. Tout le monde sait que si l'on trace sur sa base six rayons, en allant du centre aux angles, il se trouvera sous-divisé en six triangles équilatéraux; or, il est visible que ces triangles, pris deux à deux, composent des rhombes, en sorte que la base peut aussi être considérée comme un assemblage de trois de ces rhombes. Supposons maintenant que l'on fasse passer par les six rayons des plans perpendiculaires à la base;

ils sous-diviseront le prisme hexaèdre en six prismes triangulaires égaux et semblables. Au lieu de six plans, n'en supposons que trois qui soient menés par les côtés intérieurs des rhombes dont j'ai parlé; le prisme ne sera plus censé être composé que de trois prismes à quatre pans, qui auront pour bases les mêmes rhombes. Or, la division du prisme hexaèdre, faite sous la condition que prescrit ce genre d'opération, à l'égard de toutes les formes primitives, et qui exige qu'elle ait lieu parallèlement aux différentes faces qui les terminent, donne pour molécules intégrantes des prismes triangulaires. Mais nous verrons que les applications de la théorie aux formes dérivées du prisme hexaèdre régulier s'assimilent à celles où les formes qu'elle considère comme primitives sont des prismes rhomboïdaux, en sorte que la théorie relative au prisme hexaèdre remplit son but, en faisant jouer aux prismes rhomboïdaux qui résultent de la réunion de deux molécules intégrantes, le même rôle que dans le cas où la forme primitive serait elle-même un prisme rhomboïdal semblable à ceux dont je viens de parler. La même corrélation a lieu entre les cristaux dont les molécules intégrantes sont des tétraèdres, et ceux où elles sont des parallélipipèdes, par une suite de ce que la réunion de plusieurs tétraèdres présente l'équivalent d'un parallélipipède simple.

J'appelle *molécules soustractives* ces parallélipipèdes composés de prismes triangulaires ou de tétraèdres. On verra bientôt que ce nom de *soustractives* exprime la manière dont agissent en général les lois de la structure, et qui m'a suggéré le nom de *lois de décroissement* que je leur ai donné. Il suit de ce qui précède que le parallélipipède est comme l'unité à laquelle viennent aboutir les applications de la théorie aux différentes formes primitives. Il lui est pour ainsi dire indifférent que ce parallélipipède soit indivisible ou susceptible de se résoudre en parties fractionnaires; sa marche est absolument la même dans les deux cas.

Dans tout ce que j'ai dit jusqu'ici, je n'ai considéré que les résultats de la division mécanique des divers noyaux inscrits dans les cristaux, et les formes sous lesquelles s'offrent les molécules intégrantes qu'elle retire de ces noyaux. Or, les plans suivant lesquels chacun d'eux se laisse diviser, et que je nomme *joints naturels*, parce qu'ils passent entre ses lames composantes, se prolongent dans la matière enveloppante; d'où il suit qu'elle n'est qu'un assemblage de molécules intégrantes semblables à celles dont le noyau est composé; et c'est de l'ordre suivant lequel elles sont assorties que dépendent le nombre, les figures et les inclinaisons respectives des faces qui terminent le polyèdre auquel elles ont donné naissance. J'ai exposé, avec le développement convenable, dans la partie synthétique de ce traité, les lois auxquelles est soumis l'assortiment dont il s'agit, et les diverses manières dont elles modifient leur action, pour opérer les nombreuses métamorphoses que les cristaux qui appartiennent à une même espèce de minéral sont susceptibles de subir. Je vais donner ici une idée de ces lois, et pour mieux en faire concevoir la marche, j'en ferai l'application à un exemple très simple, que je tirerai d'une variété qui appartient à l'espèce de minéral que j'ai nommée *aplome.*

Si en divisant mécaniquement un cristal, pour en extraire le noyau, on fait attention à la forme des parties de la matière enveloppante que l'on enlève pour mettre ses faces à découvert, on observera qu'elles se terminent en un sommet pyramidal, ou en un sommet à quatre faces dont deux sont séparées par une arête. On remarquera de plus que les lames que l'on détache successivement en partant de l'un ou l'autre sommet, augmentent progressivement en étendue à mesure qu'on approche du noyau; d'où il suit que si on les prend dans l'ordre inverse, en commençant par celle qui est en contact avec le noyau, elles iront en décroissant à mesure qu'elles s'en éloigneront. Enfin, si l'on examine les directions des bords qui terminent les lames dont il s'agit, on verra que ces bords sont parallèles tantôt à ceux des faces correspondantes du noyau, tantôt aux diagonales des mêmes faces, et tantôt à des lignes qui ne sont parallèles ni à ces bords ni à ces diagonales.

Supposons que ce soit le premier cas qui ait lieu et que le noyau soit un cube : je substitue à ce cube un noyau artificiel composé d'un nombre fini et impair de petits solides cubiques, qui, dans l'hypothèse actuelle, seront censés représenter les molécules intégrantes. Concevons que l'on ait divisé chacune des faces du même cube en petits carrés qui soient les faces extérieures d'autant de molécules : pour offrir une ébauche de la marche que suit la nature dans le passage du noyau à la forme secondaire, dont je me propose de représenter la structure, je me sers d'une suite de lames artificielles, d'une figure carrée, et dont chacune est un assemblage de cubes égaux à ceux qui représentent les molécules intégrantes. Je dispose ces lames en recouvrement, de manière à en former une pile semblable à une pyramide quadrangulaire, dont je place la base sur une des faces du noyau. Il est bien évident que les cubes renfermés dans chaque lame sont distribués par rangées successives, parallèlement aux différens bords de cette lame. Or, tel est le rapport entre les étendues des lames dont il s'agit, que la première a sur son contour une rangée de moins que dans le cas où elle couvrirait entièrement la face correspondante du noyau. Chacune des rangées suivantes est dépassée de même vers ses quatre bords, par celle qui est au-dessous, d'une quantité égale à une rangée, et parce que le nombre des cubes que contient le noyau est impair, la dernière lame se réduit à un simple cube. Je place une autre pyramide semblable sur chacune des faces du noyau.

En opérant ainsi, j'ai employé une maçonnerie grossière pour imiter l'architecture infiniment délicate de la nature. Mais, si nous remettons à la place des solides dont j'ai fait usage, les véritables molécules intégrantes qui sont des cubes presque infiniment petits, l'espèce d'escalier que forment les lames décroissantes par les rentrées et saillies alternatives de leurs bords devenant insensible à l'œil, ces bords paraîtront se toucher, et leurs séries s'offriront à l'œil sous l'aspect de plans lisses et continus. Nous aurons alors une imitation parfaite du cristal d'aplome dont j'ai parlé, qui a pour noyau un cube, et dont la matière enveloppante est composée de six pyramides quadrangulaires, ayant pour faces des triangles isocèles.

Maintenant, comme les décroissemens que subissent vers leurs bords les lames empilées sur les faces du noyau, ont lieu par une rangée de molécules intégrantes, on concevra, avec un peu d'attention, que celui qui, en partant de tel bord, agit d'un côté, n'est que la continuation de celui qui agit du côté opposé. Il en résulte que les triangles dont ce bord est la base commune doivent être de niveau, et composer un rhombe par leur réunion ; et ainsi le cristal, ramené à sa véritable forme, est un dodécaèdre dont les faces sont des rhombes égaux et semblables.

Je donnerai, dans la partie synthétique, un nouveau développement à la structure de ce dodécaèdre, dont la marche deviendra sensible à l'œil, au moyen d'une figure qui le montrera circonscrit à son noyau, et représentera en relief les bords des lames décroissantes qui le recouvrent. J'ajouterai une formule dont on pourra déduire le nombre de tous les petits solides cubiques considérés comme molécules intégrantes, dont le dodécaèdre est l'assemblage, en supposant que l'on connaisse le nombre d'arêtes de molécule compris dans chaque bord du noyau.

Lorsque les bords des lames décroissantes sont tournés vers les diagonales des faces du noyau, les molécules disposées sur plusieurs rangées successives, dont les premières sont contiguës aux mêmes bords, ne se réunissent plus par une de leurs faces ; elles ne se touchent que par une arête. C'est une suite de ce qu'elles s'engrènent les unes dans les autres dans le sens où nous les considérons ici. Du reste, les quantités dont les lames décroissantes sont dépassées les unes par les autres ont toujours pour mesure une ou plusieurs des mêmes rangées, et il en résulte des formes secondaires aussi simples que celles qui sont produites par les décroissemens sur les bords. De ce nombre est l'octaèdre régulier originaire du cube.

Quant au troisième cas, où les bords des lames décroissantes ont des directions intermédiaires entre celles des bords du noyau et des diagonales de ses faces, je me bornerai à dire que les petits solides que la théorie considère comme étant les élémens de ces lames, sont des assemblages de 2, 3, 4 molécules intégrantes ou davantage, lesquelles s'assimilent aux molécules simples, en s'alignant de manière à former des rangées successives qui se prêtent également à l'action des lois d'où dépendent les formes secondaires.

En étudiant les résultats des trois modes de décroissement dont je viens de parler, j'ai été conduit à diverses considérations qui me paraissent mériter de fixer l'attention, lorsqu'on veut se rendre compte à soi-même de tout ce qui concourt au mécanisme de la structure. Je vais en citer deux exemples.

Il existe des cristaux dont la forme est celle d'un octaèdre que l'on appelle *cunéiforme*, parce que deux de ses faces prises vers chaque sommet, au lieu de se réunir avec les deux autres en un même point, comme dans les octaèdres ordinaires font leur jonction sur une arète commune, en sorte que leur figure est celle d'un trapèze dont le petit côté coïncide avec cette arête. C'est ce qui a lieu par exemple dans une partie des cristaux de baryte sulfatée. Or, si l'on compare entre eux plusieurs de ces cristaux, on observera que la longueur de l'arête terminale augmente ou décroît de l'un à l'autre, et cela dans un rapport très sensible. Mais la théorie donne la limite à laquelle elle s'arrêterait toujours si la cristallisation atteignait constamment le but vers lequel elle tend, et dont elle ne s'écarte que par l'effet des variations accidentelles que subit l'ordre de la structure. Je donnerai le développement convenable à ce point de théorie, et je déterminerai, à l'aide d'une formule générale, la limite dont je viens de parler.

Dans les cristaux ordinaires, les arêtes situées à la jonction de deux faces produites par une loi de décroissement, ou bien sont des lignes pleines, comme lorsque le décroissement agit dans deux sens opposés sur un des bords du noyau, ou bien sont des suites d'angles solides ou d'arêtes de molécules situées dans un même plan et qui étant d'une extrême petitesse, se présentent sous l'apparence de lignes pleines.

Il en est autrement du prisme hexaèdre régulier de la chaux carbonatée, dont on extrait le rhomboïde primitif de cette substance minérale.

La théorie prouve que ses faces latérales ne se réunissent pas sur des lignes continues ou censées telles, mais qu'elles sont séparées par des facettes rectangulaires, dont la largeur est si petite, qu'elle échappe à nos organes. Il en résulte que le prisme considéré sous le rapport des lois de la structure, est réellement dodécaèdre, en sorte que le nom de *prisme hexaèdre* n'exprime que ce que l'observation offre à nos regards, et ne s'accorde pas avec le véritable état des choses que la théorie nous fait voir par la pensée.

Une autre considération se rapporte aux cristaux qui sont le résultat de deux lois de décroissement ou davantage. Pour ramener la structure de ce cristal à l'ordre suivant lequel se succèdent les lames dont est composée la matière qui enveloppe le noyau, on est souvent obligé d'assigner diverses époques aux actions initiales des décroissemens. Tantôt l'un d'eux commence par agir seul, jusqu'à un certain terme, où l'autre prend naissance, après quoi ils agissent simultanément. Tantôt le premier s'arrête à l'endroit où naît le second. Je cite divers exemples relatifs à ces deux cas, et j'entre dans les détails nécessaires pour donner une juste idée de la marche progressive que suit la structure des cristaux qui les présentent.

Je passe aux décroissemens que j'appelle *auxi-*

*liaires*, et qui ont lieu lorsque ceux qui agissent simultanément sur deux faces du noyau, adjacentes à un même bord, ou sur les trois faces qui concourent à la formation d'un même angle solide, quoique soumis à des lois différentes, ont de telles mesures que les deux ou les trois faces secondaires qui en résultent coïncident sur un même plan. De plus, il peut arriver, et il arrive en effet assez souvent, qu'un des décroissemens est simple tandis que l'autre ou les deux autres ont une marche composée, soit à raison de la quantité de rangées soustraites, soit parce qu'ils ont lieu en vertu de ces assemblages de molécules simples dont j'ai parlé plus haut. Dans ces sortes de cas, on considère le décroissement simple, comme le principal, et celui qui seul détermine la position de la face secondaire produite, et les autres ne sont censés intervenir que pour seconder l'effet du premier, et pour prolonger la face dont il s'agit au-delà du bord ou de l'angle auquel on rapporte le premier, comme à son terme de départ.

Les applications de la théorie, qui font le sujet de l'article suivant, me paraissent déjà très dignes d'attention, dans le cas même où elles ne seraient que spéculatives. Mais elles deviennent doublement intéressantes par l'avantage qu'elles ont de servir à simplifier et à faciliter celles qui, considérées en elles-mêmes, sont les

*b..*

plus embarrassantes de toutes. Le résultat général de ces applications consiste en ce que si, parmi toutes les formes secondaires qui dérivent d'une même forme primitive, on en choisit une à volonté, pourvu qu'elle soit une des cinq que l'on obtient comme noyaux, à l'aide de la division mécanique des cristaux, et si l'on substitue un solide de cette forme, comme noyau hypothétique, à la véritable forme primitive, et si de plus on suppose qu'il soit un assemblage de petits solides semblables à ceux qu'on obtiendrait en le divisant géométriquement par des plans parallèles à ses différentes faces, on pourra en faire dériver, par des lois régulières de décroissement, toutes les autres formes, y compris celle qui faisait la fonction de primitive.

Pour juger combien est étendu le nouveau champ que ce résultat ouvre à la théorie, je choisirai la chaux carbonatée comme exemple. Parmi les formes secondaires de cette substance, auxquelles j'ai appliqué les lois de la structure, j'ai observé seize rhomboïdes qui en sont originaires, et qui diffèrent les uns des autres par leurs dimensions. De plus, le nombre de toutes les formes secondaires s'élève à 160. Si donc l'on suppose que le rhomboïde primitif fasse un échange de fonctions successivement avec chacun de ceux dont je viens de parler, on aura 1570 nouvelles applications de la théorie, c'est-à-dire un nombre presque dix fois aussi grand que celui qui résulte de l'action des lois relatives au véritable noyau.

Voici maintenant en quoi consistent les avantages que la théorie peut retirer des applications de ce genre. Il existe des formes secondaires produites par des lois dont la complication entraînerait des tâtonnemens et un travail plus ou moins considérable, si l'on essayait de les déterminer immédiatement. Mais on peut alors substituer à la forme primitive un noyau hypothétique qui dérive du véritable, à l'aide d'une loi simple de décroissement, et faire dépendre ensuite la forme secondaire de ce noyau, en vertu d'une autre loi de décroissement également simple. Cela fait, on remonte à la véritable détermination, qui devient facile, parce que les résultats relatifs au noyau hypothétique ont, pour ainsi dire, aplani la route escarpée qui devait y conduire.

Je déduis de ces résultats une conséquence remarquable, que je rapporte aussi à la chaux carbonatée; c'est que dans la supposition où ses cristaux se refuseraient à la division mécanique, la théorie suffirait seule pour faire reconnaître sa forme primitive à des caractères que j'indique.

Arrivé à la loi que j'appelle de *symétrie*, je n'oublie rien de ce qui peut appeler l'attention des minéralogistes sur cette grande loi de la cristallisation, dont l'influence se communique aux résultats de toutes les lois particulières d'où dépendent les formes des cristaux. Pour en donner une idée, je distingue deux manières d'être relatives des bords et des angles d'une forme primitive. Ceux que j'appelle *identiques* ne font qu'un au jugement de l'œil : tels sont, par exemple, deux bords opposés qui ont la même longueur, et sont compris entre des faces également inclinées l'une sur l'autre. La loi de symétrie consiste en ce qu'une même espèce de décroissement se répète sur tous les bords ou sur tous les angles identiques, tandis que ceux qui ne le sont pas peuvent subir une autre espèce de décroissement, ou même rester libres. Je cite diverses formes cristallines qui réalisent la distinction que je viens d'énoncer, et je prouve que les indications qu'elles offrent de la loi de symétrie, et en général toutes celles qui naissent des autres formes, peuvent être utiles pour démêler dans l'aspect d'un cristal qui se montre pour la première fois, l'espèce de solide à laquelle se rapporte sa forme primitive. Je fais voir encore que la ressemblance ou la diversité d'éclat qui naît de la réflexion de la lumière sur les joints naturels des cristaux, fournit des indications qui s'accordent avec celles des parties identiques et de celles qui ne le sont pas.

En lisant les traités de Minéralogie publiés par les auteurs étrangers, on trouvera qu'une partie les déterminations qu'ils ont données des formes primitives ne soutient pas l'épreuve de la loi de symétrie, qui est comme la pierre de touche de ce genre de résultats, et on aura lieu de s'étonner que des hommes aussi attentifs qu'éclairés, aient méconnu une loi si simple et qui se présente si naturellement à l'esprit. J'ajoute que nous ne pouvons regarder autour de nous sans la rencontrer. Les artistes l'observent scrupuleusement dans leurs ouvrages, en assimilant les parties qui se correspondent, par les formes qu'ils leur donnent et par les ornemens dont ils les embellissent. Ils ramènent tout à ce principe, qu'il faut que l'œil soit satisfait; et sans qu'ils s'en aperçoivent, leur art ne fait ici autre chose que d'imiter en quelque sorte ce que la science nous montre dans les productions de la nature.

La distinction que nous avons admise entre le noyau d'un cristal et la matière qui l'enveloppe, n'est qu'une donnée dont se sert la théorie pour déterminer les lois auxquelles est soumise la structure des cristaux secondaires; mais le noyau n'est pas le terme auquel arrive d'abord la nature, comme d'un seul jet, pour ajouter ensuite successivement à son volume les lames dont la matière enveloppante est l'assemblage; c'est le centre du cristal qui est son véritable point de départ, et c'est là qu'elle fait naître un embryon de ce cristal, qui déjà renferme un noyau composé du plus petit nombre possible de molécules intégrantes, et a subi l'effet initial de la loi ou des lois de décroissement d'où dépend la forme sous laquelle le cristal, parvenu à un volume sensible, se présentera à nos yeux. Cet embryon s'accroît par une succession de couches qui se superposent, de manière que le nombre de molécules dont il est l'assemblage va en augmentant, et que de nouvelles lames fournies par la matière enveloppante s'appliquent l'une sur l'autre pour continuer l'effet des décroissemens. Il en résulte qu'à quelque terme que s'arrête la formation du cristal, il renferme un noyau proportionné à son volume. Je cite plusieurs exemples de cette marche, qui est la véritable, dont un est tiré du dodécaèdre à plans rhombes que j'ai décrit plus haut comme originaire du noyau cubique que l'on en extrait à l'aide de la division mécanique, et je termine par un parallèle des deux manières de connaître l'ordre de la structure, dont l'une, qui est celle à laquelle s'applique la théorie, nous le fait considérer tel qu'il nous paraît être, à en juger d'après ce que l'observation semble nous dire, et l'autre tel qu'il s'offrirait à nous s'il nous était donné de le voir naître et se développer.

Je reviens ici à l'ordre de la structure pour donner un aperçu de la cause physique des décroissemens que j'attribue aux actions combinées de deux forces, l'une constante, qui est l'attraction réciproque des molécules intégrantes, l'autre qui varie selon les qualités du liquide dans lequel s'opère la cristallisation, et qui balance plus ou moins l'effet de la première. J'applique ce principe d'une manière générale aux différentes circonstances dans lesquelles peuvent se rencontrer les deux forces dont il s'agit, et je fais entrevoir comment les variations que subit leur rapport déterminent les diversités qui ont lieu dans la manière d'agir des lois auxquelles est soumise la structure.

Dans les articles suivans j'expose deux objections qui m'ont été faites relativement à l'ordre de la structure, tel que le suppose la théorie, et la solution que j'en donne me paraît d'autant plus satisfaisante, qu'elle s'accorde avec la manière dont Newton et d'autres savans d'un mérite distingué ont envisagé la constitution physique des corps.

La première est fondée sur ce que dans l'hypothèse où les faces des cristaux secondaires seraient sillonnées par des cannelures, ou chargées d'aspérités, ainsi que l'indique la marche des décroissemens, elles ne pourraient, dans aucun cas, réfléchir la lumière avec assez de régularité pour les rendre miroitantes. Je ferai voir que l'objection, si elle était réelle, attaquerait à plus forte raison le pouvoir réfléchissant de toute espèce de miroir, mais qu'elle disparaîtra si l'on admet l'idée très plausible de Newton sur la manière dont s'opère la réflexion.

L'autre objection a été suggérée par l'observation des joints auxquels j'ai donné le nom de *surnuméraires* pour les distinguer de ceux que j'appelle naturels, et dont on aperçoit des indices plus ou moins sensibles à la faveur des fractures qu'ont subies les cristaux de certaines substances, surtout ceux qui appartiennent à la chaux carbonatée. Ils sont toujours dans l'intérieur de ces cristaux, parallèlement à des faces produites par des lois de décroissement, ou susceptibles de l'être. Telle est quelquefois la diversité de ceux que plusieurs minéralogistes ont cru voir dans un même cristal, et qui, selon eux, passeraient à travers ces petits solides que je nomme *molécules intégrantes*, que si l'objection avait du fondement, ils les morcelleraient au point d'en faire nier l'existence. J'expose les raisons qui me portent à considérer les joints dont il s'agit comme de simples apparences, dues à une multitude de petites réflexions partielles qui naissent sur les parties saillantes des molécules dans les intervalles que celles-ci laissent entre elles, en sorte qu'elles conservent l'intégrité de leur forme.

Le but de l'article qui vient ensuite est de donner une idée de la fécondité des lois de décroissement, qui nous paraîtrait être sans bornes, si les quantités des rangées soustraites s'étendaient indéfiniment au-delà des premiers termes de la série des nombres naturels. Mais pour la renfermer dans ses véritables limites, il faut s'en tenir à ce que nous apprend la théorie, et à ce que la manière d'agir familière à la nature semble elle-même nous dire, que les décroissemens les plus ordinaires sont en même temps les plus simples, et que les plus rares ne s'écartent de la simplicité des premiers que jusqu'à un terme peu reculé, en sorte que tout ce qui est au-delà doit être jugé impossible; or, en me bornant à ceux dont j'ai parlé d'abord, et en supposant qu'ils aient lieu par 1, 2, 3, 4 rangées sur les bords ou sur les angles d'un rhomboïde, tel que celui de la chaux carbonatée, je démontre, à l'aide d'une formule, que dans cette hypothèse, le nombre des formes possibles est de 8388604. Je suis éloigné de croire que toutes ces formes existent dans la nature; il y en a sûrement une grande partie qu'on ne verra jamais qu'à travers la théorie. Ma collection en renferme à peu près 160 qui sont les seules que j'aie observées. M. le comte de Bournon porte à 620 le nombre de celles dont il donne la détermination dans son Traité complet de la chaux carbonatée et de l'arragonite, ouvrage qui fait honneur en même temps à l'étendue et à la variété de ses connaissances. Mais, en supposant que nous ayons sous les yeux toutes celles qui ont été produites par la cristallisation dans les cavités souterraines où elle a joui de sa liberté, on ne peut douter que le nombre indiqué par la formule ne fût incomparablement plus considérable. Pour avoir une juste idée de sa puissance, il fallait généraliser la manière de la représenter, parce qu'elle ne se mesure pas sur l'ensemble de ce qui est, mais de ce qui peut être.

Il ne me restait plus, pour terminer la partie synthétique, qu'à expliquer la composition et l'usage de ces formules auxquelles j'ai donné le nom de *signes représentatifs des cristaux*. Ce sont des assemblages de lettres et d'exposans numériques dont telle est la relation, soit avec les bords et les angles des formes primitives, soit avec les décroissemens dont les uns et les autres subissent les actions, qu'un de ces signes étant donné, il suffit d'avoir la projection du noyau d'où dérive la forme de la variété à laquelle il se rapporte, pour voir par la pensée s'opérer le passage d'une forme à l'autre, conformément à l'ordre de la structure. On peut alors, à l'aide d'une nouvelle projection, tracer une image fidèle de la variété proposée, sans même avoir le modèle sous les yeux. Le travail relatif à l'atlas des figures destiné pour la première édition de mon Traité, a offert de fréquens exemples de cet avantage. L'exécution en avait été confiée à trois élèves des mines, pleins de talens et de zèle, du nombre desquels était M. Trémery, qui tient aujourd'hui un rang très distingué parmi les physiciens dont s'honore la France, et ses progrès dans la Cristallographie avaient été si marqués, qu'il n'avait besoin que de connaître l'espèce et les dimensions de la forme primitive d'un cristal, quelquefois chargé de nombreuses facettes, et de considérer attentivement le signe représentatif de celui-ci, pour tracer une image très ressemblante d'un modèle qu'il n'avait pas devant lui, et qu'il eût pu même n'avoir jamais vu (1). A cet avantage s'en joint un autre dont la seconde édition du Traité de Minéralogie offrira de nombreux exemples. Il consiste en ce que les signes représentatifs fournissent un moyen simple et facile de distribuer méthodiquement la série de toutes les variétés déterminables qui appartiennent à une même espèce minérale, d'après l'ordre des combinaisons une à une, deux à deux, trois à trois, des lois de décroissement dont elles dépendent; il en résulte que s'il survient une variété jusqu'alors inconnue, sa place se trouve marquée d'avance dans la série (2).

Le but que je me suis proposé dans la partie de cet ouvrage dont je viens de présenter l'analyse, a été d'y donner une description raisonnée

(1) C'est au même savant que j'ai été redevable de presque toutes les figures dépendantes de la partie analytique.

(2) J'ai employé, dans mon Traité de Minéralogie, cette distribution à l'égard de la chaux carbonatée. Mais c'est la seule espèce à laquelle je l'aie appliquée.

des principaux résultats de la théorie des formes cristallines. J'ose espérer qu'on ne m'accusera pas d'y avoir passé les bornes que je devais m'y prescrire. Après avoir exposé le plus clairement qu'il m'était possible, ce qui marquait le plus dans chaque résultat, j'ai ajouté tous les détails qui m'ont paru propres à y répandre un nouveau jour. Ce sont les détails qui perfectionnent et complètent nos conceptions; il faudrait souvent y réfléchir, pour sentir qu'ils manquent, surtout lorsqu'ils viennent comme de loin se rattacher au sujet que nous traitons; mais lorsqu'ils sont connus, on s'aperçoit de leur utilité. On pourrait les comparer à ces derniers coups de pinceau qui ajoutent en même temps au fini d'un portrait et à sa ressemblance avec le modèle.

La partie analytique qui vient ensuite, renferme le développement de toutes les recherches à l'aide desquelles la Minéralogie s'est élevée au rang des véritables sciences, qui partent de principes certains pour arriver à des conséquences évidentes, et marchent d'un pas assuré, en tenant d'une main le flambeau de l'observation, et de l'autre celui de la théorie. Dans les applications que j'ai faites de celle-ci à la solution des problèmes dont la première offre les sujets, j'ai dû préférer à la méthode trigonométrique, généralement adoptée par les cristallographes, la méthode d'analyse qui joint à l'avantage d'être à la fois plus simple, plus expéditive et plus élégante, celui de pouvoir seule généraliser ses résultats. Les calculs qu'elle emploie ne supposent qu'une connaissance de l'Algèbre ordinaire, à laquelle il est facile de parvenir en peu de temps. Pour me mettre à la portée de tous ceux qui désireraient faire une étude suivie de la partie qui les renferme, j'ai exposé, relativement à chaque opération, la marche progressive à l'aide de laquelle je suis arrivé de l'équation qui m'a servi à construire le problème, à celle qui en donne la solution, et j'ai évité d'y laisser des lacunes que les géomètres exercés auraient aisément remplies, en faveur des commençans qui auraient pu être embarrassés pour retrouver le fil de l'opération.

Parmi les cinq formes primitives données par la division mécanique, je choisis d'abord le rhomboïde, comme objet de la méthode dont il s'agit. Il doit cette prérogative à la chaux carbonatée, à l'égard de laquelle cette forme est d'une fécondité pour ainsi dire inépuisable. Je détermine d'abord les rapports entre les diagonales et autres lignes qui entrent dans la construction du solide, et dont on déduit les valeurs de ses angles plans et saillans. Je m'occupe ensuite successivement des diverses espèces de décroissemens qui, en agissant sur les bords et sur les angles du rhomboïde primitif, produisent les formes secondaires. Je donne des formules générales toutes préparées pour le calcul des angles que font entre elles les faces qui terminent les mêmes formes. Il ne s'agit que d'y substituer les expressions numériques, toujours très simples, des diagonales situées sur les faces du rhomboïde primitif, aux lettres qui les représentent, et à une quantité $n$, le nombre des rangées soustraites en vertu du décroissement d'où dépendent les faces que l'on considère, et au moyen d'une table de logarithmes, on obtient en un instant les valeurs des angles proposés. D'autres formules donnent les rapports entre les axes des formes primitives et ceux des formes secondaires qui en dépendent. La considération des noyaux hypothétiques, dont j'ai parlé plus haut, m'a fourni divers résultats intéressans, soit en eux-mêmes, soit par l'avantage qu'ils ont de faciliter et de simplifier la détermination des formes secondaires qui naissent de ces décroissemens, que j'ai nommés *intermédiaires*.

Je ne dois pas passer sous silence un autre avantage qu'ont eu les formules relatives au solide rhomboïdal et qui s'étend aux autres formes primitives : c'est d'avoir servi au développement des propriétés géométriques dont jouissent une partie des formes dont je viens de parler, et plusieurs de celles qui en dérivent comme secondaires. On distinguera parmi ces dernières, les variétés de chaux carbonatée qui portent les noms de *métastatique*, d'*inverse*, de *contrastante*, et l'analogique qui mérite doublement de fixer l'attention, soit lorsqu'elle se laisse reconnaître du premier coup d'œil aux caractères de symétrie dont la cristallisation l'a ornée, soit lorsqu'elle se fait chercher dans les hémitropies qui la déguisent. Je dois dire aussi un mot des problèmes à double solution, dont le rhomboïde présente les sujets. Je citerai pour exemple le cas où deux rhomboïdes secondaires, semblables entre eux, naissent de deux décroissemens en sens contraire sur un même angle du rhomboïde primitif. La limite des cas de ce genre est celle qui a lieu, en vertu d'un seul décroissement, qui produit un rhomboïde secondaire semblable au noyau. La Cristallographie a réalisé ce résultat dans deux variétés, dont l'une appartient à la chaux carbonatée et l'autre à la tourmaline. Je me borne à ce peu d'exemples que j'ai choisis parmi le grand nombre de ceux que je pourrais citer. Ils seront développés dans la partie analytique, et j'ose espérer qu'ils contribueront à faire accueillir la théorie à laquelle on doit la connaissance de ces propriétés, qui me paraissent en rendre l'étude à la fois plus attrayante et plus instructive, et qui auraient probablement échappé pour toujours à notre géométrie, si elles ne s'étaient rencontrées dans celle de la nature.

Avant d'en venir à l'objet principal de l'article suivant, qui est la théorie du cube, je donne la raison pour laquelle cette forme primitive et les autres, qui, comme elle, se font remarquer par la similitude de leurs bords et de leurs angles solides, sont celles qui en général donnent naissance à des formes secondaires plus composées que celles qui dérivent par exemple du rhomboïde. Supposant ensuite des décroissemens qui agissent sur la base d'un prisme droit, dans lequel cette base est un carré, j'en donne la détermination, qui me sert comme de passage pour arriver à ceux qui naissent sur les différentes parties d'un cube. Les formes secondaires que j'ai choisies pour y appliquer la théorie, appartiennent, les unes au plomb sulfuré, et les autres au fer sulfuré. Ce sont surtout ces dernières dont la détermination conduit à des considérations de divers genres, dont une des plus remarquables est celle qui se rapporte à la variété dodécaèdre, qui a pour faces des pentagones semblables et égaux. Plusieurs minéralogistes ont confondu ce dodécaèdre avec le régulier de la géométrie, dont les pentagones ont tous leurs côtés égaux, au lieu que sur ceux qui appartiennent au dodécaèdre du fer sulfuré, quatre des côtés seulement sont égaux; le cinquième est plus court, et tel est son rapport avec chacun des quatre autres, qu'il en résulte une différence d'environ 11 $^{d}$ entre les angles des pentagones situés sur les deux dodécaèdres. Il y a mieux, c'est qu'il n'existe aucune loi assignable de décrossement qui soit susceptible de produire le dodécaèdre régulier de la géométrie, et ici se présente une réflexion : c'est que les lois de décroissement d'où dépend la forme de celui qui appartient au fer sulfuré, sont à la fois les plus simples et les plus régulières possibles, d'où il suit qu'il doit être considéré comme étant le dodécaèdre régulier de la nature.

Vient ensuite le prisme rhomboïdal à base oblique, dont la théorie se rapproche jusqu'à un certain point de celle du rhomboïde, à l'aide d'une propriété géométrique qui est générale pour tous les solides primitifs de la même espèce. L'effet de cette propriété est de limiter celle des dimensions du prisme, qui coïncide avec l'un quelconque de ses bords longitudinaux; de plus, elle donne naissance à d'autres propriétés, dont je déduis des formules générales applicables aux incidences des faces produites en vertu de tous les décroissemens qui peuvent avoir lieu, soit sur les bords, soit sur les angles de la forme primitive. Ces propriétés, à leur tour, exercent une influence remarquable sur les résultats de certains décroissemens, qui se combinent de manière que l'assortiment des faces qui en dérivent s'offre sous un aspect symétrique, analogue à celui d'une pyramide droite, qui ne paraîtrait pas se concilier avec les positions obliques des bases du prisme, si la théorie n'en démontrait la possibilité. Je cite des observations qui nous la montrent réalisée dans plusieurs formes secondaires, dont les unes appartiennent à l'amphibole et les autres au pyroxène.

Un autre prisme qui a beaucoup de rapport avec le précédent, est le prisme rectangulaire oblique, dont la base naît sur une arête perpendiculaire à deux bords longitudinaux pris sur une même face latérale. Tel est celui qui fait la fonction de forme primitive à l'égard des cristaux d'euclase, dont l'étude m'a conduit à des considérations que je ne dois pas omettre. Un de ces cristaux, qui m'avait été confié à une époque où ils étaient extrêmement rares, offrait d'un côté sur son sommet des faces qui ne se répétaient pas du côté opposé. Un joint perpendiculaire à l'axe, que j'avais aperçu en faisant mouvoir à la lumière une fracture qu'avait subie le cristal vers une de ses extrémités, m'avait fait croire que sa forme primitive était un prisme droit, et, dans cette hypothèse, la forme des sommets du cristal dérogeait d'autant plus à la loi de symétrie, que le nombre des faces distinctes qu'elle présentait était de seize, dont dix existaient sur une partie et les six autres sur la partie opposée. Des observations récentes, relatives à un autre cristal dont je donne la description, m'ont fait reconnaître l'existence d'un second joint, incliné d'environ 40 d sur le premier, et qui doit être considéré comme offrant la véritable base de la forme primitive. En le combinant avec l'autre, on a la forme de la molécule intégrante, qui est un prisme droit triangulaire. Dès-lors le défaut de ressemblance entre les deux parties d'un même sommet s'expliquait comme de lui-même; et au lieu qu'il avait paru d'abord fournir une arme pour attaquer la généralité de la loi de symétrie, il offre aujourd'hui un des exemples les plus décisifs que l'on puisse citer en sa faveur.

Dans les articles qui suivent, je traite des formes primitives qui diffèrent du parallélépipède. La première qui se présente est le prisme hexaèdre régulier, que l'on peut considérer, d'après ce que j'en ai dit dans l'analyse de la partie synthétique, comme un assemblage de petits prismes rhomboïdaux, qui, dans les résultats des lois de la structure, s'assimilent aux molécules intégrantes données par la sous-division des parallélépipèdes dont j'ai parlé précédemment. Je donne des formules générales pour la détermination des diverses formes secondaires qui naissent des décroissemens sur les bords ou sur les angles du prisme hexaèdre. Les variétés que j'ai choisies pour y appliquer ces formules, appartiennent, les unes à l'émeraude et les autres à la chaux phosphatée. J'exposerai une considération théorique relative à la combinaison de deux décroissemens qui agissent simultanément, l'un sur les bords et l'autre sur les angles de la base du prisme, de manière que le nombre de rangées soustraites en vertu du second est double de celui qui donne la mesure du premier. Or telle est la manière dont les facettes qui naissent de leur concours s'entrecoupent, que celles qui remplacent les angles sont des quadrilatères symétriques qui ont leurs côtés égaux. Dans une des variétés, qui est une émeraude, les deux décroissemens ont lieu par une et par deux rangées, et les quadrilatères sont des rhombes. Dans l'autre variété, qui est une chaux phosphatée, leur rapport est représenté par les mêmes nombres; mais ici le quadrilatère est un carré, c'est une suite du rapport particulier qui existe entre le côté et la hauteur du prisme qui fait la fonction de forme primitive.

Le dodécaèdre à plans rhombes, auquel je passe, résulte, d'après l'exposé détaillé que j'ai donné de sa structure dans la partie synthétique, d'un assemblage de quatre rhomboïdes, dont chacun se résout en six tétraèdres à triangles isocèles, qui représentent les molécules intégrantes. Il en est des petits rhomboïdes qui composent immédiatement les quatre dont je viens de parler, comme des petits prismes rhomboïdaux que j'ai fait connaître en expliquant la structure du prisme hexaèdre régulier, c'est-à-dire qu'ils font la fonction de molécules simples dans les résultats des décroissemens qui naissent sur les bords ou sur les angles du dodécaèdre.

J'avais d'abord réuni, sous un même point de vue, toutes les variétés relatives aux différentes espèces qui ont pour forme primitive le dodécaèdre dont il s'agit; mais en les étudiant d'une manière plus approfondie, j'ai reconnu qu'elles se partagent entre deux systèmes de cristallisation, dont l'un est celui du grenat, et l'autre celui du zinc sulfuré. J'expose les caractères qui distinguent ces systèmes l'un de l'autre, et dont chacun détermine, relativement aux variétés qui s'y rapportent, une marche particulière des lois de la structure. Je vérifie ce double emploi de la même forme primitive par des applications à des variétés choisies dans l'une et l'autre des espèces désignées. Plusieurs de celles qui appartiennent au zinc sulfuré sont d'autant plus remarquables, que l'influence du système de cristallisation s'y montre jusque dans ce dérangement de position qu'ont subi les cristaux que je nomme *transposés*, et qui cache ici, sous l'air d'un simple accident, le résultat d'une propriété constante du mécanisme de la structure.

Mon Traité de Minéralogie n'offrait qu'une ébauche imparfaite de la théorie de l'octaèdre. Je m'étais contenté de ramener la structure de ce solide à un assortiment de petits tétraèdres, qui offrait l'équivalent d'un assemblage de parallélépipèdes, et de faire entrevoir comment on pouvait substituer à l'octaèdre un parallélépipède semblable à celui dont je viens de parler; mais pour remplir le but de la théorie, il fallait trouver une méthode analytique, à l'aide de laquelle on pût transformer les décroissemens relatifs à l'octaèdre en ceux qui leur répondaient sur le parallélépipède substitué. Une autre relation du même genre entre l'octaèdre et un noyau hypothétique, tel qu'un prisme droit rhomboïdal ou rectangulaire, sollicitait une seconde méthode, plus favorable que la précédente aux applications de la théorie. M. Delafosse a bien voulu, à mon invitation, se charger de ce travail; et la communication qu'il m'en a donnée, après qu'il l'a eu terminé, m'a fait connaître que mon attente n'avait pas été trompée. Ses formules joignent au mérite de la généralité celui d'être en même temps très simples. Je suis d'autant plus flatté d'associer ici ses résultats aux miens, que je ne pouvais saisir une plus belle occasion pour témoigner combien je me félicite de ce qu'un collaborateur aussi recommandable sous tous les rapports, ait été l'un de mes anciens élèves qui se soit le plus distingué par l'activité de son zèle et par la rapidité de ses progrès (1).

(1) M. Delafosse s'est formé à l'aide de l'excellente éducation que l'on reçoit dans l'Ecole normale, dont la direction a été si dignement confiée à la sagesse et aux lumières de M. Gueneau de Mussy.

Le tétraèdre régulier, qui se présente ensuite, peut être assimilé à l'un ou l'autre des sommets d'un rhomboïde, dont les angles plans sont de 120 d et 60 d, qui aurait été coupé par un plan perpendiculaire à son axe. Sa théorie rentre dans celle de ce rhomboïde, par une suite de ce que l'assortiment des molécules intégrantes tétraèdres équivaut à un assemblage de petits rhomboïdes semblables à celui dont il s'agit. Je donne des formules générales pour la détermination des résultats relatifs à cette manière de voir, et j'en fais diverses applications à des formes que j'ai choisies parmi les variétés du cuivre gris. Plusieurs de ces formes, qui, considérées relativement au nombre et aux inclinaisons respectives de leurs faces, ont leurs analogues dans l'espèce du grenat, en diffèrent sensiblement par l'aspect sous lequel se présente l'ensemble de ces mêmes faces. Je fais voir que cette différence s'explique facilement par celle qui existe entre les deux formes primitives et entre les systèmes de cristallisation qui leur appartiennent.

J'ajoute ici un article relatif au dodécaèdre composé de deux pyramides droites réunies base à base, dont j'avais fait d'abord une forme primitive particulière, qui se trouvait placée à la suite des cinq que j'ai décrites dans les articles précédens. Je motive l'idée que j'ai conçue plus récemment de lui faire changer de rôle, et à laquelle j'ai été conduit par un résultat de la théorie du rhomboïde, qui la ramène parmi les formes auxquelles ce solide est susceptible de donner naissance.

La partie analytique est suivie de plusieurs articles, qui serviront à compléter l'ensemble de tous les résultats relatifs à la détermination des formes cristallines. Je traite, dans le premier, d'un jeu singulier de position qui a lieu dans les cristaux de diverses substances minérales, et auquel j'ai donné le nom d'*hémitropie*. A en juger d'après l'aspect sous lequel se présente chacun des cristaux dont il s'agit, on serait tenté de croire que, pendant l'instant qui a suivi sa formation, son noyau, que je suppose être un rhomboïde, aurait été coupé en deux moitiés par un plan parallèle à deux de ses faces opposées, et qu'une des moitiés étant restée fixe, l'autre aurait décrit une demi-circonférence autour du centre de ce même plan, en entraînant avec elle la matière qui l'enveloppait, et aurait fini par se trouver appliquée en sens contraire à la première moitié. J'adopte l'hypothèse beaucoup plus naturelle, suivant laquelle la cause de l'hémitropie, quelle qu'elle fût, aurait agi, pendant la formation même du cristal, sur chacune des molécules destinées à produire la moitié qui est censée avoir tourné, en sorte que le renversement apparent de cette moitié serait l'effet de celui qu'auraient subi séparément toutes les molécules dont il s'agit. Quelquefois le plan de rotation est situé perpendiculairement à l'axe du cristal hémitrope, et alors on peut supposer, pour plus de simplicité, que la moitié de cristal qui est censée avoir tourné, ait décrit seulement un sixième de circonférence. Je substitue, dans ce cas, le mot de *transposition* à celui d'*hémitropie*, et je fais voir que le plan de rotation est parallèle à une face qui résulterait d'une loi très simple de décroissement.

Un autre accident, qui est extrêmement commun, est celui qui m'a fourni le sujet de l'article suivant. Il dépend de la manière dont les cristaux groupés paraissent se pénétrer, par une suite du croisement de leurs axes. Dans la plupart des substances, les positions relatives de ceux qui offrent cette pénétration apparente varient, pour ainsi dire, à l'infini; mais il en existe quelques-unes, telles que la staurotide, l'étain oxidé, l'arragonite, etc., qui présentent un genre d'assortiment caractérisé par la disposition respective des cristaux qui le composent, en sorte qu'elle a lieu sous des angles constans dans chacune des variétés auxquelles elle appartient. Dans toutes les modifications de ce genre, sans en excepter celles dont j'ai parlé d'abord, on peut toujours concevoir, à l'endroit où se fait la jonction des cristaux composans, un plan dont la position est parallèle à celle d'une face qui serait produite en vertu d'une loi de décroissement ordinairement simple, au moins lorsque le groupement se rapporte à l'une des substances désignées ci-dessus. Je donne plusieurs exemples de la marche que doit suivre la théorie pour arriver à la détermination de cette loi.

Dans toutes les solutions des problèmes que renferme la partie analytique, j'ai pris pour données les dimensions des formes primitives, que j'ai supposées être connues d'avance. Le but que je me suis proposé dans l'article dont je vais présenter l'analyse, a été de faire connaître la méthode qui m'a conduit à cette connaissance. J'observerai d'abord que les mesures mécaniques des angles que font entre elles les faces de la forme primitive ou celles des formes secondaires, et dont on déduit les rapports entre les dimensions dont j'ai parlé, ne peuvent être rigoureuses, et que les petits défauts d'exactitude dont elles sont affectées se transmettent nécessairement aux rapports dont il s'agit. Si même, après avoir mesuré successivement à plusieurs reprises un même angle, on compare les rapports qui en dérivent, on trouvera entre eux de petites différences dont les unes seront en plus et les autres en moins; et d'ailleurs les termes de ces rapports seront représentés par de grands nombres, dont l'usage nuira à l'élégance de la théorie et la rendra moins maniable. Je fais voir comment je suis arrivé à déduire de ces rapports approximatifs et compliqués, une limite qui se reconnaît à sa simplicité, et dans laquelle réside très probablement le véritable rapport, qui est celui de la nature. La méthode réunit ainsi au mérite de l'uniformité, qu'elle emprunte de sa marche, celui de cette simplicité qui caractérise ses résultats. De là résulte cet avantage que si plusieurs observateurs, qui auraient mesuré tour à tour un même angle, se dirigeaient d'après cette méthode, ils arriveraient à la même limite; au lieu que s'ils se réglaient sur les indications pures et simples de leurs mesures, les rapports auxquels ils seraient parvenus, comparés entre eux, se nuiraient l'un à l'autre par leur discordance.

Je place ici quelques résultats relatifs à un genre d'altération que subissent les variétés qui appartiennent à diverses espèces, par l'effet d'une cristallisation précipitée; il consiste en ce que certaines faces se sont infléchies de manière à devenir convexes, et quelquefois la courbure s'étend sur toute la surface. Dans plusieurs cas, les traits de la forme originale, en se laissant entrevoir à travers les altérations dont il s'agit, permettent d'en ébaucher la détermination, lorsqu'on manque de cristaux assez réguliers pour l'obtenir avec précision. Je cite une variété de chaux sulfatée, qui s'arrondit par degrés, en allant d'un individu à l'autre, et finit par s'offrir sous la forme d'une lentille, et quelquefois sous celle d'un cône régulier. La division mécanique de ce cône, faite par un plan perpendiculaire à l'axe, met à découvert un joint naturel, dont la figure est exactement celle d'une courbe à laquelle les géomètres ont donné le nom d'*hyperbole*. Je me borne pour le présent à cette indication; mais on verra, par les détails dans lesquels j'entrerai sur ce sujet, qui paraît entièrement étranger à la théorie des decroissemens, qu'il est susceptible, sous un certain rapport, de se prêter à ses applications.

Avant de terminer l'exposé de la partie analytique, je ne puis me dispenser de remarquer combien la manière dont j'y ai considéré la Cristallographie s'écarte de celle qu'ont adoptée plusieurs savans qui jouissent d'une juste célébrité. Je suis parti de l'observation constante des faits, et je les ai suivis aussi loin qu'ils pouvaient aller, sans me permettre de dépasser la limite à laquelle ils s'arrêtaient. Les formes primitives et celles des molécules intégrantes y sont déduites des résultats de la division mécanique, et l'existence des lois de la structure, auxquelles j'ai supposé que ces dernières étaient soumises dans leur arrangement, est prouvée par l'accord des angles mesurés avec les angles calculés.

Les savans dont j'ai parlé ont pris en quelque sorte la route opposée. L'arbitraire des déterminations qu'ils ont données de la forme primitive d'un même minéral, et qui sont en partie fondées sur l'observation et en partie fictives, se montre dans les divergences qui existent entre elles sous ce dernier rapport. Les molécules intégrantes et les lois de la structure sont comme si elles n'existaient pas. Le passage aux formes secondaires est déterminé par des sections faites dans la forme primitive, qui substituent des surfaces planes, dont le niveau est purement idéal, à l'assortiment des bords ou des angles solides de molécules, qui termine au dehors le mécanisme de la structure. La considération de ce mécanisme se borne à un simple rapport entre les dimensions de l'espace qu'il occupe.

L'avantage qu'ont les formules analytiques, de simplifier la détermination des formes secondaires en la généralisant, et de représenter les propriétés qui semblent leur donner un langage, disparaît dans l'usage d'une méthode technique de calcul, dont les principes tendent à réduire les corps qui portent le plus visiblement l'empreinte du travail de la nature, à la condition des solides géométriques, dont on a dit avec raison qu'ils ne sont que les fantômes des corps physiques.

Lorsque j'ai commencé à m'occuper de la détermination des formes régulières sous lesquelles une partie des substances minérales s'offrent à nos observations, je n'avais considéré mon travail que comme un moyen de donner une extension à la physique des corps naturels, en faisant de la géométrie des cristaux, qui jusqu'alors n'avait offert qu'une multitude de faits isolés et épars, l'objet d'une théorie qui nous fît apercevoir la dépendance mutuelle et les liens communs de ceux qui se rapportent à une même espèce.

Mais à mesure que je multipliais les applications de cette théorie, des corps que l'on avait rangés dans telle espèce venaient se placer, d'après les lois de leur structure, parmi ceux qui faisaient partie d'une espèce différente, tandis qu'ailleurs, des corps qui se trouvaient éloignés l'un de l'autre dans les méthodes jusqu'alors adoptées, se touchaient dans les résultats de la théorie.

Je conçus alors que ce qui n'était dans l'origine qu'une manière d'expliquer la diversité des formes cristallines composées des mêmes molécules, pouvait être encore employé avec beaucoup d'avantage comme caractère distinctif de l'espèce à laquelle appartenaient ces formes. C'est d'après cette dernière considération que, dans mon Traité de Minéralogie et dans plusieurs Mémoires que j'ai publiés depuis, j'ai dirigé mes recherches vers les applications de la théorie à la distribution méthodique des espèces minérales, sans négliger les occasions d'en étendre les descriptions, en plaçant sur le tableau cristallographique des variétés de formes déjà connues, celles qui s'étaient offertes pour la première fois aux yeux des minéralogistes voyageurs.

J'ose dire que, si les opinions ont été partagées, ce n'est pas sur les principes de la théorie, considérée comme un moyen de représenter, à l'aide du calcul analytique, la marche de la cristallisation dans la production des formes régulières auxquelles elle donne naissance : ce que l'on a contesté à cette même théorie, c'est la justesse de ses applications à la méthode. Le but que je me suis proposé dans la troisième partie du Traité de Cristallographie que je publie aujourd'hui, a été de donner un grand développement aux considérations sur lesquelles est fondée la préférence que cette science me paraît mériter d'obtenir, pour donner des points fixes aux espèces, comme étant la seule dont les résultats, liés étroitement à la forme invariable des molécules intégrantes, se dérobent à l'influence des causes accidentelles qui altèrent l'unité de composition. Ces mêmes résultats deviennent par là susceptibles de cette détermination précise et rigoureuse d'où naissent l'évidence et la conviction qui en est la suite nécessaire.

Cette troisième partie est composée de neuf articles, dont je vais donner successivement les analyses.

Dans celle qui se présente d'abord, je remonte à la naissance des minéraux, et je déduis de ce qui se passe pendant la première époque de leur formation la définition de l'espèce minérale, dans laquelle je fais entrer non-seulement les qualités et les quantités respectives de leurs élémens, mais aussi les fonctions que ces derniers exercent les uns sur les autres. J'explique ce qu'on doit entendre par ces fonctions, et je fais voir combien elles influent sur la constitution physique des minéraux.

Je prouve ensuite que c'est à la Cristallographie plutôt qu'à la chimie qu'appartient la distinction des espèces, et je me fonde principalement sur ce que la condition essentielle, qui exige que l'espèce soit représentée, ne peut être remplie que par celle des deux sciences qui nous dépeint les minéraux tels que les a produits la nature, et non par celle qui ne nous les fait connaître qu'à l'aide d'une opération dont les résultats ont effacé leurs traits caractéristiques.

Dans les deux articles suivans, j'expose les avantages des systèmes de cristallisation, pour la distinction des espèces. Je considère d'abord ceux que j'appelle *généraux*, dont chacun a pour base un même genre de forme, tel que le parallélépipède. Si l'on compare entre elles deux formes secondaires relatives à deux systèmes particuliers, compris dans un de ceux dont je viens de parler, tels que le rhomboïde et le prisme à base carrée, on trouve que les diversités qu'elles empruntent de celles qui existent entre ces deux solides, suffisent pour indiquer qu'elles sont incompatibles dans une même espèce de minéral.

Les formes secondaires qui appartiennent à deux variétés d'un système particulier, telles que deux rhomboïdes de différentes mesures d'angles, sont encore susceptibles, au moins dans certains cas, de fournir des caractères distinctifs. C'est ce qui a lieu lorsqu'en comparant ces formes, prises dans leur ensemble, on observe parmi celles qui dérivent, par exemple, de tel rhomboïde primitif, les résultats de certains décroissemens, lesquels ne se rencontrent pas parmi celles qui se rapportent à un autre rhomboïde, ou réciproquement. Les molécules intégrantes de chaque rhomboïde semblent être douées d'une faculté élective, qui détermine en elles une tendance particulière vers certaines lois et une sorte d'indifférence pour d'autres lois, quoiqu'aussi simples ou même plus simples que les premières. Je cite divers exemples qui confirment cette manière de voir.

Le quatrième article a pour but la solution d'une difficulté que l'on a opposée à la méthode de classification fondée sur la Cristallographie. Elle est tirée de ce que cette méthode, dans un certain nombre de cas, assigne une même forme primitive, et par suite une même forme de molécule, à des espèces minérales très différentes. Je me bornerai ici à indiquer sommairement les considérations qui me paraissent fournir la réponse, et auxquelles je donne un grand développement dans l'article relatif à ce sujet. J'avais observé depuis long-temps que les formes communes à diverses espèces sont de celles qui offrent comme

*d..*

les limites des autres, telles que le cube et l'octaèdre régulier. J'ai découvert plus récemment, en comparant ces formes, sous le point de vue de la structure, qu'il existe entre elles une corrélation remarquable, qui les fait ressortir à côté de toutes les autres formes. J'en ai déduit la conséquence qu'elles sont les seules qui puissent se rencontrer dans des minéraux de diverse nature. Par une suite nécessaire, chacune des autres formes appartient exclusivement à l'espèce qui la présente. Je termine par une discussion qui est liée au même sujet, et qui se rapporte à la substance connue sous le nom de *fer spathique*, dont la formation est encore un mystère. Je fais voir que l'opinion la plus probable parmi celles qui ont été émises sur cette formation, est que la figure du rhomboïde calcaire, sous laquelle se montre le minéral dont il s'agit, est le résultat d'une de ces opérations que j'ai appelées *pseudomorphoses*, à l'aide desquelles une substance se substitue on ne sait comment, quoique le fait soit évident, à une substance différente, dont elle emprunte en même temps la forme.

J'arrive à un sujet qui offre, ce me semble, une grande preuve de l'avantage qu'ont les résultats de la Cristallographie sur ceux de la chimie, pour la distinction des espèces. Je veux parler des diversités qu'offrent les analyses d'un même minéral, faites sur des morceaux pris dans différentes localités. J'explique ces diversités, en considérant que le liquide dans lequel étaient suspendues les molécules destinées à former des cristaux de tel minéral, renfermait en même temps celles d'une ou plusieurs substances étrangères, dont une partie s'est interposée entre les premières, sans nuire à leur tendance pour obéir aux lois de leur propre cristallisation. Je développe les considérations qui naissent de cette cause de divergence entre deux sciences, dont l'une opère souvent sur des mélanges, tandis que pour l'autre tous les minéraux sont purs. J'expose un résultat remarquable qui sert à préciser l'idée que l'on doit attacher au mot de *mélange*, et auquel le célèbre Berzelius a été conduit par ses belles recherches sur la composition des minéraux, ramenée au principe des proportions définies. Il consiste en ce qu'il est possible que les molécules dont un minéral est mélangé, forment, par leur réunion, un ou plusieurs composés particuliers, sans que le minéral cesse de se montrer sous la même forme. Dans d'autres cas, la combinaison intime de toutes les molécules qui ont concouru à la formation du minéral constitue une espèce distincte, et cette circonstance est encore indiquée par le changement qu'a subi la forme, et qui lui imprime un caractère distinctif. Je cite divers exemples relatifs à ces différens cas, et je termine par celui auquel se rapportent certains minéraux, qui sont des assemblages de plusieurs composés, dont chacun pourrait exister ou même existe séparément, en sorte qu'il se trouve classé dans la méthode sous le nom qui lui convient. Les chimistes ont évité l'embarras du choix, en considérant ces assemblages comme produits par une combinaison unique, à laquelle ont contribué les molécules de tous les composés, et d'où résulte une espèce toute particulière. Mais la Cristallographie prouve qu'ils ne sont encore unis que par voie de mélange, et que c'est l'un d'eux qui communique à l'ensemble le caractère de sa propre forme; d'où il suit que c'est lui qui détermine l'espèce à laquelle appartient le minéral.

Le but que je me propose dans le huitième article est de disculper certains résultats de la Cristallographie du reproche de ne pas s'accorder avec ceux de l'analyse chimique. Tel est le cas où deux substances dans lesquelles la forme de la molécule intégrante est absolument la même, et de plus n'est pas une limite, ne diffèrent que par le rapport de leurs principes composans, tel que le donne l'analyse. Dans le même cas, les indications des caractères physiques viennent à l'appui de celles qui se tirent de la forme cristalline; d'où je conclus que si le principe des proportions définies paraît s'opposer au rapprochement des deux substances, c'est l'effet d'une de ces anomalies de l'analyse, dont on pourrait citer de nombreux exemples.

Avant d'en venir à l'objet principal du neuvième article, j'expose les diverses circonstances qui se présentent successivement, lorsqu'en parcourant le globe, on observe à la fois la nature des roches dans lesquelles sont engagés des cristaux, dont la formation a eu lieu simultanément avec celle de ces roches, et les formes sous lesquelles ils se montrent. Parmi ces circonstances, il en est une qui paraît être inattendue, et sur laquelle je m'arrête de préférence, comme offrant une nouvelle preuve d'autant plus remarquable des avantages de la Cristallographie, relativement à la distinction des espèces minérales, que cette science a ici à lutter en même temps contre la méthode dont l'analyse fournit les bases, et contre celle qui est fondée sur le témoignage des sens, et dont le célèbre Werner est l'inventeur.

La circonstance dont il s'agit est celle où des substances situées dans des terrains très différens, et entre lesquelles le contraste des caractères extérieurs a indiqué une ligne de séparation dont l'analyse paraît avoir confirmé l'existence, viennent se toucher, par la ressemblance parfaite qu'ont entre elles les formes de leurs molécules intégrantes. Je choisis pour exemples des variétés de trois minéraux, savoir, le pyroxène, l'amphibole et la tourmaline, dont on a fait des espèces distinctes sous des noms différens. En comparant des cristaux pris parmi ceux des substances dont je viens de parler, et qui dans ma méthode portent le même nom, je fais voir que leur forme est modifiée par une même combinaison de lois de décroissement qui leur sont communes, et dont le nombre va quelquefois jusqu'à neuf. Le refus d'admettre ici une unité d'espèce rend inexplicable ce concours de lois qui semblent s'être cherchées pour aller se rencontrer dans les corps qui leur ont servi de ralliement. Dans d'autres cas, ce n'est pas tant le nombre des décroissemens, que ce qu'ils ont de particulier, qui ind(que l'identité des corps que l'on avait séparés. L'électricité acquise par la chaleur, lorsqu'elle existe, comme cela a lieu dans les tourmalines, joint ses indications à celles qui se tirent des lois de la structure. Une ressemblance aussi parlante ne saurait être l'effet d'une analogie de rencontre, entre les minéraux qui la présentent. Elle me paraît démontrer la nécessité de les réunir dans la méthode, pour que la nature s'y trouve d'accord avec elle-même.

L'article suivant, qui est le dixième, est un appendice à la méthode cristallographique, qui commence par un court exposé des altérations que subissent les formes des minéraux, d'un individu à l'autre, en passant insensiblement de l'état de cristallisation régulière et nettement prononcée, qui les montre dans toute leur perfection, à celui où elles n'en offrent plus aucune trace, et où le minéral prend le nom de compact. J'indique un certain nombre de caractères, dont la plupart sont tirés des propriétés physiques, et quelques-uns des propriétés chimiques, qui peuvent servir à faire reconnaître les minéraux, lorsqu'ils se refusent à l'application des caractères géométriques. Je me borne à ceux qui sont encore inédits, ou qui se trouvent épars dans différens Mémoires que j'ai publiés depuis quelques années, mon but n'étant que de donner quelques exemples des moyens qui me paraissent mériter d'être employés de préférence, pour suppléer, jusqu'à un certain point, à l'absence de la forme, comme étant inhérens aux molécules intégrantes.

Le onzième article, qui est le dernier, renferme une histoire abrégée des progrès qu'a faits la Cristallographie depuis environ trente ans, soit en reculant les limites de la théorie, par de nouvelles applications des lois de la structure, soit en remplissant des vides sur le tableau de la méthode, par de nouveaux résultats relatifs à la distinction des espèces. Un des plus remarquables parmi ces derniers, qui est très récent, est celui qui se rapporte au cuivre dioptase et au cuivre hydraté silicifère, que plusieurs savans ont regardé comme n'en étant qu'une variété amorphe, et qui s'en rapproche par sa composition. Je compare les deux substances sous le rapport de leurs formes cristallines, et la conséquence qui se déduit de cette comparaison est qu'elles sont incompatibles dans une même espèce.

Parmi les résultats qui ont contribué aux progrès de la Cristallographie, je comprends ceux qui ont eu pour but d'ajouter un nouveau degré de justesse à la détermination des formes primitives, à l'aide des mesures prises sur des cristaux plus nettement prononcés que ceux qui avaient servi à mes premières observations; et je dois ici un hommage de reconnaissance à M. de Monteiro, pour la bonté qu'il a eue de faire tourner à l'avantage de ce traité, la grande habileté à laquelle il est parvenu dans l'art de manier le goniomètre. Plusieurs déterminations sur lesquelles il me restait des doutes ont été vérifiées, d'autres ont subi de petites corrections qui étaient nécessaires : telles sont celles qui ont été faites à l'égard du feld-spath, de l'apophyllite et de l'épidote.

Mais c'eût été peu pour M. de Monteiro de me fournir les moyens de perfectionner les anciennes applications de ma théorie : on lui en doit à lui-même de très heureuses, relativement à deux nouvelles variétés de chaux carbonatée, que la cristallisation a marquées d'un caractère de symétrie qui a fixé son attention. Je choisirai, comme exemple, celle qui s'est présentée la dernière à son observation. Le caractère dont il s'agit consiste en ce que les intersections de certaines faces, avec celles qui leur sont adjacentes vers un même sommet, sont parallèles entre elles. M. de Monteiro représente la combinaison des lois de décroissement d'où dépend ce caractère, par une formule générale, d'après laquelle on détermine immédiatement dans chaque cas particulier la loi relative aux faces qui offrent l'empreinte du caractère. Je me dispenserai d'autant plus d'entrer à cet égard dans de plus grands détails, que deux Mémoires, où le savant auteur a développé lui-même les résultats auxquels il est parvenu, ont été publiés dans un ouvrage périodique très connu (1), à l'aide duquel ceux qui sont en état d'apprécier ces résultats ont pu juger par eux-mêmes de tout l'intérêt que mérite d'inspirer le travail qui en est l'objet.

J'ai déjà parlé de l'avantage qu'ont les projections des formes cristallines d'en faciliter l'étude; mon but, dans la quatrième partie de cet ouvrage, a été d'exposer la méthode qui m'a paru la plus simple pour tracer ces sortes de portraits de

(1) Journal des Mines, vol. XXXIV, pag. 161 et suiv., et Annales des Mines, 1820.

manière qu'ils représentassent, le plus fidèlement qu'il serait possible, les objets qui auraient servi de modèles. Cette méthode, dont j'ai conçu l'idée dès le moment où j'ai commencé à m'occuper de la détermination géométrique de ces objets, et que j'ai depuis perfectionnée à mesure que les occasions de l'employer se multipliaient, n'a été bien connue jusqu'ici que de ceux de mes élèves auxquels j'avais confié le dessin des projections, destinées pour les ouvrages que je me propose de publier. Je la présente dans celui-ci avec le développement convenable pour mettre les cristallographes en état de l'appliquer aux formes cristallines nouvellement découvertes, dont ils se proposeraient de donner des descriptions accompagnées de figures.

On connaît depuis long-temps une méthode qui est d'un grand usage dans la peinture, et à laquelle on a donné le nom de *perspective*. Elle consiste dans l'art de représenter, sur une surface plane, différens objets, tels qu'ils nous paraissent à une distance et à une hauteur donnée. On suppose qu'il existe entre l'œil et ces objets un plan situé verticalement, et que je nomme *plan idéal*, et le but de la méthode est de tracer sur ce plan un dessin qui soit tellement en harmonie avec l'objet, que les rayons envoyés vers l'œil par ses différens points aient tous les mêmes directions que s'ils partaient immédiatement de cet objet. Il est clair que l'image produite au fond de l'œil par les premiers rayons serait exactement semblable à celle que les seconds auraient fait naître. Car tout dépend de l'ordre que gardent entre eux les rayons au moment où ils entrent dans l'œil. Le reste se passe comme à son insu.

Après avoir exposé les causes de l'illusion que produit la perspective, je ferai connaître la méthode des projections que j'ai adoptée de préférence pour remplir le même objet. Elle ne diffère de la perspective qu'en ce que l'objet auquel elle se rapporte est censé être vu à une distance infinie, ensorte que les rayons partis de ses différens points sont parallèles entre eux. On verra que si elle représente les formes cristallines sous un aspect moins séduisant, elle a sur l'autre l'avantage d'être plus favorable à leur étude.

Cette méthode, considérée dans ses applications, suit une marche particulière, assortie à son objet. La géométrie descriptive, dont le célèbre Monge est le créateur, et dont il a fait de belles et nombreuses applications à la pratique de divers arts qui servent si utilement la société, refuse de se plier aux besoins de la Cristallographie. La première des opérations qu'elle exigerait aurait pour but de représenter immédiatement, sur un plan horizontal, la forme d'un cristal souvent chargé de facettes situées en divers sens, dont le nombre va jusqu'à 134, dans une variété de fer sulfuré, que j'ai nommée parallélique. Une opération aussi compliquée ne serait propre qu'à rebuter le cristallographe qui l'aurait entreprise, par le travail également pénible et fastidieux dans lequel il se trouverait entraîné. L'autre méthode suit une route beaucoup plus accessible, indiquée par la théorie des lois auxquelles est soumise la structure des cristaux. Elle part de la forme du noyau, qui est toujours simple, et c'est son image que trace le cristallographe sur le plan dont j'ai parlé. Cette opération est suivie de deux autres, dont je donnerai une description détaillée, et dans lesquelles les rayons partis des différens points de l'objet parviennent par degrés aux directions convenables, pour que l'image produite par les traces qu'ils sont censés laisser de leur passage à travers le plan idéal, se présente sous l'aspect qui s'accorde avec les positions respectives de l'objet et de l'œil.

C'est en travaillant sur la projection de la forme primitive, obtenue à l'aide des opérations dont je viens de donner une idée, que l'on en déduit immédiatement les formes secondaires qui naissent des décroissemens sur ses bords et sur ses angles. On peut y parvenir par trois méthodes différentes. L'une consiste à construire sur le noyau les faces des formes dont il s'agit, en y faisant passer des plans coupans dont les positions sont indiquées par les lois de décroissement d'où dépendent ces faces. Les intersections des plans dont il s'agit répondent aux arêtes du cristal qui sert de modèle, et l'on a les données nécessaires pour en tracer séparément le dessin sur le même papier, en menant des parallèles aux intersections désignées.

Une seconde méthode, à la fois plus simple et susceptible d'une plus grande précision, mais qui ne peut être employée que dans certains cas, est fondée sur les propriétés géométriques de la forme proposée. Les rapports que donne le calcul entre les dimensions de cette forme, indiquent les directions des principaux traits du dessin qui doit en offrir l'image, et le reste se présente comme de lui-même.

La troisième méthode est analogue à la manière de considérer un cristal de forme secondaire, en y distinguant deux parties, l'une constante, qui est le noyau, l'autre variable, qui est la matière enveloppante. On laisse subsister la projection de ce noyau, et l'on trace autour de lui les faces qui résultent des décroissemens sur ses bords ou sur ses angles. Il en résulte que la totalité du dessin représente ce noyau engagé dans la forme secondaire, conformément à la marche de la structure.

J'ai présenté les résultats des applications que j'ai faites des trois méthodes que je viens d'exposer, à plusieurs variétés de formes, choisies parmi celles que présentent la chaux carbonatée, le pyroxène, la baryte sulfatée, l'émeraude, le cuivre gris, la chaux sulfatée et le grenat. Il sera facile de se faire une idée de la marche que j'ai adoptée pour chaque opération, comme étant celle qui m'a paru la plus simple, en la suivant de l'œil à l'aide de la figure qui en offre le développement et la description détaillée que j'en ai donnée.

J'ai été dans le cas de résoudre un problème d'un autre genre, dont j'ai fait un grand usage. Le but que je m'y suis proposé était de répéter les opérations relatives à des figures de cristaux tracées par une main étrangère. Pour y parvenir, il fallait remonter à la naissance de ces opérations, et reproduire cette image du noyau dont j'ai parlé ci-dessus, telle que l'avait dessinée l'auteur sur un plan horizontal. J'indique un moyen mécanique de la retrouver facilement à travers les traits de la projection qui en a été déduite à l'aide d'une opération ultérieure.

Je remarquerai, en terminant cet article, que le sujet dont il offre l'exposé étant susceptible d'une infinité de variations, on ne peut prescrire aucune règle générale sur la marche à suivre dans les opérations qui s'y rapportent. Les exemples que j'ai donnés serviront à initier celui qui les aura bien conçus dans la pratique d'un art qui n'a point de terme; le reste dépendra de l'exercice et du travail. Souvent une étude attentive de ce qui a été fait, donne des idées sur la manière de se conduire dans ce qui se présente à faire, et rend ingénieux à se créer de nouveaux moyens d'application à mesure que le sujet s'offre sous de nouvelles faces.

Je n'ai rien négligé pour n'omettre dans ce Traité de Cristallographie aucun des moyens qui peuvent être employés à la détermination des formes cristallines, considérées sous le double rapport de la théorie et de la méthode. En profitant, pour remplir mon but, des résultats que j'avais insérés dans mon Traité de Minéralogie, je leur ai donné un grand développement et j'y ai fait des additions considérables. A plus forte raison ai-je lieu de craindre que mon nouvel ouvrage ne fasse renaître les réclamations que l'autre a excitées. On m'avait objecté que tous ces calculs, auxquels je paraissais attacher tant d'importance, ne servaient qu'à rendre la Minéralogie inaccessible pour une grande partie de ceux qui se proposeraient de l'étudier; qu'elle devait se suffire à elle-même, et que la Géométrie n'était entrée pour rien dans l'enseignement des hommes justement célèbres qui avaient fait faire de si grands progrès à la science, en se rendant clairs et intelligibles pour toutes les classes d'élèves. La meilleure réponse que l'on puisse faire aux savans qui seraient tentés de renouveler ces objections, est de leur opposer l'exemple de ceux qui ont eu le courage de franchir les difficultés qu'ils ont d'abord rencontrées sur une route qui s'est applanie devant eux à mesure qu'ils avançaient vers le terme, et ont fini par se féliciter d'avoir fait une étude approfondie d'une des sciences les plus propres à exercer la sagacité de l'esprit et à le meubler de connaissances également agréables et utiles.

---

(1) L'Ouvrage que je publie en ce moment doit servir à la fois d'introduction et de complément au Traité de Minéralogie, dont je viens de terminer la seconde édition, à laquelle j'ai travaillé pendant vingt ans. Ce Traité qui, je l'espère, paraîtra neuf à beaucoup d'égards, sera composé de quatre volumes in-8° et d'un atlas in-4°. L'impression en est commencée, et dirigée par les soins éclairés de MM. Bachelier et Huzard, libraires, auxquels j'ai donné toute ma confiance depuis la mort de madame Courcier.

# TABLE ALPHABÉTIQUE
## DES MATIÈRES
### CONTENUES DANS LES DEUX VOLUMES.

(Les chiffres romains indiquent les tomes, et les chiffres arabes les pages.)

FIN DE LA TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES.

# TRAITÉ

## DE

# CRISTALLOGRAPHIE.

## PARTIE SYNTHÉTIQUE.

### IDÉE GÉNÉRALE DES MINÉRAUX, ET DES CARACTÈRES QUI LES DISTINGUENT DES ÊTRES ORGANIQUES.

1. L'ASSEMBLAGE de tous les êtres qui habitent la surface du globe ou en occupent l'intérieur, a été partagé en trois grandes sous-divisions, dont chacune est distinguée des autres par des caractères qui lui sont propres. A la première appartiennent les animaux, qui, jouissant à la fois d'un principe de vie et de la faculté de sentir, dirigent à leur gré les divers mouvemens auxquels se prête l'admirable combinaison des organes dont ils ont été pourvus. Dans la seconde sous-division se rangent les plantes, qui ont aussi reçu en partage un principe de vie, mais qui sont privées de sentiment et de mouvement spontané. La troi-

sième division, placée à une plus grande distance des précédentes que celle qui les sépare l'une de l'autre, est remplie par les minéraux, qui se composent d'une matière brute, insensible, inactive. Ils ne sont que des assemblages de molécules similaires, liées entre elles par cette force à laquelle les chimistes ont donné le nom d'*affinité*. L'homme, seul capable d'étudier la nature, plane au-dessus de tous les autres êtres à l'aide de cette intelligence, le plus beau présent qu'il ait reçu de la divinité, puisque c'est par elle qu'il en devient l'image.

2. La manière dont s'accroissent les minéraux, établit entre eux et les êtres des deux autres règnes une nouvelle ligne de démarcation. Dans les animaux et dans les plantes, l'accroissement se fait par le développement simultané de toutes les parties de l'individu, à l'aide de la nourriture que reçoivent les organes destinés à l'élaborer. Les minéraux s'accroissent au contraire par une simple juxta-position de particules qui s'appliquent à leur surface. Leur formation commence par quelques molécules qui s'arrangent autour d'un centre commun. De nouvelles molécules attirées par ce petit solide l'enveloppent en se fixant chacune sur le point avec lequel elle est en contact, et l'accroissement continue de même par une succession de couches concentriques, qui se superposent, et dont chacune ajoute son volume à celui du corps qui la reçoit.

On a peint d'un seul trait les différences que présentent les minéraux comparés aux animaux et aux végétaux, en disant de ceux-ci, qu'ils ont une organisation, et des autres, qu'ils n'ont qu'une structure : dans les premiers, l'organisation suppose une combinaison de forces sans cesse en activité, un jeu continuel de toutes les parties internes qui, par des fonctions diversifiées, concourent à la conservation des individus. Le mécanisme de la structure au contraire se borne à un arrangement uniforme de molécules que l'affinité fixe à mesure qu'elle les amène, et qu'elle tient ensuite enchaînées les unes aux autres; ou, si elles ont des mouvemens, ils sont accidentels, et se réduisent aux oscillations imperceptibles qu'occasionne dans ces molécules l'inconstance de la température, en faisant varier d'un instant à l'autre le rapport entre la force du calorique qui tend à les écarter, et celle de l'affinité qui agit pour les rapprocher.

3. Les minéraux composés, comme je l'ai dit, d'une matière morte, n'ayant ni physionomie ni langage, paraissent au premier abord, n'offrir qu'un léger degré d'intérêt aux personnes qui se proposeraient de les étudier, en comparaison de celui qu'inspirent les productions des autres règnes. Les animaux qui se rapprochent de l'homme par leur conformation, et dont une partie vit, pour ainsi dire, en société avec lui, semblent lui présenter un sujet d'étude beaucoup plus attrayant. L'aspect seul des plantes, qui se montrent de toutes parts à la surface de la terre dont

elles font l'ornement, est une invitation puissante à leur donner la préférence sur les matières brutes qu'elle dérobe à nos yeux, en les tenant cachées dans son sein, comme pour les soustraire à un parallèle qui ne serait pas à leur avantage.

Mais les minéraux rachètent, sous d'autres rapports, ce que les premières apparences leurs font perdre, vis-à-vis des êtres organiques, soit parce que la faculté admirable qu'ils ont de se métamorphoser, sans cesser de s'offrir sous un aspect régulier, tient à des lois de structure susceptibles d'être déterminées avec une précision rigoureuse; soit parce que plusieurs de leurs caractères sont liés à des propriétés physiques très remarquables fondées sur les lois de la lumière, sur celles de l'électricité et du magnétisme; soit parce qu'un grand nombre d'entre eux méritent d'autant mieux d'être connus, que la main de l'art en les élaborant les plie aux besoins et aux agrémens de la vie, soit enfin parce que la considération de leurs positions respectives dans la nature, a donné naissance à une nouvelle branche de connaissances, qui ajoute beaucoup à l'intérêt qu'ils inspirent par eux-mêmes, lorsqu'on les étudie séparément.

*Notion des formes cristallines.*

4. Dans la comparaison que j'ai faite des minéraux avec les êtres organiques, je les ai considérés comme des assemblages de molécules similaires, liées entre

elles par l'affinité. Ces molécules, ainsi que nous le verrons plus bas, ont des formes également remarquables par leur régularité et par leur simplicité. Or, lorsque celles qui appartiennent à un minéral sont suspendues dans un liquide, et qu'ensuite ce liquide, soit en s'évaporant, soit par quelque autre cause, les abandonne à leur affinité réciproque, et de plus lorsqu'aucune force perturbatrice ne gêne cette affinité, les molécules en s'unissant les unes aux autres par les faces les plus disposées à cette réunion, composent, par leur assemblage, des corps réguliers terminés par des faces planes, et analogues aux solides de la Géométrie. Ce sont ces corps que l'on a nommés en général *cristaux*, quelle que soit la substance qui en ait fourni les matériaux.

5. Ici se présente une nouvelle différence bien remarquable entre les minéraux et les êtres organiques. Si l'on parcourt ces parterres où se trouvent rangées dans un ordre si bien assorti aux rapports naturels, les richesses végétales de tous les pays du monde, on y voit que tous les individus d'une même espèce se ressemblent par leur forme, en sorte que toutes les fleurs ont leurs étamines et leurs styles en même nombre, et disposés de la même manière. On peut en dire autant des pétales, des folioles du calice; et la ressemblance s'étend jusqu'à la forme des tiges et à la disposition générale des feuilles; les différences, s'il en existe, ne tiennent qu'à des nuances de port, de grandeur, de couleur, en sorte que l'on

peut dire que celui qui a vu un seul individu, a vu l'espèce entière. Dans le règne minéral au contraire, les cristaux qui appartiennent à une même espèce présentent souvent des formes qui sans cesser d'être régulières, diffèrent plus ou moins sensiblement les unes des autres, soit par le nombre, soit par les positions respectives de leurs faces. J'en citerai, dans la suite de nombreux exemples, et nous verrons même que parmi les formes dont il s'agit, il en est qui n'offrent aucun trait de ressemblance, et paraissent être entièrement étrangères les unes à l'égard des autres.

Ces contrastes sont d'autant plus propres à exciter la surprise, que les formes qui les présentent portent l'empreinte d'un travail géométrique, et ont ce caractère de régularité qui semble emporter avec lui l'idée de constance et d'uniformité. Le but principal de cet Ouvrage est d'éclaircir le paradoxe qui naît de ces contrastes, et de montrer qu'au milieu de tous ces résultats dont chacun semble donner au travail de la nature un air de nouveauté sous lequel on serait tenté de ne la plus reconnaître, elle ne cesse point d'être semblable à elle-même.

### *Division des formes cristallines considérées en général.*

6. Le point de vue auquel je me suis proposé de ramener l'étude des corps réguliers que produit la cristallisation, m'a paru exiger que la définition et la no-

menclature de ces corps fussent fixées d'une manière assortie à la solution des problèmes, dont ils offrent les sujets.

7. Les figures des faces qui composent la surface des cristaux, conserveront les dénominations de *triangle*, de *carré*, de *rhombe*, de *trapèze*, etc., qu'elles portent dans la Géométrie ordinaire, ainsi que celles de *triangle équilatéral*, *isocèle*, *scalène*, etc., de *parallélogramme rectangle*, *obliquangle*, etc., que l'on a données à leurs diverses modifications.

Une face est dite, en général, être *verticale*, *horizontale* ou *oblique*, suivant que sa direction déterminée par la position naturelle du cristal, est celle qu'indique l'une ou l'autre des dénominations qui viennent d'être énoncées.

Les lignes qui terminent les faces d'un cristal portent le nom de *bords* ou de *côtés*. On donne plus particulièrement le nom d'*arêtes* aux mêmes lignes, lorsqu'on les considère comme situées à la rencontre de deux faces. On dit d'une arête qu'elle est *verticale*, *horizontale* ou *oblique*, en prenant ces mots dans le même sens que pour les faces.

8. On distingue dans les cristaux trois sortes d'angles : les *angles plans*, ou ceux qui sont formés par deux bords adjacens sur une même face; les *angles saillans*, ou ceux que font entre elles les faces qui se réunissent deux à deux sur une même arête; et les *angles solides*, ou ceux qui résultent du concours de plus de deux angles plans. Un angle solide est trièdre,

tétraèdre, pentaèdre, etc., suivant qu'il est composé de trois angles plans, de quatre, de cinq, etc.

Les angles plans ou saillans sont égaux, lorsqu'ils ont pour mesure le même nombre de degrés. J'appelle *bords identiques* ceux qui, étant égaux entre eux, servent de ligne de jonction à des faces qui font entre elles des angles saillans pareillement égaux.

Les angles solides sont égaux, lorsque les angles plans qui les composent ont comparativement des mesures égales, et sont également inclinés entre eux.

9. J'appelle *axe* en général une ligne droite menée par le centre d'un cristal, et dont telle est la direction, que toutes les parties du cristal sont disposées symétriquement à son égard. Un des principaux caractères de cette symétrie dépend de ce que les lignes menées perpendiculairement sur l'axe, en partant des angles solides égaux et situés sur les parties environnantes, sont égales entre elles. Un même corps est souvent susceptible d'être traversé par plusieurs lignes dont chacune peut être prise pour axe. Mais il y a, dans ce cas, un axe principal, que je nomme *axe de cristallisation*, et qui se distingue des autres, en ce qu'il est dirigé verticalement, lorsque le cristal est dans sa position naturelle. Cette position est presque toujours indiquée par l'aspect de la forme considérée en elle-même; mais les indices qui la font surtout reconnaître sont ceux qui se tirent du rapprochement des différentes formes cristallines, originaires d'une même espèce, avec l'une d'entre

elles, qui sert comme de mesure commune pour les comparer.

Ce que je vais dire des solides que considère la Géométrie des cristaux se bornera à la notion des formes qui présentent ce dernier caractère, et de celles qui sont comme les élémens dans lesquels elles se résolvent, lorsqu'on les sous-divise à l'aide d'une opération dont je parlerai dans la suite.

10. La plus simple est le *tétraèdre*, que l'on appelle communément *pyramide triangulaire*. Il est *régulier*, lorsque toutes ses faces sont des triangles équilatéraux; tel est celui que représente la fig. 1, pl. I. Il est *symétrique*, lorsque ses faces sont des triangles isocèles, égaux et semblables, *bca*, *bda*, *dac*, *dbc* (fig. 2); *hémi-symétrique*, lorsqu'étant toujours des triangles isocèles, elles ne sont égales et semblables que deux à deux, comme *bda*, *bca* (fig. 3) d'une part; et *dac*, *dbc* de l'autre; *irrégulier*, lorsqu'elles diffèrent toutes les unes des autres, ou qu'il n'y en a que deux qui soient égales et semblables. Cette préférence, donnée au mot de *tétraèdre*, est fondée sur ce que la fonction que fait le plus ordinairement ce solide, dans les produits de la cristallisation, s'accorde peu avec l'idée que l'on attache au nom de *pyramide*, et qui est celle d'un solide à quatre faces dont une que l'on considère comme la base est située horizontalement. Tel est au contraire l'aspect que présentent les cristaux dans lesquels le tétraèdre entre comme élément, qu'il détermine, relа-

tivement à ce dernier solide, une position sous laquelle aucune de ses faces n'est censée faire l'office de base, et que d'une autre part les figures et l'assortiment des faces dont il s'agit, tendent à écarter encore davantage l'idée de pyramide. Ainsi le tétraèdre régulier (fig. 1) se trouve situé de manière que deux de ses arêtes, telles que *ab*, *cd*, qui ont leurs directions perpendiculaires entre elles, étant parallèles à l'horizon, les faces dont ces arêtes sont les lignes de jonction ont des positions obliques. Quelquefois cependant le tétraèdre régulier s'offre d'une manière isolée, et sans aucune relation de position avec celle d'une autre forme; mais quoiqu'il paraisse rentrer alors dans l'analogie des pyramides, il conviendrait d'autant moins de lui en donner le nom, que toutes ses faces étant dans le même cas il n'y a aucune raison de considérer comme base l'une plutôt que l'autre.

Ce que j'ai dit d'abord du tétraèdre régulier s'applique à celui que je nomme *symétrique*. La fig. 2 représente un de ces tétraèdres qui appartient au zircon. Les bases *ab*, *cd* des triangles isocèles *acb*, *adb*, *cbd*, *cad*, qui composent sa surface, font aussi entre elles des angles droits, et sont de même situées horizontalement. Mais dans le tétraèdre symétrique que l'on voit (fig 4), et qui est celui du grenat, les bases *cd*, *ab* des triangles isocèles pris deux à deux, étant toujours perpendiculaires entre elles, sont inclinées à l'horizon, et l'une des deux autres arêtes, savoir, *ad*, est située verticalement, parce qu'elle se confond avec l'axe du cristal dont ce tétraèdre fait partie.

Dans le tétraèdre hémi-symétrique de la fig. 3, et qui est celui de la topaze, les bases *cd*, *ab* des triangles isocèles ont les mêmes relations, soit entre elles, soit par rapport à l'horizon, et chacune d'elles est commune à deux triangles égaux et semblables, qui ont aussi des positions obliques.

L'axe géométrique d'une pyramide est une ligne abaissée d'un des angles solides sur le milieu de la face opposée que l'on considère comme base, et que l'on suppose située horizontalement. Il suit de là que cet axe n'est censé exister dans aucun des tétraèdres représentés par les figures 1, 2, 3 et 4. Mais tous, à l'exception de celui du grenat que l'on voit fig. 4, ont pour axe de cristallisation la ligne qui passe par les milieux des arêtes *ab*, *cd*; cette ligne étant dirigée verticalement, à cause de la position horizontale des arêtes dont il s'agit. A l'égard du tétraèdre du grenat (fig. 4), son axe de cristallisation est en quelque sorte suppléé par celui du cristal auquel appartient ce tétraèdre, et qui coïncide, comme je l'ai dit, avec l'arête verticale *ad*.

Lorsque le tétraèdre régulier existe isolément, on peut choisir à volonté pour sa base l'une quelconque de ses faces, en donnant à celle-ci une position horizontale, et la ligne verticale menée par le centre de cette base sera en même temps l'axe géométrique et celui de cristallisation.

11. Parmi les parallélépipèdes, le *cube* conserve sa dénomination. Il se trouve dans sa position naturelle lorsque deux de ses faces opposées prises à volonté pour bases sont horizontales. Cette position détermine celle des deux axes, l'un géométrique, l'autre dit *de cristallisation*, qui se confondent en une seule ligne menée par les centres des bases.

12. Le parallélépipède dont les six faces sont des rhombes égaux et semblables *abdf*, *agqf*, etc. (fig. 5), s'appelle *rhomboïde*. Parmi les huit angles solides opposés sur ce parallélépipède, il y en a toujours deux tels que *a*, *s*, qui sont semblables et égaux, tandis que chacun des six autres est composé de deux angles égaux entre eux, et d'un troisième qui est le supplément de l'un ou l'autre des deux premiers. La ligne *as* qui passe par les deux angles semblables et égaux, est l'axe géométrique et à la fois l'axe de cristallisation du rhomboïde. Cet axe étant toujours dirigé verticalement, les points *a*, *s* qui le terminent, prennent les noms de *sommets*. Le rhomboïde est obtus ou aigu, suivant que les angles plans situés aux sommets sont eux-mêmes obtus ou aigus.

Les choses étant dans cet état, l'angle plan contigu au sommet supérieur *a*, sur l'un quelconque *bafd* des rhombes adjacens, s'appelle *angle supérieur* de ce rhombe. L'angle *d*, opposé au précédent, porte le nom d'*angle inférieur*, et les deux autres *b*, *f* s'appellent *angles latéraux*. Si l'on veut désigner les angles solides dont ces derniers font partie, on emploie la dénomination d'*angles solides latéraux*.

On nomme *bords supérieurs* ceux qui sont de même contigus au sommet *a*, et *bords inférieurs* ceux qui sont opposés aux deux précédens. La diagonale *ad* du même rhombe, qui aboutit au sommet, est la *diagonale oblique*, et l'autre *bf* est la *diagonale horizontale*, les positions de ces lignes étant nécessairement celles qu'indiquent ces noms, quels que soient les angles du rhomboïde. Nous verrons dans la suite qu'il suffit, pour l'application de la théorie, de considérer un seul des rhombes adjacens au sommet supérieur.

On nomme *coupe principale* d'un rhomboïde, celle qui passe par deux des arêtes, telles que *af*, *sx* (fig. 6) contiguës à l'axe, et opposées entre elles, et par les diagonales obliques *fs*, *ax* comprises entre ces arêtes. La coupe transversale *lnrz* est celle qui est prise par un plan perpendiculaire aux arêtes parallèles *af*, *bd*, *xs*, *gq*. Les angles de cette coupe mesurent les incidences des faces l'une sur l'autre, et ce sont les valeurs particulières de ces incidences qui caractérisent le rhomboïde que l'on considère, et servent à le distinguer des autres solides de la même espèce.

13. Le nom de *prisme*, sans aucune désignation particulière du nombre des *faces latérales*, ou des *pans*, s'applique en général aux parallélépipèdes qui diffèrent de ceux que je viens d'indiquer.

Le *prisme quadrangulaire symétrique* est celui dont la coupe prise par un plan perpendiculaire aux bords qui unissent les faces latérales, et que j'appellerai aussi *coupe transversale*, est un carré. Le *prisme rectangulaire* est celui dans lequel la coupe transversale est un rectangle. Si cette coupe est un rhombe, le prisme est dit être *rhomboïdal*; lorsqu'elle est un parallélogramme obliquangle, le prisme prend le nom de *quadrangulaire irrégulier*.

Chacun des prismes que nous venons de considérer reçoit une nouvelle épithète qui indique la position de sa base relativement aux pans. Il est *droit*, si cette base est perpendiculaire sur les pans. La fig. 7 représente un prisme droit symétrique qui appartient à la méïonite; la figure 8 un prisme droit rectangulaire, qui se rapporte à la cymophane; la fig. 9, un prisme droit rhomboïdal, qui se trouve parmi les cristaux de baryte sulfatée; et la fig. 10, un prisme droit quadrangulaire irrégulier, qui appartient à l'épidote (1).

Le prisme est *oblique* en général, lorsque sa base est inclinée sur tous ses pans, ou du moins sur quelques-uns d'entre eux. La fig. 11 représente un prisme oblique rectangulaire, qui se rapporte au fer phosphaté; la fig. 12, un prisme oblique rhomboïdal, qui appartient au pyroxène; et la fig. 13, un prisme oblique quadrangulaire irrégulier, qui se rapporte au disthène.

(1) Je déterminerai dans la suite, d'une manière précise, les angles de ces différens solides, et le rapport de leurs dimensions.

Lorsque toutes les faces du prisme sont des parallèlogrammes obliquangles, je lui conserve le nom de *parallélépipède obliquangle*, que lui ont donné les géomètres. La figure 14 représente un prisme de ce genre, qui se rencontre parmi les cristaux de feldspath.

14. A ne considérer les divers prismes qui viennent d'être décrits, que sous le rapport de la Géométrie, on peut concevoir dans chacun d'eux trois axes différens qui passeront par les centres des faces opposées deux à deux, et si l'on place les prismes de manière que ces axes prennent successivement des positions verticales, on remarque que le changement d'aspect qui en résulte, transforme ordinairement chaque prisme en un autre désigné sous un nom différent. Par exemple si l'on suppose que dans le prisme symétrique de la méïonite (fig. 7), ce soient les faces ADFL, BCGI qui fassent la fonction de bases, ce prisme prendra le caractère de celui que j'appelle *rectangulaire*. Dans la même hypothèse, le prisme droit rhomboïdal (fig. 9) de la baryte sulfatée se convertit en prisme rectangulaire oblique, et ainsi des autres. Mais chaque prisme se trouve ramené par la considération de l'axe de cristallisation à une position fixe, qui est celle que représente la figure. Ainsi la position naturelle du prisme droit symétrique (fig. 7), est celle qui a lieu, lorsque les faces ABCD, LIGF, font la fonction de bases, parce qu'alors celles que l'on considère comme les pans sont toutes égales et sembla-

bles, et en même temps verticales, ce qui n'aurait pas lieu si l'on prenait deux des pans pour bases. L'aspect des cristaux qui dépendent de cette même forme concourt à indiquer la position dont je viens de parler, soit par l'allongement plus ou moins considérable qu'ils prennent dans le sens de l'axe qui passe par les centres des faces carrées, soit par les pyramides que la cristallisation fait naître sur les mêmes faces, et qui, étant du nombre de celles qu'on appelle *droites*, exigent par cela seul que leurs sommets soient placés sur une même verticale.

Lorsque la forme ne fournit par elle-même aucun indice bien marqué de la position naturelle, comme cela a lieu pour le prisme droit rectangulaire de la cymophane (fig. 8), dont les faces prises deux à deux diffèrent par leurs dimensions, il suffit de comparer entre elles les différentes formes qui se rapportent à celle-ci, pour que le sens suivant lequel s'est fait leur plus grand accroissement, et les positions des nouvelles parties qui en diversifient l'aspect, suggèrent à l'observateur l'idée de la véritable attitude de cette forme fondamentale.

Parmi les prismes qui diffèrent par le nombre de leurs pans de ceux que je viens de décrire, il n'y en a que deux dont la notion rentre dans les limites du sujet que je traite ici, le *prisme hexaèdre régulier*, qui est toujours droit, et a pour bases deux hexagones réguliers, et le prisme *triangulaire équilatéral* qui est l'élément du précédent, ainsi que nous verrons plus bas. La position naturelle de ces deux espèces de prismes est trop évidente, pour qu'il soit nécessaire de l'indiquer.

15. Les octaèdres offerts par la cristallisation se rapportent en général aux cinq modifications suivantes. Dans la première, les trois quadrilatères NROL, POSN, PLSR (fig 15) que l'on peut considérer comme les bases communes des pyramides dont les sommets se confondent avec ceux des angles solides opposés de l'octaèdre, sont des carrés égaux entre eux. C'est alors l'*octaèdre régulier*, dont plusieurs espèces, telles que l'alumine sulfatée, le spinelle, le fer oxydulé, etc., offrent des exemples. Dans la seconde modification, un seul des quadrilatères, que nous supposerons être NROL (fig. 16) est un carré; les deux autres sont des rhombes égaux et semblables; il en résulte que les huit faces de l'octaèdre sont des triangles isocèles, aussi égaux et semblables, dont les bases se confondent avec les côtés du quadrilatère NROL. Je donne à cette modification le nom d'*octaèdre symétrique*. La fig. 16 représente celui du zircon, dans lequel l'incidence mutuelle de deux faces adjacentes sur les pyramides qui ont pour base commune le carré NROL est d'environ 83°. Dans la troisième modification (fig. 17), les trois quadrilatères sont des rhombes, dont chacun diffère des deux autres. Alors toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles scalènes égaux et semblables : c'est ce que j'appelle *octaèdre rhomboïdal*. Tel est celui que présentent

souvent les cristaux de soufre, et dans lequel les angles du rhombe NROL sont de $102^d\ 42'$, et $77^d\ 18'$, et l'incidence mutuelle de deux faces, telles que LSO, PLO, adjacentes dans les deux pyramides qui ont le même rhombe pour base commune, est de $143^d$.

L'octaèdre soit symétrique, soit rhomboïdal, est obtus ou aigu, selon que deux de ses faces, telles que RSO, LSN (fig. 16 et 17) prises de deux côtés opposés, vers un même sommet, font entre elles un angle obtus ou aigu. Ainsi l'octaèdre symétrique de la fig. 16 est obtus, et l'octaèdre rhomboïdal de la fig. 17 est aigu, l'angle du sommet étant de $97^d$ dans le premier, et de $37^d$ dans le second.

La quatrième modification est relative à un octaèdre dans lequel le quadrilatère NROL (fig. 18) est un rectangle et les deux autres sont des rhombes égaux et semblables entre eux. Alors les faces de l'octaèdre sont des triangles isocèles, mais égaux et semblables seulement quatre à quatre. Cette modification se nomme *octaèdre rectangulaire*. Dans la fig. 18, qui se rapporte à l'octaèdre de la topaze, le côté OL est plus petit que le côté OR ; l'incidence de OSR sur OPR est de $122^d\ \frac{2}{3}$ à peu près, et celle de OSL sur OPL est de $88^d$.

L'octaèdre rectangulaire est *obtus*, lorsque ses triangles pris deux à deux de part et d'autre d'un même sommet, comme OSR et LSN, ou OSL et RSN, font entre eux des angles obtus. Il est *aigu*, lorsque les angles dont il s'agit sont eux-mêmes aigus. Il est *semi-obtus*, lorsqu'un des angles est obtus et l'autre aigu, auquel cas les triangles qui font entre eux l'angle obtus sont toujours les plus petits, comme OSL, RSN dans le cas présent.

Dans la cinquième modification, le quadrilatère NROL (fig. 19) est un parallélogramme obliquangle, et les deux autres sont encore des rhombes égaux et semblables. Les faces de l'octaèdre sont des triangles scalènes, égaux et semblables, seulement quatre à quatre. Cette modification porte le nom d'*octaèdre irrégulier*. J'ai observé tout récemment cette forme parmi les variétés du cuivre carbonaté.

16. Il existe entre les octaèdres qui viennent d'être décrits et les divers prismes qui l'ont été précédemment, une relation que je ne ferai ici qu'énoncer, et qui reparaîtra dans le développement de la théorie. J'omets ici l'octaèdre régulier dont l'analogie avec le cube a un caractère particulier que je ferai connaître dans la suite. A l'égard des autres octaèdres, la relation dont j'ai parlé consiste en ce que parmi les prismes qui font l'office de forme fondamentale, il y en a toujours un que l'on peut ramener à l'un des octaèdres, en donnant à ce prisme des bases égales et semblables à la base commune des deux pyramides qui composent l'octaèdre, et en lui donnant un axe égal à la somme des axes des mêmes pyramides. Ainsi, l'analogue de l'octaèdre symétrique est le prisme droit quadrangulaire symétrique; celui de

l'octaèdre rhomboïdal est le prisme droit rhomboïdal; celui de l'octaèdre rectangulaire est le prisme droit rectangulaire, et celui de l'octaèdre irrégulier est le prisme droit quadrangulaire irrégulier.

17. Chaque octaèdre a trois axes qui passent par les angles solides opposés deux à deux. Parmi ces trois axes, les deux qui sont situés dans un plan horizontal, correspondent aux diagonales des bases du prisme analogue; le troisième se confond avec l'axe de cristallisation du même prisme et doit être aussi regardé en général comme tel, relativement à l'octaèdre. Il arrive cependant quelquefois que l'octaèdre rectangulaire prend une position sous laquelle l'axe qui passe par le centre du quadrilatère, dont la figure est un rectangle, doit être dirigé horizontalement. Telle est la position que représente la figure 20, et qui appartient à la potasse nitratée. Dans cet octaèdre, l'inclinaison respective des faces LPO, LSO, ou NPR, NSR est de 68° $\frac{3}{4}$, et celle des faces OPR, OSR, ou LPN, LSN est de 120°. Alors, l'axe de cristallisation est la droite GH, menée par les milieux des arêtes horizontales OL, NR.

Le choix de la position dont il s'agit ici, comme étant la plus naturelle, est fondé sur ce que dans les formes qui dérivent de cette espèce d'octaèdre, on observe des faces situées comme les pans d'un prisme hexaèdre, avec d'autres faces inclinées à ces mêmes pans et d'où résultent, dans certains cristaux, des sommets pyramidaux qui reposent sur les bases du prisme. Or, l'axe du prisme et celui des pyramides ne peuvent avoir la direction verticale indiquée par la forme de ces deux espèces de solides, qu'autant que la ligne GH à laquelle cet axe est parallèle prend la même direction.

18. Parmi les différens dodécaèdres que produit la cristallisation, il y en a deux dont les formes rentrent, parmi celles qui sont l'objet de cet article. L'un est le dodécaèdre *rhomboïdal* EI (fig. 21) dont toutes les faces sont des rhombes égaux et semblables. Cette forme appartient au grenat et au zinc sulfuré. Elle n'est pas susceptible de plus ou de moins dans les inclinaisons mutuelles de ses faces adjacentes, qui sont toutes de 120°, par une suite nécessaire de l'égalité et de la similitude des mêmes faces, comme il sera prouvé dans la suite. Le dodécaèdre rhomboïdal a six angles solides tétraèdres semblables et égaux, opposés deux à deux, savoir B, D, E, M, G, I, et huit angles trièdres, qui sont de même égaux et semblables, savoir A, F, H, C, L, R, S, N, d'où il suit que ce dodécaèdre a sept axes, dont trois passent par les premiers angles, et les quatre autres par les derniers.

La position naturelle du même dodécaèdre est celle sous laquelle un des axes qui passent par deux angles solides trièdres opposés, choisis à volonté, comme A, L, est dirigé verticalement. C'est une suite de ce que les trois faces AEFB, AESD, ABCD, ou LCHI, LMRI, LMNG s'assimilent, dans les résultats de la théorie, à celles qui se réunissent autour du sommet supérieur ou inférieur d'un rhomboïde, et ainsi l'axe de cristallisation du dodécaèdre doit coïncider avec celui qui passe par les points A, L, qui sont censés être des sommets communs aux deux solides.

L'autre dodécaèdre que je nomme *bi-pyramidal*, a pour faces des triangles isocèles égaux et semblables, qui composent les surfaces de deux pyramides droites hexaèdres réunies base à base. Celui que l'on voit (fig. 22) appartient au quarz. Il est évident que son axe de cristallisation ne doit pas différer de son axe géométrique, qui se confond lui-même avec les axes des pyramides dont le dodécaèdre est l'assemblage.

19. Les divers solides que je viens de décrire varient d'une espèce à l'autre, ainsi que nous le verrons dans la suite, par le rapport de leurs dimensions, ou ce qui revient au même, par les incidences mutuelles de leurs faces.

Pour déterminer ces dernières, et en général toutes celles qui ont lieu sur les formes cristallines relatives aux différentes espèces minérales, on se sert d'un instrument appelé *gonyomètre*, dont l'invention est due à M. Carangeau. Cet instrument est composé d'un demi-cercle MTN (fig. 23), de laiton ou d'argent, divisé en degrés, et qui porte deux alidades AB, FG, dont l'une FG est évidée depuis *u* jusqu'en R en coulisse à jour, excepté à l'endroit K, où l'on a laissé une petite traverse, qui n'est qu'un accessoire fait pour donner plus de solidité à l'instrument. Cette alidade est attachée en R et en $c$ sur une règle de laiton située derrière, et qui fait corps avec le demi-cercle. La réunion de l'alidade avec cette règle s'opère au moyen de deux petites tiges à vis, qui s'insèrent dans la coulisse, et dont chacune porte un écrou. L'autre alidade est pareillement évidée, depuis $x$ jusqu'en $c$, où elle est attachée au-dessus de la première, à l'aide de la tige à vis qui est en cet endroit, et qui traverse les deux rainures. En lâchant les écrous, on peut raccourcir à volonté les parties $c$G, $c$B des deux alidades, suivant que les circonstances l'exigent.

L'alidade AB n'ayant qu'un seul point d'attache en $c$, où est le centre du cercle, a un mouvement autour de ce centre, tandis que l'alidade GF reste constamment dans la direction du diamètre qui passe par les points 0° et 180°.

Il n'est pas inutile de remarquer que la partie supérieure de l'alidade AB doit être amincie, en forme de tranchant, vers son bord $sz$, dont la direction prolongée en dessous passe par le centre $c$ de l'instrument. La raison en est que ce bord est ce que l'on appelle *la ligne de foi*, c'est-à-dire celle qui indique sur la circonférence graduée la mesure de l'angle cherché (1).

---

(1) Les personnes qui désireraient se procurer des gonyo-

Supposons maintenant que l'on veuille mesurer sur un cristal l'angle que forment entre eux deux plans voisins. On sait que cet angle est égal à celui de deux lignes menées d'un même point de l'arête qui réunit ces plans, avec la condition qu'elles soient perpendiculaires à cette arète et couchées sur les mêmes plans. Pour avoir cet angle, on disposera l'instrument de manière que les portions *c*G, *c*B des deux alidades ne laissent aucun jour entre elles et les plans dont il s'agit, et qu'en même temps leurs bords soient perpendiculaires à l'arête de jonction. Dans ce cas, les faces qui embrassent le cristal sont tangentes aux deux plans dont on veut avoir l'incidence.

Cela fait, on cherchera sur la circonférence de l'instrument le degré que marque la ligne de foi *sz*, ou l'angle que fait cette ligne avec celle qui passe par le centre *c* et par le point o°, lequel angle est égal à celui que forment les deux portions G*c*, *c*B des alidades, puisqu'il lui est opposé au sommet.

C'est un avantage de pouvoir raccourcir à son gré ces mêmes parties, pour éviter les obstacles qui rendraient l'opération impraticable, et qui peuvent provenir soit de la gangue à laquelle adhère le cristal, soit des

---

mètres, peuvent s'adresser avec une entière confiance à MM. Richer, artistes très avantageusement connus. Ceux qu'ils exécutent ne laissent rien à désirer, soit pour la précision des mesures, soit pour le fini du travail. MM. Richer demeurent rue du Harlai, n° 6, ou boulevard Saint-Antoine, n° 71.

cristaux voisins dans lesquels il est engagé en partie; mais il est des cas où cette précaution ne suffit pas, et où l'on se trouverait gêné par la partie du demi-cercle située vers M, si sa position était invariable. L'ingénieux auteur de l'instrument a paré à cet inconvénient à l'aide du mécanisme suivant.

La tige située en *c* porte, outre les deux alidades, une tringle d'acier placée en dessous de la règle de cuivre sur laquelle est appliquée immédiatement l'alidade GF. L'extrémité supérieure de cette tringle, ou celle qui est située vers O, a une échancrure dans laquelle entre une tige d'acier garnie pareillement d'un écrou. De plus le demi-cercle est brisé à l'endroit du 90ᵉ degré, en sorte qu'au moyen d'une charnière dont il est garni au même endroit, le quart de cercle TM se replie en dessous du quart de cercle TN, et se trouve comme supprimé. Lorsque l'on veut exécuter ce mouvement, on lâche l'écrou qui maintenait la partie supérieure de la tringle *c*O, on dégage l'échancrure qui termine cette tringle de l'écrou qui s'y insérait, et l'on rabat la tringle jusque par dessous la règle de cuivre qui porte l'alidade GF. Lorsque l'angle mesuré excède $90^{d}$, on remet le quart de cercle TM à sa place, pour en reconnaître la valeur.

### *Des variations des formes cristallines.*

20. Parmi les cristaux originaires d'une même substance, trouvés dans différens pays, il en existe qui

sont semblables par le nombre de leurs faces, par la disposition respective de celles-ci, et, ce qui est très remarquable, par les angles qu'elles font les unes avec les autres. Les diversités, lorsqu'elles ont lieu, ne tiennent qu'à des causes accidentelles, qui ont changé le rapport des dimensions, par une suite de ce que certaines faces sont plus voisines ou plus éloignées du centre dans tel cristal que dans tel autre. Cet article en offrira plusieurs exemples; mais il n'en résulte qu'une différence d'aspect, et les inclinaisons mutuelles des faces subsistent sans aucune altération.

Souvent aussi, comme je l'ai déjà annoncé, la cristallisation, en agissant sur des molécules identiques, donne naissance à des polyèdres réellement distingués les uns des autres. Ainsi le fer sulfuré se présente sous la forme d'un cube, d'un octaèdre régulier, d'un dodécaèdre à faces pentagonales et d'un solide dont la surface est composée de 24 faces trapézoïdales égales et semblables. Dans l'espèce de la chaux carbonatée, outre plusieurs rhomboïdes différens par la mesure de leurs angles, on observe un dodécaèdre à faces triangulaires scalènes (fig. 24) et d'autres formes qui, au premier aspect, paraissent étrangères soit entre elles, soit à l'égard des précédentes.

21. Dans toutes les formes qui viennent d'être indiquées, les faces sont égales et semblables entre elles; mais il est plus ordinaire de trouver des cristaux dont la surface est composée de deux, de trois ou d'un

plus grand nombre d'ordres de facettes distinctes, de manière que si l'on prend celles de chaque ordre, et si on les suppose prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, en masquant toutes les autres, on a un solide qui existe ou qui peut exister solitairement dans la même espèce.

Ainsi la combinaison des faces du cube avec celles de l'octaèdre régulier donne le solide à 14 faces représenté fig. 25. Dans la chaux carbonatée, la forme du prisme hexaèdre régulier qui est une des variétés de cette substance, en se combinant avec celles d'un rhomboïde très-obtus, produit un solide à 14 faces (fig. 26), dont six verticales *c*, *c*, deux horizontales *o*, *o*, et six obliques *g*, *g*, disposées trois à trois vers chaque sommet. La forme du dodécaèdre à triangles scalènes (fig. 24), en se combinant avec un autre rhomboïde, produit un polyèdre à 18 faces représenté (fig. 27). Il existe aussi des combinaisons ternaires, quaternaires, etc., analogues aux précédentes. J'ai un cristal de fer sulfuré que je ferai connaître dans la suite, et qui a 134 facettes, ce qui est, dans ce genre, le *maximum* offert jusqu'ici par l'observation. Ces facettes se soudivisent en huit ordres différens, relatifs à autant de formes particulières.

22. J'ajouterai ici quelques observations sur les variations de forme purement accidentelles dont j'ai parlé précédemment. Il ne s'agit point de celles qui troublent entièrement la symétrie, en détruisant l'égalité des faces qui se correspondent, de manière que

les unes prennent une étendue considérable, tandis que les autres contrastent avec elles par leur petitesse, et quelquefois échappent presque à l'œil. La considération de ces anomalies est étrangère à la Géométrie des cristaux, et doit plutôt fixer l'attention du minéralogiste, qui est intéressé, comme observateur de la nature, à savoir démêler le type de la forme, à travers tous les jeux de position qui la déguisent. Je supposerai donc que les diversités occasionnées par les accidens que j'ai annoncés, influent également sur toutes les faces d'un même ordre, et je ferai voir qu'elles peuvent être ramenées à une limite dont elles s'écartent plus ou moins à mesure qu'elles se rapprochent des extrêmes, et réciproquement. Je me bornerai à un petit nombre d'exemples.

23. J'ai cité plus haut une forme représentée (fig. 25) et qui résulte de la combinaison des faces *g* du cube, avec les faces *d* de l'octaèdre régulier. Dans cette figure les faces *g*, qui sont des octogones, prédominent sur les faces triangulaires *d*, et si l'on conçoit que ces dernières s'écartent du centre, de plus en plus on aura une gradation dont le terme, qui sera le cube complet, aura lieu lorsque les faces *d* deviendront nulles.

Supposons au contraire que les faces *d* se rapprochent du centre, il y aura un autre terme où elles toucheront les faces *g* (fig. 28.) en restant toujours triangulaires, tandis que les faces *g* seront des carrés. Si le mouvement des faces *d* vers le centre continue au-delà de ce terme, il est facile de voir qu'elles s'entrecouperont de manière à devenir des hexagones, tandis que les faces *g* conserveront la figure carrée, et n'auront fait que diminuer d'étendue. Alors le solide tendra de plus en plus vers la forme de l'octaèdre régulier, qu'il finira par présenter sans aucune modification, à un troisième terme où les faces *g* auront disparu. Or la limite à laquelle il convient de rapporter toutes les variations précédentes, est celle que représente la fig. 28, qui correspond à un terme fixe, où le solide participe également du cube et de l'octaèdre, et où ses faces considérées dans leur ensemble ont le plus grand degré de simplicité possible. Cette limite existe surtout parmi les cristaux de plomb sulfuré.

24. Il existe une variété de chaux carbonatée que l'on voit (fig. 29), et qui a sa surface composée de douze pentagones, dont six, savoir $c$, $c$, $c'$, sont situés comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier, et les six autres $g$, $g$, $g'$, etc. qui se réunissent trois à trois en sommets pyramidaux appartiennent au rhomboïde obtus, cité plus haut.

Si l'on conçoit que les deux sommets s'éloignent et s'approchent successivement l'un de l'autre, de manière que les faces de chacun restent parallèles à elles-mêmes, les faces verticales $c$, $c'$, dans le premier cas auront une extension illimitée; mais dans le second, il y aura un terme où leurs côtés $mn$, $rs$, etc. après avoir été toujours en diminuant, s'évanouiront, et alors ces mêmes faces se réduiront à de simples triangles, comme on le voit (fig. 30). Au-delà de ce terme, si les sommets continuent de s'approcher, les triangles diminueront d'étendue, et en même temps les faces des deux sommets s'entrecouperont, en sorte qu'elles deviendront toutes des heptagones (fig. 31.), et au terme où les triangles auront disparu, le solide aura passé à la forme du rhomboïde *g, g'*. La limite à laquelle se rapportent toutes ces variations est celle qui répond à la fig. 30, et dans laquelle l'ensemble des faces étant le plus simple possible relativement au nombre des côtés, les triangles *c*, *c*, offrent un intermédiaire entre deux extrêmes dont l'un est l'infini et l'autre zéro.

Il y a des cas où la forme du polyèdre n'indique pas par elle-même la limite des variations. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque ce polyèdre est un prisme terminé par deux pyramides, comme on le voit dans la fig. 32. Ici il n'y a point d'intermédiaire géométrique entre les deux mouvemens en sens contraires des faces terminales, dont l'un tend à faire croître indéfiniment les faces latérales, dans le sens des arêtes DF, CG, etc., et l'autre à les diminuer jusqu'à ce qu'elles soient réduites à zéro. Mais nous verrons que dans ces sortes de cas, la théorie sert à déterminer, relativement au prisme, la hauteur qui est comme le terme vers lequel tend la cristallisation et dont elle ne s'écarte que par accident. Je reviendrai dans la suite avec plus de détail, sur les variations accidentelles des formes cristallines, et je citerai des cas où leur limite ne peut être déterminée sans le secours de la théorie.

### DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA THÉORIE.

*Formes primitives.*

25. L'idée que tend à faire naître l'observation des diverses formes cristallines sous lesquelles se présente une même substance minérale, est qu'il en existe une parmi elles, qui peut être regardée comme le type auquel toutes les autres sont susceptibles d'être ramenées. En partant de cette idée, on concevrait que le solide qui fait la fonction de type fût composé de particules semblables à lui-même, ou dont la forme serait en rapport avec la sienne. Ce même solide serait inscrit dans chacun de ceux qui offriraient une configuration différente, et celle-ci dépendrait de certaines lois auxquelles auraient été soumises les particules de la matière enveloppante, en s'arrangeant symétriquement autour du solide intérieur.

Mais pour que cette idée s'accordât avec la réalité, il faudrait que la théorie dont elle aurait fourni la base, satisfît à deux conditions; l'une, que l'adoption de la forme qui serait considérée comme le type des autres n'eût rien d'arbitraire, et fût indiquée par la nature elle-même; l'autre que l'existence des lois d'arrangement qui détermineraient son passage aux autres formes fût démontrée avec une précision rigoureuse.

Mon but, dans cet article, sera d'exposer les résultats des observations qui me paraissent remplir la première condition. Je ferai connaître, dans les articles suivans ceux des recherches que j'ai entreprises dans la vue de satisfaire à la seconde.

J'ai d'autant plus lieu d'espérer qu'on me permettra de raconter ici la manière dont j'ai été conduit à l'observation qui m'a donné, pour ainsi dire, la clef de la théorie, qu'elle n'a point été cherchée, et s'est présentée comme d'elle-même, en sorte qu'il suffisait de ne pas fermer les yeux sur le fait fondamental qui en était le sujet, et qui devait à son tour amener tout le reste.

26. Ce fait s'est montré sur un cristal prismatique de chaux carbonatée, dont M. Defrance, amateur très éclairé, avait eu la bonté de me faire présent, au moment où il venait de se détacher d'un groupe qui faisait partie de sa riche collection.

En examinant ce cristal, lorsque je fus de retour, je m'aperçus que la fracture qui s'y était faite à l'endroit par lequel il tenait au groupe, avait emporté une des arêtes du contour de la base, et j'observai, au même endroit, une face *stoo* (fig. 33) qu'il était facile de reconnaître, à la netteté de son poli et à la vivacité de son éclat, pour un des joints naturels situés entre les lames dont le prisme était l'assemblage.

La figure de cette face, qui était un trapèze, et la direction de sa base *st*, qui était tournée vers l'arête opposée *bc*, indiquait que pour la faire naître, à l'aide de la division mécanique, il aurait fallu diriger le plan coupant parallèlement à l'arête *lf*; et en estimant la position de ce plan d'après celle de la face déjà observée, j'avais jugé qu'il devait être incliné sensiblement de la même quantité, tant sur la base du prisme, que sur la face latérale adjacente $lff'l'$ (1). Supposant donc la chose faite, comme je viens de le dire, j'essayai d'intercepter les autres arêtes par de nouvelles divisions analogues à la première, et je trouvai qu'il n'y en avait que trois parmi les six du contour de chaque base, qui se prêtassent à cette opération. Ces arêtes étaient d'une part, *lf*, *mb*, *cd* (fig. 34), et d'une autre part $b'c'$, $f'd'$, $m'l'$; d'où l'on voit que, connaissant une des arêtes susceptibles d'être interceptées par des plans diviseurs, il fallait pour continuer l'opération, prendre les autres arêtes de deux en deux, autour de la même base, et de plus choisir autour de la base opposée les trois arêtes qui alternaient avec les précédentes; il en résultait que les trois trapèzes *stoo*, *xnkk*, *vuhh*, mis à découvert autour de la base supérieure, et les trois autres $iiv'u'$, $x'n'ee$, $s't'gg$ qui se montraient autour de la base inférieure, étaient parallèles chacun à chacun.

(1) Je reviendrai dans la suite sur cette égalité d'inclinaison, qui conduit à des résultats intéressans sous le rapport de la théorie.

En continuant la division vers le centre du prisme, je vis paraître de nouveaux joints naturels, dont les sections sur les bases se rapprochaient de plus en plus des centres de ces bases, et au terme où elles se trouvèrent réduites à deux points, qui coïncidaient avec les mêmes centres, les triangles dont elles formaient les bords ayant disparu, le prisme fut changé en un dodécaèdre (fig. 35) à faces pentagonales, dont six, telles que AE*oo*I, AG*hh*E, etc., étaient le résultat de la division mécanique, et les six autres *ooi*O*e*, *o*I*kii*, etc., les résidus des pans du prisme.

Au-delà de ce terme, les pentagones extrêmes conservèrent leur figure et leurs dimensions, tandis que les pentagones latéraux perdaient continuellement de leur hauteur, jusqu'à ce que les points *o* et *e*, *o* et *i*, *k* et *i*, etc. venant à se confondre, ces derniers pentagones se réduisirent à de simples triangles, comme on le voit (fig. 36).

Enfin, de nouvelles divisions ayant fait disparaître avec ces triangles les derniers vestiges de la surface du prisme, le solide qui me resta entre les mains, et qui était comme le noyau de ce prisme, fut un rhomboïde obtus (fig. 37), dont les faces prises vers un même sommet étaient inclinées entre elles d'environ $104^d \frac{1}{2}$, et dans lequel le grand angle EAI, ou EOI de chaque rhombe avait pour mesure, à peu près $101^d \frac{1}{2}$.

27. L'idée que devait naturellement me suggérer le résultat que je viens d'exposer, était qu'il n'offrait

qu'un cas particulier d'une propriété commune à toutes les variétés de la même substance, en sorte que les cristaux de chacune d'elles renfermaient un noyau parfaitement semblable à celui qui était engagé dans le prisme sur lequel j'avais opéré; mais cette idée avait contre elle une difficulté qui paraissait d'autant plus embarrassante, qu'elle était suggérée par l'espèce de forme à laquelle appartenait le noyau dont il s'agit. Elle consistait en ce qu'il existe parmi les cristaux de chaux carbonatée divers rhomboïdes que j'ai déjà cités plus haut, dont l'un, qui est beaucoup plus obtus, a son angle plan du sommet de $114^d\ 18'$, et les autres qui sont aigus, offrent au même endroit un angle qui est successivement de $75^d\ 31'$, de $45^d\ 34'$ et de $37^d\ 31'$.

Il était difficile de concevoir comment la forme rhomboïdale, en supposant qu'elle fût toujours celle du noyau, serait restée semblable à elle-même, sans aucune variation, dans des cristaux qui la présentaient à l'œil sous des traits si différens des siens, et qui, comparés entre eux, n'avaient rien de commun que cette même forme prise en général.

Mais l'observation fit disparaître le paradoxe que semblait offrir le contraste entre les formes extérieures de ces rhomboïdes et celles de leur noyau, et elle prouva que ce noyau, en conservant ses dimensions et ses angles, était inscrit symétriquement dans chacun d'eux. Il ne s'agissait pour l'obtenir que de trouver les différens sens suivant lesquels devait être divisé le rhomboïde qui le renfermait; c'est ce que je vais éclaircir par des exemples.

28. Je choisirai d'abord le rhomboïde obtus de $114^{d}\ 18'$, que je nomme *équiaxe*, et que représente la figure 38, avec le noyau qui lui est inscrit. Dans ce cas, les plans diviseurs doivent être dirigés de manière qu'ils interceptent les six angles solides latéraux *y*, *p*, *r*, *x*, etc. (fig. 39), et que leurs intersections avec les faces du rhomboïde soient parallèles aux diagonales obliques. Par exemple, le plan qui intercepte l'angle solide *z* (fig. 39), doit couper les deux faces *aprz*, *ayxz*, suivant des lignes *db*, *dc*, parallèles aux diagonales *ar*, *ax*, d'où il résulte que ce plan détachera une pyramide triangulaire dont la base *bcd* sera parallèle à la face AEOI (fig. 38) du noyau. On concevra de même que le plan $b'c'd'$ (fig. 39), qui intercepte l'angle solide *u* opposé à l'angle *z*, doit détacher une pyramide triangulaire dont la base $b'c'd'$ sera parallèle à la face A'KGH (fig. 38) du noyau. En appliquant le même raisonnement aux autres plans, on aura le rudiment de la division mécanique, dont l'effet est de mettre à découvert six triangles isocèles parallèles aux faces du noyau, et il est à remarquer que déjà les angles aux sommets de ces triangles, tels que *cdb*, $c'd'b'$, sont égaux aux angles obtus EAI, HA'K (fig. 38) des rhombes du noyau, et ont pour mesure $101°\ 32'$, comme ceux du rhomboïde retiré du prisme hexaèdre régulier.

Si l'on continue la division, parallèlement aux mêmes triangles, les joints naturels mis à découvert par les plans diviseurs finiront par coïncider avec les diagonales obliques *ax*, *ar*, *a'p*, etc. du rhomboïde *arxa'* (fig. 39); et à ce terme, le noyau se trouvera isolé. Il suit de tout ce que je viens de dire, que l'axe du rhomboïde circonscrit est égal à celui du noyau, que les bords supérieurs de ce dernier se confondent sur une même direction avec les diagonales obliques du rhomboïde dont il s'agit, et que ses angles solides latéraux E, O, I, K, etc. (fig. 38) sont tournés vers les faces du même rhomboïde. De là naît une considération qui s'étend à tous les rhomboïdes dont j'ai à parler dans cet article. Elle consiste en ce que dans tous les solides de cette espèce les parties semblables situées trois à trois vers chaque sommet alternent entre elles, et parce que le noyau est toujours disposé symétriquement à l'égard du rhomboïde qui le renferme, la double alternative qui en résulte produit un assortiment de deux rhomboïdes dont l'un est inscrit dans l'autre.

29. Je passe au second exemple, que je tirerai du rhomboïde aigu dans lequel l'angle plan du sommet est de $75^d\ 31'$, et que la figure 40 représente circonscrit à son noyau. Je le nomme *chaux carbonatée inverse*, pour une raison que j'exposerai dans la suite. Je me bornerai à indiquer la marche que doit suivre la division mécanique, pour en extraire le noyau, que l'observation prouve être semblable à celui que renferment les deux variétés précédentes.

Un coup-d'œil jeté sur la figure suffit pour faire juger que les bords supérieurs *ad*, *at*, *ab* du rhomboïde circonscrit, et ceux qui leur correspondent vers le sommet opposé, sont parallèles aux diagonales obliques du noyau. Ainsi, les plans diviseurs doivent être dirigés parallèlement aux bords dont il s'agit, en faisant des angles égaux avec les faces adjacentes. Il en résulte que les trois plans qui interceptent les bords supérieurs contigus à un même sommet *a* (fig. 41), mettent à découvert trois pentagones alongés *flsor*, *xuzos*, *ypzor*, dont les parties supérieures se réunissent en un angle solide semblable à celui qui est contigu au sommet A (fig. 40) du noyau. A mesure que l'on continue la division mécanique, les pentagones s'élargissent d'abord en se rapprochant du noyau, puis s'entrecoupent, et finissent par se confondre avec les rhombes du même noyau.

Le troisième exemple se rapporte au rhomboïde que représente la figure 42 circonscrit de même à son noyau. L'angle *baf* de son sommet n'est que de 45° 34'. Ce n'est pas cette grande différence entre ses angles et ceux de son noyau qui m'a suggéré le nom de *chaux carbonatée contrastante* que je lui ai donné, mais une propriété remarquable dont il jouit et que je ferai connaître dans la suite. On juge aisément, à la première vue de la figure, que les faces de ce rhomboïde sont tournées vers celles du noyau, en faisant avec l'axe des angles beaucoup plus aigus. Cette corrélation indique que les sections *lm*, *lx*, *mx* (fig. 43) des plans diviseurs sur les faces du rhomboïde, doivent être parallèles à ses diagonales horizontales; ces mêmes plans en partant des sections dont il s'agit, s'inclinent vers l'axe, de manière que les angles qu'ils font avec les faces *bafr*, *bauc*, etc. du rhomboïde, sont de 149° 2′, d'où il suit qu'ils forment par leur réunion une pyramide triangulaire *lxmy*, semblable à celle qu'on détacherait à l'aide d'un plan mené par les trois angles E, I, G (fig. 42) du noyau. Dans les divisions ultérieures, les nouveaux triangles mis à découvert s'approchant de plus en plus du noyau, arrivent à un terme au-delà duquel ils s'entrecoupent par leurs angles latéraux, et passent par degrés à la figure du rhombe. Ils ne sont plus alors distingués des faces du noyau.

30. Le quatrième exemple me sera fourni par un rhomboïde encore plus aigu que le contrastant, dans lequel l'angle plan du sommet est de $37^d$ 31′. C'est celui que représente la figure 44, en rapport de position avec son noyau, et auquel j'ai donné le nom de *chaux carbonatée mixte*. Ce rhomboïde présente le cas inverse du précédent, c'est-à-dire que ce sont ses bords obliques qui regardent les faces du noyau. Dans ce cas les plans diviseurs situés vers un même sommet *s*, partent de trois points pris sur les bords dont il s'agit, et mettent à découvert trois trapézoïdes *prsn*, *utsn*, *xtsr* (fig. 45), inclinés de $155^d$ 50′ sur les mêmes bords, et dont les triangles

supérieurs composent les faces latérales d'une pyramide semblable par la mesure de ses angles et par sa position à celle que les plans analogues font naître dans le rhomboïde contrastant (fig. 43), et qui a son sommet au point $y$. Le reste va comme de soi-même, et l'on conçoit aisément tout ce qui doit arriver jusqu'au terme où les trapézoïdes se trouvent convertis en rhombes qui se confondent avec ceux du noyau.

J'ai choisi les quatre rhomboïdes que je viens de citer, parmi ceux que la nature présente isolément. La plupart des autres entrent comme élémens, avec des solides différens, dans des formes cristallines plus ou moins composées. Le nombre de ceux que j'ai observés jusqu'ici est de seize, en y comprenant les quatre précédens.

En décrivant la manière de diviser mécaniquement ces derniers rhomboïdes, j'ai suivi une marche méthodique, d'après laquelle on voit s'opérer, pour ainsi dire, par la pensée, le passage gradué du rhomboïde circonscrit à celui qu'il renferme comme noyau. Mais dans la pratique on peut, avec de l'habitude et de l'exercice, arriver beaucoup plus promptement au but proposé, et l'opération indique comme d'elle-même les moyens de l'abréger.

31. Tous les autres cristaux calcaires, d'une forme différente, que je soumis successivement à la division mécanique, donnèrent des résultats analogues à celui que m'avaient offert les rhomboïdes. Je me bornerai à un seul, qui sera tiré du dodécaèdre à triangles

scalènes que représente la figure 46, circonscrit à son noyau. Je le désigne par le nom de *chaux carbonatée métastatique*, dont l'interprétation sera donnée dans la suite par le développement des propriétés intéressantes dont il jouit. La manière d'obtenir tout d'un coup le rhomboïde qui fait ici l'office de noyau s'offrira comme d'elle-même, si l'on fait attention que les bords inférieurs EO, OI, IK etc. de ce rhomboïde se confondent avec ceux des triangles scalènes du dodécaèdre. Il en résulte que si l'on fait passer trois plans diviseurs par ces mêmes bords pris deux à deux, suivant l'ordre où ils forment des angles rentrans EOI, IKG, GHE, tournés vers le point S, ils mettront à découvert les trois faces contiguës au sommet supérieur A du noyau. On répétera ensuite la même opération, en reprenant les mêmes bords deux à deux, suivant l'ordre alternatif, où leurs angles rentrans OEH, KIO, KGH, sont tournés vers le point $s'$, et l'on achèvera d'isoler le noyau.

Maintenant, comme la forme du dodécaèdre diminue uniformément de part et d'autre, en partant des bords inférieurs du noyau, si l'on choisit le long des arêtes obliques *os*, *ks*, *hs* (fig. 47) les plus longues, trois points *n*, *x*, *p*, pris à la même distance du sommet *s*, les plans *rptu*, *ruxz*, *rpnz*, menés par ces points, parallèlement aux bords EO et OI, IK et KG, GH et HE (fig. 46) mettront à découvert trois rhombes parallèles et semblables à ceux qui terminent le noyau du même côté. Le même résultat aura lieu en sens contraire, à l'aide des trois plans diviseurs $r'p't'u'$, $r'u'x'z'$, $r'p'n'z'$ analogues aux premiers, et en continuant l'opération vers le centre, on aura une série de rhombes croissans, dont chaque terme offrira l'aspect du noyau. Au contraire, lorsque l'on sous-divise les rhomboïdes dont j'ai parlé d'abord, les joints naturels passent par degrés de la figure du triangle ou du trapézoïde à celle du rhombe, par une suite de la manière dont le noyau est engagé dans ces rhomboïdes.

Les cristaux de toutes les autres substances minérales, soumis successivement à la division mécanique, ont servi à prouver la généralité du résultat, à l'égard duquel la chaux carbonatée avait pris l'initiative. Ceux qui appartiennent à une même espèce donnent un noyau d'une forme particulière et constante. Ainsi, dans l'amphibole, le pyroxène, le glaubérite, le plomb chromaté, l'arsenic sulfuré, c'est un prisme oblique rhomboïdal, dont la base est plus ou moins inclinée à l'axe, et dont les faces latérales font entre elles des angles plus ou moins ouverts, suivant l'espèce à laquelle il appartient. Dans la chaux phosphatée, l'émeraude, la cordiérite, la pinite, le cuivre sulfuré, c'est un prisme hexaèdre régulier, dans lequel le rapport entre le côté de la base et la hauteur, déterminé par la théorie, varie de même d'une espèce à l'autre. Dans le corindon, le quarz, la tourmaline, la chabasie, le fer oligiste, c'est un rhomboïde plus ou moins obtus ou aigu. Dans l'arragonite, le triphane, le plomb carbonaté, le plomb sulfaté, le cuivre phosphaté, l'antimoine sulfuré, etc., c'est un octaèdre qui emprunte de même des caractères spécifiques du rapport de ses dimensions et de la mesure de ses angles. Les formes des molécules intégrantes participent des diversités que présentent les solides qui en sont des assemblages.

32. La forme du noyau se rencontre, comme produit immédiat de la cristallisation, parmi celles des variétés de diverses substances, et un grand nombre de ces variétés présentent des faces parallèles à celles du noyau renfermé dans leur intérieur, combinées avec d'autres faces qui dépendent des lois auxquelles est soumise la structure, ainsi que je l'expliquerai dans la suite.

33. Lorsqu'un cristal se prête difficilement à la division mécanique, on peut encore déterminer les positions de ses joints naturels par différens moyens, dont le plus simple est fondé sur l'observation que je viens de citer. On reconnaît chacun des joints dont il s'agit, lorsque ayant fracturé le cristal de manière à laisser subsister en partie la face qui est parallèle à ce joint, on le fait mouvoir à une vive lumière. Il arrive alors qu'au même instant où le résidu de la face dont je viens de parler renvoie à l'œil les rayons réfléchis, on aperçoit à l'endroit de la fracture d'autres reflets qui partent des lames intérieures, en sorte qu'en faisant tourner le cristal en divers sens, on voit paraître et disparaître simultanément les rayons qui produisent les deux reflets. On en conclut qu'il existe

dans l'intérieur du cristal un joint naturel situé parallèlement à la face dont j'ai parlé.

34. Les formes des noyaux obtenus par la division mécanique de tous les cristaux connus, que j'appellerai désormais *formes primitives*, se rapportent aux cinq genres suivans : le parallélépipède, l'octaèdre, le tétraèdre qui est toujours régulier, le prisme hexaèdre, pareillement régulier, et le dodécaèdre à plans rhombes, tous égaux et semblables.

*Formes des molécules intégrantes.*

35. Dans les résultats précédens, nous n'avons conduit la division mécanique que jusqu'au terme où elle avait isolé le noyau du cristal qui lui était soumis, parce que déjà la forme de ce noyau pouvait être considérée comme un lien commun, qui unissait toutes les variétés relatives à une même espèce. Nous verrons ce lien se resserrer davantage, et les rapports qu'il fait naître entre les mêmes variétés devenir plus intimes, à l'aide des observations suivantes et des conséquences qui en découlent.

La sous-division de la forme primitive, parallèlement à ses différentes faces, dont nous allons nous occuper, présente plusieurs cas différens qui dépendent de l'espèce de solide à laquelle appartient celle que l'on considère.

Si c'est un parallélépipède, il est bien évident que sa sous-division donne de petits parallélépipèdes semblables à lui-même; mais toutes les autres formes sous-divisées parallèlement à leurs faces, se résolvent en petits solides d'une forme différente. Prenons pour exemple le prisme hexaèdre régulier, et pour plus grande simplicité supposons que les plans diviseurs, parallèles aux faces latérales, passent par les centres des bases, le prisme se trouvera partagé en six prismes partiels qui auront pour bases des triangles équilatéraux; et si l'on multiplie les divisions suivant des directions parallèles aux premières, et suivant d'autres parallèles aux bases, on aura toujours pour résultat un assemblage de prismes triangulaires équilatéraux, ainsi qu'il est facile d'en juger par l'inspection de la figure 48. Mais ce qu'il est essentiel d'observer, c'est que ces prismes sont tellement disposés, qu'étant pris deux à deux, ils forment des parallélépipèdes indiqués par A*Oip*, *piγε*, etc. (fig. 49), et qui, dans le cas présent, peuvent être considérés comme des prismes droits de $120^{d}$ et $60^{d}$; et il est visible que le prisme hexaèdre régulier peut être conçu comme un assemblage de pareils prismes.

36. Proposons-nous encore de sous-diviser le dodécaèdre rhomboïdal parallèlement à ses différentes faces, en faisant passer les plans diviseurs par le centre du solide.

Soit *ep* (fig. 50) un de ces dodécaèdres. Supposons des plans coupans qui passent par le centre, et dont chacun soit parallèle à deux faces opposées du dodécaèdre. Il est d'abord évident que ces plans seront au nombre de six. De plus chacun d'eux, par exemple celui qui est parallèle aux rhombes *dlfn*, *boht*, passera par la diagonale *gy*, par les deux arêtes *ye*, *er*, par la diagonale *rq*, et par les deux arêtes *qp*, *pg*, c'est-à-dire que chaque plan passera par deux petites diagonales et par quatre arêtes. Or il y a en tout douze petites diagonales et vingt-quatre arêtes distinctes, dont chacune est commune à deux rhombes voisins; d'où l'on conclura que les six plans opèrent des sections sur toutes les arêtes et sur toutes les diagonales obliques du dodécaèdre. Donc il y aura toujours trois plans qui passeront par les trois côtés de chaque triangle, tel que *ylg*, ou *yog*, qui forme la moitié d'un rhombe coupé dans le sens de sa petite diagonale; et puisque ces plans passent en même temps par le centre *c*, ils détacheront une pyramide triangulaire, ou un tétraèdre. Donc le dodécaèdre se trouvera décomposé en vingt-quatre tétraèdres dont chacun aura pour faces quatre triangles isocèles égaux et semblables. Remarquons que ces tétraèdres, pris six à six, forment quatre rhomboïdes, dont chacun a l'un de ses sommets, tels que *y*, *h*, *f*, ou *r*, situé à l'extérieur, et l'autre au centre *c* du dodécaèdre. La figure 51 représente séparément le rhomboïde dont le sommet extérieur est au point *y*.

37. Je m'abstiendrai de parler ici de la sous-division des autres formes primitives, dont les résultats, moins simples que les précédens, conduisent à des solides de deux formes différentes. Je me bornerai à dire pour le présent que ce défaut de simplicité n'inté-

resse point la théorie, qui parvient aussi sûrement à son but, dans ces sortes de cas, que dans ceux qui ont rapport au parallélépipède, au prisme hexaèdre régulier, et au dodécaèdre rhomboïdal.

Nous venons de voir que la sous-division de ces trois genres de solides, parallèlement à leurs différentes faces, conduit à trois formes différentes, qui sont le tétraèdre, le prisme triangulaire et le parallélépipède. Or, comme il faut au moins quatre plans pour circonscrire un espace, il en résulte que les trois formes dont il s'agit ayant successivement leur surface composée de 4, 5 et 6 plans, sont les plus simples que l'on puisse concevoir. Nous verrons dans la suite que le tétraèdre est toujours un des deux solides offerts par la sous-division des formes primitives, différentes de celles que j'ai prises pour exemples, et que l'on peut, à l'aide d'une hypothèse plausible, donner l'exclusion à l'autre solide, ou le considérer comme nul.

38. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les solides qui résultent de la sous-division des formes primitives suivant des directions parallèles aux faces qui terminent celles-ci. Or, l'observation indique aussi dans certaines formes primitives des joints situés suivant des directions différentes de celles qui correspondent aux faces. Je me bornerai ici à ce qui regarde le parallélépipède, me réservant à faire connaître les résultats des observations relatives aux autres formes dans les articles destinés pour la partie

analytique, où je traiterai de ces formes. Voici quelques exemples qui se rapportent au cas dont je viens de parler.

Le prisme droit rhomboïdal *bh* (fig. 52), qui est la forme primitive de la staurotide, et dans lequel les pans les plus inclinés M, M, font entre eux un angle de 129$^d$ 30′, se sous-divise dans le sens d'un plan qui passerait par les petites diagonales *bd*, *fh* des bases, en deux prismes triangulaires isocèles égaux et semblables, d'où l'on voit que ces prismes sont réunis de la même manière que ceux qui composent les prismes rhomboïdaux, dont le prisme hexaèdre régulier peut être considéré comme l'assemblage. Dans la forme primitive de la baryte sulfatée, qui est un prisme de la même espèce, mais dont les pans M, M (fig. 53) sont inclinés l'un sur l'autre de 101$^d$ $\frac{1}{2}$, la sous-division a lieu dans le sens des deux diagonales *bi*, *dk* et *xy*, *hr* des bases, ce qui donne pour résultat quatre prismes triangulaires dont les bases sont des triangles rectangles scalènes *bok*, *boa*, etc., égaux et semblables. Les prismes obliques rhomboïdaux, qui offrent les formes primitives de l'amphibole et du pyroxène subissent les divisions analogues à la seconde de celles dont je viens de parler. Dans le rhomboïde primitif AA′ (fig. 54) de la tourmaline, dont deux faces adjacentes prises vers un même sommet forment entre elles un angle de 133$^d$ 26′, chacun des plans diviseurs qui sont au nombre de six, passe par une diagonale oblique, telle que A*o*, par l'axe AA′, et par l'arête $A'o$, comprise entre la même diagonale et l'axe, d'où il suit que les six coupes détachent autant de tétraèdres, dont les faces prises deux à deux, telles que $AEo$, $AoE$, et $AEA'$, $AoA'$, sont égales et semblables. Il en résulte que ces six tétraèdres sont assortis entre eux de la même manière que ceux qui composent les rhomboïdes dont la réunion produit le dodécaèdre rhomboïdal.

Ces solides, les uns prismatiques, les autres tétraèdres, donnés par la sous-division d'un parallélépipède qui fait la fonction de forme primitive, étant les analogues de ceux dont j'ai parlé d'abord, me paraissent devoir être placés à côté d'eux, dans l'ordre de la structure.

39. Maintenant la division physique d'un minéral auquel je fais subir une des opérations dont je viens de parler, par exemple celle de la chaux carbonatée, a nécessairement un terme, et si j'avais des organes assez délicats pour atteindre ce terme, j'arriverais à des corpuscules quelconques que je ne pourrais plus sous-diviser ultérieurement sans séparer les molécules de chaux et d'acide dont ils sont les assemblages. La supposition la plus naturelle que je puisse faire ici, est que la route que j'ai prise est celle qui conduit à ce terme, c'est-à-dire que ce qui est au-delà du point où je cesse de voir ressemble à ce que j'avais vu jusqu'alors. Or, dans cette hypothèse, les corpuscules dont je viens de parler seraient des rhomboïdes d'une extrême ténuité, et de la même figure que ceux d'un

volume sensible que j'avais d'abord obtenus. Ainsi nous admettrons dans les minéraux deux sortes de molécules; les unes que j'appelle *molécules intégrantes*, et qui sont censées être les plus petits solides que l'on puisse extraire du minéral sans altérer sa nature, et les autres que j'appelle *molécules principes*, *molécules élémentaires*, et qui sont, dans le cas présent, d'une part celles de la chaux, et de l'autre celles de l'acide carbonique.

J'observerai que si ces corpuscules auxquels j'arrive, en continuant, par la pensée, la division mécanique jusqu'à sa limite, ne représentent pas exactement ceux sur lesquels agit l'affinité dans la production des cristaux, ils nous en offrent les équivalens; et les résultats que nous obtenons, en les adoptant, sont si parfaitement conformes à l'observation, que nous ne serions pas censés nous être trompés, en prenant les molécules de la théorie pour celles de la nature.

Nous admettrons donc trois formes de molécules intégrantes employées par la cristallisation dans la production des corps réguliers qu'elle offre à notre observation, savoir, le tétraèdre, le prisme triangulaire et le parallélépipède. Ces formes si simples et en même temps si fécondes par la grande variété des résultats qu'elles sont susceptibles de faire naître relativement à une seule espèce de minéral, semblent encore se multiplier par le rapport de dimensions qui distingue chacune d'elles comparée à elle-même dans différentes espèces.

*Molécules soustractives.*

40. Nous avons vu que les prismes triangulaires donnés par la division mécanique du prisme hexaèdre régulier sont assortis entre eux, comme si étant liés invariablement deux à deux, ils formaient des prismes rhomboïdaux, en sorte que le prisme hexaèdre peut être conçu comme un assemblage de ces mêmes prismes. Le dodécaèdre rhomboïdal présente une structure analogue à la précédente. Les tétraèdres que l'on en retire, à l'aide de la même opération, sont arrangés de manière qu'étant pris six à six, ils composent des rhomboïdes dont la somme équivaut à ce dodécaèdre. La même chose était faite, pour ainsi dire d'avance, à l'égard des prismes triangulaires et des tétraèdres offerts par la sous-division des diverses formes primitives qui se rapportent immédiatement au parallélépipède.

Or, les applications de la théorie aux formes cristallines dont les molécules intégrantes sont des prismes triangulaires ou des tétraèdres, soit que leur forme primitive diffère ou non du parallélépipède, s'assimilent à celles où les formes qu'elle considère ont pour molécules des parallélépipèdes semblables au solide primitif, c'est-à-dire que, dans le premier cas, la théorie atteint son but, en faisant faire aux parallélépipèdes composés de prismes triangulaires ou de tétraèdres, les mêmes fonctions que celles qui, dans le second cas, dérivent de la forme propre des parallélépipèdes indivisibles ou censés tels.

Je donne le nom de *molécules soustractives* à ces petits parallélépipèdes qui sont comme les élémens dont la considération suffit à la théorie, pour les distinguer des molécules intégrantes qui souvent les composent par leur réunion. Dans les cas où aucune observation n'indique la sous-division de ces parallélépipèdes, il est évident que la molécule soustractive est semblable à la molécule intégrante.

41. Il suit de là que l'on peut considérer la molécule soustractive comme une unité sur laquelle opère la théorie, sans aucun égard à la sous-division qui pourrait avoir lieu de cette unité en fractions représentées par les molécules intégrantes. Ce point de vue qui a le double avantage de généraliser la théorie et d'en simplifier les applications, écarte de plus les difficultés que pourrait faire naître l'embarras de savoir si nous connaissons bien les derniers résultats de la division mécanique, ou ceux qui nous offriraient les véritables molécules intégrantes dans l'état d'isolement.

C'est par un motif fondé sur ce qui précède que, dans l'exposé que je vais faire des lois auxquelles est soumise la structure des cristaux, je me bornerai aux formes dont le noyau est un parallélépipède, parce que je n'ai en vue que d'y donner une idée de la marche générale de la cristallisation, et de la manière d'agir des lois dont il s'agit. Je réserve pour la partie analytique les détails relatifs à la théorie des autres formes qui ont pour noyau un solide différent du parallélépipède, et pour molécules soustractives des assemblages de molécules intégrantes prismatiques ou tétraèdres.

### *Des lois auxquelles est soumise la structure des cristaux.*

42. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les matériaux qui entrent dans la construction des cristaux, et nous avons vu que les formes des molécules qui les ont fournis sont limitées à celles des trois solides les plus simples que l'on puisse imaginer. Il reste maintenant à expliquer comment la cristallisation parvient à faire sortir d'un espace si resserré cette multitude presque infinie de corps si diversifiés par le nombre, par les figures et par les combinaisons des faces qui les terminent.

Pour concevoir en général la marche des lois dont toutes ces diversités sont les résultats, observons que les lames que nous détachons lorsque nous divisons un cristal, en partant des points les plus éloignés du centre, jusqu'à ce que nous arrivions au noyau, augmentent progressivement d'étendue, à mesure qu'elles se rapprochent davantage de ce noyau. Or, pour se faire une idée du mécanisme de la structure dans le passage du noyau aux formes secondaires, il ne s'agit que de prendre les lames dans l'ordre inverse, et il est bien évident que, prises de cette manière, elles décroissent progressivement, à mesure qu'elles s'écartent du noyau, par la soustraction d'une certaine quantité de molécules destinées à les compléter, dans le cas où elles auraient enveloppé le noyau, qui n'aurait fait alors que s'accroître, en restant toujours semblable à lui-même. Et comme le décroissement se fait d'une manière uniforme et régulière, puisque son effet est de faire naître des faces planes ou qui nous paraissent telles, nous en conclurons que les lames dont il s'agit et que j'appelle *lames de superposition*, subissent leur décroissement de manière à conserver toujours des figures rectilignes.

43. Avant d'aller plus loin, je ferai une observation importante pour l'intelligence de ce qui précède, et qui s'étend à tout ce que je dirai dans la suite. Elle consiste en ce que, dans la réalité, un cristal n'est autre chose depuis son centre jusqu'à sa surface, qu'un assemblage de molécules disposées symétriquement, c'est-à-dire que la distinction entre le noyau et la matière enveloppante n'est qu'un moyen de faciliter les applications de la théorie. Comme le noyau donné par la division mécanique poussée jusqu'à un certain terme est une partie constante qui est commune à toutes les variétés d'une même espèce, nous considérons chaque cristal comme étant composé de cette constante, plus d'une variable dont la détermination est l'objet de la théorie.

Je ferai voir dans un article à part que le cristal naissant est déjà semblable à celui que la nature nous présente entièrement formé, et qu'il ne fait ensuite que s'accroître par une succession de couches qui se recouvrent mutuellement. La structure se combine avec cette augmentation de volume, et les choses se passent comme si la cristallisation avait commencé par produire un noyau égal et semblable à celui que nous obtenons à l'aide de la division mécanique, et qu'ensuite ce noyau se fût accru par une superposition de lames analogues à celles que nous détachons successivement, au moyen de la même opération. En un mot, je donne ici l'ordre de la structure et non celui de l'accroissement, parce que la considération du premier est le véritable guide que doit suivre la théorie pour arriver à son but, en partant d'un fait donné par l'observation, qui est l'existence du noyau, et en ramenant à ce fait toutes les variations que subissent les formes dont la structure n'est que la continuation de celle du même noyau, soumise à certaines lois que je vais exposer.

44. Il suit de ce que j'ai dit plus haut, que les faces des cristaux secondaires ne sont autre chose que la somme des nouveaux bords qui résultent de l'alignement des molécules aux endroits où les lames de superposition subissent des décroissemens, d'où l'on doit conclure que la différence entre une lame et la suivante, vers les mêmes bords, est toujours égale à une ou plusieurs rangées de molécules soustraites. Or, on peut prendre ces rangées suivant diverses directions, que je commencerai par faire connaître, avant d'arriver au développement de la théorie.

Soit ABCD (fig. 55), une face d'un noyau que nous supposerons, pour plus de simplicité, être d'une forme cubique, sous-divisée en une multitude de petits carrés *a*, *b*, *c*, *d*, etc., qui soient les facettes extérieures d'autant de molécules de la même forme. D'après ce que j'ai dit plus haut, toutes ces molécules peuvent être conçues comme des unités employées par la cristallisation à la formation du noyau cubique, sans qu'il soit besoin d'avoir égard aux sous-divisions que ces unités pourraient être susceptibles de subir, et qui conduiraient à des molécules intégrantes d'une autre forme. Mais les différentes manières d'agir des lois auxquelles sont soumises dans leur arrangement les molécules qui produisent la matière surajoutée au noyau, exigent que nous considérions ces molécules tantôt comme continuant de faire la fonction d'unités, ce qui est le cas le plus ordinaire, tantôt comme formant des molécules d'un ordre supérieur, qui seront des assemblages des mêmes unités prises deux à deux, comme *a* et *b*, *c* et *d*, *k* et *l*, etc., ou trois à trois, comm *a*, *b* et *c*, *d*, *e* et *f*, *k*, *l* et *m*, etc., c'est-à-dire que dans ce dernier cas les forces d'où dépend la cristallisation agissent sur les molécules composées dont je viens de parler, suivant des lois analogues à celles qui ont lieu le plus communément par rapport à des molécules simples.

Or, des molécules soit simples, soit composées, sont censées former une rangée, lorsque les centres de leurs faces extérieures sont sur une même ligne droite. Si les molécules sont simples, il y aura deux cas qui satisferont à cette condition; dans le premier, la ligne qui traverse les centres, et à laquelle je donne, pour abréger, le nom de *ligne centrale*, est parallèle à l'un des bords de la face primitive que l'on considère. Ainsi toutes les molécules désignées par *a*, *b*, *c*, *d*, etc. (fig. 56), dont les faces extérieures ont leurs centres sur la ligne FG, forment une rangée. Dans l'autre cas, la ligne centrale est parallèle à l'une des diagonales de la même face; ainsi les molécules désignées par *v*, *x*, *y*, *z*, *q*, *f*, dont les faces extérieures ont leurs centres sur la ligne NL parallèle à la diagonale AC, forment également une rangée.

Lorsque les molécules sont composées, la ligne centrale n'est parallèle ni à un côté ni à une diagonale, mais elle fait avec l'un et l'autre un angle qui varie suivant le degré de composition.

45. Supposons que les molécules simples soient liées deux à deux comme *a*, *b* (fig. 57); menons OK qui coïncide avec la diagonale du petit rectangle relatif aux deux molécules, auquel cas elle passera nécessairement par le centre de ce rectangle; les molécules simples désignées par *o* et *s*, *t* et *z*, *q* et *ε*, etc., formeront une rangée de molécules composées, semblables à celle dont j'ai parlé, en sorte que la ligne centrale TY sera parrallèle à OK.

Prenons les six molécules désignées par *k*, *l*, *m*, *a*, *b*, *c*, pour en composer une seule, dont la face extérieure aura sa diagonale dans le sens de PR. Les molécules simples groupées six à six dans les espaces désignés l'un par $\gamma\delta\zeta\lambda$, un second par $\zeta\mu\nu\pi$, un troisième par $\nu\sigma\xi\tau$, etc., formeront une rangée de molécules semblables à celle dont la ligne PR traverse la base diagonalement, de manière que la ligne centrale UZ sera parallèle à cette même ligne.

46. On peut donc considérer les deux lignes centrales dont l'une est parallèle au côté et l'autre à la diagonale, comme les deux extrêmes entre lesquelles les positions des autres lignes centrales peuvent varier presque à l'infini. Mais nous verrons dans la suite que cette variation est restreinte par la cristallisation de manière à ne pas dépasser un certain degré de simplicité, en sorte qu'ici comme dans un grand nombre d'autres phénomènes, l'observation prescrit des limites à la théorie, qui n'en connaîtrait aucune si elle restait abandonnée à elle-même.

47. C'est par des soustractions d'une ou plusieurs rangées de molécules, soit simples soit composées, que s'opèrent les décroissemens des lames appliquées sur le noyau. On appelle *décroissemens sur les bords* ceux dans lesquels la ligne centrale est parallèle aux bords; *décroissemens sur les angles* ceux dans lesquels la même ligne est tournée vers une diagonale, et *décroissemens intermédiaires* ceux dans lesquels la position de la ligne centrale est inclinée en même temps au côté et à la diagonale.

Venons maintenant aux applications :

*Décroissemens sur les bords.*

48. Soit AG (fig. 58) un prisme droit symétrique faisant la fonction de forme primitive à l'égard des cristaux d'une substance minérale ; ce prisme peut être conçu comme résultant de la superposition d'un certain nombre de lames carrées, situées parallèlement aux bases, et composées chacune d'un égal nombre de petits prismes semblables au prisme total, et il est bien évident que si la superposition continuait avec la même uniformité en partant des deux bases, le prisme ne ferait autre chose que s'accroître dans le sens de sa hauteur, en conservant la même épaisseur.

Supposons une suite de lames appliquées sur la base ABCD, et soumise à un décroissement sur les bords qui soit le même pour tous. La première lame aura vers chaque bord une ou plusieurs rangées de moins que dans le cas où le prisme aurait continué de croître en hauteur, sans varier dans son épaisseur. La seconde comparée à la première en différera du même nombre de rangées, et ainsi de suite.

Or, il est facile d'abord de concevoir que l'effet du décroissement poussé jusqu'à sa limite sera de produire une pyramide droite quadrangulaire ABCDO (fig. 32, pl. 2) qui reposera sur la base ABCD, et dont les faces seront interrompues par des angles alternativement rentrans et saillans, semblables à ceux que font entre eux les degrés d'un escalier, en sorte que dans la réalité elles ne seront autre chose qu'un assemblage de lignes situées aux endroits des arêtes saillantes. Mais telle est la ténuité des molécules, que les inégalités dont il s'agit échapperont à l'œil, en sorte que les faces de la pyramide s'offriront sous l'aspect de plans continus, du moins en supposant que la cristallisation ait atteint tout le fini dont elle est susceptible.

49. Je n'ai considéré l'effet du décroissement que par rapport à la base supérieure ABCD de la forme primitive. Mais la symétrie avec laquelle agissent les lois de la structure exige qu'un pareil décroissement fasse naître sur la base inférieure une autre pyramide égale et semblable à la première, et à laquelle on peut appliquer tout ce que j'ai dit de celle-ci.

Soient $C\mu\nu\varepsilon$, $C\varepsilon\delta\gamma$, $C\mu\lambda\gamma$ (fig. 58) les trois faces analogues à CDAB, CBLG, CDFG, sur la molécule située en C.

La petite ligne $C\gamma$ perpendiculaire sur les arêtes $C\mu$, $\gamma\lambda$ sera ce que j'appelle *la dimension en hauteur*, rapportée à la molécule, et les lignes $C\mu$, $C\varepsilon$, perpendiculaires l'une sur CB, l'autre sur CD, seront ce que je considère comme les dimensions en largeur relatives à la même molécule. Désignons $C\gamma$ par $h$, et $c\mu$ ou $c\varepsilon$ par $l$.

Soit *emrs* (fig. 59) le même plan que (fig. 58), lequel passe par les milieux des arêtes AD, BC, perpendiculairement à la base ABCD. Soit de plus *cdig* (fig. 56) la coupe de la première lame de superposition, prise sur le même plan; *fkap* celle de la seconde, *ltvq* celle de la troisième, etc., *mg* indiquera la différence entre la première lame et la seconde, dans le sens de la largeur, en sorte que s'il n'y a qu'une rangée de soustraite, on aura $mg$ (fig. 59)$=C\mu$ (fig. 58)$=l$. S'il y a deux rangées soustraites, on aura $mg=2\,l$, et ainsi de suite. Soit en général $n$ le nombre de rangées soustraites; on aura $mg=n\times l$.

50. Jusqu'ici nous avons fait abstraction de l'épaisseur des lames de superposition, et nous avons supposé tacitement qu'elle était égale à $C\gamma$ ou à une hauteur de molécule. Mais il peut arriver que chacune de ces lames ait une épaisseur double ou triple, etc. de celle d'une molécule, et que cette épaisseur se combine tellement avec la différence en largeur que l'effet du décroissement soit encore une pyramide. Dans ce cas, si nous désignons par $n'$ le nombre d'épaisseurs de molécules contenues dans celle de chaque lame, nous aurons $gi$ (fig. 56)$=n'\times h$.

Si l'on mène les droites *eo*, *mo*, tangentes aux points *d*, *k*, *i*, *a*, etc., elles seront les apothèmes des triangles DOA, COB (fig. 32), et si du point *o* (fig. 59) on abaisse *ob* perpendiculairement sur *em*, l'angle *omb* sera égal à l'incidence de l'une quelconque des faces de la pyramide DCBAO (fig. 32) sur la base; en lui ajoutant $90^d$ on aura l'incidence de la même face sur le pan adjacent; d'une autre part, l'angle *mob* (fig. 59) mesurera la moitié de l'incidence de l'une quelconque des mêmes faces, par exemple de la face COB (fig. 32) sur la face DOA située du côté opposé.

Il est évident que tous les petits triangles *mgi*, *ipa*, *aqv*, etc., sont égaux et semblables entre eux, et de plus qu'ils sont semblables au triangle *mbo*. On donne le nom de ***triangle mensurateur*** à l'un quelconque de ces triangles, et spécialement à celui qui est situé à la naissance du décroissement, c'est-à-dire dans le cas présent au triangle *mgi*.

51. Supposons que la forme primitive soit un parallélépipède obliquangle AG (fig. 60), auquel cas les faces BCGL, DCGF feront avec la base ABCD des angles inégaux que nous supposons ici être obtus. Soit $\nu\gamma$ la molécule soustractive située en C; les facettes $C\varepsilon\alpha\gamma$, $C\mu\nu\varepsilon$ étant alors des parallélogrammes obliquangles, les lignes $C\pi$, $C\delta$ perpendiculaires l'une sur $\gamma\alpha$, l'autre sur $\mu\nu$, ne coïncideront plus avec les côtés $C\gamma$, $C\mu$. Soit *mgi* un triangle mensurateur relatif à un décroissement sur le bord BC. On aura comme cidessus $mg = n \times C\delta = n \times l$, et $gi = n' \times C\pi = n' \times h$; de plus l'angle *igm* sera égal à l'angle $\delta C\pi$ qui mesure l'incidence de CBLG sur ABCD. Donc, connaissant cet angle, ainsi que les lignes $C\delta$, $C\pi$, et de plus les quantités $n$, $n'$, il sera facile d'avoir l'angle *img*, ou celui que fait la face produite par le décroissement avec la base ABCD. On voit aisément ce qu'il y aurait à faire pour construire le triangle mensurateur relatif à un second décroissement qui agirait parallèlement au bord CD. Les côtés de ce triangle analo-

gues à *mg* et *gi* seraient alors fonctions des perpendiculaires menées du point C sur $\varepsilon\nu$ et $\gamma\lambda$, et au lieu de l'angle *mgi* on aurait celui que fait CDFG avec ABCD.

52. Lorsque la relation entre $n \times l$ et $n' \times h$ est telle que $n'$ étant égale à l'unité, $n$ est égale à 2, ou 3, ou 4, etc. le décroissement est dit avoir lieu *en largeur*, par 2, 3, 4 rangées, etc., sur le bord qui lui sert de ligne de départ; lorsqu'au contraire $n$ étant l'unité, $n'$ est égale à 2, ou 3, ou 4, etc., le décroissement est dit avoir lieu *en hauteur*, par 2, 3, 4 rangées, etc. Ainsi, cette expression, *tel décroissement a lieu par 3 rangées en largeur sur tel bord*, suppose tacitement que l'épaisseur de chaque lame de superposition soit égale à une épaisseur de molécule; et cette autre expression, *tel décroissement a lieu par trois rangées en hauteur sur tel bord*, emporte la condition que la quantité dont chaque lame décroit dans le sens de la largeur, soit mesurée par une rangée de molécules.

Mais il peut arriver aussi que $n$ et $n'$ soient égales à des nombres différens et tous deux plus grands que l'unité; par exemple, que l'on ait $n=3$, $n'=2$, ou bien $n=4$, $n'=5$ : alors le décroissement s'appelle *mixte*, parce qu'il participe des deux précédens. Dans le cas où $n=1$, et $n'=1$, on dit simplement que le décroissement a lieu par une rangée. Ce cas se rencontre dans plusieurs variétés qui appartiennent à diverses espèces de minéraux. Mais la loi qui le donne se combine avec d'autres, d'où résultent de nouvelles faces qui modifient soit les pyramides, soit le prisme interposé entre elles.

53. Soit AS (fig. 61), la forme primitive de la mésotype, qui est un prisme droit légèrement rhomboïdal dans lequel le rapport entre les demi-diagonales OH, ON de la base, est celui des quantités $\sqrt{9}$ et $\sqrt{8}$, ce qui donne $93^d\ 22'$ pour l'incidence de M sur M. De plus, la hauteur NS est égale à la perpendiculaire O*r* menée du centre de la base sur un des côtés. Soit $OH = \sqrt{9}$, on aura

$$ON = \sqrt{8} \text{ et } NS \text{ ou } Or = \frac{OH \times ON}{HN} = \sqrt{\frac{9.8}{17}} = \sqrt{\frac{72}{17}} \text{ (1).}$$

La figure 62 représente une variété de la même substance que j'ai nommée *pyramidée*, et dans laquelle le décroissement qui donne les pyramides terminales a lieu par une rangée sur les bords de la base. Proposons-nous de déterminer l'incidence des faces *o*, *o* des pyramides sur les pans adjacens M, M. Soit $\delta\mu\nu$ (fig. 63) le triangle mensurateur. D'après ce qui a été dit plus haut, les côtés $\delta\mu$ et $\mu\nu$, qui répondent à *mg* et *gi* (fig. 59), seront entre eux comme A*g* (fig. 61), menée perpendiculairement sur le côté HN de la base

(1) Je parlerai dans la suite des moyens qui m'ont servi à rectifier l'ancienne détermination que j'avais donnée de cette forme, et d'après laquelle je l'avais considérée comme un prisme à base carrée.

est à NS, c'est-à-dire comme $2Or$ : NS, ou comme 2 : 1, ce qui donne 116^d 33', pour l'incidence cherchée.

54. Je placerai ici une réflexion sur laquelle je me propose de revenir dans la suite avec de nouveaux développemens. J'ai déjà dit que la forme primitive ou le noyau d'un cristal n'était autre chose qu'une donnée prise dans la théorie, pour faciliter la détermination des différentes formes cristallines relatives à une même substance. Les dimensions de cette forme ramenée à sa véritable limite, lorsqu'elles ne sont pas données *à priori*, comme dans le cas du cube, du rhomboïde, du dodécaèdre rhomboïdal, etc., se déduisent de celles qu'il faut supposer à la molécule soustractive, pour que les décroissemens qui donnent les formes secondaires soient, en général, les plus simples possibles. Ce que je viens de dire sert à expliquer pourquoi, dans le cas dont je viens de parler, la cristallisation, qui ne consiste proprement que dans une réunion de molécules, soumises à un arrangement symétrique, substitue aux formes primitives indiquées par la théorie, des solides qui ont à la vérité leurs faces situées parallèlement à celles de ces formes, mais qui s'en écartent plus ou moins par le rapport de leurs dimensions. Ainsi, dans la variété de mésotype qui vient de nous occuper, le prisme a plus ou moins de hauteur relativement à son épaisseur, suivant les cristaux dans lesquels on le considère. Il suit de là que quand on dit des pyramides sur-ajoutées à ce prisme, qu'elles naissent d'un dé-

croissement par une rangée sur les bords des bases de la forme primitive, la chose ne serait rigoureusement vraie que dans l'hypothèse où les dimensions de cette forme auraient entre elles le même rapport que dans les molécules soustractives. Mais comme les pyramides ressemblent parfaitement à celles qui seraient produites dans cette même hypothèse, les faces qui leur servent de support s'identifient, dans les applications de la théorie, avec celles qui leur correspondent sur la forme primitive proprement dite.

55. Il y a des cas où, pour faciliter les applications de la théorie, on considère le triangle mensurateur dans des plans différens de ceux auxquels nous les avons rapportés jusqu'ici. On peut supposer, par exemple, que le triangle relatif au décroissement qui donne la pyramide ADCBO (fig. 32), soit situé dans un plan qui passerait par les arêtes CO, AO, en coupant la base dans le sens de la diagonale menée de C en A. Soit *ctx* (fig. 63) le triangle dont il s'agit; l'expression du côté *ct*, qui est censé appliqué sur la base ABCD (fig. 58), de manière que le point *c* (fig. 63) se confonde avec le point C (fig. 58), renfermera autant de fois la diagonale *ct* que le côté *gm* (fig. 59) renferme d'arêtes égales à C$\mu$ (fig. 58). Donc désignant par $d$ la diagonale dont il s'agit, nous aurons $ct$ (fig. 63) $= n \times d$. Quant au côté $tx$, il est évident que son expression sera la même que celle du côté $gi$ (fig. 59), auquel il est égal, c'est-à-dire qu'elle sera $n' \times h$.

L'espèce de triangle mensurateur dont je viens de parler donne l'incidence de l'une quelconque des arêtes obliques de la pyramide (fig. 32) sur la base ABCD, et en ajoutant $90^d$ à cette incidence on a l'angle que font entre elles les arêtes CO, CG, ou OD, DF, etc.

56. Il arrive souvent que l'effet d'un décroissement s'arrête à un certain terme, en deçà de la limite vers laquelle il tendait. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, si la partie ajoutée au noyau (fig. 58) par l'effet du décroissement qui agit sur les bords de la base ABCD, au lieu d'être une pyramide complète, s'offrait sous l'aspect d'une pyramide tronquée parallèlement à sa base. Dans ce cas, les faces produites par le décroissement seraient des trapèzes adjacens par leurs bases supérieures à une face terminale semblable et parallèle à la base ABCD.

57. La baryte sulfatée nous offre un exemple de cette modification dans une variété représentée (fig. 64), et que je nomme *subpyramidée*. La forme primitive est un prisme droit rhomboïdal (fig. 65), dans lequel le rapport des demi-diagonales DP, CP et de la hauteur CG, est celui des nombres $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$ et $\sqrt{21}$. Le décroissement qui donne les faces *z*, *z*, etc. (fig. 64), a lieu par deux rangées en hauteur sur les quatre bords de la base ADCB (fig. 65).

Soient $C\varepsilon\delta\gamma$, $C\mu\lambda\gamma$, $C\mu\nu\varepsilon$, les facettes extérieures d'une molécule soustractive située en C. Menons *Cd* perpendiculaire sur $\mu\nu$, et dont le prolongement *de* sera aussi perpendiculaire sur AD.

Soit *cesg* (fig. 66) la coupe du noyau prise par un plan qui coïncide avec CG, C*e* (fig. 65), et soit *hdin* (fig. 66), la coupe de la première lame de superposition, *fkap* celle de la seconde, etc.; *cni* représentera le triangle mensurateur dans lequel $cn = Cd$ (fig. 65), et $ni = 2C\gamma$. Or, parce que les dimensions de la molécule soustractive sont proportionnelles à celles du noyau, $Cd : C\gamma :: Ce : CG$. Soit $DP = \sqrt{12}$, AP ou $CP = \sqrt{8}$, $CG = \sqrt{21}$. Nous aurons

$$AD = \sqrt{(DP)^2 + (AP)^2} = \sqrt{20} \, . \, Ce \times AD = AP \times DB,$$

ou $Ce \times \sqrt{20} = \sqrt{8 \cdot 48}$. Donc $Ce = \sqrt{\frac{96}{5}} \ldots$ Donc $Ce : CG :: \sqrt{\frac{96}{5}} : \sqrt{21} :: \sqrt{32} : \sqrt{35} :: Cd : C\gamma$. Donc $cn : ni$ (fig. 66) $:: \sqrt{32} : 2\sqrt{35} :: \sqrt{8} : \sqrt{35}$. D'ailleurs l'angle *cni* est droit; d'après ces données, l'angle *icn* est de $64^d 26'$, et l'angle *cin* de $25^d 34'$, d'où il suit que l'incidence de *z* sur M (fig. 64) est de $154^d 26'$, et celle de *z* sur P de $115^d 34'$.

58. J'ai supposé que le décroissement qui donne les facettes *z*, *z* avait une marche ascendante en dessus des bords CD, CB, etc. (fig. 65), de la base du noyau, en sorte qu'il tendait à produire une pyramide au-dessus de cette base. Mais on peut supposer, au contraire, que le décroissement ait une marche descendante en dessous des mêmes arêtes, de manière que les faces qui en résultent, ayant les mêmes inclinaisons que dans le cas précédent, tendent à se réunir sur des arêtes communes situées au-

dessus des lignes *tx*, *sx* (fig. 64), qui divisent transversalement les faces M, M en deux parties égales. Alors la base P (fig. 65) sera censée rester intacte, et les lames de superposition partiront des faces M, M', pour s'appliquer les unes sur les autres. On conçoit aisément que si le décroissement atteignait sa limite, la surface du cristal serait composée, dans le sens latéral, de huit trapèzes accolés deux à deux par leurs grandes bases, et compris entre deux faces terminales parallèles et semblables aux bases de la forme primitive. Ayant prolongé indéfiniment la ligne *ic* (fig. 66), prenons sur *cg* une partie *cz* égale à *in*, et menons *zo* perpendiculaire sur *cg*. Le triangle *czo* deviendra mensurateur relativement au décroissement dont nous venons de parler, et il est évident qu'il sera égal et semblable au triangle *inc*, en sorte que *cz* étant égale à *in*, par la construction, *oz* sera égale à *cn*. Donc, puisque *in* est double de C*y* (fig. 65), le décroissement aura lieu par deux rangées en largeur, entre les bords BC, GL d'une part, et CD, GF de l'autre. Si dans le décroissement rapporté aux bases, comme dans la première hypothèse, il y avait trois rangées de soustraites en hauteur, celui qui lui correspondrait vers les faces latérales se ferait par des soustractions de trois rangées en largeur, et ainsi de suite pour les décroissemens plus composés.

59. Concluons de là que si l'on suppose deux décroissemens qui agissent de part et d'autre d'une

même arête, de manière à produire des faces qui soient sur un même plan, chacun d'eux sera l'inverse de l'autre. Ainsi, un décroissement mixte qui aurait lieu d'un côté par trois rangées en largeur, et par deux en hauteur, aurait pour analogue, du côté opposé, un décroissement par deux rangées en largeur et trois en hauteur.

Dans les cas semblables à celui de la fig. 32, pl. 2, où l'effet du décroissement est de produire des pyramides appliquées sur les bases du noyau, il est naturel de considérer la marche du décroissement comme ascendante. Si, au contraire, les faces produites par le décroissement se réunissent sur des arêtes situées latéralement, en masquant les faces M, M (fig. 65), il conviendra de considérer la marche du décroissement comme descendante.

60. Lorsque l'effet du décroissement se borne à faire naître à la place des bords CD, BC, des faces *z*, *z* (fig. 64), qui ne parviennent pas à se rencontrer, il peut arriver que l'effet du décroissement soit beaucoup plus voisin de la limite à laquelle répondent les pyramides complètes, que de celle qui réside dans la réunion des faces *z*, *z*, au-dessus des arêtes *tx* et *sx*. Entre les deux limites il est une multitude d'intermédiaires que les différens cristaux de la même variété sont susceptibles d'offrir. Mais comme la manière de représenter le décroissement doit être uniforme, l'analogie peut, dans ces sortes de cas, indiquer celle qui doit être préférée. Ainsi, ayant remarqué

que les facettes $z$, lorsqu'elles se retrouvent sur des variétés de baryte sulfatée, différentes de celle qui vient de nous occuper, y sont combinées avec d'autres facettes dues à des décroissemens dont l'expression la plus simple et la plus naturelle est celle qui suppose leur marche ascendante, j'ai assimilé à cette marche celle du décroissement qui donne les facettes $z$, en supposant qu'elle ait lieu dans le même sens.

Il peut arriver enfin que des faces analogues à $z$, $z$ se prolongent de part et d'autre des lignes $lr$, $rn$, jusqu'au point de masquer entièrement les bases P et les pans M, M de la forme primitive, auquel cas le solide secondaire sera un octaèdre rhomboïdal. Le choix entre les deux manières de représenter l'effet du décroissement devient alors indifférent en lui-même. Cependant, si aucune raison particulière ne décide de la préférence, je crois plus convenable de la donner à l'expression qui suppose que le décroissement ait une marche ascendante, parce que l'idée que fait naître l'octaèdre dont il s'agit, d'après les relations de position qui existent entre ses différentes faces et son axe vertical, est celle d'un solide composé de deux pyramides jointes base à base, et qu'on se représente naturellement une pyramide comme un assemblage de lames décroissantes superposées depuis la base jusqu'au sommet.

61. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'exposer un résultat général d'observation relatif à l'influence qu'a sur les décroissemens le rapport qui

existe soit entre les côtés, soit entre les angles des différentes formes primitives. Ce résultat peut être ramené aux conditions suivantes :

1°. Si parmi les bords identiques qui existent sur une forme primitive, un seul subit un décroissement d'une mesure donnée, ou reste libre, tous les autres, à son imitation, subiront le même décroissement ou resteront libres. Il en est de même des angles : ce qui a lieu par rapport à un seul des angles plans qui composent des angles solides égaux, se répète sur tous les autres. Car les bords identiques, et il en faut dire autant des angles égaux, pouvant être pris indifféremment l'un pour l'autre, il n'y a pas de raison pour que la variation, dans le cas où il y en aurait une, tombât plutôt sur l'un que sur l'autre; d'où il suit qu'ils ne seront pas non plus distingués entre eux dans les effets des décroissemens. 2°. Si deux bords ou deux angles solides diffèrent entre eux, il pourra arriver qu'ils subissent tous deux la même loi de décroissement, ou qu'ils subissent deux lois différentes, ou que l'un soit soumis à un décroissement tandis que l'autre restera libre. Il n'existe à cet égard de dépendance nécessaire qu'entre les bords ou les angles, dont chacun est censé représenter tous les autres.

Les conditions précédentes sont liées étroitement à une autre, qui exige que les parties de la forme secondaire qui répondent à des faces égales et semblables sur la forme primitive, soient aussi égales et semblables entre elles.

Je me borne à indiquer ici ce résultat aussi simple que général, auquel j'ai donné le nom de *loi de symétrie*, me proposant d'en développer toutes les conséquences dans un article qui lui sera spécialement consacré.

62. D'après les conditions énoncées ci-dessus, si parmi les douze bords d'un cube AO′ (fig. 67), que nous allons maintenant considérer comme forme primitive, un seul subit une loi de décroissement, tous les autres la subiront également. Supposons que le décroissement ait lieu par une rangée, les lames de superposition empilées sur les six faces du cube produiront autant de pyramides triangulaires, dont les bases se confondront avec elles, ainsi qu'on le voit (fig. 68), et il est clair que les faces de ces pyramides seront inclinées de $45^d$ sur celles du noyau. Or le cas présent, où les deux décroissemens qui agissent des deux côtés de chaque bord du cube ont lieu par une rangée étant la limite de tous les cas où les décroissemens sont inverses l'un de l'autre, les faces qui en résultent sont aussi sur un même plan. Donc les vingt-quatre faces qui composent la surface des six pyramides se réduisent à douze faces distinctes qui sont des rhombes égaux et semblables *s*O*t*I, *s*OE*r*, *t*O*r*O′, etc. (fig. 68 et 69). Le dodécaèdre rhomboïdal que nous avons vu au rang des formes primitives se retrouve ici parmi les formes secondaires, et nous le verrons dans la suite reparaître sous le même titre comme modification de l'octaèdre régulier.

La figure 70 offre une imitation en grand de la structure qui a lieu dans la variété qui vient d'être décrite. Elle a été tracée dans l'hypothèse où le nombre des molécules qui composent le noyau serait de 4913, égal au cube de 17, et l'on s'est borné à y rendre trois des pyramides qui reposent sur les six faces du noyau, en laissant à découvert une des faces qui se présentent en avant (1).

63. Si l'on considère l'un quelconque des axes qui passent par deux angles solides tétraèdres, tels que $s$, $s'$ (fig. 68), le dodécaèdre aura toujours quatre de ses faces situées parallèlement à cet axe, telles que $rOtO'$, $tIr'I'$, $r'At'A'$, $t'ErE'$, et il est visible que ces faces font entre elles des angles droits. Si, d'une autre part, on prend l'un quelconque des axes qui passent

(1) M. Belœuf, attaché à l'établissement du Jardin du Roi, exécute des imitations en bois des mêmes formes dont nous donnons ici les projections, et qui ont cet avantage, que l'œil, en les parcourant dans tous les sens, saisit plus facilement la manière dont se combinent les décroissemens qui donnent naissance aux formes dont il s'agit. D'autres solides représentent le résultat de la division mécanique du noyau, et l'assortiment des molécules intégrantes dont il est l'assemblage. Le même artiste exécute des solides simples, sur le modèle de toutes les formes cristallines que nous avons déterminées jusqu'ici ; et telle est la précision à laquelle il est parvenu, que le gonyomètre ne donne aucune différence sensible entre les angles de ces solides et ceux des cristaux eux-mêmes.

par deux angles solides trièdres, tels que O, A', le dodécaèdre aura six de ses faces situées parallèlement à cet axe, telles que *r*E'*s*'O', O'*s*'I'*t*, *t*I'*r*'I, I*r*'A*s*, *s*A*t*'E, E*t*'E'*r*, lesquelles, à cause de la régularité de la forme primitive et de l'action symétrique des décroissemens, font entre elles des angles égaux ; et comme la même disposition se répète dans tous les sens, il en résulte que l'incidence mutuelle de deux faces quelconques adjacentes est de 120$^d$.

La cristallisation nous offre un exemple du décroissement dont je viens de parler, dans une substance pierreuse à laquelle j'ai donné le nom d'*aplome*. La même structure a lieu dans une variété de fer sulfuré où les faces du dodécaèdre rhomboïdal se combinent avec huit facettes triangulaires situées à la place des angles solides trièdres, et qui dépendent d'une loi que je ferai connaître dans la suite.

64. Pour que la lame située au sommet de chaque pyramide se réduise à un simple cube, ainsi que le représente la figure 70, il faut supposer que le côté du noyau soit composé d'un nombre impair d'arêtes de molécules. Dans cette hypothèse, qui est la plus naturelle que l'on puisse faire, les nombres de molécules des lames consécutives, en partant des sommets des pyramides, forment une série dont les différens termes sont les carrés des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, etc., et dont le terme général du rang $n$ est $(2n-1)^2$. Si l'on prend la série en sens inverse, c'est-à-dire en partant des faces du noyau, et si l'on

désigne par C le nombre d'arêtes comprises dans le côté de ce noyau, et par $n'$ le rang d'un terme quelconque, les nombres de celles que renferment successivement les lames de superposition, formeront la progression $C-2$, $C-4$, $C-6$, $C-8$, etc...... $C-2n'$, et les nombres de molécules qui composent ces lames seront égaux aux carrés des termes de cette même série, de sorte que la somme de toutes les molécules comprises dans la lame du rang $n'$ sera $(C-2n')^2$.

La quantité C étant donnée, il est facile de connaître le nombre total N des lames de superposition qui composent une même pyramide, en faisant attention que N est le nombre des termes d'une progression arithmétique décroissante, $C-2$, $C-4$, $C-6$, $C-8$, etc...., dont le dernier terme est l'unité. En appliquant ici les formules relatives à ce genre de progressions, on trouvera $N=\frac{C-1}{2}$.

65. On peut déterminer de même en fonction de C le nombre de tous les cubes élémentaires dont le dodécaèdre est l'assemblage. Pour y parvenir, j'observe que le nombre de ceux qui composent l'une quelconque des six pyramides superposées aux faces du noyau est égal à la somme des carrés des termes de la suite arithmétique $1.3.5.7.9....C-2$. Or, si l'on désigne en général par $a$ le premier terme d'une pareille suite, par $u$ le dernier, par $r$ la différence entre deux termes consécutifs, et par $s'$ la

somme des carrés de tous les termes, on a la formule

$$s' = \frac{2(u^3 - a^3) + 3r(u^2 + a^2) + r^2(u - a)}{6r} \text{ (1).}$$

---

(1) Cette formule, dont l'usage s'étend à toutes les questions du genre de celle qui nous occupe, ne faisant point partie des élémens ordinaires de l'Algèbre, je crois utile d'en donner ici une démonstration simple, qui dispensera le lecteur de recourir aux ouvrages qui en traitent d'une manière spéciale.

Soient $a$, $b$, $c$, $d$,..... $t$, $u$, les termes de la progression dont il s'agit, et $n$ leur nombre. Déterminons d'abord leur somme, que je représenterai par $s$. Nous aurons $b = a + r$; $c = b + r$; $d = c + r$;..... $u = t + r$; et en élevant chaque membre de ces équations au carré,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + 2ar + r^2, \\ c^2 &= b^2 + 2br + r^2, \\ d^2 &= c^2 + 2cr + r^2, \\ &\vdots \\ u^2 &= t^2 + 2tr + r^2. \end{aligned}$$

Egalant la somme des premiers membres de ces équations à celle des seconds, supprimant les quantités communes aux deux sommes, et transposant $a^2$ dans la première, on a

$$u^2 - a^2 = 2r(a + b + c + d + \ldots + t) + r^2(n - 1).$$

Or,

$$a + b + c + d + \ldots + t = s - u;$$

donc

$$u^2 - a^2 = 2r(s - u) + r^2(n - 1);$$

Mais ici $a=1$, $u=C-2$, $r=2$. Si l'on substitue dans la formule ces valeurs de $a$, $u$, et $r$, elle devient $s'=\frac{C^3-3C^2+2C}{6}$. On a donc pour l'ensemble des six pyramides $6s'=C^3-3C^2+2C$, et en ajoutant $C^3$, on obtiendra le nombre total des cubes élémentaires qui composent le dodécaèdre, savoir, $2C^3-3C^2+2C$.

---

ou bien, à cause de

$$n-1=\frac{u-a}{r},\ u^2-a^2=2r(s-u)+(u-a)r;$$

d'où l'on obtient

$$s-u-\frac{u^2-a^2-r(u-a)}{2r}.$$

Maintenant, pour avoir $s'$, nous suivrons la même marche, en substituant les valeurs des cubes à celles des carrés, nous aurons donc successivement

$$\begin{aligned}
b^3 &= a^3+3a^2r+3ar^2+r^3,\\
c^3 &= b^3+3b^2r+3br^2+r^3,\\
d^3 &= c^3+3c^2r+3cr^2+r^3,\\
&\vdots\\
u^3 &= t^3+3t^2r+3t^2+r^3;
\end{aligned}$$

et en égalant la somme des premiers membres à celle des seconds, et faisant les réductions et transpositions analogues aux précédentes,

$$u^3-a^3=3r(s'-u^2)3r^2+(s-u)+(n-1)r^3.$$

Mettant à la place de $s-u$ et de $n-1$ leurs valeurs exprimées plus haut, et dégageant $s'$, on trouve

$$s'=\frac{2(u^3-a^3)+3r(u^2+a^2)+r^2(u-a)}{6r},$$

Si l'on suppose $C = 17$ comme dans la figure, le nombre dont il s'agit sera égal à 8993.

Si C devient infini, alors $3C^2$ et $2C$ s'évanouissent devant $2C^3$, ce qui indique que la solidité du dodécaèdre considéré comme corps géométrique est double de celle du noyau. Effectivement, si l'on mène par les arêtes du noyau des plans qui passent en même temps par le centre, ils détacheront six pyramides égales à chacune de celles qui sont le résultat du décroissement.

66. Supposons maintenant que chaque bord du cube serve de ligne de départ à deux décroissemens, dont l'un ait lieu d'un côté par deux rangées en largeur, et l'autre du côté opposé par deux rangées en hauteur. On voit d'abord que l'un des décroissemens étant l'inverse de l'autre, les deux faces qui en naîtront se trouveront sur un même plan, d'où il suit que l'on aura encore un dodécaèdre, mais qui devra différer du dodécaèdre rhomboïdal par les figures et les inclinaisons de ses faces. On conçoit de plus que le résultat sera variable suivant les diverses manières dont les directions des décroissemens seront combinées entre elles. Si l'on suppose, par exemple, que le décroissement en largeur agisse parallèlement aux quatre bords des deux faces AEOI, A'E'O'I' (fig. 67), il produira deux pyramides qui reposeront sur ces mêmes faces. Mais les autres décroissemens qui auront lieu parallèlement aux bords des faces latérales ne pourront produire de semblables pyramides. Ainsi,

relativement à la face OII'O', le décroissement sur les bords OI, O'I' étant l'inverse du décroissement par deux rangées en largeur qui agit de l'autre côté des mêmes bords, son effet ne sera pas le même que celui du précédent, et de quelque manière que l'on arrange les choses par rapport aux bords OO', II', la similitude des parties qui répondent aux différentes faces du cube ne pourra avoir lieu, ce qui est contraire à la seconde des conditions exposées ci-dessus. Le seul arrangement susceptible de concilier les deux conditions est celui dans lequel l'un quelconque des décroissemens, considéré sur trois faces adjacentes à un même angle solide, comme EOIA, EOO'E', OO'I'I, agit parallèlement à des lignes PQ, RS, TN, menées par les milieux de deux côtés opposés, suivant trois directions perpendiculaires entre elles. Supposons que ce soit le décroissement en largeur.

67. Soient T*hg*, T*zl* (fig. 71), deux triangles mensurateurs, dans lesquels le point T est le même que (fig. 67). De plus, il faut concevoir le côté T*h* (fig. 71) situé sur le carré OIAE (fig. 67), perpendiculairement à la ligne PQ, et le côté T*z* (fig. 71) situé sur le carré OII'O' (fig. 67), dans le sens de la ligne TN, d'où il suit que le triangle T*hg* (fig. 71) se rapporte au décroissement par deux rangées en largeur, qui a lieu en allant de OI vers EA (fig. 67), et le triangle T*zl* au décroissement par deux rangées en hauteur, qui est l'inverse du précédent, et qui a lieu en allant de OI vers O'I'.

Soient P*ux*, P*ym* (fig. 72) deux autres triangles mensurateurs dans lesquels le point P est le même que (fig. 67), le côté P*u* (fig. 72) étant dans le sens de PQ (fig. 67), et le côté P*y* (fig. 72) étant situé sur le carré EOO′E′ (fig. 67), perpendiculairement à la ligne RS; d'où il suit que le triangle P*ym* (fig. 72) se rapporte au décroissement par deux rangées en largeur, qui a lieu en allant de EO vers E′O′ (fig. 67), et le triangle P*ux* au décroissement par deux rangées en hauteur qui est l'inverse du précédent, et qui a lieu en allant de EO vers AI (fig. 67).

68. On voit par la disposition de ces triangles que les faces produites en vertu du décroissement qui agit parallèlement aux bords OI, EA, étant inclinées sur les bases d'une quantité égale à l'angle *g*T*h* (fig. 71), tandis que celles qui résultent du décroissement dont les directions sont parallèles aux bords EO, AI (fig. 67), faisant avec les mêmes bases un angle beaucoup plus ouvert, mesuré par *x*P*u* (fig. 72), les quatre faces ne se réuniront plus en un point commun, comme dans l'exemple précédent; mais les premières, qui convergent davantage l'une vers l'autre, iront se rencontrer sur une arête commune située au-dessus de PQ (fig. 67), en sorte qu'elles seront des trapèzes IO*pq*, AE*pq* (fig. 73), tandis que les deux autres seront des triangles OE*p*, AI*q*, qui auront leurs sommets aux extrémités de l'arête *pq*. Les mêmes effets se répéteront sur les faces OII′O′, EOO′E′ (fig. 67); mais les lignes de jonction *pq*,

*tn*, *rs* (fig. 73) des trapèzes relatifs aux trois faces (et il en faut dire autant des faces opposées) ayant des directions perpendiculaires entre elles, il en résulte que chacun des triangles, tels que O*t*I, E*p*O, etc., est sur le prolongement d'un trapèze situé de l'autre côté du même bord, en sorte que la surface du solide secondaire est composée de douze pentagones égaux et semblables, comme on le voit (fig. 74).

69. Remarquons maintenant que dans chaque triangle tel que O*t*I (fig. 73), les côtés O*t*, I*t*, adjacens au sommet sont égaux, par une suite de la régularité du noyau et de la symétrie avec laquelle agissent les décroissemens. De plus, chaque trapèze tel que *nt*O*s*O′ a quatre côtés communs avec les triangles adjacens, O*t*I, O*s*O′, O′*n*I′, savoir, O*t*, O*s*, O′*s*, O′*n*, d'où il suit que ces mêmes côtés sont égaux entre eux. A l'égard de la ligne *tn*, qui peut être considérée comme la base commune des pentagones *tn*O′*s*O, *tn*I′*s*′I, je prouverai ailleurs que, dans le cas présent, elle est plus petite que chacun des autres côtés dans un rapport que je déterminerai, et je donnerai de nouveaux développemens sur les propriétés du dodécaèdre dont il s'agit, qui diffère essentiellement du dodécaèdre régulier de la Géométrie, avec lequel plusieurs minéralogistes l'ont confondu.

Je me bornerai, pour le présent, à indiquer l'incidence respective des pentagones, aux endroits où ils se réunissent sur une base commune, par exemple, celle des pentagones *tn*O′SO, *tn*I′S′I. Cette incidence est évidemment le double de l'angle T$gh$ (fig. 71), qu'il est facile de déterminer, d'après l'observation que le triangle $h$T$g$ est rectangle en $h$, et que son côté T$h$ est double du côté $hg$, en conséquence de ce que le décroissement qu'il sert à mesurer a lieu par deux rangées de molécules cubiques. En partant de ces données, on trouve que l'angle T$gh$=63$^d$26′6″, d'où il suit que l'incidence cherchée est de 126$^d$52′12″.

On voit (fig. 75) une imitation de la structure qui vient d'être exposée, du même genre que celle que présente la figure 70, et qui se rapporte au dodécaèdre rhomboïdal.

70. Les lames de superposition empilées sur les diverses faces du cube, dans la variété qui nous occupe, étant de niveau deux à deux dans le sens du décroissement en hauteur, tandis que dans celui du décroissement en largeur elles diminuent sans interruption, il en résulte que les nombres de molécules dont elles sont successivement composées forment deux séries, dont l'une comprend tous les cas où le rang $n'$ d'un terme donné est un nombre impair, et l'autre ceux où il est un nombre pair.

Pour trouver les formules relatives à ces deux espèces de cas, désignons par $c$ le nombre d'arêtes contenues dans le côté du noyau; soit $g$ la plus grande dimension des bases rectangulaires de l'une quelconque des lames de superposition, et $p$ la plus petite, auquel cas le produit $gp$ représentera généralement le nombre de molécules comprises dans chaque

6..

lame de superposition. Si l'on prend les séries en partant des faces du noyau, il est aisé de voir que $p$ sera égal successivement à $c-4$, $c-8$, $c-12$, $c-16$, etc., c'est-à dire qu'en général il sera égal à $c-4n'$. D'une autre part, $g$ sera égal successivement à $c-2$, $c-2$, $c-4$, $c-4$, $c-6$, $c-6$, etc.; c'est-à-dire que si $n'$ est un nombre impair, on aura $g=c-n'-1$, et si $n'$ est un nombre pair, on aura $g=c-n'$. Donc dans la série des nombres impairs $gp=(c-n'-1)(c-4n')$, et dans celle des nombres pairs $gp=(c-n')(c-4n')$, expressions qui ne diffèrent qu'en ce que le premier facteur de l'une est moindre d'une unité que celui de l'autre.

Pour que $p$ soit égal à l'unité dans la dernière lame, il faut que le nombre d'arêtes de molécules contenues dans chaque bord du noyau soit un multiple de 4 augmenté de l'unité, en sorte que si l'on désigne par N le nombre total des lames, on doit avoir $c-4N=1$. Donc, en général, $c=4N+1$. Si l'on substitue cette valeur de $c$ dans les formules précédentes, celle qui est relative aux nombres impairs deviendra

$$gp=(4N-n')(4N-4n'+1),$$

et celle qui se rapporte aux nombres pairs sera

$$gp=(4N-n'+1)(4N-4n'+1),$$

expressions qui ne diffèrent que par l'addition d'une unité dans le premier facteur de la seconde.

71. La figure 75 a été construite dans l'hypothèse d'un noyau dont le côté renfermerait dix-sept arêtes

de molécules. Donc $c=17$. Or, la formule $c-4N=1$ donne $N=\frac{c-1}{4}$. Donc ici $N=4$. Donc le nombre de molécules contenues dans la troisième lame, prise pour exemple, ou $(4N-n')(4N-4n'+1)$ sera

$$(16-3)(16-12+1)=13.5=65;$$

et le nombre de molécules contenues dans la quatrième lame, ou $(4N-n'+1)(4N-4n'+1)$ sera

$$(16-4+1)(16-16+1)=13.$$

Le solide que nous considérons ici diffère du dodécaèdre rhomboïdal (fig. 70), en ce que, dans celui-ci, la dernière lame se réduit toujours à un simple cube, au lieu que dans l'autre le nombre des molécules qui composent la lame correspondante dépend de celui dont le noyau est l'assemblage.

72. Proposons-nous maintenant de déterminer en fonction de $c$ le nombre de cubes élémentaires qui composent ce dodécaèdre.

Continuons de partager l'ensemble des lames de superposition appliquées sur chaque face du noyau en deux séries, que nous prendrons dans un ordre inverse de celui que nous avons supposé plus haut, c'est-à-dire en allant vers le noyau, en sorte que les termes dont le rang était pair deviendront ceux d'un rang impair, et réciproquement.

Soit dans le cas présent $g$ la plus grande dimension, et $p$ la plus petite dimension de la première lame de chaque série; soit $r'$ la différence entre deux grandes dimensions consécutives, $r''$ celle entre les petites dimensions correspondantes, et $n$ le nombre des lames; on aura successivement pour les nombres de cubes qu'elles renferment

$$
\begin{aligned}
& gp\,; \\
& (g+r')\ (p+r'') = gp+pr'+gr''+r'r''; \\
& (g+2r')(p+2r'') = gp+2pr'+2gr''+4r'r''; \\
& (g+3r')(p+3r'') = gp+3pr'+3gr''+9r'r''; \\
& (g+4r')(p+4r'') = gp+4pr'+4gr''+16r'r''; \\
& \vdots \\
& [g+(n-1)r'][p+(n-1)r''] = gp+(n-1)pr'+(n-1)gr''+(n-1)^2r'r''.
\end{aligned}
$$

Réunissant toutes ces quantités, on aura pour l'expression générale de la somme S des lames,

$$
\begin{aligned}
S = ngp & + [1+2+3+4+\ldots+(n-1)](pr'+gr'') \\
& + [1+4+9+16+\ldots+(n-1)^2]r'r''.
\end{aligned}
$$

Or, si l'on applique aux deux séries que renferme cette expression, les formules de la page (77), on trouvera

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1) = \frac{n^2-n}{2},$$

et

$$1+4+9+16+\ldots+(n-1)^2 = \frac{2n^3-3n^2+n}{6}.$$

Donc l'équation ci-dessus devient

$$S = ngp + \frac{n^2-n}{2}(pr'+gr'') + \frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r''.$$

Maintenant, si nous supposons que la première lame de la série des termes impairs se réduise à une simple rangée, nous aurons pour cette série, $p=1$; et pour celle des termes pairs $p=5$.

Dans le premier cas,

$$S=ng+\frac{n^2-n}{2}(r'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r'';$$

et dans le second,

$$S=5ng+\frac{n^2-n}{2}(5r'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r''.$$

Les valeurs de $r'$, $r''$, $g$ et $n$, sont les mêmes dans les deux cas. Si donc on réunit les seconds membres de ces équations, on aura l'ensemble des deux séries, ou

$$6ng+(n^2-n)(3r''+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{3}r'r''.$$

Nous avons trouvé plus haut (page 85) $N=\frac{c-1}{4}$; N désignant le nombre total des lames comprises dans les deux séries. Or, $N=2n$; donc, $n=\frac{c-1}{8}$. D'une autre part, $g$ est égal à $c$ moins 2 pris autant de fois que $n$ renferme d'unités. Donc $g=c-2n=\frac{3c+1}{4}$; Enfin $r'=2$, $r''=8$. Substituant dans l'expression ci-dessus les valeurs de $n$, $g$, $r'$, $r''$, et réduisant, on aura $\frac{11c^3-54c^2+43c}{96}$. Multipliant par 6, et ajoutant $c^3$, qui est le nombre des cubes que renferme le noyau, on obtiendra la somme totale de ceux dont le dodécaèdre est l'assemblage, ou $\frac{27(c^3-2c^2)+43c}{16}$.

73. Si l'on fait $c = 17$, comme dans la figure 75, on trouvera 7361 pour la somme des cubes élémentaires. Si l'on suppose $c$ infini, auquel cas $2c^2$ et $43c$ s'évanouissent, l'expression se réduit à $\frac{27}{16}c^3$ ; c'est-à-dire que si l'on considère le dodécaèdre comme un corps géométrique, sa solidité sera à celle du noyau :: 27 : 16, ce que l'on peut démontrer d'ailleurs par un calcul direct.

74. Il existe une variété de fer sulfuré (fig. 76) produite en vertu d'un décroissement analogue à celui qui donne naissance au dodécaèdre à faces pentagonales, mais qui a lieu par quatre rangées en largeur dans un sens, et par quatre rangées en hauteur dans le sens opposé. Dans les cristaux observés jusqu'ici, ce décroissement n'atteint pas sa limite, de manière qu'il reste sur la surface du cristal secondaire des rectangles P, M, M parallèles aux faces du noyau, et que les faces $h$, $h'$, $h''$, données par les décroissemens sont des hexagones. La face $h''$ située à la droite de P étant censée résulter du décroissement par quatre rangées en largeur, si dans le triangle T$hg$ (fig. 71), on fait T$h$ = 4$gh$, on trouve que l'angle T$gh$ est de $75^d 57' 49''$; d'où il suit que l'angle $g$T$h$ est de $14^d 2' 11''$, ce qui donne $165^d 57' 49''$ pour l'incidence de P sur $h''$ (fig. 76), et $104^d 2' 11''$ pour celle de M sur $h''$.

75. Considérons maintenant le prisme droit rectangulaire que l'on voit (fig. 77), dans lequel le

rapport des côtés CD, CB, CG est celui des nombres $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$, et qui est la forme primitive de la cymophane. Les côtés dont il s'agit étant dans trois cas différens, si l'un quelconque d'entre eux, tel que CB, sert de ligne de départ à un décroissement, il n'est pas nécessaire que les deux autres en subissent un semblable, et il peut même arriver que ceux-ci restent libres; il faudra seulement que le même décroissement se répète sur les trois bords AD, FN, GL qui sont identiques au premier.

C'est ce que l'on observe dans la variété de cymophane représentée (fig. 78), et que je nomme *anamorphique*. L'effet du décroissement, qui a lieu par une seule rangée sur les quatre bords désignés, est de produire au-dessus de chaque base, telle que ABCD (fig. 77), un prisme triangulaire BCOKAD (fig. 78), appliqué par un de ses pans sur cette base, et dont les deux autres pans BCOK, ADOK sont la somme des bords décroissans sur les lames de superposition. Il est facile de voir que dans le triangle mensurateur *abc* (fig. 79), qui se rapporte ici à la face BCOK (fig. 78), le côté horizontal *ab* (fig. 79), est au côté vertical *ac* comme CD est à DF ou CG, c'est-à-dire comme $\sqrt{6} : \sqrt{2}$, ou comme $\sqrt{3} : 1$, d'où il suit que l'angle *cba* (fig. 79) $= 30^d$. Ainsi l'incidence de BCOK (fig. 78) sur BCGL sera de $120^d$. J'appelle cette variété *anamorphique*, parce que si on lui faisait prendre la position en apparence la plus naturelle d'après son aspect extérieur, qui est celle d'un prisme hexaèdre, la base M étant alors située horizontalement, la forme primitive se trouverait comme renversée.

76. Dans toutes les variétés que nous avons considérées jusqu'ici, les lames de superposition décroissent de tous les côtés à la fois, ou si elles ne décroissent que vers deux de leurs bords, comme dans la cymophane anamorphique (fig. 78), les autres bords ne font autre chose que se mettre de niveau entre eux, en restant sur le prolongement des faces M du noyau. Mais il existe des variétés dans lesquelles certains bords, sans être soumis à aucun décroissement, subissent des variations qui secondent les effets des décroissemens relatifs à d'autres bords, et concourent avec ceux-ci vers le but de la cristallisation. Nous allons en citer quelques exemples.

Reprenons le dodécaèdre à triangles scalènes (fig. 80) que j'ai déjà cité comme ayant pour noyau le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et qui est situé de manière que les petits côtés EO, OI, IK, etc., de ses faces triangulaires se confondent avec les bords inférieurs de ce rhomboïde; d'où l'on voit qu'il résulte d'un décroissement dont l'effet se répète des deux côtés de chacun des mêmes bords, tandis que les bords supérieurs AE, AI, etc., ou A'H, A'K, etc., sont libres de tout décroissement. Or, en même temps que les lames de superposition diminuent vers les premiers bords, elles s'alongent vers les seconds, de manière à envelopper les parties du noyau adjacentes aux sommets A, A'; c'est-à-dire que la cristallisation agit à l'égard de ces mêmes parties comme elle ferait dans le cas où le décroissement étant nul, le noyau s'accroîtrait dans tous les sens, en conservant sa forme.

77. Il suit de là que la mesure des décroissemens ne se détermine pas d'après les différences entre les lames de superposition considérées dans toute leur étendue, mais seulement d'après les quantités dont elles se dépassent mutuellement vers les parties qui sont soumises à ces décroissemens. Tout le reste est censé être compris tacitement dans la solution des problèmes. La théorie n'a même besoin que de considérer ce qui se passe à l'origine de chaque décroissement, parce que la première lame de superposition étant donnée, on a un triangle mensurateur qui sert à déterminer la position du plan produit par le décroissement. Cependant il n'est pas indifférent de pouvoir se rendre compte à soi-même de tous les détails relatifs à la structure d'un cristal, de manière que si l'on avait à sa disposition un certain nombre de petits solides semblables aux molécules soustractives, on pût les arranger comme par assises autour d'un noyau donné, dans un ordre conforme à celui de la nature, et produire ainsi une imitation artificielle du travail de la cristallisation. Je vais en conséquence faire en quelque sorte l'analyse d'une structure analogue à celle qui nous occupe ici, en ayant égard à toutes les variations particulières, à

l'aide desquelles les lames composantes concourent, comme de concert, à l'effet qui résulte de leur ensemble.

78. Pour revenir au dodécaèdre dont j'ai parlé, et que je nomme *chaux carbonatée métastatique*, la théorie prouve que le décroissement dont il dépend a lieu par deux rangées. La figure 81 représente l'espèce de pyramide qui s'est formée au-dessus du sommet supérieur du noyau, lequel se trouvant ainsi en partie à découvert, permet de saisir plus facilement la marche de la structure.

Si l'on suit l'ordre des lames de superposition qui s'appliquent trois à trois les unes sur les autres, en partant des faces du noyau, on voit que les trois premières, par exemple, au lieu de rester de niveau vers leurs parties supérieures, avec les faces adjacentes du noyau, s'étendent vers ces mêmes parties par l'addition d'une rangée de molécules, laquelle est commune à deux lames. Les trois lames suivantes non-seulement s'étendent pour recouvrir cette rangée additionnelle, mais prennent un accroissement ultérieur, par l'addition d'une nouvelle rangée qui est de même commune à deux d'entre elles. Cette distribution, qui se répète dans toute la hauteur de la pyramide, est nécessaire, pour éviter les angles rentrans qui sont exclus par la cristallisation, au moins dans les cristaux solitaires.

On peut considérer l'assortiment des trois lames de superposition situées à une hauteur quelconque, comme formant une couche composée de petits rhomboïdes semblables au noyau. Ainsi la dernière couche qui répond au sommet *s* (fig. 80), a pour élémens sept petits rhomboïdes. C'est une suite de ce que sa partie concave, dans laquelle est emboîtée la couche suivante, a une capacité égale à un seul rhomboïde, en sorte que l'ensemble de cette capacité et de la couche forme un rhomboïde total qui est le plus petit possible, parmi tous ceux qui sont des assemblages de rhomboïdes élémentaires, puisque son côté est seulement égal à deux arêtes de molécule. Le même raisonnement s'applique à toutes les autres couches, dont chacune, considérée en elle-même, n'est autre chose qu'un rhomboïde évidé à l'endroit par lequel elle s'applique sur la couche inférieure.

79. Il est facile de déterminer le nombre de rhomboïdes élémentaires qui composent une couche d'un rang donné. Ce nombre étant constant relativement à la couche terminale, que nous supposons appartenir au *minimum* des rhomboïdes composés de rhomboïdes simples, nous allons d'abord renverser l'ordre, en prenant la couche dont il s'agit pour la première. Cela posé, je remarque que chaque couche peut être considérée, ainsi que je l'ai déjà dit, comme un rhomboïde dont on aurait retranché un autre rhomboïde plus petit, à l'endroit où cette couche s'applique par sa concavité sur la convexité de la couche suivante. Soit $x$ le côté du premier rhomboïde. Comme chaque couche n'a que l'épaisseur d'une molécule, il est fa-

cile de voir que $x-1$ désignera le côté du second rhomboïde, ou de celui auquel répond la concavité de la couche dont il s'agit. Donc le côté du rhomboïde auquel répond la partie cachée de la couche suivante sera aussi $x-1$; mais, à cause du décroissement par deux rangées, le côté du rhomboïde auquel appartient cette dernière couche, considérée dans sa totalité, est plus grand de deux unités que celui du rhomboïde relatif à la partie cachée : donc son expression sera $x-1+2$, ou $x+1$. Mais $x$ est le côté du rhomboïde auquel répond la couche précédente; donc les côtés des rhomboïdes auxquels appartiennent les différentes couches, prises en partant du sommet, forment une progression arithmétique croissante, dans laquelle la différence entre deux termes consécutifs est l'unité. Donc puisque le côté du rhomboïde relatif à la première de toutes les couches est 2, la série des différens côtés sera 2, 3, 4, 5, 6, etc., dans laquelle désignant par $x$ un terme quelconque, et par $n$ le rang de ce terme, on aura

$$x=n+1.$$

Maintenant, si de la solidité $x^3$ du rhomboïde auquel appartient la couche du rang $n$, on retranche la solidité $(x-1)^3$ du rhomboïde qui répond à la concavité de cette couche, on aura $3x^2-3x+1$, pour l'expression du nombre de rhomboïdes compris dans cette même couche; et si dans cette expression on met à la place de $x$ sa valeur $n+1$, elle devient

$$3n^2+3n+1.$$

80. Prenons maintenant la couche qui recouvre immédiatement le noyau pour la première : soit C le nombre d'arêtes de molécules contenues dans le côté de ce noyau, N le rang d'un terme quelconque, et soit toujours $x$ le côté du rhomboïde auquel appartient la couche de ce rang. Si $x=C-1$, comme dans la première couche, on a $N=1$. Si $x=C-2$, on a $N=2$, etc. Donc, en général, $x=C-N$. Mais nous avons eu $x=n+1$; donc $n=C-N-1$. Si l'on substitue cette expression de $n$ dans la formule $3n^2+3n+1$, on trouve $3(C-N)^2+3(N-C)+1$.

Supposons, par exemple, que l'on demande le nombre de rhomboïdes que contient la sixième des couches prises de bas en haut, dans un solide représentatif semblable à celui de la fig. 77. On aura $C=10$, $N=6$; ce qui donne, pour le nombre cherché, $3(4)^2+3(6-10)+1=37$. En doublant ce nombre, on aura 74 pour celui des rhomboïdes compris dans l'ensemble des deux couches qui se correspondent vers les deux sommets du noyau.

La même couche étant la troisième en partant du sommet, si l'on fait $n=3$, dans la formule $3n^2+3n+1$, on trouvera de même 37 pour le nombre de rhomboïdes que contient cette couche.

On peut présumer avec beaucoup de vraisemblance que la formule $3n^2+3n+1$, appliquée aux différens termes d'une suite dans laquelle $x$ est égale successivement à 2, 3, 4, 5, 6, etc., représente les solidités des couches de superposition, prises depuis le sommet, dans tous les dodécaèdres analogues à celui que nous considérons ici. Toute la différence consistera en ce que, dans ceux qui sont d'un plus gros volume, le nombre des termes de la progression sera plus considérable. Mais deux progressions quelconques auront toujours une partie commune.

81. Proposons-nous maintenant de déterminer le nombre de tous les petits rhomboïdes qui composent le dodécaèdre dont il s'agit, en supposant que l'on connaisse le nombre C d'arêtes comprises dans le côté du noyau.

La formule $3n^2+3n+1$, qui exprime le nombre de petits rhomboïdes compris dans une couche du rang $n$, fait voir que la somme de ceux que renferment toutes les couches superposées à un même sommet du noyau est égale à trois fois la somme des carrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., en comptant $n$ pour le dernier; plus, à trois fois la somme des mêmes nombres; plus, au nombre désigné par $n$.

Or, d'après les formules démontrées à la page (77), on a

$$1+2+3+4+\ldots\ldots+n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

et $$1+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(2n+1)}{3}.$$

Donc la somme de tous les petits rhomboïdes compris dans les couches superposées à un même sommet du noyau sera, en général,

$$3\left\{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2n+1}{3}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}+n,$$

ou

$$3.\frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{2n+1}{3}+1\right\}+n=3\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+4}{3}\right)+n$$
$$=n(n+1)(n+2)+n;$$

mais à cause du décroissement par deux rangées $n=C-2$. Si l'on substitue cette valeur de $n$ dans la formule, elle deviendra

$$C(C-1)(C-2)+C-2=(C-2)(C^2-C+1)$$
$$=C^3-3C^2+3C-2.$$

Or la somme S de tous les petits rhomboïdes dont le dodécaèdre est l'assemblage, est égale à $C^3$ plus au double de la quantité précédente ; donc

$$S=3C^3-6C^2+6C-4=3(C^3-2C^2+2C)-4.$$

Supposons $C=10$, comme dans la figure ; on aura

$$S=3000-600+60-4=2456.$$

82. La formule précédente se rapporte au cas où le sommet du dodécaèdre est supposé au point $s'$ (fig. 81), que l'on peut considérer comme le sommet physique du dodécaèdre, dont le sommet géométrique est en $s$. Or, plus le nombre C augmente, plus le point $s$ se rapproche du point $s'$, et si l'on sup-

pose C infini, les deux sommets coïncideront en un même point; dans ce cas, les quantités $6C^2$, $6C$ et $4$ s'évanouissent, et l'on a $S=3C^3$. Effectivement, on prouve par un calcul direct, ainsi que nous le verrons dans la suite, que si l'on considère la surface du dodécaèdre comme composée des plans tangens à tous les bords inférieurs des lames de superposition, ou, ce qui revient au même, si l'on considère le dodécaèdre comme un corps géométrique, sa solidité est triple de celle du noyau. A la rigueur, C n'est jamais infini dans la nature; mais il est si grand, à raison de l'extrême petitesse des molécules, que la distance entre $s$ et $s'$ peut être considérée comme nulle.

Je reviendrai dans la suite sur la même variété, dont je déterminerai les angles d'après les formules générales relatives au rhomboïde. Je ferai connaître en même temps plusieurs propriétés remarquables dont elle jouit.

83. Je vais citer un nouvel exemple que je tirerai encore de la chaux carbonatée, en continuant de prendre pour noyau le rhomboïde de $104^d \frac{1}{2}$, que je suppose ici représenté par ABGA'HD (fig. 82).

Concevons un décroissement par une simple rangée sur les bords supérieurs AB, AD, AF, etc. Il produira de part et d'autre de chacun de ces bords deux faces qui seront de niveau, comme celles qui se forment des deux côtés d'un même bord dans le dodécaèdre originaire du cube (fig. 70); en sorte que le nombre des faces réellement distinctes du solide secondaire sera de six, c'est-à-dire qu'il sera égal à celui des bords qui servent de ligne de départ aux décroissemens, et il est facile de voir que les trois faces qui naissent, par exemple, autour du sommet supérieur, savoir, ALMO, ARSO, ALNR (fig. 82), étant situées en sens contraire de celles qui appartiennent au sommet inférieur, savoir, A'SRN, A'MLN, A'MSO, le solide secondaire sera un rhomboïde beaucoup plus obtus que le noyau, dans lequel les petites diagonales des rhombes coïncideront avec les bords supérieurs de ce noyau, et dont les angles solides seront situés au milieu de ses faces. Car les deux rhomboïdes ayant le même axe, si l'on conçoit un plan mené par les trois points L, O, R, il passera nécessairement par les trois diagonales horizontales supérieures des deux rhomboïdes, et par conséquent il passera par les angles solides B, D, F, du rhomboïde primitif, d'où il suit que ces points sont situés au milieu des diagonales menées de L en O, de O en R, et de R en F, c'est-à-dire qu'ils coïncident avec les milieux des faces du rhomboïde secondaire.

Les mêmes rhombes seront chargés de cannelures produites par les saillies et les rentrées alternatives des bords des lames décroissantes, et situées parallèlement aux petites diagonales, comme dans le dodécaèdre (fig. 70) qui nous a déjà servi de terme de comparaison. Les lames dont il s'agit subissent encore ici, dans les parties que le décroissement n'atteint pas, des variations auxiliaires qui secondent l'effet de ce décroissement, et dont il ne sera pas inutile de suivre la marche, pour offrir comme le tableau de tout ce qui concourt au mécanisme de la structure. Je supposerai que l'on veuille exécuter artificiellement une imitation du travail de la cristallisation dans le cas présent, en appliquant sur les différentes faces d'un solide semblable au noyau de la chaux carbonatée des séries de lames décroissantes, composées chacune d'un certain nombre de petits rhomboïdes de la même forme. Je me bornerai à indiquer la partie de l'opération qui se rapporte à l'une des faces du noyau. Il faudra concevoir que chaque lame placée parallèlement à cette face se répète sur les cinq autres faces, en sorte que les six lames qui répondent successivement aux différentes superpositions forment autant de couches qui s'enveloppent mutuellement.

84. Soit AA′ (fig. 83) le rhomboïde secondaire déjà représenté (fig. 82); je choisis pour exemple le rhombe primitif ABCD (fig. 83) le même que (fig. 82). Les points B, C, D (fig. 83), étant situés au milieu des faces ALMO, AOSR, MOSA′, si l'on mène les lignes BX, BY parallèles aux côtés AO, AL, les lignes CX, CU parallèles aux côtés A′M, A′S, et les lignes DU, DK, parallèles aux côtés AO, AR, on aura les trois rhombes égaux BYMX, CXOU, DKSU. De plus, si par les lignes BX, DU, on mène les plans BCX, DCU, il est facile de voir que le solide hexaèdre dont les faces sont les rhombes ABCD,

CXOU, les trapèzes ABXO, ADUO, et les triangles BCX, DCU, sera le sixième de la matière qui enveloppe le noyau, ou ce qui revient au même, il sera l'assemblage des lames de superposition empilées sur la face ABCD du noyau. Il s'agit donc d'analyser ce solide pour arriver au résultat proposé.

Soit *ac* (fig. 84) ce même solide. Par les points *x*, *u*, menons le plan *xpu* parallèle au rhombe *abcd*. Toutes les lames de superposition situées entre l'un et l'autre auront des figures pentagonales telles que *efghie*, et toutes celles qui sont comprises entre *xpu* et le point *o* auront des figures triangulaires. De plus, le point *x* (fig. 84), ou X (fig. 83), étant situé à la moitié du côté OM, il est évident que le point *p* (fig. 84), divise en deux parties égales le côté *ao* qui est tangent à tous les angles supérieurs des lames de superposition. Il suit de là qu'il y a autant de ces lames situées entre le triangle *xpu* et le rhombe *abcd*, qu'entre le même triangle et le point *o*; d'où nous conclurons que le nombre total des lames de superposition doit être pair. Par une suite nécessaire le côté AB du noyau doit être composé d'un nombre impair d'arêtes de molécule, puisque ce nombre excède d'une unité celui des lames de superposition, à cause du décroissement par une rangée. Nous supposerons ici que ce nombre soit égal à 9.

85. Maintenant, pour concevoir comment les diverses lames pentagonales et triangulaires dont le solide *ac* est l'assemblage, sont uniquement compo-

sées de rhomboïdes, et comment elles subissent les variations auxiliaires dont j'ai parlé, imaginons qu'elles se projettent toutes sur un plan qui coïncide avec le rhombe *abcd*. L'ensemble de leurs projections sera représenté par la figure 85, dans laquelle le rhombe *abcd* est le même que figure 84. Le pentagone *efghi* (fig. 85) est la projection de la première lame de superposition qui est aussi indiquée (fig. 84). Les bords *ef*, *ei* (fig. 85) sont dans le sens du décroissement, qui seul suffit pour déterminer la forme secondaire. Les deux rangées situées le long des bords *fg*, *ih*, sont destinées à envelopper les parties correspondantes du noyau, pour éviter les angles rentrans. Chacune de ces rangées étant commune à la lame que représente la figure et à celle qui est appliquée sur la face primitive adjacente, on voit que dans le cas où l'on voudrait construire une imitation artificielle du rhomboïde secondaire, il ne serait pas nécessaire d'ajouter une semblable rangée à la seconde lame dont je viens de parler. La base *gh* du pentagone est composée d'angles alternativement rentrans et saillans. C'est ce que l'on concevra, en faisant attention que cette base étant parallèle à la diagonale *ux* (fig. 84), et les bords des lames décroissantes étant parallèles à l'autre diagonale *co* située sur le prolongement du bord A'C du noyau (fig. 82), la base dont il s'agit coupe perpendiculairement les cannelures produites par les saillies et rentrées alternatives des bords décroissans; d'où il résulte qu'elle doit former une ligne anguleuse assortie à l'effet du décroissement sur la surface dont elle fait partie.

Dans les trois projections suivantes $lmn\sigma k$, $rstz\upsilon$, $yxu\gamma\delta$, il y a de même addition de deux rangées vers les bords $lm$, $\sigma n$, $rs$, $zt$, $yx$, $\gamma u$, pour remplir le vide que laisseraient entre elles les parties correspondantes, si cette addition n'avait pas lieu. Mais le nombre des rhomboïdes ajoutés décroît d'une lame à l'autre, en sorte que sur la dernière il n'y en a plus qu'un seul, indiqué par $yx$ ou $\gamma u$. Au-delà de ce terme, qui répond au plan $xpu$ (fig. 84), les projections cessent de s'accroître par leurs bords latéraux, en sorte qu'elles se réduisent aux assortimens compris dans les espaces $\varepsilon st\lambda p$ (fig. 85), $\zeta mn\pi\mu$, $\vartheta gh\varphi\nu$, et la dernière se réduit à un rhombe $c\omega$, qui indique le rhomboïde situé à l'angle $o$ (fig. 84). Dans la réalité, ces espaces sont des pentagones dont les côtés latéraux sont égaux chacun à une arête $\varepsilon s$, $\zeta m$, $\vartheta g$, de molécule. Mais à cause de l'extrême ténuité des molécules, ces côtés sont censés infiniment petits, en sorte que les pentagones se présentent sous l'aspect de triangles isocèles.

86. Dans le cas présent, les nombres de rhomboïdes qui composent les couches successives composées chacune de six lames de superposition, forment deux séries dont chacune suit une loi particulière. La première répond aux couches situées entre le triangle $xpu$ (fig. 84) et le rhombe $abcd$, et la seconde aux couches comprises depuis le même triangle jusqu'au

point $o$. Les nombres des termes étant égaux dans les deux séries, et celui des arêtes de molécule comprises dans chaque côté du noyau étant égal à la somme totale des termes plus à l'unité, il suffira de connaître ce dernier nombre pour savoir à quelle série appartient une couche d'un rang donné, et assigner le nombre de rhomboïdes dont elle est composée. Cherchons d'abord la formule relative à la première série.

Soit N le nombre total des termes, $N+1$ sera celui des arêtes de molécule comprises dans chaque côté du noyau. Or, la ligne $bx$ (fig. 84) étant la somme des points $b$, $f$, $l$, $r$, etc. (fig. 85), et la ligne $ao$ (fig. 84) parallèle à $bx$ étant la somme des points $a$, $e$, $k$, $v$, etc. (fig. 85), il est évident que chacun des bords supérieurs $ef$, $kl$, $vr$, etc., des lames de superposition qui appartiennent à la première série, est égal au bord $ab$ (fig. 84) du noyau. Donc on peut considérer chacun des pentagones $efghi$, $klmn\pi$ (fig. 85), comme un rhombe égal à celui du noyau, dont on aurait retranché un triangle dans la partie inférieure. Soit $s$ en général le nombre de faces de molécule comprises dans ce triangle, et soit $x$ celui dont se compose l'un quelconque des pentagones, on aura $x=(N+1)^2-s$. Or, la quantité $s$ relative à chaque pentagone, tel que $lmn\pi k$, est égale à la différence entre le nombre de facettes de molécules comprises dans le rhombe $mvn\psi$ (fig. 86) dont le triangle $mvn$ (fig. 85 et 86) est la moitié, et le nombre de facettes comprises dans ce même triangle. Soit C le nombre d'arêtes de molécule contenues dans le côté soit du rhombe, soit du triangle. $s$ sera égal au triangle inférieur $m\psi n$, plus à la somme des petits triangles $m\vartheta g$, $g\tau c$, etc., situés au-dessus de la diagonale $mn$. Or, l'expression du triangle inférieur est $\frac{C^2}{2}$; et parce que le nombre de diagonales de molécule comprises dans la diagonale $mn$ est égal à celui d'arêtes de molécule contenues dans le côté $m\nu$, la somme des petits triangles $m\vartheta g$, $g\tau c$, etc., sera $\frac{C}{2}$. On peut appliquer le même raisonnement à tout autre pentagone. Donc, en général,

$$s = \tfrac{1}{2}(C^2 + C). \text{ Donc, } x = (N+1)^2 - \tfrac{1}{2}(C^2 + C).$$

Maintenant soit $n'$ le rang d'un terme quelconque, dans la série prise en partant du noyau, la quantité C est successivement $g\omega$, $m\nu$, $s\mu$, etc., c'est-à-dire 2, 4, 6, etc., ou en général $2n'$. Donc, substituant $2n'$ à la place de C, on aura $x = (N+1)^2 - 2n'^2 - n'$.

Or, chaque couche étant composée de six lames, on aurait son expression en multipliant la précédente par 6, si chaque lame n'avait pas de rangée commune avec les lames adjacentes. Il faudra donc déduire de l'expression précédente multipliée par 6 la moitié de la somme des petits rhomboïdes contenus dans les rangées communes. Mais ces rangées ont successivement pour côtés les lignes $fg$, $lm$, $rs$, etc., dont la première renferme deux arêtes de molécule de moins que le côté $bc$ du noyau; la deuxième deux de moins que la précédente, et ainsi de suite. Donc, puisque

$$bc = N + 1,$$

la série des lignes dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, celle des petits rhomboïdes contenus dans les différentes rangées, sera $N-1$, $N-3$, $N-5$, etc., ou en général $N-(2n'-1) = N-2n'+1$. Or, chaque pentagone a deux rangées communes avec les pentagones adjacens; donc, retranchant de la première expression $6(N-2n'+1)$, on aura pour celle d'un terme quelconque pris dans la première série,

$$6[(N+1)^2 - 2n'^2 - n')] - 6(N-2n'+1),$$

ou plus simplement $6(N^2+N-2n'^2+n')$.

87. Si nous prenons les termes de la seconde série en partant du point $o$ (fig. 84), il est facile de voir qu'ils seront égaux successivement aux nombres de petits rhombes contenus dans les triangles $g\omega h$, $mvn$, $s\mu t$, etc. (fig. 85). Mais d'après ce qui a été dit plus haut, l'un quelconque de ces nombres a pour expression $C^2 - s$ ou $C^2 - \frac{1}{2}(C^2+C) = \frac{1}{2}C^2 - C$. Soit $n$ le rang d'un terme quelconque, en partant toujours du point $o$ (fig. 84). Le côté C étant égal successivement à 2, 4, 6, 8, etc., on aura en général $C = 2n$. Donc l'expression de chaque terme sera $2n^2 - n$.

Maintenant N étant toujours le nombre total des termes que contiennent les deux séries, si nous continuons de désigner par $n'$ le rang d'un terme quelconque, en partant des faces du noyau, nous aurons en général $n = N - n' + 1$, et l'expression $2n^2 - n$ deviendra $2(N - n' + 1)^2 - N + n' - 1$, qui se réduit à $2(N - n')^2 + 3(N - n') + 1$. Donc chaque terme de la deuxième série sera représenté par

$$6[2(N - n')^2 + 3(N - n') + 1].$$

88. Supposons que l'on demande le nombre $x$ de rhomboïdes contenus dans la troisième couche, le côté du noyau étant égal à 9, comme dans la fig. 85; en prenant la formule relative à la première série, on aura

$$x = 6(N^2 + N - 2n'^2 + n') = 6(64 + 8 - 18 + 3) = 342.$$

Si $x$ appartient à la deuxième série, et que le terme que l'on cherche soit, par exemple, le sixième, on aura, en employant la formule relative à cette série,

$$x = 6[2(N - n')^2 + 3(N - n') + 1] = 6[2(8 - 6)^2 + 3(8 - 6) + 1] = 90.$$

89. Je terminerai cet article par la solution d'un problème analogue à celui dont nous nous sommes occupés à l'occasion du dodécaèdre métastatique, et qui aura pour but de déterminer généralement le nombre de rhomboïdes élémentaires contenus dans un rhomboïde produit par la loi de décroissement que nous venons de considérer, en prenant pour donnée le nombre d'arêtes de rhomboïdes élémentaires compris dans le côté du noyau.

Nous prendrons ici la série des lames de superposition, en partant des angles solides M, S, etc. (fig. 82), du rhomboïde secondaire, c'est-à-dire dans le sens où elle est croissante, et nous la supposerons comme ci-dessus, partagée en deux séries d'un égal nombre de termes.

Cherchons d'abord le nombre de petits rhomboïdes que renferme la série comprise entre le point $o$ (fig. 84) et le point $p$, en nous bornant à ce qui a lieu par rapport à une seule face du noyau. Nous avons vu (p. 106) que l'expression d'un terme quelconque de cette série était $2n^2 - n$. Donc la somme de tous les termes est égale à deux fois la somme des carrés des nombres naturels, en prenant autant de ces nombres que la série contient de termes, moins la somme des nombres simples. Or, si l'on représente par $n$ le nombre des termes, on a, d'après les formules de la page 77,

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

et

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Par conséquent la somme des termes de la première série sera

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{3} - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6}.$$

Mais, $n = \frac{C - 1}{2}$; substituant à la place de $n$ cette valeur, nous aurons $\frac{2C^3 - 3C^2 - 2C + 3}{24}$. Donc la totalité des six séries relatives aux six faces du noyau aura pour expression $\frac{2C^3-3C^2+2C+3}{4}$.

90. Passons à la série suivante, et supposons d'abord que chaque lame de superposition n'ait pas de rangée commune avec les lames adjacentes. Dans cette hypothèse, l'expression d'un terme quelconque du rang $n'$, en partant du noyau, est $(N+1)^2-2n'^2-n'$ (page 105). Soit $n''$ le rang du terme qui répond à $n'$, en allant au contraire vers le noyau; nous aurons

$$n'=\tfrac{1}{2}N-n''+1.$$

Donc

$$n'^2=\tfrac{1}{4}N^2-Nn''+N+n''^2-2n''+1.$$

Si l'on substitue cette valeur et celle de $n'$ dans l'expression d'un terme quelconque, et qu'en même temps on réduise, on trouvera, en donnant un même dénominateur à tous les termes,

$$\frac{N^2-N+4Nn''-4n''^2+10n''-4}{2}=(2N+5)n''-2n''^2+\frac{N^2-N-4}{2}.$$

Donc la somme des petits rhomboïdes compris dans la série dont il s'agit ici, est composée du produit de $(2N+5)$ par la somme des nombres naturels, en prenant autant de ces nombres que la série renferme de termes, moins deux fois la somme des carrés des mêmes nombres, plus la quantité $\frac{N^2-N-4}{2}$ prise autant de fois qu'il y a de termes dans la série, c'est-à-dire qu'elle est égale à

$$(2N+5)\frac{n^2+n}{2}-\frac{2n^3+3n^2+n}{3}+n\left(\frac{N^2-N-4}{2}\right),$$

$n$ désignant toujours le nombre des termes. Mais

$$n=\frac{C-1}{2},\ \text{et}\ N=C-1.$$

Substituant à la place de $n$ et N leurs valeurs, nous aurons pour la somme des petits rhomboïdes,

$$(2C-2+5)\frac{C^2-1}{8}-\frac{(C^3-C)}{12}+\frac{C^2-2C+1-C+1-4}{2}.\frac{C-1}{2}$$
$$=\frac{10C^3-15C^2-2C+3}{24};$$

donc la totalité des six séries relatives aux six faces du noyau sera $\frac{10C^3-15C^2+2C+3}{4}$. Mais à cause des rangées communes aux faces adjacentes, il faut retrancher de la quantité précédente $6(N-2n'+1)$, et mettant à la place de $n'$ sa valeur $\frac{1}{2}(C-1)-n''+1$, nous aurons $6(C-1-C+1+2n''-1)$, ou

$$6(2n''-1)=12n''-6;$$

c'est-à-dire que la quantité à retrancher égale douze fois la somme des nombres naturels, en prenant autant de ces nombres que la série contient de termes, moins six fois le nombre des mêmes termes; ou

$$12\,\frac{\left(\frac{C-1}{2}\right)^2+\frac{C-1}{2}}{2}-6\left(\frac{C-1}{2}\right)=\frac{3C^2-6C+3}{2}.$$

Retranchant cette quantité de

$$\frac{10C^3-15C^2+2C+3}{4},$$

on aura pour le nombre de rhomboïdes élémentaires compris dans la seconde série,

$$\frac{10C^3-21C^2+14C-3}{4};$$

ajoutant l'expression de la première série, ou

$$\frac{2C^3-3C^2-2+C3}{4},$$

plus la valeur $C^3$ du noyau, on trouve que le nombre de tous les petits rhomboïdes que renferme le rhomboïde secondaire est $4C^3-6C^2+3C$.

91. Supposons $C=9$, comme dans la figure, le nombre des rhomboïdes élémentaires sera égal à 2457.

Si l'on fait C infini, auquel cas $C^2$ et C s'évanouissent devant $C^3$, la solidité du rhomboïde secondaire sera quadruple de celle du noyau, ce que démontre également le calcul, lorsque l'on considère le rhomboïde secondaire comme corps géométrique.

*Décroissemens sur les angles et décroissemens intermédiaires.*

92. Nous allons maintenant nous occuper des décroissemens sur les angles; mais après avoir donné quelques notions générales relatives à la marche de ces décroissemens, je réunirai avec eux, sous un

même point de vue, ceux que j'appelle *intermédiaires*, à cause de l'étroite liaison qui existe entre les uns et les autres.

Soit ABCD (fig. 87) une des bases d'un solide primitif que nous supposerons être un prisme droit symétrique, sous-divisée en une multitude de petits carrés, qui sont les facettes extérieures d'autant de molécules soustractives. Concevons une suite de lames empilées sur cette base, et qui décroissent vers leurs quatre angles par des soustractions d'une simple rangée de molécules. Nous pouvons nous servir du carré ABCD pour représenter les effets du décroissement sur les différentes lames dont il s'agit, en supposant que celles-ci soient projetées sur ce même carré. Or, si nous nous bornons à considérer ce qui se passe à l'égard d'un seul angle tel que D, attendu que les trois autres sont dans le même cas que celui-ci, il est facile de voir que la première lame de superposition comparée à celle que présente la figure, sera diminuée de la seule molécule désignée par la lettre $a$; que la seconde lame aura de moins que la première les deux molécules désignées par $b$, $k$; que la troisième aura de moins que la seconde les trois molécules désignées par $c$, $l$, $n$, et ainsi de suite.

Soit ADC (fig. 88), l'angle primitif déjà représenté (fig. 87), et soient $k\gamma'$, $b\delta'$, les deux molécules dont $k$, $b$ (fig. 87), représentent les bases; $n\epsilon'$ (fig. 88), $le'$, $c\zeta'$, les trois dont les bases sont désignées par $n$, $l$, $c$ (fig. 87), et ainsi de suite pour les molécules dont $o, p, m, d$, représentent les bases. Il est visible que la nouvelle facette latérale que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition, par la soustraction de la molécule $a$, ne sera réellement composée que des deux arêtes $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ (fig. 88); que la facette qui correspondra à la précédente sur la seconde lame, sera l'assemblage des trois arêtes $\varepsilon\varepsilon'$, $ee'$, $\zeta\zeta'$, et ainsi de suite.

93. De plus, il est facile de concevoir que la face produite par le décroissement ne sera plus simplement sillonnée par des espèces de cannelures, comme dans les décroissemens sur les bords; mais elle sera hérissée de pointes $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $e$, $\zeta$, etc., qui, étant toutes de niveau, et échappant à l'œil par leur petitesse, s'offriront sous l'aspect d'une surface continue.

Une nouvelle différence qui existe entre les décroissemens sur les angles et ceux que subissent les bords, consiste en ce que ceux-ci, en supposant qu'ils agissent sur les quatre bords des lames de superposition, emportent ces bords tout entiers, au lieu que les décroissemens sur les angles, en même temps qu'ils font naître de nouveaux bords tournés vers ces mêmes angles, laissent subsister, au moins jusqu'à un certain terme, des portions des bords primitifs.

94. Il suit de là que les grandes faces des lames de superposition dont la figure 87 représente les projections, sont d'abord des octogones $\gamma\delta rq\sigma y'l'm'$, $\varepsilon\zeta\vartheta\lambda k'f's'e'$, etc., dans lesquels les nouveaux bords $\gamma\delta$,

$\epsilon\zeta$, $\mu\nu$, etc., vont en croissant, tandis que les résidus $\delta r$, $\zeta\vartheta$, etc., des anciens bords vont au contraire en diminuant. Dans l'exemple que représente la figure, où le nombre d'arêtes de molécule dont se compose chaque bord DC, BC, AB, AD, est impair, les résidus des anciens bords finissent par n'être plus qu'une arête de molécule, telle que $\pi\xi$; et cette arête étant censée être une quantité infiniment petite à l'égard des lignes $\lambda\xi$, $\upsilon\pi$, etc., les grandes faces des lames de superposition qui s'appliquent les unes sur les autres au-delà de ce terme, sont censées être des carrés, quoique à la rigueur elles soient des octogones tels que *fghiszty*, qui vont en diminuant progressivement d'étendue, en sorte que la surface de l'avant dernière lame est représentée par l'octogone $o'n'd'b'f'h'a'c'$, qui correspond à cinq molécules, et que la surface de la dernière lame est un simple carré $x$, c'est-à-dire que cette même lame se réduit à une molécule unique.

95. Soit AG (fig. 89) un prisme droit symétrique faisant la fonction de forme primitive, et qui subisse sur les quatre angles de ses bases un décroissement par une rangée, analogue à celui dont nous venons d'analyser l'effet. Les faces produites par le décroissement n'étant autre chose que la somme des angles auxquels les lignes $\gamma\delta$ (fig. 87), $\epsilon\zeta$, $\mu\nu$, etc., sont tangentes, il est facile de voir que les faces dont il s'agit n'ayant à leur naissance que des largeurs infiniment petites $\gamma\delta$, $rq$, etc., iront en s'élargissant

jusqu'au terme qui répond à la ligne $\lambda\xi$, et aux autres semblablement situées, et que, passé ce terme, elles se rétréciront progressivement jusqu'à ce qu'elles soient réduites à de simples points; et parce que les bords $fg$, $vu$, situés au-delà de $\lambda\xi$, diminuent dans le rapport inverse de celui qui détermine l'accroissement des bords $\gamma\delta$, $\epsilon\zeta$, $\mu\nu$, etc., situés en-deçà de la même ligne, les faces produites par le décroissement seront nécessairement des rhombes.

Le résultat précédent conduit à un dodécaèdre représenté (fig. 90), dont la surface est composée de quatre hexagones verticaux DPCGRF, BHCGUL, etc., qui répondent aux faces latérales de la forme primitive, et de huit rhombes SPCH, SPDM, etc., disposés quatre à quatre autour des sommets. Ces rhombes sont produits immédiatement par le décroissement, ainsi que je l'ai expliqué plus haut, et les triangles DPC, CHB, etc., qui terminent les hexagones, sont les sommes des portions des bords primitifs que le décroissement n'atteint pas. Si l'on fait passer un plan MPHK par les diagonales horizontales des rhombes situés vers l'un quelconque des sommets, ce plan répondra à l'octogone $\lambda\xi\pi\upsilon\tau\eta\psi\omega$ (fig. 87), qui, comme je l'ai dit, est censé être un carré. Tous les autres plans menés entre PH et le point C, parallèlement à MPHK, répondront successivement aux octogones situés entre $\lambda\xi$ (fig. 87) et le point D, et tous les plans menés entre PH (fig. 86) et le sommet S, répondront aux octogones situés entre $\lambda\xi$ (fig. 87) et le centre $x$, lesquels peuvent être considérés comme des carrés.

96. Je vais maintenant passer à la manière de construire les triangles mensurateurs relatifs aux décroissemens sur les angles, et ce que je dirai sur ce sujet s'étendra également aux décroissemens intermédiaires qui, comme je l'ai déjà dit, sont étroitement liés avec ceux qui ont lieu parallèlement aux diagonales.

Soit BF (fig. 89) un parallélépipède quelconque faisant la fonction de forme primitive, et dont les bases subissent sur leurs quatre angles un décroissement que nous supposerons d'abord avoir lieu par une simple rangée, et dont nous nous bornerons à considérer l'effet par rapport à l'angle D. Soit D$\gamma'$ (fig. 91) une molécule intégrante; ayant pris sur DA (fig. 89) la partie D$m$ égale à la dimension en largeur D$\gamma'$ de la molécule (fig. 91), et ayant pris sur DC (fig. 89), la partie D$r$ égale à la dimension en largeur D$\delta'$ (fig 91), menons $mn$ et $rs$ (fig. 89), parallèles à DF et égales à la dimension en hauteur $\vartheta$D (fig. 91). Les points D, $n$, $s$ (fig. 89), étant les sommets des angles solides désignés par les lettres D, $\gamma$, $\delta$ (fig. 91), le plan $n$D$s$ (fig. 89) qui passe par ces trois points, sera le rudiment de la face produite par le décroissement. Menons de plus le plan $nsrm$, qui coïncidera avec la nouvelle facette latérale que le décroissement a fait naître sur la première lame de superposition. La ligne D$o$, perpendiculaire sur $mr$

sera la base du triangle mensurateur; la ligne *oh* menée du point *o* sur le plan *nsrm*, perpendiculairement à *mr*, sera le côté intérieur du même triangle, et la ligne D*h* en sera le côté extérieur, d'où il suit que l'angle *h*D*o* donnera l'inclinaison de *n*D*s* sur la base ABCD de la forme primitive.

97. Si l'on suppose que le décroissement ait lieu successivement par deux, trois, quatre rangées en largeur, la base du triangle mensurateur, en conservant toujours la même direction, sera double, triple ou quadruple de D*o*, et si le décroissement est en même temps mixte, le côté intérieur du triangle mensurateur, en restant sur la direction *oh*, sera égal à autant de fois cette même ligne qu'il y aura de rangées soustraites en hauteur; c'est-à-dire que si l'on fait $Do = l$, $oh = h$, et si l'on désigne par $n$ le nombre de rangées soustraites en largeur, et par $n'$ celui de rangées soustraites en hauteur, la base du triangle mensurateur sera en général $n \times l$, et son côté intérieur sera $n' \times h$.

Si la base de la molécule est un carré ou un rhombe, la ligne D*o*, dans le cas d'un décroissement par une rangée, sera égale à la moitié de la diagonale qui va de D en $\varepsilon$ ou de $\vartheta$ en $\varepsilon'$ (fig. 91), et en général le nombre de diagonales qu'elle mesurera sera la moitié du nombre de rangées soustraites dans le sens de la largeur.

98. On voit ici une nouvelle différence entre les décroissemens sur les angles et ceux qui ont lieu sur

les bords. Dans ces derniers, la base du triangle mensurateur est toujours égale à autant de fois la perpendiculaire menée entre deux bords de la base de la molécule, qu'il y a de rangées soustraites en largeur, en sorte que si cette base est un carré, et que le décroissement ait lieu par trois rangées, la base du triangle mensurateur sera triple de l'arête horizontale de la molécule. Au contraire, dans un décroissement par trois rangées sur les angles, relatif à la même hypothèse, la base du triangle mensurateur sera égale seulement à une diagonale et demie, prise sur la base de la molécule.

99. Supposons que le décroissement soit intermédiaire, et que dans la molécule composée qui fait la fonction de molécule soustractive, la base soit un assemblage de trois facettes de molécules simples, comme on le voit figure 92. Alors on considérera ces molécules comme n'en faisant qu'une seule, et la base du triangle mensurateur sera la perpendiculaire D*o* menée sur la diagonale *mr* du quadrilatère D*mzr*. Quant au côté intérieur du triangle mensurateur, il sera de même une perpendiculaire menée du point *o* sur *mr*, jusqu'à la rencontre de *ns* (fig. 89).

100. Reprenons le cas où la forme primitive est un prisme symétrique. Soit CD ou BC$=4$, et CG ou DF$=5$, comme dans celui de l'apophyllite. Supposons un décroissement qui ait lieu par une simple rangée sur les quatre angles de chaque base, mais qui n'atteigne pas sa limite. Dans ce cas on aura,

au lieu d'un dodécaèdre analogue à SY (fig. 90), le solide représenté figure 93, dont les faces obliques sont des pentagones surmontés de deux facettes carrées *pnir*, *utsx*, parallèles aux bases de la forme primitive.

Menons les diagonales AC, BD (fig. 89). Soit *cab* (fig. 94) le triangle mensurateur, dans lequel l'angle *b* sera droit, et *ab* sera à *bc* :: DS (fig. 89) : DF :: $\sqrt{8}$ : 5, ce qui donne $29^{d}\,30'$ pour l'angle *acb*, et par conséquent $60^{d}\,30'$ pour l'angle *cab*. Donc l'incidence de chacun des pentagones C*hnpk*, D*hnie*, etc. (fig. 93), sur la face terminale, sera de $119^{d}\,30'$, et celle du même pentagone sur l'arête verticale adjacente CG ou DF, sera de $150^{d}\,30'$. Je donnerai, dans la partie analytique, les formules à l'aide desquelles on peut aussi déterminer les incidences mutuelles des pentagones adjacens.

Je donne le nom d'*apophyllite épointé* à la variété que je viens de décrire, et que j'avais d'abord placée, avec la même épithète, dans l'espèce de la mésotype. Il me fallait des cristaux d'une forme beaucoup plus nettement prononcée que ceux qui avaient servi à mes premières observations, pour rétablir l'exactitude dans la détermination des formes relatives à ces deux substances. Ceux qui m'ont offert cet avantage venaient les uns d'Utön en Suède, et les autres de Féroë.

Je suis redevable des premiers à M. Suedenstierna, directeur des mines, que je me félicite de compter parmi ceux qui, en honorant mes leçons publiques de leur présence, se sont le plus distingués par la constance de leur zèle et par la rapidité de leurs progrès ; les autres sont des présens de M. Petersen, amateur très éclairé, qui a eu la bonté d'orner ma collection de divers objets d'un grand intérêt pour l'étude de la Minéralogie, choisis par lui-même dans les abondantes récoltes que lui ont procurées ses voyages.

101. Dans le cas que nous venons de considérer, l'application des lames de superposition est censée n'avoir lieu que sur les bases, et les faces latérales restent intactes. Mais on peut supposer aussi que les trois angles plans qui concourent à la formation d'un même angle solide subissent des décroissemens simultanés, et suivant les diverses mesures de ces décroissemens, il se formera autour de l'angle solide dont il s'agit, ou trois faces distinctes, ou seulement deux, ou une face unique à laquelle les trois décroissemens concourront par des actions conspirantes. Je vais déterminer d'abord les conditions desquelles dépend ce dernier cas; et pour y parvenir je reprends la fig. 89, dans laquelle les lignes D*m*, D*r*, représentent les nombres de dimensions en largeur, qui sont soustraites sur les côtés DA, DC, de la base du noyau, la ligne *mn* représente le nombre de dimensions en hauteur, qui détermine celui des rangées soustraites dans le même sens, et le plan *n*D*s* est le rudiment de la face produite par le décroissement. Ayant pris sur

l'arête DF la partie D$\mu$ égale à $mn$ ou à $rs$, menons $m\mu$ et $r\mu$. Les lignes $mn$, D$\mu$ et $rs$ étant égales et parallèles entre elles, il est évident que les deux plans $n$D$s$, $m\mu r$, sont aussi parallèles l'un à l'autre.

102. Supposons que le décroissement ayant lieu sur l'angle latéral ADF, D$m$ et D$\mu$ représentent les nombres de dimensions en largeur soustraites sur les côtés DA, DF, et que D$r$ représente le nombre de dimensions en hauteur qui répond à celui des rangées soustraites dans le même sens. Des points $m$, $\mu$, j'élève les lignes $mt$, $\mu u$, parallèles et égales à D$r$, puis ayant mené $tn$, je fais passer un plan par les points $t$D$u$. D'après ce qui a été dit plus haut, ce plan est le rudiment de la face produite par le décroissement, et en appliquant ici le raisonnement que nous avons fait par rapport au plan $n$D$s$, on en conclura que les plans $t$D$u$, $mr\mu$, sont parallèles entre eux, comme les plans $n$D$s$, $m\mu r$. Donc les plans $t$D$u$, $n$D$s$, étant parallèles à un troisième plan $m\mu r$, et ayant un point commun D, se confondent sur un seul plan.

Supposons enfin que le décroissement ayant lieu sur l'autre angle latéral CDF, D$r$ et D$\mu$ représentent les nombres de dimensions en largeur soustraites sur les côtés DC, DF, et que D$m$ représente le nombre de dimensions en hauteur qui détermine le nombre de rangées soustraites dans le même sens. On prouvera, à l'aide d'une construction semblable aux deux précédentes, que le plan $\pi$DZ, qui est le rudiment de la face produite par le décroissement, se confond sur un même plan avec les deux premiers plans $tDu$, $nDs$.

103. Donc, si les décroissemens qui agissent sur les trois angles plans qui se réunissent pour former un même angle solide D, ont de telles mesures, que les lignes $Dm$, $Dr$, $D\mu$, qui représentent les nombres de dimensions en largeur soustraites sur les côtés, et le nombre de dimensions en hauteur soustraites dans le même sens, soient les mêmes pour tous les angles, en sorte qu'il n'y ait de changement que dans les fonctions de ces lignes, les faces produites par les trois décroissemens coïncideront sur un même plan.

Il suit de là que l'un quelconque des trois décroissemens étant donné, il est facile de déterminer les deux autres. On peut conclure encore de ce qui précède, que si l'un des décroissemens a lieu par une simple rangée, les deux autres se feront aussi par une rangée. Mais si un seul des décroissemens a lieu par plus d'une rangée, même en supposant qu'il soit de ceux dans lesquels les lames de superposition sont parallèles à une diagonale, et n'ont que l'épaisseur d'une molécule, les deux autres décroissemens seront nécessairement intermédiaires. Car en supposant que l'angle ADC soit celui qui subit le décroissement, on aura $Dm$, $Dr$, égales chacune à deux dimensions en largeur ou davantage, tandis que $D\mu$ sera égale à une seule dimension en hauteur. Maintenant, si l'on considère le décroissement qui a lieu par rapport à l'angle ADF, les lignes $Dm$ et $D\mu$ représenteront les nombres de dimensions en largeur sur les cotés DA, DF, et ces nombres étant inégaux, la ligne D$\mu$ ne pourra être parallèle à la diagonale menée de A en F, et par conséquent le décroissement sera intermédiaire.

Ce qui se présente de plus naturel, dans ces sortes de cas, est de rapporter le résultat des trois décroissemens à celui qui est simple, et qui a lieu parallèlement à la diagonale, en supposant que les deux décroissemens intermédiaires n'interviennent que comme *auxiliaires*, pour prolonger l'effet du décroissement principal au-dessus des faces adjacentes à celles qui le subit. Je reviendrai bientôt sur ce sujet, dont le développement me fournira un nouvel exemple de la méthode synthétique, dont j'ai déjà fait usage pour décrire l'ordre de la structure dans les formes secondaires.

104. Passons à de nouvelles applications, et supposons d'abord que la forme primitive étant un cube AO′ (fig. 95), subisse des décroissemens par une simple rangée sur tous les angles de ses différentes faces. Nous nous bornerons, pour le présent, à considérer ce qui se passe par rapport aux trois angles plans réunis autour de l'angle solide O. Ayant pris sur les bords OE, OI, OO′, les parties O*c*, O*d*, O*r*, égales chacune à une arête de molécule cubique, menons les lignes *ct*, *dk*, parallèles à OO′, les lignes *cg*, *rs*, parallèles à OI, puis les lignes *dh*, *rz*, parallèles à OE, en donnant de même à chacune de ces lignes

une longueur égale à une arête de molécule. Si par le point O et par les extrémités des mêmes lignes prises deux à deux, nous faisons passer les plans *tok*, *gos*, *hoz*, il est facile de concevoir, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 122), que ces plans seront les rudimens des faces produites par les trois décroissemens qui agissent autour du point O, et qu'en même temps ils seront de niveau sur un plan unique. De plus, ces plans étant des triangles isocèles, égaux et semblables, et les angles *gct*, *kdh*, *srz*, compris entre eux, étant aussi égaux, il en résulte que si l'on prolonge leurs bases *gs*, *hz*, *tk*, elles se rencontreront de manière à former avec leurs prolongemens le contour d'un triangle équilatéral *uxy*. Enfin, les plans *g*O*s*, *t*O*k*, *h*O*z*, étant également inclinés sur les trois faces EOO′E′, EOIA, IOO′I′, au-dessus desquelles ils s'élèvent, il est visible que le triangle équilatéral *uxy* est perpendiculaire sur l'axe du cube qui passe par les points O, A′. Le même raisonnement s'applique aux résultats des décroissemens qui agissent autour des sept autres angles solides. Donc les faces du cristal secondaire n'étant autre chose que les triangles analogues à *uxy*, prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, et celles qui sont opposées deux à deux étant perpendiculaires sur l'axe du cube qui passe par les deux angles autour desquels elles se sont formées, la surface qui résultera de leur ensemble sera celle d'un octaèdre régulier *s*, *s′* (fig. 96). Le cube sera inscrit dans cet octaèdre, de manière que ses angles solides coïncideront avec les milieux des faces du même octaèdre, et l'on voit, par la seule inspection de la figure, que ce dernier solide a ses faces tournées en sens contraire des triangles tels que *uxy*, qui en offrent les rudimens. Soit *omn* (fig. 97), le triangle mensurateur relatif à l'un quelconque des décroissemens, par exemple à celui qui a lieu sur l'angle EOI (fig. 95). La base *om* (fig. 97) sera égale à une demi-diagonale de molécule, et le côté intérieur *mn* à une arête, d'où il suit que l'on aura

$$om : mn :: 1 : \sqrt{2}.$$

Or, il est facile de voir que ce rapport est le même que celui qui existe entre la perpendiculaire menée du centre de la base de la pyramide *mnm'n's* (fig. 96) sur le côté *mn*, et la hauteur de la même pyramide. Donc si l'on représente ces deux lignes par 1 et $\sqrt{2}$, on aura $\sqrt{3}$ pour l'apothème du triangle *msn*, et parce que la perpendiculaire menée du centre de la base sur *mn* est égale à la moitié de ce même côté, l'expression de ce dernier sera 2. De plus, l'apothême du triangle *msn* étant $\sqrt{3}$, et la moitié du côté *mn* étant l'unité, on aura

$$ms, \text{ ou } ns = \sqrt{3+1} = 2,$$

d'où il suit que le triangle *msn* est équilatéral, et que le solide secondaire est un octaèdre régulier, comme on l'a déjà vu. D'après les données dont j'ai parlé, on trouve que l'angle *nom* (fig. 97) qui mesure la moitié de l'incidence d'une des faces de l'octaèdre sur la face adjacente est de $54^d 44' 8''$, ce qui donne pour l'incidence dont il s'agit, $109^d 28' 16''$.

Le triangle mensurateur que nous venons de considérer aurait donc suffi pour déterminer tout d'un coup l'octaèdre qui résulte de l'ensemble des décroissemens. Mais pour donner une idée nette des diverses combinaisons de molécules dont se compose le mécanisme de la structure relative à cet octaèdre, je vais employer encore ici la méthode de synthèse, et développer la série des lames de superposition, en indiquant les variations qu'elles subissent pour seconder l'effet du décroissement auquel tout se rapporte.

105. Soit AEOI (fig. 98 A) la même face du noyau que figure 95, et supposons que chaque côté étant divisé en neuf parties égales, les quatre-vingt-un petits carrés qui résultent du croisement des lignes menées par les points de division, parallèlement aux côtés, représentent les facettes extérieures d'autant de molécules. Ce que nous dirons par rapport à la face AEOI doit s'entendre également des cinq autres faces du cube.

La figure 98 B représente la face supérieure de la première lame de superposition, qu'il faut concevoir placée au-dessus de AEOI (fig. 98 A), de manière que les points $e'$, $a'$, $o'$, $i'$ (fig. 98 B), répondent à ceux qui sont marqués des mêmes lettres (fig. 98 A). On voit d'abord par cette disposition que les carrés

*Ee*, *Aa*, *Oo*, *Ii*, restent à vide, ce qui est l'effet initial de la loi de décroissement. On voit de plus, que la lame de superposition dont il s'agit est augmentée d'une rangée au-delà des portions des bords ST, RU, XZ, YM, qui répondent aux bords EA, EO, OI, IA (fig. 98 A), ce qui est nécessaire pour que le noyau s'accroisse à l'ordinaire dans les parties que le décroissement n'atteint pas. Chacune des rangées additionnelles PN, QV, GF, CL, étant commune aux deux lames qui s'appliquent l'une sur AEOI (fig. 95), et l'autre sur une des faces adjacentes, on se dispenserait de le répéter, si l'on voulait exécuter une imitation du solide dont il s'agit ici.

Ces mêmes rangées additionnelles font naître de nouveaux vides à côté de celui qui est l'effet immédiat du décroissement; ainsi, dans le cas où ces rangées n'existeraient pas, il n'y aurait vers l'angle O (fig. 98 A) qu'un seul vide U*o*'X (fig. B), produit par la soustraction de la molécule qui répond à O*o* (fig. A); mais l'addition des deux rangées PN, CL (fig. B), détermine entre les carrés *b*, *d*, d'une part, et *r*, *s*, de l'autre, deux nouveaux vides qui étendent l'effet du décroissement vers les parties adjacentes au point O (fig. A). Or, ces nouveaux vides sont censés résulter de la soustraction de deux cubes situés sur les prolongemens des rangées additionnelles PN, CL (fig. B), en sorte que chacun de ces vides est limité inférieurement par une facette de molécule, comme l'est le vide U*o*'X par la face O*o* (fig. A).

La figure 99 fera concevoir cette disposition. Soit O*o* la molécule cubique située au point O (fig. 95 et 98 A), et soient *b*, *d*, *r*, *s* (fig. 99), les quatre molécules désignées par les mêmes lettres (fig. B). Soient de plus *b*, *l*, *t*, *u* (fig. 99), les molécules qui répondent aux précédentes dans la première lame de superposition appliquée sur la face EOO′E′ (fig. 95), et soient *s*, *y*, *x*, *u* (fig. 99), celles qui leur répondent dans la lame appliquée sur la face OII′O′ (fig. 95). Les vides qui existent l'un entre les molécules *d*, *r* (fig. 99), un autre entre les molécules *l*, *t*, et un troisième entre les molécules *y*, *x*, et qui sont l'effet immédiat du décroissement, résultent de la soustraction de trois cubes qui reposeraient sur les facettes O*o*, O$\gamma$, O$\delta$; or, tous les vides qui sont dus aux rangées additionnelles, se trouvent dans le même cas que les précédens par la manière dont ils sont limités · ainsi le vide qui existe entre les cubes *b* et *d*, est censé produit par la soustraction d'un cube qui reposerait sur la facette $\varepsilon\nu$ de la molécule *l*. Il en est de même des autres vides, et tel est le mécanisme de la structure, considéré dans son ensemble, que les modifications accessoires au décroissement s'assimilent à celles qui en dérivent nécessairement.

La face supérieure de la seconde lame de décroissement est représentée par BKHD (fig. C), et sa position au-dessus de la précédente est indiquée par la correspondance des lettres $e''$, $a''$, $i''$, $o''$, et des lettres $e'$, $a'$, $i'$, $o'$ (fig. B).

Cette lame dépasse la précédente, dans les parties que le décroissement n'atteint pas, d'une quantité qui serait égale à une rangée de cubes, si le noyau était composé d'un plus grand nombre de molécules, mais qui, dans le cas présent, se réduit à un simple cube désigné par B, K, H ou D.

Les grandes faces des lames de superposition qui jusqu'alors étaient des octogones tels que PQVGFCLN (fig. B), étant parvenues à la figure du carré BKHD (fig. C), décroissent, passé ce terme, dans toutes leurs dimensions, en sorte que leurs grandes faces sont successivement représentées par les figures D, E, F, G, H, I, où leurs positions respectives les unes au-dessus des autres se trouvent indiquées par la similitude des lettres $c$, $f$, $g$, $h$ (fig. C), $c'$, $f'$, $g'$, $h'$ (fig. D), $c''$, $f''$, $g''$, $h''$ (fig. E), et ainsi des autres. On voit que la dernière lame se réduit à un simple cube désigné par $z'$ (fig. I), et qui repose sur celui qu'indique $z$ (fig. H).

La figure 100 représente une des faces de l'octaèdre produit par le décroissement, avec l'assortiment des molécules dont les angles extérieurs concourent à sa formation.

106. La série des lames empilées sur l'une quelconque des faces du cube (fig. 95), par exemple sur la face AEOI, diffère de celle des lames qui, dans le dodécaèdre représenté (fig. 90), correspondent à chacune des bases du noyau (fig. 89), en ce que ces dernières lames n'éprouvent d'autre variation que

celle qui dépend du décroissement, de manière que les portions de leurs bords que ce décroissement n'atteint pas, restent sur les plans des faces latérales CDFG, BCGL, etc., au lieu que les portions de bords correspondantes dans les lames composantes de l'octaèdre originaire du cube s'étendent, en se recouvrant mutuellement, pour empêcher qu'il ne se forme des angles rentrans aux mêmes endroits. Il en résulte que la face produite par chacun des décroissemens qui ont lieu sur les angles de la base AEOI (fig. 95) n'est plus un rhombe, comme dans le cas du dodécaèdre (fig. 90), mais un trapézoïde, tel que *orst* (fig. 96). Car, à cause des rangées additionnelles dont on a parlé, les bords qui répondent à PQ, GV, CF, LN (fig. 98 B), augmentent dans un plus grand rapport que si ces rangées n'existaient pas, et de plus l'existence de ces mêmes rangées accélère le terme où les lames de superposition commencent à décroître de tous les côtés à la fois; d'où il suit que le triangle *rot* (fig. 96), qui est la somme des bords croissans dont on a parlé, a moins de hauteur, sur une base égale, que le triangle *rst*, qui est la somme des bords pris depuis le terme où le décroissement a lieu dans tous les sens. Mais ces augmentations et ces diminutions successives sont tellement combinées, que les trois trapézoïdes *orst*, *ormz*, *otnz*, produits par les trois décroissemens qui agissent autour d'un même angle solide O, composent par leur assortiment un triangle équilatéral *msn*, et le même effet se répétant à l'égard des sept autres angles solides, les vingt-quatre trapézoïdes qui naissent de l'ensemble des décroissemens donnent huit triangles équilatéraux, qui sont les faces du solide secondaire.

107. Les nombres de cubes renfermés dans les couches que forment les lames de superposition, en s'appliquant six à six les unes au-dessus des autres, donnent deux séries récurrentes, dont la première, en partant du noyau, contient toutes les lames qui ont vers leurs bords des rangées additionnelles, et la seconde toutes celles qui décroissent dans tous les sens à la fois.

Cherchons d'abord la valeur d'un terme quelconque dans la première série. Soit $n$ le rang de ce terme, et $c$ le nombre d'arêtes de molécules contenu dans le côté du noyau. Chaque lame recevant une rangée additionnelle vers chacun de ses bords opposés, il est évident que le côté de la première lame, en la complétant par la pensée, sera $c+2$, celui de la 2ᵉ $c+4$, celui de la 3ᵉ $c+6$, et en général $c+2n$. Or, il est aisé de voir que la première lame (fig. B) se trouve dans le même cas que si, ayant d'abord été complète, elle avait subi vers chacun de ses angles un décroissement par trois rangées, dont l'une est soustraite par l'effet immédiat du décroissement, et les deux autres proviennent des rangées additionnelles, ce qui donne pour la quantité de molécules soustraites vers chaque angle, $1+2+3$. Si la seconde lame (fig. C) était de niveau avec la première par ses bords analogues à QV, PN, etc., l'effet du décroissement se bornerait à soustraire vers chacun de ses angles une rangée de plus que dans la précédente, ce qui ferait quatre rangées; mais l'extension qu'elle reçoit vers chacun de ses bords la met dans le même cas que si, ayant été d'abord complète, elle avait subi un décroissement de deux rangées de plus, ce qui donne pour la quantité de molécules soustraites vers chaque angle,

$$1+2+3+4+5+6.$$

En appliquant le même raisonnement aux autres lames, on en conclura que chacune ajoute à la progression donnée par la lame précédente trois nouveaux termes, dont l'un est le résultat immédiat du décroissement, et les deux autres proviennent des rangées additionnelles. Les nombres des termes, dans les progressions successives, étant 3, 6, 9, 12, etc., leur expression générale sera $3n$; et parce que dans chaque progression le premier terme et la différence entre un terme et l'autre sont l'unité, la somme des termes sera $\frac{9n^2+3n}{2}$. Donc, puisque le côté de chaque lame censée complète est $c+2n$, le nombre de rhomboïdes contenu dans chaque lame, y compris les rangées qui lui sont communes avec celles qui s'appliquent sur les faces adjacentes, sera représenté par

$$(c+2n)^2-4\frac{(9n^2+3n)}{2} \text{ ou } (c+2n)^2-2(9n^2+3n).$$

Donc l'ensemble des six lames qui composeraient une couche quelconque, dans l'hypothèse où il n'y aurait point de rangée commune, serait

$$6(c+2n)^2-12(9n^2+3n).$$

108. Remarquons maintenant que dans les décroissemens sur les angles, chaque rangée soustraite fait disparaître une arête de molécule sur l'un et l'autre des bords adjacens à l'angle qui subit le décroissement; et parce que chaque bord aboutit à deux angles, il perd autant de fois deux arêtes de molécule qu'il y a de rangées soustraites. Donc l'expression générale du bord, en supposant la lame complète, étant $c+2n$, et celle du nombre de rangées soustraites étant $3n$, le nombre de molécules qui restent sur la portion de chaque bord que le décroissement n'atteint pas, ou, ce qui revient au même, le nombre de molécules qui composent la rangée additionnelle à laquelle répond cette portion de bord, sera

$$c+2n-2\times 3n=c-4n.$$

Donc retranchant six fois cette quantité de l'expression que nous avons trouvée plus haut, on aura

$$6(c+2n)^2-12(9n^2+3n)-6(c-4n),$$

pour la somme des molécules contenues dans les six lames qui composent une couche quelconque du rang $n$.

109. Pour trouver la loi de la seconde série, je remarque d'abord que le nombre total des lames de

superposition est égal au nombre de demi-diagonales de molécules situées en allant de O vers A (fig. 98), depuis la diagonale $\varepsilon\nu$ jusqu'au centre $\gamma$ de la face EAIO, ou ce qui revient au même, il est égal au nombre $c$ d'arêtes de molécule situées sur l'un quelconque des côtés EO, OI, etc., moins l'unité.

Nous avons vu que le nombre de molécules qui composent chaque rangée additionnelle sur l'une quelconque des lames de la première série, a pour expression générale $c - 4n$. Or, dans la lame qui termine cette série, la rangée dont il s'agit se réduit à une seule molécule, telle que K (fig. C). Donc alors, $c - 4n = 1$, et $n = \frac{c-1}{4}$. Dans ce même cas, $n$ représente aussi le nombre des lames que renferme la série. Mais $c - 1$ exprime le nombre total des lames qui appartiennent aux deux séries. Donc $3\frac{(c-1)}{4}$ exprimera celui des lames dont est formée la seconde série. Donc celle-ci renferme trois fois autant de termes que la première, ce qui fournit un moyen facile pour reconnaître à laquelle des deux séries se rapporte une lame du rang $n$.

Soit $n'$ le rang d'une lame quelconque de la seconde série prise en partant du sommet. Les nombres de molécules comprises dans les différentes lames indiquées par les figures I, II, G, F, etc., seront successivement 1, 1+4, 1+4+8, 1+4+8+12, etc. (1);

(1) Voici de quelle manière on peut trouver la suite des

ce qui donne pour chaque lame, abstraction faite de l'unité, une progression arithmétique dans laquelle 4 représente à la fois le premier terme et la différence entre chaque terme et le suivant, et $n'-1$ désigne le nombre des termes; ajoutant donc l'unité à la somme qui résulte de ces données, on aura pour la somme totale relative à une lame quelconque,

$$2(n'-1)^2+2n'-1.$$

110. Maintenant, soit toujours $n$ le rang d'un terme quelconque, en partant de la première de toutes les lames de superposition; $c-1$ étant le nombre total des lames comprises dans les deux séries, on aura $n=c-1-n'+1$, ou $n=c-n'$. Donc $n'=c-n$. Si l'on substitue cette valeur de $n'$ dans l'expression

$$2(n'-1)^2+2n'-1,$$

celle-ci devient

$$2(c-n-1)^2+2c-2n-1.$$

---

nombres qui correspond à une même lame, par exemple à celle de la figure D. On prend d'abord la molécule centrale, ensuite les molécules situées autour de celle-ci sur quatre lignes parallèles aux côtés du carré $c'$, $f'$, $h'$, $g'$, et l'on continue de même, en prenant les molécules qui répondent aux côtés des divers carrés concentriques que l'on peut tracer sur la surface de la lame. On a donc cette suite, 1, 8, 16, 20, 12, 4, qu'il ne s'agit plus que d'ordonner ainsi, 1, 4, 8, 12, 16, 20.

Donc l'ensemble des six lames qui composent une couche du rang $n$ sera

$$12(c-n-1)^2+12c-12n-6.$$

Soit proposé de trouver le nombre S des molécules comprises dans la deuxième couche. $c-1$ ou 8 étant le nombre total des termes qui appartiennent aux deux séries, on voit d'abord que la couche dont il s'agit est comprise dans la première. On aura donc,

$$\begin{aligned}S&=6(c+2n)^2-12(9n^2+3n)-6(c-4n)\\&=6.169-12.42-6=504.\end{aligned}$$

Si l'on veut avoir le nombre S relatif à la quatrième couche, ce nombre faisant partie de la seconde série, d'après ce qui a été dit plus haut, on aura

$$S=12(c-n-1)^2+12c-12n-6=12.16+108-48-6=246.$$

111. Si l'on prolonge la ligne $zO$ (fig. 96) jusqu'en $s$, on aura $Os=\frac{2}{3}sz$, et parce que $rs=\frac{1}{2}ms$, on aura aussi $es=\frac{1}{2}sz$. Donc $Oe=(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})sz=\frac{1}{6}sz$. Donc

$$Oe : Os :: \tfrac{1}{6} : \tfrac{2}{3} :: 1 : 4;$$

donc $Oe=\frac{1}{3}es$. Donc les hauteurs $Oe$, $es$ des triangles $rOt$, $rst$, sont entre elles dans le rapport des nombres de lames relatives aux deux séries qui représentent la marche du décroissement, et c'est effectivement ce qui doit avoir lieu d'après ce que nous avons dit ci-dessus (p. 134).

112. A la rigueur, les lignes $Oe$, $es$, ne sont pas

précisément celles qui donnent les limites entre lesquelles sont renfermées les deux séries dont il s'agit. Car les faces de l'octaèdre étant des plans tangens à tous les angles solides *x*, *z*, *t* (fig. 100), des molécules extrêmes, il est facile de concevoir que les lignes sur lesquelles elles se réunissent, et qui sont les côtés *ms*, *ns*, *mn*, etc., (fig. 96), se trouvent libres de tout contact avec les molécules. Par exemple, le côté *ms* passe au-dessus de deux points situés aux milieux des arêtes *uz*, *rx* (fig. 100), de manière que si l'on élève sur les facettes *uzl*, *rxq*, deux perpendiculaires qui partent du centre, et soient égales à une arête de molécule, les extrémités de ces perpendiculaires se confondront avec les points *m*, *s* (fig. 96). Mais le véritable triangle, auquel les lignes O*e*, *es* (fig. 96), sont censées se rapporter, est celui dont les côtés ont leurs extrémités aux points *z*, *t*, *x* (fig. 100). Les points *c*, *d*, placés à égale distance entre *x*, *z*, d'une part, et *x*, *t*, de l'autre, sont les analogues des points *r*, *t* (fig. 96), et le point *k* (fig. 100), situé à égale distance entre les points *c* et *d*, est l'analogue du point *e* (fig. 96). Or, la distance entre *o* et *k* (fig. 97), égale deux fois la ligne *on* (fig. 100), qui est le côté extérieur du triangle mensurateur, et la distance entre les points *k* et *x* (fig. 100), égale six fois le même côté extérieur, ce qui est conforme au rapport indiqué entre les nombres de lames qui composent les deux séries. La propriété qu'a le triangle *msn* (fig. 96), de représenter le triangle *zxt*, dans les résultats de la théorie, provient de ce qu'il est inscrit à ce dernier, en sorte que les lignes semblablement tirées dans l'un et dans l'autre font les mêmes fonctions.

Il résulte du rapport $\frac{1}{3}$ entre les nombres des lames qui composent les deux séries, que la somme totale de celles qui s'élèvent au-dessus d'une même face du noyau est un nombre pair, et si l'on suppose, comme cela est naturel, que la dernière lame se réduise à une simple molécule, le nombre des arêtes de molécule comprises dans chaque côté du noyau sera nécessairement impair, comme le représente la fig. 98 A. Dans le cas où il serait pair, la dernière lame deviendrait un assortiment de quatre molécules cubiques réunies sous la forme d'un prisme carré.

113. Concevons maintenant que l'octaèdre secondaire ait pour noyau un rhomboïde AA′ (fig. 101), tel que celui de $104^{d}\frac{1}{2}$, qui appartient à la chaux carbonatée, et qu'il provienne aussi d'un décroissement par une rangée sur tous les angles de ce rhomboïde. L'arrangement respectif des molécules composantes sera encore le même, et ainsi les angles solides A, E, O, etc. (fig. 102), coïncideront encore avec les centres des faces de l'octaèdre. Mais parmi ces mêmes faces il n'y en aura plus que deux qui soient des triangles équilatéraux, savoir, les faces *bdf*, *enp*, situées autour des sommets A, A′, les six autres faces qui ont pour centre les angles solides E, O, I, etc., seront des triangles isocèles *dpf*, *bed*, *edp*, etc.

Or, les angles supérieurs EAI, EAG, etc., sur lesquels agissent les décroissemens qui donnent les triangles équilatéraux, n'étant pas dans le même cas que les angles inférieurs EOI, EHG, etc., et ces derniers étant différens des angles latéraux EOA′, IOA′, qui concourent avec eux à la production des triangles isocèles, l'octaèdre doit être considéré comme le résultat de trois décroissemens qui se rapportent aux trois espèces d'angles dont nous venons de parler, et qu'il convient de distinguer entre eux, puisqu'ils sont représentés par autant de triangles mensurateurs, dont chacun a des dimensions particulières. Mais pour simplifier nos conceptions à l'égard des décroissemens qui se combinent dans la formation des triangles isocèles, nous pouvons à volonté regarder chacun de ces triangles, par exemple le triangle *edp*, comme produit en vertu d'un décroissement par une rangée sur l'angle inférieur EOI, dont l'effet se prolonge au-dessus des faces EOA′H, IOA′K, ou comme produit en vertu d'un décroissement par une rangée sur les angles latéraux EOA′, IOA′, dont l'effet se prolonge en dessus de la face EOIA, et il semble d'abord indifférent d'adopter l'une ou l'autre manière de voir. Il est cependant à remarquer que par une suite de la position verticale qu'a maintenant l'axe du noyau, en passant par les sommets A, A′, le trapézoïde $d\gamma O\delta$ qui résulte du décroissement sur l'angle EOI, se rejette vers la partie inférieure de cet axe, en sorte que son inclinaison à l'égard de celui-ci est en sens opposé de celle du rhombe EOIA, sur lequel il est censé avoir pris naissance, tandis que les trapézoïdes $e\gamma O\epsilon$, $p\delta O\epsilon$, qui résultent des décroissemens sur les angles latéraux EOA′, IOA′, sont tournés vers les faces EOA′H, IOA′H, auxquelles appartiennent ces mêmes angles. Cette considération semble fournir, dans le cas présent, une raison de prendre pour décroissement principal celui qui a lieu sur les angles latéraux, et de regarder l'autre comme n'étant qu'auxiliaire.

Mais si le décroissement sur l'angle inférieur se faisait par deux rangées, auquel cas les décroissemens sur les angles latéraux deviendraient intermédiaires (*voyez* p. 122), alors il conviendrait, ainsi que je l'ai déjà dit, de donner la prééminence au premier. Ainsi, la position de chaque face du cristal secondaire étant donnée d'après la considération d'un seul des triangles mensurateurs relatifs aux divers décroissemens qui concourent à la production de cette face, c'est en général la raison de la plus grande simplicité qui détermine le choix de ce triangle.

114. Les décroissemens qui ont lieu sur les angles supérieurs EAI, IAG, etc. (fig. 101), étant indépendans de ceux qui se rapportent aux angles latéraux, supposons que ceux-ci existent seuls, et que les sommets soient libres de tout décroissement. Alors les parties des lames de superposition situées vers ces mêmes sommets, au lieu de décroître s'étendront de manière à s'envelopper les unes les autres par les

résidus de leurs bords supérieurs, et l'effet de cette extension sera le même que si les triangles *dpf*, *dcb*, *edp*, etc. (fig. 102), s'étaient prolongés en dessus des faces *bdf*, *enp*, jusqu'à s'entrecouper, d'où il est aisé de conclure que le solide secondaire sera un rhomboïde *aa'* (fig. 102), plus alongé que le noyau. Dans le cas présent, où ce noyau est le rhomboïde de $104^d\frac{1}{2}$ qui appartient à la chaux carbonatée, le cristal secondaire est le rhomboïde de $78^d\frac{1}{2}$ dont j'ai déjà parlé, et que j'appelle *inverse*, pour des raisons qui seront exposées dans la suite.

115. Pour mieux concevoir la différence entre la structure de ce rhomboïde et celle de l'octaèdre représenté (fig. 102), imaginons que toutes les lames de superposition qui recouvrent la face AEOI (fig. 102 et 103), se projettent sur un même plan, comme on le voit fig. 104. Les grandes faces de ces lames seront d'abord des eptagones, tels que $mmm'm'm''m''m'''$, dont les côtés $m'm'$, $m''m''$, diminueront progressivement, jusqu'à ce qu'ils soient réduits à une simple arête de molécule. Dans le cas présent, où l'on s'est borné à neuf molécules sur chaque côté du noyau, le terme dont il s'agit a lieu dès la seconde lame. La grande face extérieure de celle-ci est l'eptagone $rrr'r'r''r''r'''$, qui est sensiblement un pentagone, à cause des côtés presque infiniment petits $r'r'$, $r''r''$. Il en est de même des grandes faces des lames suivantes, qui sont successivement les eptagones $uuu'u'u''u''u'''$, $xxx'x'x''x''x'''$, etc., que l'on peut assimiler à des pentagones.

116. Il y a ici une observation à faire par rapport à la dernière lame, qui, en supposant que le décroissement ait atteint sa limite, doit être composée d'une simple rangée de molécules désignée par *qv*. Or, tandis que les bords supérieurs *mm*, *rr*, *uu*, etc., des grandes faces qui appartiennent aux autres lames se dépassent mutuellement d'une quantité égale à une rangée, ceux qui ont la même position sur la dernière lame, et qui sont indiqués par *nv*, *n'v*, doivent rester de niveau avec les bords *vv*, $vv'''$, relatifs à la lame précédente. Car, l'uniformité de la structure exigerait que l'excès de la dernière lame sur celle qui la précède se réduisît à un simple rhomboïde désigné par $v\varepsilon\lambda\zeta$, et qui laissât entre lui et la lame précédente un vide $vv\varepsilon$, égal à celui qui existe, aux endroits correspondans sur toutes les autres lames. Mais l'affinité laisse échapper ce rhomboïde, dont l'adhérence avec le cristal serait censée nulle, puisqu'il ne tendrait à compléter celui-ci que par son sommet inférieur.

117. Si l'on compare la figure 103 avec la 104e, et que l'on prenne la série des lames de superposition, en partant de la dernière, c'est-à-dire de celle qui est composée de la rangée indiquée par *qv* (fig. 104), il est facile de voir que cette rangée représente l'arête *da* (fig. 103), d'où il suit que celle-ci est parallèle à la diagonale oblique qui va de A en O. La lame suivante, désignée par $vvv'v'v''v''v'''$ (fig. 104), correspond à un pentagone $vvv'v''v'''$ (fig. 103), pris par une section faite en dessous de *ad*, et parallèle à la

face AEOI, et ainsi des autres lames. C'est ce que confirme le résultat de la division mécanique du rhomboïde secondaire, qui a toujours lieu suivant des plans situés entre l'arête *ad* et le rhombe AEOI, parallèlement à celui ci. La même comparaison fait voir encore que les arêtes latérales, telles que *ed*, *pd*, sont produites par la suite des arêtes $r'r'$, $u'u'$, $x'x'$, etc., $r''r''$, $u''u''$, $x''x''$, etc., qui s'élèvent comme par échelons les unes au-dessus des autres.

118. Je placerai ici une remarque que j'ai déjà insinuée, en parlant de l'octaèdre régulier originaire du cube (p. 137), et qui s'applique au rhomboïde que nous venons de considérer, ainsi qu'à une multitude d'autres formes secondaires, produites par des décroissemens soit sur les bords, soit sur les angles. Elle consiste en ce que certains points terminaux ou certains bords situés sur le solide géométrique dont nous nous servons pour représenter le résultat de la cristallisation, n'ont pas d'existence réelle sur ce dernier, mais y sont remplacés par d'autres points ou par des plans presque infiniment étroits, dont les différences de position avec les points et les bords analogues sur le solide représentatif échappent à nos sens par leur petitesse. Ainsi le sommet géométrique du dodécaèdre métastatique représenté (fig. 81) est l'extrémité *s* de l'arête E*s* (fig. 80); mais le sommet physique est le point culminant *s'* de la dernière des couches composées des lames de superposition prises trois à trois. Dans le rhomboïde que l'on voit (fig. 103), le sommet

géométrique est le point $a$, et le sommet physique est le point $v$ (fig. 104), qui termine supérieurement la dernière des lames empilées sur la face AEOI (fig. 101) de la forme primitive. Les arêtes $da$, $ed$ (fig. 103), n'existent de même que géométriquement parlant; l'analogue de la première, sur le rhomboïde produit par la nature, est la rangée de rhombes situés en dessous de cette arête, et compris entre les points $v$, $v$ (fig. 104); et l'analogue de la seconde est, comme je l'ai déjà dit, la suite des petits côtés $u'u'$, $x'x'$, $z'z'$, etc., des eptagones qui forment les faces extérieures des lames de superposition. Plus les molécules seront déliées et plus les parties extrêmes du solide de la nature approcheront de se confondre avec celles qui leur correspondent sur le solide de la Géométrie, et qui en sont comme les limites. Mais quoiqu'elles ne puissent jamais atteindre ces limites, les solutions des problèmes qui sont l'objet de la théorie n'en sont pas moins rigoureuses, parce que les positions des plans géométriques auxquels elles se rapportent dépendent uniquement du mécanisme de la structure, en sorte que de ces trois choses, les inclinaisons respectives des plans dont il s'agit, la forme des molécules et leur arrangement, les deux premières étant censées connues, la troisième, savoir, l'arrangement des molécules, ou, ce qui revient au même, la loi de décroissement à laquelle elles sont soumises, se détermine à l'aide du calcul, avec toute la précision que l'on peut désirer.

119. Reprenons le noyau cubique représenté (fig. 95), et supposons que les lames de superposition empilées sur ses différentes faces, subissent vers leurs angles un décroissement qui ait lieu, non plus par une simple rangée de molécules, mais par deux rangées. Alors les trois faces produites autour de chaque angle solide tel que O, seront encore des trapézoïdes, puisque la marche des décroissemens est la même, quant à sa direction, que dans le cas de l'octaèdre (fig. 96), et qu'elle est seulement devenue plus rapide. Mais ces trapézoïdes ne seront plus de niveau; ils s'inclineront les uns sur les autres d'une quantité que l'on détermine par le calcul. La surface du cristal secondaire sera donc composée de vingt-quatre trapézoïdes distincts (fig. 105), dont la réunion produira huit angles solides tels que O, composés de trois plans, et six angles solides tels que $s'$, composés de quatre plans. Les premiers, qui seront les termes de départ des décroissemens, se confondront avec ceux du noyau. Les autres répondront aux angles $s$, $m'$, $s'$, etc. (fig. 96), avec cette différence, qu'ils seront plus rapprochés des faces du cube primitif. Je déterminerai dans la suite les inclinaisons respectives des trapézoïdes.

La structure de l'octaèdre régulier que nous avons considéré précédemment, et celle du solide à vingt-quatre trapézoïdes qui vient de nous occuper, ont lieu dans deux variétés de fer sulfuré. Nous verrons dans la partie analytique ces mêmes formes reparaître sous un autre point de vue où la première fait à l'égard de la seconde la fonction de noyau.

120. Avant de terminer ce qui concerne les décroissemens sur les angles, je vais en citer quelques nouveaux exemples relatifs à des formes cristallines dans lesquelles la marche de la structure pourrait faire naître de l'embarras à ceux qui voudraient la suivre pour ainsi dire pas à pas, en prenant la synthèse pour guide.

Reprenons le prisme droit rhomboïdal qui représente la forme primitive de la baryte sulfatée, et supposons que les angles aigus B, D (fig. 106), de ses bases, soient les termes de départ d'un décroissement par une simple rangée, de manière que la superposition des lames décroissantes n'ait lieu qu'en dessus de ces mêmes bases, sans aucune intervention de décroissemens auxiliaires.

Soit ABCD (fig. 107) la base supérieure prise pour exemple, sous-divisée en quatre-vingt-un petits rhombes qui soient les bases d'autant de molécules soustractives, ce qui fait neuf rhombes sur chacun des côtés AB, BC, etc. Si nous imaginons que toutes les lames de superposition dont la base ABCD est recouverte, se projettent sur le plan de cette même base, il est facile de voir que leurs projections seront successivement les hexagones $A\gamma\varepsilon C\vartheta\zeta$, $A\mu\nu C\pi\lambda$, etc., de manière que celle de la dernière lame se réduira à une simple rangée de rhombes AC. Il en résulte que les faces produites par le décroissement seront des triangles isocèles ODP, OBP (fig. 108), qui s'élèveront en partant des angles D, B (fig. 106), et se réuniront en OP (fig. 108), parallèle à la diagonale menée de A en C (fig. 106). Les surfaces de ces triangles seront produites par les angles solides de molécules, contigus aux lignes $\gamma\varepsilon$, $\zeta\vartheta$, $\mu\nu$, $\lambda\pi$ (fig. 107), et la ligne OP (fig. 108), qui est leur base commune géométrique, sera remplacée par la rangée de rhombes AC (fig. 107), qui représente le sommet physique du cristal.

En même temps que les lames de superposition décroissent vers leurs angles, elles restent de niveau par les portions de bords $C\varepsilon$, $C\nu$, $C\vartheta$, $C\pi$, etc. (fig. 107), que le décroissement n'atteint pas; et parce que ces portions de bords vont elles-mêmes en diminuant, les facettes latérales qui leur correspondent sur les lames de superposition forment par leur assemblage des triangles DPC, BPC, etc. (fig. 109), qui étant sur le même plan que les faces CDFG, BCGL, du noyau, convertissent celles-ci en trapèzes PDFS, PBLS, etc. (fig. 108 et 109). Le solide secondaire est donc dans cette hypothèse un octaèdre, ayant pour faces quatre triangles ODP, PBO, RSF, SLR, qui sont le résultat du décroissement, et quatre trapèzes PDFS, PBLS, ODFR, OBLR, composés des faces latérales du noyau et de leurs prolongemens.

121. Mais les octaèdres de baryte sulfatée qui dérivent du décroissement indiqué, se présentent sous un aspect tout différent de celui dont la figure 108

10..

fait naître l'idée. Leur alongement, au lieu de se faire de bas en haut, se fait dans le sens d'un axe qui passerait par les milieux des arêtes CG, AN (fig. 106), ainsi qu'on le voit figure 110, où le noyau est représenté inscrit dans l'octaèdre secondaire. Cet octaèdre a encore pour faces quatre trapèzes et quatre triangles isocèles; mais il y a échange entre les positions de ces deux espèces de polygones considérés dans les deux octaèdres, ainsi qu'on en jugera en comparant les figures 108 et 110. Il s'agit donc de ramener le mécanisme de la structure au résultat qui donne le second octaèdre.

Pour y parvenir, concevons que le décroissement agisse à la fois sur les trois angles plans qui concourent à la formation de chacun des angles solides D, B, L, F, et imaginons, comme dans le cas du premier octaèdre, que toutes les lames qui recouvrent la base ADCB se projettent sur un même plan, comme on le voit (fig. 107). Alors les faces latérales des lames de superposition ne resteront plus de niveau aux endroits que le décroissement n'atteint pas; mais elles s'étendront par des additions de nouvelles rangées, en sorte que les grandes faces de la première seront semblables à l'hexagone $r'r''hhrr$, celles de la seconde à l'hexagone $s's''kkss$, celles de la troisième à l'hexagone $t't''lltt$, et ainsi des autres. Parmi les lames qui s'appliquent sur les faces latérales, bornons-nous à considérer celles qui s'élèvent au-dessus du pan CDFG (fig. 110). Si nous imaginons que toutes ces lames se projettent sur le plan de cette même face, elles produiront l'assortiment que représente la figure 113, et dans lequel les grandes faces de la première lame sont indiquées par l'hexagone $hhh''h''h'h'$, celles de la seconde par l'hexagone $kkk''k''k'k'$, celles de la troisième par l'hexagone $lll''l''l'l'$, et ainsi des autres.

122. Dans la figure 107, les suites de petits rhombes comprises, l'une entre DC et $hh$, une seconde entre $hh$ et $kk$, une troisième entre $kk$ et $ll$, etc., sont les faces supérieures des rangées additionnelles de molécules dont j'ai parlé plus haut. Dans la figure 113, les suites de petits rectangles comprises entre les lettres correspondantes, savoir, DC et $hh$, $hh$ et $kk$, etc., représentent des facettes latérales appartenant aux mêmes rangées, savoir, celles qui sont tournées vers la face CDFG, d'où l'on voit que chacune de ces rangées additionnelles est commune à deux lames de superposition appliquées sur des faces voisines, ainsi que nous l'avons déjà observé par rapport à d'autres variétés de cristallisation (*voyez* p. 92).

123. Les lames empilées sur la face CDFG commencent par se dépasser aussi mutuellement vers leurs bords parallèles à DF, en sorte que la première reçoit en cet endroit une nouvelle rangée comprise entre DF et $h''h''$, et qui lui est commune avec la lame correspondante, qui s'applique en même temps sur la face ADFM (fig. 110). Dans la lame suivante, la rangée additionnelle se réduit à une seule molécule désignée par $l''l''k''k''$ (fig. 113), et au-delà de ce

terme les lames de superposition éprouvent une retraite en sens opposé, de manière que les petits côtés verticaux $l''l''$, $m''m''$, $n''n''$, des hexagones, s'alignent sur la direction TU (fig. 110), et produisent avec ceux qui leur correspondent de l'autre côté l'apparence d'une arête située au même endroit.

124. D'une autre part, les côtés $hh$ (fig. 107 et 113), $kk$, $ll$, qui restent hors de la portée des décroissemens, diminuent aussi, quoique plus lentement, en sorte que le terme de ces diminutions a lieu dans les lames représentées par $y'y''ppyy$ (fig. 107), et $ppp''p''p'p'$ (fig. 113), où la rangée additionnelle n'est plus composée que de deux molécules situées entre les points $p$, $p$. Le décroissement alors a lui-même atteint sa limite, à l'égard des lames de superposition empilées sur les faces latérales du noyau. Mais la dernière des lames situées parallèlement aux bases étant celle qu'indique l'hexagone $y'y''ppyy$ (fig. 107), le cristal est susceptible de s'accroître encore dans le sens vertical, par l'addition d'une rangée de molécules appliquée sur celle qui est désignée par $pv'$, et égale à cette dernière. Soit $p\vartheta$ (fig. 111) la molécule qui termine cette nouvelle rangée en dessus de $pzo\delta$ (fig. 107); il est aisé de voir que son bord inférieur $pz$ (fig. 111) coïncidera avec le bord supérieur $pz$ (fig. 113) du quadrilatère $pzo\lambda$, de manière que la facette $pz\gamma\epsilon$ (fig. 111) se trouvera sur le même plan que ce quadrilatère; et ainsi l'addition de la rangée dont il s'agit n'exige pas qu'une nouvelle lame

soit appliquée sur celle que représente $ppp''p''p'p'$ (fig. 113); elle ne fait que prolonger cette lame, en lui ajoutant deux petits quadrilatères placés l'un en dessus de $o\lambda pz$, et l'autre en dessous de $o'\lambda'p'z'$.

125. La figure 107 représente chaque lame de superposition parallèle à la base ADCB, dans l'état où est cette lame au moment même où elle est censée s'appliquer sur celle qui est en dessous. Mais à mesure qu'une nouvelle lame s'ajoute aux précédentes, toutes les rangées situées parallèlement à la diagonale AC sur ces mêmes lames augmentent d'une molécule vers chacune de leurs extrémités. Cette addition provient des lames qui s'appliquent en même temps sur les faces latérales du noyau. Bornons-nous à considérer l'effet de celles qui sont parallèles à la face DCGF (fig. 110 et 113).

Supposons qu'il n'y ait encore que la lame $r'r''hhrr$ (fig. 107) qui se soit appliquée sur la base ADCB. La rangée qui la termine vers l'angle D sera composée de trois molécules dont les angles extérieurs seront sur la ligne $r''h$. La lame correspondante au-dessus de la face DCGF (fig. 113) sera celle que représente l'hexagone $h''h''h'h'hh$. Concevons maintenant une nouvelle lame $s's''kkss$ (fig. 107), appliquée sur la précédente; son analogue au-dessus de DCGF (fig. 113) sera $k''k''k'k'kk$. Soit $\nu\psi$ (fig 112) la molécule à laquelle appartient la facette $\upsilon\omega\psi\varphi$ (fig. 113), considérée sur la même lame. Le point $\omega$ situé immédiatement en dessous de $k$ (fig. 107) se trouvant alors sur le plan de l'hexagone $r'r''hhrr$, et les points $\sigma$, $\eta$, considérés sur le même plan, se confondant avec ceux qui sont désignés par les mêmes lettres (fig. 112), il est visible que le petit rhombe $\upsilon\omega\sigma\eta$ se placera à la suite de celui dont $\nu\eta$ (fig. 107) est la petite diagonale, et le même effet se répétant vers l'autre extrémité de la rangée dont il s'agit, le nombre des facettes qui la composent sera de six, au lieu de quatre qu'il était auparavant.

Par une raison semblable, l'application de la nouvelle lame désignée par $t't''lltt$ déterminera une addition de deux molécules, relativement à chacune des rangées qui terminent les deux lames précédentes, dans le sens des lignes $r''h$, $s''k$, et ainsi de suite.

126. Soient en général $a$, $b$, $c$, $d$, etc., les nombres de molécules comprises dans les rangées terminales situées du même côté, sur les différentes lames de superposition. On aura, après l'application de la première, $a=4$; après celle de la seconde, $a=6$, $b=7$; après celle de la troisième, $a=8$, $b=9$, $c=10$; après celle de la quatrième, $a=10$, $b=11$, $c=12$, $d=13$; et ainsi des autres. La partie de la surface du trapèze O'TUP' (fig. 110) située en dessus du point D vers l'arête TU, est produite par des rangées situées de même parallèlement à cette arête, qui sont dues aux lames appliquées sur les faces latérales du noyau, et qui, en y comprenant celle qui répond à $k''k''$ (fig. 113), se réduisent à cinq dans le cas présent, où chaque bord du noyau est censé renfermer neuf arêtes de

molécule (1). Soient $m$, $s$, $t$, $y$, $z$, les nombres de molécules comprises dans ces deux rangées, en commençant par la plus basse. Ces nombres seront dans l'ordre de ceux que présente la série $a$, $b$, $c$, $d$, etc., en sorte que si $a=4$, on aura $m=0$, $s=0$, $t=1$, $y=2$, $z=3$. Si $a=6$, on aura $m=1$, $s=2$, $t=3$, $y=4$, $z=5$. Si $a=8$, on aura $m=3$, $s=4$, $t=5$, $y=6$, $z=7$; etc. On voit par là que, dans le cristal complet, le nombre des molécules comprises dans chaque rangée surpasse d'une unité celui des molécules que renferme la rangée précédente.

127. Le résultat précédent donne la limite théorique de la structure de l'octaèdre secondaire; c'est cette limite que représente la figure 110. Mais la cristallisation dépasse cette limite, en produisant des octaèdres plus alongés, suivant des rapports très variables, dans le sens des arêtes TU, XZ, et dont l'un se voit fig. 114. Cet alongement a lieu par une addition de lames constantes, égales à celle qu'indique l'hexagone $ppp''p''p'p'$. La projection de celle qui s'applique immédiatement sur cet hexagone est représentée par $zzz''z''z'z'$, et ainsi des suivantes. De plus, il faut concevoir que la rangée terminale $py'$ (fig. 107), s'alonge proportionnellement vers chaque extrémité, par l'addition d'un nouveau rhomboïde $p\tau$, ou $y'\omega$,

(1) C'est une suite de ce que la distance entre le point $m''$ pris inférieurement, et le point D, est égale à cinq hauteurs de molécule.

pour chaque application d'une nouvelle lame dans le sens latéral.

128. Revenons au cas de la limite (fig. 110), et cherchons l'expression générale du rapport des arêtes TU, O'P', soit entre elles, soit avec la petite diagonale qui va de A en C (fig. 106), et à laquelle ces arêtes sont parallèles. Soit $u$ le nombre de petites diagonales de molécule contenues dans la diagonale dont il s'agit, $t$ celui que renferme l'arête O'P' (fig. 110), et $r$ celui que renferme l'arête TU. Nous avons vu (p. 149) que la formation de cette dernière arête avait lieu depuis le terme où la rangée additionnelle située sur les lames de superposition dans le sens de DF (fig. 113) se réduisait à une simple molécule désignée par $k''k''l''l''$. Soit $n$ le rang de la lame qui répond à ce terme. Le côté $h''h''$ de la rangée additionnelle relative à la première de toutes les lames étant moindre de quatre unités que le côté DF du noyau, quel que soit le nombre d'arêtes de molécule que renferme celui-ci, et la même différence se répétant d'une lame à l'autre, si nous désignons aussi par $u$ le nombre dont nous venons de parler, attendu qu'il est égal à celui des diagonales de molécule comprises dans la diagonale de la base du noyau, la série des rangées additionnelles, en partant de la première lame, formera une progression arithmétique décroissante, dont le premier terme sera $u-4$, le dernier sera l'unité, et la différence entre un terme et l'autre sera 4, ce qui donne $n=\frac{u-1}{4}$.

129. Maintenant il est aisé de voir que le nombre de toutes les lames appliquées sur la base ABCD (fig. 107) peut être représenté par $u-1$, et si nous faisons abstraction de la dernière lame désignée par $py$, et qui est censée être ajoutée après la formation complète de l'arête TU (fig. 110), le nombre dont il s'agit devient $u-2$. Or, ce nombre est composé de deux parties, dont l'une renferme les lames dont l'application a précédé la formation de TU, de manière que $n$ désigne aussi le rang de la dernière de ces lames, et l'autre partie renferme les lames dont l'application correspond à la formation de cette même arête TU. Le nombre de celles-ci sera donc

$$u-2-n, \text{ ou } (u-2)-\frac{(u-1)}{4}=\frac{3u-7}{4}.$$

Mais ce dernier nombre est en même temps égal à celui des petits côtés $l''l''$, $m''m''$, $n''n''$, etc. (fig. 113), des lames qui s'appliquaient en même temps sur la face latérale CDFG (fig. 110); et parce que l'arête TU est l'assemblage de tous les côtés analogues à ceux dont il s'agit, la somme des distances entre le premier $k''k''$ (fig. 113) et le second $l''l''$, entre celui-ci et le troisième $m''m''$, sera égale à la moitié de la même arête, et il est facile de voir que chacune de ces distances est égale à une petite diagonale $Ar'$ (fig. 107) de molécule (1). Or, le nombre de ces mêmes di-

(1) Pour estimer ces distances il faut remettre par la pensée les côtés $k''k''$, $l''l''$, etc., à leurs véritables places qui sont ici représentées en projection.

stances est égal à celui des côtés $l''l''$, $m''m''$, $n''n''$, etc., pris depuis le côté $k''k''$ exclusivement. Donc $\frac{3u-7}{4}$ représente aussi le nombre de petites diagonales de molécule comprises dans la moitié de l'arête TU. Donc $r$ ou l'arête entière sera représentée par $\frac{3u-7}{2}$.

Maintenant, pour avoir l'expression de l'arête terminale O′ P′, ou de $t$, remarquons que chaque lame de superposition placée au-dessus de ABCD (fig. 107), en faisant toujours abstraction de la dernière lame $py'$, ajoute à la longueur du cristal, prise dans le sens de O′P′ (fig 110), deux diagonales de molécule, savoir, une de chaque côté de la diagonale AC (fig. 107). Or, le nombre de toutes les lames, excepté la dernière, est $u-2$. Donc

$$t = AC + 2(u-2) = u + 2(u-2) = 3u - 4.$$

Dans le cas présent on a $u=9$. Donc

$$r = \frac{3\times 9-7}{2} = 10, \text{ et } t = 3\times 9 - 4 = 23.$$

130. On peut obtenir une multitude de rapports différens entre les quantités $r$ et $t$, en faisant varier le nombre des molécules contenues dans le noyau, ou, ce qui revient au même, en faisant varier la quantité $u$. Mais il y a ici une observation à faire. Nous avons vu que le terme où se formait l'arête TU avait lieu lorsque la rangée additionnelle située sur les lames de superposition dans le sens de DF (fig. 113)

se réduisait à une simple molécule, et qu'alors le rang $n$ de cette lame avait pour expression $\frac{u-1}{4}$; or, cette hypothèse étant la plus simple et la plus naturelle que l'on puisse faire, il en résulte que la quantité $\frac{u-1}{4}$ doit toujours être un nombre entier, quelle que soit la valeur de $u$; et ainsi le nombre des diagonales de molécule comprises dans la diagonale AC (fig. 106), ou, ce qui est la même chose, le nombre des arêtes de molécule contenues dans chaque côté du noyau sera nécessairement un des termes de la série 5, 9, 13, 17, etc.

131. Le rapport que nous venons de considérer est celui qui existe entre deux limites physiques dont l'une, qui est située vers le sommet, répond à l'hexagone $zy'z''zp\delta$ (fig. 110), qui est le même que celui de la figure 107, et l'autre, qui est située dans la partie latérale, répond au rectangle presque infiniment étroit $\mu\kappa\omega\pi$, qui est tangent à l'arête $k''k''$ (fig. 113), et à toutes les autres qui appartiennent à la rangée de molécules placée au même endroit. Les limites géométriques correspondantes sont les arêtes O'P' (fig. 110) et TU, et il est facile de trouver leur rapport, qui n'est pas tout-à-fait le même que celui des limites physiques.

On voit d'abord que l'arête O'P' (fig. 110) étant comprise entre les mêmes lignes verticales que la diagonale $py'$ de l'hexagone $zy'z''zp\delta$, il n'y a de ce côté aucune différence entre les deux limites, en sorte que l'on peut aussi désigner O'P' par $t$, et faire, comme ci-dessus, $t = 3u - 4$.

Soient O'TUP', R'TUS' (fig. 115) les mêmes trapèzes que figure 110, et $\mu\pi\omega\eta$ (fig. 115) le même rectangle que figure 110. Soit $\gamma\xi$ (fig. 115) le bord supérieur de la rangée qui suit immédiatement celle à laquelle appartient le rectangle $\mu\pi\omega\eta$; par les points $\mu$, $\pi$, menons $\mu$I et $\pi$K perpendiculaires sur $\mu\pi$. D'après ce qui a été dit plus haut, que chaque rangée renferme une molécule de plus que la précédente, $\gamma\xi$ surpasse $\mu\pi$ d'une quantité égale à une grande diagonale de molécule. Donc $\gamma\lambda$ et $\mu\xi$ sont égales chacune à une demi-diagonale de molécule. Maintenant l'arête TU étant à la même distance de $\mu\pi$ et de $\eta\omega$, il en résulte que T$\mu$ est égale à la moitié de $\gamma\mu$. Donc, si nous menons T$\delta$ et U$\varepsilon$ perpendiculaires sur TU, les lignes $\mu\delta$, $\pi\varepsilon$ sont aussi égales chacune à la moitié de $\gamma\lambda$; donc $\mu\delta$ et $\pi\varepsilon$ valent chacune un quart de diagonale, d'où il suit que l'arête TU est plus petite que l'arête $\gamma\xi$ d'une quantité égale à une demi-diagonale. Or, nous avons eu $\gamma\xi$ ou $r = \frac{3u-7}{2}$. Soit TU $= r'$; nous aurons $r' = \frac{3u-7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3u-8}{2}$. Dans le cas présent, TU : O'P' ou

$$r' : t :: \frac{3u-8}{2} : 3u - 4 :: \frac{19}{2} : 23.$$

132. Cherchons le cas où l'on aurait $r' = \frac{1}{2}t$. Soit $x$

la quantité qui doit être ajoutée ou retranchée de chacune des expressions précédentes, pour que ce cas ait lieu. Nous aurons

$$\frac{3u-8}{2}+x : 3u-4+x :: 1 : 2.$$

D'où l'on tire $x=4$; c'est-à-dire qu'alors le solide se trouverait augmenté de quatre enveloppes situées en dessus des faces P'US', P'ZS', O'TR', O'XR', en sorte que les nombres de diagonales de molécules comprises dans les arêtes TU, O'P', deviendraient

$$\frac{19}{2}+4 \text{ et } 23+4, \text{ ou } \frac{27}{2} \text{ et } 27,$$

ce qui donne le rapport indiqué.

133. Si l'on se borne à diviser un cristal de la variété dont il s'agit ici, par des plans parallèles aux bases de la forme primitive, en partant des arêtes TU, XZ, on obtiendra de part et d'autre une suite de lames hexagonales dont la dimension en longueur, comprise entre O'R' et P' S', sera constante et égale à O'P' ou R'S', et dont la dimension en largeur, perpendiculaire à la précédente, diminuera d'une lame à l'autre, de manière que s'il nous était donné de pousser la division mécanique jusqu'à sa limite, la dernière lame se réduirait à une simple rangée de molécules, représentée par $py'$ (fig. 107). Cette observation peut servir à faciliter l'exécution d'un modèle en bois de la même variété. Si l'on suppose que le côté de la forme primitive soit composé de neuf arêtes de molé-

cules, on taillera d'abord une planchette en forme de base hexagonale, dont la hauteur sera égale à celle d'une molécule, et dont les grandes faces auront leurs côtés parallèles à ceux de l'un quelconque des hexagones que représente la figure 107, par exemple, à l'hexagone $t't''lltt$, et ne différeront de celui-ci qu'en ce que chaque côté $t''l$, $tt$, sera égal à dix diagonales de molécule, et chaque côté $t't''$, $t't$, à treize côtés de molécule, ce qui donne vingt-trois diagonales pour la rangée du milieu, ou celle qui est comprise entre $t'$ et $l$. Les bords analogues à $t''l$, $tt$, devront être échancrés de manière à représenter la série d'angles rentrans et saillans qu'on voit aux mêmes endroits sur la figure. On taillera ensuite vingt-quatre autres planchettes, égales et semblables deux à deux, dont la longueur comprise entre $t''$ et $l$ sera la même, et qui diminueront dans le sens de la largeur comprise entre $t''l$ et $tt$, suivant l'ordre indiqué par la figure, c'est-à-dire de manière que chacune soit dépassée par la précédente d'une quantité égale à une rangée de molécules. On placera ces planchettes les unes en dessus et les autres en dessous de la première, en commençant par la plus large, et ainsi de suite, et l'on terminera cet assortiment de chaque côté par une dernière rangée de vingt-trois molécules, semblable à celle que représente $py'$.

137. La construction qui vient d'être indiquée donne la limite théorique des variations que les faces du cristal dont il s'agit ici peuvent subir, relative-

ment à leurs étendues respectives, ou, si on l'aime mieux, relativement aux divers rapports entre les lignes TU, O'P' (fig. 110). Mais la forme du cristal a une limite géométrique différente de la limite théorique, et qui a lieu lorsque l'arête TU étant nulle, toutes les faces du cristal sont des triangles, ainsi qu'on le voit (fig. 116). Pour faire la synthèse d'un cristal qui offrirait cette limite, il faudrait d'abord concevoir des lames de superposition qui s'appliquassent simultanément en dessus des différentes faces du noyau, comme il a été expliqué plus haut, jusqu'au terme où la rangée additionnelle située parallèlement à l'arête DF (fig. 113) se réduit à une simple molécule désignée par $k''k''$. Soit $bHl$ (fig. 116) le triangle qui, dans ce moment, est composé de la somme des bords parallèles à la diagonale AC (fig. 110). Si la superposition des lames continuait, au-delà de ce terme, en dessus des faces latérales CDFG, ADFN, il se formerait une arête dans le sens de TU, ce qui est contraire à l'hypothèse présente. Donc, pour que le mécanisme de la structure s'accorde avec cette hypothèse, il faudra imaginer que la série des lames de superposition parallèles à la base ABCD continue seule de fournir à l'accroissement du cristal, jusqu'à l'entière formation des triangles O'HP', O'YP' (fig. 116). Il est extrêmement rare de rencontrer cette modification parmi les cristaux de baryte sulfatée; presque tous offrent à la place de l'angle solide H une arête TU (fig. 110) plus ou moins alongée.

135. Nous venons de voir que quand on veut ramener à la méthode synthétique la structure d'un cristal, on est quelquefois obligé de supposer que l'effet d'un décroissement auxiliaire s'arrête à un certain terme passé lequel le décroissement principal agit solitairement. Dans d'autres cas, où deux décroissemens distincts concourent à la production d'un cristal, il est nécessaire de supposer que l'un d'eux agisse seul jusqu'à un certain terme, passé lequel l'autre commence à intervenir, en sorte qu'ils marchent ensuite tous les deux de concert, jusqu'à ce qu'ils aient atteint leur limite. Je vais citer un ou deux exemples de cette diversité d'époques, relativement à l'origine des décroissemens.

136. J'ai prouvé qu'un décroissement solitaire par une rangée sur tous les bords d'un noyau cubique donnait pour résultat le dodécaèdre à plans rhombes (fig. 68), et qu'un décroissement qui de même agissait seul par une rangée sur tous les angles du même noyau produisait l'octaèdre régulier (fig. 96). Concevons que les effets des deux décroissemens se combinent l'un avec l'autre. Le solide secondaire aura vingt faces, dont douze, telles que $s$, $s$, $s'$ $s^k$ (fig., 117), résulteront du premier décroissement, et les huit autres $d$, $d'$, $d''$, etc., seront produits par le second.

Soit EI' (fig. 118) le cube primitif, et soit AEOI (fig. 119) la même face que figure 118, sous-divisée en facettes de molécules, de manière que chaque côté renferme quinze arêtes de ces mêmes molécules.

Supposons d'abord que le décroissement sur les angles agisse seul; le contour de la première lame de superposition sera semblable à l'octogone $ttuut't'u'u'$. Concevons au contraire que ce soit le décroissement sur les bords qui agisse solitairement; le contour de la première lame de superposition sera représenté par le carré $xxx'x'$. Or, les côtés de l'octogone étant situés extérieurement par rapport au carré $xxx'x'$, il est visible que dans l'hypothèse où les deux décroissemens seraient censés naître en même temps, l'effet du décroissement sur les bords rendrait nul celui du décroissement sur les angles, qui se trouve pour ainsi dire en arrière par rapport au premier, et le même retard continuant d'avoir lieu sur toutes les nouvelles lames de superposition que l'on peut imaginer à la suite de la précédente, jamais les deux décroissemens ne pourraient s'associer et marcher de concert vers le but proposé. La cristallisation ne produirait qu'un dodécaèdre rhomboïdal, sans mélange de facettes relatives à un octaèdre.

137. Concevons maintenant que les lames de superposition ne subissent d'abord que le décroissement sur les angles, et que cet effet ait lieu, par exemple, seulement sur les deux premières. Le contour de celle qui s'applique immédiatement sur le noyau étant toujours semblable à l'octogone $ttuut't'u'u'$, celui de la suivante sera représenté par l'octogone $aabba'a'b'b'$. Supposons qu'à ce terme le décroissement sur les bords commence à agir conjointement avec l'autre. Les

lignes de départ ne seront plus les bords AE, AI, etc., du noyau, mais les nouveaux bords *aa*, *bb*, *a'a'*, *b'b'*, qui appartiennent aux rangées additionnelles de la seconde lame de superposition. Le contour de la troisième sera donc semblable à l'octogone *ccddc'c'd'd'*; celui de la quatrième sera semblable à l'octogone *eeffe'f'f'*; celui de la cinquième à l'octogone... *gghhg'g'h'h'*, etc. Il y aura un nouveau terme où l'octogone passera à la figure d'un carré *ooo'o'*, et au-delà de ce terme le décroissement sur les bords agira seul à son tour, et terminera le cristal à l'aide d'une série de lames carrées *ppp'p'*, *rrr'r'*, etc., dont la dernière se réduira à un simple cube désigné par *sss's'*.

Il y a ici deux observations à faire. D'une part, les bords *tu*, *zy*, *cd*, *ef*, etc., tournés vers les angles du noyau vont d'abord en augmentant, pendant que le décroissement qui a lieu sur les mêmes angles agit seul, et diminuent ensuite, tandis que les deux décroissemens agissent simultanément, en sorte que le dernier *mn* se réduit à une diagonale de molécule. D'une autre part, les bords *cc*, *ee*, *gg*, *kk*, etc., qui regardent ceux du noyau, ont des longueurs constantes jusqu'au terme où les premiers s'évanouissent, et ils décroissent ensuite à leur tour, de manière que le dernier *ss* se réduit à une arête de molécule. Considérons l'influence de ces diverses modifications sur les figures des faces du cristal.

138. Lorsque le décroissement sur les angles agit seul, tout se passe comme dans la formation de l'oc-

taèdre régulier originaire du cube, que j'ai exposée plus haut, en sorte que si le décroissement s'arrêtait au terme où l'autre est sur le point de s'associer avec lui, la forme secondaire serait un cube P (fig. 120), dont chaque angle solide se trouverait remplacé par un petit triangle équilatéral $\delta$, qui serait la somme des bords croissans $u't'$, $b'a'$ (fig. 119), sur les lames de superposition disposées autour d'un même angle solide du noyau. Tandis qu'ensuite les deux décroissemens se combinent l'un avec l'autre, il se produit autour du triangle $\delta$ (fig. 120) trois nouveaux triangles $\alpha\varepsilon\nu$, $b\varepsilon\pi$, $c\nu\pi$ (fig. 121), qui lui sont égaux et semblables. Si nous prenons pour exemple le premier qui est désigné par $\alpha\varepsilon\nu$, il est facile de voir qu'il est la somme des bords décroissans $d'c'$, $f'e'$, $h'g'$, etc. Ces nouveaux triangles, joints au premier, composent un triangle unique $d$ (fig. 117), qui est tourné en sens contraire du triangle $\delta$ (fig. 120).

A l'égard du décroissement sur les bords, dont l'origine est sur une ligne $a'a'$ (fig. 117), située au milieu des côtés $o'o''$, $o'o''$, des triangles $d$, $d'$, son effet, pendant qu'il agit conjointement avec l'autre, est de produire, de part et d'autre de la ligne $a'a'$, un rectangle, tel que $a'a'o'o'$, qui est la somme des bords constans $a'a'$ (fig. 119), $c'c'$, $e'e'$, etc., et tandis qu'ensuite il agit seul à son tour, il produit au-delà de chaque rectangle un triangle isocèle, tel que $o'Ro'$ (fig. 117), qui est l'assemblage des bords décroissans $p'p'$ (fig. 119), $r'r'$, etc., en sorte que la totalité des deux rectangles et des deux triangles isocèles, produit un hexagone RR′ (fig. 117).

139. On peut faire varier à volonté les étendues respectives des triangles *d* et des hexagones *s*, en prenant l'origine du décroissement sur les bords dans un point plus ou moins éloigné du point O (fig. 119), ou, ce qui revient au même, en supposant que le nombre des lames de superposition qui répond à l'action solitaire du décroissement sur les angles soit plus ou moins considérable. On aura ainsi une multitude de rapports différens entre les deux espèces de figures, en sorte que tantôt les triangles étant très petits, et la largeur *a′a′* (fig. 117) des hexagones étant très grande, le cristal s'offrira sous l'aspect d'un dodécaèdre à plans rhombes dont les huit angles solides composés de trois plans seront remplacés par des facettes triangulaires, et tantôt le rapport inverse ayant lieu, le cristal aura l'aspect d'un octaèdre dont tous les bords seraient tronqués plus ou moins légèrement. On observe dans l'espèce du fer sulfuré une variété que j'appelle *biforme*, et dont les cristaux présentent des exemples de ces deux modifications.

140. Soit *c* le nombre d'arêtes de molécule comprises dans le côté OI (fig. 119) du noyau, ou le nombre de diagonales de molécule comprises dans la diagonale AO; désignons par H le nombre total des lames de superposition, ou la somme des hauteurs de ces mêmes lames, par *h* celle des hauteurs relatives à l'époque pendant laquelle le décroissement

sur les angles agissait seul, par $h'$ celle qui répond à l'action simultanée des deux décroissemens, et par $h''$ celle qui se rapporte à l'action solitaire du décroissement sur les bords.

Si nous considérons les différences en largeur entre chaque lame et la suivante dans le sens de la diagonale AO, il est aisé de voir que chacune d'elles étant mesurée vers chaque angle O ou A, par une demi-diagonale de molécule, le nombre de toutes les lames de superposition, ou celui qui représente la somme H de leurs hauteurs, sera égal à autant de demi-diagonales de molécule qu'il y en a depuis O jusqu'en $s'$, c'est-à-dire que l'on aura $H = c - 1$.

141. Remarquons maintenant que la ligne $o\lambda$ (fig. 121) mesure autant de fois la distance entre le bord qui répond à $u't'$ (fig. 119) sur la première des lames de superposition, et celui qui répond à $y'z'$ sur la seconde, que la quantité $h$ renferme d'unités, et que la ligne $a\lambda$ mesure autant de fois la même distance que la quantité $h'$ renferme d'unités. Donc, puisque le point $o$ (fig. 121) est au centre du triangle $\delta$, on aura

$$o\lambda : a\lambda :: 1 : 3 :: h : h'.$$

Donc $h + h' = 4h$; ajoutant le nombre $h''$ de hauteurs relatif à l'action solitaire du décroissement sur les bords, on aura $H = 4h + h''$, ou $4h + h'' = c - 1$.

La structure n'offrant aucune limite directe, relativement au rapport entre les étendues des faces $d$, $s$, on peut adopter, si on le veut, celle qui dérive de l'hypothèse que le nombre des lames de superposition relatif à l'action solitaire du décroissement sur les angles soit le même que celui qui répond à l'action solitaire du décroissement sur les bords. Dans cette hypothèse on a $h''=h$, et $5h=c-1$, ou

$$h=\frac{c-1}{5}.$$

Le nombre 15, qui représente $c$ dans la figure 119, ne convient pas ici, parce que ce nombre, diminué d'une unité, n'est pas divisible par 5. Si on suppose de plus que le nombre qui remplirait cette condition soit un nombre impair, on trouvera qu'il doit être un des termes de la série 11, 21, 31, 41, etc.

142. Il est facile de construire géométriquement un solide dans lequel les dimensions des faces $d$, $s$ (fig. 117) soient assorties au rapport que nous venons de prendre pour limite; sur quoi il faut observer que le sommet géométrique R ne coïncide pas exactement avec le sommet physique, qui est représenté par la petite surface $sss's'$ (fig. 119). Il en résulte qu'à la rigueur on a $h''=h+1$. Mais comme $h$ et $h''$ sont censées être presque infinies, la différence peut être négligée, en sorte que la construction dans laquelle on suppose $h=h''$, en prenant l'origine de $h''$ au sommet R, ne diffère pas sensiblement de celle qui aurait lieu, si cette même origine était prise au centre du petit carré $sss's'$ (fig. 119).

Cela posé, observons que $o\pi$ (fig. 121) $=2o\lambda$; donc puisque $o\lambda$ mesure autant de fois la distance entre deux bords situés vers l'angle O (fig. 119) sur deux lames consécutives de superposition, que $h$ renferme d'unités, $\lambda\pi$ (fig. 121) mesurera autant de fois la même distance que $3h$ renferme d'unités; donc $a\pi$ la mesurera autant de fois qu'il y a d'unités dans $6h$. Maintenant, si nous prenons la distance entre les bords de deux lames consécutives de superposition situées parallèlement au côté OI (fig. 119), il est facile de voir que la ligne $o'o''$ (fig. 117), qui est la même que $ac$ (fig. 121), et qui est parallèle à RR' (fig. 117) mesure pareillement autant de fois cette dernière distance qu'il y a d'unités dans la quantité $6h$. Mais RT la mesure autant de fois qu'il y a d'unités dans $h''$. Donc $o'o'' : \mathrm{RT} :: 6h : h'' :: 6 : 1$, à cause de $h''=h$. Donc $o'a'=3\mathrm{RT}$. Mais $\mathrm{GT}=o'a'$. Donc

$$o'a' : \mathrm{RG} :: 3 : 4.\ \text{Donc}\ o'o''=\tfrac{3}{4}\,\mathrm{RR}',$$

ce qui suffit pour construire le solide proposé, conformément à la limite que nous avons adoptée.

143. La distinction des époques auxquelles répondent les actions initiales des divers décroissemens qui se combinent pour produire une même forme secondaire, a encore lieu toutes les fois que ces décroissemens ont leurs lignes de départ situées parallèlement l'une à l'autre.

Prenons pour exemple le cristal représenté (fig. 122), qui appartient à la variété de chaux fluatée que j'appelle *cubo-triémarginée*, parce qu'elle offre l'aspect d'un cube dont chaque bord est remplacé par trois facettes. Ces facettes rapportées au véritable noyau, qui est l'octaèdre régulier, résultent de deux décroissemens, l'un simple, pour celles qui sont désignées par *s*, l'autre intermédiaire, pour celles qui le sont par *x*. Mais si nous substituons à l'octaèdre le cube comme noyau hypothétique, la théorie prouve que les facettes *s* sont le résultat d'un décroissement par une rangée sur les bords de ce cube, et que les facettes *x* dépendent d'un décroissement par trois rangées qui a lieu dans le même sens que le premier, mais qui évidemment commence à l'endroit où celui-ci se termine. Par une suite nécessaire, ses lignes de départ sont d'autant plus éloignées des bords du véritable noyau, que le premier décroissement est censé avoir duré plus long-temps, ou que les facettes qu'il a produites ont plus de largeur. Mais elles ne sont pas censées être distinguées de ces bords dans les résultats de la théorie, parce qu'elles sont situées sur la lame de superposition qu'elles terminent, comme le sont les bords dont il s'agit sur la face du noyau à laquelle cette lame est parallèle.

144. En général, lorsque plusieurs lois de décroissement concourent à la production d'une même forme cristalline, les facettes les plus voisines du centre sont celles qui ont des points de contact avec le véritable noyau, parce que ce sont les dernières qui disparaissent lorsqu'on divise mécaniquement le cristal pour arriver à ce noyau. Si parmi les autres facettes on choisit celles qui sont dues à une même loi de décroissement, et qu'on les prolonge par la pensée

jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, elles seront dans le même cas que si le décroissement dont elles dépendent avait agi immédiatement sur les bords ou sur les angles d'un noyau plus volumineux que le véritable, et dans lequel celui-ci serait inscrit. Par exemple, les facettes *s*, *s* (fig. 122), étant celles qui sont contiguës aux bords du véritable noyau, imaginons que les facettes *x*, *x*, s'étendent jusqu'à s'entrecouper en masquant les facettes *s*, *s*. Leurs lignes de rencontre pourront être considérées comme les bords d'un cube qui aura de plus grandes dimensions que celui qui fait la fonction de noyau relativement aux facettes *s*, *s*, en sorte que, dans l'état actuel des choses, les facettes *x*, *x*, sont censées être la continuation de celles qui auraient pris naissance sur les nouveaux bords dont on vient de parler. Dans le langage ordinaire on substitue ces mêmes bords à ceux du véritable noyau, substitution d'autant plus admissible que le solide auquel ils appartiennent est censé n'être autre chose que ce noyau lui-même, qui se serait accru jusqu'à un certain terme sans subir aucune modification.

A l'égard des angles que font les facettes *x* et *s*, soit avec les faces *i* du noyau, soit entre elles, il est si facile de les déterminer d'après les lois de décroissement par une et par trois rangées qui les produisent, que je me contenterai de les indiquer ici. Incidence de *s* sur *i* $135^d$; de *x* sur *x* $126^d 56' 8''$; de *x* sur *s* $153^d 28' 4''$.

### *Des Décroissemens auxiliaires.*

145. Dans les applications de la méthode analytique aux résultats des décroissemens d'où dépendent les variations des formes cristallines, on ne prend strictement que les données nécessaires pour résoudre chaque problème; et comme le but qu'on se propose est de déterminer la position du plan auquel tel décroissement donne naissance, on y parvient à l'aide d'un construction très simple, dont j'ai donné l'idée en parlant des triangles mensurateurs. C'est dans le petit espace occupé par ces sortes de triangles que la théorie puise les élémens des formules dont elle se sert pour représenter la marche progressive de la structure et les propriétés qui en dérivent.

Mais ce qui suffit relativement au but que se propose le géomètre laisse quelque chose à désirer pour celui dont l'esprit cherche à se satisfaire en éclairant la route qui conduit à ce but. J'ai déjà cité, à l'occasion du rhomboïde équiaxe de la chaux carbonatée et de quelques autres formes, des exemples de la méthode synthétique, qui parcourt pour ainsi dire pas à pas l'intervalle que la méthode analytique franchit rapidement, en suivant une marche analogue à celle de l'artiste qui, pour représenter l'ordre de la structure d'un cristal, applique successivement sur les différentes faces d'un noyau semblable à celui de ce cristal, des lames auxquelles il fait subir toutes les variations qui concourent à l'imitation de la forme proposée. Je vais reprendre ici le même sujet, dont le développement tient à la considération des décroissemens que j'ai appelés *auxiliaires*, parce qu'ils secondent l'effet du décroissement principal, auquel tout le reste se rapporte.

146. Lorsqu'un même bord ou un même angle solide sert de terme de départ à divers décroissemens qui agissent sur les deux faces que réunit l'arête dont il s'agit, ou sur les trois faces qui interviennent dans la formation de l'angle solide, et cela de manière que les nouvelles faces qui en résultent soient inclinées entre elles, chaque décroissement est considéré comme un effet distinct qui se rapporte à une série de lames de superposition empilées sur la face primitive vers laquelle est tournée celle qui est produite par ce décroissement. Mais supposons que les nombres de rangées soustraites des deux côtés d'une même arête, ou autour d'un même angle solide, soient dans un tel rapport que les faces secondaires dont ils déterminent les positions se trouvent de niveau deux à deux dans le premier cas, ou trois à trois dans le second, de manière à n'en former plus qu'une; alors on pourra considérer celle-ci comme le résultat d'un seul décroissement dont l'effet se prolonge en sens contraire de celui suivant lequel agit ce décroissement. Or, le prolongement dépend à son tour soit d'un décroissement que subissent les lames appliquées de l'autre côté de la même arête, soit de deux décroissemens qui ont lieu sur les autres

parties du même angle solide. Ces décroissemens qui font naître le prolongement dont j'ai parlé sont dits être *auxiliaires* à l'égard de celui auquel on rapporte la production de la face que l'on se propose de déterminer, d'où il suit que, réciproquement, on peut considérer ce dernier comme étant auxiliaire à l'égard des autres, en sorte qu'on est libre de choisir entre les deux ou les trois décroissemens celui qui est censé produire l'effet principal. Nous verrons bientôt quelles sont les raisons de préférence qui peuvent décider du choix.

147. Si l'un des deux ou des trois décroissemens a lieu par une rangée, la même loi se répétera à l'égard du second ou des deux autres, ainsi que je l'ai fait voir plus haut. Le choix entre les deux ou les trois décroissemens devient donc alors indifférent, et ainsi il ne s'agira dans ce qui va suivre que des cas où tous les décroissemens se font par plus d'une rangée, soit en largeur soit en hauteur.

Les effets de ceux qui ont lieu sur les bords sont faciles à concevoir, et ne nous arrêteront qu'un instant.

148. Reprenons le dodécaèdre à plans pentagones (fig. 75, pl. 5) originaire du cube, et dont j'ai développé plus haut la structure. On peut concevoir que ce solide soit produit uniquement en vertu d'un décroissement par deux rangées en largeur sur deux bords opposés de chaque face du noyau, en considérant le décroissement par deux rangées en hauteur qui agit

de l'autre côté des mêmes bords comme auxiliaire à l'égard du premier. On pourrait aussi supposer que ce fût le cas inverse qui eût lieu ; mais la première supposition paraît être la plus naturelle, et celle qui est suggérée de préférence par l'aspect du dodécaèdre.

Si le décroissement en largeur avait lieu par trois, quatre, cinq rangées, ou davantage, son auxiliaire agirait par le même nombre de rangées en hauteur. En général, quand deux décroissemens agissent des deux côtés d'un même bord, de manière que les deux faces qui en résultent sont sur un même plan, celui auquel on rapporte l'effet principal a toujours pour auxiliaire son inverse. On peut en dire autant des décroissemens mixtes. Par exemple, si le premier décroissement a lieu par trois rangées en largeur et par deux rangées en hauteur, son auxiliaire agira par deux rangées en largeur et par trois en hauteur.

149. Les décroissemens sur les angles sont principalement ceux qui méritent de fixer l'attention, et exigent un certain développement. Soit AA′ (fig. 123) un parallélépipède quelconque qui subisse un décroissement par deux rangées sur l'angle O de la base AEOI. Le nouveau bord que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition sera dirigé suivant *bc*, et si par le point *n* on élève *nz* parallèle et égale à O*g*, qui représente une arête longitudinale de molécule, elle mesurera la dimension du décroissement dans le sens de la hauteur; d'où il suit

que la face produite passera par *oz*, en même temps qu'elle sera parallèle à *bc*. Donc le plan *bcg*, qui s'abaisse autant au-dessous de la base que la face produite s'élève en dessus, à cause de l'égalité et du parallélisme des lignes *nz*, *Og*, sera situé parallèlement à la face dont il s'agit.

150. Maintenant, si l'on considère le décroissement auxiliaire qui est censé agir sur la face FOA'H, pour prolonger vers la gauche l'effet du décroissement principal, on concevra aisément que la première lame de superposition appliquée sur cette face ayant son bord aligné comme *bg*, le décroissement auxiliaire est intermédiaire par des soustractions de molécules doubles. Or, comme la ligne qui fait à l'égard de ce décroissement la même fonction que *nz*, par rapport à celui qui agit sur la base, doit être égale et parallèle à *Oc*, qui mesure deux arêtes latérales de molécules, il semble que l'on doive en conclure que le décroissement a lieu par deux rangées en hauteur de molécules doubles. La même conséquence paraît se déduire de la position de la ligne *gc*, et de la dimension *ob*, relativement au décroissement qui intervient comme auxiliaire dans les lames de superposition appliquées sur la face OA'KI. Cependant nous allons voir que cette construction ne donne que l'équivalent du véritable décroissement, et qu'il est nécessaire de supposer à ce dernier une marche différente, pour que son effet fasse continuité avec celui du décroissement principal.

151. Soit GAH (fig. 124) la moitié inférieure d'une face d'un rhomboïde obtus, coupée dans le sens de la diagonale horizontale; et soient AHH'A', AGG'A', des portions des deux faces adjacentes; je choisis ici la forme rhomboïdale, parce qu'elle nous fournira plus bas une application des principes qui vont être exposés. Concevons que la face dont il s'agit subisse un décroissement par deux rangées sur l'angle A, dont l'effet se borne aux lames de superposition qui s'élèvent au-dessus d'elle. Les trois rhombes P, $o$, $o'$, resteront à vide, puisque le décroissement agit par deux rangées. Les angles solides extérieurs $\gamma$, $\delta$, $\zeta$, des trois molécules qui ont pour faces supérieures les rhombes $a$, $b$, $c$, composeront le bord que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition. Les deux rangées de rhombes $a$, $b$, $c$, et $a'$, $b'$, $c'$, $c''$, resteront à vide sur la surface supérieure de cette même lame, par l'effet du décroissement, et le nouveau bord de la seconde lame sera composé des angles solides extérieurs des molécules qui ont pour faces supérieures les rhombes $d$, $e$, $f$, $g$, $h$. Il est facile de continuer cet assortiment par la pensée. Dans le même cas, les rhombes E, K, L, S, E', K', L', S', feront continuité avec les faces AHH'A', AGG'A', du rhomboïde générateur adjacentes à AG, AH, et que nous avons supposé être libres de tout décroissement.

152. Concevons maintenant que ces dernières subissent des décroissemens auxiliaires qui prolongent

l'effet du décroissement principal. L'assortiment deviendra semblable à celui que représente la fig. 125. Bornons-nous à déterminer l'effet du décroissement auxiliaire qui agit parallèlement à la face AHH'A' (fig. 124). La première lame de superposition sera terminée par les molécules qui ont pour faces supérieures les rhombes $\pi$, $\nu$, $i$, $k$, $m$, $n$, $p$, etc. (fig. 125), et la suivante par les molécules dont les faces supérieures sont les rhombes $\varkappa$, $\zeta$, $\vartheta$, $\varepsilon$, $r$, $s$, $u$, $x$, $z$. On voit par là que le décroissement a lieu sur l'angle HAA' (fig. 124), par des soustractions de molécules doubles, dont l'une est l'assemblage des deux rhomboïdes indiqués par $\pi$, $\nu$ (fig. 125), une seconde celui des deux rhomboïdes $\vartheta$, $\varepsilon$, et ainsi de suite. On voit de plus que chaque lame n'a que l'épaisseur d'une molécule. Reste à trouver la quantité dont chaque lame, par exemple la première, dépasse la suivante. Or, il est aisé de voir que le bord extérieur de la première est aligné suivant la direction $\sigma\chi$, et le bord intérieur de la seconde suivant la direction $\upsilon\psi$. La figure 126 représente ces deux bords qui sont sur un même plan ; les rhombes tracés en lignes ponctuées sont les faces extérieures des molécules de la première, et les rhombes tracés en lignes pleines sont les faces extérieures des molécules de la seconde.

La distance entre les lignes $\sigma\chi$, $\upsilon\psi$, représentera donc la quantité dont la première lame dépasse la seconde. Or, si l'on mène $\sigma'\gamma$ perpendiculaire sur $\sigma\tau$, elle sera égale à la distance qui aurait lieu entre les deux bords, dans le cas où le décroissement se ferait par une rangée de molécules doubles, puisque le triangle $\sigma\sigma'\tau$ étant la moitié d'une facette de ces molécules, la ligne $\sigma\tau$ est la diagonale de cette facette. Mais il est facile de voir que dans le cas représenté par la figure, la ligne $\gamma\lambda$ qui mesure la distance entre les deux lames que nous considérons est la moitié de $\sigma'\gamma$. C'est une suite de ce que la ligne $v\omega$ coupe en deux également le côté $\sigma'\tau$. Il résulte de là que le décroissement a lieu par une demi-rangée de molécules doubles, en sorte qu'il est l'équivalent d'un décroissement par deux rangées en hauteur des mêmes molécules, ainsi que l'indique la construction que l'on voit (fig. 123).

153. Si le décroissement principal avait lieu par trois rangées, le décroissement auxiliaire se ferait par un tiers de rangée de molécules triples, c'est-à-dire qu'il équivaudrait à un décroissement par trois rangées en hauteur des mêmes molécules. Dans l'hypothèse d'un décroissement principal par quatre rangées, la molécule soustractive serait quadruple de la véritable, et la distance entre deux lames consécutives serait le quart de celle qui répond à une rangée (1).

(1) En général, $n$ étant le nombre de rangées soustraites en vertu du décroissement principal, le rapport entre les deux dimensions de la molécule sera celui de $n$ à l'unité, et la distance entre deux lames consécutives sera $\frac{1}{n}$ de celle qui aurait lieu dans l'hypothèse d'une rangée soustraite.

On pourrait absolument prendre le décroissement auxiliaire pour le principal, en le considérant comme ayant lieu par deux rangées en hauteur de molécules doubles. Dans cette hypothèse, le décroissement qui répond à l'angle A, et qui à son tour deviendrait auxiliaire, continuerait d'être un décroissement ordinaire, et se ferait par quatre rangées, de manière que l'épaisseur de chaque lame serait double de celle d'une molécule. Mais on sent que cette manière de concevoir le mécanisme de la structure ne serait nullement naturelle, en ce que d'une part elle le ferait dépendre du décroissement le plus composé, et en ce que d'une autre part elle enlèverait au décroissement qui ferait la fonction d'auxiliaire, la simplicité qu'il conserve, lorsqu'il fait celle de décroissement principal.

154. Quelquefois les trois décroissemens qui agissent autour d'un même angle solide sont tous intermédiaires; on choisit celui que l'on regarde comme décroissement principal, d'après les considérations qui paraissent lui assigner la préférence. Je vais en citer un exemple.

Soit *ay* (fig. 126), un rhomboïde dans lequel les deux angles latéraux *azg*, *azh*, subissent chacun un décroissement par une rangée de molécules doubles. Il est facile de voir, d'après ce qui a été dit plus haut, que les deux faces produites de part et d'autre du point *z* seront parallèles aux triangles *ost*, *our*. C'est une suite de ce que les lignes *sz*, *zo*, mesurent la première deux arêtes de molécule, la seconde une seule arête, et de ce que la ligne *tu* qui représente l'effet du décroissement dans le sens de la hauteur est aussi égale à une seule arête. La même chose a lieu par rapport aux lignes *uz*, *zo*, *zr*.

Or, les faces qui naissent des décroissemens que nous venons de considérer se prolongent en dessous des arêtes *gz*, *hz*, par l'intermède d'un autre décroissement intermédiaire qui agit des deux côtés de l'angle *z*, suivant des directions croisées *st*, *ur*, et il est visible que ce décroissement se fait aussi par des soustractions de molécules doubles des véritables. Si ce dernier décroissement était pris pour le principal, on devrait le considérer comme ayant lieu par une rangée, puisque *zo*, qui en représente l'effet dans le sens de la hauteur, est égale à une arête de molécule. Dans cette hypothèse, on raisonnerait des décroissemens suivant *uo*, *so*, qui deviendraient auxiliaires, comme nous avons fait des décroissemens sur les angles HAA′, GAA′ (fig. 124), à l'égard de celui qui agit sur l'angle A de la face GAH, c'est-à-dire qu'il faudrait supposer aux décroissemens suivant *uo*, *so*, une mesure particulière dans le sens de la largeur, soumise à la condition que les prolongemens du décroissement principal doivent s'assimiler à l'effet de ce dernier. Mais telle serait cette mesure que je ne m'arrêterai point ici à déterminer, que la construction de la figure 124 offrirait de même l'équivalent des décroissemens auxiliaires. Si, au contraire, on regardait comme décroissement principal celui qui agit suivant l'une des directions *ou*, *os*, par une rangée de molécules doubles, la mesure du décroissement auxiliaire suivant les directions *st*, *ur*, se trouverait modifiée convenablement, pour que la condition à laquelle doivent être soumis les prolongemens fût remplie.

Or, il est à remarquer que les faces produites en vertu du décroissement qui agit sur l'angle *gzh*, se rejettent en sens contraire de la face *gzhy*, sur laquelle naît ce décroissement, tandis que les faces qui résultent du décroissement sur les angles latéraux *aoh*, *aog*, s'étendent directement en dessus des faces auxquelles appartiennent ces angles, et cette considération doit faire donner la préférence à ces derniers décroissemens, comme étant ceux dont le dodécaèdre porte le plus visiblement l'empreinte.

155. Je rappellerai ici que la théorie n'est autre chose que l'art de représenter d'une manière qui s'accorde avec l'observation l'arrangement des molécules d'où dépendent les formes secondaires ; et lorsque nous sommes libres de choisir, comme ici, entre divers modes d'arrangement dont chacun peut également fournir les données du problème à résoudre, ce que nous avons de mieux à faire est de conformer notre choix aux conceptions dont notre esprit s'accommode le mieux.

J'ai promis de donner une application des principes qui viennent d'être développés. Je prendrai comme exemple la variété de chaux carbonatée que j'appelle *prismatique*, dont les bases naissent d'un décroissement par une rangée sur les angles supérieurs du rhomboïde primitif, et les pans d'un décroissement par deux rangées sur les angles inférieurs; et je décrirai l'ordre de la structure, à l'aide d'une méthode synthétique analogue à celle que j'ai déjà employée par rapport à d'autres formes secondaires.

156. On voit (fig. 127) le prisme hexaèdre régulier de cette variété circonscrit à son noyau rhomboïdal, et dont l'axe est égal à celui de ce noyau. Cette condition est nécessaire pour ramener l'ordre de la structure du prisme à sa limite. Chaque côté du noyau est censé être composé de dix-huit arêtes de molécules intégrantes. La figure 128 représente la face LXYZ (fig. 127) du noyau, recouverte par la série des lames de superposition qui composent la partie correspondante du prisme. Pour bien concevoir les effets des variations que subissent ces lames, il faut imaginer que les plans ABCDEFGH, A'B'C'D'E'F'G'H' qui représentent leurs faces supérieures, se relèvent les uns au-dessus des autres d'une quantité égale à une épaisseur de molécule. Nous désignerons les lames dont il s'agit par les mêmes lettres.

157. Les lignes EF, E'F', MN, M'N', représentent les directions des nouveaux bords que le décroissement qui donne les bases fait naître sur les lames de

superposition, d'où il suit que ces bords se dépassent mutuellement d'une quantité égale à une demi-diagonale de molécule. Les lignes AB, A'B', IK, I'K', etc., sont les directions des nouveaux bords que le décroissement qui produit les pans fait naître sur les mêmes lames, et dont les distances respectives dans le sens de la largeur sont mesurées par une diagonale entière de molécule. Ces deux décroissemens suffisent pour déterminer le prisme. Les variations que nous allons considérer sont simplement auxiliaires, et l'on pourrait en faire abstraction, en leur substituant les prolongemens des faces produites par les deux décroissemens directs.

158. Dans la première lame de superposition ABCDEFGH, les deux rangées indiquées par BC, AH, et adjacentes aux bords YZ, YX, du noyau, sont destinées à le faire croître vers les parties de ces mêmes bords sur lesquelles le décroissement n'agit pas. Il en est de même des deux rangées indiquées par DE, GF, et adjacentes aux bords ZU, XU. Les décroissemens qui ont lieu suivant les directions CD, HG, font la fonction d'auxiliaires à l'égard de ceux qui agissent directement sur les angles YZK, YXH (fig. 127) du noyau, pour en prolonger les effets dans les intervalles compris entre Z et *fd* d'une part, et entre X et *lm* de l'autre. On voit à la simple inspection des petits espaces $C\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\zeta D$, que le décroissement suivant CD laisse à vide, qu'il se fait par des soustractions de molécules doubles. De plus, la di-

stance entre le bord CD et le point de départ Z, indique qu'il a lieu par une demi-rangée des mêmes molécules. C'est une suite de ce que cette distance n'est que la moitié de celle qui est entre le point ζ et le bord CD. On doit en dire autant du décroissement dirigé suivant HG.

Les mêmes considérations s'appliquent à la seconde lame A′B′C′D′E′F′G′H′, à l'égard de laquelle il nous suffira de remarquer que ses nouveaux bords C′D′, H′G′, qui sont l'effet du décroissement auxiliaire, sont dépassés par CD, HG, qui leur correspondent sur la première lame, d'une quantité égale à une demi-rangée de molécules doubles, conformément à ce qui a été dit relativement au résultat que représentent les figures 124 et 125.

Les rangées additionnelles analogues à celles qui sont indiquées par BC, B′C′, AH, A′H′, disparaissent sur la troisième lame IKLMNOI et sur les suivantes, mais l'addition des rangées parallèles aux bords ZU, XU, du noyau, et indiquées par LM, NO, L′M′, N′O′, etc., continue jusqu'à la sixième lame P′R′S′V′, exclusivement, en sorte que les figures de cette lame et de celles qui suivent sont des trapèzes, et la onzième lame *imlk*, qui est la dernière, se réduit à une simple rangée dont les molécules extrêmes sont indiquées par ϑ, ω.

159. Il se présente ici une considération qui ne doit pas être omise. Les points K, I, K′, I′, R, P, etc., situés aux angles inférieurs des lames de superposi-

tion, en les supposant réellement existans, seraient sur les directions des bords longitudinaux $ff'$, $ll'$ (fig. 127), en sorte que ces bords seraient composés d'une suite d'angles solides dont les sommets se confondraient avec les points dont il s'agit. Mais ces points sont nuls sur le résultat de la cristallisation. Par exemple, le point K (fig. 128) disparaît par une suite du vide qui existe à l'endroit du triangle $\delta K\sigma$, en sorte que la partie saillante située sur le côté de ce cristal est une arête $\delta\sigma$ composée de trois arêtes de molécule. La même chose a lieu par rapport aux autres points K', R, R', $b$, etc.

Or, les arêtes $\delta\sigma$, $\xi\tau$, et les autres qui leur correspondent sur les lames suivantes, étant parallèles au côté YZ, et les distances qui les séparent étant mesurées par un côté $R\sigma$ de molécule, nous en conclurons que la suite de ces arêtes compose une facette presque infiniment étroite produite en vertu d'un décroissement par une rangée sur le bord YZ (fig. 127).

160. Il suit de là que les six pans dus au décroissement par deux rangées sur l'angle inférieur sont séparés par six autres pans qui dérivent d'un décroissement par une rangée sur les bords inférieurs, mais qui, à cause de leur largeur presque infiniment petite, échappent à nos yeux. Il semble cependant que l'action qui donne naissance à ces derniers pans détermine dans les molécules une tendance à de nouvelles soustractions, qui prolongent de part et d'autre l'effet du décroissement que nécessite l'ordre de la struc-

ture. Car en observant à l'aide de la loupe, ou même à la vue simple, les parties situées à la jonction des pans $lff'l'$, $dff'd'$, etc., on y distingue souvent six autres pans extrêmement étroits, en sorte que le prisme est réellement dodécaèdre. Mais on néglige ces ébauches dans la distribution méthodique des variétés, et l'on ne donne le nom de *péridodécaèdre* qu'à celle qui offre les mêmes pans avec des dimensions très sensibles.

Les lames de superposition qui se recouvrent l'une l'autre en partant de la face UXYZ du noyau (fig. 128), sont successivement de trois figures différentes, savoir, celle de l'octogone, comme ABCDEFGH, celle de l'hexagone, comme IKLMNO, et celle du trapèze, comme P'R'S'V'. Cette gradation est l'inverse de celle que présente la division mécanique, en partant des sections qui se font parallèlement à l'arête $lf$ (fig. 127), et aux autres qui sont tournées vers les faces du noyau. On aura une idée de cette dernière en reprenant ce que nous avons dit du résultat d'une opération semblable faite sur le prisme hexaèdre qu'on voit figure 33, pl. 3. Nous avons eu d'abord la figure du trapèze *loos* (fig. 34), ensuite est venue celle du pentagone AE*oo*I (fig. 35), parce que nous supposions au prisme une hauteur plus grande que celle qui a lieu dans le cas de la limite représentée (fig. 127). Mais si l'on ramène l'opération à cette limite, le pentagone se change en hexagone, par le retranchement de son angle supérieur A (fig. 35), Cette dernière figure subsiste dans les diverses lames jusqu'au terme indiqué (fig. 36), où il faut encore supposer que l'angle A soit remplacé par un côté. Au-delà de ce terme, les hexagones se quittent par les angles inférieurs *o*, *o*, et leur séparation détermine la formation de deux nouveaux côtés à la place de ces angles, ce qui convertit l'hexagone en octogone.

### *Des noyaux hypothétiques.*

161. L'exposé que j'ai fait, dans les articles précédens, des diverses manières d'agir des lois de décroissemens auxquelles est soumise la structure des cristaux, suffirait déjà pour faire juger du grand nombre de variétés auxquelles un même noyau est susceptible de donner naissance, et ce que j'àjouterai dans la suite sur les combinaisons de ces lois dans la production d'un même cristal, fera encore mieux concevoir combien serait vaste le tableau qui présenterait la série de toutes ces variétés, même en se bornant à y placer les résultats les plus ordinaires des lois de décroissemens. Mais la théorie va beaucoup plus loin, et le développement de ses principes conduit à une autre conséquence non moins remarquable, savoir, que cette fécondité qui semblerait devoir être réservée exclusivement à la forme primitive donnée par la division mécanique, se communique à toutes les variétés du même genre, c'est-à-dire, par exemple, que si la forme dont il s'agit est un rhomboïde, comme

dans la chaux carbonatée, et si parmi tous les divers rhomboïdes qui peuvent en dériver, tels que l'équiaxe, l'inverse, le contrastant, etc., on en choisit un à volonté, et qu'adoptant ce rhomboïde pour noyau hypothétique, on le suppose composé de molécules qui lui soient semblables, on pourra obtenir toutes les autres formes par des lois régulières de décroissemens, soit sur les bords, soit sur les angles. La véritable forme primitive changera alors elle-même de rôle, pour aller prendre sa place parmi les formes secondaires. Quelques exemples suffiront pour donner une idée de cette sorte de souplesse des lois de décroissemens pour s'adapter aux différens types qu'on leur présente.

162. Choisissons pour noyau hypothétique le rhomboïde inverse de la chaux carbonatée. Si l'on suppose qu'il subisse un décroissement par une rangée sur ses bords supérieurs *ay*, *au*, *at* (fig. 129), c'est-à-dire semblable à celui qui donne l'équiaxe du véritable noyau, le rhomboïde secondaire *abfa'* prendra la forme de ce même noyau.

163. Le même décroissement transporté sur le rhomboïde contrastant *ama'o* (fig. 130), produira pour forme secondaire le rhomboïde inverse qui faisait la fonction de noyau dans l'exemple précédent (fig. 129). On voit ici, entre les rhomboïdes les plus ordinaires, de la chaux carbonatée, dont l'un est le primitif et les autres sont ceux qui en dérivent par

les décroissemens les plus simples, une filiation en vertu de laquelle l'inverse devient l'équiaxe du contrastant pris pour noyau hypothétique, le primitif devient celui de l'inverse, et le terme ultérieur étant celui qui répond au véritable noyau, le rhomboïde qu'il produit est aussi le véritable équiaxe. On peut continuer la série au-dessus et en dessous des termes précédens. Par exemple, le terme qui vient après l'équiaxe en montant, et qui serait par rapport à lui ce qu'il est à l'égard du véritable noyau, répond à un rhomboïde semblable à celui qui résulterait d'un décroissement immédiat par deux rangées sur les angles supérieurs du véritable noyau, et dont l'analogue existe dans la variété binaire de fer oligiste. Nous avons jusqu'ici cinq termes parmi lesquels le véritable nóyau occupe le milieu, et les deux suivans de part et d'autre en dérivent immédiatement par des décroissemens très simples. Mais dans les termes ultérieurs les décroissemens qui remplacent ces derniers s'écartent de leur simplicité, et bientôt ils deviennent inadmissibles par leur complication.

164. Le rhomboïde inverse considéré de nouveau comme noyau hypothétique produira un rhomboïde $at'a'u'$ (fig. 131) semblable à l'équiaxe (fig. 38, pl. 3), en vertu d'un décroissement par deux rangées sur les angles supérieurs $a$ (fig. 131). Si le décroissement se fait par une seule rangée sur les angles latéraux $u$, $t$ (fig. 132), il en résultera un rhomboïde AA' sem-

blable au contrastant (fig. 42, pl. 3). Si, en restant toujours sur les angles latéraux *u*, *t* (fig. 133), il agit par deux rangées, le résultat sera un dodécaèdre AA′ semblable au métastatique.

Enfin, si les bords latéraux D, D (fig. 134), du même rhomboïde hypothétique deviennent les lignes de départ d'un décroissement par trois rangées, on aura un nouveau dodécaèdre *ss′*, fait à l'imitation de celui que je nomme *paradoxal*, et qui résulte d'un décroissement par une rangée de molécules doubles sur les angles latéraux du véritable noyau.

165. Je vais insister sur ce dernier résultat, parce qu'il offre un exemple d'un fait remarquable, qui a également lieu pour tous les décroissemens intermédiaires, soit sur les angles latéraux, soit sur les angles supérieurs et inférieurs, et d'après lequel on peut les considérer sous un point de vue qui les ramène à la simplicité des décroissemens ordinaires. Cette analogie est d'abord fondée sur ce que, dans ceux qui sont intermédiaires, le résultat est en général un dodécaèdre à triangles scalènes. Or, on peut toujours supposer un rhomboïde inscrit dans chacun de ces dodécaèdres, comme le véritable noyau l'est dans le métastatique. Nous avons vu que les six plans coupans qui mettent ce noyau à découvert passent, l'un par les arêtes EO, OI (pl. 3, fig. 46), un second par les arêtes OI, IK, un troisième par les arêtes IK, KG, et ainsi des autres. Maintenant, si l'on substitue au métastatique un dodécaèdre quelconque, produit par

un décroissement intermédiaire sur tels angles qu'on voudra, et dans lequel le véritable noyau sera par conséquent inscrit d'une manière différente, on pourra toujours concevoir, au moins hypothétiquement, des plans coupans qui passent par les arêtes analogues à celles que nous venons d'indiquer, et se représenter par la pensée le rhomboïde dont les bords inférieurs coïncident avec ces arêtes. Or, le fait dont j'ai parlé consiste en ce que ce rhomboïde est toujours une des formes secondaires qui peuvent naître du véritable noyau, et en ce que le rhomboïde dont il s'agit, étant pris pour noyau hypothétique, est susceptible de produire à son tour le dodécaèdre, en vertu d'un décroissement ordinaire sur ses bords inférieurs.

Le dodécaèdre paradoxal nous offre un résultat de ce genre. Son noyau hypothétique est semblable au rhomboïde inverse, qui est le produit d'un décroissement par une seule rangée, et celui qui donne le dodécaèdre rapporté à ce rhomboïde a lieu par trois rangées. Dans les autres décroissemens intermédiaires le noyau hypothétique est tantôt le rhomboïde équiaxe, tantôt le contrastant, ou quelqu'autre qui dérive du véritable noyau par une des lois de structure les plus ordinaires, et qui semble communiquer le même caractère de simplicité à la loi d'où résulte le dodécaèdre dont on le suppose le générateur.

Je n'ai parlé que des noyaux hypothétiques originaires du rhomboïde. Mais on peut également par des considérations du même genre, en substituer aux autres formes primitives, dans le cas des décroissemens intermédiaires. On en trouvera de nombreux exemples dans le cours de cet Ouvrage.

166. Il y a donc cette différence entre les deux espèces de décroissemens, que ceux qui suivent une loi ordinaire sont simples par eux-mêmes, au lieu que les autres étant compliqués, lorsqu'on les considère immédiatement, se résolvent en deux décroissemens ordinaires, dont l'un fait dépendre le noyau hypothétique du véritable, et le second établit la relation entre la forme proposée et le noyau hypothétique. Dans ces sortes de cas, la cristallisation semble ne s'écarter de la route qui aboutit à la simplicité que pour y revenir par une voie différente. Le cristallographe profite de ce circuit pour calculer par une méthode plus facile et plus expéditive les résultats des décroissemens intermédiaires. Elle consiste à déterminer d'abord la forme du noyau hypothétique, et la loi du décroissement ordinaire qui produit le dodécaèdre rapporté à ce noyau, ainsi que les incidences mutuelles de ces faces.

La même méthode lui fournit ensuite des données à l'aide desquelles une formule le conduit tout d'un coup à la détermination du décroissement intermédiaire qui agit sur le véritable noyau. Au moyen de cet artifice, il écarte les difficultés et les longueurs dans lesquelles l'aurait entraîné la solution directe du problème.

167. Dans toutes ces modifications où les formes

secondaires semblent tour à tour rivaliser avec la forme primitive, le résultat de la division mécanique qui conduit à cette dernière subsiste sans altération, et sa constance garantit l'unité d'espèce. Mais il y a mieux, et, dans l'hypothèse où la structure des cristaux calcaires que je continue de prendre pour exemple, n'offrirait aucun indice de joints naturels, des considérations puisées dans la théorie elle-même pourraient encore faire reconnaître la forme primitive. On remarquerait d'abord que le rhomboïde de $104^d\frac{1}{2}$, lorsque son axe est situé verticalement, a ses faces inclinées de $45^d$ à un plan horizontal et à un plan vertical, ce qui lui imprime le caractère d'une limite, au-delà et en deçà de laquelle la différence entre les deux inclinaisons varie en sens contraire. Or, cette propriété qui fait ressortir le rhomboïde de $104^d\frac{1}{2}$ entre tous les autres, paraîtrait déjà indiquer qu'il en est aussi distingué comme étant le type de l'espèce à laquelle il appartient. De plus, nous avons vu que dans la série des rhomboïdes dont chacun est susceptible de naître du précédent, comme équiaxe, celui de $104^d\frac{1}{2}$ tient le milieu entre deux rhomboïdes plus obtus et deux rhomboïdes aigus, qu'il produit tous immédiatement à l'aide des lois les plus ordinaires de décroissement. C'est aussi celui dont dérivent en général ceux que l'on rencontre le plus fréquemment dans la nature par des lois d'une simplicité dont tout autre s'écarterait plus ou moins si on le substituait à ce même rhomboïde. Ajoutons à ces caractères que les stries qui sillonnent les faces d'un certain nombre de cristaux calcaires, ont des directions qui s'accordent avec la condition que leur noyau soit le rhomboïde de $104^d \frac{1}{2}$, et nous en conclurons que la théorie seule, secondée des indices qu'offre l'aspect extérieur des cristaux, pourrait faire deviner la véritable forme primitive de l'espèce dont il s'agit, sans qu'il fût nécessaire de pénétrer, pour l'apercevoir, dans le mécanisme de la structure. Les mêmes considérations s'appliquent à beaucoup d'autres espèces de minéraux, dont les variétés sont assez nombreuses pour se prêter à une comparaison d'où l'on puisse tirer des inductions analogues à celles qui viennent d'être exposées.

168. Après tout, si cette multiplicité d'hypothèses qui naissent du développement de la théorie pouvait être regardée par quelques minéralogistes comme un luxe qui la surcharge, plutôt que comme une véritable richesse, on pourrait répondre que nous ne sommes pas les maîtres d'arrêter le cours des conséquences auxquelles nous conduit l'observation des phénomènes de la nature, et qu'en étudiant les résultats des lois auxquelles la sagesse et la puissance de son auteur l'ont soumise, nous devons nous efforcer de les envisager sous toutes leurs faces, d'en saisir tous les rapports mutuels, et nous servir de nos théories et de nos méthodes de calcul, comme d'instrumens propres à étendre la portée de notre esprit, à mesure que le point de vue lui-même s'agrandit.

## *De la Loi de Symétrie.*

169. Les lois de décroissemens dont les actions sur les bords et sur les angles des faces qui terminent les formes primitives des minéraux font varier de tant de manières la cristallisation de ces corps, sont subordonnées à une autre loi, à laquelle j'ai donné le nom de *loi de symétrie*, et qui se fait remarquer par sa généralité et par son uniformité, au milieu des nombreuses modifications que subissent les premières. Elle consiste en ce qu'une même espèce de décroissement se répète sur toutes les parties du noyau dont telle est la ressemblance, que l'on peut substituer l'une à l'autre, en changeant à l'égard de l'œil la position de ce noyau, sans qu'il cesse de se présenter sous le même aspect. J'ai donné à ces parties le nom d'*identiques*, et je vais avant tout fixer d'une manière plus précise l'idée qu'on doit attacher à ce mot.

Dans les applications de la théorie, l'effet d'un décroissement se détermine par la quantité dont les diverses lames de superposition appliquées sur une même face du noyau se dépassent mutuellement, soit vers les bords, soit vers les angles de cette face. Or, on dit de deux bords, ou d'un plus grand nombre, qu'ils sont identiques lorsqu'ils ont la même longueur et que les faces, à la jonction desquelles ils sont situés, sont également inclinées entre elles. A l'égard des angles, je les appelle *identiques*, lorsqu'ayant leurs côtés respectivement égaux, ils sont du même nombre de degrés, et font partie d'angles solides égaux. J'observerai à ce sujet que les diverses faces qui, dans une forme primitive, concourent à la formation d'un même angle solide, ne vont point au-delà de trois; du moins peut-on toujours les réduire à ce nombre (1).

Dans tout ce qui précède, nous avons comparé entre eux les bords ou les angles situés sur une même face. Maintenant, si nous comparons entre elles les diverses faces de la forme primitive, il sera évident que celles qui sont identiques, c'est-à-dire égales et semblables, doivent aussi s'assimiler les unes aux autres par les décroissemens que subissent les lames de superposition qui les recouvrent.

Par une suite nécessaire des mêmes principes, les bords ou les angles non identiques ne sont pas astreints à la répétition des mêmes décroissemens; c'est-à-dire que les uns peuvent en subir qui diffèrent de ceux auxquels les autres sont soumis, ou même rester libres, comme dans le cas où ils existeraient sur un noyau qui ne fît que s'accroître sans changer de forme. Je vais citer quelques exemples, pour mieux faire concevoir tout ce qui vient d'être dit.

---

(1) Cette réduction a lieu relativement à un octaèdre qui fait la fonction de forme primitive, au moyen de la substitution d'un parallélépipède à cet octaedre, ainsi que je l'expliquerai dans la suite. Les angles solides qui dans celui-ci résultaient de la réunion de quatre plans, se trouvent alors convertis en angles trièdres.

170. Dans un rhomboïde (fig. 135, pl. 11) les bords supérieurs B, B, sont identiques; il en est de même des bords inférieurs D, D. Il y a aussi identité entre les angles latéraux E, E; mais il n'en existe pas entre les bords B, D, non plus qu'entre l'angle supérieur A et l'angle inférieur *e*; d'où l'on voit que les lettres indicatives des bords et des angles du solide sont assorties à la loi de symétrie; et le même accord se retrouve dans la notation de toutes les autres espèces de formes primitives.

Soit maintenant PMT (fig. 136) un prisme droit rectangulaire faisant la fonction de noyau, et dont par conséquent les dimensions B, C, G, diffèrent entre elles. Il est visible que les bords, qui étant pris deux à deux portent une même lettre, sont identiques. Il y a aussi identité entre les quatre angles de chaque face. Mais l'angle CAB, par exemple, n'est pas identique avec l'angle CAG, quoiqu'ils soient droits tous les deux, parce que le côté B, qui appartient au premier, diffère en longueur du côté G, qui concourt à la formation du second, en sorte que l'égalité n'existe que relativement au côté C, qui est commun à l'un et à l'autre.

Dans la même hypothèse, aucune des faces P, M, T, n'étant identique avec l'une des deux autres, si l'on conçoit un décroissement relatif à des lames de superposition qui s'appliquent, par exemple, sur la face M, et dont l'effet soit de produire une facette à la place de G, rien n'exigera le concours d'un second décroissement relatif à des lames appliquées en même temps sur la face T, et qui produirait une autre facette inclinée en sens contraire de la première. Les trois faces sont, à cet égard, indépendantes l'une de l'autre, et la loi de symétrie demande seulement que tout ce qui a lieu par rapport à chacune d'elles se répète sur celle qui lui est opposée et parallèle.

171. Il n'en sera pas de même si les faces latérales M, M′ (fig. 137) du prisme sont identiques, ou, ce qui revient au même, si la base est un carré. Alors le même décroissement qui agirait, par exemple, à la gauche de G, et dont le résultat serait une facette plus inclinée sur M que sur M′, se répétera à la droite de la même arête, pour produire une seconde facette dont l'incidence sur M′ sera égale à celle de la première facette sur M. Il pourrait cependant arriver que, dans le même cas, l'arête G ne fût remplacée que par une seule facette; mais alors celle-ci ferait un angle de 135$^d$ avec l'une et l'autre des faces M, M′; on pourrait la considérer comme étant l'effet de deux décroissemens simultanés par une rangée, qui agiraient des deux côtés de l'arête G, de manière que les deux facettes qui en résulteraient coïncidassent sur un même plan.

Enfin, si le solide qui fait la fonction de noyau est un cube, il suffira qu'un décroissement ait lieu sur un de ses bords ou sur un de ses angles, pour qu'il se répète sur tous les autres, qui sont, pour ainsi dire, à l'unisson du premier. Il n'y aura pas plus de distinction entre les bords ou les angles dont il s'agit relativement aux effets des décroissemens, qu'il n'y en a par rapport à l'aspect géométrique de la forme elle-même, qui permet de les prendre indifféremment l'un pour l'autre.

172. Il est facile de concevoir, d'après tout ce que je viens de dire, comment la loi de symétrie, en agissant sur un nombre plus ou moins grand de parties identiques, suivant la diversité soit des rapports qui ont lieu entre les dimensions des solides primitifs, soit des positions respectives de ces faces, doit nécessairement imprimer les caractères de ces solides aux formes secondaires qui en dérivent. Il en résulte que, dans un grand nombre de cas, le seul aspect des formes dont il s'agit suffit pour indiquer l'espèce de solide à laquelle appartient la forme primitive.

Il existe une variété de chaux anhydro-sulfatée que représente la figure 138, et dont la forme est un prisme droit octogone, dans lequel les pans M, T, sont perpendiculaires entre eux, et les faces *r*, *r*, qui les séparent font avec M un angle d'environ $140^d$, et avec T un angle de $130^d$ à peu près. Si l'on prolonge les pans *r*, *r*, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, le prisme octogone se trouvera converti en prisme droit rhomboïdal de $100^d$ et $80^d$. Si l'on suppose que la forme primitive soit semblable à ce dernier prisme, il est facile de concevoir que les pans M, T, résulteront de deux décroissemens par une simple rangée sur les deux bords longitudinaux adjacens aux angles de sa base. Si au contraire on adopte comme forme primitive un prisme semblable à celui qui résulterait du prolongement des pans M, T, dans cette hypothèse, les pans *r*, *r*, résulteront d'un décroissement sur ses quatre bords longitudinaux, dont la mesure dépendra du rapport entre les côtés de la base du même prisme. Or, la loi de symétrie indique que cette base ne peut être un carré ; car si cela était, les pans *r*, *r*, ne pourraient être le résultat d'un décroissement par une simple rangée ; autrement elles feraient un angle de $135^d$ avec chacun des pans adjacens M, T. Elles seraient donc produites par une autre loi, et dans ce cas elles devraient se répéter vers les faces T, en faisant avec elles un angle de $140^d$, égal à l'incidence de *r* sur M, et avec cette dernière face un angle de $130^d$ égal à l'incidence de *r* sur T. La forme primitive ne peut donc être qu'un prisme à bases rhombes, ou un prisme à bases rectangles. Or, la division mécanique donne des joints parallèles les uns aux pans M, T, et les autres aux pans *r*, *r* ; mais les premiers sont incomparablement plus nets et plus faciles à obtenir, et cette considération jointe à celles que fournit une autre forme secondaire que je m'abstiens ici de décrire, détermine la préférence en faveur du prisme à bases rectangles, comme forme primitive. La théorie donne pour le rapport entre les dimensions de C, B (fig. 136), de la base de ce prisme, celui de $\sqrt{10}$ à $\sqrt{7}$, qui diffère peu de celui des nombres 6 et 5, et d'après ce rapport, le décroissement qui produit les pans *r*, *r*, a lieu par une simple rangée.

173. Je citerai pour second exemple la variété d'idocrase que l'on voit (fig. 139), et que j'ai nommée *idocrase soustractive*. Sa forme est celle d'un prisme à seize pans, terminé par une face P perpendiculaire à l'axe, et par quatre faces obliques *c*, *c*, etc., adjacentes aux bords de la première. Parmi les pans du prisme, il y en a huit, savoir, ceux qu'indiquent les lettres M, *d*, qui font entre eux des angles de $135^d$, d'où il suit que, soit qu'on prolonge les quatre pans M ou les pans *d*, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, en masquant tous les autres, on aura la surface latérale d'un prisme dont la coupe transversale, prise par un plan perpendiculaire à l'axe, sera un carré. Maintenant, si l'on adopte comme primitifs les pans M, M, dans ce cas les pans *d*, *d*, qui font avec eux des angles égaux de $135^d$, seront nécessairement le résultat d'un décroissement par une rangée sur les bords longitudinaux du prisme auquel appartiennent ces pans; le même raisonnement s'applique à l'hypothèse dans laquelle on considérerait les pans *d*, *d*, comme primitifs, et les pans M, M, comme secondaires. D'une autre part, le goniomètre fait voir que les pans *h*, *h*, situés des deux côtés d'un même pan M sont également inclinés sur lui, et que de même les deux pans *h*, *h*, situés de part et d'autre d'un même pan *d*, font avec lui des angles égaux. Or, cette nouvelle observation prouve encore que chacun des deux prismes a pour coupe transversale un carré; car cette figure exige

que les décroissemens qui donnent les faces *h*, *h*, se répètent de part et d'autre de l'arête longitudinale qui sert à ces décroissemens de ligne de départ.

Maintenant, si l'on examine les faces *c*, *c*, du sommet, on observe qu'elles naissent sur des arêtes $x$, $x'$, perpendiculaires aux arêtes longitudinales $z$, $z'$, c'est-à-dire situées dans le sens des bords de la coupe transversale du prisme *d*, *d*, d'où il suit que, si l'on adopte ce prisme pour forme primitive, le décroissement qui donne les faces *c*, *c*, aura lieu sur les bords de la base. D'une autre part, ces faces étant également inclinées les unes sur les autres, il en résulte que dans l'hypothèse du prisme M, M, comme forme primitive, elles doivent naître sur les angles de la base; et puisqu'elles font entre elles des angles égaux, les bords de la base du prisme *d*, *d*, sont identiques, et il en est de même des angles de la base du prisme M, M; d'où l'on conclura que chacune des deux bases est un carré situé perpendiculairement à l'axe, ou parallèlement à la face P. D'ailleurs ce prisme ne peut être un cube, autrement les décroissemens qui auraient lieu dans les lames de superposition appliquées sur la face parallèle à P, différeraient de ceux qui se rapporteraient aux faces parallèles à *d*, *d*, ou à M, M, ce qui serait contraire à la loi de symétrie. La forme primitive est donc nécessairement un prisme droit à bases carrées, dont les faces latérales sont des rectangles. Le résultat de la division mécanique joint aux autres considérations fait connaître que ce prisme est celui auquel appartiennent les pans M, M, et que représente la figure 140, et la théorie prouve que dans ce même prisme les pans *d*, *d* (fig. 139), étant, comme on l'a dit, le résultat d'un décroissement par une rangée sur les bords G, G (fig. 140), celui qui lui succède pour produire les pans *h*, *h*, (fig. 139), a lieu par deux rangées sur les mêmes bords, et celui qui donne les faces *c*, *c*, agit par deux rangées sur les angles A, A (fig. 140), de la base. Le rapport entre le côté B de la base et la hauteur G est à peu près celui de sept à huit.

174. L'exemple qui va suivre me sera fourni par les cristaux d'amphibole. On connaît deux variétés de cette substance, représentées (fig. 141 et 142), dont l'une, que j'appelle *bisunitaire*, a la forme d'un prisme hexaèdre terminé par deux faces *l*, *l*, qui se réunissent sur une arête ϑ oblique à l'axe. La seconde, qui porte le nom de *triunitaire*, ne diffère de celle-ci que par l'addition des pans *s*, qui rendent le prisme octogone. Ces pans font des angles droits avec les pans *x*; les pans M, M, dont l'incidence est de $124^d 34'$, sont inclinés sur les pans *s* d'environ $152^d$, et sur les pans *x* d'environ $118^d$. En appliquant ici le raisonnement qui a été fait à l'égard de la variété périoctogone de chaux anhydrosulfatée que l'on voit (fig. 138), on en conclura que les formes dont il s'agit sont susceptibles d'être rapportées soit au prisme M, M (fig. 142), dont la coupe transversale est un rhombe, soit à un prisme dont les pans seraient parallèles à *s*, *x*, et dont la coupe transversale aurait ses côtés perpen-

diculaires entre eux, et il sera facile de voir que cette coupe est nécessairement un rectangle, et non un carré : car, dans ce dernier cas, le prisme qui dériverait du précédent, comme forme secondaire, ne pourrait devenir hexaèdre, comme celui de la fig. 141; et dans l'hypothèse où il deviendrait octogone, comme on le voit (fig. 142), tous ses pans feraient entre eux des angles de 135$^d$. Je m'abstiens de développer ces conséquences, qui s'offrent comme d'elles-mêmes. D'après tout ce qui a été dit ci-dessus, le prisme qui ferait la fonction de forme primitive ne pourra donc être que rectangulaire (fig. 143), ou rhomboïdal (fig. 144) (1). D'une autre part, la seule inspection des sommets indique que sa base est oblique à l'axe. Car, supposons pour un instant qu'il soit droit, les faces *l*, *l* (fig. 141), qui se réunissent sur une arête située obliquement, ne pourront résulter d'un décroissement ordinaire, soit sur les bords B, B, du prisme droit rectangulaire (fig. 143), soit sur les angles E, E, de la base du prisme rhomboïdal (fig. 144), puisque dans l'un et l'autre cas leur arête de jonction serait parallèle à la base, ou, ce qui revient au même, ferait un angle droit avec l'axe. Maintenant, si l'on fait attention que les arêtes $\epsilon$, $\epsilon$ (figure 142), à la

(1) Quand même l'une et l'autre des formes prismatiques dont il s'agit ne seraient qu'hypothétiques, les conséquences du raisonnement que je fais n'en seraient pas moins fondées. Cette remarque s'étend également à toutes les autres formes dont j'ai parlé précédemment

jonction des faces *l*, *l*, et du pan *s*, ou à la jonction des mêmes faces et des pans M, M (fig. 141), sont inclinées de gauche à droite, on en conclura que les lignes de départ du décroissement qui donne les faces *l*, *l*, ont des directions telles que *kl*, *k'l'* (fig. 143), sur le prisme rectangulaire, et telles que *ns*, *n's'* (fig. 144), sur le prisme rhomboïdal. Or, quelle que soit l'espèce de décroissement d'où résultent les faces *l*, *l* (fig. 141), la loi de symétrie exigera que celles-ci se répètent du côté opposé, à cause de l'identité des angles situés de ce côté avec l'angle CAG (fig. 143), ou BE*s* (fig. 144); c'est-à-dire que le sommet devra offrir quatre faces, dont deux seront inclinées en sens contraire de la même quantité que les deux autres.

175. La figure 145 représente une variété de la même substance, nommée *amphibole dodécaèdre*, dont la forme est un prisme hexaèdre semblable à celui de la variété *bisunitaire*, terminé par un sommet à trois faces, dont l'une naît sur l'arête qui répond à $\epsilon$, et les deux autres sur des arêtes dont les directions correspondent à celles des lignes *kl* (fig. 143), *ns* (fig. 144), excepté qu'elles sont situées sur le pan opposé à M (fig. 143), ou sur les pans opposés à M, M (fig. 144.) Or, par une suite nécessaire des mêmes principes, la face P (fig. 145) devrait se répéter vers la partie postérieure des sommets, et les faces *r*, *r*, devraient aussi avoir leurs analogues dans la partie antérieure; ce qui achève de prouver que le prisme est oblique.

C'est à la division mécanique qu'il appartient de déterminer les positions des pans de la forme primitive. Or, son résultat indique que les joints naturels latéraux sont parallèles les uns aux pans M, M (fig. 142), les autres aux pans *s*, *x*. Mais la plus grande netteté des premiers, et toutes les considérations théoriques, sont en faveur de l'adoption du prisme rhomboïdal (fig. 144) comme forme primitive. La molécule intégrante sera semblable au prisme triangulaire qui résulte de la sous-division du premier dans le sens de ses deux diagonales; et à l'égard de la base, l'observateur était assuré d'avance qu'elle était oblique; mais la division mécanique fait connaître qu'elle est située parallèlement à la face P (fig. 145).

J'exposerai plus loin, en parlant des dimensions des formes primitives, une propriété géométrique remarquable de celle de l'amphibole, et qui est générale pour tous les prismes rhomboïdaux obliques qui font la même fonction. Je ferai connaître l'influence de cette propriété pour donner à certaines formes secondaires un aspect qui ne fait que déguiser l'action de la loi de symétrie, sans porter aucune atteinte à cette loi.

176. Il est facile de concevoir, d'après tout ce qui vient d'être dit, comment le seul aspect des formes cristallines suffit, dans un grand nombre de cas, pour établir une distinction nette entre les espèces auxquelles ces formes appartiennent. Je vais rendre sensible, par un exemple, l'influence de ce moyen de classification.

La forme la plus ordinaire des cristaux de la mine de fer de l'île d'Elbe, qui, dans ma méthode, fait partie de l'espèce que j'ai nommée *fer oligiste*, est un solide à vingt-quatre faces, représenté (fig. 146), dont six, savoir, P, P', P'', etc., dans l'hypothèse où elles se prolongeraient jusqu'à s'entrecouper, composeraient la surface d'un rhomboïde (fig. 147) peu différent du cube, et qui est le noyau de cette substance métallique. Six autres faces, telles que *s*, *s*, *s* (fig. 146), remplacent trois à trois les sommets du rhomboïde, les douze dernières, *n*, *n*, etc., sont situées deux à deux, aux endroits des angles solides latéraux E, E (fig. 147). Stenon, Romé de l'Isle, Emmerling, et d'autres minéralogistes, ont considéré cette forme comme n'étant autre chose qu'un cube diversement tronqué sur ses angles solides. J'avais moi-même suivi d'abord cette opinion, qui me paraissait se présenter si naturellement, d'après le seul aspect des cristaux, que je m'étais dispensé de la vérifier par la mesure des angles. Une des considérations qui aient le plus contribué à me détromper, a été la diversité des décroissemens qui naissent trois à trois sur les angles supérieurs, tels que A, et seulement deux à deux sur les angles latéraux E, E, tandis que dans l'hypothèse du cube, les uns et les autres auraient dû agir d'une manière uniforme. Averti par cette indication que m'offrait la loi de symétrie, je me suis assuré que les faces P, P' (fig. 147), appartenaient bien réellement à un rhomboïde aigu, et faisaient entre elles, vers un même sommet, un angle de $87^d$ et quelques minutes. Les faces *s*, *s*, proviennent d'un décroissement par deux rangées sur les angles supérieurs du rhomboïde primitif, lequel n'atteint pas sa limite. Quelquefois son effet est complet, et alors il produit un rhomboïde très obtus, dans lequel l'incidence mutuelle de deux faces prises vers un même sommet est de $144^d$. Le décroissement qui donne les faces *n*, *n*, a lieu par trois rangées sur les angles latéraux. S'il parvenait à sa limite, il produirait un dodécaèdre composé de deux pyramides droites hexaèdres. Je donnerai, dans la partie analytique, la démonstration de cette propriété, qui est générale pour tous les rhomboïdes.

177. Je terminerai par un exemple tiré d'une variété de chaux sulfatée à laquelle j'ai donné le nom de *trapézienne*, et que représente la figure 148. On aura une idée de sa forme, en concevant un parallélogramme obliquangle *abcd*, sur les côtés duquel s'élèvent d'une part quatre trapèzes, tels que *l*, *f*, etc., et d'une autre part quatre trapèze *l'*, *f'*, etc., inclinés de la même quantité en sens contraire des premiers. Le solide est terminé par deux parallélogrammes obliquangles, savoir, P et son opposé, parallèles à celui dont les côtés se confondent avec les bases des trapèzes.

En faisant tourner ce solide à la lumière, de manière que le rayon visuel soit dirigé vers une des faces P, on aperçoit à l'intérieur des lamelles sur les quelles se réfléchissent les rayons qui ont pénétré le cristal, de manière que les réflexions se montrent en même temps que celle qui a lieu sur la face P, ce qui prouve qu'il existe dans le cristal des joints naturels parallèles à cette même face. Au défaut de cette observation, on s'assurerait de l'existence des mêmes joints à l'aide de la division mécanique, qui a lieu avec une grande facilité dans le sens que je viens d'indiquer.

En mesurant les inclinaisons des trapèzes, on trouve que celle de *f* et de son analogue sur P, est d'environ $124^d 40'$, et celle de *l* et de son analogue d'environ $108^d$. L'idée que font naître toutes ces différentes observations est que le cristal a pour forme primitive un prisme droit quadrangulaire, dont les bases sont parallèles à P.

Or, il est facile de concevoir que la loi de symétrie s'oppose à ce que ses bases soient des carrés ou des rectangles ou des rhombes : car si elles étaient, par exemple, des rhombes, les décroissemens qui donneraient les trapèzes devraient avoir lieu à la fois sur les quatre bords des mêmes bases, ou sur les quatre angles, en vertu d'une loi ordinaire, puisqu'en les supposant intermédiaires, on aurait huit faces au lieu de quatre. Or, dans le premier cas, les inclinaisons des quatre trapèzes sur P seraient égales. Dans le second cas, il y aurait à la vérité deux inclinaisons différentes; mais la face P deviendrait un carré.

Il reste donc que la base du prisme qui fait la fonction de forme primitive soit un parallélogramme obliquangle. Or, on peut faire ici trois hypothèses différentes, savoir, que les trapèzes résultent d'un décroissement sur les quatre bords du parallélogramme, ou d'un décroissement sur les quatre angles, ou d'un premier décroissement sur deux bords opposés, et d'un second sur deux angles pareillement opposés.

178. Le problème est aisé à résoudre au moyen de la division mécanique. Il ne s'agit que de faire dans le cristal une section parallèle à P, ce qui se fait avec une grande facilité. Soit *gosr* (fig. 149), la projection de la lame détachée par le plan diviseur, et sur laquelle les côtés *os*, *sr*, etc., répondent à ceux qui sont marqués des mêmes lettres (fig. 148). En frappant sur cette lame avec un corps dur, on y voit paraître des fissures qui se croisent, comme les lignes que présente la figure, et qui sont les naissances d'autant de joints naturels perpendiculaires à la face P. Il est visible que tous les petits parallélogrammes qui ont pour côtés les fissures dont je viens de parler, en supposant que ces côtés soient dans le rapport que j'indiquerai bientôt, représentent les bases d'autant de molécules soustractives. On voit de plus que les sous-divisions de la lame, adjacentes aux deux bords *os*, *gr*, se réduisent à de simples triangles. De là on conclura que le décroissement qui donne les trapèzes *l* (fig. 148), a lieu sur deux des angles de la base du solide primitif, tandis que celui d'où résultent les trapèzes *f* naît sur deux côtés. Si l'on sup-

pose que le décroissement sur les angles suive une loi ordinaire, comme l'indique une observation dont je parlerai dans l'instant, les lignes *os* et *gr* seront visiblement parallèles à la diagonale de la base du solide primitif vers laquelle sont tournés les angles qui subissent le décroissement. Il suit de là que chaque triangle *out*, *oxy*, etc., représente une moitié de cette base coupée dans le sens de la même diagonale. Or, si l'on mesure les trois angles d'un des triangles tel que *oxy*, on trouve à peu près $o = 50^d$, $y = 60^d$, $x = 70^d$. De là il suit que les deux côtés *ox*, *yx*, de la base sont inégaux, en sorte que le premier est plus long que l'autre, à très peu près, dans le rapport de 13 à 12, et ainsi la base est un parallélogramme obliquangle, comme l'avait déjà indiqué la loi de symétrie. La position de ce parallélogramme, dans le cristal de la variété trapézienne, répond à celle du parallélogramme AEA′E′, dont le centre se confond avec celui du parallélogramme *gosr*.

179. Les lames de chaux sulfatée, semblables à celle dont il s'agit ici, offrent assez souvent des indices de joints naturels dans le sens de la diagonale menée de A en A′. J'ai observé aussi, dans plusieurs des mêmes lames, des couches très minces d'une matière étrangère dont les directions étaient parallèles à la même diagonale. Il suit de là que les molécules intégrantes de la chaux sulfatée sont des prismes triangulaires qui ont pour bases des triangles scalènes semblables à *otu*. Ces molécules réunies deux à deux composent

les molécules soustractives semblables au prisme quadrangulaire qui fait la fonction de forme primitive.

La figure 150 représente ce même prisme, dans lequel l'incidence des pans M, T, est de $113^d\ 8'$. D'après ce qui a été dit plus haut, les côtés C et B ont pour expressions les nombres 13 et 12, et en déterminant la hauteur G ou H, d'après des considérations fondées sur des principes que j'exposerai dans la partie analytique, on trouve que son expression est le nombre 30. Il en résulte que le décroissement qui donne les trapèzes *f* (fig. 148), a lieu par deux rangées sur les bords C, C′ (fig. 150), et que celui d'où naissent les trapèzes *l*, a lieu par une simple rangée sur les angles E, E′.

On peut juger, par les détails dans lesquels je viens d'entrer, combien les indications de la loi de symétrie peuvent être utiles pour démêler dans l'aspect d'un cristal qui se présente pour la première fois, et qu'il s'agit de déterminer, les traits caractéristiques de l'espèce de solide à laquelle se rapporte sa forme primitive. L'observateur profite de cette sorte d'avis, en donnant à la théorie la véritable direction qu'elle doit suivre pour arriver à une détermination exacte du cristal proposé.

180. Je sais qu'il existe des formes qui paraissent faire exception à la loi de symétrie, par le défaut d'une partie des faces nécessaires pour les compléter. Les cristaux de tourmaline en offrent des exemples remarquables. J'aurai occasion d'en décrire plusieurs,

avec le détail convenable, dans la partie de cet ouvrage où je traiterai de l'application des principes de la cristallographie à la distinction des espèces minérales. Je me bornerai, pour le moment, à citer une des variétés les plus communes, parmi celles que présente la substance dont il s'agit. Sa forme, que l'on voit (fig. 151), est celle d'un prisme qui n'a que neuf pans, dont six sont désignés par *s*, *s*, etc., et les trois autres par *l*, *l*, etc., au lieu de douze qu'exigerait la loi de symétrie. Le sommet supérieur est terminé par six faces, savoir, trois hexagones P, P, P, et trois triangles *o*, *o*, *o*. L'autre sommet offre la répétition des faces P; mais les analogues des faces *o* y sont nulles.

Ici, la cristallisation a été détournée visiblement par une cause étrangère, de la marche qu'elle aurait suivie, si elle était restée abandonnée à elle-même. C'est à l'influence qu'ont eue les forces électriques dans la production des cristaux de cette substance minérale, que doit être attribuée la différence de configuration que présentent les sommets de ces cristaux, qui sont en même temps les parties dans lesquelles résident les actions contraires des pôles qu'ils acquièrent par l'intermède de la chaleur. On ne serait pas mieux fondé à voir ici une exception à la loi de symétrie, qu'à prétendre que la loi de l'équilibre se trouve en défaut, lorsqu'une aiguille d'acier qui, placée sur un pivot, se dirigeait horizontalement, avant d'avoir été touchée par un aimant, s'incline ensuite vers le nord, par une de ses extrémités, après qu'on lui a communiqué le magnétisme.

181. Le dodécaèdre à plans pentagones originaire du cube (fig. 75, pl. 5) dont j'ai donné plus haut la description, s'écarte, par sa structure, de la marche ordinaire des décroissemens relatifs à cette forme primitive, mais il ne déroge réellement pas à la loi de symétrie. Tous les bords du noyau subissent l'action simultanée des mêmes décroissemens, l'un par deux rangées en largeur, l'autre en sens contraire par deux rangées en hauteur. De plus, il remplit cette condition essentielle de la loi de symétrie, qui exige que les décroissemens auxquels sont soumises les lames de superposition appliquées sur toutes les faces primitives s'assimilent entre eux, et de là vient que les parties ajoutées au noyau par l'effet des décroissemens ont exactement la même forme. Seulement l'action de chaque décroissement n'a lieu que sur deux bords d'une même face qui sont parallèles l'un à l'autre. Mais cette action est symétrique en ce que les divers décroissemens s'exercent suivant trois directions perpendiculaires entre elles, représentées par les trois arêtes terminales *pq*, *tn*, *rs*, ou, ce qui revient au même, par les trois dimensions du cube.

182. Les espèces dont la forme primitive n'est pas un des solides réguliers de la Géométrie, offrent aussi des cristaux qui sembleraient déroger à la loi de symétrie, par l'absence de quelques-unes des facettes destinées à remplacer des parties identiques. Tels

sont entre autres les cristaux qui appartiennent à la variété d'émeraude que l'on voit (fig. 152), et que j'ai nommée *annulaire*, parce que, dans le prisme hexaèdre régulier dont elle dérive, les six bords de chaque base sont remplacés par des facettes *t*, *t*, disposées en anneau. Mais au lieu des six facettes, on n'en aperçoit quelquefois que deux ou trois. La fig. 153 représente la variété de quartz appelée *rhombifère*, parce que les angles solides à la rencontre de ses pans et de ses faces terminales sont remplacés par de petits rhombes *s*, *s*, qui seraient au nombre de six vers chaque sommet, si la forme était complète; mais, communément, il en manque une grande partie. Ces sortes d'exceptions préjudicient d'autant moins au fond de la chose, que leurs effets sont très variables, en sorte, par exemple, que les bords de l'émeraude annulaire sur lesquels le décroissement a agi exclusivement n'ont pas les mêmes positions relatives sur les différens individus. Tantôt il y en a deux ou trois qui se suivent; tantôt ils sont intercalés irrégulièrement entre ceux qui se sont soustraits à la loi de symétrie. Dans tous les cas, on doit restituer par la pensée les facettes qui manquent sur ces derniers, et suppléer, pour ainsi dire, aux réticences de la cristallisation, qui n'a omis ces facettes que parce qu'elles ont échappé à la cause qui tendaient à les produire. Il arrive souvent qu'une ou deux de celles qui existent réellement sur le cristal sont en quelque sorte si déliées, qu'elles se déroberaient à la vue, si la présence des autres n'avertissait de les chercher ; et ces légères ébauches, à leur tour, peuvent servir à interpréter l'absence des facettes qui manquent absolument. On pourrait comparer les anomalies apparentes dont je viens de parler, à celles qui ont lieu dans les plantes, lorsqu'une cause accidentelle a fait avorter quelques-unes des étamines dans une fleur où le nombre de ces organes est d'ailleurs déterminé par les lois auxquelles est soumise la végétation.

183. Je ne dois pas omettre d'ajouter ici un résultat d'observation qui nous montre une corrélation entre l'aspect des joints naturels, dépendant du tissu qu'ils présentent à la lumière, et le rapport de leurs dimensions. Ce résultat est lié à la loi de symétrie, en ce qu'il concourt avec la forme des cristaux à indiquer si les faces primitives dont l'œil compare les reflets sont ou ne sont pas identiques, suivant que les impressions qui en résultent sur cet organe se confondent ou sont distinguées entre elles. Ainsi, dans les rhomboïdes et dans les octaèdres extraits par la division mécanique, ou donnés immédiatement par la cristallisation, toutes les faces étant identiques ont le même éclat et le même poli, et les joints naturels qui leur correspondent s'obtiennent avec la même facilité. Dans les prismes droits ou obliques, dont les bases ont leurs côtés égaux, tels que ceux qui font la fonction de forme primitive dans la staurotide, la mésotype, l'amphibole, le pyroxène, le plomb chromaté, etc., les pans étant semblables et

égaux n'ont rien non plus qui les distingue sous le rapport des caractères dont je viens de parler. Mais les bases qui diffèrent des pans par leur figure et par leur étendue, empruntent de cette diversité un aspect particulier qui n'est plus celui des faces latérales. Enfin, si ces dernières diffèrent entre elles, comme lorsque la forme primitive est un prisme droit à bases rectangles, la différence dont il s'agit en déterminera une plus ou moins sensible dans leur degré de poli et dans les reflets qu'elles renvoient successivement à l'œil, lorsqu'on fait varier la position du prisme.

Ainsi il suffit que deux joints adjacens, sur une forme primitive obtenue par la division mécanique, présentent à l'œil des indices de deux tissus différens, pour que l'observateur soit fondé à en conclure que les facettes de molécules qui correspondent à ces joints diffèrent aussi entre elles par le rapport de leurs dimensions; et c'est même cette différence qui, en faisant varier les actions réciproques des molécules, suivant qu'elles s'attirent par tel *latus* plutôt que par tel autre, exercent son influence sur les lois de décroissemens, dont les effets laissent sur le cristal l'empreinte de la différence dont il s'agit. Je vais citer des exemples de cette corrélation, en vertu de laquelle l'inégalité d'étendue entre les facettes d'une molécule presque infiniment petite devient sensible par la diversité des impressions que font sur l'œil les rayons que ces facettes lui envoient.

184. Je reprends la forme primitive de la chaux

anhydro-sulfatée. Si l'on compare entre elles les faces M, T (fig. 136), soit sur les cristaux, soit sur les fragmens obtenus par la division mécanique, on observe que les dernières ont un éclat nacré, tandis que les autres, dont l'étendue est différente, n'ont qu'un éclat ordinaire qui tire sur le vitreux.

Je ne dirai rien ici de la chaux sulfatée, parce que j'aurai bientôt occasion d'y revenir, pour citer des observations relatives à des effets qui lui sont particuliers.

La stilbite, dont je n'ai pas encore parlé, est une des substances qui méritent le mieux de trouver ici leur place. Sa forme la plus ordinaire est celle d'un prisme rectangulaire (fig. 154, pl. 12) terminé par des sommets à quatre faces rhomboïdales qui sont tournées vers les arêtes longitudinales. Deux des pans, savoir, M et son opposé, ont le luisant de la nacre, les deux autres n'ont qu'un éclat vitreux. La même différence se montre sur les joints parallèles aux pans. On observe aussi des joints perpendiculaires à l'axe, dont l'éclat est plus faible que celui des pans T.

Ces observations suffisent pour indiquer que la forme primitive ne peut être qu'un prisme droit rectangulaire (fig. 155), dont les faces sont de trois dimensions différentes. L'aspect géométrique des cristaux s'accorde parfaitement avec cette indication. Si l'on mesure les incidences respectives des faces terminales $r, r, r'$, on trouve que celle de $r$ sur $r$ est sensiblement plus forte que celle de $r$ sur $r'$, la première étant d'environ $123^d \frac{1}{2}$, et la seconde de $112^d \frac{1}{4}$, ce qui exclut l'hypothèse dans laquelle la forme primitive aurait pour base un carré : car alors les faces terminales seraient nécessairement le résultat d'un décroissement ordinaire sur les quatre angles de la base, puisque dans le cas où le décroissement serait intermédiaire, il produirait huit faces au lieu de quatre, en agissant parallèlement à des lignes de départ situées deux à deux vers chaque angle. Mais il est facile de concevoir qu'un décroissement ordinaire donnerait quatre faces également inclinées les unes sur les autres, et il n'est pas moins évident que la base a une étendue différente de celle de chacun des pans qui répondent à M, T. Ainsi l'aspect géométrique de la forme ne fait autre chose que confirmer, par des considérations théoriques, ce qu'un coup d'œil jeté sur une simple fracture avait déjà appris à l'observateur. Le rapport entre les trois côtés C, G, B, tel que le donne la théorie, est celui des quantités $5$, $2\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$, ou à peu près celui des nombre 3, 2, 5.

185. La couleur blanche est celle qu'offrent ordinairement les cristaux de stilbite. Mais on en trouve à Fassa, dans le Tyrol, qui sont d'un rouge obscur, et d'autres à Arendal, en Norwège, qui sont d'un brun plus ou moins foncé; mais l'éclat nacré persiste au milieu des variations de la couleur, de même à peu près que le timbre ou la qualité du son qui caractérise un instrument s'associe aux différens tons

qu'on lui fait rendre. On en peut dire autant de l'éclat vitreux des pans T qui perce à travers la couleur, quelle qu'elle soit. Dans les cristaux qui dérivent d'un prisme dont les pans sont égaux en étendue, l'éclat subsiste aussi, malgré le changement de couleur, et, de plus, il est de part et d'autre au même degré. Ainsi, dans le prisme de l'amphibole, les pans ou les joints naturels parallèles à l'axe peuvent être substitués l'un à l'autre, comme à l'insu de l'œil, qui voit des deux côtés la même vivacité de poli et d'éclat : c'est l'unisson de la lumière réfléchie.

186. Lorsque la division mécanique se fait parallèlement à des faces qui ont la même étendue, il est évident qu'elle doit être également facile de part et d'autre. Dans les corps dont les faces diffèrent par leurs dimensions, on peut dire en général que celles dont l'éclat est plus vif sont les plus petites, d'où il suit que les joints naturels qui leur correspondent sont ceux qui se prêtent le plus facilement à la division mécanique, parce que les molécules à l'aide desquelles elles exercent les unes sur les autres les attractions d'où dépend leur adhérence étant en plus petit nombre, elles doivent moins résister à leur séparation. C'est ce qui a lieu dans le prisme de la stilbite, dont les faces M, T, P, que je range ici dans l'ordre suivant lequel leur éclat va en diminuant, sont entre elles à peu près comme les nombres 6, 10, 15, qui vont au contraire en croissant.

Cependant il pourrait arriver que de deux faces inégales en étendue, surtout si leur éclat était du même genre, soit nacré, soit vitreux, la plus petite en fût douée à un moindre degré, et que les joints qui lui seraient parallèles fussent les moins faciles à obtenir : car l'assortiment des molécules élémentaires qui répondraient aux deux faces par leurs positions, n'étant pas le même, comme dans le cas d'égalité, et ces molécules exerçant les unes sur les autres des attractions différentes, à raison de leur diversité de nature, il serait possible que l'énergie de celles qui agiraient du côté des faces les moins étendues produisît une plus forte adhérence, de manière que ces faces résistassent davantage à la division mécanique. Mais cette sorte d'inversion doit avoir lieu rarement.

187. Je reviens à la chaux sulfatée, qui, parmi les substances comprises dans le cas dont j'ai parlé d'abord, est une des plus remarquables. Il est d'abord facile de voir, sans qu'il soit nécessaire d'en faire le calcul, que les côtés C, B (fig. 150) du prisme, étant dans le rapport des nombres 13 et 12, et la hauteur G ou H ayant le nombre 32 pour expression, la base P doit avoir beaucoup moins d'étendue que les faces latérales M, T. Cette différence influe d'une manière très sensible sur les reflets de la lumière et sur l'adhérence des joints naturels. L'éclat de la base est beaucoup plus vif que celui des faces latérales, et la division mécanique est incomparablement plus facile dans le sens qui lui est parallèle que dans ceux qui lui sont perpendiculaires. La petite différence d'é-

tendue entre les faces latérales est peu sensible à l'œil; mais on la saisit avec la main lorsqu'on essaie de rompre une lame mince obtenue par la division mécanique. Si la séparation de ses deux parties tend à se faire dans le sens des bords B, B, qui sont les plus courts, on remarque qu'elle cède facilement à la flexion, et se rompt pour ainsi dire mollement, au lieu que dans le sens des deux autres bords elle oppose une certaine résistance et finit par se casser net.

Je citerai encore une expérience à l'aide de laquelle l'action de la chaleur confirme l'indication de celle de la lumière, dont j'ai parlé plus haut. Lorsqu'on expose un morceau de chaux sulfatée au feu du chalumeau, de manière que le jet de flamme soit dirigé vers les faces latérales des molécules, il y a fusion avec bouillonnement. Mais si le jet de flamme est dirigé perpendiculairement aux bases, le morceau ne fait que se calciner sans se fondre. Or, la fusion n'étant autre chose que la séparation des molécules d'un corps par l'intermède du calorique, il en résulte que, dans le premier cas, où le fluide tend à s'introduire entre les bases des molécules qui ont moins d'étendue que les pans, sa force élastique lutte avec plus d'avantage contre leur adhérence, en sorte qu'elles se séparent, c'est-à-dire que le corps se fond. C'est le contraire dans le second cas, où le calorique tend à pénétrer dans les interstices des faces latérales, qui, ayant plus d'étendue, opposent une plus grande résistance à leur séparation. Le corps éprouve seulement alors une calcination qui, pour s'opérer, n'exige pas autant de chaleur que la fusion.

188. Les considérations qui viennent d'être exposées au sujet de la loi de symétrie sont si simples, qu'elles s'offrent comme d'elles-mêmes, et qu'elles ne semblent dire autre chose que ce qu'on savait d'avance. Cependant cette loi n'a pas obtenu à beaucoup près, jusqu'ici, une attention proportionnée à son importance, et a été méconnue même par les plus célèbres cristallographes. J'ai cru devoir, par cette raison, donner ici un grand développement aux résultats qui s'en déduisent, et il est même doublement heureux que des vérités si long-temps négligées, et d'une assez grande importance pour que leur connaissance méritât d'être achetée par un long travail, soient en même temps si accessibles, que la route qui y conduit n'ait besoin que d'être montrée.

### *De la manière dont l'accroissement se combine avec la structure.*

189. On sait combien sont variables les dimensions des cristaux d'une même substance qui se sont formés à la surface de certaines pierres. Cette variation s'étend quelquefois entre des limites très éloignées, en sorte que tel cristal ne peut être distingué qu'à l'aide de la loupe, tandis que tel autre frappe l'œil par la grandeur de son volume. Cependant, si l'on examine attentivement le premier, on remar-

quera que sa forme, que nous supposons être secondaire, est aussi complète que celle de l'autre, et en remontant par la pensée à sa naissance, on doit concevoir que l'arrangement des molécules par lesquelles sa formation a commencé, représentait déjà comme en raccourci celui qui existe dans le plus volumineux, de manière que pendant tous les instans qui ont suivi il n'a fait que s'accroître en conservant la même forme. Deux ou trois exemples, choisis parmi les plus simples, suffiront pour expliquer comment l'ordre suivant lequel se fait cet accroissement se concilie avec celui que paraîtrait indiquer la série des lames décroissantes appliquées sur les différentes faces du noyau que nous obtenons par la division mécanique.

190. Je tirerai le premier exemple du dodécaèdre à plans rhombes originaire du cube. Nous devons supposer que le noyau de ce dodécaèdre, considéré dans le premier instant de la formation, ait été le plus petit qui puisse résulter de la réunion d'un nombre impair de molécules cubiques, auquel cas il devait être composé de 27 de ces molécules. Par une suite nécessaire, chacune de ses faces, telle que *eoi* (fig. 156), renfermait neuf petits carrés, qui étaient les faces extérieures d'autant de molécules; et si nous supposons six nouvelles molécules, telles que *m*, appliquées une à une sur les carrés du milieu (1), nous

(1) On s'est borné ici à la projection des molécules additionnelles qui reposent sur trois des faces du noyau cubique,

aurons l'assortiment que représente la figure, et qui déjà offre l'effet initial du décroissement par une rangée sur les bords.

Pendant l'instant suivant, de nouvelles molécules s'étant arrangées autour du dodécaèdre déjà formé, l'assortiment s'est changé en celui que l'on voit (fig. 157), où les faces du noyau devenu plus volumineux, se trouvent de niveau avec les facettes extérieures des molécules *m* (fig. 156), en sorte que ce noyau est alors un assemblage de cent vingt-cinq molécules, et que chacune de ses faces, telle que *eoi*, renferme vingt-cinq carrés. De plus, les mêmes molécules ont produit deux lames de superposition, dont l'une est composée de neuf cubes *n*, *r*, *s*, *t*, *u*, etc., et l'autre se réduit à un simple cube *m*.

En appliquant le même raisonnement à ce qui s'est passé pendant le troisième instant, et dont le résultat est représenté (fig. 158), on en conclura que le noyau se trouve alors être un assemblage de trois cent quarante-trois molécules, ce qui donne quarante-neuf carrés pour chaque face, telle que *eoi*; et que la partie correspondante de la matière enveloppante contient trois lames de superposition, composées, la première de vingt-cinq cubes, la seconde, de neuf cubes, et la dernière d'un seul cube.

Ainsi, dans le passage d'un terme au suivant, la

---

Il est facile d'ajouter par la pensée celles qui se sont appliquées sur les trois autres faces.

première lame de superposition s'engage, comme partie intégrante, dans le noyau qui répond à ce terme; chacune des autres lames s'accroît par l'addition d'une rangée de molécules sur chacun de ses bords, et au-dessus de celle qui était la dernière, il s'en forme une nouvelle qui en prend le nom, et qui, dans l'exemple que nous venons de citer, se réduit à un simple cube.

191. Au-delà du terme que nous avons considéré en dernier lieu, il en existe une multitude d'autres qui répondent à divers degrés successifs de l'accroissement, de manière qu'en partant du cristal naissant, les nombres des arêtes de molécule comprises dans chaque bord du noyau, ceux des carrés que renferme chacune de ses faces, et ceux des cubes dont se compose sa solidité, forment trois séries, l'une des nombres naturels impairs, en prenant trois pour le premier, la seconde des carrés de ces nombres, et la troisième de leurs cubes. J'ai décrit plus haut le dodécaèdre qui répond au terme où chaque bord du noyau est égal à dix-sept arêtes de molécule, et dont la forme est représentée (fig. 70, pl. 5).

Quoiqu'il soit impossible de connaître le nombre absolu des molécules dont tel dodécaèdre est l'assemblage, on sait du moins que ce nombre est un des termes d'une autre série, que j'ai donnée au même endroit, et de laquelle j'ai déduit une formule générale qui exprime le nombre dont il s'agit, en fonction de la quantité C par laquelle je désigne le nombre d'arêtes de molécules contenu dans le côté du noyau.

On conçoit qu'en général les diverses circonstances qui accompagnent la cristallisation doivent faire varier les époques auxquelles les différens individus dont les molécules sont suspendues dans une même masse de liquide prennent naissance, et les durées de leurs accroissemens. Il en résulte qu'à l'instant où s'arrête la formation de chacun d'eux, ses dimensions sont renfermées entre des limites d'autant plus étroites ou plus étendues, que le terme auquel répond cet instant se rapproche ou s'éloigne davantage de celui auquel commence la série qui représente la marche progressive de l'augmentation de volume. Mais la forme reste constamment la même au milieu du contraste des dimensions.

192. Je choisirai pour second exemple le dodécaèdre à plans pentagones qui dérive aussi de la forme cubique, en vertu de deux décroissemens, l'un par deux rangées en largeur parallèlement à deux bords opposés sur chaque face du noyau, l'autre par deux rangées en hauteur parallèlement aux deux autres bords. Soit EOI (fig. 159) la face supérieure du petit noyau qui était renfermé dans le dodécaèdre naissant. Soit OI un des premiers bords, auquel cas OE sera l'un des seconds. Pour que l'effet initial des deux décroissemens ait lieu, il faudra qu'il y ait deux lames de superposition appliquées sur la face EOI, et qui soient de niveau vers le bord OE et son opposé,

tandis que vers les deux autres bords, elles se dépasseront mutuellement d'une quantité égale à deux rangées *ki*, *sr*, de molécules. Si, de plus, nous supposons que la seconde lame *mn* soit composée d'une simple rangée, pour que le nombre des molécules élémentaires soit le plus petit possible, il suffira de considérer que chaque bord du noyau, tel que OE, ne peut pas renfermer moins de neuf arêtes de molécule, dont deux répondront aux deux rangées qui restent à vide vers le bord OI, les deux suivantes à la distance entre la première lame et la seconde, la cinquième à la rangée *mn*, prise dans le sens de sa largeur, et les quatre autres aux dimensions mesurées par les quatre premières.

Par une suite de cet arrangement, le noyau sera composé de 729 molécules, la première lame de 35, et la seconde de 7. Il est, de plus, évident que chaque face du noyau renfermera 20 carrés, qui seront les facettes extérieures d'autant de molécules.

Il sera facile de se faire une idée de la marche de l'accroissement pendant les instans suivans, en appliquant ici le raisonnement que nous avons fait à l'égard du dodécaèdre à plans rhombes.

193. Il existe dans les deux variétés que nous venons de considérer, et dans plusieurs de celles qui appartiennent à diverses substances, une corrélation remarquable entre l'ordre de l'accroissement et celui de la structure. Pour concevoir en quoi elle consiste reprenons le dodécaèdre à plans rhombes représenté

fig. 70, pl. 5, et supposons qu'on ait séparé par la division mécanique les deux dernières lames *s*, *t*, de superposition. La lame *t* était censée faire partie d'un cube composé de 27 molécules, et engagé par le bas dans la matière qui enveloppe le noyau. Rétablissons ce cube par la pensée, et plaçons sur chacune des cinq faces qui restent à vide une molécule qui soit l'analogue de la molécule *s*. Le petit solide qui en résultera sera semblable au dodécaèdre naissant indiqué par la figure 156, pl. 12.

Au lieu des deux dernières lames, supposons-en trois, *s*, *t*, *x*, qui aient été de même isolées de l'ensemble à l'aide de la division mécanique. Rétablissons de même le cube auquel appartient la lame *x*, et qui est un assemblage de 25 molécules, et ramenons de nouveau la symétrie, en plaçant sur chacune des quatre faces latérales de ce cube, et sur sa face inférieure, deux lames de superposition analogues à *s*, *t*. L'assortiment sera le même que celui qui répond au premier terme de l'accroissement du dodécaèdre, et que désigne la figure 157.

En ajoutant successivement de nouvelles lames, et en suivant par rapport à chacune d'elles, les indications de la symétrie, on aura une série de termes exactement semblable à celle qui représente les augmentations de volume. Et ainsi ce n'est pas assez de dire que la marche de l'accroissement se concilie avec celle de la structure, il faut dire que la première se retrace dans l'autre.

194. Les formes secondaires susceptibles de se prêter à la même considération sont surtout celles où les lames de superposition appliquées sur les différentes faces du noyau, décroissent de manière que les parties de la matière enveloppante composées de leurs assemblages se terminent en sommet pyramidal. C'est ce qui a lieu spécialement dans le dodécaèdre métastatique, dont nous allons déterminer la forme initiale, uniquement d'après l'ordre de la structure.

Reprenons la fig. 81, pl. 6, qui représente l'effet de la loi d'où dépend la forme de ce dodécaèdre, et qui a lieu, comme nous l'avons dit, par des soustractions de deux rangées en largeur sur les bords inférieurs du rhomboïde primitif. La réunion des trois avant-dernières lames de superposition peut être considérée comme faisant partie d'un rhomboïde *d*, engagé par le bas dans la matière qui recouvre la forme primitive, et dont chaque face contient neuf petits rhombes qui sont les facettes extérieures d'autant de molécules, d'où il suit que le nombre de celles dont il est l'assemblage est de 81 (1). De plus, les trois dernières lames de superposition forment, ainsi que nous l'avons expliqué, un autre rhomboïde plus petit *h*, et évidé par la soustraction d'un des huit rhomboïdes

---

(1) Les trois lames dont nous considérons ici la réunion sont censées n'en faire qu'une, parce qu'elles sont placées à la même hauteur sur les faces du noyau situées vers un même sommet.

dont il serait composé s'il était complet : c'est dans sa cavité qu'est engagée la partie terminale du rhomboïde *d*. Isolons par la pensée ce rhomboïde, en laissant subsister l'ensemble des sept petits rhomboïdes appliqués sur son sommet supérieur, et supposons que l'inférieur offre la répétition du même accessoire, ainsi que l'exige la symétrie de la forme. Nous aurons l'analogue du dodécaèdre naissant, dont le noyau répondra au rhomboïde *d*, sur lequel s'appliqueront six lames de superposition, disposées trois à trois autour des sommets, sous l'aspect de deux assortimens de sept petits rhomboïdes.

Interposons dans le dodécaèdre le rhomboïde *f*, considéré comme noyau; chacune de ses faces pouvant être sous-divisée en 16 petits rhombes, le nombre de ses molécules composantes sera de 64. L'effet du décroissement se trouvant doublé, les trois lames qui étaient censées faire partie du noyau précédent désigné par *d*, changeront de rôle et deviendront les trois premières lames de superposition appliquées sur les faces supérieures du noyau. Les molécules du rhomboïde *h* continueront de se partager entre les mêmes lames qui n'auront fait que reculer d'un rang. Ce qui reste à faire pour obtenir les termes suivans se présente comme de soi-même, d'où l'on voit que l'ordre de la structure copie encore ici celui de l'accroissement.

195. Les formes que j'ai citées comme exemples de la manière dont cet accroissement s'accorde avec la

structure, ont été choisies parmi celles qui résultent d'une seule loi de décroissement, parce que leur simplicité rend cet accord plus facile à saisir. Il est évident qu'il se soutient dans les formes produites par la combinaison de plusieurs lois simultanées de décroissement, dont l'effet initial est représenté par un petit solide composé d'un nombre de molécules qui s'éloigne plus ou moins de ceux qu'ont donnés les formes simples, à proportion que les facettes qui terminent celles dont il est l'élément sont plus ou moins diversifiées. Il nous suffit d'avoir tracé en général la route qui, dans tous les cas, conduit la cristallisation à son but, et la théorie qui suppose la chose faite, ne gagnerait rien au travail plus ou moins compliqué qu'exigerait la détermination des petits solides dont je viens de parler.

Les observations directes que l'on peut faire sur les cristaux qui appartiennent à diverses substances viennent à l'appui de tout ce que j'ai dit de la manière dont s'opère l'accroissement de ces corps. Tels sont surtout certains cristaux de quartz prismé qui ont été brisés un peu au-dessus de la base d'une de leurs pyramides. La distinction des couches concentriques qui ont contribué successivement à l'augmentation de volume, se prononce sur la surface de la fracture par les différentes teintes, les unes blanchâtres, les autres grisâtres, qui s'offrent sous un aspect rubanné semblable à celui qui fait l'ornement de certaines variétés de quartz-agathe. On trouve aussi des cristaux de chaux carbonatée prismée dont la base est marquée d'hexagones concentriques qui offrent des indices de l'accroissement en épaisseur.

196. Je terminerai par un résumé de toutes les considérations que j'ai développées précédemment. Dans l'opération de la nature le cristal, en commençant par un embryon imperceptible à nos yeux, et dans lequel la loi de décroissement relative à la forme de ce cristal est déjà comme ébauchée, s'accroît par une superposition d'enveloppes qui, en se succédant l'une à l'autre, laissent subsister les traits de la forme originale; et dans les résultats de la théorie, le cristal est envisagé comme originaire d'un noyau dont les dimensions sont proportionnelles aux siennes, et la matière ajoutée à ce noyau est un assemblage de lames planes appliquées les unes sur les autres, et qui offrent l'effet complet de la loi dont l'existence s'annonçait déjà dans l'embryon que la cristallisation a fait naître dès le premier instant. Ainsi, l'opération de la nature a son origine au centre du cristal, et la théorie suppose qu'elle part de la surface du noyau, parce que notre esprit s'accommode d'autant mieux de cette manière de voir, que c'est d'elle que procèdent les vrais principes de la théorie, dont le but est d'appliquer notre géométrie à celle de la nature. Nous ne parcourons que la partie la plus accessible pour nous de la route que la cristallisation franchit librement tout entière. Le point essentiel est que la théorie et la cristallisation finissent par se

rencontrer, et par se trouver d'accord l'une avec l'autre.

*De la cause physique des lois de décroissement.*

197. Le point de vue auquel j'ai ramené la théorie des formes cristallines est purement géométrique, et se réduit à nous les montrer comme les résultats des diverses manières dont se combinent les molécules intégrantes, en s'arrangeant symétriquement autour de la forme primitive. Mais il resterait un grand pas à faire pour remonter des lois de la structure à celles de la cristallisation, et compléter ainsi la théorie dont je viens de parler, en la considérant sous le point de vue de la Physique. On expliquerait alors comment, dans tel cas, le noyau s'accroît en conservant sa forme; comment, dans tel autre cas, les lames qui le recouvrent décroissent soit vers leurs bords, soit vers leurs angles; comment ces décroissemens suivent une marche tantôt plus lente et tantôt plus rapide, et ainsi des autres effets qui font varier les formes des cristaux.

Mais nos connaissances ne sont pas à beaucoup près assez avancées pour se prêter à la solution de ces sortes de problèmes, où il serait nécessaire d'appliquer le calcul aux lois suivant lesquelles agit l'affinité, combinées avec l'attraction du liquide environnant et avec les formes des molécules. Je me permettrai ici de hasarder une explication qui ne peut passer que pour une légère ébauche, en partant de ce que l'observation nous laisse entrevoir des véritables données du problème, à travers l'ordre de la structure et l'action générale des causes qui en dirigent la marche.

198. Lorsque les molécules intégrantes d'un minéral, suspendues dans un liquide, tendent à se réunir pour former des cristaux, ces molécules, en même temps qu'elles sont sollicitées par leur attraction mutuelle, ont à vaincre celle du liquide qui agit pour les retenir, en sorte que la force qui opère leur réunion, est mesurée par l'excès de leur attraction mutuelle sur celle du liquide.

Or, la première de ces attractions est une force constante, puisque les molécules ne sont susceptibles d'éprouver aucun changement. Mais l'attraction que le liquide exerce sur celles-ci varie en raison de la qualité de ce liquide, de sa densité, de sa température, et autres circonstances, d'où il suit que la différence entre cette attraction et celle qui est réciproque entre les molécules, est elle-même une quantité variable; et il paraît que c'est en général à cette variation que l'on doit attribuer la diversité des formes cristallines sous lesquelles se présente une même substance minérale.

La cristallisation de la soude muriatée ou du sel ordinaire, nous offre un exemple à l'appui de ce que je viens de dire. Lorsqu'elle est dissoute dans l'eau commune, ses cristaux prennent la forme cubique, qui est sa forme primitive. Mais si l'on substitue l'urine à l'eau, la forme sera celle de l'octaèdre régulier, qui résulte, comme nous l'avons vu, d'un décroissement par une rangée sur tous les angles du cube primitif.

Une autre cause de la variation dont il s'agit est l'influence des molécules étrangères suspendues dans le même liquide, et dont la force s'ajoute à celle de ce liquide, pour balancer en partie l'attraction mutuelle de la substance disposée à la cristallisation. J'ai cité, dans un autre article (1), divers exemples de cette influence.

199. Concevons maintenant des molécules que je supposerai, pour plus de simplicité, être d'une forme cubique, suspendues dans un liquide où toutes les circonstances soient favorables à la cristallisation. Imaginons que vingt-sept d'entre elles se soient déjà réunies autour d'un centre commun, pour composer un petit noyau cubique AFGLC′ (fig. 160), dont chaque face contiendra par conséquent neuf carrés. Parmi toutes les molécules environnantes qui tendent vers ce noyau, il y en aura neuf qui s'approcheront les unes des autres pour former une lame carrée, une espèce d'assise qui s'appliquera sur la face du noyau dont elle est voisine, si rien ne s'y oppose. Concevons de plus qu'étant tournées les unes vers les autres par leurs *latus* d'affinité, elles n'aient plus que de petits espaces à franchir pour prendre de l'adhérence, soit

(1) De la coïncidence des lois de décroissement.

entre elles, soit avec le noyau. La figure 161 représente ces neuf molécules dans les positions respectives que je viens de décrire. Mais, pour éviter la confusion, on a laissé entre elles et leur noyau un intervalle très sensible, en sorte qu'il faut les rapprocher de celui-ci par la pensée pour avoir le véritable état des choses.

Or, d'une part, l'attraction mutuelle des molécules les sollicite à se réunir. Mais, d'une autre part, l'action du liquide environnant fait obstacle au mouvement qui produirait leur adhérence. Remarquons maintenant que chacune des molécules qui s'avancent pour se placer aux angles de la face du noyau dont elles sont voisines, par exemple la molécule *abc*, présente trois faces au liquide, savoir, *a*, *b* et *c*, et des trois autres faces elle en présente deux aux molécules adjacentes, savoir, celles qui sont opposées à *c* et à *a*, et la troisième au carré *m*, situé à l'angle A du noyau. Chacune des molécules qui tendent à se placer près des bords, entre les molécules des angles, comme celle qui est désignée par *de*, présente seulement deux faces au liquide, savoir, *d* et *e*, une troisième au carré *n* situé au milieu du bord AF, et les autres aux molécules voisines. Enfin, la molécule indiquée par *pq* ne présente au liquide que sa face supérieure *q*; et parmi les autres, les quatre qui sont situées latéralement se tournent vers les molécules voisines, et la cinquième, opposée à *q*, tend à se placer sur le carré central *s*.

200. Il suit de là que l'action exercée par le liquide, pour s'opposer à la réunion des molécules des angles avec le noyau, est plus forte que celle qui a lieu à l'égard des molécules qui tendent vers le milieu des bords, et que cette dernière surpasse à son tour celle que le liquide exerce sur la molécule centrale.

Si l'attraction réciproque des molécules prévaut sur celle du liquide, quelles que soient les positions de ces molécules, le noyau s'accroîtra sans changer de forme. Mais si elle est plus faible que l'une de celles que le liquide exerce sur les molécules *ab*, *de*, il y aura un décroissement.

Représentons les diverses attractions par des nombres pris arbitrairement, et destinés seulement à aider nos conceptions. Soit l'attraction mutuelle des molécules égale à 9; celle d'un certain liquide sur la molécule centrale *pq* égale à 6; celle qui agit sur la molécule *de* et sur les autres semblablement situées égale à 8, et celle qui sollicite la molécule *ab* et ses analogues égale à 10. Les deux premières attractions 6 et 8, exercées par le liquide, étant plus faibles que l'attraction réciproque des molécules qui est 9, le liquide ne pourra empêcher la jonction soit de la *molécule centrale*, soit des molécules des bords avec le noyau; mais l'attraction du liquide sur les molécules des angles, qui est égale à 10, étant supérieure à l'attraction mutuelle des molécules, celles-ci, retenues par le liquide, resteront en retard, et il y aura un décroissement sur les angles.

201. Faisons une autre hypothèse, et continuant d'égaler à 9 l'attraction réciproque des molécules, désignons par 8 celle du liquide sur la molécule centrale *pq*, par 10 celle qu'il exerce sur une molécule *de* des bords, et par 12 celle qu'il exerce sur une molécule *ab* des angles. Dans ce cas, les molécules des bords étant attirées par le liquide avec une force égale à 10, celle-ci l'emportera sur l'attraction réciproque des molécules qui est égale à 9. Il y aura donc un décroissement sur les bords qui agira sur la rangée entière, parallèle à ces mêmes bords, attendu que les molécules des angles qui en font partie sont attirées encore plus fortement par le liquide.

Maintenant, si nous considérons que parmi plusieurs rangées situées les unes derrière les autres, et qui tendent vers le cristal naissant, celles de la première sont plus attirées par le centre d'action de ce cristal que celles de la seconde, et ces dernières plus que celles de la troisième rangée, nous pourrons encore entrevoir comment l'action modératrice du liquide, en se combinant avec ces différentes actions du centre, détermine des décroissemens tantôt par une rangée, tantôt par deux rangées ou davantage.

202. L'explication que je viens de donner ressemble à toutes les ébauches qui n'offrent que les premiers traits du dessin auquel se rapporte leur modèle. Inutilement tenterait-on de l'étendre à ces conflits de décroissemens, les uns directs, les autres intermédiaires, d'où naissent des facettes de différens

ordres qui exigent un œil exercé pour les démêler sur la surface de certaines variétés. Et ce que je dis ici doit en même temps nous faire sentir combien il y a loin de l'état actuel de la science à celui qui amènerait le moment où la solution du problème serait donnée par un géomètre dont l'habileté répondît à la délicatesse du sujet.

*Considérations sur le tissu des faces qui terminent les formes secondaires.*

Les projections géométriques que nous traçons pour représenter, par des séries de lames décroissantes disposées autour d'une forme primitive, la structure des variétés qui en dérivent (1), et les solides à l'aide desquels l'artiste met en relief ces imitations de la structure, ne font pour ainsi dire que substituer une maçonnerie grossière à l'architecture infiniment délicate de la cristallisation; mais ils ont l'avantage de rendre sensible à l'œil sa manière de travailler. Les parties extérieures des pyramides qui résultent d'un décroissement sur les bords y ressemblent à des escaliers, par les rentrées et saillies alternatives de leurs facettes latérales, et celles des pyramides produites en vertu d'un décroissement sur les angles, sont toutes hérissées d'angles solides trièdres. Mais dans l'ouvrage de la cristallisation, les lames de superposition n'ayant qu'une épaisseur presque infi-

(1) Telles sont celles que l'on voit fig. 70, 75 et 81.

niment petite, par une suite de l'extrême ténuité des molécules dont elles sont les assemblages, la distance entre leurs arêtes saillantes, dans le premier cas, s'évanouit, en sorte qu'elles paraissent se toucher, et dans le second cas, les pointes qui les terminent disparaissent de même, en sorte que, dans les résultats des deux décroissemens, les faces des pyramides se présentent sous l'aspect de plans lisses et continus.

Ce que j'ai dit du niveau apparent des faces produites par des décroissemens soit sur les bords, soit sur les angles, n'est cependant vrai qu'autant que la cristallisation n'a pas été gênée dans sa marche. Mais si son travail n'a pas atteint tout le fini dont il est susceptible, et que le décroissement ait lieu, par exemple, sur les bords, les faces du cristal pourront être sillonnées par des stries alignées dans le sens des bords des lames composantes. C'est ce qui a lieu dans la plupart des dodécaèdres rhomboïdaux qui appartiennent à la substance que j'ai nommée *aplome*, et dont les faces sont striées parallèlement à leurs petites diagonales, ainsi que cela doit être, d'après la description que j'ai donnée plus haut de ces dodécaèdres. Dans les cristaux qui appartiennent à la variété de chaux carbonatée que j'ai appelée *métastatique*, et que représentent les figures 80 et 81, pl. 5 et 6, les stries ont des directions parallèles aux bords inférieurs EO, OI, IK, etc., du noyau, qui sont les lignes de départ du décroissement par deux rangées d'où dérive la forme de cette variété. Les décroissemens sur les angles par une simple rangée ne sont pas susceptibles de faire naître des stries sur les faces qui en résultent; mais s'il y a deux rangées ou plus de soustraites, l'augmentation de distance entre les bords des lames de superposition donne plus de jeu à la structure pour laisser des traces de sa marche. Les stries, dans ce cas, sont parallèles aux diagonales vers lesquelles se trouvent situés les angles qui subissent le décroissement.

On a objecté contre la manière dont j'ai considéré le tissu des faces qui terminent les cristaux secondaires, que s'il en était ainsi, ces faces, chargées d'inégalités produites par les angles saillans ou les angles solides des molécules, même dans le cas où les lois de décroissement auraient joui d'une parfaite liberté, ne pourraient jamais réfléchir assez régulièrement la lumière pour faire l'office de miroirs, ce qui serait contraire à l'observation. On peut répondre que l'objection, si elle était fondée, attaquerait l'existence de toute espèce de miroir. Suivant la remarque de Newton (1), on ne peut présumer que le travail de l'art, en employant le sable et d'autres matières analogues, réussisse tellement à polir le verre, que les dernières particules de cette substance deviennent parfaitement lisses, que leurs surfaces soient exactement planes ou sphériques, qu'elles se trouvent toutes

(1) *Optice lucis, Lausannæ et Genevæ*, 1740, *lib.* 2, *pars* 3ª, *propos.* 8ª.

tournées dans le même sens, et composent une surface unique, partout semblable à elle-même. Ce qu'on appelle polir le verre n'est autre chose que rendre imperceptibles pour nos yeux les aspérités qu'ils y apercevaient et les remplacer par d'autres aspérités plus petites. Il en résulte que si la lumière était réfléchie par les parties propres du verre, elle se disperserait de tous côtés sur les surfaces polies avec le plus de soin, comme sur les plus raboteuses. C'est ce qui a fait penser à l'illustre géomètre anglais que la réflexion dépendait d'une certaine force répandue uniformément sur toute la surface du verre, et dont l'action s'exerce à une très petite distance, comme celle qui produit la réfraction. Or, on conçoit encore mieux la symétrie avec laquelle agit cette action, lorsqu'elle est secondée dans un cristal par les figures régulières des particules dont elle émane, et par la disposition pour ainsi dire compassée qui règne entre elles.

### *Des joints surnuméraires.*

203. Lorsqu'on examine attentivement les fractures faites à un cristal, on y aperçoit quelquefois des joints qui diffèrent par leurs directions de ceux qui ont servi à déterminer les formes des molécules intégrantes. De plus, ces joints que j'appellerai désormais *joints surnuméraires*, sont toujours situés parallèlement à des faces susceptibles d'être produites par des lois de décroissemens. Je prendrai pour

exemple la chaux carbonatée dont le rhomboïde est représenté (fig. 162), parce que c'est le minéral qui a donné lieu au plus grand nombre d'observations du genre de celles dont il s'agit. On trouve en Norwège près d'Arendal, en France près de Pesé, département du Mont-Blanc, et ailleurs, de ces rhomboïdes qui offrent assez nettement des joints surnuméraires suivant trois plans, dont chacun passe par les diagonales horizontales de deux faces opposées, savoir, *bd* et *gn*, *df* et *gm*, *bf* et *mn*, et l'on concevra, avec un peu d'attention, que ces plans sont parallèles à des faces qui résulteraient d'autant de décroissemens par une rangée sur les bords supérieurs *af* et *a'm*, *ab* et *a'n*, *ad* et *a'g*, c'est-à-dire qu'ils sont parallèles aux faces du rhomboïde équiaxe originaire de celui que représente la figure. Dans d'autres rhomboïdes et quelquefois dans les mêmes, on aperçoit des joints surnuméraires situés parallèlement aux bords inférieurs *bm*, *dm*, *dn*, etc., et en même temps à l'axe; d'où il suit qu'ils sont aussi parallèles à des faces qui naîtraient d'un décroissement par une rangée sur les mêmes bords, et produiraient la surface latérale d'un prisme hexaèdre régulier. Dans les variétés secondaires, les joints surnuméraires se montrent de préférence parallèlement aux faces produites par les décroissemens d'où dépendent ces variétés, et quelques minéralogistes ont pensé que les cristaux dont les formes étaient les plus composées renfermaient des joints parallèles à toutes les différentes faces qui terminaient ces formes. Les variétés relatives à diverses autres espèces ont donné des résultats analogues.

204. Avant d'aller plus loin, je remarquerai qu'en général les joints surnuméraires subissent des variations par rapport à leur nombre et à la facilité de les apercevoir. Assez souvent on n'en voit distinctement qu'un ou deux sur trois qu'exigerait la symétrie, et ainsi de ceux qui sont plus nombreux.

Un des résultats d'observation les plus remarquables parmi ceux dont il s'agit ici, est celui que présentent les cristaux de corindon, dans lesquels le rhomboïde primitif est traversé par des joints surnuméraires perpendiculaires à l'axe, ou parallèles à des faces produites par des décroissemens d'une rangée autour des sommets. Ces joints sont surtout apparens dans les cristaux diaphanes auxquels on a donné les noms de *saphir* et de *rubis*, et même ils y sont ordinairement plus nets et plus éclatans que les joints naturels parallèles aux faces du rhomboïde primitif que l'on aperçoit néanmoins très sensiblement en éclairant les fractures. C'est l'inverse dans les cristaux appelés *corund* et *demantspath*, dont le tissu est très lamelleux et se prête très facilement à la division mécanique, dans les divers sens parallèles aux faces de la forme primitive; et qui ne montrent que faiblement les joints surnuméraires dont j'ai parlé. Ces variations, qui ont lieu également dans d'autres substances minérales, tiennent à des causes que l'on doit considérer comme accidentelles, et il èst vraisemblable que parmi ces causes une des principales est l'influence des principes colorans et autres matières étrangères. J'ai observé plusieurs fois une couche légère d'une de ces matières interposée dans un cristal transparent, et qui suivait la direction d'un joint surnuméraire.

Mais c'est surtout la multiplicité de ces sortes de joints dans les cristaux calcaires, où l'on a supposé qu'ils passaient réellement à travers les molécules adoptées par la théorie, qui a donné lieu aux objections dont on s'est prévalu pour attaquer l'existence de ces molécules, et regarder les lois d'arrangement que la théorie leur assignait comme n'étant qu'idéales.

Je vais prouver que la difficulté n'est qu'apparente, que ceux qui l'ont imaginée n'en ont pas dit assez à beaucoup près, et que néanmoins les observations qui lui ont donné naissance n'altèrent point la simplicité de la structure, et laissent subsister dans toute leur étendue les résultats de la théorie.

205. Dans l'exposé que nous faisons de certains phénomènes naturels nous employons les mots de *contact immédiat* entre les molécules des corps; nous regardons les surfaces de ces corps comme des plans continus, parce que nous sommes portés à juger des choses prises en elles-mêmes, d'après la manière dont elles s'offrent à nos observations. Mais lorsque nous réfléchissons sur la transparence des corps, nous concevons que les rayons de la lumière doivent traverser suivant toutes les directions les corps qui jouissent

de cette propriété, sans être arrêtés dans leur trajet, d'où il faut conclure que les molécules de ces corps, arrangées pour ainsi dire en quinconce, laissent entre elles des intervalles incomparablement plus considérables que leurs diamètres, pour offrir de toutes parts un passage libre au fluide lumineux. L'analogie indique qu'il en est de même des corps opaques, relativement aux distances entre leurs molécules. Les plus grands physiciens ont admis cette immense quantité de vide dans les corps, et c'est en partant de la même idée que le célèbre Laplace a prouvé que l'attraction moléculaire ou l'affinité chimique pouvait être considérée comme une dépendance de la gravitation universelle.

Dans les cas dont il s'agit, les particules réfléchissantes des mêmes corps nous paraissent agir sur la lumière comme si elles se touchaient, parce que les intervalles qui les séparent, quoique considérables en eux-mêmes, sont nuls pour nos yeux.

206. Voici les conséquences qui découlent des considérations précédentes par rapport à la structure des cristaux. Soit ABCD (fig. 163), une section faite dans un espace cubique, parallèlement à l'un des plans qui le terminent, et imaginons cet espace sous-divisé en une multitude de petits espaces qui soient de même cubiques. Supposons de plus qu'un certain nombre de ces espaces soient occupés par des molécules *m*, *n*, *o*, *s*, *t*, etc., de la même figure, et que les espaces intermédiaires restent vides. Ici, les molé-

cules sont situées de manière qu'entre chacune et la suivante il y a trois espaces vides, ce qui est bien au-dessous de la vérité.

Maintenant, si l'on fait passer par les points *f*, *i*, un plan perpendiculaire à la surface ABCD, ce plan sera parallèle à une face produite en vertu d'un décroissement par une rangée sur l'arète qui passe par le point A. Car soit A'B'C'D' (fig. 164), une section analogue à ABCD (fig. 163), mais dans laquelle tous les petits espaces qui la sous-divisent soient réellement occupés par les coupes d'autant de molécules. Supposons un décroissement par une rangée sur l'arète contiguë au point A'. La coupe de la première lame de superposition appliquée sur la face adjacente à l'arête A'D' sera le rectangle de *bce*D'; celle de la suivante sera le rectangle *rnue*, celle de la troisième le rectangle *xtyu*, et ainsi des autres; d'où il suit que la face produite sera dirigée suivant A'*g*'. Or, si l'on suppose que les plans qui terminent les deux espaces cubiques soient respectivement parallèles, il est évident que A'*g*' sera de même parallèle à *fi* (fig. 163). Il n'est pas moins clair que le plan dirigé suivant *fi* n'entamera aucune des molécules *m*, *s*, *y*, etc, et parce que dans la matière surajoutée au noyau que représente l'espace cubique B'D' (fig. 164), par l'effet du décroissement, les vides qui restent entre les molécules voisines et entre les bords des différentes rangées successives, n'empêchent pas que les faces produites en vertu du décroissement ne nous paraissent continue, le plan situé suivant *fi* (fig. 163), mis à découvert par une fracture, pourra s'offrir sous l'aspect d'un joint naturel, avec la même apparence de continuité.

Substituons au plan *fi* un autre plan dont la direction soit *fh*. Il sera parallèle à une face située dans le sens de A′*h*′ (fig. 164), et produite en vertu d'un décroissement par deux rangées sur la même arête, comme il est facile d'en juger par l'inspection des rectangles *zre*D′, *εγue*, *λδyu*, qui représentent les coupes des trois premières lames de superposition. Il y aura donc aussi dans l'intérieur de l'espace indiqué par ABCD (fig. 163), un joint naturel dirigé suivant *fh*, et qui ne traversera aucune molécule. Un troisième plan situé dans le sens de *fg*, sera parallèle à une face produite en vertu d'un décroissement par trois rangées sur la même arête, et en écartant davantage les molécules, on aurait des plans parallèles à des faces qui seraient les résultats d'un décroissement par quatre, cinq, six rangées, et ainsi presque à l'infini, en sorte que la difficulté est résolue avec une sorte de surabondance.

207. Telle me paraît être la véritable cause des joints que j'appelle *surnuméraires*. On a prétendu les assimiler à ceux qu'on obtient dans des directions parallèles aux faces que je regarde comme primitives. Mais cette opinion a d'abord contre elle un fait généralement admis, savoir, que la molécule dans laquelle réside l'élément physique d'une substance minérale

est nécessairement une. Or, si tous les joints surnuméraires traversent, par exemple, le rhomboïde de la chaux carbonatée, le voilà morcelé et pour ainsi dire haché en un si grand nombre de fragmens de diverses figures plus ou moins irrégulières, qu'une pareille complication est l'extrême opposé à l'unité de molécule.

Un autre fait également opposé à la même opinion, c'est l'existence des stries qui sillonnent la surface d'une multitude de cristaux. Si les joints surnuméraires traversent dans tous les sens la matière propre des corps, un cristal n'est plus autre chose qu'un solide taillé par la cristallisation suivant des plans qui se confondent avec les mêmes joints. Il n'y a plus alors de décroissemens, et chaque face étant le résultat d'une coupe naturelle, doit être unie et sans inégalités, au moins du genre de celles dont il s'agit. Cependant il n'en est pas ainsi, et même les stries que l'on observe sur les cristaux sont dans le sens par lesquels les lames que j'appelle *de superposition* décroissent en perdant une ou plusieurs rangées de molécules. Ces stries ne seront, si l'on veut, que des accidens qui ont lieu dans les cas où la continuité des décroissemens a subi de petites interruptions. Mais il n'en est pas moins vrai qu'elles servent à décéler la marche de la structure, qu'elles la retracent à nos yeux d'une manière pour ainsi dire ébauchée, et qu'elles confirment l'idée d'une succession de lames disposées comme en recouvrement autour d'un noyau qui est comme la partie fondamentale de l'édifice construit par la cristallisation. Un minéral taillé, ainsi qu'on l'a imaginé, suivant des plans dont les positions respectives seraient les mêmes que dans un des cristaux qui lui appartiennent, loin de représenter ce cristal en réalité n'en offrirait que le fantôme. On voit par tout ce qui précède, le peu de fondement des objections qu'a fait naître cette multiplicité de joints, dont la Physique fournit une explication heureuse, et qui laisse à la Cristallographie toute la justesse et la certitude de ses résultats.

*De la fécondité des lois de décroissement.*

208. On voit par le développement de la théorie exposée dans les articles qui précèdent, à quoi tient cette multiplicité de métamorphoses que produit la cristallisation. Tantôt les décroissemens ont lieu à la fois sur tous les bords du solide primitif, comme dans le dodécaèdre à plans rhombes originaire du cube, ou sur tous les angles, comme dans l'octaèdre régulier qui dérive du même noyau. Tantôt ils ont lieu seulement sur certains bords, comme dans la chaux carbonatée métastatique, ou sur certains angles, comme dans le rhomboïde inverse qui appartient à la même substance. Mais tandis que les résultats des lois solitaires font déjà varier de tant de manières les formes cristallines d'un même minéral, chacun d'eux est encore susceptible de se multiplier dans un rapport

considérable par la diversité de ses combinaisons binaires, ternaires, etc., avec ceux des autres lois, ce qui donne quelquefois naissance à des formes très composées, et propres à déconcerter l'œil de celui qui n'a point le secours de la théorie pour débrouiller cette complication apparente. Les deux formes, dont l'une offre le *maximum* du nombre de lois, et l'autre celui du nombre de faces observées jusqu'ici, sont celles de l'épidote dodécanome et du fer sulfuré parallélique.

La première résulte de douze lois simultanées de décroissement, et le nombre de ses faces est de quarante-quatre. La seconde a cent trente-quatre faces, produites par sept lois de décroissement. La différence dans le rapport entre le nombre des faces et celui des lois qui leur donnent naissance, provient de la loi de symétrie, qui exige la répétition des mêmes effets sur tous les bords ou sur tous les angles du cube, qui est la forme primitive du fer sulfuré, au lieu que celle de l'épidote, qui est un prisme droit irrégulier, n'ayant ses bords et ses angles identiques que quatre à quatre, cette circonstance restreint entre des limites plus étroites le nombre des faces produites même en vertu d'un concours plus nombreux de décroissemens. De là vient qu'en général les formes les plus composées existent dans des espèces dont le noyau est un des polyèdres réguliers de la Géométrie.

209. Si au milieu de cette diversité de lois tantôt solitaires, tantôt comme groupées autour d'une même

forme primitive, la mesure des décroissemens variait dans une grande latitude, s'il existait, par exemple, des décroissemens par trois cents ou quatre cents rangées et au-delà, l'imagination se refuserait à concevoir la multitude énorme des variétés qui pourraient naître d'une même forme primitive. Mais la cristallisation ne déroge que jusqu'à un certain terme assez peu reculé à la tendance qu'elle a en général vers la simplicité. Le plus souvent les soustractions se font par une ou deux rangées, quelquefois par trois ou par quatre, plus rarement par cinq ou par six. Si, dans certains cas, elles agissent par de plus grands nombres, ces nombres entrent dans l'expression d'un décroissement mixte, qui est toujours tel, qu'en faisant varier l'un des deux termes, ou tous les deux, d'une unité, soit en plus, soit en moins, on a l'équivalent d'un décroissement ordinaire; en sorte que ces cas peuvent être considérés comme de petites oscillations que font les lois de décroissemens, autour d'un résultat moyen pris parmi les plus simples (1). Quant aux décroissemens intermédiaires, dans les-

(1) Nous ne pouvons savoir jusqu'à quel point la nature s'est écartée de la simplicité des décroissemens auxquels sont soumises les formes les plus ordinaires, parce que nous sommes loin de connaître tout ce qui existe. Mais à juger de ce qui est encore caché pour nous par ce qui a été observé, nous sommes certains que le nombre dans lequel réside le *maximum* atteint par la cristallisation est peu considérable.

quels les nombres de rangées soustraites sont quelquefois assez compliqués, on peut toujours, ainsi que je l'ai prouvé, les envisager sous un autre point de vue qui les ramène à la simplicité des décroissemens ordinaires.

210. Cependant, telle est la fécondité qui s'allie avec cette simplicité, que si l'on se borne à considérer les décroissemens les plus ordinaires par une, deux, trois et quatre rangées, soit sur les bords, soit sur les angles d'un rhomboïde, le nombre des formes que les combinaisons de ces décroissemens pris un à un, deux à deux, trois à trois, etc., seront susceptibles de produire, est de huit millions trois cent quatre-vingt-huit mille six cent quatre. Encore obtient-on ce résultat en n'ayant égard aux décroissemens en hauteur que par rapport à l'angle inférieur du rhomboïde primitif. Si l'on fait abstraction des autres, dont les cas sont très rares, on n'a plus à considérer que six espèces de décroissemens, qui, étant susceptibles chacune de 4 variations seulement, fournissent 24 quantités, auxquelles il faut en ajouter une 25ᵉ, pour le cas où le cristal secondaire a des faces parallèles à celles du noyau. Mais on doit remarquer que l'effet des décroissemens par une simple rangée sur l'angle inférieur est le même dans le sens de la largeur et dans celui de la hauteur, et que de plus il se confond avec celui du décroissement par une rangée sur les angles latéraux. Il ne reste donc plus que 23 quantités, qu'il faut combiner une à une,

deux à deux, etc. Enfin, parmi les combinaisons une à une, il y en a trois à retrancher, savoir, celles qui résultent, l'une du décroissement par une rangée sur l'angle supérieur, la seconde par une rangée sur les arêtes inférieures, et la troisième par deux rangées sur l'angle inférieur, parce que le premier décroissement donnant des faces horizontales et les deux autres des faces verticales, ces faces ne peuvent exister solitairement, et ont besoin du concours d'un autre décroissement qui en limite l'étendue.

Maintenant, le nombre des combinaisons une à une, deux à deux, etc., de $m$ quantités, est en général $2^m - 1$ (1). Donc, si l'on fait $m = 23$, et que l'on retranche 3 du résultat, on aura pour le nombre de toutes les formes possibles $2^{23} - 4 = 8.388.604$, comme je l'ai dit plus haut.

---

(1) Dans la formule connue

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2}b^2 + \text{etc.},$$

les divers coefficiens, à l'exception du premier qui est l'unité, représentent les nombres de combinaisons possibles de $m$ quantités prises successivement une à une, deux à deux, etc., en se bornant aux combinaisons réellement distinctes. Donc la somme de tous les coefficiens, moins l'unité, représente le nombre de toutes les combinaisons une à une, deux à deux, etc., de $m$ quantités. Or, si l'on prend pour binome la quantité $1+1$, la somme des coefficiens ne sera pas distinguée de la puissance elle-même. Donc le nombre de toutes les combinaisons de $m$ quantités est égal à $(1+1)^m - 1$ ou $2^m - 1$.

211. On obtiendrait un résultat incomparablement plus fort, en faisant entrer dans le calcul les décroissemens dont il y a des exemples parmi ceux qui répondent aux termes suivans de la série des nombres naturels, et en y admettant les résultats des lois mixtes et intermédiaires. Au reste, il s'en faut de beaucoup sans doute que tout ce qui peut exister, même dans l'hypothèse des décroissemens les plus ordinaires, existe réellement; et ces résultats, qui ont paru effrayans à quelques personnes, n'ont pour but au contraire que de prouver la possibilité d'expliquer toutes les nouvelles formes cristallines, quelles qu'elles soient, qui pourront s'offrir un jour à nos observations.

## *Des signes représentatifs des Cristaux.*

212. Les rapports qui servent à lier les différens cristaux originaires d'une même substance avec une forme primitive commune sont fondés, ainsi que nous l'avons vu, sur des lois de structure, dont l'effet est de déterminer le nombre et l'assortiment des plans qui composent la surface de chaque cristal. Par une suite nécessaire, le naturaliste qui s'est familiarisé avec la marche de ces lois, n'a souvent besoin que d'avoir sous les yeux la forme primitive et l'exposé des décroissemens que subissent ses angles ou ses arêtes pour se représenter le polyèdre qui en résulte, et voir en quelque sorte, par la pensée, s'opérer la métamorphose du noyau dont ce polyèdre dérive.

Ces considérations m'ont fait naître l'idée de traduire, dans une langue très abrégée, analogue à celle de l'analyse algébrique, l'énoncé des diverses lois qui déterminent les cristaux secondaires, et de composer ainsi des espèces de formules représentatives de ces mêmes cristaux. Il suffit, pour y parvenir, de désigner par des lettres les angles et les arêtes de la forme primitive, et de faire accompagner ces lettres de chiffres qui indiquent les lois de décroissemens que subissent tels angles et telles arêtes, et dont le résultat est telle forme secondaire. J'ai tâché d'assujettir l'arrangement des lettres à une marche réglée, qui fût en rapport avec l'ordre alphabétique, en sorte que cet arrangement se présentât comme de lui-même.

Au moyen de cette attention et de quelques autres qui concernent la manière de poser les chiffres, il ne faudra, ce me semble, que quelques instans pour avoir la clef de la méthode; et les principes qui doivent servir de règle pour en faire l'application, resteront aisément empreints dans la mémoire.

Lorsque l'on aura ainsi tracé et réuni dans un espace très resserré les différentes formules qui seront comme les images théoriques des cristaux relatifs à une même substance, il sera également facile de les comparer, soit entre elles, soit avec la forme primitive qui aura aussi son expression; de suivre les passages des formes plus simples aux plus composées; de distinguer ce qu'elles auront de commun et ce qui sera particulier à chacune d'elles; en un mot de saisir comme d'un coup-d'œil la diversité des détails et l'unité de l'ensemble.

213. Supposons que la fig. 165 représente un parallélépipède obliquangle dont les faces aient des angles de différentes mesures, et qui soit la forme primitive d'une espèce particulière de minéral, telle que le feld-spath (1).

Ayant adopté les voyelles pour désigner en général les angles solides, placez les quatre premières A, E, I, O, aux quatre angles de la base supérieure, en suivant l'ordre alphabétique et en même temps celui de l'écriture ordinaire, qui est de commencer par le haut et d'aller de gauche à droite; *voyez* la fig. 166, où les alignemens des lettres sont rendus sensibles à l'œil.

Ayant adopté les consonnes pour distinguer en général les arêtes, placez, d'après la même règle, les six premières B, C, D, F, G, H, sur les milieux des côtés de la base supérieure (fig. 165), et sur les deux arêtes longitudinales de la face latérale qui se présente la première, de gauche à droite.

Enfin, placez sur les milieux de la base supérieure et des deux faces latérales situées en avant, les trois lettres P, M, T, qui sont les initiales des syllabes dont est formé le mot *primitif*.

---

(1) Le parallélépipède est censé être représenté de manière que l'angle BAC, qui est le plus éloigné de l'observateur, soit un des angles obtus de la base supérieure.

Chacun des quatre angles solides, ou des six bords désignés par des lettres, est susceptible, dans le cas présent, à cause de la forme irrégulière du parallélépipède, de subir des lois particulières de décroissement; car, soit *Ap* (fig. 167), le même parallélépipède. Si l'on compare les deux angles solides diamétralement opposés O, *r*, il est facile de voir qu'il y a égalité entre les angles plans qui les composent, pris deux à deux, savoir 1°. entre EOI et *sru*; 2°. entre E*Op* et *ur*A; 3°. entre I*Op* et *sr*A. Il en résulte que parmi les angles plans qui se réunissent trois à trois autour des angles solides A, O, il n'y en a que deux qui soient égaux, savoir, EOI, IAE, comme étant opposés sur un même parallélogramme; mais l'angle E*Op* est le supplément de l'angle IA*r*, et l'angle I*Op* celui de EA*r*. De même les angles solides I, *s*, sont composés d'angles plans égaux deux à deux; mais parmi les angles plans qui forment les angles solides E, I, il n'y a que AIO et AEO qui soient égaux. De là il suit que l'angle solide O, étant dans un cas différent de celui où se trouve l'angle solide A, et la même différence ayant lieu à l'égard des angles solides I, E, chacun de ces angles est, relativement à la cristallisation, comme indépendant de celui qui lui correspond diagonalement. Enfin les arêtes C et D, B et F, G et H (fig. 165), comparées chacune à chacune, ne sont pas non plus dans le même cas, parce que les deux plans qui se réunissent sur l'une ne font pas entre eux le même angle que ceux qui ont l'autre pour ligne de jonction. C'est entre ces mêmes arêtes et celles qui leur sont diamétralement opposées, par exemple entre AI et *ps* (fig. 167), entre AE et *pu*, etc., qu'il y a égalité parfaite.

214. On voit par là pourquoi les quatre angles solides autour de la base supérieure, ainsi que les quatre bords de cette base et les deux bords longitudinaux qui se présentent en avant, sont marqués chacun d'une lettre particulière. Mais comme les lois de décroissement agissent avec la plus grande symétrie possible, du moins pour l'ordinaire, tout ce qui a lieu sur un des angles solides ou des bords désignés se répète sur l'angle ou le bord diamétralement opposé, parmi ceux qui sont restés à vide. D'après cela, il n'était nécessaire que de désigner le nombre d'angles solides ou d'arêtes qui subissent des décroissemens réellement distincts, parce que ces décroissemens renferment implicitement ceux qui ont lieu sur les angles ou les bords analogues. On voit que les indications des bords et des angles du parallélépipède sont assorties à la loi de symétrie, et le même accord se retrouvera dans les notations de toutes les autres espèces de formes primitives.

On est cependant quelquefois obligé d'indiquer aussi les angles et les bords qui sont restés à vide sur la fig. 165. Alors on se servira des petites lettres qui portent les mêmes noms que les lettres majuscules employées sur la même figure, c'est-à-dire que *p* (fig. 167) sera désigné par *a*, *sp* par *c*, *pu* par *b*, etc. Mais il ne sera que rarement nécessaire de marquer ces petites lettres sur la figure; il suffira de les faire entrer dans le signe du cristal, parce qu'on rapportera aisément par la pensée chacune d'elles à sa place.

215. Pour indiquer les effets des décroissemens par une, deux, trois rangées ou davantage en largeur, on emploiera les chiffres 1, 2, 3, 4, etc., de la manière qui sera exposée dans un instant; et pour indiquer les effets des décroissemens par deux, trois rangées, etc., en hauteur, on prendra les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc.

Les trois lettres P, M, T, serviront à désigner soit la forme du noyau sans aucune modification, lorsqu'elles composeront seules le signe du cristal, soit les faces qui seraient parallèles à celles du noyau, dans le cas où les décroissemens n'atteindraient pas leur limite, et alors ces lettres seront combinées dans le signe du cristal avec celles qui auront rapport aux angles ou aux bords sur lesquels les décroissemens agiront.

216. Supposons d'abord, pour plus grande simplicité, qu'un des angles solides tels que O soit intercepté par une seule facette additionnelle. Le décroissement auquel on rapporte la production de cette facette peut avoir lieu, soit sur la base P, soit sur le pan T qui est à la droite de l'observateur, soit sur le pan M situé à sa gauche.

Dans le premier cas, on placera le chiffre indicateur en dessus de la lettre; dans le second on donnera au chiffre la place d'un exposant ordinaire, à la droite et vers le haut de la lettre; et l'on indiquera le troisième cas en plaçant le chiffre à la gauche et de même vers le haut de la lettre.

Ainsi $\overset{2}{O}$ exprimera l'effet d'un décroissement par deux rangées en largeur, parallèlement à la diagonale de la base P, qui passe par l'angle E; $O^3$ l'effet d'un décroissement par trois rangées en largeur, parallèlement à la diagonale de la face T, qui passe par l'angle I, et $^4O$ l'effet d'un décroissement par quatre rangées, parallèlement à la diagonale de la face M, qui passe par l'angle E.

Lorsque le décroissement a rapport à quelqu'un des trois autres angles solides I, A, E, l'observateur est censé tourner autour du cristal jusqu'à ce qu'il se trouve placé vis-à-vis de cet angle, comme il l'était naturellement vis-à-vis de l'angle O, dans le cas dont nous venons de parler; ou, ce qui revient au même, il est censé faire tourner le cristal jusqu'à ce que l'angle solide qu'il considère se trouve en face de lui; et c'est relativement à cette position que tel décroissement est dit avoir lieu vers la droite ou vers la gauche.

Par exemple, s'il s'agit de l'angle solide A, le signe $A^2$ représentera l'effet d'un décroissement par deux rangées sur la face AE*sr* (fig. 167), ou sur celle qui est opposée à T (fig. 165), et $^3A$ représentera l'effet d'un décroissement par trois rangées sur la face AI*ur* (fig. 167), ou sur celle qui est opposée à M (fig. 165). Nous verrons dans la suite l'avantage de cette manière de s'orienter, relativement à l'uniformité de la méthode.

217. Quant aux décroissemens sur les arêtes, on exprimera ceux qui se font vers le contour BCFD de la base, par un nombre placé en dessus ou en dessous de la lettre, suivant que leur effet aura lieu en montant ou en descendant, à partir de l'arête à laquelle ils se rapporteront ; et ceux qui sont relatifs aux arêtes longitudinales G, H, seront indiqués par un exposant placé soit à la droite, soit à la gauche de la lettre, suivant qu'ils auront lieu dans un sens ou dans l'autre.

Ainsi $\overset{2}{D}$ exprimera un décroissement par deux rangées, en allant de D vers C; $\overset{3}{C}$ un décroissement par trois rangées en allant de C vers D; $\underset{2}{D}$ un décroissemement par deux rangées, en descendant sur la face M; $^{3}H$ un décroissement par trois rangées en allant de H vers G; $^{4}G$ un décroissement par quatre rangées en allant de G vers l'arête opposée à H, etc.

218. Dans le cas où l'on serait obligé de désigner, au moyen d'une petite lettre telle que *d*, un décroissement sur l'arête *ur* (fig. 167), opposée à celle qui porte la lettre majuscule D (fig. 165), on supposerait le cristal retourné de bas en haut. Ainsi $\overset{2}{d}$ exprimerait un décroissement par deux rangées en montant au-dessus de la base inférieure *p*, comme $\overset{2}{D}$ en

exprime un qui est ascendant sur la base supérieure P. Par la même raison *c* exprimerait un décroissement par trois rangées, en allant de *sp* (fig. 167) vers EO.

Si le même angle solide ou la même arête subit plusieurs décroissemens successifs du même côté, ou plusieurs décroissemens qui aient lieu de différens côtés, on répétera autant de fois la lettre indicative, en faisant varier les chiffres conformément à la diversité des décroissemens. Ainsi $\overset{2}{D}\,\underset{3}{D}$ désignera deux décroissemens sur l'arête D, l'un par deux rangées en montant sur la base P, l'autre par trois rangées en descendant sur la face M. $^{2}H\ ^{4}H$ désignera deux décroissemens, l'un par deux rangées, l'autre par quatre, à la gauche de l'arête H, etc.

S'il y a des décroissemens mixtes, on les indiquera d'après les mêmes principes, en employant les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etc., qui les représentent, et dont le numérateur se rapporte au décroissement en largeur, et le dénominateur au décroissement en hauteur.

219. Reste à trouver une manière de représenter les décroissemens intermédiaires. Un exemple fera concevoir celle que nous avons adoptée. Soit AEOI (fig. 168) la même face que figure 165. Supposons un décroissement par une rangée de molécules doubles, suivant des lignes parallèles à $xy$ (fig. 168), de manière que $Oy$ mesure des lignes doubles d'une arête de molécule, et $Ox$ des lignes simplement égales

à cette arête. On indiquera ainsi ce décroissement ($\overset{1}{O}D^1F^2$). La parenthèse fait connaître d'abord que le décroissement est intermédiaire; $\overset{1}{O}$ indique qu'il a lieu par une rangée sur l'angle marqué de la même lettre, et qu'il se rapporte à la base AEOI (fig. 165). $D^1F^2$ indiquent que pour une seule arête de molécule soustraite le long du côté D, il y a deux arêtes soustraites le long du côté F.

220. Il est utile d'avoir un langage pour énoncer ces différens signes, de manière qu'ils puissent être écrits facilement sous la dictée. On énoncera les signes $O^2$, ${}^3O$, en disant, O *deux à droite;* O *trois à gauche;* pour énoncer $\overset{2}{O}$, $\underset{4}{O}$, on dira O *sous deux*, O *sur quatre;* enfin le signe ($\overset{1}{O}D^1F^2$) s'énoncera ainsi, *en parenthèse*, O *sous un*, D *un*, F *deux.*

221. Donnons un exemple de la combinaison de ces différens signes, dans l'expression d'une forme cristalline composée. Mais il faut auparavant déterminer l'ordre suivant lequel doivent être arrangées les lettres qui concourent à une même expression. Or, si l'on adoptait l'ordre alphabétique, il en résulterait une sorte de confusion dans le tableau que présente la formule. Il paraît plus naturel de se conformer à l'ordre qui dirigerait un observateur dans la description même du cristal, c'est-à-dire de commencer par le prisme ou par la partie moyenne, et d'indiquer ses différentes faces comme elles s'offrent

successivement à l'œil, puis de passer aux faces du sommet ou de la pyramide. Ceci s'éclaircira par les divers exemples que nous citerons dans le cours de cet article.

Supposons maintenant que la fig. 169 représente la variété de feld-spath nommée *bibinaire*, dont la forme primitive se voit fig. 165. Dans cette variété, le pan *l* (fig. 169) résulte d'un décroissement par deux rangées sur l'arête G (fig. 165), en allant vers H; le pan M (fig. 169) répond à celui qui est marqué de la même lettre (fig 165), et qui n'est caché qu'en partie par l'effet du décroissement. Le pan T (fig. 169) est parallèle à T (fig. 165); le pentagone *x* (fig. 169) provient d'un décroissement par deux rangées sur l'angle I (fig. 165), parallèlement à la diagonale qui va de A en O; enfin, comme ce décroissement n'atteint pas non plus sa limite, le sommet porte un second pentagone P (fig. 169), parallèle à la base P (fig. 165). Toute cette description peut être traduite ainsi en cinq lettres $G^2MT\overset{2}{I}P$.

222. Je m'étais borné d'abord à donner les expressions pures et simples des signes indicatifs, semblables à celles qu'on vient de voir; mais j'ai senti dans la suite qu'on ne saurait prendre trop de précautions pour écarter de ce langage extrêmement concis tout ce qu'il pourrait offrir d'énigmatique, et que, dans le cas surtout où la forme était composée d'un grand nombre de facettes, ce qui entraînait nécessairement une complication proportionnelle dans l'expression

du signe, les commençans seraient embarrassés de faire le rapprochement entre l'un et l'autre. Pour obvier à cette difficulté, j'ai cru devoir placer, sous les différentes lettres qui composent le signe, celles qui leur correspondent sur la figure. Au moyen de cette addition, le signe du feld-spath bibinaire se présente comme il suit, $\underset{l}{G^{\cdot}}\,\underset{M}{M}\,\underset{T}{T}\,\underset{x}{\overset{2}{I}}\,\underset{P}{P}$. C'est ainsi que j'en userai dans le cours de cet ouvrage, à l'égard de toutes les formes cristallines, en joignant à chaque signe une espèce de guide qui servira à s'y retrouver, quelque compliqué qu'il puisse être.

223. Passons aux parallélépipèdes d'une forme plus régulière, et considérons d'abord les cas où ils diffèrent du rhomboïde. On supposera que chacun d'eux n'est autre chose que celui de la fig. 165, dont la forme a varié de manière à devenir plus symétrique. Par une suite de cette variation, certains angles solides ou saillans, qui étaient différens sur le premier parallélépipède, sont devenus égaux. Tout ce qui a lieu sur l'un se répète sur l'autre, et ils doivent être par conséquent marqués de la même lettre. C'est ainsi qu'en Algèbre certaines solutions générales se simplifient dans les cas particuliers, où une quantité qu'on avait d'abord supposée différente d'une autre lui devient égale.

Concevons, par exemple, que la forme primitive soit un prisme droit, qui ait pour bases des parallélogrammes obliquangles, dont un côté soit plus long que l'autre. On aura (fig. 165) O=A, I=E, etc. On substituera donc de part et d'autre la seconde lettre à la première, comme on le voit sur la fig. 170.

En continuant de parcourir les diverses modifications du parallélépipède, on les verra passer par différens degrés de simplicité, qui détermineront de nouvelles égalités entre les lettres indicatives de leurs angles et de leurs bords, et l'on aura successivement,

Pour le prisme oblique à bases rhombes, l'expression représentée fig. 171.

Pour le prisme droit à bases rectangles, celle qu'on voit fig. 172.

Pour le prisme droit à bases rhombes, celle de la fig. 173.

Pour le prisme droit à bases carrées, celle de la fig. 174.

Enfin, pour le cube, celle de la fig. 175. Ici l'on n'a désigné que la base supérieure par des lettres, parce que l'on peut appliquer à l'une quelconque des autres faces ce qui a lieu par rapport à cette base.

On suivra, pour toutes ces différentes formes primitives, une méthode de chiffrer analogue à celle que nous avons adoptée pour le parallélogramme obliquangle de la fig. 165, en se dispensant de répéter les lettres de même nom chiffrées de la même manière.

224. Un exemple fera concevoir cette méthode. La fig. 176 représente la variété la plus ordinaire de la cymophane, dont le noyau est un parallélépipède rectangle tel qu'on le voit fig. 172. Le signe

du cristal secondaire sera $MT^2GG^2\overset{1}{B}A^{\frac{3}{2}}\,{}^{\frac{3}{2}}A$. J'ai
$\quad M\,T \quad s \quad i \quad o$
nommé cette variété *cymophane annulaire.*

Pour mieux saisir la marche qui a conduit à l'expression précédente, indiquons tous les angles et toutes les arêtes par autant de lettres particulières, comme si le parallélépipède était obliquangle. *Voy.* la fig. 177. Le signe deviendra $MT^2GH^2\overset{1}{B}\overset{1}{F}E^{\frac{3}{2}}\,{}^{\frac{3}{2}}O$. Mais en comparant la fig. 177 avec la fig. 172, on voit que $H=G$, $F=B$, $O=A$, etc.; donc, substituant à la place des premières lettres leurs valeurs, on aura $MT^2GG^2\overset{1}{B}\overset{1}{B}A^{\frac{3}{2}}\,{}^{\frac{3}{2}}A$, qui revient à l'expression indiquée ci-dessus, en supprimant la répétition inutile de $\overset{1}{B}$.

225. Il résulte de ce qui précède qu'il faut éviter de confondre par exemple ${}^2GG^2$ avec $G^2\,{}^2G$. Le premier signe indique des décroissemens qui se font sur la face T (fig. 172), et sur celle qui lui est opposée, en allant des arêtes G vers celles qui leur correspondent derrière le parallélépipède; le second désigne des décroissemens qui se font sur la face M, en allant à la rencontre l'un de l'autre. Si les deux décroissemens avaient lieu simultanément, leur signe représentatif serait ${}^2G^2$.

Dans les signes précédens, chaque lettre, telle que ${}^2G$ ou $G^2$, ne peut être appliquée qu'à une seule arête située comme cette lettre elle-même, à droite ou à gauche. Mais ${}^2G^2$ s'applique indifféremment à l'une et à l'autre arête; c'est pourquoi il est inutile de répéter cette lettre.

L'exemple suivant servira à rendre sensible l'observation que je viens de faire. Il est tiré d'une variété d'idocrase nommée *sous-sextuple*, et dont la forme, que l'on voit, fig. 178, est celle d'un prisme à seize pans, terminé par des sommets à neuf faces, dont quatre, savoir *c*, *c*, etc., naissent sur les pans *d*, *d*, etc., quatre autres, savoir *o*, *o*, etc., remplacent les arêtes obliques à la jonction des précédentes, et la dernière P est perpendiculaire à l'axe.

Si nous supposons que la fig. 179 représente la forme primitive, qui est un prisme droit à bases carrées, le signe sera

$$\underset{M}{M^2}\;\underset{h}{G^2}\;\underset{d}{{}^1G^1}\;\underset{c}{\overset{2}{\mathring{A}}}\;\underset{o}{\overset{2}{\mathring{B}}}\;\underset{P.}{P}.$$

Dans ce signe, la quantité ${}^2G^2$ indique deux faces distinctes *h*, *h'* (fig. 178), qui se sont formées de part et d'autre de chaque arête G (fig. 179), et qui ont des inclinaisons égales en sens contraire sur la face *d* (fig. 178), au lieu que cette dernière, qui est indiquée par ${}^1G^1$, est censée être composée de deux faces qui coïncident sur un même plan. Or, il n'est pas nécessaire de placer deux lettres sous le signe ${}^2G^2$, parce que toutes les faces situées de la même manière étant désignées par la même lettre sur la figure, il suffit d'indiquer que le signe ${}^2G^2$ se rapporte à celles qui sont marquées de la lettre *h*; ce qui exige seulement que cette lettre soit écrite une fois sous le signe.

Je vais citer un nouvel exemple qui me sera fourni par la baryte sulfatée sous-quintuple (fig. 180). Ici la forme primitive est un prisme droit à bases rhombes (fig. 181), dans lequel l'incidence de M sur M est d'environ $101^{d}\frac{1}{2}$, et celle de M sur la surface de retour, de $78^{d}\frac{1}{2}$. On voit d'abord, à la première inspection de la forme secondaire (fig. 180), qu'elle renferme les faces M, M, P, de son noyau, ce qui peut aider à distinguer les arêtes et les angles qui servent de termes de départ aux sept décroissemens dont les effets se combinent avec les faces primitives, et dont le signe suivant renferme les expressions..........

$${}^{1}G^{1}M^{1}H^{1}\overset{1}{A}\overset{2}{A}\overset{4}{A}\overset{1}{E}\overset{\frac{1}{2}}{B}P.$$
$$k\quad M\quad \underset{\cdot}{s}\quad u\quad d\quad l\quad o\quad z\quad P.$$

On conclura aisément des mêmes principes que le dodécaèdre à plans rhombes originaire du cube s'exprime par cette seule lettre $\overset{1}{B}\underset{1}{B}$, que l'octaèdre originaire du même noyau a pour signe $\overset{1}{A}{}^{1}A^{1}$, etc.

226. Le rhomboïde, en le supposant placé sous l'aspect le plus naturel, c'est-à-dire de manière que les deux angles solides composés de trois angles plans égaux soient sur un même axe vertical, n'a pas proprement de bases, mais seulement deux sommets, qui sont les extrémités de l'axe. On désignera ses angles et ses arêtes comme on le voit (fig. 182). La lettre *e* fait connaître que l'angle qui la porte est semblable à celui qui est marqué de la même lettre

majuscule; de sorte que si tous les angles latéraux avaient leurs indications exprimées, les trois qui sont le plus près du sommet supérieur porteraient la lettre E; et les trois qui avoisinent le sommet inférieur, et qui sont diamétralement opposés aux premiers, auraient *e* pour lettre indicative.

Comme le rhomboïde a ses six faces égales et semblables, il n'est besoin que de considérer les décroissemens relatifs à l'une des faces, comme celle qui sur la figure porte la lettre P, parce que tous les autres ne sont que la réplique de ceux-ci. Cela posé, 1°. les décroissemens qui partent de l'angle supérieur A ou du bord supérieur B auront leur chiffre indicateur placé en dessous de la lettre A ou B; 2° ceux qui partent des angles latéraux E, auront leur chiffre situé de côté, vers le haut de la même lettre; 3°. à l'égard de ceux qui partent de l'angle inférieur *e*, ou du bord inférieur D, le chiffre destiné à les exprimer sera placé en dessus de la lettre *e* ou D.

Supposons, par exemple, que la figure 183 représente la chaux carbonatée analogique; on aura le signe suivant $\overset{2}{e}\overset{2}{\mathrm{D}}\underset{1}{\mathrm{B}}$, dont l'interprétation est facile,

$\quad\quad c\ r\ g$

d'après les combinaisons des lettres qui indiquent les faces, avec celles qui expriment les décroissemens dont ces mêmes faces sont le résultat.

227. Il reste à faire connaître le moyen de représenter un cas particulier qui a lieu dans quelques

cristaux, où les parties opposées à celles qui subissent certaines lois de décroissement restent intactes, ou sont modifiées par des lois différentes. Ce cas concerne spécialement les tourmalines, et il est facile alors d'indiquer la différence au moyen des zéros. Par exemple, dans la tourmaline équidifférente représentée fig. 184, et dont on voit le noyau rhomboïdal (fig. 185), le prisme qui est ennéagone a six de ses pans, savoir *s*, *s*, produits par des soustractions d'une rangée sur les arêtes D, D (fig. 185); et les trois autres, tels que *l*, par des soustractions de deux rangées seulement sur les trois angles *e*. De plus, le sommet inférieur a simplement trois faces parallèles à celles du noyau, tandis que sur le sommet supérieur les trois arêtes B sont remplacées chacune par une facette *n*, *n* (fig. 184), en vertu d'un décroissement qui n'atteint pas sa limite. Voici le signe représentatif de cette forme. $\underset{s}{\overset{1}{D}}\,\underset{l}{\overset{2}{e}}\,\overset{2.0}{E}\,\underset{P}{P}\,\underset{\underset{n}{1}}{B}\,\underset{1.0}{b}$. les quantités $\overset{2.0}{E}$, $\underset{1.0}{b}$ font connaître, l'une que les angles E (fig. 185) opposés à *e* ne subissent aucun décroissement; l'autre, que les arêtes opposées à B restent pareillement intactes.

Si ces arêtes subissaient une loi différente qui donnât lieu, par exemple, à des soustractions de deux rangées, le signe deviendrait $\overset{1}{D}\overset{2}{e}\overset{2.0}{E}P\underset{1}{B}\underset{2}{b}$. D'après cela, on est censé être convenu que les décroissemens représentés par une lettre majuscule accompagnée d'un chiffre quelconque, ne renfermeraient implicitement des décroissemens semblables représentés par la petite lettre de même nom, ou réciproquement, c'est-à dire par exemple que $\underset{2}{B}$ ne renfermerait implicitement $\underset{2}{b}$, ou *vice versâ*, que quand la seconde lettre n'entrerait pas dans l'expression du signe avec un chiffre différent, ou ne porterait pas le même chiffre accompagné d'un zéro. Dans le premier cas, chacune des deux lettres exprime un décroissement qui est particulier à l'arête ou à l'angle qu'elle indique; dans le second, celle qui est affectée d'un zéro fait connaître que l'angle ou le bord auquel elle se rapporte exclusivement, ne subit aucun décroissement. Ainsi dans le signe $\overset{1}{D}\overset{2}{e}\overset{2.0}{E}P\underset{1}{B}\underset{2}{b}$, $\underset{1}{B}$ exprime un décroissement par une rangée qui n'a lieu que sur les arêtes contiguës au sommet supérieur A (fig. 185); $\underset{2}{b}$ indique un décroissement par deux rangées qui n'agit de même que sur les arêtes contiguës au sommet inférieur; enfin les quantités $\overset{2}{e}$ et $\overset{2\,0}{E}$ doivent être aussi considérées indépendamment l'une de l'autre; la première comme exprimant un décroissement par deux rangées sur les angles *e* seulement, et la seconde comme indiquant zéro de décroissement sur les angles E opposés aux précédens.

228. Je me suis étendu sur l'exposition des principes de la méthode, pour ne rien laisser à désirer, s'il était possible, de ce qui pouvait aider à en bien

concevoir l'artifice, parce qu'indépendamment des facilités qu'elle offre pour l'étude des cristaux, elle a cet avantage, qu'il suffit de connaître une forme primitive avec ses dimensions, et d'avoir sous les yeux le signe d'une des variétés qui en dérivent, pour être en état de tracer une figure exacte de cette variété, ainsi que je le ferai voir dans la suite. Le signe est comme une image théorique que la projection transforme en un véritable portrait. Mais si quelqu'un se bornait à la simple intelligence des signes qu'emploie la méthode, et ne demandait qu'à savoir les lire, sans prétendre à l'art de les écrire, il ne faudrait que quelques règles simples et faciles à saisir que nous allons exposer ici succinctement; elles formeront comme le résumé de tous les détails qui précèdent.

1°. Toute voyelle employée dans le signe d'un cristal désigne l'angle solide marqué de la même voyelle sur la figure qui représente le noyau; et toute consonne indique l'arête qui porte cette même consonne, ou la face dont elle occupe le milieu.

2°. Chaque voyelle ou chaque consonne est accompagnée d'un chiffre dont la valeur ainsi que la position indique la loi de décroissement que subit l'angle ou le bord correspondant. Il faut excepter les trois consonnes P, M, T, dont chacune, lorsqu'elle fait partie du signe d'un cristal, indique que ce cristal a des faces parallèles à celle qui porte cette même lettre.

3°. Chaque lettre comprise dans le signe d'un cristal est sous-entendue avec le chiffre qui l'accompagne, sur tous les angles ou tous les bords qui font la même fonction que celui qui sur la figure est marqué immédiatement de la lettre dont il s'agit.

4°. Tout nombre joint à une lettre indique un décroissement dont l'angle ou le bord marqué de cette lettre est le terme de départ. Si le nombre est entier, il indique combien il y a de rangées soustraites en largeur, avec la condition que chaque lame n'ait que l'épaisseur d'une molécule; si le nombre est fractionnaire, le numérateur fait connaître combien il y a de rangées soustraites en largeur, et le dénominateur combien il y en a de soustraites en hauteur.

5°. Suivant que le nombre est placé au-dessous ou au-dessus de la lettre qu'il accompagne, il indique que le décroissement descend (1) ou monte, en partant de l'angle ou du bord marqué de cette lettre. S'il est placé vers le haut, et à droite ou à gauche de la lettre, il désigne un décroissement qui a lieu dans le sens latéral, à droite ou à gauche de l'angle qui porte la même lettre.

6°. Lorsqu'une lettre se trouve écrite deux fois de

(1) Il ne s'agit ici que de la marche générale des décroissemens, à laquelle se rapportent les cas particuliers qui paraissent faire exception. Par exemple, si le décroissement se faisait par une rangée sur l'angle au sommet d'un rhomboïde, alors la face produite serait perpendiculaire à l'axe. Mais ce décroissement rentre dans ceux qui sont descendans, et dont il est comme la limite.

suite avec le même chiffre placé de deux côtés différens, comme ${}^2GG^2$, ou $G^{2}{}^{2}G$; ${}^2AA^2$, ou $A^{2}{}^{2}A$, les deux bords ou les deux angles qu'elle désigne doivent être considérés sur la figure, d'après les mêmes positions relatives, c'est-à-dire, par exemple, que dans le signe ${}^2GG^2$, la quantité ${}^2G$ indique l'effet du décroissement sur le bord G situé à gauche, et la quantité $G^2$ l'effet du décroissement sur le bord situé à droite.

7°. Lorsqu'une lettre porte le même chiffre répété à droite et à gauche, comme ${}^3G^3$, elle s'applique indifféremment à l'une quelconque des arêtes G qu'elle désigne. Il en est de même des lettres qui appartiennent aux angles.

8°. La parenthèse telle $(\overset{3}{O}D^1F^2)$, désigne un décroissement intermédiaire. La lettre $\overset{3}{O}$ exprime d'abord que le décroissement a lieu par trois rangées sur l'angle O, et que son effet est ascendant. $D^1F^2$ font connaître que pour une arête de molécule soustraite le long du côté marqué D, il y a deux arêtes soustraites le long du côté marqué F.

9°. Toute petite lettre comprise dans le signe d'un cristal indique l'angle ou le bord diamétralement opposé à celui qui porte la lettre majuscule de même nom sur la figure, où la petite lettre dont il s'agit est omise comme superflue. Il faut excepter la lettre *e* qui se trouve toujours employée sur la figure du rhomboïde, et qui indique, suivant le principe, l'angle opposé à celui qui porte la lettre E.

10°. Lorsqu'un signe renferme deux lettres de même nom, l'une majuscule, l'autre petite, avec différens chiffres, les deux bords ou les deux angles opposés auxquels répondent ces lettres, sont censés subir chacun exclusivement la loi de décroissement indiquée par le chiffre ajouté à la lettre.

11°. Toute lettre soit majuscule, soit petite, marquée d'un chiffre qui a un zéro à sa suite, fait connaître que le décroissement indiqué par ce chiffre est nul sur l'angle ou sur le bord particulier auquel cette lettre se rapporte.

J'ai omis les applications qui seraient nécessaires pour l'intelligence de ces règles, si elles étaient présentées de premier abord, parce qu'elles se trouvent déjà dans l'exposition développée que j'ai donnée précédemment des principes de la méthode, et dont la lecture est censée avoir précédé celle de ces mêmes règles.

# PARTIE ANALYTIQUE.

1. Dans l'exposé que j'ai donné précédemment de la méthode synthétique relative aux lois de la structure, je me suis borné à citer des exemples choisis parmi les variétés de parallélépipède. Telle est la relation qu'ont avec ce solide le prisme hexaèdre, le dodécaèdre rhomboïdal, l'octaèdre et le tétraèdre, que les décroissemens qui agissent sur les bords ou sur les angles de ces derniers s'assimilent à ceux que subissent les parties analogues du premier. On peut même, ainsi que nous le verrons, substituer un parallélépipède à chacun d'eux, dans les applications de la théorie, en supposant que six de ses faces, parallèles deux à deux, se prolongent jusqu'à s'entrecouper en masquant les deux autres.

La partie analytique qui va suivre doit offrir le passage de ce qui est général pour toutes les formes primitives, à ce que chacune d'elle emprunte de particulier, de son aspect géométrique, du rapport de ses dimensions et du mécanisme de sa structure. Il en résulte que ces formes doivent être considérées ici séparément, comme autant de sous-divisions du parallélépipède.

### DU RHOMBOÏDE.

2. Je place la forme primitive donnée par ce solide au premier rang parmi les sous-divisions du parallélépipède comme étant la plus féconde en modifications diversifiées. Elle doit cette prérogative au rhomboïde de la chaux carbonatée. Cette substance, la plus répandue de toutes celles dont la partie connue du globe est l'assemblage, se distingue encore par l'étendue de son domaine, sous le point de vue de la cristallisation. Ses nombreuses variétés garnissent une multitude de cavités qui interrompent la continuité de ses masses. Elles s'associent aux différentes substances métalliques qui occupent les filons; elles entrent accidentellement dans la composition de plusieurs roches, depuis les plus récentes jusqu'à celles dont la formation remonte à des époques très reculées. Les observations, à mesure qu'elles se multiplient, la font reparaître sous de nouvelles transformations. La diversité semble le disputer à la profusion, et c'est avec raison qu'on l'a nommée *le Prothée des minéraux*.

Mais ce qui ajoute beaucoup à l'intérêt que présente l'étude approfondie de ses formes, ce sont les propriétés géométriques remarquables que la théorie et le calcul nous ont dévoilées dans une partie des corps auxquels elle a donné naissance, et c'est principalement cette considération qui a déterminé la préférence que j'ai donnée à ces corps, qui composent comme l'élite des variétés du rhomboïde, pour les faire servir au développement de la théorie dont cette forme primitive est l'objet.

Avant d'exposer la méthode de déterminer les formes secondaires qui dérivent du rhomboïde, il est nécessaire d'exprimer algébriquement les lignes principales que l'on doit considérer dans cette espèce de solide.

3. La fig. 1, pl. 15, représente un rhomboïde obtus, parce que c'est le cas le plus ordinaire. Mais ce que j'en dirai s'applique également à un rhomboïde aigu.

Ayant mené les deux diagonales *bf*, *ad*, de l'un quelconque des rhombes, je désigne par *g* la demi-diagonale horizontale *cb* ou *cf*, et par *p* la demi-diagonale oblique *ca* ou *cd*.

4. Soit *adsg* (fig. 2) la coupe principale du rhomboïde, formée par les deux diagonales obliques opposées *ad*, *gs* (fig. 1), et par les arêtes *ag*, *ds*, comprises entre ces diagonales.

Du point *d* je mène *dr* perpendiculaire sur l'axe *as*, et du point *g* je mène *gn*, de manière qu'étant aussi perpendiculaire sur l'axe, elle se prolonge jusqu'à la rencontre de *ad*. Il est clair que son prolongement tombera au milieu de *ad*. Car si je mène les diagonales *fg* et *bg* (fig. 1), la ligne entière *gc*, qui est la même que figure 2, sera couchée sur le plan *bfg* (fig. 1), qui passe par le point *c*. On conçoit aussi que la partie *cn* qui est une perpendiculaire menée du centre du triangle équilatéral $bfg$, est la moitié de la partie $gn$ qui va du centre à l'un des angles du même triangle. J'appellerai $gn$ à l'avenir *la perpendiculaire sur l'axe*, et $cn$, *la demi-perpendiculaire sur l'axe.*

5. Il est facile maintenant d'exprimer en fonctions de $g$ et de $p$, l'une quelconque des arêtes du rhomboïde, la perpendiculaire sur l'axe et cet axe lui-même.

1°. $ab$ (fig. 1) $=\sqrt{(bc)^2+(ac)^2}=\sqrt{g^2+p^2}$; donc telle est l'expression de l'arête.

2°. Le côté $bf$ du triangle équilatéral $bfg$ étant désigné par $2g$, la ligne $ng$ qui va du centre à l'un des angles, ou, ce qui revient au même, la perpendiculaire sur l'axe, aura pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, d'où il suit que la demi-perpendiculaire sur l'axe est égale à $\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$.

3°. Remarquons que les perpendiculaires $gn$ et $dr$ (fig. 2) divisent l'axe en trois parties égales. Car les triangles semblables $acn$, $adr$, donnent $ad:ac::ar:an$. Or, $ad=2an$; donc, $an=nr$. De plus, les triangles $dsr$, $gan$, étant semblables et égaux, on a $rs=an$; donc, $an=nr=rs$.

Maintenant $an=\sqrt{(ac)^2-(cn)^2}=\sqrt{p^2-\frac{1}{3}g^2}$; donc en triplant cette expression, on aura (1).

$$as=3\sqrt{p^2-\tfrac{1}{3}g^2}=\sqrt{9p^2-\tfrac{9}{3}g^2}=\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

(1) Il sera bon de retenir cette expression de l'axe, ainsi que

6. Proposons-nous encore, avant d'aller plus loin, de résoudre le problème suivant. Etant donné les deux demi-diagonales $g$ et $p$, déterminer d'une manière générale trois espèces d'angles, savoir, les angles plans du rhomboïde, les incidences respectives de ses faces ou les angles de sa coupe transversale, et enfin ceux de sa coupe principale.

1°. Pour les angles plans, soit mené $am$ (fig. 1), perpendiculaire sur $df$, et qui sera le sinus de l'angle $afd$, en considérant $af$ comme le rayon. Cherchons le rapport entre $af$ et le cosinus $mf$.

Nous avons déjà $af = \sqrt{g^2+p^2}$.

De plus, $am = \frac{bf \times ac}{df} = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}}$.

Donc

$$af : am :: g^2+p^2 : 2gp; \text{ mais } mf = \sqrt{af^2 - am^2}.$$

Donc

$$af : mf :: g^2+p^2 : \sqrt{(g^2+p^2)^2 - 4g^2p^2} :: g^2+p^2$$
$$: \sqrt{g^4 - 2g^2p^2 + p^4} :: g^2+p^2 : \pm g^2 \mp p^2,$$

les signes supérieurs du dernier terme appartenant au cas où le rhomboïde est obtus, et les signes inférieurs à celui où le rhomboïde est aigu.

---

celle de l'arête qui est $\sqrt{g^2+p^2}$, et celle de la perpendiculaire sur l'axe, savoir $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, parce que comme ces expressions reviendront à chaque instant dans l'exposé de la théorie, nous nous dispenserons d'y mettre des numéros de renvoi.

Le résultat précédent nous offre une propriété remarquable du rhomboïde. Elle consiste en ce que dans cette espèce de solide le cosinus du petit angle plan est toujours une quantité rationnelle, pourvu que les carrés des expressions des deux diagonales soient eux-mêmes des quantités rationnelles.

2^e^. Pour les incidences mutuelles des faces, par exemple, pour celle de *abdf* sur *dfqs*.

Soit *amhl* (fig. 3) la coupe transversale du rhomboïde, menée par la ligne *am* (fig. 1). Cherchons d'abord le rapport entre les demi-diagonales *mr* et *ar* (fig. 3). Soit $mr = g'$, et $ar = p'$. Nous aurons,

$$(am)^2 \text{ ou } g'^2 + p'^2 = \frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}, \text{ et } g'^2 = g^2;$$

donc

$$p'^2 = \frac{4g^2p^2}{g^2+p^2} - g^2 = \frac{4g^2p^2 - g^4 - g^2p^2}{g^2+p^2} = \frac{3g^2p^2 - g^4}{g^2+p^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{g^2+p^2}} :: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Et parce que $\sqrt{3p^2 - g^2} = \sqrt{9p^2 - 3g^2} \times \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, il en résulte que le rapport entre les demi-diagonales *mr* et *ar* est le même que celui du côté du rhomboïde au produit de l'axe par $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Il est évident que si $g^2$ et $p^2$ sont rationnels, $g'^2$ et $p'^2$ le seront de même. Cela posé, ayant mené *az* perpendiculaire sur *mh*, déterminons en fonctions de $g$ et de $p$ le rapport entre *am* pris pour sinus total et le cosinus $mz$ de l'angle $amh$ qui mesure la plus petite incidence des faces du rhomboïde. Ce rapport en fonctions de $g'$ et de $p'$ est celui de $g'^2+p'^2$ à $g'^2-p'^2$. Or, d'après la proportion trouvée ci-dessus,

$$g'^2+p'^2:g'^2-p'^2::g^2+p^2+3p^2-g^2:g^2+p^2$$
$$-3p^2+g^2::4p^2:2g^2-2p^2::2p^2:g^2-p^2.$$

Si le rhomboïde était aigu, on aurait

$$g'^2+p'^2:p'^2-g'^2::2p^2:p^2-g^2 \text{ (1)}.$$

On voit ici que la propriété relative à l'expression du cosinus sous une forme rationnelle, qui a lieu pour les angles plans, s'étend à ceux qui mesurent les incidences des faces.

3°. Pour les angles de la coupe principale, $ak$ (fig. 2) sera le sinus de l'angle aigu $g$, en prenant $ag$ pour le rayon. Or,

$$ak=\frac{gn\times as}{gs}=\frac{\sqrt{4g^2}\times\sqrt{9p^2-3g^2}}{2p}=\frac{\sqrt{3g^2p^2-g^4}}{p}.$$

$$kg=\sqrt{(ag)^2-(ak)^2}=\sqrt{g^2+p^2-\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{g^4-2g^2p^2+p^4}}{d}=\frac{\pm g^2\mp p^2}{p}.$$

Donc $ak:kg::\sqrt{3g^2p^2-g^4}:\pm g^2\pm p^2$.

---

(1) Dans le cas du rhomboïde aigu, le sinus $az$ se rejetera en dehors du rhomboïde, en conséquence de l'angle obtus que feront alors les deux faces $abdf$, $dfqs$ (fig. 1), et l'on aura le supplément de cet angle, c'est-à-dire, l'incidence des faces à l'endroit des arètes contigues au sommet.

Dans le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, on a $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{2}$. Substituant ces valeurs à la place de $g$ et de $p$, dans les rapports précédens, on trouve

1°. $af : mf$ (fig. 1) :: 5 : 1, ce qui donne....... $fam = 11^d 32' 13''$; donc $baf = 101^d 32' 15''$.

2°. $am : mz : 4 : 1$, ce qui donne pour l'angle $amz$, $75^d 31' 28''$.

3°. $ak : kg$ (fig. 2) :: 3 : 1, ce qui donne pour l'angle $ags$, $71^d 33' 54''$.

7. Je terminerai cet article par la solution de trois problèmes relatifs au rhomboïde, dont les sujets existent parmi les résultats de la cristallisation.

1°. Trouver le rapport entre $g$ et $p$, dans le rhomboïde qui a cette propriété, que quand son axe est vertical, chacune de ses faces est également inclinée par rapport à un plan vertical et à un plan horizontal.

Soit $adsg$ (fig. 2) la coupe principale. Le triangle $anc$ étant isocèle, on aura $cn=an$; et

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}=\tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}=\sqrt{p^2-\tfrac{1}{3}g^2}, \text{ ou } s^2=3p^2-g^2.$$

Donc $2g^2=3p^2$, et $g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée.

2°. Trouver le rapport entre $g$ et $p$ dans le rhomboïde dont la coupe principale est un *maximum*, en supposant $p$ constant.

Soit $x$ la demi-diagonale horizontale. La surface de la coupe principale sera

$$gn.as=\sqrt{\tfrac{4}{3}x^2}.\sqrt{9p^2-3x^2}=\sqrt{12p^2x^2-4x^4}.$$

Je prends la différentielle de cette quantité.

$$d.\sqrt{12p^2x^2-4x^4}=d.(12p^2x^2-4x^4)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}(12p^2x^2-4x^4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times(24p^2x.dx-16x^3dx)=\frac{12p^2xdx-8x^3dx}{(12p^2x^2-4x^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans le cas du *maximum*, cette différentielle doit être nulle ; donc $12p^2xdx-8x^3dx=0$ ; ou

$$12p^2xdx=8x^3dx,\ \text{et}\ 3p^2=2x^2.$$

D'où l'on tire $x:p::\sqrt{3}:\sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée.

On peut démontrer ce *maximum* par la Géométrie simple. Car, le triangle *adr* étant les $\frac{2}{3}$ du triangle *ads*, à cause de la hauteur commune *dr*, et de.... $ar=\frac{2}{3}as$, sera par conséquent le tiers de la coupe principale *adsg*; donc il devra être aussi un *maximum*. Or, ce triangle étant nécessairement rectangle en *r*, et sa base *ad* étant une constante, la question se réduit à trouver, parmi tous les triangles rectangles qui ont une base commune, celui dont la surface est un *maximum*. Or, si l'on suppose que la base soit le diamètre *mn* (fig. 4) d'un cercle, il est évident que parmi tous les triangles rectangles *mf'n*, *mfn*, etc., que l'on peut construire sur cette base, celui qui donne le *maximum* est le triangle isocèle *mfn*; donc le triangle *ard* (fig. 2) sera aussi un triangle isocèle, d'où il est facile de conclure, comme on l'a vu précédemment, que $g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

3°. trouver le rapport entre $g$ et $p$ dans le rhomboïde dont la solidité est un *maximum*, en supposant $p$ constant.

La perpendiculaire $ak$ (fig. 2) pouvant être prise pour la hauteur du rhomboïde, la solidité de celui-ci sera égale à $ak \times 2gp$. Or,

$$ak = \frac{gn \times as}{ad} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}g^2 - (9p^2 - 3g^2)}{4p^2}};$$

et faisant $g = x$, puis exécutant la multiplication indiquée, $ak = \sqrt{\frac{12p^2x^2 - 4x^4}{4p^2}}$. Donc la solidité sera

$$2px\sqrt{\frac{12p^2x^2 - 4x^4}{4p^2}} = \sqrt{12p^2x^4 - 4x^6},$$

quantité dont la différentielle est

$$\tfrac{1}{2}(12p^2x^4 - 4x^6)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(12p^2x^4 - 4x^6) = \tfrac{1}{2}(12p^2x^4 - 4x^6)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times (48p^2x^3dx - 24x^5dx) = \frac{24p^2x^3dx - 12x^5dx}{\sqrt{12p^2x^4 - 4x^6}},$$

Égalant cette différentielle à zéro, on a

$$24p^2x^3dx - 12x^5dx = 0.$$

D'où l'on tire $2p^2 = x^2$, et $x : p :: \sqrt{2} : 1$, ce qui a lieu dans le rhomboïde donné par la sous-division du dodécaèdre rhomboïdal, ainsi que nous le verrons dans la suite.

8. Je passe aux résultats des différentes lois de décroissement que le rhomboïde est susceptible d'offrir.

Il y a, en général, cinq espèces de décroissemens possibles, qui donneront des formes secondaires; savoir,

Un décroissement sur les bords supérieurs *ab*, *af*;
Un second sur l'angle supérieur *a*;
Un troisième sur les bords inférieurs *db*, *df*;
Un quatrième sur les angles latéraux *b*, *f*;
Un cinquième sur l'angle inférieur *d*.

De plus, les décroissemens sur les angles peuvent avoir lieu ou par des lois ordinaires, ou par des lois intermédiaires. Nous examinerons successivement ces différens cas, en commençant par les plus simples.

## I. DES LOIS ORDINAIRES DE DÉCROISSEMENT RELATIVES AU RHOMBOÏDE.

### I. *Décroissemens sur les bords supérieurs.*

9. Ces décroissemens donneront en général des dodécaèdres à faces triangulaires, dont trois arêtes prises alternativement coïncideront avec les arêtes *ab*, *af*, *ag*, etc., du noyau (fig. 1), et les autres s'élèveront au-dessus des diagonales obliques *ad*, *aq*, etc. De plus, il est évident que l'axe sera le même que celui du noyau.

Soit *adsg* (fig. 5) la coupe principale de ce noyau, *am* l'arête du cristal secondaire qui s'élève au-dessus de la diagonale *ad*, et doit nécessairement être sur le plan qui passe par *a*, *d*, *s*; *sm* l'arête inférieure correspondante, qui coïncide avec le bord *sd* du rhomboïde primitif. Soit *azt* le triangle mensurateur que nous considérons ici comme si les décroissemens se faisaient sur l'angle $a$, en observant qu'à une rangée de soustraite vers les bords *ab*, *af* (fig. 1), répond une diagonale oblique de molécule, qui mesure la quantité dont une lame de superposition dépasse l'autre.

Commençons par déterminer le rapport entre les côtés *az* et *tz* de ce triangle. Soit $a$ l'arête d'une molécule, et $p'$ sa demi-diagonale oblique. Nous aurons, en nommant $n$ le nombre de diagonales soustraites,

$$az : tz :: 2p' \times n : a;$$

et parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau,

$$az : tz :: 2np : \sqrt{g^2 + p^2}.$$

Déterminons aussi le rapport entre *mu*, perpendiculaire sur l'axe relative au dodécaèdre secondaire, et la partie *au* de l'axe comprise entre le sommet et cette perpendiculaire.

1°. Pour *mu*. Les triangles semblables *msu*, *dsr*, donnent, $ds : dr :: sm : mu$. Or,

$$ds = \sqrt{g^2 + p^2},\ dr = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

reste à chercher *sm*, ou seulement sa partie *dm*, puisque l'autre est connue.

Les triangles semblables *azt*, *adm*, donnent

$$az : tz :: ad : dm.$$

19..

Ou,

$$2np : \sqrt{g^2+p^2} :: 2p : dm = \frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc

$$sm = \sqrt{g^2+p^2} + \frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2} = \frac{n+1}{n}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc la proportion $ds : dr :: sm : mu$ devient

$$\sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} :: \frac{n+1}{n}\sqrt{g^2+p^2} : mu = \frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. Pour $au$. Cherchons $su$ que nous retrancherons de $sa$.

$$ds : rs :: sm : su;$$

ou

$$\sqrt{g^2+p^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2} :: \frac{n+1}{n}\sqrt{g^2+p^2} : su = \frac{n+1}{3n}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Donc

$$au = \sqrt{9p^2-3g^2} - \left(\frac{n+1}{3n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} = \frac{2n-1}{3n}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Donc $mu : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}.$

10. Soient maintenant $b'am$, $f'am$ (fig. 6) deux faces voisines situées vers le sommet supérieur du dodécaèdre secondaire, et tellement choisies, que les arêtes $ab'$, $af'$ se confondent avec celles qui sont marquées des mêmes lettres (fig. 1), auquel cas l'arête $am$ (fig. 6), sera celle qui s'élève au-dessus de la diagonale $ad$ (fig. 1).

Etant donné les demi-diagonales $g$ et $p$ du noyau, avec la quantité $n$ des décroissemens, proposons-nous de déterminer l'incidence de $b'am$ (fig. 6) sur $f'am$, et celle de $b'am$ sur la face qui lui est adjacente de l'autre côté de $ab'$.

Concevons un plan $b'yf'$, qui soit perpendiculaire sur l'axe $ao$. Menons $b'o, f'o, yo$, qui coïncident avec ce même plan ; menons ensuite $f'r$ et $f'p$ perpendiculaires l'une sur $yo$, l'autre sur $ay$, et joignons les points $p$, $r$, par une droite. L'angle $f'pr$ sera la moitié de celui qui donne l'incidence de $b'ay$ sur $f'ay$ (1). D'une autre part menons $ye$, $yh$ perpendiculaires l'une sur $b'o$, l'autre sur $ab'$, puis joignons les points $e$, $h$, par une droite. L'angle $yhe$ sera la moitié de celui qui mesure l'incidence de $b'ay$ sur la face adjacente à $ab'$ (2). On aura donc les deux incidences proposées, en cherchant le rapport entre le sinus $f'r$ et le cosinus $pr$ de l'angle $f'pr$, et le rapport entre le sinus $ye$ et le cosinus $eh$ de l'angle $yhe$.

---

(1) Si l'on conçoit une ligne menée de $b'$ en $p$, elle sera perpendiculaire sur $ay$, ainsi que $f'p$, puisque tout est égal de part et d'autre. Donc $ap$ étant elle-même perpendiculaire tant sur $b'p$ que sur $f'p$, l'est aussi sur le plan $b'pf'$, et par conséquent sur le plan $f'pr$ qui se confond avec le précédent, puisque $f'r$ prolongée irait tomber en $b'$. Donc $pr$ qui passe par le pied de $ap$ sera perpendiculaire sur elle. Donc puisque $f'p$ l'est aussi sur $ap$, l'angle $f'pr$ sera égal à l'incidence de $f'ay$ sur $ayo$, c'est-à-dire, à la moitié de l'incidence $b'ay$ sur $f'ay$.

(2) Cela se prouve par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait dans la note précédente, relativement à l'angle $b'pr$. Nous aurons souvent occasion d'employer des constructions de ce genre.

Ayant prolongé $gn$ (fig. 5) jusqu'à la rencontre de $am$, nous pouvons supposer, pour plus de simplicité, que le plan $b'yf'o$ (fig. 6) soit à la même hauteur que $gx$ (fig. 5), en sorte que l'on ait $ao$ (fig. 6) $= an$ (fig. 5); dans ce cas, on aura aussi $f'o$ ou $b'o$ (fig. 6) $= gn$ (fig. 5), et $yo$ (fig. 6) $= nx$ (fig 5).

Cherchons séparément $f'r$ et $pr$.

1°. Pour $f'r$. Il est évident que cette ligne est la moitié de celle qui joindrait les points $b'$, $f'$, et puisque ces points sont censés être la même hauteur que $gx$, ils coïncident avec les points $b$, $f$ (fig. 1), d'où il suit que $f'r$ (fig. 6) $= fc$ (fig. 1) $= g$.

2°. Pour $pr$. Les triangles $aoy$, $rpy$ (fig. 6) sont semblables, d'après leur position respective jointe à l'égalité des angles $aoy$ et $rpy$ qui sont droits tous les deux. Donc, $ay : ao :: yr : pr$.

Cherchons successivement $ay$, $ao$ et $yr$.

$$ay = \sqrt{(yo)^2 + (ao)^2}. \quad yo = nx \text{ (fig. 11)}.$$

$$au : mu :: an : nx.$$

Ou

$$\frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} : (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$$

$$: nx = \frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = yo \text{ (fig. 6)}.$$

$ao = \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$. Désignons par $a$, pour plus de simplicité, la valeur de l'axe, $\sqrt{9p^2 - 3g^2}$. Nous aurons $ay = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \frac{4}{3}g^2 + \frac{1}{9}a^2}$. nous venons de trouver $ao$, qui était la seconde des quantités à chercher. Reste $yr$.

L'angle $f'or$ étant de $60^d$, et l'angle $f'ro$ de $90^d$,

$$or = \tfrac{1}{2} f'o = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}. \quad yr = yo - or = \frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$= \frac{3}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ay : ao :: yr : pr$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2} : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2} :: \frac{3}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : pr$$
$$= \frac{\dfrac{1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2}}.$$

Donc
$$f'r : pr :: g : \frac{\dfrac{1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2}}$$
$$:: \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2} : \frac{1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$$
$$:: \sqrt{(n+1)^2 4g^2 + (2n-1)^2 \tfrac{1}{3}a^2} : a.$$

Passons au rapport entre le sinus $ye$ et le cosinus $eh$ de l'angle $yhe$.

1°. Pour $ye$. Nous avons

$$ye = \sqrt{(yo)^2 - (oe)^2}. \quad (yo)^2 = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2,$$

d'après le calcul précédent. De plus, à cause de

$$eoy = 60^d \text{ et } yeo = 90^d,\ oe = \tfrac{1}{2}yo.$$

Donc $ye = \sqrt{\frac{3}{4}(yo)^2} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 g^2}$.

2°. Pour *eh*. Les triangles semblables $b'oa$, $b'he$ donnent, $ab' : ao :: b'e : eh$.

$$ab' = \sqrt{(b'o)^2 + (ao)^2} = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2}.$$

$$ao = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2}. \quad b'e = b'o - oe = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} - \left(\frac{n+1}{4n-2}\right)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left[1 - \left(\frac{n+1}{4n-2}\right)\right]\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$= \frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ab' : ao :: b'e : eh$ devient,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2} : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2} :: \frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : eh.$$

$$eh = \frac{\frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\frac{4}{27}a^2g^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2 + \frac{1}{9}a^2}} = \frac{\frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2 + \frac{1}{9}a^2}}$$
$$= \frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^2}{12g^2+a^2}}.$$

Donc

$$ye : eh :: \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 g^2} : \frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^2}{12g^2+a^2}}$$
$$:: n+1 : (n-1)\sqrt{\frac{3a^2}{12g^2+a^2}} :: (n+1)\sqrt{12g^2+a^2}$$
$$: (n-1)\sqrt{3a^2} :: (n+1)\sqrt{12g^2+9p^2-3g^2}$$
$$: (n-1)\sqrt{27p^2- \ g^2} :: (n+1)\sqrt{g^2+p^2}$$
$$: (n-1)\sqrt{3p^2-g^2}.$$

11. Parmi les variétés de la chaux carbonatée, il

en existe plusieurs que je ferai connaître dans la suite, et qui offrent, vers chaque sommet, six facettes produites en vertu d'un décroissement par trois rangées sur les bords supérieurs du noyau. Mais ces facettes se combinent avec d'autres qui sont dues à des lois différentes de décroissement. Pour appliquer les formules précédentes aux facettes dont il s'agit, il faut faire $n=3$, $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{2}$.

En substituant ces valeurs, on trouvera,

1°. $f'r : pr :: \sqrt{89} : \sqrt{3}$, ce qui donne $79^d 35' 47''$ pour l'angle $f'pr$, et $159^d 11' 34''$ pour l'incidence de $b'am$ sur $f'am$.

2°. $ye : eh :: \sqrt{20} : \sqrt{3}$, ce qui donne $68^d 49' 43''$ pour l'angle $yhe$, et $137^d 39' 26''$ pour l'incidence de $b'am$ sur la face adjacente à $ab'$.

12. Cherchons s'il y a une loi possible de décroissement pour le dodécaèdre à triangles isocèles, ou composé de deux pyramides droites réunies base à base. Dans ce cas, $yo=b'o$. Donc aussi $nx$ (fig. 5) $=gn'$, ou bien

$$\frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=\sqrt{\tfrac{4}{4}g^2}.$$

(*Voyez* 10, 2°). Ce qui donne $n=2$. Donc la chose est possible, en vertu d'un décroissement par deux rangées.

A l'époque où j'ai publié la première édition de mon Traité, je n'avais pas encore rencontré ce cas dans la nature; mais des variétés de chaux carbonatée que j'ai observées depuis en offrent des exemples, entre autres celle que j'appelle *sténonome*, et sur laquelle je reviendrai à l'article des formes secondaires composées.

13. A mesure que l'arête *am* se relève par son extrémité inférieure, en faisant des angles toujours plus ouverts avec l'axe *ao* (fig. 6), l'angle que fait *b'am* avec la face adjacente à *ab'* va lui-même toujours en augmentant, et il y a un terme où ces faces se trouvent sur un même plan. Le cristal secondaire devient alors un rhomboïde, dont les diagonales obliques se confondent avec les arêtes *ab'*, *af'*, etc.

Pour trouver la loi qui donne ce rhomboïde, j'observe que dans le cas où il a lieu, le cosinus *eh* s'évanouit. Donc (10) alors $\frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^2}{12g^2+a^2}}=0$; ou simplement $n-1=0$. Donc $n=1$, ce qui est d'ailleurs évident, d'après ce qui a été dit plus haut.

Déterminons les deux demi-diagonales du rhomboïde dont il s'agit; soient $g'$ et $p'$ ces deux lignes. *sm* (fig. 5) étant la diagonale oblique du rhomboïde, *mu* sera la perpendiculaire sur l'axe. Donc

$$mu=\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Mais (9, 1°.) d'une autre part,

$$mu=\frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=2\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.\ \text{Donc}\ g'=2g.$$

Remarquons maintenant que dans le même cas la ligne *mu* est relevée de manière qu'elle se trouve sur la direction de *gn*. C'est une suite nécessaire de ce que $sm$ est la diagonale oblique. Donc alors $su=2sr$, et $sm=2sd$. Donc $2p'=2\sqrt{g^2+p^2}$, ou $p'=\sqrt{g^2+p^2}$. C'est-à-dire que la demi-diagonale horizontale $g'$ est double de celle du noyau, et que la demi-diagonale oblique $p'$ est égale à l'arête du noyau.

Ce cas existe dans plusieurs espèces de substances minérales. Mais jusqu'à présent la chaux carbonatée est la seule qui l'ait offert sans mélange d'aucunes facettes produites par d'autres lois de décroissement. J'ai développé plus haut (pag. 100), à l'aide de la synthèse, la structure de la variété qui s'y rapporte, et que je nomme *équiaxe*. Ici $g=\sqrt{3}$, $p\sqrt{2}$, donc $g'=\sqrt{12}$, et $p'=\sqrt{5}$, ce qui donne pour l'angle obtus de chaque rhombe, $114^d 18' 56''$; pour l'angle aigu, $65^d 41' 4''$; pour la plus grande incidence des faces, $134^d 25' 38''$; pour la plus petite, $45^d 34' 22''$; pour les angles de la coupe principale, $139^d 23' 52''$ et $40^d 36' 8''$.

14. Concevons maintenant une suite de rhomboïdes qui aient de telles dimensions, que chacun soit susceptible d'être produit par le suivant considéré comme noyau, en vertu de cette même loi qui a pour expression $\overset{1}{B}$. Si nous désignons par $g$ et $p$ les demi-diagonales de l'un d'eux, qui soit compris entre les extrêmes, et que nous appellerons *générateur*, nous aurons deux séries, l'une descendante, composée des rhomboïdes plus petits que le générateur, l'autre ascendante, composée de ceux qui le

surpassent en volume. Déterminons généralement en fonctions de $g$ et $p$ les demi-diagonales de l'un quelconque des autres rhomboïdes compris dans chaque série, le rang de celui-ci étant désigné par $r$ pour la série descendante, et par $r'$ pour la série ascendante (1).

Soient $\gamma$ et $\pi$ les demi-diagonales du rhomboïde dont il s'agit, en supposant qu'il fasse partie de la série descendante. Si $r=1$, on aura $g=2\gamma$, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 298). Donc $\gamma=\frac{1}{2}g$. Si $r=2$, on aura, par la même raison, $\gamma=\frac{1}{4}g$; si $r=3$, on aura $\gamma=\frac{1}{8}g$. Donc, en général,

$$\gamma=\frac{g}{2^r}, \text{ et } \gamma^2=\frac{g^2}{(2^r)^2}=\frac{g^2}{2^{2r}}=\frac{g^2}{(2^2)^r}=\frac{g^2}{4^r}.$$

Maintenant, puisque l'axe est constant, on a

$$\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}=\sqrt{9p^2-3g^2}, \text{ ou } 3\pi^2-\gamma^2=3p^2-g^2.$$

Donc $3\pi^2-\frac{g^2}{4^r}=3p^2-g^2$; d'où l'on tire

$$3\pi^2=3p^2+\frac{1-4^r}{4^r}.g^2, \text{ et } \pi=\sqrt{p^2+\frac{1-4^r}{3.4^r}.g^2}.$$

Supposons que le rhomboïde soit compris dans la série ascendante, et désignant ses demi-diagonales par $\gamma'$ et $\pi'$, faisons $r'$ successivement égal à 1, 2, 3, etc. Les valeurs correspondantes de $\gamma'$ seront $2g$, $4g$, $8g$, etc.,

(1) M. Malus a fait usage de ce problème dans sa *Théorie de la double réfraction* (pag. 121 et suiv.), et l'a résolu par le calcul aux différences finies.

et en général on aura $\gamma' = 2^r g$. La substitution de cette valeur de $\gamma'$ dans l'équation $3\pi'^2 - \gamma'^2 = 3p^2 - g^2$ donne

$$3\pi'^2 - 4^r g^2 = 3p^2 - g^2. \quad \pi'^2 = \frac{3p^2 + 4^r g^2 - g^2}{3} = p^2 + \frac{4^r - 1}{3} g^2,$$

et $$\pi' = \sqrt{p^2 + \frac{4^r - 1}{3} g^2}.$$

Les perpendiculaires sur l'axe suivent le rapport des demi-diagonales $\gamma$ et $\gamma'$, en sorte que l'on a généralement $\sqrt{\tfrac{1}{3}\gamma^2} = \frac{1}{2^r}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$ et $\sqrt{\tfrac{1}{3}\gamma'^2} = 2^r \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$.

Si dans les équations $\gamma = \frac{g}{2^r}$ et $\pi = \sqrt{p^2 + \frac{1 - 4^r}{3 \cdot 4^r} g^2}$ relatives à la série descendante, on suppose $r$ infinie, la valeur de $\gamma$ devient infiniment petite, et comme l'unité s'évanouit dans la fraction $\frac{1 - 4^r}{3 \cdot 4^r}$, la valeur de $\pi$ se réduit à $\sqrt{p^2 - \tfrac{1}{3}g^2}$ ou $\sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{3}}$, qui représente le tiers de l'axe, dont l'expression est

$$\sqrt{9p^2 - 3g^2};$$

d'où il résulte que, dans ce cas, la diagonale oblique se confond avec l'axe, en sorte que le rhomboïde se trouve converti en une aiguille dont la longueur surpasse infiniment l'épaisseur.

D'une autre part, si dans les équations

$$\gamma' = 2^r g, \text{ et } \pi' = \sqrt{p^2 + \frac{4^r - 1}{3} g^2},$$

qui se rapportent à la série ascendante, on suppose $r$ infinie, la valeur de $\gamma'$ devient elle-même infinie, et les quantités $p^2$ et $-1$ s'évanouissant dans la valeur de $\pi'$, on a $\gamma' : \pi' :: 2^r g : \sqrt{\frac{4^r}{3} g^2} :: \sqrt{3} : 1$ ; c'est-à-dire que le rhomboïde qui répond à cette limite se réduit à un simple plan qui s'étend à l'infini, et que les angles qui représentent ceux du sommet, et qui se trouvent sur le même plan, sont chacun de $120^d$.

Dans la chaux carbonatée, le rhomboïde que j'ai nommé *équiaxe* offre le premier terme de la série ascendante; je prouverai dans la suite que le rhomboïde *binaire* du fer oligiste donne le second terme.

Nous trouverons aussi les deux premiers termes de la série descendante dans les variétés de chaux carbonatée appelées *inverse* et *contrastante*. Tous ces rhomboïdes nous fourniront diverses applications d'un problème qui est lié au précédent, et dont le but est de déterminer la loi de décroissement, en vertu de laquelle le générateur produit immédiatement un rhomboïde quelconque appartenant à l'une des deux séries, et dont le rang $r$ ou $r'$ est donné.

15. Il me reste à démontrer diverses propriétés géométriques qui dérivent des décroissemens sur les bords supérieurs, et qui sont tellement liées entre elles, que l'une étant donnée, les autres en deviennent la suite nécessaire. Mais il faut auparavant indiquer la position d'un solide que l'on peut toujours concevoir comme inscrit dans la forme secondaire

qui présente ces propriétés, et auquel une partie d'entre elles se rapportent.

Soit *sz* (fig. 7) un rhomboïde aigu faisant la fonction de noyau, et soit *sz* (fig. 8) un dodécaèdre à triangles scalènes produit en vertu d'un décroissement sur les bords supérieurs de ce noyau, de manière que *sh*, *sm*, soient les lignes de départ qui répondent à *sa*, *sc* (fig. 7) et ainsi des autres. Si l'on fait passer des plans, l'un par les arètes *lh*, *lm* (fig. 8), un second par les arêtes *ml*, *mn*; un troisième par les arètes *mn*, *no*, etc., ces plans, au nombre de six, intercepteront un rhomboïde que nous désignerons par le nom de rhomboïde hypothétique, pour le distinguer du noyau. Cela posé, voici l'énoncé du problème à résoudre.

Tout rhomboïde aigu dans lequel le rapport de $g^2$ à $p^2$ est rationnel, est susceptible de produire, en vertu d'une loi de décroissement sur les bords B, laquelle dépend du même rapport, un dodécaèdre *sz* (fig. 8) qui réunira les propriétés suivantes :

1°. La plus petite incidence de deux faces de ce dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr* sera égale d'une part à la plus grande incidence de deux faces du noyau, telles que *sabc*, *abzf* (fig. 7), et d'une autre part à l'angle plan obtus *hlm* du rhomboïde hypothétique.

2°. L'incidence de deux faces adjacentes telles que *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets du dodécaèdre, sera égale d'une part à l'angle plan obtus *sab* ou *saf* (fig. 7) du noyau, et d'une autre part à la plus grande incidence de deux faces du rhomboïde hypothétique.

16. Démontrons d'abord qu'il y aura toujours une valeur rationnelle de l'exposant $n$ du décroissement, qui satisfera à la condition que la plus petite incidence des faces du dodécaèdre soit égale à la plus grande des deux faces du noyau.

Soit *pceg* (fig. 9) une coupe transversale de ce noyau, menée par le point $p$ (fig. 8), pris à volonté sur la ligne *sm*, qui coïncide, comme nous l'avons dit, avec un des bords supérieurs du même noyau, et soit *px* (fig. 9) la section du prolongement du rhombe *pceg* sur le plan du triangle *sml* (fig. 8). Soit *pfd* le triangle mensurateur, qui sera semblable au triangle *pcx*. Désignant par $r$ la dimension qui, sur la molécule, répond au côté du rhombe *pceg*, nous aurons $pf : fd :: n \times r : r :: n : 1$.

De plus, si nous menons *cz* perpendiculaire sur *pg*, *pz* sera le cosinus de la plus petite incidence des faces du noyau, le rayon étant représenté par *cp*. Donc $cp : pz :: 2p^2 : p^2 - g^2$. Or, les triangles *czp* et *pdf* ou *pxc*, sont semblables : car l'angle *epx* qui mesure la moitié de la plus petite incidence des faces du dodécaèdre, étant par l'hypothèse égal à $\frac{pce}{2}$, on aura, en retranchant d'une part *cpe*, et de l'autre $\frac{1}{2}cpg$, $epx - cpe$, ou $cpx = \frac{1}{2}(pce - cpg.)$ D'une autre part, l'angle droit *ecz* étant la demi-somme des angles *pce* et *cpg*, qui sont complémens l'un de l'autre, l'angle

$pcz$ en sera la demi-différence. Donc

$$pcz = \tfrac{1}{2}(pce - cpg) = cpx.$$

D'ailleurs, $cpz = pcx$, à cause des parallèles $pg$, $ex$; donc les triangles $czp$ et $pxc$ étant semblables, nous aurons $cp:cx$ ou $pf:fd :: cp:pz$; et $n:1 :: 2p^2:p^2-g^2$, ce qui donne $n = \frac{2p^2}{p^2-g^2}$; et ainsi la première propriété est démontrée possible, d'une manière d'autant plus remarquable, que la valeur de $n$ se trouve représentée par le rapport rationnel entre le rayon et le cosinus de la plus petite incidence des faces du noyau.

Il résulte de la démonstration précédente, que chacun des triangles du dodécaèdre, par exemple celui qui coïncide avec $px$, est perpendiculaire sur la face du noyau adjacente à celle sur laquelle naît le décroissement qui donne le triangle dont il s'agit, c'est-à-dire sur celle qui est dirigée suivant $pg$.

La formule fait connaître que la propriété qu'elle représente ne peut avoir lieu qu'autant que $p$ est plus grand que $g$, c'est-à-dire que le noyau est nécessairement un rhomboïde aigu. La limite de cette propriété répond au terme où $p$ étant égal à $g$, le rhomboïde devient un cube. On a alors $n = \frac{2p^2}{0}$, quantité infinie, ce qui indique que les faces du dodécaèdre se confondent avec celles du noyau cubique.

17. L'égalité suivante est celle qui a lieu entre l'incidence des mêmes faces $hsl$, $hsr$, et l'angle plan

obtus *hlm* du rhomboïde hypothétique. Désignons par $g'$, $p'$, les demi-diagonales de ce rhomboïde. L'incidence de *hsl*, *hsr* étant égale à la plus grande des faces du noyau, ou à l'angle *pce*, comme nous venons de le prouver, et le rapport du sinus *py* au cosinus *cy* de la moitié de cette dernière incidence étant celui de $\sqrt{3p^2-g^2} : \sqrt{g^2+p^2}$, le problème sera résolu, si, dans l'hypothèse de $n=\frac{2p^2}{p^2-g^2}$ on a

$$g':p'::\sqrt{3p^2-g^2}:\sqrt{g^2+p^2}.$$

Supposons deux perpendiculaires menées sur l'axe du dodécaèdre *sz* (fig. 8), l'une d'un des angles latéraux supérieurs, tel que *m*, du rhomboïde hypothétique, l'autre de l'un de ses angles latéraux inférieurs, tel que *r*. Il est facile de concevoir que la partie de l'axe qu'elles intercepteront sera égale au tiers de l'axe du rhomboïde hypothétique. Servons-nous de la figure 5, relative aux décroissemens sur les bords supérieurs, en supposant que la coupe principale *adsg* du noyau appartienne, comme dans le cas présent, à un rhomboïde aigu. Les points *p*, *m*, étant les analogues des points *m*, *r* (fig. 8), *hu* (fig. 5) représentera le tiers de l'axe du noyau hypothétique, et l'on aura

$$hu=au-ah=au-su=\left(\frac{2n-1}{3n}-\frac{(n+1)}{3n}\right)a=\frac{n-2}{3n}a$$
$$=\tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2-3'^2}.$$

D'une autre part,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}=\frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2},\quad \text{ou } \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2}=\frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2}:\tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2-3g'^2}::\frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}:\frac{n-2}{3n}.a,$$

ou $g'^2:3p'^2-g'^2::(n+1)g:(n-2)a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Ajoutant chaque antécédent à son conséquent, et divisant les deux nouveaux conséquens par 3,

$$g'^2:p'^2::(n+1)^2g^2:(n-2)^2\tfrac{1}{9}a^2+(n+1)^2\tfrac{1}{3}g^2;$$

et mettant à la place de $n$ sa valeur $\frac{2p^2}{p^2-g^2}$,

$$g'^2:p'^2::(3p^2-g^2)^2g^2:\tfrac{4}{3}g^4(3p^2-g^2)+(3p^2-g^2)^2\tfrac{1}{3}g^2$$
$$::(3p^2-g^2)g^2:\tfrac{4}{3}g^4+(3p^2-g^2)\tfrac{1}{3}g^2::3p^2-g^2:\tfrac{4}{3}g^2$$
$$+p^2-\tfrac{1}{3}g^2::3p^2-g^2:g^2+p^2.$$

Donc, $g':p'::\sqrt{3p^2-g^2}\quad\sqrt{g^2+p^2}$, ce qu'il fallait trouver.

Puisque l'angle *hlm* ou *lhr* est égal en même temps à l'angle *pce* (fig. 9), et à celui que font entre elles les faces *hsl*, *hsr* (fig. 8), il résulte de cette dernière égalité, que l'arête *hs* est perpendiculaire sur le plan auquel appartient l'angle *lhr*, d'où il suit encore que les angles *shl*, *shr*, et les autres semblablement situés sont droits. Ainsi, tous les dodécaèdres renfermés dans la formule $n=\frac{2p^2}{g^2-g'^2}$ ont cette autre propriété remarquable, que leurs faces sont des triangles rectangles. Par une suite nécessaire, les faces du dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr*, font des angles droits avec la face du rhomboïde hypothétique qui leur est adjacente, c'est-à-dire, dans le cas présent, avec celle que termine l'angle *lhr*. On voit ici reparaître, dans la relation entre les faces du dodécaèdre et celles du noyau hypothétique, la même incidence perpendiculaire qui a déjà été observée dans les positions respectives des faces du dodécaèdre et de celles du noyau.

18. Passons aux analogies qui dérivent de l'incidence des faces *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets. Cette incidence est d'abord égale à l'angle plan obtus *sab*, ou *saf* (fig. 7) du noyau, et cela par une suite nécessaire de ce que les angles *shl*, *shr* (fig. 8), sont droits. Pour le prouver, d'un point quelconque *x* de l'arête *hl*, je mène les lignes *xt*, *xy*, perpendiculaires sur cette arête, et couchées sur les faces *shl*, *lzh*. L'angle *shl* étant droit, *tx* est parallèle à *hs*, qui coïncide avec le bord supérieur *as* du noyau (fig. 7). Par la même raison, *xy* (fig. 8) est parallèle à *lz*, qui coïncide avec le bord inférieur *bz* du noyau (fig. 7). Mais *bz* est parallèle à *af*; donc *xy* (fig. 8) est aussi parallèle à *af* (fig. 7). D'ailleurs *tx* (fig. 8) est parallèle à *as* (fig. 7); donc l'angle *txy* (fig. 8) est égal à l'angle *saf* (fig. 7).

Reste à prouver que l'incidence de *hls* sur *hlz* est aussi égale à la plus grande incidence des faces du rhomboïde hypothétique. Désignant par *s* le sinus de la moitié de l'incidence de *hls* sur *hlz*, et par *c* le cosinus, nous aurons, d'après ce qui vient d'être dit,

$$s : c :: p : g.$$

La question se réduit donc à prouver que l'on a d'une autre part $p : g :: \sqrt{g'^2 + p'^2} : \sqrt{3p'^2 - g'^2}$, puisque ce dernier rapport est celui qui a lieu entre les demi-diagonales de la coupe transversale du noyau hypothétique.

Nous avons eu plus haut,

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2},$$

ou $$g'^2 : p'^2 :: 3p^2 - g^2 : g^2 + p^2.$$

Or, il est facile de transformer cette proportion en celle que nous cherchons. Car, ajoutant chaque conséquent à son antécédent, nous aurons

$$g'^2 + p'^2 : p'^2 :: 4p^2 : g^2 + p^2, \text{ ou } g'^2 + p'^2 : 4p'^2 : p^2 : g^2 + p^2;$$

et retranchant les antécédens des conséquens,

$$g'^2 + p'^2 : 3p'^2 - g'^2 :: p^2 : g^2.$$

Donc $p : g :: \sqrt{g'^2 + p'^2} : \sqrt{3p'^2 - g'^2}$, ce qu'il fallait trouver.

Ce résultat comparé à celui d'où nous l'avons déduit, et qui donne $g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2}$, nous fait connaître que les angles plans du noyau sont égaux aux angles saillans du rhomboïde hypothétique, ou à ceux de sa coupe principale et réciproquement, ce que l'on exprime en disant que chacun des rhomboïdes est l'inverse de l'autre. Cette inversion est donc aussi une propriété inhérente à la valeur $\frac{2p^2}{p^2-g^2}$ de $n$, et offre une nouvelle preuve de sa fécondité. Je traiterai directement, dans la suite, de ces sortes d'inversions, dont plusieurs rhomboïdes de chaux carbonatée offrent des exemples.

19. Je n'ai observé jusqu'ici aucun dodécaèdre produit en vertu d'un décroissement sur les bords supérieurs d'un rhomboïde aigu, qui réalisât complètement les résultats démontrés précédemment. Nous verrons cependant que parmi les formes secondaires originaires du tétraèdre régulier, dont la cristallisation rentre dans celle du rhomboïde, il en est une qui participe des propriétés d'où dépendent ces résultats. De plus, nous ferons connaître un dodécaèdre de chaux carbonatée, qui ne diffère de celui dont il s'agit ici, qu'en ce que le rhomboïde que nous avons considéré comme le noyau, et celui que nous avons nommé hypothétique, y changent de rôle, de manière que le décroissement qui donne le dodécaèdre a lieu sur les bords inférieurs du second rhomboïde.

## II. *Décroissemens sur l'angle supérieur.*

20. Ces décroissemens donneront constamment es rhomboïdes pour formes secondaires. Continuons de nous servir de la figure 5, dans laquelle *ao* représentera la diagonale oblique d'une des faces du

rhomboïde secondaire, et $so$ l'arête contiguë de cette diagonale, en sorte que si du point $o$ on mène une perpendiculaire sur l'axe, elle coïncidera avec $dr$, puisque le point $o$ doit être situé vis-à-vis le tiers de l'axe. De plus, $atz$ qui, dans le cas précédent, remplaçait le véritable triangle mensurateur, deviendra ici d'un usage direct; et la quantité $n$ désignera toujours le nombre des diagonales soustraites, avec la différence qu'il faudra doubler ce nombre pour avoir celui des rangées soustraites.

21. Proposons-nous d'exprimer d'une manière générale les valeurs des deux demi-diagonales $g'$ et $p'$ du rhomboïde secondaire, en supposant que l'on connaisse $g$, $p$ et $n$.

Nous avons d'abord

$$or : ar :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2}.$$

Et parce que les expressions de $mu$ et $au$ restent les mêmes que dans le cas des décroissemens sur les bords supérieurs (9, 1°. et 2°.), nous aurons,

$$or : ar :: mu : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$$
$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2}.$$

Mais l'axe du rhomboïde secondaire est le même que celui du noyau; donc la proportion précédente devient, toute réduction faite, $(n+1)g : 2n-1 :: g' : 2$. D'où l'on tire $g' = 2g\,\frac{(n+1)}{2n-1}$.

Maintenant, à cause de l'égalité des axes,

$$3p'^2 - g'^2 = 3p^2 - g^2; \text{ ou, } 3p'^2 = g'^2 + 3p^2 - g^2;$$

donc aussi,

$$3p'^2 = 4g^2\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 + 3p^2 - g^2;$$

donc

$$p' = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2}.$$

22. Supposons que le décroissement ait lieu par deux rangées, et que le noyau soit le rhomboïde du fer oligiste, représenté (fig. 10), dans lequel $g = \sqrt{9}$ et $p = \sqrt{10}$, ce qui donne $87^d 9'$, pour l'incidence de deux faces prises vers un même sommet. On aura $n = 1$, et la proportion deviendra

$$g' : p' :: \sqrt{144} : \sqrt{55}.$$

J'appelle *fer oligiste binaire* la variété qui offre ce résultat. L'incidence de deux faces *s*, *s* (fig. 11), prises vers un même sommet A′ est de $144^d$, et celle de *s* sur la face adjacente du côté du sommet inférieur est de $36^d$.

Quelquefois le décroissement s'arrête, avant d'avoir atteint sa limite. Alors les faces produites par ce décroissement se réduisent à des triangles isocèles, *s*, *s*, *s* (fig. 12), et il reste sur le cristal des faces P, P, P, parallèles à celles du noyau, et qui sont aussi des triangles, en supposant la forme ramenée à sa limite géométrique. Cette variété porte le nom de *fer oligiste rhomboïdal*. L'incidence de $s$ sur $\acute{P}$ est de $144^d 8'$ (1).

23. Si l'on fait $n=2$, auquel cas le décroissement aura lieu par quatre rangées, on trouve $g'=2g$ et $p'=\sqrt{g^2+p^2}$. Or ce rapport est aussi celui des demi-diagonales d'un rhomboïde secondaire qui résulterait du décroissement $\underset{1}{B}$, autour d'un noyau dont les demi-diagonales seraient $g$ et $p$. Concluons de là que dans la série des rhomboïdes que nous avons considérée plus haut, et dont chacun est susceptible d'être produit par le suivant, pris pour noyau, à l'aide de la loi $\underset{1}{B}$, le même résultat peut aussi avoir lieu en vertu de la loi $\underset{4}{A}$. Nous verrons souvent reparaître, dans le développement de la théorie, ces doubles solutions d'un même problème, dont plusieurs sont réalisées par la cristallisation. Mais celle qui vient de nous occuper est jusqu'ici purement hypothétique.

---

(1) Pour avoir cette incidence, on fera attention qu'elle est égale à la somme des angles *amu* (fig. 5) et *dkn*, dont l'un mesure l'inclinaison de $s$ (fig. 12) sur un plan horizontal qui passe par la base du même triangle, et l'autre celle de P sur le même plan. Le rapport de *mu* à *ou* que nous avons déterminé plus haut (pag. 311), donnera la première inclinaison, et l'on aura la seconde en cherchant d'abord l'angle *akn*, d'après le rapport de *kn* à *an*, ou de $g$ à $\sqrt{3p^2-g^2}$, et en prenant ensuite le supplément de cet angle.

24. Faisons $n=\frac{1}{2}$, ce qui est le cas d'un décroissèment par une rangée. La formule

$$p'=\sqrt{\tfrac{3}{4}g^2\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2+p^2-\tfrac{1}{3}g^2}$$

deviendra $p'=\sqrt{\frac{4}{3}g^2\times\frac{9}{0}+p^2-\frac{1}{3}g^2}$, ce qui signifie que la diagonale oblique $ao$ (fig. 5) est elle-même infinie, et que par conséquent la face sur laquelle elle tombe est horizontale (1). Ce cas a lieu

(1) La construction suivante aidera à concevoir ce que signifient ces sortes de rapports que l'on dit être infinis lorsqu'ils expriment une quantité finie divisée par zéro, et infiniment petits dans le cas contraire. Soient $nm$, $ec$ (fig. 14), deux parallèles qui tombent à angle droit ou autrement sur une droite $cp$. Par un point $d$ pris à volonté sur $nm$, menons $adf$ qui fasse un angle quelconque avec $cp$, puis menons $db$ parallèle à cette dernière ligne. Faisons $ab=x$, $bd=a$, $dm=g$. Nous aurons $x:a::g:fm=\frac{ag}{x}$. Si nous supposons maintenant que la ligne $adf$ restant fixe par le point $d$, s'abaisse par son extrémité $a$, de manière à prendre successivement la position $odp$, et d'autres positions qui soient telles, que le point $o$ tende continuellement vers le point $b$, la ligne $adf$ approchera de plus en plus du parallélisme avec $cp$, qui est la limite de toutes les positions dont il s'agit. En même temps dans l'équation $fm=\frac{ag}{x}$, la quantité $fm$ ira en croissant, et la quantité $x$ diminuera. Or, lorsque $x$ s'évanouit, auquel cas l'équation devient $fm=\frac{ag}{0}$, le point $a$ se confond avec le point $b$, et la ligne $fm$ est infinie, puisqu'elle ne peut

dans la chaux carbonatée, le corindon, le fer oligiste, la tourmaline, etc. Alors, ou bien il se fait un second décroissement d'où résultent des faces latérales dont les intersections limitent la face supérieure, ou bien il reste des faces parallèles à celles du noyau.

Le fer oligiste, entre autres, offre un exemple de cette dernière modification dans la variété que je nomme *fer oligiste basé*, et qui est représentée (fig. 13). L'incidence de P sur la surface *o* qui fait la fonction de base, est de 123$^d$ 14′ (1).

25. Si nous supposons que la ligne *ao* (fig. 5), qui représente en général la diagonale oblique des rhomboïdes secondaires produits par un décroissement sur l'angle supérieur du noyau, dépasse la limite qui répond à $n=\frac{1}{2}$, et qui donne une face perpendiculaire à l'axe, elle se rejettera du côté opposé à celui où naît le décroissement, en prenant une position telle que *ap* (fig. 15). Les faces du

---

plus rencontrer la ligne *af*, qui lui est devenue parallèle, en atteignant la limite de ses positions. On voit par là dans quel sens on doit entendre que le rapport $\frac{ag}{0}$ représente une quantité infinie. C'est sous ce point de vue que la diagonale *ao* (fig. 5) du rhomboïde secondaire étant devenue parallèle, dans le cas que nous venons de considérer, à la ligne *or*, qu'elle rencontrait jusqu'alors, doit être considérée comme une quantité infinie.

(1) Elle est le supplément de l'angle *akn* (fig. 5), dont la détermination est facile, d'après ce qui a été dit plus haut.

rhomboïde secondaire seront tournées alors vers les arêtes *ag* du noyau, au lieu de correspondre à ses diagonales obliques, comme dans les cas précédens. Je donne à ce mode de décroissement le nom de *décroissement inverse*, pour le distinguer de celui dont la figure 5 représente l'effet, et que j'appelle *décroissement direct.*

Dans le cas présent, le décroissement inverse, s'il est simple, sera toujours du nombre de ceux que l'on nomme *décroissement en hauteur*, ou s'il est mixte, le nombre de rangées dont il déterminera la soustraction dans le sens de la hauteur, sera toujours plus grand que le nombre de rangées soustraites en largeur. C'est une suite nécessaire de ce que $n$ est plus petit que $\frac{1}{2}$. Donnons aussi la manière de calculer les effets des décroissemens dont il s'agit ici.

26. Soit *azt* (fig. 15) le triangle mensurateur. Si l'on prolonge *ta* au-dessus de *ag*, la ligne *ay* coïncidera avec la diagonale oblique du rhomboïde secondaire dont la coupe principale est *apsk*.

Ayant prolongé *sg* jusqu'à la rencontre de *ap*, menons *yu* perpendiculaire sur l'axe *as*. Il faut avant tout déterminer le rapport entre *uy* et *au*.

Cherchons d'abord *uy*.

Les triangles semblables *sgm*, *syu* donnent

$$sg : sy :: gm : uy.$$

$sg = 2p$. $sy = sg + gy$. Cherchons $gy$.

Les triangles semblables $atz$, $ayg$ donnent

$$az : tz :: gy : ag,$$

ou $$2p\times n : \sqrt{g^2+p^2} :: gy : \sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc $gy=2np$; donc $sy=2p+2np$.

De plus, $gm=\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$.

La proportion devient donc,

$$2p : 2p+2np :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : uy=(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Reste à trouver $au$.

Or $au=as-us=\sqrt{9p^2-3g^2}-us$.

Cherchons $us$. Les triangles semblables $smg$, $suy$ donnent $sg : sy :: sm : us$; ou

$$2p : 2p+2np :: \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2} : us \text{ (1)}.$$

Donc $us=\frac{2n+2}{3}\sqrt{a^2}$; donc

$$au\text{, ou } \sqrt{a^2}-\left(\frac{2n+2}{3}\right)\sqrt{a^2}=\frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2};$$

donc $$uy : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2}.$$

27. Déterminons maintenant d'une manière générale les valeurs des deux demi-diagonales $g'$ et $p'$ du rhomboïde secondaire. Il est d'abord évident que dans ce rhomboïde $lm$ est la demi-perpendiculaire sur l'axe, et $am$ est le tiers de cet axe; et parce

---

(1) La quantité $a$ désigne l'axe du noyau.

que $ml$ et $am$ sont proportionnelles à $uy$ et $au$, nous aurons

$$(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n}{3}\sqrt{9p^2-3g^2} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2-3g'^2}.$$

Si l'on supprime les valeurs des axes qui sont égaux, et que l'on simplifie les autres quantités, la proportion devient, $2g(n+1) : 1-2n :: g' : 1$; d'où l'on tire

$$g' = 2g\left(\frac{n+1}{1-2n}\right).$$

Maintenant, à cause de l'égalité des axes, on a

$$3p'^2 - g'^2 = 3p^2 - g^2,$$

ou

$$p'^2 = \tfrac{1}{3}g'^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2 = \tfrac{1}{3}\cdot 4g^2\left(\frac{n+1}{1-2n}\right)^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2.$$

Donc $p' = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2\left(\frac{n+1}{1-2n}\right)^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2}.$

28. Les mêmes rhomboïdes qui résultent d'un décroissement direct sur l'angle supérieur, et dont les faces sont tournées vers les diagonales obliques du noyau, sont encore susceptibles d'être produits en vertu d'un décroissement inverse, de manière que leurs faces correspondent aux arêtes du noyau. Cherchons une formule à l'aide de laquelle étant donnée la loi relative à l'un de ces rhomboïdes, on puisse connaître celle d'où l'autre dépend. Soit toujours $n$ le nombre des diagonales soustraites dans le décroissement direct; désignons par $n'$ le nombre correspondant pour le décroissement inverse. Si l'on

compare les formules qui expriment, relativement aux deux rhomboïdes, les demi-diagonales $g'$ et $p'$, on verra qu'elles ne diffèrent que par le facteur qui renferme la quantité $n$, et qui est d'une part $\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2$, et d'une autre part $\left(\frac{n'+1}{1-2n'}\right)^2$, $n'$ devant être substitué à $n$ dans la seconde. Donc puisque les diagonales sont égales, on aura

$$\frac{n+1}{2n-1}=\frac{n'+1}{1-2n'},$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{2-n'}{4n'+1} \quad \text{et} \quad n'=\frac{2-n}{4n+1}.$$

Ces formules indiquant les mêmes fonctions réciproques entre $n$ et $n'$, l'une d'elles, prise à volonté, par exemple la première, qui est $n=\frac{2-n'}{4n'+1}$, suffit pour la solution des deux espèces de problèmes; c'est-à-dire que l'on peut supposer indifféremment à $n'$ une valeur moindre ou plus grande que la fraction $\frac{1}{2}$, relative à un rhomboïde qui, dans le premier cas, naîtra d'un décroissement inverse, et dans le second d'un décroissement direct; la valeur qui en résultera pour $n$ se rapportera au rhomboïde correspondant, produit en vertu d'un décroissement direct ou inverse.

29. Lorsque dans la formule on fait $n'=\frac{1}{2}$, comme cela doit être, les triangles mensurateurs *azt* (fig. 5) et *azt* (fig. 15) étant alors égaux et semblables, les lignes *ao* (fig. 5) et *ap* (fig. 15), coïncident sur une même direction perpendiculaire à l'axe *as*.

Si l'on fait $n'=1$, on trouvera $n=\frac{1}{5}$, qui indique que le décroissement direct par deux rangées en largeur a pour analogue un décroissement mixte par deux rangées dans le même sens, et par cinq rangées en hauteur. Si l'on substitue la seconde valeur à la place de $n$ dans les expressions de $g'$ et de $p'$ relatives au décroissement inverse, et si l'on fait $g=\sqrt{9}$, $p=\sqrt{10}$, comme dans le fer oligiste, on aura

$$g':p'::6.2:\sqrt{12.4+10-3}::\sqrt{144}:\sqrt{55},$$

ce qui est le même rapport que nous avons trouvé pour le fer oligiste binaire (22). Mais ce double emploi d'une même forme produite par les deux décroissemens dont il s'agit, ne s'est, point encore rencontré parmi les produits de la cristallisation.

Soit $n'=2$; on trouvera $n=\frac{0}{9}$, quantité infiniment petite, qui fait connaître que dans ce cas la ligne $ap$ (fig. 15) se confond avec la ligne $ag$, c'est-à-dire que le rhomboïde secondaire est semblable à celui qui résulte d'un décroissement par une rangée sur les bords supérieurs du noyau. Nous avons déjà obtenu (23) le même résultat par une méthode différente.

Au reste, nous verrons dans la suite que les résultats des décroissemens inverses dont nous venons de parler rentrent parmi ceux des décroissemens intermédiaires auxquels il paraît souvent plus naturel de les rapporter. Mais la méthode précédente peut servir à en simplifier le calcul.

### III. *Décroissemens sur les bords inférieurs.*

30. Les solides secondaires qui naissent de cette espèce de décroissement sont toujours des dodécaèdres à faces triangulaires scalènes, dont un des côtés se confond avec une des arêtes latérales $bd$, $df$, $fq$, etc. (fig. 1) du rhomboïde primitif.

Soit $adsg$ (fig. 16) la coupe principale de ce rhomboïde, $pu$ l'axe du dodécaèdre secondaire, $pd$, $du$ deux arêtes contiguës de ce dodécaèdre. Soit $dho$ le triangle mensurateur, dans lequel $ho$ sera égal à une arête de molécule, et $dh$ à autant de diagonales obliques de molécule qu'il y aura de rangées soustraites. Soit $n$ le nombre de ces diagonales, $p'$ la moitié de l'une des mêmes diagonales, et $g'$ la moitié de la diagonale horizontale.

Nous aurons $ho = \sqrt{g'^2 + p'^2}$ et $dh = 2np'$.

31. Déterminons d'abord la partie $ap$ de l'axe du cristal secondaire, ou la quantité dont cet axe dépasse de chaque côté celui du noyau.

Ayant prolongé $ga$ jusqu'à la rencontre de $dp$, nous aurons les triangles semblables $pal$, $psd$, qui donnent $ds : ps :: al : ap$.

Or, 1°. $ds = \sqrt{g^2 + p^2}$.

2°. $ps = ap + as = ap + \sqrt{9p^2 - 3g^2}$.

3°. Pour $al$. Les triangles semblables $dho$, $dal$, donnent $dh : oh :: ad : al$.

Ou $\quad 2np' : \sqrt{g'^2 + p'^2} :: 2p : al = \frac{p}{n}\sqrt{\frac{g'^2 + p'^2}{p'^2}}$.

Et parce que les dimensions des molécules sont proportionnelles à celles du noyau, on aura, en substituant le rapport $\frac{g^2+p^2}{p^2}$ au rapport $\frac{g'^2+p'^2}{p'^2}$,

$$al = \frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc la proportion $ds : ps :: al : ap$ devient

$$\sqrt{g^2+p^2} : ap + \sqrt{9p^2-3g^2} :: \frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2} : ap.$$

D'où l'on tire $\quad ap = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2}.$

32. Déterminons maintenant les incidences respectives des faces du dodécaèdre, aux endroits des arêtes contiguës aux sommets. Soit $as$ (fig. 17) le noyau, et $bpd$, $dpf$, $fpq$ trois des faces du dodécaèdre. Menons la demi-diagonale horizontale $de$ du rhombe $dfqs$, puis ayant prolongé $pf$, menons $dk$ perpendiculaire sur ce prolongement, et joignons les points $k$, $e$, par une droite. L'angle $dke$ mesurera la moitié de l'incidence de $dpf$ sur $fpq$.

D'une autre part, menons la demi-diagonale horizontale $fc$ du rhombe $abdf$, puis $fz$ perpendiculaire sur $dp$, et joignons les points $c$, $z$, par une droite. L'angle $fzc$ mesurera la moitié de l'incidence du triangle $fpd$ sur $bpd$, et il est facile de voir que cette incidence sera toujours plus grande que la première.

Cherchons d'abord $de$ et $ek$.

Il est évident que $de = g$. Reste à trouver $ek$.

Soit $pg$ (fig. 16) l'arête qui passerait par les mêmes points (fig. 17), et qui sera égale à $pf$. Menons $sy$ (fig. 16) perpendiculaire sur le prolongement de $pg$, et par le milieu $e$ de $sg$ une autre perpendiculaire $ek$ sur le même prolongement. Celle-ci sera la même que $ek$ (fig. 17), et nous aurons sa valeur, au moyen de celle de $sy$ qui en est le double.

Les triangles semblables $png$, $pys$, donnent

$$pg : gn :: ps : sy.$$

1°. Pour $pg$. Nous avons $pg = \sqrt{(pn)^2 + (gn)^2}$.

$$pn = ap + an = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2 - 3g^2} + \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$$

$$= \frac{n+2}{3n-3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} \quad (31).$$

$gn = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$. Donc $pg = \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2}$.

2°. Connaissant déjà $gn$, cherchons $ps$.

Or $ps = ap + as = \frac{1}{n-1}\sqrt{a^2} + \sqrt{a^2} = \frac{n}{n-1}\sqrt{a^2}$.

Donc, la proportion $pg : gn :: ps : sy$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \frac{n}{n-1}\sqrt{a^2} : sy$$

$$= \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\tfrac{4}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2}}.$$

Prenant donc la moitié de cette expression pour la valeur de $ek$ (fig. 17), nous aurons

$$de : ek :: g : \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2} : \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{1}{3}a^2}.$$

Cherchons aussi $fc$ et $cz$.

$fc = g$. Reste à trouver $cz$.

Du point $a$ (fig. 16) pris à l'extrémité de l'axe, et du point $c$ pris au milieu de $ad$, menons $ax$ et $cz$ toutes deux perpendiculaires sur $dp$. $cz$ sera la même ligne que fig. 16, et $ax$ en sera le double.

Or, les triangles semblables $prd$, $pxa$ donnent

$$dp : dr :: ap : ax.$$

$dr$ et $ap$ étant déjà connues, il ne faut plus que chercher $dp$.

Nous avons $dp = \sqrt{(pr)^2 + (dr)^2}$.

$$pr = ap + ar = \frac{1}{n-1}\sqrt{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a^2} = \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{a^2}$$

(*voyez* 31).

Donc $dp = \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2}$.

Donc la proportion devient,

$$\sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2} : \sqrt{\frac{4}{3}g^2} :: \frac{1}{n-1}\sqrt{a^2} : ax.$$

Prenant la moitié de la valeur de $ax$, nous aurons $cz$

(fig. 16); et

$$fc : cz :: g : \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 \frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2} : \left(\frac{1}{n-1}\right)\sqrt{\frac{1}{3}a^2}.$$

33. Déterminons encore l'incidence de l'une quelconque *dpf* (fig. 17) des faces situées vers l'un des sommets, sur la face adjacente, de l'autre côté de *df*, vers le sommet opposé.

Soit *abcd* (fig. 18) la coupe transversale du noyau, et *bzx* le triangle mensurateur. Du point *x* abaissons *xm* perpendiculaire sur la diagonale *bd*, et par le point *z* menons *zt* perpendiculaire sur *xm*. Soient $g'$, $p'$ les demi-diagonales qui, sur la molécule, répondent à *bo* et *ao*, et soit *r* la dimension qui, sur la même molécule, répond à *ab*. Nous aurons $bz = n + r$, et $xz = r = sz$; de plus *st* ou $tx = p'$ et $tz = g'$; et il est facile de voir que l'angle *xbm* mesurera la moitié de l'incidence cherchée. La question se réduit donc à trouver le rapport entre le sinus *mx* et le cosinus *bm* de cet angle.

Les triangles semblables *bsm*, *tsz* donnent $bs : sz :: ms : st$, ou, $bs : 2sz :: ms : 2st$ et $bs + 2sz$, ou $bz + sz : 2sz :: ms + 2st$ ou $mx : 2st$. Donc $nr + r : 2r :: mx : 2p'$, ou $n + 1 : 1 :: mx : p'$. Donc $mx = (n + 1)p'$. D'une autre part, les mêmes triangles donnent $bs : sz :: bm : tz$, et $bz - sz$ ou.....

$nr - r : r :: bm : g'$; ou, $n - 1 : 1 :: bm : g'$. Donc $bm = (n - 1)g'$. Donc $mx : bm :: (n+1)p' : (n-1)g'$.

34. Voici une autre manière de parvenir au même résultat. Ayant prolongé $xz$ jusqu'à la rencontre $h$ de $bd$, j'observe que $mx$ contient autant de fois $p'$ que $xz$ ou $r$ est contenu de fois dans $hx$. Mais

$$hx = hz + xz = bz + xz = nr + r = (n+1)r.$$

Donc $mx = (n+1)p'$. D'une autre part, $bm$ contient autant de fois $g'$ que $r$ est contenu de fois dans $bs$; mais $bs = bz - sz = nr - r = (n-1)r$.

Donc $$bm = (n - 1)g'.$$

Donc $$mx : bm :: (n+1)p' : (n-1)g'.$$

Or, les formules relatives aux propriétés générales des rhomboïdes (p. 285) donnent

$$p' : g' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2};$$

d'où l'on conclura que

$$mx : bm :: (n+1)\sqrt{3p^2 - g^2} : (n-1)\sqrt{g^2 + p^2}.$$

35. Avant d'appliquer les différentes expressions que nous venons de trouver, je vais démontrer plusieurs propriétés générales relatives au mode de décroissement que nous considérons ici.

La première consiste en ce que le rapport des solidités du solide primitif et du dodécaèdre secondaire, est le même que celui des axes, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de $p$ et de $g$.

Pour le démontrer, faisons passer un premier plan par *dps*, et un second par *spf*; ces deux plans joints à *dpf* et *dfs* intercepteront une pyramide triangulaire, dont nous supposerons le sommet en *f*, d'où il suit que la base sera *dps*.

D'une autre part, nous aurons dans le rhomboïde une pyramide correspondante, dont les faces seront *das*, *saf*, *daf* et *dfs*. Supposons de même le sommet en *f*; la base sera *das*. Or cette base est à la base *dps* de la première pyramide comme

$$as : ps :: a : a + \frac{1}{n-1} a.$$

Donc puisque les deux sommets se confondent, les solidités des pyramides seront entre elles dans le rapport des mêmes quantités. Mais la partie du dodécaèdre dont il s'agit ici est composée de six pyramides, ainsi que le rhomboïde. Donc la solidité du rhomboïde est aussi à celle de cette partie, comme

$$a : a + \frac{1}{n-2} a.$$

Donc si l'on désigne par $d^2$ l'excès de cette même partie sur le rhomboïde, la solidité de celui-ci sera à $d^2 :: a : a \frac{1}{n-1} a - a$ ou $:: a : \frac{1}{n-1} a$. Or, la solidité du dodécaèdre entier est $a + 2d^2$; donc celle du rhomboïde est à celle du dodécaèdre

$$:: a : a + \frac{2}{n-1} a;$$

et il est facile de voir que ce rapport est aussi celui des axes.

Ce même rapport réduit à sa plus simple expression, est $\frac{n-1}{n+1}$, d'où l'on voit que pour avoir sa valeur numérique dans chaque cas particulier, il faut diviser l'exposant de la loi du décroissement, diminué d'une unité, par le même exposant augmenté d'une unité.

36. Voici une autre propriété dont la détermination est le sujet d'un problème qui peut être énoncé de la manière suivante : Tout rhomboïde obtus, dans lequel les carrés des demi-diagonales $g$ et $p$ sont en rapport rationnel, peut être transformé, à l'aide d'un décroissement sur les bords inférieurs, dont la mesure dépend des valeurs de $g$ et $p$, en un dodécaèdre dans lequel le grand angle *pfd* de chaque face est égal au grand angle *baf* du noyau, et la plus petite incidence de deux faces voisines, telles que *dpf*, *gpf* est égale à l'incidence de deux faces situées vers un même sommet du noyau, telles que *bafd*, *gafq*.

Remarquons d'abord que l'égalité des angles plans et celle des angles saillans ou des incidences, sont tellement liées entre elles, que l'une ne peut exister sans l'autre. Car les angles *dfp*, *qfp*, par exemple, étant égaux à l'angle *dfq*, il en résulte que les trois faces *dpf*, *qpf*, *dfqs*, dont les deux premières appartiennent au dodécaèdre, et la dernière au noyau, ont la même situation respective que celles qui se réunissent vers un même sommet $a$ du noyau, et par conséquent l'incidence de *dpf* sur *qpf*, est la même que celle de deux faces quelconques prises autour du sommet $a$. Cela posé, nous pouvons faire dépendre la solution du problème de cette seule condition, que l'incidence de $dpf$ sur $dfqs$, soit égale à celle de $abdf$ sur la face située le long de $ab$ derrière le rhomboïde.

Soit $amhl$ (fig. 19) la coupe transversale de ce rhomboïde, prise par un plan qui en partant du point $a$, coupe perpendiculairement l'arête $df$. Ayant prolongé $la$, menons $my$, de manière que l'angle $ymh$ soit égal à $mal$ ou $mhl$, auquel cas $my$ sera sur la direction de la face $dpf$ (fig. 17), en sorte que l'angle $ymh$ (fig. 19) représentera l'incidence de $dpf$ (fig. 17) sur $dfqs$, et l'angle $mal$ (fig. 19) celle de $abdf$ (fig. 17) sur la face dont $ab$ fait la jonction avec ce rhombe. Or, $my$ et $hl$ étant inclinées de la même quantité entre les parallèles $hm$, $ly$, on a $my = hl = am$. Menons $mt$ perpendiculaire sur $ay$, et qui la divisera en deux parties égales. Les formules générales relatives à la valeur du cosinus de la plus petite incidence respective des faces d'un rhomboïde, dans lequel $g^2$ et $p^2$ sont des quantités rationnelles (6, 2°.), donnent

$$ma : at :: 2p^2 : g^2 - p^2;$$

donc $\quad ma : ay :: 2p^2 : 2g^2 - 2p^2 :: p^2 : g^2 - p^2$.

Soit $mbc$ le triangle mensurateur; désignant par $n$ le nombre de rangées soustraites, et par $r$ la dimension qui, sur la molécule, répond à $ma$, nous aurons

$$mb : bc :: n \times r : r :: ma : ay :: p^2 : g^2 - p^2.$$

D'où l'on tire, $n : 1 :: p^2 : g^2 - p^2$, et $n = \frac{p^2}{g^2 - p^2}$; c'est-à-dire que la valeur de $n$ est la moitié du rapport entre la ligne *am* prise pour rayon, et le cosinus de l'angle *amh*.

37. La propriété dont il s'agit ne peut convenir qu'à un rhomboïde obtus, en sorte que sa limite répond au cas où le noyau est un cube. Alors $g = p$, et $n = \frac{p^2}{0}$, quantité infinie.

Passé cette limite, l'égalité ne peut subsister entre les angles *dfq*, *dfp* et *qfp* (fig. 17), sans que les faces du dodécaèdre ne s'abaissent en dessous de celles du rhomboïde. Pendant ce mouvement, celles qui étaient les moins inclinées, telles que *pfd*, *pfq* continueront de faire entre elles des angles saillans, égaux aux incidences des faces prises vers un même sommet sur le rhomboïde; mais les plus inclinées, telles que *pfd*, *pbd*, feront entre elles des angles rentrans, en sorte que la supposition présente sort des bornes entre lesquelles sont renfermées les lois de la structure qui excluent ces sortes d'angles dans les cristaux simples.

38. On parviendrait au même résultat, en partant de l'observation que l'angle *dke* (fig. 17) doit être égal à l'angle *mar* (fig. 19), dans le cas de la propriété dont il s'agit, le premier étant la moitié de l'incidence relative aux faces du dodécaèdre, et le second étant la moitié de celle qui a lieu pour les

faces du noyau; et parce que l'on a $mr = de$ (fig. 17) $= g$, on aura aussi $ek = ar$ (fig. 19); or,

$$am = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}} \ (6, 2^{\circ}.).$$

Donc $ar$ ou

$$\sqrt{(am)^2 - (mr)^2} = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2} - g^2} = \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{g^2+p^2}}.$$

Donc, pour résoudre le problème, il suffira d'égaler cette valeur à celle de $ek$, qui est

$$\frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 + \frac{4}{3}g^2}} \ (32, 2^{\circ}.).$$

Substituant dans celle-ci $9p^2 - 3g^2$ à la place de $a^2$, et faisant les opérations convenables, on trouve

$$n = \frac{p^2}{g^2 - p^2},$$

comme ci-dessus. Mais cette solution est beaucoup moins simple que la première.

39. L'espèce de décroissement qui nous occupe a fourni le sujet d'un autre problème qui ne diffère que par le générateur auquel il se rapporte, de celui dont la solution nous a servi à développer les propriétés du dodécaèdre *sz* (fig. 8). Dans ce dernier solide, le noyau est le rhomboïde dont les faces se confondent avec les plans *hsm*, *mso*, *osh*, etc., et le décroissement a lieu sur les bords supérieurs de ce noyau.

L'autre rhomboïde dont les faces coïncident avec les plans *hlm*, *mno*, *orh*, etc., a été considéré comme n'étant qu'hypothétique. Ici les lois de la structure suivent l'ordre inverse, en sorte que le problème ramené à ce nouveau point de vue doit être énoncé de la manière suivante.

Tout rhomboïde obtus, dans lequel le rapport de $g^2$ à $p^2$ est rationnel, est susceptible de produire, en vertu d'une loi de décroissement sur les bords D, dont la mesure dépend du même rapport, un dodécaèdre dont voici les propriétés.

1°. La plus petite incidence de deux faces du dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr* (fig. 8), sera égale soit à l'angle plan obtus *hlm* du noyau, soit à la plus grande incidence des faces du rhomboïde hypothétique, par exemple de celles qui se confondent avec les plans *hsm*, *lzn*. Par une suite de la première propriété, les plus grands angles *shl*, *hlz*, etc., des faces du dodécaèdre seront droits, et ses arêtes les plus saillantes, telles que *sh*, seront perpendiculaires chacune sur la face *rhl* du noyau, vers laquelle cette arête est tournée.

2°. L'incidence de deux faces adjacentes, telles que *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets du dodécaèdre, sera égale, d'une part à la plus grande incidence de deux faces du noyau, et d'une autre part à l'angle plan obtus des faces du rhomboïde hypothétique, ou ce qui est la même chose, au supplément de l'angle *hsm*.

Nous avons vu que ces différentes propriétés sont liées à la condition que l'exposant du décroissement sur les bords supérieurs, que nous désignerons maintenant par $n'$, ait une valeur rationnelle en fonction des demi-diagonales $g'$ et $p'$ du rhomboïde qui dans le cas présent devient hypothétique. Or, en laissant subsister ici cette condition, il ne nous reste qu'à prouver qu'il y a aussi pour l'exposant $n$ du décroissement sur les bords inférieurs, une valeur rationnelle dépendante du rapport entre les demi-diagonales $g$ et $p$ du véritable noyau. Or, il est très facile de s'en convaincre, en faisant attention que les angles $shl$, $shr$, étant droits, chacune des faces $lsh$, $rsh$, est nécessairement perpendiculaire sur le plan $rhl$. Car soit $malh$ (fig. 19) la coupe transversale du noyau, prise de manière que le point $m$ coïncide avec le point $x$ (fig. 8). Menons $mt$ (fig. 19) perpendiculaire sur le prolongement du côté $la$, et qui coïncidera avec $tx$ (fig. 8) perpendiculaire sur $hl$, en sorte que l'angle droit $tmh$ (fig. 19) sera celui que forme la face $lsh$ (fig. 8) avec le plan $rhl$ qui appartient à l'une des faces du noyau. Soit $mou$ (fig. 19) le triangle mensurateur, et $r$ la dimension qui, sur la molécule, répond à $ma$. Le calcul relatif à la valeur du cosinus $at$ du petit angle $amn$ de la coupe transversale donne $ma : at :: 2p^2 : g^2 - p^2 :: mo : ou :: n' + r : r$; d'où l'on tire, $n' = \frac{2p^2}{g^2 - p^2}$, ce qui est l'expression du cosinus du petit angle saillant du noyau, laquelle est semblable à celle que nous avions trouvée pour $n$

(p. 305). Cette conformité entre les deux expressions est une suite de ce que chaque face du dodécaèdre, telle que *hls*, fait un angle droit avec la face soit du noyau, soit du rhomboïde hypothétique, située de l'autre côté de l'arête sur laquelle naît le décroissement qui donne *hls*.

40. On peut obtenir immédiatement la valeur de $n'$, en égalant $p$ au cosinus de la moitié de la plus petite incidence des faces du dodécaèdre ; mais, dans ce cas, le calcul est beaucoup moins simple. Supposons que les faces dont il s'agit soient représentées par *dpf*, *gpf* (fig. 17). On aura (32, 2°.) $ek = p$,

ou $$\frac{n'}{n'-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n'+2}{3n-3}\right)^2 a^2+\frac{3}{4}g^2}}=p.$$

Elevant au carré, $$\frac{3n'^2a^2g^2}{(n'+2)^2a^2+12(n'-1)^2g^2}=p^2\,;$$

$$3n'^2a^2g^2=(n'+2)^2a^2p^2+12(n'-1)^2g^2p^2.$$

Substituant à la place de $a^2$ sa valeur $9p^2-3g^2$, et divisant tout par 3, puis réduisant,

$$n'^2+n'\frac{(4p^4-4g^2p^2)}{g^4-2g^2p^2+p^4}+\frac{4p^4}{g^4-2g^2p^2+p^4}=0.$$

Si l'on divise les deux termes de la fraction qui multiplie $n'$, par $g^2-p^2$, on aura

$$n'^2-\frac{n'\times 4p^2}{g^2-p^2}+\frac{4p^4}{g^4-2g^2p^2+p^4}=0.$$

Or, le premier membre est un carré parfait, dont la racine est $n' = \frac{2p^2}{g^2-p^2}$. Donc $n' = \frac{2p^2}{g^2-p^2}$ comme ci-dessus.

41. Si l'on substitue cette valeur de $n'$ dans le rapport de $mx$ à $bm$ (fig. 18), ou

$$(n'+1)\sqrt{3p^2-g^2} : (n'-1)\sqrt{g^2+p^2},$$

qui a été trouvé plus haut, et qui donne l'incidence de deux faces adjacentes situées vers les deux sommets du dodécaèdre, on aura

$$\begin{aligned} mx:bm &:: \left(\frac{2p^2}{g^2-p^2}+1\right)\sqrt{3p^2-g^2} : \left(\frac{2p^2}{g^2-p^2}-1\right)\sqrt{g^2+p^2} \\ &:: (g^2+p^2)\sqrt{3p^2-g^2} : (3p^2-g^2)\sqrt{g^2+p^2} \\ &:: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2-g^2}. \end{aligned}$$

Or, ce rapport est celui de $ao$ à $bo$ (p. 285), comme cela doit être, puisque l'incidence dont nous avons parlé est égale à l'angle que font entre elles deux faces situées vers un même sommet du générateur, ainsi que nous l'avons déjà prouvé.

Lorsque $g = p$, on a $n' = \frac{2p^2}{0}$, ce qui signifie que la limite de la propriété dont il s'agit répond au cas où le noyau est un cube.

42. Les formules $n = \frac{p^2}{g^2-p^2}$ et $n' = \frac{2p^2}{g^2-p^2}$ sont susceptibles d'une infinité d'applications différentes, suivant les diverses valeurs que l'on peut supposer pour $g$ et $p$. Mais parmi ces applications, les seules admissibles sont celles où les valeurs de $n$ et de $n'$

n'excèdent pas la mesure des décroissemens ordinaires. Nous allons voir que quelques-uns des rhomboïdes obtus offerts par la nature se prêtent à cette condition, et qu'il existe même des cristaux secondaires, qui jouissent des propriétés que représentent les formules dont il s'agit.

Si l'on fait $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée, on trouve $n = 2$ et $n' = 4$. Le premier de ces résultats a lieu dans une variété représentée (fig. 46, pl. 3), et dont j'ai développé plus haut la structure, à l'aide de la synthèse. Je l'appelle chaux *carbonatée métastatique*, c'est-à-dire de transport, parce que la loi dont elle dépend semble avoir transporté sur elle les angles de la forme primitive.

43. Si l'on substitue les valeurs précédentes de $g$ et de $p$ dans les formules relatives aux angles saillans du dodécaèdre, on trouve

$$fc : cz \text{ (fig. 17)} :: \sqrt{29} : \sqrt{3},$$

ce qui donne $144^d 20' 26''$ pour l'incidence de *fpd* sur *bpd*; et $de : ek :: \sqrt{5} : \sqrt{3}$, ce qui donne $104^d 28' 40''$ pour l'incidence de *fpd* sur *fpq*, la même que celle de *bafd* sur *agqf*, ainsi que cela doit être, d'après ce qui a été dit.

Ce dernier résultat nous fournit un moyen très simple pour avoir l'inclinaison de l'une quelconque *dpf* des faces du dodécaèdre sur celle qui lui est adjacente, en dessous de l'arête *df*. Car cette inclinaison est égale à celle de *dpf* sur *dfqs*, plus à la différence entre cette dernière et celle de *bafd* sur *dfqs*. Or, l'inclinaison de *dpf* sur *dfqs* est de $104^d 28' 40''$, d'après ce qui a été dit. Celle de *bafd* sur *dfqs*, supplément de la précédente, est de $75^d 31' 20''$. La différence est donc $28^d 57' 20''$. Ajoutant cette différence à $104^d 28' 40''$, on trouve $133^d 26'$ pour l'inclinaison cherchée.

41. Soit maintenant *bafd* (fig. 20) le même rhombe que fig. 17. Menons *by* qui coupe *af* en deux parties égales. Je dis que le triangle *bay* est semblable à l'un quelconque *dpf* (fig. 17) des triangles du dodécaèdre secondaire, de manière que les côtés de celui-ci sont doubles de ceux de l'autre.

Evaluons d'abord les trois côtés du triangle *pdf*.

Nous avons, 1°. $df = \sqrt{g^2 + p^2} = \sqrt{5}$.

2°. *dp* qui est la même ligne que fig. 16

$$= \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{36} g^2} = \sqrt{\tfrac{25}{9} \cdot 9 + 4} = \sqrt{29}$$

(voyez 32, 2°.).

3°. *pg* (fig. 16) = *pg* ou *pf* (fig. 17)

$$= \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{36} g^2} = \sqrt{\tfrac{16}{9} \cdot 9 + 4} = \sqrt{20}$$

(voyez 32, 2°.).

Evaluons pareillement les trois côtés du triangle *bay* (fig. 20).

1°. $ay = \frac{1}{2}af = \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}df$ (fig. 17).

2°. Ayant mené $ym$ perpendiculaire sur $bf$ (fig. 20), nous aurons

$$by = \sqrt{(bm)^2 + (my)^2} = \sqrt{(\tfrac{3}{4}bf)^2 + (\tfrac{1}{2}ae)^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{9}{16}.12 + \tfrac{1}{4}.2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{29} = \tfrac{1}{2}dp \text{ (fig. 17).}$$

3°. $ab$ (fig. 20) $= \sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \frac{1}{2}pf$ (fig. 17). Donc, etc.

On voit aussi que le moyen côté $pf$ du triangle $dpf$ est double du petit côté. Ces résultats sont particuliers à la chaux carbonatée métastatique.

42. Cette variété nous fournit encore le sujet d'un problème dont je donnerai dans la suite une autre solution. Il consiste à déterminer, d'après certaines données, le rapport entre les deux demi-diagonales $g$ et $p$ du noyau, ce qui permet ensuite de calculer les angles tant de ce noyau que des formes secondaires, avec une précision rigoureuse.

Choisissons pour données l'égalité observée entre les angles $pfd$ et $dfq$ (fig. 17), et la loi de décroissement par deux rangées, d'où résulte le cristal métastatique, ou, si on l'aime mieux, l'égalité entre la partie de l'axe de ce cristal qui excède celui du noyau de part et d'autre, et cet axe lui-même. Il s'agit, d'après ces deux données, de trouver le rapport entre $g$ et $p$.

Pour y parvenir, j'observe que l'angle $pfd$ étant égal à l'angle $dfq$, ou, ce qui revient au même, à l'angle *baf*, les angles *dfk* et *dfa*, qui sont les supplémens des précédens, seront aussi égaux. Donc puisque *df* est égale à *af*, le sinus *dk* de l'angle *dfk* sera égal au sinus *am* (fig. 1) de l'angle *dfa* (fig. 17).

Or $am = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}}$.

Reste à trouver *dk*, pour mettre sa valeur en équation avec celle de *am*.

Le triangle *dek* est rectangle en *e*. Car le plan *dfs* étant perpendiculaire sur le plan *afs*, l'est aussi sur le plan *pfs* qui coïncide avec *afs*. Donc puisque *de* est en même temps couchée sur le plan *dfs* et perpendiculaire sur la commune section *fs* de ce plan avec *pfs*, elle sera aussi perpendiculaire sur ce dernier plan. Donc *ke* située sur le prolongement de *pfs*, et qui passe par le pied de *de* sera perpendiculaire sur cette dernière ligne. Donc le triangle *dek* est rectangle.

Donc $dk = \sqrt{(de)^2 + (ek)^2}$.

Or $de = g$. $ek = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{3}g^2}}$

(voyez 46). Et parce que $n = 2$,

$$ek = 2\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2a^2 + \frac{4}{3}g^2}} = \sqrt{\frac{3a^2g^2}{4a^2+3g^2}}.$$

Donc

$$dk = \sqrt{g^2 + \frac{3a^2g^2}{4a^2+3g^2}} = \sqrt{\frac{7a^2g^2+3g^4}{4a^2+3g^2}}.$$

22.

Egalant les valeurs des carrés de *dk* et *am*,

$$\frac{7a^2g^2+3g^4}{4a^2+3g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}.$$

Et substituant à la place de $a^2$ sa valeur $9p^2-3g^2$,

$$\frac{7g^2(9p^2-3g^2)+3g^4}{4(9p^2-3g^2)+3g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{7g^2p^2-2g^4}{4p^2-g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2},$$

et faisant disparaître les deux dénominateurs, puis réduisant et transposant,

$$g^4-\tfrac{9}{2}p^2g^2=-\tfrac{9}{2}p^4.$$

Cette équation donne pour les deux valeurs de $g^2$,

$$g^2=\tfrac{3}{2}p^2,\text{ et } g^2=3p^2,$$

Dans le premier cas, $g:p::\sqrt{3}:\sqrt{2}$, ce qui est le rapport cherché entre les deux demi-diagonales du rhombe primitif. Dans le second cas,

$$g:p::\sqrt{3}:1,$$

ce qui convient à l'hypothèse dans laquelle le noyau et le cristal secondaire se confondraient sur un même plan, qui serait un hexagone régulier.

43. Le résultat qui donne $n'=4$ est réalisé par la cristallisation dans plusieurs variétés de la même substance, et entre autres dans celle que je nomme *ascendante*. Mais comme les facettes qui en dépen-

dent sont combinées avec d'autres qui appartiennent à des lois différentes de décroissemens, je me réserve à faire connaître la variété dont il s'agit, lorsque je traiterai des formes secondaires composées.

Faisons $g = \sqrt{5}$ et $p = \sqrt{3}$, comme dans l'argent antimonié sulfuré; nous trouverons $n = \frac{3}{2}$, et $n' = 3$. Je n'ai observé jusqu'ici aucun cristal qui offrît l'un ou l'autre de ces résultats; mais leur simplicité peut faire présumer que peut-être on les rencontrera dans quelqu'une des variétés qui seront découvertes dans la suite.

Lorsque $g = \sqrt{2}$, et $p = 1$, on a $n = 1$ et $n' = 2$. L'incidence mutuelle de deux faces situées vers un même sommet sur le rhomboïde qui sert de noyau est alors de $120^d$, et celle des faces produites par le décroissement, dans le cas de $n = 1$, étant la même, il est facile d'en conclure qu'elles sont situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier, et que le solide secondaire est semblable au dodécaèdre rhomboïdal représenté (fig. 21, pl. 2). Mais dans les dodécaèdres de cette forme, qui sont connus jusqu'à présent, toutes les faces sont à la fois ou primitives ou secondaires, et il est très probable qu'il en est de même de ceux qui existent encore à notre insu dans la nature. Ainsi le cas dont il s'agit est étranger à la cristallisation. Mais l'autre cas où $n' = 2$ nous fournira dans la suite une application de la théorie à l'une des formes originaires du même dodécaèdre, celui-ci pouvant être alors considéré comme un assemblage de quatre rhomboïdes, dont chacun subit le décroissement exprimé par $\overset{2}{D}$.

44. Le résultat $n=1$, que nous venons de voir être purement hypothétique, lorsque $g=\sqrt{2}$ et $p=1$, s'étend généralement à tous les rhomboïdes, quel que soit le rapport de $g$ à $p$. Pour nous en convaincre, reprenons l'équation $ap$ (fig. 16) $=\frac{1}{n-1}a$. Si l'on fait $n=1$, on aura $ap=\frac{a}{0}$, ce qui indique qu'alors l'axe devient une quantité infinie, et que par conséquent les plans produits par le décroissement sont verticaux, et disposés comme les faces latérales d'un prisme hexaèdre régulier. Il arrive alors que ces plans sont limités soit par des faces parallèles à celles du noyau, soit par d'autres faces dues à une loi différente de décroissement.

La première combinaison existe dans une variété de chaux carbonatée (fig. 21) que je nomme *prismée*, et dont le signe sera $\underset{P\ u}{P\overset{1}{D}}$. L'incidence de $u$ sur $u$ étant évidemment de $120^d$, celle de P sur $u$ sera le supplément de la moitié de l'angle que font entre elles deux faces situées vers un même sommet du noyau, c'est-à-dire qu'elle sera égale à

$$180^d - \frac{104^d\,28'\,40''}{2}, \text{ ou à } 127^d,45'\,40''.$$

Dans une autre variété représentée (fig. 22), les faces $u$, $u$ se combinent avec celles du rhomboïde équiaxe. Le signe représentatif est alors $\overset{1}{D}\underset{1}{B}$, et la variété prend le nom de *bisunitaire*. Mais on peut aussi supposer que son noyau soit semblable à l'équiaxe, et dans cette hypothèse elle résultera encore de la loi $\overset{1}{D}$. L'incidence de $g$ sur $u$, prise d'après la même donnée que ci-dessus, est égale à

$$180^d - \frac{134^d 25' 38''}{2}, \text{ ou à } 112^d 47' 11''.$$

45. Nous avons vu que quand les décroissemens qui agissent sur les angles supérieurs d'un rhomboïde ont lieu par une rangée, il en résulte des faces perpendiculaires à l'axe, qui s'étendraient à l'infini, si elles n'étaient limitées par d'autres faces différemment situées. Dans plusieurs variétés qui appartiennent à diverses espèces, ces mêmes faces se combinent avec celles qui proviennent de la loi $\overset{1}{D}$, et qui sont parallèles à l'axe, en sorte que l'on a ici deux quantités dont la tendance vers l'infini est arrêtée par leurs positions respectives.

La forme dont il s'agit ici, et qui est celle du prisme hexaèdre régulier, existe dans l'espèce du corindon. La figure 23 représente le noyau de ce minéral, qui est un rhomboïde un peu aigu, dans lequel le rapport des diagonales $g$, $p$, est celui de $\sqrt{15}$ à $\sqrt{17}$, d'où il suit que l'incidence mutuelle de deux faces prises vers un même sommet est de $86^d 38'$, et celle de deux faces situées de part et d'autre d'un même bord inférieur D de $93^d 22'$. On voit (fig. 24) le prisme hexaèdre produit par le concours des deux lois dont j'ai parlé, et (fig. 25) le même prisme dont trois angles solides situés alternativement au contour des bases sont remplacés par des facettes P parallèles aux faces primitives qui proviennent de ce que les décroissemens n'ont pas atteint leur terme. La première variété, qui est le *corindon prismatique*, a pour signe $\underset{o}{\underset{1}{A}}\,\underset{s}{\overset{1}{D}}$. Celui de la seconde, que j'appelle *corindon bisalterne*, est $\underset{o}{\underset{1}{A}}\,\underset{s}{\overset{1}{D}}\,\underset{P}{P}$. L'incidence de P sur *o* est de $122^d 50'$, et celle de P sur *s* est de $136^d 41'$. On conçoit, sans qu'il soit besoin d'en avertir, que le résultat donné par les deux lois $\underset{1}{A}$, $\overset{1}{D}$, est général pour tous les rhomboïdes, quelles que soient les mesures de leurs angles.

46. Pour citer encore un exemple des décroissemens sur les bords inférieurs, je prends la variété de chaux carbonatée représentée (fig. 81), et qui, par le prolongement des faces $\gamma$, $\gamma$, $\gamma''$, $\gamma''$, etc., devient un dodécaèdre à triangles scalènes analogue à celui que j'ai appelé *métastatique* (fig. 46, pl. 3), avec cette différence que le rhomboïde qui est censé lui être inscrit, est celui de $134^d \frac{1}{2}$, auquel j'ai donné le nom d'*équiaxe*. Si nous adoptons

ce rhomboïde pour noyau, il est visible que le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur ses bords inférieurs D, D. Ce décroissement est mixte, et a pour signe $\overset{\frac{5}{3}}{\underset{\gamma}{D}}$.

Si l'on applique ici les formules qui ont été données (p. 324 et 325), en faisant $g=\sqrt{12}$, $p=\sqrt{5}$ et $n=\frac{5}{3}$, on trouve que le rapport de *de* à *ek*, ou du sinus de la moitié de l'incidence de $\gamma$ sur $\gamma$, au cosinus, est celui de $\sqrt{185}$ à $\sqrt{75}$, ce qui donne $115^d\,1'\,44''$ pour l'incidence dont il s'agit; et que le rapport de *fc* à *cz*, ou du sinus de la moitié de l'incidence de $\gamma$ sur $\gamma'$ ou de $\gamma''$ sur $\gamma''$ au cosinus, est celui de $\sqrt{233}$ à $\sqrt{27}$, ce qui donne pour cette incidence, $142^d\,24'\,6''$. On trouvera aussi que celle de $\gamma$ sur $\gamma''$ est de $118^d\,29'\,4''$. Dans tous les cristaux observés jusqu'ici (1), les sommets du dodécaèdre sont interceptés par des faces *g*, *g* (fig. 8), qui appartiennent au noyau supposé, et dont l'incidence sur les faces $\gamma$ qui leur sont adjacentes est de $143^d\,32'\,39''$. Nous verrons reparaître dans la suite cette même variété, comme résultat d'un décroissement inter-

(1) M. Mabru, minéralogiste d'un mérite distingué, a découvert cette variété dans le département du Puy-de-Dôme. Il avait très bien remarqué qu'elle présentait le rhomboïde équiaxe dont les bords inférieurs étaient remplacés chacun par un double biseau.

médiaire sur les angles latéraux du rhomboïde de $104^{d}\frac{1}{2}$.

47. Il existe des formes dans lesquelles les effets des décroissemens sur les bords supérieurs B se combinent avec ceux des décroissemens sur les bords inférieurs D. Or, j'ai trouvé que les intersections mutuelles des faces qui naissaient des deux décroissemens simultanés formaient un hexagone situé sur un plan perpendiculaire à l'axe, toutes les fois que le nombre de rangées soustraites sur B excédait d'une unité celui des rangées soustraites sur D, en sorte que cette propriété avait lieu pour un rhomboïde quelconque, indépendamment du rapport entre les demi-diagonales $g$ et $p$.

Il est d'abord facile de voir que les intersections dont il s'agit ont leur origine aux angles latéraux E, E, du rhomboïde primitif. Cela posé, reprenons la figure 5, qui nous a servi pour la théorie des décroissemens sur les bords supérieurs B. D'après ce qui vient d'être dit, le point $x$, situé vis-à-vis du point $g$, qui est un des angles latéraux du rhomboïde primitif, sera le point d'intersectiou de l'arête $am$ avec l'arête correspondante produite par le décroissement sur D. Maintenant, dans la figure 16, relative aux décroissemens sur les bords D, la ligne $pd$ sera l'arête du dodécaèdre produit par ce genre de décroissement, laquelle en partant de l'angle $d$ va rencontrer $am$ (fig. 5). Si l'on prolonge $gn$ (fig. 16) jusqu'à ce qu'elle coupe en $t$ l'arête $pd$, le point $t$

devra se confondre avec le point $x$ (fig. 5), c'est-à-dire que $nx = nt$. Soit $n'$ le nombre de rangées soustraites relatif au décroissement sur B, et $n$ celui qui se rapporte au décroissement sur D; on aura

$$nx \text{ (fig. 5)} = \frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}. \text{ (Voy. 10, 2°.)}$$

$$\text{Maintenant } ap \text{ (fig. 16)} = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

$$pr \text{ ou } ap + ar : dr :: pn : nt;$$

et substituant à la place des trois premiers termes leurs valeurs algébriques,

$$\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{3}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} : nt.$$

Donc $nt = \frac{n+2}{2n+1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \frac{n'+2}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$. D'où l'on tire $n' = n+1$, comme nous l'avons annoncé.

Parmi les différentes lois de décroissemens qui déterminent les formes des variétés connues de chaux carbonatée, on en connaît huit, dont quatre ont pour expressions $\underset{2}{B}$, $\underset{3}{B}$, $\underset{4}{B}$, $\underset{6}{B}$, et les quatre autres $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$, $\overset{5}{D}$, ce qui donne les combinaisons suivantes $\overset{1}{D}\underset{2}{B}$, $\overset{2}{D}\underset{3}{B}$, $\overset{3}{D}\underset{4}{B}$, $\overset{5}{D}\underset{6}{B}$, qui toutes réalisent la propriété que je viens de démontrer. Mais jusqu'ici il n'y a que les deux lois représentées par la seconde, qui soient associées dans une même cristallisation; les autres agissent solitairement dans la production des formes qui en offrent les résultats. Je citerai pour exemple de la combinaison des deux lois dont il s'agit, la variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *soustractive* (fig. 26), et dans laquelle les pans du prisme hexaèdre régulier interviennent avec les faces produites en vertu de ces lois. Son signe est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\,\underset{r}{\overset{2}{D}}\,\underset{\overset{3}{t}}{B}$. Voici les mesures de ses angles, abstraction faite de ceux que font entre elles les faces du dodécaèdre métastatique, et que nous avons données plus haut. Incidence de $c$ sur $r$, 135$^d$ ; de $c'$ sur $r$, 152$^d$ 6′ 52″; de $t$ sur $t$, 137$^d$ 39′ 26″; de $t$ sur $t'$, 159$^d$ 11′ 34″. Je parlerai dans la suite d'un autre variété qui réunit aux faces $c$, $r$, $t$ d'autres faces dues à un décroissement intermédiaire.

## IV. *Décroissemens sur les angles latéraux.*

48. Les formes secondaires qui proviennent de cette espèce de décroissement sont en général des dodécaèdres, dans lesquels trois arêtes contiguës à chaque sommet sont parallèles aux diagonales obliques qui leur correspondent sur le noyau. C'est une suite nécessaire de ce que les soustractions se font par des rangées parallèles à ces mêmes diagonales.

49. Soit *ti* (fig. 27) un de ces dodécaèdres, et *to* l'une des arêtes parallèles aux diagonales du noyau. Soit *b* le point de l'arête *tk*, qui se confond avec l'angle solide latéral de ce noyau, ou qui est le point

de départ des décroissemens. Soit *bc* la demi-diagonale horizontale du rhombe sur lequel agissent les mêmes décroissemens. Menons *be* perpendiculaire sur *to*, et joignons les points *c*, *e*, par une droite. Soit *bnm* le triangle mensurateur; désignons par $g'$ la demi-diagonale horizontale de la molécule. Nous aurons $bn = 2ng'$. Quant à *nm*, elle coïncide avec la face latérale correspondante de la première lame de superposition, et de plus elle mesure la hauteur de cette face. Soit *as* (fig. 28) le noyau représenté séparément avec une position analogue à celle qu'il a dans l'intérieur du dodécaèdre. On concevra, avec un peu d'attention, que la face latérale dont nous venons de parler étant contiguë à une suite d'arêtes de molécule, situées parallèlement à *ag* et *ds*, doit être elle-même parallèle à la coupe principale qui passe par les points *a*, *d*, *s*, *g*. Et puisque *nm* (fig. 27) mesure la hauteur de cette face latérale, elle sera égale à la hauteur d'une molécule, ou à la ligne *ak* (fig. 2), en supposant que *adsg* représente la coupe principale de la molécule. Donc nous aurons

$$nm \text{ (fig. 27)} = \sqrt{\frac{3g'^2p'^2 - g'^4}{p'^2}} \text{ (v. 6, 3°.)}.$$

Donc

$$bn : nm :: 2gn : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}} :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}},$$

en substituant $g$ à $g'$ et $p$ à $p'$, parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau.

50. Cherchons maintenant les incidences respectives des faces du dodécaèdre, en commençant par celle de *pto* (fig. 27) sur *kto*.

Il est facile de voir que l'angle *bec* est égal à la moitié de cette incidence, et parce que l'angle *bce* est droit, les deux triangles *bnm*, *bce*, sont semblables.

Donc

$$bc : ce :: bn : nm :: 2gn : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}} :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}}.$$

Avant de chercher la seconde incidence, ou celle de *otk* sur *rth*, déterminons la partie de l'axe du dodécaèdre, qui excède de chaque côté de l'axe du noyau.

Soit *adsg* (fig. 29) la coupe principale de ce noyau, *to* une arête du cristal secondaire parallèle à la diagonale *ad*, et *io* l'arête inférieure contiguë à la précédente. Du point *a* et du milieu *c* de *ad*, menons *ax* et *ce* perpendiculaires l'une et l'autre sur *to*.

Les triangles semblables *axt*, *aks* donnent

$$ak : as :: ax = ce : at.$$

Or, $ak = \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}$. $as = \sqrt{9p^2 - 3g^2}$. *ce* étant la même ligne que fig. 27, nous avons

$$bc = g : ce :: 2gn : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}.$$

Donc $\quad ce = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}}.$

Ainsi la proportion deviendra

$$\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}} : \sqrt{9p^2-3g^2} :: \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}$$

$$: at = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Supposons un plan *oyr* (fig. 27) perpendiculaire à l'axe. Soient *oty*, *rty* (fig. 30) les portions des triangles *otk*, *rtk* (fig. 27) interceptées par ce plan. Soit de plus *tn* la partie correspondante de l'axe, que nous supposerons égale à *tn* (fig. 29). Ayant mené *on*, *rn* et *yn* (fig. 30), nous aurons *yn* égale à *gn* (fig. 29), et *on* ou *rn* (fig. 30) égale à *nl* (fig. 29), ou au prolongement de *gn* jusqu'à la rencontre de *to*.

Menons *oz* (fig. 30) perpendiculaire sur *ty*, *op* perpendiculaire sur *ny*, puis joignons les points *z*, *p*, par une droite. L'angle *ozp* sera la moitié de celui qui mesure l'incidence de *otk* (fig. 27) sur *rtk*. Cherchons le sinus *op* (fig. 30) et le cosinus *pz* de l'angle *ozp*.

1°. Pour *op*. A cause de l'angle $onp = 60^d$ et de l'angle droit *opn*, $op = on\sqrt{\frac{3}{4}}$. Cherchons *on* ou son égale *nl* (fig. 29). Les triangles semblables *adr*, *tln* donnent

$$ar : dr :: tn : nl :: at + an : nl.$$

Ou $$\tfrac{2}{3}\sqrt{a^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{a^2} : nl$$

$$= \frac{2n+3}{2n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} = on.$$

Donc $op = \frac{2n+3}{2n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} \times \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{2n+3}{4n}\sqrt{g^2}$.

2°. Pour $pz$. Les triangles semblables $tny$, $pzy$ (fig. 30) donnent $ty : tn :: py : pz$.

$$tn = \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{a^2} = \frac{2n+3}{6n}\sqrt{a^2}.$$

$$ty = \sqrt{tn^2 + yn^2} = \sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2}.$$

$$py = yn - pn = yn - \tfrac{1}{2}on = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} - \frac{2n+3}{4n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$$

$$= \left[2 - \left(\frac{2n+3}{4n}\right)\right]\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} = \frac{6n-3}{4n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ty : tn :: py : pz$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+3}{6n}\sqrt{a^2} :: \frac{6n-3}{3n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$$

$$: pz = \frac{\frac{(2n+3)(6n-3)}{4n.6n}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2}}$$

Comparant $op$ avec $pz$, on trouvera

$$op : pz :: \sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{2n}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}.$$

51. Les cristaux de chaux carbonatée et ceux de tourmaline fournissent des exemples de l'espèce de décroissement dont il s'agit ici. Mais les facettes qui en dépendent se trouvent combinées, dans ces cristaux, avec d'autres dont la détermination se rapporte à des lois qui ne seront démontrées que dans la

suite. Pour citer un exemple qui ne suppose rien que de connu, je choisirai la variété de fer oligiste représentée (fig. 31), et que je nomme *unisénaire*. Son signe, qui est $\underset{P}{P}\underset{\overset{1}{o}}{A}\underset{g}{E^{66}}E$, indique que sa surface est composée de six pentagones P parallèles aux faces du noyau (fig. 32), de deux triangles équilatéraux $o$ (fig. 31), qui remplacent les sommets du même noyau, et résultent d'un décroissement par une rangée sur les angles A (fig. 32), et de douze triangles scalènes $g$, $g$, etc. (fig. 31), disposés deux à deux à la place des angles solides E, E (fig. 32), et produits par des soustractions de six rangées sur les mêmes angles. Le rapport entre les demi-diagonales $g$ et $p$ du noyau étant, comme je l'ai dit plus haut, celui de $\sqrt{9}$ à $\sqrt{10}$, on trouvera d'abord l'incidence de $o$ sur P (fig. 31), en prenant le supplément de l'angle $tln$ (fig. 29), ou de son égal $acn$, d'après le rapport entre $cn$ et $an$, qui est celui de $g$ à $\sqrt{3p^2-g^2}$, ou de $\sqrt{9}$ à $\sqrt{21}$. Cette incidence est de 123$^d$ 14$'$. Maintenant les formules relatives aux faces $g$, $g$ (fig. 31), donnent d'une part

$$bc \text{ (fig. 27)} : ce :: \sqrt{120} : \sqrt{7},$$

en faisant attention que $n=3$; et d'une autre part,

$$op \text{ (fig. 30)} : pz :: \sqrt{333} : \sqrt{175}.$$

D'après la première, l'angle $bec = 76^d 25'$; ajoutant $90^d$, on a $166^d 25'$, pour l'incidence de $g$ sur P (fig. 31). D'après la seconde, *ozp* (fig. 30) = $54^d 3'$; doublant cet angle, on a $108^d 6'$, pour l'incidence de *g* sur *g*.

53. A mesure que la loi du décroissement varie, trois des arêtes longitudinales contiguës à chaque sommet, telles que *to*, *tr*, etc. (fig. 27), conservent la même inclinaison par rapport à l'axe, puisqu'elles sont constamment parallèles aux diagonales obliques du noyau, tandis que les trois arêtes intermédiaires *tp*, *tk*, etc., changent continuellement d'obliquité à l'égard de l'axe, en restant fixes, par les points *b*, *f*, etc., qui sont les termes de départ du décroissement. Supposons que les choses étant dans l'état que présente la figure, la loi du décroissement devienne plus rapide; les arêtes *to*, *tr*, se rapprocheront des faces du noyau, en sorte qu'elles iront couper le prolongement de l'axe dans un point situé en dessous de *t*; d'où il suit que les arêtes *tp*, *tk*, etc., feront avec l'axe des angles plus ouverts. Supposons au contraire que la loi du décroissement devienne moins rapide; les arêtes *to*, *tr*, s'écarteront des faces du noyau, en sorte qu'elles rencontreront le prolongement de l'axe au-dessus de *t*, et ainsi les angles que font avec le même axe les arêtes *tp*, *tk*, se trouveront diminués. Il y a donc un terme où les six arêtes contiguës à l'axe étant également inclinées, les arêtes latérales *po*, *ok*, *kr*, etc., se trouvent sur un même plan perpendiculaire à l'axe, de manière que le solide prend la forme d'un dodécaèdre com-

posé de deux pyramides droites réunies par leurs bases. Cherchons si ce résultat peut être produit par une loi régulière de décroissement.

Il est évident que, dans ce cas, $gn$ (fig. 29) $=nl$, ou $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}=\frac{2n+3}{2n}\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$, ce qui donne $n=\frac{3}{2}$; c'est-à-dire que le décroissement a lieu par trois rangées.

54. On connaît une variété de corindon que je nomme *ternaire*, et qui offre ce résultat dans toute sa simplicité. La figure 33 la représente, et l'on voit (fig. 23, pl. 16) le rhomboïde qui est sa forme primitive. Les incidences des faces $r$, $'r$ (fig. 33), situées vers un même sommet étant toutes égales entre elles, il suffit, pour les déterminer, d'employer une des deux formules trouvées précédemment. Si l'on choisit la première, comme la plus simple, c'est-à-dire celle qui donne le rapport de $bc$ à $ce$ (fig. 27), et que l'on fasse $g=\sqrt{15}$, $p=\sqrt{17}$, $n=\frac{3}{2}$, on aura $128^d 14'$, pour l'incidence de $r$ sur $r$. Quant à celle de $r$ sur $r'$, on la trouvera, en faisant attention que la ligne menée du centre de la base commune des deux pyramides à l'un des angles, est à la hauteur de l'une ou l'autre pyramide comme $ln : tn$ (fig. 29), ou comme $cn : an$. Or $cn=\sqrt{\frac{1}{3}g^2}=\sqrt{5}$, $an=\frac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}=\sqrt{12}$. D'après ces données, l'incidence de $r$ sur $r'$ est de $121^d 34'$.

55. Dans la variété de fer oligiste appelée *trapézienne*, et que l'on voit figure 34, l'effet de la même

loi se combine avec celui de la loi qui donne des faces perpendiculaires à l'axe, en sorte que le signe rapporté au noyau (fig. 32) est $\underset{n}{E^{33}E}\underset{o}{\overset{1}{A}}$. L'incidence de *o* sur *n* est de $119^{d}34'$; celle de *n* sur *n* est de $128^{d}26'$, et celle de *n* sur *n'*, de $120^{d}52'$.

Une autre variété de la même substance, que l'on voit fig. 35, et que j'appelle *binoternaire*, a pour signe $\underset{P}{P}\underset{n}{E^{33}E}\underset{s}{\overset{2}{A}}$. Elle diffère de la variété birhomboïdale (fig. 12, pl. 15) déjà décrite plus haut, par l'addition des facettes *n*, *n* (fig. 35), qui tendent à produire le dodécaèdre pyramidal. L'incidence de P sur *n* est de $154^{d}13'$.

Cette forme est celle que présentent le plus communément les cristaux de la célèbre mine de fer de l'île d'Elbe. Elle avait été regardée par Stenon (1) et par Romé de l'Isle (2), comme n'étant autre chose qu'un cube diversement tronqué sur ses angles solides. Dans cette opinion, que j'avais d'abord suivie moi-même, les incidences des faces additionnelles sur les faces P, calculées d'après les lois qu'indique le signe représentatif, offraient des différences assez légères avec les véritables pour échapper à l'attention. Par exemple, l'incidence de P sur *n* se trouvait de $154^{d}45'$ au lieu de $154^{d}13'$, et parce que les

(1) Collection académ., partie étrangère, t. IV, p. 400.

(2) Cristallogr., t. III, p. 189 et suiv.

cristaux de l'île d'Elbe sont situés ordinairement dans leurs groupes, de manière qu'il est plus aisé de mesurer les inclinaisons des faces secondaires sur les primitives, que celles de ces dernières l'une sur l'autre, je m'étais cru dispensé de cette seconde mesure, et il semblait que le gonyomètre ne dût rien m'apprendre à cet égard que ce qu'on savait d'avance. Je fus tiré d'erreur par diverses considérations (1), et entre autres par celle d'une espèce d'anomalie qu'offrirait, dans le cas présent, la forme cubique, en faisant la fonction de rhomboïde, de manière qu'il faudrait concevoir un axe passant par deux angles solides opposés, qui devraient être considérés comme sommets; et les lois de décroissement qui agiraient autour de ces sommets seraient différentes de celles qui se rapporteraient aux angles latéraux. Ayant rencontré enfin des cristaux sur lesquels deux faces P situées vers un même sommet se prêtaient à la mesure immédiate de leur incidence mutuelle, je trouvai que celle-ci n'était que d'environ $87^d$ au lieu de $90^d$, et cette observation, que j'ai répétée depuis un grand nombre de fois, fit rentrer la cristallisation du fer de l'île d'Elbe dans l'analogie des rhomboïdes, et prouva que la nature ne cessait point ici d'être d'accord avec elle-même.

Quelquefois les faces *g*, *g* (fig. 31), s'ajoutent à

(1) Voyez le Traité de Minéral., t. IV, p. 49 et suiv., première édition.

celles de la variété qui vient d'être décrite, comme on le voit (fig. 36), en sorte que le signe devient $PE^{66}EE^{33}EA$. C'est alors le fer oligiste *additif*. Inci-
P g n $\overset{2}{s}$
dence de P sur $g$, 166$^{d}$ 25′, et de $g$ sur $n$, 167$^{d}$ 48′.

56. Si l'on fait varier les inclinaisons respectives des faces produites par un décroissement sur les angles latéraux, de manière que celles qui répondent à $r$, $r$, ou à $r'$, $r'$ (fig. 33), et se réunissent deux à deux sur des arêtes $x$, $z$, contiguës aux angles E, $e'$ (fig. 23, pl. 16) du rhomboïde primitif, fassent entre elles des angles toujours plus ouverts, il y aura un cas où elles coïncideront sur un même plan, et alors le dodécaèdre se trouvera converti en rhomboïde. A ce terme le cosinus $pz$ (fig. 30) de l'angle $ozp$ s'évanouit. Reprenant donc l'expression analytique de $pz$ (*voyez* p. 152), et supprimant tout de suite son dénominateur, nous aurons

$$(2n+3)(6n-3)\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2g^2}=0,$$

ou simplement, $6n-3=0$; d'où l'on tire $n=\frac{1}{2}$, ce qui indique que le cas dont il s'agit a lieu indifféremment pour tous les rhomboïdes, en vertu d'un décroissement par une seule rangée de molécules.

Cherchons d'abord en général le rapport entre les deux demi-diagonales $g'$ et $p'$ du rhomboïde secondaire. La ligne $ot$ (fig. 29) étant l'arête de ce rhomboïde, si l'on mène $oz$ perpendiculaire sur l'axe, on aura

$$oz : tz :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} :: 2g' : \sqrt{3p'^2 - g'^2}.$$

D'une autre part, $ot$ étant parallèle à $ad$, on aura

$$oz : tz :: dr : ar :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: g : \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Or,

$$at = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2 - 3p^2} = \sqrt{9p^2 - 3g^2}, \text{ à cause de } n = \tfrac{1}{2}.$$

Donc l'axe du noyau est le tiers de celui du rhomboïde secondaire. Donc $\sqrt{3p^2 - g^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3p'^2 - g'^2}$. Donc aussi $g = \frac{1}{3} \cdot 2g'$, et $g' = \frac{3}{2}g$.

Si dans l'équation précédente on met $\frac{9}{4}g^2$ à la place de $g'^2$, elle devient

$\sqrt{3p^2 - 3g^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3p'^2 - \frac{9}{4}g^2}$, ou $27p^2 - 9g^2 = 3p'^2 - \frac{9}{4}g^2$.

Donc $9p^2 - 3g^2 = p'^2 - \frac{3}{4}g^2$; d'où l'on tire,

$$p' = \tfrac{3}{2}\sqrt{4p^2 - g^2}.$$

57. Si l'on fait $g = \sqrt{3}$ et $p = \sqrt{2}$, on trouve

$$g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{5}.$$

Ce résultat a lieu dans une variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *inverse*, et dont j'ai développé plus haut la structure à l'aide de la méthode synthétique.

C'est à cette même variété que se rapportent les rhomboïdes connus sous le nom de *grès cristallisé de Fontainebleau*, et qui, selon les expériences de

M. Sage, contiennent environ $\frac{3}{5}$ de matière quarzeuse sur $\frac{2}{5}$ de chaux carbonatée. La formation de ces rhomboïdes, dont plusieurs sont isolés et parfaitement prononcés, offre un exemple remarquable de la grande puissance de la cristallisation. Ils ont été produits dans des cavités où la matière du grès, par l'effet d'une cause quelconque, avait subi dans sa contexture un relâchement qui l'avait réduite à l'état de sable. Un liquide chargé de chaux carbonatée, amené par l'infiltration dans ces cavités, a pénétré à travers les interstices des grains quarzeux, et les molécules calcaires ont ensuite enveloppé et saisi ces mêmes grains, sans rien déranger, en même temps qu'elles prenaient, relativement les unes aux autres, des positions conformes aux lois d'une aggrégation régulière, en sorte que les grains quarzeux n'ont fait qu'interrompre la continuité de la structure, en laissant subsister son mécanisme.

De plus, lorsque la matière calcaire rencontrait dans le sable un espace vide, elle y formait des cristaux purs et transparens, que l'on trouve quelquefois accolés à ceux qui sont mélangés de quarz. Il y a même des cristaux qui ont une partie à l'état de pureté et l'autre à celui de mélange, sans que ce défaut d'homogénéité ait nui au niveau des faces, non plus qu'à la direction des joints naturels que l'on suit de l'œil dans les deux parties, lorsqu'on fait mouvoir à la lumière les fractures des cristaux dont il s'agit.

58. Si l'on suppose toujours que le rapport des

demi-diagonales du rhomboïde primitif soit celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, on prouve que le rhomboïde secondaire qui en dérive, à l'aide de la loi $E^{11}E$, a cette propriété remarquable, que ses angles plans sont égaux aux incidences respectives du rhomboïde primitif, et réciproquement. De plus, les angles plans de la coupe principale sont les mêmes de part et d'autre.

Reprenons les formules relatives à ces trois espèces d'angles (6, 1°., 2°. et 3°.).

1°. Pour l'angle plan aigu,

$$r : \text{cosin.} :: g^2 + p^2 : \pm g^2 \mp p^2.$$

2°. Pour la plus petite incidence des faces,

$$r : \text{cosin} :: 2p^2 : \pm g^2 \mp p^2.$$

3°. Pour l'angle aigu de la coupe principale,

$$\text{sin} : \text{cosin} :: \sqrt{3g^2p^2 - g^4} : \pm g^2 \mp p^2.$$

Or, si l'on fait $g = \sqrt{3}$, $p = 2$, comme dans le rhomboïde primitif, et que l'on prenne les signes supérieurs, le premier rapport devient 5 : 1 ; le second, 4 : 1 ; et le troisième, 3 : 1.

Et si l'on fait $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{5}$, comme dans le rhomboïde secondaire, et que l'on prenne les signes inférieurs, le premier rapport devient 4 : 1 ; le second, 5 : 1 ; et le troisième, 3 : 1. Donc il y a identité relativement au troisième angle, et à l'égard des deux autres il y a inversion, ce qui a suggéré le nom de *chaux carbonatée inverse*, que j'ai donné à cette variété. Je prouverai dans la suite qu'il y a pour chaque rhomboïde une loi particulière de décroissement qui dépend du rapport entre $g$ et $p$, et dont le résultat est un rhomboïde secondaire qui jouit des mêmes propriétés.

59. Il existe une variété de fer oligiste que j'appelle *fer oligiste soustractif*, qui est représentée (fig. 37), et qui parmi ces différentes faces en a six désignées par $u$, $u$, etc., et produites en vertu de la loi $E^{11}E$. Son signe rapporté au noyau (fig. 32) est $\overset{1}{\mathrm{D}}\mathrm{P}E^{33}E\,E^{11}E\,A$. Incidence de $k$ sur $n$, 150^d 26';
$k\ \ P\ \ n\ \ \ \ u\ \ \overset{2}{s}$
de P sur $u$, 128^d 29'.

Il est remarquable que les faces $u$, $u'$ soient des rhombes, quoique les faces $k$, $k$, d'une part, et $n$, $n$, de l'autre, dont les intersections avec les faces $u$, $u'$, déterminent les figures de celles-ci, aient des inclinaisons différentes. Ce résultat, dont la cristallisation offre divers exemples, dépend de certaines conditions que je vais faire connaître.

Soient $opn$, $lnp$ (fig. 38.), deux faces triangulaires ou de toute autre figure, qui aient entre elles des inclinaisons quelconques, pourvu qu'elles soient également inclinées sur le plan $onl$; et $ozn$, $lzn$, deux autres faces réunies aux premières sur les arêtes $on$, $ln$, et qui peuvent de même être inclinées entre elles de telle quantité qu'on voudra, pourvu qu'elles le soient également sur le plan $onl$. Ayant mené $nt$ qui divise en deux parties égales l'angle $onl$, je prends sur l'une ou l'autre des arêtes *np*, *nz*, par exemple sur la première, un point quelconque *s*, et de ce point je mène sur *nt* la ligne *sg* parallèle à l'autre arête *nz*, puis ayant divisé en deux la ligne *ng*, je mène par le point *c* de division la ligne *scy* jusqu'à la rencontre de *nz*, et par cette dernière ligne je fais passer un plan *sryu*, dont la section *ru* avec le plan *onl* est perpendiculaire sur *ng*. Je dis que ce plan est un rhombe. Car les triangles *ncy*, *gcs*, sont semblables et égaux, puisque d'une part les angles *scg*, *ycn*, *cgs*, *cny*, sont égaux deux à deux, et que d'une autre part $cg = cn$ par la construction. Donc $cs = cy$. De plus, il est aisé de voir que $cr = cu$. Donc les diagonales *sy*, *ru*, étant perpendiculaires l'une sur l'autre, il en résulte que les côtés *rs*, *ry*, *su*, *yu*, sont égaux entre eux, et que la face *sryu* a la figure d'un rhombe.

Imaginons maintenant que les diverses faces représentées par la figure 38 prennent de telles positions relatives, que *psro*, *psul*, deviennent parallèles à $n''$, $n''$ (fig. 37), *oryz*, *luyz* (fig. 38), parallèles à $k''$, $k''$ (fig. 37), et *sryu* (fig. 38), parallèle à $u'$ (fig. 37), il est évident que le plan *onl* deviendra perpendiculaire sur les faces *oryz*, *luyz*, et que la section *ru* du plan *sryu* sur le plan *onl* sera toujours perpendiculaire à la ligne *nt*. Si en même temps *sg* devient parallèle à *nz*, elle sera aussi perpendiculaire sur *nt*. Reste à prouver que, dans cette hypothèse, on a $cg = \frac{1}{2} gn$.

Supposons que la construction de la figure 29 se rapporte à l'effet de la loi $E^{13}E$, qui donne les faces $n''$, $n''$ (fig. 37), auquel cas

$$at \text{ (fig. 29)} = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}\,;$$

la ligne $tp$ (fig. 29) sera parallèle à l'arête $\gamma$ (fig. 37), et en même temps à la ligne $pn$ (fig. 38), et l'on aura

$$ng : gs :: pr \text{ (fig. 21)} : tr :: gn : nt :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : an + at$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Supposons d'une autre part que la construction de la figure 29 se trouve ramenée à l'effet de la loi $E^{11}E$ qui donne la face $u'$ (fig. 37), auquel cas

$$at \text{ (fig. 29)} = \sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

La ligne $tp$ deviendra alors parallèle à la face $u'$ (fig. 37), et en même temps à la ligne $cs$ (fig. 38), et l'on aura,

$$cg : gs :: pr \text{ (fig. 29)} : tr :: gn : nt :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : an + at$$
$$= \tfrac{4}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Comparant cette proportion avec la précédente, on en conclura que $cg$ (fig. 38) $= \frac{1}{2}gn$, ce qu'il fallait prouver. Donc la position de la face $u'$ (fig. 37) remplit les conditions requises pour que cette face ait la figure d'un rhombe.

60. Je terminerai cet article par la solution d'un

problème qui a beaucoup d'analogie avec un autre que j'ai résolu précédemment, et dont le sujet était une série de rhomboïdes engendrés les uns par les autres à l'aide du décroissement $\overset{1}{B}$. substituons à ce décroissement celui qui a pour signe $E^{11}E$, et supposons que chaque rhomboïde de la série soit susceptible de naître du précédent, en vertu de la loi que représente ce signe. Désignant toujours par $g$ et $p$ les demi-diagonales de l'un d'eux qui soit compris entre les extrêmes, et auquel nous donnons le nom de générateur, nous aurons de même deux séries, l'une descendante, composée de rhomboïdes plus petits que le générateur, l'autre ascendante, composée de ceux qui ont de plus grandes dimensions.

Soient $\gamma$ et $\pi$ les demi-diagonales d'un rhomboïde du rang $r$, pris dans la série ascendante. D'après ce qui a été dit plus haut (56), si $r=1$, on a $\gamma=\frac{3}{2}g$; si $r=2$, on a $\gamma=\frac{3}{2}.\frac{3}{2}g=(\frac{3}{2})^2g$; si $r=3$, on a $\gamma=\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.g=(\frac{3}{2})^3g$. En général, $\gamma=(\frac{3}{2})^rg$, et $\gamma^2=(\frac{9}{4})^rg^2$.

De plus, lorsque $r=1$, l'axe du rhomboïde secondaire est triple de celui du noyau (56). Donc, dans ce cas,

$$\sqrt{3\pi^2-\gamma^2}=3\sqrt{3p^2-g^2}, \text{ ou } 3\pi^2-\gamma^2=9(3p^2-g^2).$$

Lorsque $r=2$, $\sqrt{3\pi^2-\gamma^2}=3.3\sqrt{3p^2-g^2}$, ou $3\pi^2-\gamma^2=9.9(3p^2-g^2)$. En général,

$$3\pi^2-\gamma^2=9^r(3p^2-g^2). \text{ Mais } \gamma^2=(\tfrac{9}{4})^rg^2.$$

Donc $$3\pi^2-\left(\tfrac{9}{4}\right)^r g^2=9^r(3p^2-g^2.)$$

$$3\pi^2=9^r(3p^2-g^2)+\left(\tfrac{9}{4}\right)^r g^2;\ \pi^2=9^r(p^2-\tfrac{1}{3}g^2)+\left(\tfrac{9}{4}\right)^r\tfrac{1}{3}g^2$$
$$=9^r\left(p^2-\tfrac{1}{3}g^2+\frac{1}{3.4^r}g^2\right)=9^r\left(p^2+\frac{1}{3.4^r}g^2-\frac{4^r g^2}{3.4^r}\right)$$
$$=9^r\left(p^2+\frac{1-4^r}{3.4^r}g^2\right).\ \text{Donc}\ \pi=3^r\sqrt{p^2+\frac{1-4^r}{3.4^r}g^2}.$$

Désignons par $\gamma'$, $\pi'$, les demi-diagonales d'un rhomboïde du rang $r'$, pris dans la série descendante. Si $r=1$, on aura $\gamma'=\frac{2}{3}g$; si $r=2$, on aura $\gamma'=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}g$. En général, $\gamma'=(\frac{2}{3})^r g$, et $\gamma'^2=(\frac{4}{9})^r g^2$. De plus, si $r=1$, on aura

$$\sqrt{3\pi'^2-\gamma'^2}=\tfrac{1}{3}\sqrt{3p^2-g^2},\ \text{ou}\ 3\pi'^2-\gamma'^2=\tfrac{1}{9}(3p^2-g^2).$$

Si $r=2$, on aura $\sqrt{3\pi'^2-\gamma'^2}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\sqrt{3p^2-g^2}$;

ou $$3\pi'^2-\gamma'^2=\frac{1}{9\cdot 9}(3p^2-g^2).$$

En général, $$3\pi'^2-\gamma'^2=\frac{1}{9^r}(3p^2-g^2).$$

Mais $$\gamma'^2=\left(\tfrac{4}{9}\right)^r g^2.$$

Donc, $$3\pi'^2-\left(\tfrac{4}{9}\right)^r g^2=\frac{1}{9^r}(3p^2.-g^2).$$

Donc,

$$\pi'=\sqrt{\frac{1}{9^r}(p^2-\tfrac{1}{3}g^2)+\left(\tfrac{4}{9}\right)^r\tfrac{1}{3}g^2}=\frac{1}{3^r}\sqrt{p^2-\tfrac{1}{3}g^2+4^r.\tfrac{1}{3}g^2}$$
$$=\frac{1}{3^r}\sqrt{p^2+\frac{4^r-1}{3}g^2}.$$

61. Si l'on compare les formules précédentes avec celles que nous avons obtenues pour les rhomboïdes

qui naissent du décroissement $\overset{}{\underset{1}{B}}$, on verra que celles qui sont données par les séries ascendantes ou descendantes sont les mêmes de part et d'autre, à la différence près du facteur $3^r$ ou $\frac{1}{3^r}$, qui multiplie les formules auxquelles nous venons de parvenir, et qui est nul dans les autres. On concevra la raison de cette différence, en faisant attention que dans le cas du décroissement $\underset{1}{B}$, l'axe est le même pour tous les rhomboïdes des deux séries, au lieu que dans le cas du décroissement $E^{11}E$, l'axe croît ou décroît suivant que les rhomboïdes appartiennent à une série ou à l'autre. A l'égard de l'identité qui existe d'ailleurs entre les formules données par les deux espèces de décroissement, elle provient de ce que le même rhomboïde qui est produit par tel autre, en vertu du décroissement $\underset{1}{B}$, peut à son tour en produire un semblable à ce dernier, à l'aide du décroissement $E^{11}E$, ou réciproquement. Ainsi, pour nous borner aux rhomboïdes connus jusqu'ici, savoir, ceux que j'ai nommés *équiaxe, primitif et inverse,* et qui appartiennent à la chaux carbonatée, on trouvera que l'équiaxe qui naît du primitif, par le décroissement $\underset{1}{B}$, peut le produire par le décroissement $E^{11}E$, et que l'inverse qui dérive du primitif, par le décroissement $E^{11}E$, peut lui donner naissance par le décroissement $\underset{1}{B}$.

62. Il existe une variété de chabasie représentée

(fig. 39), que j'ai nommée *trirhomboïdale*, parce qu'elle résulte de la combinaison de trois rhomboïdes analogues à ceux dont je viens de parler. Dans la forme primitive de cette substance, que l'on voit (fig. 40), et qui est un rhomboïde légèrement obtus, le sinus de la moitié de la plus grande inclinaison des faces est au cosinus, comme $\sqrt{8} : \sqrt{7}$, ce qui donne le rapport de $\sqrt{17}$ à $\sqrt{15}$, pour celui des demi-diagonales $g$ et $p$ du rhombe (1). On jugera des fonctions relatives des trois rhomboïdes, à l'aide du signe qui est PBE''E. Incidence de P sur P, $93^d\,48'$;
P $\overset{1}{n}$ $r$
de P sur $n$, $136^d\,54'$; de $r$ sur $n$, $143^d\,59'$.

## V. *Décroissemens sur l'angle inférieur.*

63. Ces décroissemens ont de l'analogie avec ceux qui agissent sur l'angle supérieur, soit parce qu'ils

---

(1) Soit *abcd* (fig. 41) la coupe transversale du rhomboïde primitif. Ayant mené les diagonales *ac*, *ad*, et la ligne *br* perpendiculaire sur *ad*, et qui sera le cosinus de l'angle aigu *bad*, en prenant *ba* pour le rayon, on aura par l'hypothèse $ao = \sqrt{8}$, et $bo = \sqrt{7}$. Donc *ab* ou $ad = \sqrt{15}$.

$$br = \frac{bo \,.\, ac}{ad} = \sqrt{\frac{7 \,.\, 32}{15}};\quad ar = \sqrt{ab^2\ br^2} = \sqrt{15 - \frac{224}{15}} = \sqrt{\frac{1}{15}};$$

Donc $ab : ar :: \sqrt{15} : \sqrt{\tfrac{1}{15}} :: 15 : 1.$

Mais (6) $ab : ar :: 2p^2 : g^2 - p^2.$

Donc $2p^2 : g^2 - p^2 :: 15 : 1$. D'où l'on tire, $g : p :: \sqrt{17} : \sqrt{15}$.

produisent en général des rhomboïdes, soit parce qu'ils peuvent avoir lieu directement ou par renversement, en sorte que tantôt les faces produites s'inclinent vers la partie supérieure de l'axe, et tantôt elles se rejettent en sens contraire vers la partie inférieure. Occupons-nous d'abord des décroissemens directs.

Soit toujours *adsg* (fig. 42) la coupe principale du noyau, et soit *pm* la diagonale oblique du rhomboïde secondaire, et *mu* l'arête inférieure contiguë à cette diagonale. Le triangle mensurateur *dho* ne différera point de celui que nous avons considéré (p. 321) dans le cas des décroissemens sur les bords inférieurs (fig. 16), et nous aurons encore ici,

$$dh(\text{fig. } 42) : oh :: 2np : \sqrt{g^2+p^2}.$$

Seulement le nombre de diagonales soustraites qui était égal au nombre de rangées soustraites dans le cas précédent, indiquera un nombre double de rangées soustraites. Nous aurons aussi, en suivant la même marche pour le calcul,

$$ap = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2}.\ (\textit{Voyez } 31.)$$

Cherchons les expressions des deux diagonales $\gamma$ et $\pi$ du rhomboïde secondaire.

Ayant mené *mz* perpendiculaire sur *pu*, nous aurons les triangles semblables *drp*, *mzp*, qui donnent

$$dr : pr :: mz : pz;$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n-1}\right)\sqrt{9p^2-2g^2}, \text{ ou } \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2-3g^2}$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\sqrt{9p^2-3g^2}, \text{ ou } \tfrac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Donc

$$g : \gamma :: \frac{2n+1}{3n-3} : \tfrac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) :: 2n+1 : 2n+2, \text{ et } \gamma = \frac{2n+2}{2n+1}g.$$

Maintenant $pu$ ou

$$\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2} = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} = \frac{n+1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Et à cause de $\gamma^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2$,

$$9\pi^2 - 3\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 (9p^2-3g^2).$$

D'où l'on tire

$$\pi = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2\left(p^2-\tfrac{1}{3}g^2\right)+\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2}$$

$$= (n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2\left(p^2-\tfrac{1}{3}g^2\right)+\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2}.$$

64. Cherchons de suite les valeurs des quantités qui, dans les décroissemens inverses, correspondent aux précédentes.

1°. Pour la partie de l'axe du rhomboïde secondaire qui excède celui du noyau ; soit $ou$ (fig. 43) une des diagonales obliques du premier, et $op$ l'arête adjacente; d'où l'on voit que *ou* répondra à une arête *ds* du noyau, et *op* à une diagonale oblique *ad*. Soit *dhe* le triangle mensurateur, dans lequel

$$dh : eh :: 2np : \sqrt{g^2+p^2}.$$

Ayant mené *al* prolongement de *ad*, nous aurons les triangles semblables *pal*, *psg*, qui donnent

$$gs : as+ap :: al : ap.$$

Or, $\quad gs=2p. \quad as=\sqrt{9p^2-3g^2}.$

Reste à trouver *al*. Les triangles semblables *gal*, *dhe*, donnent $eh : dh :: ga : al$.

Ou $\quad \sqrt{g^2+p^2} : 2np :: \sqrt{g^2+p^2} : al=2np.$

Donc la proportion $gs : as+ap :: al : ap$ devient

$$2p : \sqrt{9p^2-3g^2}+ap :: 2np : ap.$$

D'où l'on tire, en désignant par *a* la valeur de l'axe *as*,

$$ap=\frac{n}{1-n}\,a=us.$$

2°. Pour les diagonales du rhomboïde secondaire, que nous désignerons par $\gamma'$, $\pi'$; la ligne *oz* étant une perpendiculaire sur l'axe *pu*, les triangles semblables *ozu*, *dru*, donneront $dr : ur :: oz : uz$,

ou $\quad \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\tfrac{1}{3}+\frac{n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma'^2}$

$$: \tfrac{2}{3}\left(1+\frac{2n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

24..

Et simplifiant, $g : 2n+1 :: \gamma' : 2n+2$.

Donc, $$\gamma' = g \cdot \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Maintenant,

$$\sqrt{9\pi'^2 - 3\gamma'^2} = \left(1 + \frac{2n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \frac{n+1}{1-n}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Mais $$\gamma'^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2.$$

Donc

$$9\pi'^2 - 3\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{1-n}\right)^2 (9p^2 - 3g^2).$$

D'où l'on tire

$$\pi' = (n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{1-n}\right)^2 (p^2 - \tfrac{1}{3}g^2) + \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2}.$$

65. Il existe entre les résultats des deux modes de décroissemens que nous considérons ici, une relation semblable à celle que nous ont offerte les décroissemens qui agissent sur l'angle supérieur; c'est-à-dire que les mêmes rhomboïdes qui résultent d'un décroissement direct sur l'angle inférieur, peuvent aussi être produits en vertu d'un décroissement inverse sur le même angle. Pour trouver une formule à l'aide de laquelle étant donnée la loi relative à l'un des rhomboïdes, on puisse connaître celle d'où dépend l'autre, continuons de désigner par $n$ le nombre de diagonales soustraites par le décroissement direct, et nommons $n'$ celui qui se rapporte au décroissement inverse. Il est

facile de voir que la similitude de forme entre les deux rhomboïdes dépend de la condition que *ur* (fig. 43) soit égale à *pr* (fig. 42). Donc

$$\frac{2n'+1}{3-3n'}\sqrt{9p^2-3g^2}=\frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

ou simplement

$$\frac{2n'+1}{1-n'}=\frac{2n+1}{n-1},$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{n'+2}{4n'-1},\quad \text{et}\quad n'=\frac{n+2}{4n-1}.$$

66. Ici revient la même propriété qui a lieu pour les décroissemens sur l'angle supérieur, c'est-à-dire que les deux formules indiquent les mêmes fonctions réciproques entre $n$ et $n'$, en sorte que l'on peut aussi choisir l'une d'elles à volonté, par exemple la première, ou $n=\frac{n'+2}{4n'-1}$, pour en déduire la solution des deux espèces de problèmes. De plus, si l'on compare cette formule avec celle qui se rapporte aux décroissemens sur l'angle supérieur, et qui est

$$n=\frac{2-n'}{4n'+1},$$

on voit qu'elle n'en diffère qu'en ce que les quantités renfermées dans le second membre sont affectées de signes contraires. On peut donc réunir les deux valeurs de $n$ en une seule, qui aura la forme suivante

$$n=\frac{2\mp n'}{4n'\pm 1},$$

les signes supérieurs devant être employés dans le cas des décroissemens sur l'angle A, et les inférieurs dans celui des décroissemens sur l'angle *e*. Ayant déjà quelques-uns des résultats relatifs aux signes supérieurs, suivons la formule dans ses applications à de nouveaux problèmes.

67. Si en continuant d'employer les mêmes signes, on fait $n' = 2$, $n$ devient zéro, et l'on a un résultat que j'ai déjà indiqué plus haut (p. 320); c'est-à-dire que *adsg* (fig. 44) étant toujours la coupe du noyau, et *ao'* étant la diagonale oblique du rhomboïde produit par le décroissement direct, celle du rhomboïde qui résulte du décroissement inverse coïncide avec l'arête *ag*.

Si l'on fait $n'$ plus grand que 2, la valeur de $n$ devient négative. La diagonale oblique du rhomboïde produit par le décroissement direct ayant alors une position telle que *ao''*, située en dessous de *ao'*, celle du rhomboïde donné par le décroissement inverse, tend à s'abaisser en dessous de *ag*, en prenant une position telle que *ax'*, elle sera située comme la diagonale oblique d'un rhomboïde qui naîtrait d'un décroissement inverse sur l'angle *e'* (fig. 45), et il est évident que ce rhomboïde est semblable à celui dont *ao''* (fig. 44) représente la diagonale oblique. Alors la marche du décroissement au lieu d'être descendante, en allant de *a* vers *x*, comme dans les cas précédens, devient ascendante en allant de *g* vers *p*, et c'est ce qu'indique le signe négatif. La valeur de $n$, prise avec le signe positif, est la même que celle qu'on aurait obtenue, en cherchant immédiatement la loi du décroissement inverse sur l'angle $e'$ (fig. 45), d'où résulte un rhomboïde semblable à celui qui est produit par le décroissement direct sur A, et dont $ao''$ (fig. 44) est la diagonale oblique.

Il est facile de vérifier cette analogie, en considérant que dans le cas dont nous venons de parler, on a $gn : np$ (fig. 43) ou $dr : ur :: mu$ (fig. 5, pl. 15) $: au$. Or, lorsque dans la formule trouvée ci-dessus, savoir,

$$n = \frac{2 - n'}{4n' + 1},$$

on fait $n'$ plus grand que 2, cette quantité se rapporte à un décroissement inverse. Désignant donc par $n'$ la loi du décroissement qui détermine le rapport $mu$ à $au$ (fig. 5), et par $n$ celle du décroissement d'où dépend le rapport $dr$ à $ur$ (fig. 43), nous aurons

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2-3g^2} :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n'-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2};$$

ou

$$1 : \frac{2n+1}{1-n} :: n'+1 : 2n'-1.$$

D'où l'on tire

$$n = \frac{n'-2}{4n'+1}.$$

Or, si dans cette formule on substitue à $n'$ telle valeur numérique que l'on voudra, le résultat sera le même que celui auquel on parviendrait si dans la première formule $n=\frac{2-n'}{4n'+1}$ on égalait $n'$ à la même valeur, et que l'on prît le résultat avec un signe contraire (1).

68. Ainsi la formule $n=\frac{2-n'}{4n'+1}$ indique par elle-même les cas où le décroissement inverse qui répond à celui dont la loi est $n'$ agit, non plus sur le même angle supérieur A (fig. 45), mais sur l'angle inférieur $e'$ de la face opposée à P, et de plus elle donne la loi du décroissement dont il s'agit.

Si l'on suppose $n'$ infini, les faces produites étant censées se confondre avec celles du noyau, le rhomboïde correspondant, qui naît du décroissement inverse, sera semblable à ce même noyau; alors les nombres 2 et 1 s'évanouissent devant les quantités infinies $n'$ et $4n'$, et l'on a $n=-\frac{1}{4}$, c'est-à-dire que le décroissement qui donne ce résultat remarquable a lieu par deux rangées en hauteur sur l'angle $e'$ (fig. 45).

---

(1) Supposons par exemple que la substitution d'une valeur numérique à $n'$ dans la formule $n=\frac{2-n'}{4n'+1}$ conduise à un résultat négatif, ce qui est le cas que nous considérons ici. Soit $\frac{2-n'}{4n'+1}=-a$. Si l'on rend $a$ positif, le premier membre devient $\frac{n'-2}{4n'+1}$, qui dans l'autre formule donne la valeur de $n$.

Nous reviendrons bientôt sur ce même résultat, pour en faire des applications à des variétés prises dans diverses espèces.

69. Considérons maintenant la formule relativement aux signes inférieurs, et servons nous des résultats qui se déduisent de leur usage, pour comparer et lier entre elles les propriétés renfermées dans les formules particulières qui se rapportent les unes aux décroissemens directs sur l'angle *e* (fig. 45), les autres à ceux qui agissent par renversement sur les mêmes angles.

Si l'on fait $n = 1$, dans l'expression $\frac{1}{n-1} a$ de $ap$ (fig. 42), on a $ap = \frac{1}{0} a$; c'est-à-dire qu'alors l'axe étant infini, les faces produites lui sont parallèles et disposées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier. D'une autre part, si l'on égale aussi $n$ à l'unité dans l'expression $\frac{na}{1-n}$ de $us$ (fig. 43), on trouve pareillement $us = \frac{1}{0} a$. Les deux décroissemens se trouvent alors parvenus à une limite passé laquelle les lignes $mp$ (fig. 42) et $du$ (fig. 43) se rejettent l'une et l'autre en sens contraire, de manière que le décroissement direct se change en un décroissement inverse, et *vice versâ*.

La formule $n = \frac{2 \mp n'}{4n' \pm 1}$ prise avec les signes inférieurs indique l'identité des deux résultats précédens; car si l'on fait $n' = 1$, on trouve $n = \frac{3}{3} = 1$. Je citerai bientôt divers exemples analogues à ce parallélisme entre les faces produites et l'axe du noyau, et dans lesquels ces faces se trouvent limitées par d'autres, qui sont dues à des lois différentes de décroissement.

70. Si dans le rapport trouvé plus haut entre les expressions des diagonales $\gamma$ et $\pi$ des rhomboïdes secondaires produits par des décroissemens directs sur $e$ (fig. 45), on fait $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$, $n = \frac{3}{2}$, auquel cas le décroissement a lieu par trois rangées en largeur, on aura $\gamma = \frac{5}{4}\sqrt{3}$, et $\pi = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt{17}$. Donc $\gamma : \pi :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$.

Il existe une variété de chaux carbonatée représentée (fig. 46), qui réalise ce résultat. J'y reviendrai plus bas, pour en démontrer une propriété remarquable, d'où j'ai tiré le nom de *contrastante*, qu'elle porte dans la méthode.

71. Si dans la formule $n = \frac{2 \mp n'}{4n' \pm 1}$, on continue d'employer les signes inférieurs, et que l'on substitue à la place de $n'$ la fraction $\frac{2}{3}$ relative à la variété dont je viens de parler, on trouve $n = \frac{7}{10}$, qui indique un rhomboïde semblable à cette variété, et produit en vertu d'un décroissement sur l'angle $e$ (fig. 45), par sept rangées en largeur et par cinq rangées en hauteur. Les faces de ce rhomboïde existent parmi celles d'une variété de chaux carbonatée que je nomme *imitative*, et que je ferai connaître dans la suite. Les deux solutions du problème se trouvent ici réalisées par la cristallisation.

71. Si $n'$ devient infini, alors les quantités 2 et 1 étant nulles, on a $n = \frac{1}{4}$, d'où l'on conclura que la forme secondaire qui naît du décroissement par deux rangées en hauteur est semblable au noyau. Ce résultat est le même que celui auquel nous sommes parvenus plus haut, en faisant $n'$ infini dans la formule employée avec les signes supérieurs, avec la différence que dans ce dernier résultat, la valeur de $n$ est affectée du signe négatif, parce que le décroissement auquel elle se rapporte prend une marche opposée à celle qu'il suivait dans les cas où la valeur dont il s'agit était positive.

On peut démontrer immédiatement l'identité de forme qui a lieu dans le cas que nous venons de considérer, entre le rhomboïde secondaire et le noyau, d'après l'observation que dans le cas présent,

$$dr : ur \text{ (fig. 43) } :: dr : ar.$$

Donc $\quad ur = ar$, et $us = rs = \frac{1}{3} a$.

Donc $\quad \frac{n}{1-n} a = \frac{1}{3} a$, ou $\frac{n}{1-n} = \frac{1}{3}$,

ce qui donne $n = \frac{1}{4}$, comme ci-dessus.

La chaux carbonatée, le quarz, la tourmaline et le fer oligiste, offrent des exemples de cette reproduction du noyau, comme forme secondaire. Je me bornerai ici à en citer un, qui est tiré de la première de ces substances; c'est celui qui existe dans la variété *trihexaèdre*, représentée fig. 47, et dont le signe rapporté à la forme primitive (fig. 45) est $\underset{c}{\overset{\infty}{e}}\underset{P}{P}\underset{\varepsilon}{\overset{\frac{1}{2}}{e}}$. Les faces $\varepsilon$ qui proviennent du décroissement par deux rangées en hauteur ayant la même inclinaison que les faces P du véritable noyau, produisent en se combinant avec elles, deux pyramides droites hexaèdres, séparées par les pans $c$, $c'$ qui appartiennent au prisme hexaèdre régulier. L'incidence de P ou de $\varepsilon$ sur $c$ est de $135^d$, et celle de P sur $\varepsilon$ est de $140^d 37' 34''$.

72. Si dans la formule $n = \frac{2 \mp n'}{4n' \pm 1}$, prise toujours avec les signes inférieurs, on fait $n' = \frac{1}{4}$, on trouve $n = \frac{9}{0}$, c'est-à-dire que $n$ à son tour devient infini, comme cela doit être, d'après ce qui a été dit plus haut. La diagonale oblique du rhomboïde relatif à $n$ se confondant alors avec $da$ (fig. 44), qui est celle du noyau, si l'on fait $n'$ plus petit que $\frac{1}{4}$, la nouvelle diagonale du rhomboïde correspondant tend à descendre au-dessous de $da$, en prenant une position telle que $dp''$. Maintenant, si l'on mène $ao''$ parallèle à $dp''$, elle sera située comme la diagonale oblique d'un rhomboïde produit par un décroissement inverse sur l'angle $e$ (fig. 45), et il est clair que ce rhomboïde est semblable à celui dont $dp''$ (fig. 44) est censée représenter la diagonale oblique. Ce résultat est analogue à celui que nous a déjà offert la même formule prise avec les signes supérieurs (67). La valeur qui s'en déduit pour $n$ est néga-

tive, parce que la marche du décroissement au lieu d'être ascendante, en allant de $d$ vers $p$, comme dans les cas précédens, devient descendante, en allant de $a$ vers $o''$. Cette valeur de $n$, prise avec le signe positif, indique de même la loi qui produit un rhomboïde semblable à celui que donne $n'$, et l'on pourrait la trouver immédiatement par un calcul analogue à celui que nous avons employé (p. 375) pour le cas relatif aux signes supérieurs.

73. Lorsque $n'$ devient zéro, on a $n = -2$. Alors le rhomboïde auquel $n'$ se rapporte étant semblable à celui qui naît d'un décroissement par une rangée sur les bords supérieurs du noyau, celui qui est indiqué par $n$ résulte d'un décroissement par quatre rangées sur les angles supérieurs. Nous avons obtenu le même résultat, en sens inverse, à l'aide de la formule employée avec les signes supérieurs, en faisant $n' = 2$, ce qui a donné $n = 0$.

Lorsque $n'$ est plus petit que $\frac{1}{4}$, les faces du rhomboïde qui naît du décroissement inverse sont plus inclinées à l'axe que les faces primitives; d'où il suit que le décroissement direct, qui produit l'analogue du rhomboïde dont il s'agit, se trouve transporté sur l'angle supérieur. Continuons de désigner par $n$ l'exposant de ce dernier, et cherchons deux formules qui donnent $n$ en fonction de $n'$, et réciproquement. Pour les obtenir, il faut égaler le rapport entre $mu$ et $au$ (fig. 5, pl. 15) à celui qui a lieu entre $dr$ et $ur$ (fig. 43). Nous aurons donc $mu : au :: dr : ur$, ou,

$$(n+1\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n-1}{3}a :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n'+1}{3-3n'}a.$$

Et en simplifiant,

$$3n+3:2n-1::3-3n':2n'+1;$$

ou $$n+1:2n-1::1-n':2n'+1;$$

d'où l'on tire

$$n'=\frac{n-2}{4n+1}, \quad \text{et} \quad n=\frac{2+n'}{1-4n'}.$$

74. Reprenons maintenant les applications des formules qui nous ont donné séparément les propriétés des rhomboïdes produits par les décroissemens soit directs soit inverses, sur les angles inférieurs du noyau.

Lorsque $n$ égale $\frac{1}{2}$, dans le décroissement direct, on trouve, en appliquant ici les formules de la p. 372,

$$\gamma':\pi'::{}^3g:\tfrac{3}{2}\sqrt{4p^2-g^2}.$$

Or, ce rapport est le même que celui des demi-diagonales du rhomboïde produit par le décroissement $E^{11}E$, comme cela doit être, puisqu'alors les trois décroissemens qui agissent autour d'un même angle solide latéral du noyau, ont lieu par une rangée. Ainsi le résultat qui donne le rhomboïde dont il s'agit est à la fois le premier terme de la série des décroissemens directs sur les angles latéraux, et de celle des décroissemens inverses sur les angles inférieurs. Le rhomboïde qui correspond à ce double emploi, dans la chaux carbonatée, est celui que j'ai appelé *inverse*.

75. Nous avons déjà dans la variété trihexaèdre (fig. 47) un exemple des combinaisons de lois, à l'aide desquelles les faces parallèles à l'axe, qui par elles-mêmes sont infinies, s'associent d'autres faces qui en limitent l'étendue. Une des formes les plus communes, en ce genre, est celle du prisme hexaèdre régulier, nommé *chaux carbonatée prismatique* (fig. 37, pl. 3), dont le signe est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{o}{\underset{1}{A}}$. Dans une autre variété que l'on rencontre de même assez fréquemment, et qui est représentée (fig. 29, pl. 2), les faces additionnelles appartiennent au rhomboïde équiaxe. Cette variété, que j'appelle *chaux carbonatée dodécaèdre*, a pour signe $\underset{c}{\overset{2}{\underset{1}{e}}}\underset{g}{B}$; incidence de $g$ sur $c'$, $116^{d}33'55''$.

Quelquefois les pans de la variété prismatique se trouvent doublés, par l'intervention de la loi $\overset{1}{D}$, qui, combinée avec la loi $\underset{1}{A}$, est de même susceptible de produire le prisme hexaèdre régulier. On a, dans ce cas, la chaux carbonatée *péridodécaèdre* (fig. 48), dont le signe est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{u}{\overset{1}{D}}\underset{o}{\underset{1}{A}}$, et dans laquelle chaque pan fait un angle de $150^{d}$ avec les deux qui lui sont adjacens.

76. La réunion des faces du prisme hexaèdre ré-

gulier avec celles du rhomboïde inverse, dans une autre variété de la même substance, que l'on voit (fig. 49), donne naissance à une propriété géométrique, qui est particulière à cette variété, en ce qu'elle dépend du rapport $\sqrt{3}$ à $\sqrt{5}$ entre les demi-diagonales. Nous supposons ici la forme cristalline ramenée à sa limite, de manière que les faces $f$, $f$, qui appartiennent au rhomboïde inverse soient des trapèzes. Cela posé, la propriété dont il s'agit consiste en ce que les deux angles obtus $a'$, $a'$, ainsi que les aigus $a$, $a$, sont situés d'un même côté, au lieu que sur le rhomboïde ils sont opposés. Il en résulte que les angles du rhomboïde inverse persistent malgré les nouveaux plans qui modifient la forme, ce qui m'a suggéré le nom de *persistante* que j'ai donné à cette variété. Le signe est $\underset{c}{\overset{a}{e}}\underset{f}{E^{1\,1}}\underset{\overset{1}{o}}{E}A$. Incidence de $f$ sur $c$, $153^{d}26'6''$.

Il est facile de démontrer la propriété qui caractérise cette même variété. Soit $as$ (fig. 50) le rhomboïde inverse. Je mène $kh$, $hl$, par les milieux des côtés $bg$, $bc$, $cd$, puis $hn$ et $kn$, de manière que l'on ait $bn = \frac{1}{4}ab$. Je mène ensuite $lt$ de manière que l'on ait aussi $td = \frac{1}{4}ad$, puis la ligne $nt$, qui sera parallèle à la diagonale $bd$, et enfin les lignes $hp$, $lr$, perpendiculaires sur $nt$.

Nous avons, par la construction, $by = \frac{1}{4}bs$, et $bn = \frac{1}{4}ab$. Donc $ny$ est parallèle à l'axe $as$. Donc le plan $knh$ est parallèle au plan $c$ (fig. 49). Donc, puisque $lt$ (fig. 50) est inclinée en sens contraire de la même quantité que $hn$, il en résulte que le rhombe $abcd$ est coupé de la même manière par les lignes $hn$, $lt$, que le rhombe dont $f$ (fig. 49) est censé faire partie, l'est par les lignes $a'a$, $a'a$. D'une autre part, les lignes $nt$, $hl$ (fig. 50) étant parallèles aux lignes $aa$, $a'a'$ (fig. 49), il en résulte que le trapèze $ntlh$ (fig. 50) est semblable au trapèze $f$ (fig. 49).

Soient $g'$, $p'$ les demi-diagonales du rhombe $abcd$ (fig. 50). Nous aurons $hl = \frac{1}{2} bd = g$; et $hm$ ou

$$pu = \frac{1}{2} bx = \frac{1}{2} g'.$$

Mais à cause de $an = \frac{3}{4} ab$, nous avons aussi

$$un = \frac{3}{4} bx = \frac{3}{4} g'.$$

Donc $pn$ ou $un - pu = \frac{1}{4} g'$. Maintenant,

$$hp = hz + pz = mx + ux = \frac{1}{2} p' + \frac{1}{4} p' = \frac{3}{4} p'.$$

Donc

$$hp : pn :: \tfrac{3}{4} p' : \tfrac{1}{4} g' :: 3p' : g' :: 3\sqrt{5} : \sqrt{3} :: \sqrt{15} : 1.$$

Donc $hn : pn :: 4 : 1$, rapport qui est le même que celui qui a été trouvé plus haut (p. 361), entre le sinus total et le cosinus du petit angle plan du rhomboïde inverse. On aura donc $a'$ (fig. 49) $= 104^d 28' 40''$, et $a = 75^d 31' 20''$.

77. J'ajouterai ici la description de deux rhom-

boïdes de chaux carbonatée, produits par des décroissemens en hauteur sur l'angle $e$, et qui tantôt constituent des variétés simples, et tantôt entrent dans des combinaisons d'où résultent des variétés composées.

Le premier, que j'appelle *chaux carbonatée mixte* (fig. 51), a pour signe $\overset{\frac{3}{2}}{e}$. Faisant donc $n = \frac{3}{4}$, dans les expressions des demi-diagonales (64), on trouve

$$\gamma' = \tfrac{7}{5}\sqrt{3} \text{ et } \pi' = \tfrac{7}{5}\sqrt{26}.$$

Donc

$$\gamma' : \pi' :: \sqrt{3} : \sqrt{26},$$

ce qui donne pour l'incidence de $s$ sur $s$, $62^d 44' 53''$; pour celle de $s$ sur $s'$, $116^d 15'$; et pour les angles plans, $37^d 31' 4''$ et $142^d 28' 56''$.

Cette variété unie à la forme primitive et à celle du rhomboïde contrastant, produit une forme composée, représentée (fig. 52) que j'ai nommée *chaux carbonatée trirhomboïdale*. Son signe est $\underset{s}{\overset{\frac{3}{2}}{e}}\,\underset{m}{\overset{3}{e}}\,\underset{P}{P}$. Incidence de P sur $m$, $149^d 2' 11''$; de P sur $s$, $119^d 2' 11''$; de $m$ sur $s'$, ou de $m'$ sur $s$, $154^d 39' 13''$; de $m$ sur $s$, ou de $m'$ sur $s'$, $121^d 32' 54''$.

Le second rhomboïde se présente à l'œil sous une forme si voisine du cube, qu'on l'avait d'abord appelé *spath calcaire cubique*. Nous verrons bientôt que ses angles mesurés avec précision diffèrent sensiblement de ceux du cube. Mais avant de déterminer la loi qui donne ce rhomboïde, j'exposerai un résultat dont il m'a fourni le sujet, et qui prouve la possibilité qu'un rhomboïde dont la différence avec la forme cubique serait très-légère, soit produit par une loi admissible de décroissement, comme forme secondaire de la chaux carbonatée. Je suppose que la loi dont il s'agit ait lieu sur l'angle inférieur *e*. Pour qu'elle donne le résultat indiqué, il faut que l'on ait $dr : ur$ (fig. 43) à très peu près comme $1 : \sqrt{2}$, ce rapport étant celui qui existe dans le cube, entre la demi-perpendiculaire sur l'axe et la partie de cet axe qu'elle intercepte, ou entre $\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$ et $\frac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}$. Or, $1 : \sqrt{2}$ presque comme $1 : 1,4$ ou comme $5 : 7$. Adoptant donc ce dernier rapport, nous aurons

$$dr : ur :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\frac{1}{3}+\frac{n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} :: 5 : 7;$$

ou,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2-3g^2} :: 5 : 7.$$

Et en faisant $g = \sqrt{3}$ et $p = \sqrt{2}$,

$$2 : \frac{2n+2}{3-3n}.3 :: 5 : 7;$$

ou

$$2 : \frac{2n+1}{1-n} :: 5 : 7.$$

D'où l'on tire, $n = \frac{3}{8}$.

Cherchons, d'après cette valeur, le rapport entre les demi-diagonales $\gamma'$ et $\varpi'$ du rhomboïde secondaire, nous aurons

$$\gamma' : \pi' :: \frac{2n+2}{2n+1} g : (n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{1-n}\right)^2 (p^2 - \tfrac{1}{3}g^2) + \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2}$$
$$:: \sqrt{75} : \sqrt{74},$$

ce qui donne $90^d\, 23'$, au lieu de $90^d$, pour l'incidence de deux faces voisines autour d'un même sommet.

On pourrait, en conservant la même loi, obtenir une forme secondaire exactement cubique, au moyen d'une légère altération dans les angles de la forme primitive. Dans ce cas, on a

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: 1 : \sqrt{2}.$$

Et mettant à la place de $n$ sa valeur $\frac{3}{8}$,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{14}{15}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: 1 : \sqrt{2};$$

ou,
$$\tfrac{4}{3}g^2 : \tfrac{49}{225}(9p^2 - 3g^2) :: 1 : 2.$$

D'où l'on tire, $99g^2 = 147p^2$, et $g : p :: \sqrt{147} : \sqrt{99}$.

Ce rapport donne $104^d\, 2'$ pour la plus grande incidence des faces du rhomboïde primitif. Or, cette incidence mesurée avec soin est sensiblement plus grande ; et ainsi, en mettant dans l'observation des angles la précision convenable, on reconnaîtrait encore que l'aspect de la forme n'offrirait qu'une fausse ressemblance. Au reste, il ne serait pas impossible que des variétés relatives à des espèces très-distinguées d'ailleurs l'une de l'autre, ne se rapprochassent tellement par leurs formes extérieures, que la différence échappât aux mesures mécaniques. Mais ces analogies qui par elles-mêmes sembleraient répandre du vague dans la considération des formes cristallines, serviraient à mieux prouver les avantages et la fécondité de la théorie, lorsqu'elle nous découvrirait des structures et des lois particulières cachées sous une identité apparente, et propres à faire ressortir nettement ce corps que l'œil abandonné à lui-même serait tenté de confondre.

78. M. Smithson, célèbre minéralogiste anglais, s'étant procuré des cristaux de la variété qui nous occupe ici, reconnut bientôt que c'étaient des rhomboïdes aigus dans lesquels la plus petite inclinaison des faces n'était que d'environ $88^d$. De plus, il remarqua que le rhomboïde se divisait par des coupes qui, en partant des sommets, interceptaient les arêtes situées comme *op* (fig. 43), en faisant des angles égaux avec les faces adjacentes à ces arêtes, ce que l'on concevra aisément, par l'inspection de la fig. 53, qui représente le rhomboïde et son noyau inscrit. Cette observation lui indiqua que le décroissement qui donnait ce rhomboïde agissait dans le sens de la hauteur sur l'angle inférieur du noyau, et le calcul lui fit connaître que l'on avait dans ce cas $n=\frac{2}{5}$, c'est-à-dire que le décroissement se faisait par quatre rangées en largeur et par cinq en hauteur.

Si l'on cherche d'après cette donnée le rapport entre les demi-diagonales du rhomboïde secondaire, on trouve $\gamma' : \pi' :: \sqrt{12} : \sqrt{13}$, ce qui donne

$87^d 47' 45''$ pour l'incidence de $h$ sur $h$ (fig. 53), et $92^d 12' 15''$ pour celle de $h$ sur $h'$. Je donne à cette variété le nom de *chaux carbonatée cuboïde*, pour indiquer qu'elle n'offre que l'apparence d'un cube.

79. Je vais, à l'occasion de cette même variété, donner une idée de la méthode de tâtonnement à l'aide de laquelle on peut déterminer la loi d'où dépend une forme dont les angles sont connus par approximation. Le rhomboïde étant un peu aigu, comme je l'ai dit, il faut que le rapport entre les lignes qui correspondent à $dr$ et $ur$ (fig. 43) soit un peu plus grand que le rapport 1 à $\sqrt{2}$, et qu'en même temps il soit simple; il faut, de plus, qu'il soit commensurable, dans l'hypothèse de $g = \sqrt{3}$, et $p \sqrt{2}$, puisqu'alors $dr : rs :: 2 : 1$, et que $us$ doit être lui-même en rapport commensurable avec $rs$.

Or, en substituant successivement au rapport $1 : \sqrt{2}$, leurs égaux $\sqrt{2} : \sqrt{4}$; $\sqrt{3} : \sqrt{6}$; $\sqrt{4} : \sqrt{8}$, je m'aperçois qu'il suffit, dans cette dernière expression, d'augmenter d'une unité le nombre 8, en faisant $\sqrt{4} : \sqrt{9}$, pour avoir le rapport commensurable $2 : 3$, qui sera un peu plus grand que le premier, et aura d'ailleurs toute la simplicité convenable. J'essaie donc ce rapport, en supposant que l'on ait

$$dr : ur :: 2 : 3,$$

ou

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3-3n}\sqrt{9p^2-3g^2} :: 2 : 3.$$

Et à cause de $g=\sqrt{3}$ et $p=\sqrt{2}$,

$$2:\left(\frac{2n+1}{3-3n}\right)3::2:3;$$

d'où l'on tire

$$3-3n=2n+1\,,\quad \text{et}\quad n=\tfrac{2}{5},$$

conformément à ce qui a été dit plus haut.

Il est souvent plus court de supposer successivement différentes valeurs à $n$, jusqu'à ce qu'il s'en trouve une qui conduise aux mesures d'angles observées. Mais dans les cas où ces mesures elles-mêmes fournissent un rapport très simple entre les lignes qui servent de données, comme nous venons de le voir, cette simplicité annonce seule, avec une grande probabilité, que la loi qui dépend de ce rapport est la véritable, et l'on se saurait ici d'autant plus de gré d'être parti de ce même rapport, que l'on aurait évité, par ce moyen, les divers tâtonnemens qu'il eût fallu faire pour arriver à la loi mixte qui produit le cristal cuboïde.

80. J'ai promis de revenir sur une variété de chaux carbonatée, ayant la forme d'un rhomboïde aigu, que l'on voit figure 46, et à laquelle j'ai donné le nom de *contrastante*, à cause d'une propriété qu'il s'agit maintenant de faire connaître. Elle consiste en ce que cette variété a les mêmes rapports avec le rhomboïde équiaxe, que ceux qui existent entre le rhomboïde inverse et le primitif. Mais je vais d'abord

considérer la chose sous un point de vue général, et démontrer qu'un rhomboïde quelconque dont on suppose les demi-diagonales représentées par *g* et *p*, est susceptible de produire, à l'aide d'une loi de décroissement, qui dépend du rapport entre *g* et *p*, un autre rhomboïde dont telle est la forme, que ses angles plans sont égaux aux angles saillans du rhomboïde générateur, que réciproquement ses angles saillans sont égaux aux angles saillans du générateur, et que les coupes principales des deux rhomboïdes ont les mêmes angles.

Ces deux conditions, dont l'une consiste dans l'inversion des angles plans et saillans des deux rhomboïdes, et l'autre dans l'égalité des angles des coupes principales, sont tellement liées entre elles, que l'une étant supposée, l'autre en devient une suite nécessaire. C'est ce que je vais prouver en prenant pour donnée la seconde condition.

Soient *adsg*, *aosl* (fig. 54), les coupes des deux rhomboïdes qui doivent être telles que l'on ait..... $ads = oal$, et par conséquent $dag = aos$. Je donne ici, pour plus de simplicité, un axe commun aux deux rhomboïdes, parce que si l'on suppose ces axes inégaux, la démonstration reste la même.

J'observerai ici que l'un des deux rhomboïdes est nécessairement obtus et l'autre aigu. C'est une suite de ce que le grand angle *oal* de l'une des coupes est situé au sommet du rhomboïde auquel celle-ci appartient, tandis que dans l'autre coupe le petit angle *dag*, qui est égal au supplément du premier, correspond de même au sommet du rhomboïde auquel cette coupe se rapporte.

Soient $g$, $p$ les demi-diagonales du rhomboïde aigu dont la coupe est *adsg*, et $g'$, $p'$, celles du rhomboïde obtus dont la coupe est *aosl*; *ds* sera l'arête du premier, *os* celle du second, et *ad*, *ao*, seront les diagonales obliques. Or, les triangles *asd*, *lxa*, sont semblables par une suite de ce que les angles *ads*, *lax* sont égaux, et de ce que les perpendiculaires *dr*, *an*, menées des sommets sur les bases, divisent celles-ci en deux parties dont l'une est double de l'autre (1).

(1) Supposons deux triangles *bic* (fig. 55), et *xzy* (fig. 56), tracés d'après les conditions que les angles *bci* et *xyz* soient égaux, et que les perpendiculaires *ct* (fig. 55), *yq* (fig. 56), abaissées de ces angles sur les bases, divisent ces dernières en deux parties *ti*, *bt* (fig. 55), et *qz*, *xq* (fig. 56), qui soient entre elles dans un même rapport exprimé par $\frac{m}{n}$. Je dis que les deux triangles sont semblables. Pour le prouver, concevons que le triangle *xzy* (fig. 56) se superpose sur le triangle *bic* (fig. 55), de manière que *yx* se trouve sur la direction de *cb*, et *yz* sur celle de *ci*. Soit *k* le point de la ligne *cb* auquel se termine le côté *yx*. Si l'on mène *kf* (fig. 55) parallèle à la base *bi*, il est évident que les triangles *bic*, *kfc*, seront semblables, et que de plus la base *kf* se trouvera divisée par la perpendiculaire *ct* en deux parties *ef*, *ke*, qui seront entre elles dans le même rapport que *ti* et *bt*, ou que *qz* et *qx* (fig. 56). Or, on ne peut mener du point *k* (fig. 55)

Donc, $ad : ds :: al : ax,$

ou $2p : \sqrt{g^2+p^2} :: \sqrt{g'^2+p'^2} : p',$

ou $4p^2 : g^2+p^2 :: g'^2+p'^2 : p'^2.$

Si du second terme de chaque rapport on retranche la moitié du premier, la proportion devient

$$4p^2 : g^2-p^2 :: g'^2+p'^2 : \frac{p'^2-g'^2}{2},$$

ou $2p^2 : g^2-p^2 :: g'^2+p'^2 : p'^2-g'^2.$

Or, le premier rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle saillant du rhomboïde aigu,

---

dans l'ouverture de l'angle $bci$ aucune autre ligne qui ait les mêmes propriétés. Car imaginons que la ligne substituée à $kf$, se relève au-dessus de celle-ci, en prenant la position $kf'$. La perpendiculaire $ce'$ menée du sommet sur $kf'$ sera évidemment plus petite que $ce$; donc puisque l'on doit avoir

$$(ke')^2 + (ce')^2 = (ke)^2 + (ce)^2 = (ck)^2,$$

$ke'$ sera nécessairement plus grande que $ke$; mais la ligne entière $kf'$ est plus courte que $kf$, donc le rapport $e'f' : ke'$ est plus petit que $\frac{m}{n}$. On prouvera par un raisonnement analogue que si la ligne $kf''$ substituée à $kf$, s'abaisse en dessous de celle-ci, le rapport entre les parties $e''f''$, $ke''$ de $kf''$ divisée par la perpendiculaire $ce''$ est plus grand que $\frac{m}{n}$. Donc, dans la superposition du petit triangle sur le plus grand, la ligne $xz$ (fig. 56) coïncide avec la ligne $kf$ (fig. 55), d'où il suit que les deux triangles sont semblables.

et le second rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle plan du rhomboïde obtus. Donc les angles plans de ce dernier rhomboïde sont égaux aux angles saillans de l'autre.

Si dans la proportion

$$2p^2 : g^2 - p^2 :: g'^2 + p'^2 : p'^2 - g'^2,$$

on ajoute le second terme de chaque rapport au premier, elle devient

$$g^2 + p^2 : g^2 - p^2 :: 2p'^2 : p'^2 - g'^2.$$

Or, dans celle-ci le premier rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle plan du rhomboïde aigu, et le second rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle saillant du rhomboïde obtus; donc les angles saillans de ce dernier rhomboïde sont égaux aux angles plans de l'autre.

81. Connaissant le rapport entre les demi-diagonales de l'un des deux rhomboïdes, il est facile de trouver celui qui existe entre les demi-diagonales de l'autre. Supposons que l'on connaisse $g'$ et $p'$, et que l'on cherche $g$ et $p$. Je reprends la proportion

$$2p^2 : g^2 - p^2 :: g'^2 + p'^2 : p'^2 - g'^2,$$

dont je dispose ainsi les termes,

$$g^2 - p^2 : 2p^2 :: p'^2 - g'^2 : g'^2 + p'^2.$$

Ajoutant au premier terme de chaque rapport la moitié du second, on a

$$g^2 - p^2 + p^2 : 2p^2 :: p'^2 - g'^2 + \frac{g'^2 + p'^2}{2} : g'^2 + p'^2,$$

ou

$$g^2 : 2p^2 :: \frac{3p'^2 - g'^2}{2} : g'^2 + p'^2;$$

d'où l'on tire,

$$g : p :: \sqrt{3p'^2 - g'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2}.$$

Si l'on suppose au contraire que les demi-diagonales connues soient $g$ et $p$, on trouve

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2},$$

proportion dans laquelle les termes du second rapport sont des fonctions de $g$ et de $p$ semblables à celles de $g'$ et de $p'$ que présente le second rapport de la proportion précédente, en sorte que l'une des deux, prise à volonté, donne le résultat proposé, quel que soit celui des deux rhomboïdes dont on suppose les diagonales connues. Cette identité dans les fonctions de $g$, $p$, et $g'$, $p'$, provient de ce que par une suite de l'inversion qui existe dans les angles des deux rhomboïdes, la coupe transversale de chacun d'eux est semblable aux faces de l'autre, ou, ce qui revient au même, le rapport entre les demi-diagonales de la coupe transversale de l'un est égal au rapport entre les demi-diagonales des faces de l'autre. Or, on trouve, en employant les formules du n° 6, que le rapport entre les demi-diagonales de la coupe transversale d'un rhomboïde est en général celui de $\sqrt{3p^2-p^2} : \sqrt{g^2+p^2}$, la quantité $\sqrt{3p^2-g^2}$ étant l'expression de la plus petite des diagonales, si le rhomboïde est obtus, et de la plus grande, s'il est aigu. Maintenant, lorsque dans la comparaison de deux rhomboïdes dont chacun a ses angles plans et solides réciproques à ceux de l'autre, celui dont on cherche les diagonales est aigu, auquel cas le second dont les diagonales sont censées connues est obtus, si l'on désigne par $g'$ et $p'$ les demi-diagonales que l'on cherche, et par $g$ et $p$ celles que l'on connaît, $g'$ étant alors plus petit que $p'$, et $\sqrt{3p^2-g^2}$ devant être aussi plus petit que $\sqrt{g^2+p^2}$, on aura

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2-g^2} : \sqrt{g^2+p^2};$$

et lorsqu'au contraire les demi-diagonales censées connues sont celles du rhomboïde obtus, auquel cas celui dont on cherche les diagonales est aigu, si l'on continue de représenter par $g'$ et $p'$, les demi-diagonales inconnues, et par $g$ et $p$ celles que l'on connaît, $g'$ étant plus grand que $p'$, et $\sqrt{3p^2-g^2}$ devant être de même plus grand que $\sqrt{g^2+p^2}$, on aura encore, $g' : p' :: \sqrt{3p^2-g^2} : \sqrt{g^2+p^2}$, d'où l'on voit que la proportion satisfait aux deux cas indiqués.

82. Concevons maintenant que le rhomboïde obtus fasse à l'égard de l'autre la fonction de noyau, et cherchons la loi de décroissement en vertu de laquelle

il est susceptible de produire l'autre, ce décroissement étant censé agir sur l'angle inférieur du noyau dont il s'agit. Soit *aosl* (fig. 54) la coupe de ce noyau, et soit *pvuh* une coupe semblable à *adsg*, prise par des parallèles aux côtés de celle-ci, et que nous supposerons être celle du rhomboïde secondaire. Les triangles *orp*, *anl*, sont semblables, *orp* étant lui-même semblable à *dra*.

Donc

$$or:pr::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{n-1}\right)a::an:nl::\tfrac{1}{3}a:\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

ou $$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n+1}{3n-3}.a::\tfrac{1}{3}a:\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc

$$\tfrac{4}{3}g^2=\frac{2n+1}{9n-9}.a^2=\frac{2n+1}{9n-9}(9p^2-3g^2),$$

et $$4g^2=\frac{2n+1}{n-1}(3p^2-g^2);$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{g^2+p^2}{2g^2-2p^2}.$$

Concevons au contraire que ce soit le rhomboïde aigu qui fasse à l'égard de l'autre la fonction de noyau, et supposant que le décroissement en vertu duquel il produit celui-ci agisse sur l'angle A, cherchons la loi de ce décroissement. Nous pouvons alors considérer *adsg* comme la coupe du noyau, et *aosl* comme celle du rhomboïde secondaire.

Les triangles semblables $axn$, $aor$, donnent

$$xn : an :: or : ar :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3} . a. \text{ (voyez 21 ).}$$

De plus, les triangles semblables $axn$, $sdr$, donnent

$$xn : an :: rs : dr :: \tfrac{1}{3}a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc

$$(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3} . a :: \tfrac{1}{3}a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc

$$(n+1)\tfrac{4}{3}g^2 = \frac{2n-1}{9}(9p^2-3g^2),$$

ou

$$(n+1)4g^2 = (2n-1)(3p^2-g^2),$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{g^2+p^2}{2p^2-2g^2}.$$

Il est remarquable que les deux rapports qui expriment les valeurs de $n$ soient la moitié de ceux qui expriment les cosinus des petits angles plans, dans deux rhomboïdes dont l'un est obtus et l'autre aigu. Nous avons déjà vu le rapport qui représente le cosinus du petit angle saillant d'un rhomboïde obtus, ou plutôt la moitié de ce rapport, se reproduire de même dans le développement des analogies qu'offrent les résultats des décroissemens sur les bords inférieurs.

83. Dans l'hypothèse d'un rhomboïde obtus pris pour noyau, on peut aussi considérer le décroissement qui donne son inverse comme agissant par ren-

versement sur l'angle inférieur ; désignant alors par $n'$ l'exposant de la loi qui se rapporte à ce décroissement, il sera facile d'en trouver la valeur d'après la formule $n' = \frac{n+2}{4n-1}$ (65). Si le noyau est un rhomboïde aigu, on pourra aussi supposer que le décroissement qui produit son inverse agisse par renversement sur l'angle supérieur, et désignant de même par $n'$ l'exposant de la loi relative à ce décroissement, on en trouvera la valeur à l'aide de la formule $n' = \frac{2-n}{4n+1}$.

84. Avant de passer aux applications, proposons-nous encore de résoudre le problème suivant. Etant données les demi-diagonales $g$ et $p$ d'un rhomboïde considéré comme noyau, et la loi de décroissement qui produit un rhomboïde secondaire, en agissant directement sur l'un des angles A, $e$, trouver la loi qui produirait le rhomboïde inverse de celui-ci, à l'aide d'un décroissement sur l'autre angle.

Soit $\nu$ l'exposant de la loi qui agit sur l'angle A, et $\nu'$ celui de la loi qui a lieu sur l'angle $e$.

Le triangle $xag$ (fig 5, pl. 15), qui appartient au rhomboïde produit par le décroissement sur A, est semblable au triangle $pmu$ (fig. 42, pl. 18), relatif au rhomboïde qui naît du décroissement sur $e$; c'est une suite de ce que les coupes des deux rhomboïdes ont les mêmes angles; donc aussi les triangles $xan$ )fig. 5), et $mzu$ (fig. 42), sont semblables.

Donc $xn:an$ (fig. 5) ou $mu:au :: mz$ (fig. 42) $: uz$.
Or, d'une part,

$$mu:au :: \frac{2\nu-1}{3}a : (\nu+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: (2\nu-1)a : (3\nu+3)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Soit $\gamma$ la demi-diagonale horizontale du rhomboïde produit par le décroissement sur $e$. Nous aurons d'une autre part

$$mz : uz :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{1}{3}\left(1+\frac{2}{\nu'-1}\right)a = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu'+1}{\nu'-1}\right)a.$$

Donc

$$(2\nu-1)a : (3\nu+3)\sqrt{\tfrac{3}{4}g^2} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu'+1}{\nu'-1}\right)a;$$

ou

$$(2\nu-1)a : (6\nu+6)g\sqrt{\tfrac{1}{3}} :: 2\gamma\sqrt{\tfrac{1}{3}} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu'+1}{\nu'-1}\right)a;$$

mais $$\gamma = \frac{2\nu'+2}{2\nu'+1}g.$$

Donc

$$(2\nu-1)a : (6\nu+6)g\sqrt{\tfrac{1}{3}} :: \frac{4\nu'+4}{2\nu'+1}g\sqrt{\tfrac{1}{3}} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu'+1}{\nu'-1}\right)a.$$

Prenant le produit des extrêmes et celui des moyens, puis réduisant,

$$\frac{2\nu-1}{\nu'-1}a^2 = \frac{24\nu+24g^2}{2\nu'+1};$$

ou $$\frac{2\nu-1}{\nu'-1}(9p^2-3g^2) = \frac{24\nu+24g^2}{2\nu'+1};$$

d'où l'on tire

$$\frac{6\nu p^2 - 2\nu g^2 - 3p^2 + g^2}{\nu' - 1} = \frac{8\nu g^2 + 8g^2}{2\nu' + 1},$$

ce qui conduit aux deux équations finales

$$\nu' = \frac{2\nu(g^2 + p^2) + 3g^2 - p^2}{4\nu(g^2 - p^2) + 2(g^2 + p^2)},$$
$$\nu = \frac{2\nu'(g^2 + p^2) - 3g^2 + p^2}{4\nu'(p^2 - g^2) + 2(g^2 + p^2)}.$$

85. Pour appliquer les résultats précédens, supposons d'abord que l'on veuille déterminer les demi-diagonales du rhomboïde qui présente l'inverse du primitif, dans la chaux carbonatée, et la loi de décroissement dont il dépend. Dans ce cas, les demi-diagonales du primitif étant désignées par $g'$ et $p'$, et celles de l'autre rhomboïde par $g$ et $p$, si l'on fait $g' = \sqrt{3}$, $p' = \sqrt{2}$, et si l'on substitue ces valeurs dans la proportion

$$g : p :: \sqrt{3p'^2 - g'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2},$$

on aura $$g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{5}.$$

Soit $n$ l'exposant du décroissement, en supposant que celui-ci agisse directement sur l'angle $e$ du rhomboïde primitif. Nous avons $n = \frac{g^2 + p^2}{2g^2 - 2p^2}$; donc $n = \frac{5}{2}$; c'est-à-dire que dans l'hypothèse présente le décroissement se fera par cinq rangées sur l'angle $e$. Si nous supposons au contraire que le décroissement agisse par renversement sur le même angle, alors $n'$ désignant le nombre de demi-diagonales soustraites en largeur, on aura $n'=\frac{n+2}{4n-1}=\frac{1}{2}$. J'ai fait voir plus haut que cette dernière loi est la véritable, et j'ai déterminé les rapports entre les angles du rhomboïde primitif et ceux de la variété dont il s'agit ici, à laquelle j'ai donné le nom de *chaux carbonatée inverse*.

86. Si l'on prend au contraire pour noyau le rhomboïde qui présente cette variété, et que l'on cherche les demi-diagonales $g'$, $p'$, de celui qui fait à son égard la fonction d'inverse, et la loi qui serait susceptible de produire ce dernier, la proportion

$$g':p'::\sqrt{3p^2-g^2}:\sqrt{g^2+p^2}$$

devient

$$g':p'::\sqrt{12}:\sqrt{8}::\sqrt{3}:\sqrt{2},$$

ainsi que cela doit être. Soit $n$ l'exposant du décroissement qui est censé ici être direct sur l'angle supérieur ; la formule relative à ce mode de décroissement étant $n=\frac{g^2+p^2}{2p^2-2g^2}$, on aura $n=2$, ce qui indique un décroissement par quatre rangées en largeur ; et si l'on cherche le décroissement inverse qui produirait le même rhomboïde, désignant par $n'$ la loi de ce décroissement, et employant la formule $n'=\frac{2-n}{4n+1}$, on voit que $n'$ devient $\frac{0}{9}$, ou infiniment petit ; c'est-à-dire que dans ce cas le rhomboïde est le même que

26..

celui qui naîtrait d'un décroissement par une rangée sur les bords supérieurs de l'autre rhomboïde.

87. Adoptons pour noyau le rhomboïde de $134^d\frac{1}{2}$ que j'ai nommé *équiaxe ;* en continuant d'employer les mêmes formules, et faisant $g' = \sqrt{12}$, $p' = \sqrt{5}$, on trouve que dans le rhomboïde qui fait à son égard la fonction d'inverse, le rapport entre les demi-diagonales $g$ et $p$ est celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$, que l'exposant $n$ du décroissement direct sur l'angle inférieur, susceptible de le produire, est $\frac{17}{14}$, et que l'exposant $n'$ du décroissement inverse que l'on peut substituer au précédent est $\frac{5}{6}$.

88. Si l'on adopte au contraire pour noyau le rhomboïde aigu dont les demi-diagonales $g$ et $p$ sont entre elles dans le rapport de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$, on trouve que dans celui qui présente son inverse,

$$g' : p' :: \sqrt{12} : \sqrt{5},$$

que l'exposant $n$ du décroissement dont ce dernier dépend, et qui est censé être direct sur l'angle supérieur, est $\frac{5}{7}$, et que l'exposant $n'$ du décroissement inverse qui peut être substitué au précédent est $\frac{1}{3}$.

89. Replaçons maintenant les deux rhomboïdes que nous venons de comparer, parmi les formes secondaires du rhomboïde de $104^d\frac{1}{2}$, qui est le noyau indiqué par la division mécanique, et supposant que l'on connaisse l'exposant du décroissement direct qui est susceptible de produire celui des deux rhomboïdes

qui est obtus, en agissant sur l'angle A, cherchons l'exposant $\nu'$ du décroissement qui produirait l'autre en agissant de même directement, mais sur l'angle *e*. Il faudra substituer 2 à $\nu$, $\sqrt{3}$ à $g$, et $\sqrt{2}$ à $p$, dans la formule $\nu' = \frac{2\nu(g^2+p^2)+3g^2-p^2}{4\nu(g^2-p^2)+2(g^2+p^2)}$, ce qui donnera $\nu' = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$.

Cette loi est la même que celle dont nous sommes partis ci-dessus, pour trouver le rapport $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$ entre les demi-diagonales $g'$ et $p'$ du rhomboïde qui nous occupe. C'est ici le lieu d'expliquer le nom de *chaux carbonatée contrastante* que j'ai donné à la variété à laquelle appartient ce rhomboïde. Il est tiré de ce qu'il offre, à l'égard du rhomboïde équiaxe, la même inversion d'angles que le rhomboïde inverse comparé au primitif, inversion qui forme ici une sorte de contraste, en ce que l'un des rhomboïdes est très aigu et l'autre très obtus.

En appliquant au cas présent le calcul que j'ai donné plus haut, à l'occasion du rhomboïde inverse, et en faisant successivement $g = \sqrt{12}$, $p = \sqrt{5}$, pour le romboïde équiaxe, et $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{17}$, pour le contrastant, on trouvera que dans le premier, le rapport entre le rayon et le cosinus du petit angle plan est celui de 17 à 7, ce qui donne pour cet angle $65^d\, 41'\, 4''$, et que le rapport entre le rayon et le cosinus de la plus petite incidence des faces est celui de 10 à 7, ce qui donne pour cette incidence

$45^d\,34'\,22''$. C'est le contraire dans le rhomboïde contrastant; la mesure du petit angle de ses faces est de $45^d\,34'\,22''$, et leur plus petite incidence est de $65^d\,41'\,4''$. De plus, on trouvera que le rapport entre le sinus et le cosinus du petit angle de la coupe principale est de part et d'autre celui de 6 à 7, ce qui donne pour cet angle $40^d\,36'\,8''$.

90. Reprenons les deux suites de rhomboïdes qui naissent successivement les uns des autres, à l'aide d'un décroissement par une rangée tantôt sur les bords B, tantôt sur l'angle *e* (*voyez* p. 366). Nous avons vu que le rhomboïde de $184^d\frac{1}{2}$ étant pris pour générateur, l'équiaxe était le premier terme de chaque série ascendante, et l'inverse le premier de chaque série descendante (61). Le contrastant fournit le second terme des mêmes séries. Car, dans les décroissemens sur les bords supérieurs on a, en désignant par $\gamma$ et $\pi$ les demi-diagonales d'un rhomboïde du rang $r$, dans la série descendante,

$$\gamma = \frac{g}{2^r} \text{ et } \pi = \sqrt{p^2 + \frac{1-4^r}{3.4^r}g^2};$$

et en faisant $r=2$, $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{2}$, on a

$$\gamma = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}, \text{ et } \pi = \sqrt{\tfrac{17}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{17}.$$

Donc $\gamma : \pi :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$, ce qui est le rapport entre les demi-diagonales de la variété contrastante.

D'une autre part, le décroissement étant supposé avoir lieu sur l'angle *e*, on a, en désignant par les mêmes lettres les demi-diagonales d'un rhomboïde du rang $r$ pris dans la série descendante,

$$\gamma = \left(\tfrac{3}{2}\right)^r g \text{ et } \pi = 3^r \sqrt{p^2 + \frac{1-4^r}{3.4^r} g^2};$$

et en assignant les mêmes valeurs à $r, g, p$,

$$\gamma = \tfrac{9}{4}\sqrt{3},\ \pi = 9\sqrt{\tfrac{17}{16}} = \tfrac{9}{4}\sqrt{17};$$

ce qui donne encore $\gamma : \pi :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$. Ainsi, les quatre rhomboïdes nommés *équiaxe*, *primitif*, *inverse* et *contrastant*, sont doublement remarquables par leur filiation dans chacune des deux séries dont j'ai parlé, et par les inversions qu'ils présentent, dans leurs angles plans et saillans, lorsqu'on les rapproche deux à deux.

91. Les résultats relatifs aux deux suites de rhomboïdes, peuvent donner matière à de nouveaux problèmes, qui consistent à trouver la loi de décroissement en vertu de laquelle celui que l'on prend pour générateur produirait immédiatement l'un quelconque des autres dont le rang serait connu.

Considérons d'abord les rhomboïdes qui naissent les uns des autres, en vertu du décroissement $\overset{1}{B}$, et bornons-nous à ceux qui composent la série ascendante.

Soit $adsg$ (fig. 57, pl. 20) la coupe du rhomboïde générateur; il est facile de voir que $ad'sg'$, $a\delta s\gamma$, $ad''sg''$, etc., représenteront les coupes des rhomboïdes suivans, puisque la diagonale oblique de chacun d'eux se confond avec l'arête de celui qui est censé le produire. Or, parmi ces rhomboïdes, les uns, tels que $a\delta s\gamma$, $a\delta' s\gamma'$, résulteront d'un décroissement en largeur sur l'angle A du générateur considéré comme leur noyau commun, et les autres, tels que $ad'sg'$, $ad''sg''$, résulteront d'un décroissement en hauteur sur le même angle. Cherchons les formules relatives à ces deux cas.

1°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement direct; soient $g$, $p$, les demi-diagonales du générateur; $\gamma$, $\pi$, celles du rhomboïde proposé, et $n$ la loi du décroissement susceptible de produire ce dernier. En général $\gamma = g . 2$ (*voyez* page 301).

Donc $$\sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} = 2^r \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

D'une autre part, si nous prenons pour exemple le rhomboïde dont la coupe est $a\delta s\gamma$, nous aurons

$$\delta n : an :: mu \text{ (p 311)} : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Mais on a aussi

$$\delta n : an :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

à cause de l'égalité des axes. Donc

$$2^r\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2-3g^2} : (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

ou

$$2^r : 2 :: n+1 : 2n-1;\quad 2^{r-1} : 1 :: n+1 : 2n-1;$$

$$2n . 2^{r-1} - 2^{r-1} = n+1;\quad n . 2^r - n = 2^{r-1}+1.$$

Donc $$n=\frac{2^{r-1}+1}{2^r-1}.$$

2°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement inverse. Soit $r'$ le rang du terme proposé. Nous aurons toujours $\gamma=g.2^{r'}$, et prenant pour exemple le rhomboïde dont la coupe est $ad''sg''$,

$$d''r:ar::uy:au \text{ (p. 317) } ::(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2}.$$

Mais de plus,

$$d''r:ar::\sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2}:\tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}, \text{ ou } \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2}.$$

Donc

$$(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2}::2^{r'}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\tfrac{2}{3}\sqrt{a^2};$$

ou $$n+1:1-2n::2^{r'}:2;$$

d'où l'on tire

$$2n+2=2^{r'}-2n.2^{r'},$$
$$n+1=2^{r'-1}-n.2^{r'},$$

et $$n=\frac{2^{r'-1}-1}{2^{r'}+1}.$$

92. Passons tout de suite aux rhomboïdes qui naissent les uns des autres, en vertu de la loi E''E, et bornons-nous de même à ceux qui sont compris dans la série ascendante.

Soit $adsg$ (fig. 58) la coupe du rhomboïde générateur. Les coupes des autres rhomboïdes seront successivement les quadrilatères $a'd's'g'$, $a''d''s''g''$, $a'''d'''s'''g'''$, dans chacun desquels la ligne $a'g'$, $a''g''$, etc., qui représente l'arête supérieure, est parallèle à la diagonale oblique $ad$, $a'd'$, etc., du rhomboïde précédent. Parmi les divers rhomboïdes de la série, les uns, tels que $a''d''s''g''$, tourneront leurs diagonales vers celle du noyau, et résulteront d'un décroissement en largeur sur l'angle $e$; et les autres, tels que $a'd's'g'$, $a'''d'''s'''g'''$, auront leurs bords supérieurs tournés vers les diagonales du noyau, et résulteront d'un décroissement en hauteur sur l'angle $e$.

1°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement direct. Soient $g$ et $p$ les demi-diagonales du générateur; $\gamma$, $\pi$, celles du rhomboïde proposé, et $r$ le rang du terme auquel il répond. En général,

$$\gamma=(\tfrac{3}{2})^r g\text{, et } \sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}=3^r\sqrt{9p^2-3g^2}=3^r a \text{ (60).}$$

Menons $du$ parallèle à la diagonale oblique inférieure du rhomboïde proposé. On aura

$$dr \text{ ou } \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=(\tfrac{2}{3})^r\sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2};$$

de plus

$$dr : ru :: \sqrt{3\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}.$$

Or,

$$ru=rs+us=\tfrac{1}{3}a+\frac{n}{1-n}a \text{ (64)}=\frac{1+2n}{3-3n}a.$$

Donc

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \text{ ou } (\tfrac{2}{3})^r\sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2}:\frac{1+2n}{3-3n}a::\sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2}:\tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}=\tfrac{2}{3}.3^r a;$$

ou $$\left(\tfrac{2}{3}\right)^r : \frac{1+2n}{3-3n} :: 1 : \tfrac{2}{3}.3^r,$$

et $$\left(\tfrac{2}{3}\right)^r : \frac{1+2n}{1-n} :: 1 : 2.3^r;$$

d'où l'on tire $$2^r = \frac{1+2n}{2-2n};$$

et enfin, $$n = \frac{2^{r+1}-1}{2(2^r+1)}.$$

2°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement inverse. Soit $dp$ une ligne parallèle à la diagonale oblique du rhomboïde proposé. Nous aurons encore

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^r \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2}, \text{ et } \sqrt{9\pi^2 - 3\gamma^2} = 3^r.a.$$

De plus

$$dr : pr :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^r \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \left(\tfrac{2}{3}a + \frac{1}{n-1}\right) a = \frac{2n+1}{3n-3}a$$
$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}.3^r.a;$$

ou $$\left(\tfrac{2}{3}\right)^r : \frac{2n+1}{3n-3} :: 1 : \tfrac{2}{3}.3^r;$$

d'où l'on tire

$$2.3^r\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \frac{2n+1}{n-1},\ 2^{r+1} = \frac{2n+1}{n-1},\ n.2^{r+1} - 2^{r+1} = 2n+1,$$

$$n.2^{r+1} - 2n = 2^{r+1} + 1,\ n = \frac{2^{r+1}+1}{2^{r+1}-2};$$

et enfin $$n = \frac{2^{r+1}+1}{2(2^r-1)}.$$

93. Les formules auxquelles nous sommes parvenus, pour les séries ascendantes, s'appliquent, en sens inverse, aux séries descendantes, en sorte que nous sommes dispensés de chercher directement celles qui ont rapport à ces dernières séries.

Soit *adsg* (fig. 59) le même quadrilatère que fig. 57, et qui est, comme nous l'avons dit, la coupe principale du générateur relative aux rhomboïdes qui naissent les uns des autres, en vertu du décroissement $\underset{1}{B}$. Il est facile de voir que la coupe du rhomboïde qui donne le premier terme de la série descendante, sera le quadrilatère *a*G*s*D, qui a le même axe que *adsg*, et dans lequel les lignes *a*G, *s*D, qui représentent deux bords supérieurs se confondent avec les diagonales obliques *ad*, *sg*.

Or, nous avons vu (p. 367) que le même rhomboïde qui est produit par tel autre en vertu du décroissement $\underset{1}{B}$, peut à son tour en produire un semblable à celui-ci, à l'aide du décroissement E''E; donc, si par les points *g*, *d*, on fait passer la coupe *a'd's'g'* du rhomboïde produit en vertu de ce dernier décroissement, par celui auquel appartient *adsg*, le rhomboïde dont il s'agit sera le premier terme de la série ascendante relative au décroissement E''E, c'est-à-dire que *a'd's'g'* sera semblable à *a'd's'g'* (fig. 58).

En faisant le même raisonnement par rapport aux rhomboïdes suivans, on en conclura que les formules relatives à la série ascendante pour les décroissemens dont le signe est $E^{11}E$, s'appliquent à la série descendante, pour les décroissemens qui ont pour signe $\underset{1}{B}$.

D'une autre part, soit *adsg* (fig. 60), le même quadrilatère que fig. 58, qui est la coupe du générateur, relative aux rhomboïdes produits les uns par les autres, à l'aide du décroissement $E^{11}E$. On concevra aisément que la coupe du rhomboïde qui donne le premier terme de la série descendante, est le quadrilatère ADSG, dans lequel l'axe AS est le tiers de *as*, et les lignes AD, GS, qui représentent deux diagonales obliques, sont parallèles aux bords supérieurs *ag*, *ds*, du générateur.

Or, la propriété inverse de celle qui a été énoncée plus haut est également vraie; c'est-à-dire que le même rhomboïde qui naît de tel autre, à l'aide du décroissement $E^{11}E$, est susceptible à son tour d'en produire un semblable à celui-ci, en vertu du décroissement $\underset{1}{B}$; donc si par les points *a*, *s*, on fait passer la coupe *ad'sg'* du rhomboïde qui résulte de ce dernier décroissement rapporté au générateur dont *adsg* représente la coupe, le rhomboïde dont il s'agit sera le premier terme de la série ascendante relative au décroissement $\underset{1}{B}$, ou, ce qui revient au même, *ad'sg'* sera semblable à *ad'sg'* (fig. 57).

Le même raisonnement s'étend aux rhomboïdes suivans, d'où l'on conclura que les formules relatives à la série ascendante, pour les décroissemens $\overset{1}{B}$, donnent également la loi à laquelle est soumise la série descendante, pour les décroissemens dont le signe est $E^{11}E$.

94. Pour faire quelques applications, prenons d'abord la formule

$$n = \frac{2^{r-1} \pm 1}{2^r \mp 1}$$

qui se rapporte soit à la série ascendante pour les décroissemens $\underset{1}{B}$, soit à la série descendante pour les décroissemens $E^{11}\dot{E}$; les signes supérieurs ayant lieu pour les décroissemens directs, et les inférieurs pour les décroissemens inverses.

Si l'on égale $r$ successivement à 1, 2, 3, 4, 5, on trouve

$$n = \tfrac{0}{3},\ n = 1,\ n = \tfrac{1}{3},\ n = \tfrac{3}{5},\ n = \tfrac{17}{7}.$$

La première valeur de $n$, qui est nulle, indique que la diagonale oblique du rhomboïde produit se confond avec l'arête du générateur, ce qui a lieu dans la variété de chaux carbonatée nommée *équiaxe* (13).

La seconde valeur de $n$, qui est l'unité, convient à la variété de fer oligiste appelée *binaire*, et que j'ai décrite plus haut (p. 312). Les deux valeurs suivantes de $n$, savoir $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{5}$, quoiqu'elles rentrent dans les limites des lois connues, ne se sont point encore rencontrées dans les résultats de la cristallisation; et quand à la dernière valeur $\frac{17}{7}$, qui s'éloigne déjà de la simplicité des lois ordinaires, elle n'est probablement qu'hypothétique.

95. Passons à la formule $\frac{2^{r+1} \pm 1}{2(2^r \mp 1)}$, relative soit à la série ascendante pour les décroissemens $E^{1}E$, soit à la série descendante pour les décroissemens $\underset{1}{B}$, les signes supérieurs ayant lieu dans le cas des décroissemens directs, et les inférieurs dans celui des décroissemens inverses.

En égalant de même successivement la quantité $r$ à 1, 2, 3, 4, 5, on trouve

$$n = \tfrac{1}{2},\ n = \tfrac{3}{2},\ n = \tfrac{17}{14},\ n = \tfrac{11}{10},\ n = \tfrac{65}{62}.$$

Si l'on continue de prendre pour générateur le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, la première valeur de $n$, qui est $\frac{1}{2}$, donnera le rhomboïde inverse (p. 361); la seconde, qui est $\frac{3}{2}$, donnera le rhomboïde contrastant (p. 378).

Quant aux trois suivantes, leur défaut de simplicité semble leur donner l'exclusion parmi les produits de la cristallisation.

96. Les résultats precédens conduisent, par une marche différente, à la même filiation, entre les rhomboïdes nommés *équiaxe*, *primitif*, *inverse* et *contrastant*, que nous avons déjà déduite des rapports entre les demi-diagonales de ces rhomboïdes (14).

Je terminerai cet article par la solution d'un genre de problèmes qui achèvera de mettre dans tout son jour la dépendance mutuelle qu'ont entre eux les cristaux d'une même espèce, en faisant voir sous combien de faces une même forme se présente à la théorie pour en varier les applications.

97. Soit *ss'* (fig. 61, pl. 20) un dodécaèdre à triangles scalènes. On peut concevoir dans l'intérieur du solide cinq rhomboïdes différens, dont chacun soit susceptible de le produire, à l'aide d'un décroissement simple. Le premier est celui dont les bords inférieurs analogues à D (fig. 62), se confondent avec les lignes *ge*, *en*, *nl*, etc. (fig. 61), et, dans ce cas, le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur les bords dont il s'agit. Le second est celui dont les bords supérieurs B (fig. 62) se confondent avec les lignes *gs*, *sn* (fig. 61), c'est-à-dire avec les arêtes longitudinales les plus saillantes du dodécaèdre, prises deux à deux, en partant du sommet, et lesquelles deviendront alors les lignes de départ des décroissemens. Le troisième est celui dont les bords supérieurs B, coïncident au contraire avec les arêtes les moins saillantes *es*, *sl*, sur lesquelles agiront de même les décroissemens. Le quatrième aura ses faces parallèles aux arêtes les plus saillantes *gs*, *ns*, prises solitairement, et dans ce cas le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur les angles latéraux E, E (fig. 62), de ce rhomboïde. Les faces du cinquième seront parallèles aux arêtes les moins saillantes *es*, *ls* (fig. 61), prises aussi une à une, et le décroissement qui donnera le dodécaèdre aura lieu de même sur les angles E.

Or, il suffit que le dodécaèdre puisse être produit par l'un quelconque des rhomboïdes dont il s'agit, pour que chacun des quatre autres soit également susceptible de faire à son égard la fonction de noyau. Dans la même hypothèse, si l'on choisit deux quelconques des cinq rhomboïdes, chacun pourra donner naissance à l'autre, ou naître de lui, en vertu d'un décroissement sur les angles supérieurs ou inférieurs. Nous nous bornerons ici aux résultats qui dérivent du premier rhomboïde considéré comme générateur, c'est-à-dire de celui dont les bords inférieurs se confondent avec les lignes *ge*, *en*, *nl*, etc.

98. Supposons d'abord que le noyau qu'il s'agit de substituer à ce générateur, pour en déduire hypothétiquement le dodécaèdre, soit celui dont les faces passent l'une par les lignes *sg*, *sn*, une seconde par les lignes *sn*, *sy*, etc.

Désignons par $g$, $p$, les demi-diagonales du générateur, par $g'$, $p'$, celles du noyau hypothétique, par $n$ la loi de décroissement qui donne le dodécaèdre en agissant sur les bords inférieurs du générateur, et par $n'$ celle qui le produirait en agissant sur les bords supérieurs du noyau hypothétique. Etant donné $g$, $p$ et $n$, cherchons d'abord $g'$ et $p'$.

Soit *adsg* (fig. 63) la coupe principale du générateur, *dp*, *gu*, deux des arêtes les moins saillantes du dodécaèdre, opposées entre elles, et *gp*, *du*, les deux arêtes saillantes situées dans le même plan. Soient *dr*, *gc*, des lignes perpendiculaires sur l'axe, Si par le milieu $c$ de la diagonale $ac$ nous menons $pm$, elle sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et $um$ sera l'arête adjacente à cette diagonale vers le sommet inférieur.

Or, en reprenant ici ce qui a été dit plus haut, au sujet des décroissemens sur les bords supérieurs (p. 290), il est aisé de voir que la ligne $mo$ perpendiculaire sur l'axe répond à $dr$ (fig. 5, pl. 15). Donc

$$mo \text{ (fig. 63)} = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2};$$

mais

$$pu = as + 2ap = a + a \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}a \text{ (p. 369)}.$$

Donc $uo$ étant le tiers de l'axe $pu$, on aura

$$uo = \tfrac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)a = \frac{n+1}{3n-3}a.$$

$$uo : ur :: mo : dr;$$

$$ur = us + rs = \frac{1}{n-1}a + \tfrac{1}{3}a = \frac{n+2}{3n-3}a.$$

Donc

$$\frac{n+1}{3n-3}a : \frac{n+2}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

d'où l'on tire

$$g' = \frac{n+1}{n+2}g.$$

Mais

$$pu \text{ ou } \sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{n+1}{n-1}a.$$

Donc

$$9p'^2 - 3\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2;$$

donc

$$p'^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 g^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2;$$

donc

$$g' : p' :: \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2}\cdot g^2} : \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2}\cdot \frac{1}{3}g^2 + \frac{1}{(n-1)^2}\cdot \frac{1}{9}a^2}.$$

Cherchons maintenant le rapport de $n'$ à $n$. La ligne $dr$ étant la même que $mu$ (fig. 5, pl. 15), $pr$ (fig. 63, pl. 20) sera la même que $au$ (fig. 5, pl. 15).

Or,

$$au = \frac{2n'-1}{3n'}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} \text{ (p. 292)};$$

$$pr \text{(fig. 63)} = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Mais

$$\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = pu = \frac{n+1}{n-1}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{2n+1}{3n-3};$$

d'où l'on tire

$$n' = n+1, \text{ et } n = n'-1.$$

99. Soit maintenant $n''$ l'expression de la loi qui donnerait le noyau hypothétique, comme forme secondaire du générateur, en agissant sur l'angle inférieur $e$ de ce dernier. Si nous menons $dh$ parallèle à $cp$, la première ligne sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et nous aurons

$$ah = \frac{1}{n''-1} a' \text{ (p. 369).}$$

Mais $$ap : ah :: ac : ad :: 1 : 2 ;$$

donc

$$ah = 2ap, \text{ et } \frac{a'}{n''-1} = \frac{2a}{n-1}.$$

D'ailleurs le générateur étant ici un noyau commun au dodécaèdre et au rhomboïde qui fait la fonction de noyau hypothétique, nous avons $a' = a$. Donc

$$\frac{1}{n''-1} = \frac{2}{n-1},$$

ce qui donne

$$n'' = \frac{n+1}{2}.$$

100. Soit $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée, et $n = 2$. Le dodécaèdre sera celui qui porte le nom de *métastatique* (p. 336). Dans le même cas on a

$$g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{17}, n' = 3 \text{ et } n'' = \tfrac{3}{2}.$$

Ainsi le dodecaèdre est susceptible d'être produit en vertu d'un décroissement par trois rangées sur les bords supérieurs du noyau hypothétique, dans lequel le rapport entre les demi-diagonales est celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$, et ce dernier, considéré comme forme secondaire du générateur, dépend d'un décroissement par trois rangées sur les angles inférieurs du même générateur; c'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au rhomboïde contrastant (p. 378).

101. On connaît une variété de chaux carbonatée, représentée (fig. 64, pl. 20), dont le signe rapporté au véritable noyau est $\overset{3}{\underset{m}{e}}\overset{2}{\underset{r}{D}}$, et qui offre la réunion du noyau hypothétique dont je viens de parler avec le dodécaèdre auquel il donnerait naissance en vertu du décroissement $\underset{3}{B}$. Assez souvent les faces *m* ont une étendue qui semble les rendre prédominantes, comme on le voit sur la figure, en sorte qu'ici les apparences sont pour l'hypothèse dans laquelle l'inverse serait le générateur du cristal.

102. Supposons maintenant que le noyau hypothétique soit le rhomboïde dont les faces passent, l'une par les lignes *sk*, *se*, une seconde par les lignes *se*, *sl*, etc., et continuons de nous servir de la figure 63. Si par le milieu *k* de la diagonale *gs* nous menons *px*, elle sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et *ux* sera l'arête inférieure contiguë à cette diagonale. De plus, si du point *x* nous menons une perpendiculaire *xo* sur l'axe *pu*, il est évident qu'elle sera sur la direction de la per-

pendiculaire $mo$, relative au cas précédent, puisqu'elle doit aussi couper l'axe au tiers de la longueur de celui-ci.

Soient encore $g'$, $p'$, les diagonales du nouveau noyau hypothétique, et $n'$ la loi qui le produirait en agissant sur ses bords supérieurs. Déterminons d'abord $g'$ et $p'$. Nous aurons

$$xo = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}, \text{ et } uo = \frac{n+1}{3n-3}a,$$

comme ci-dessus.

$$uo : un :: xo : gn;$$

mais

$$un = us + ns = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3}a.$$

Donc

$$n+1 : 2n+1 :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

d'où l'on tire

$$g' = \frac{n+1}{2n+1}g.$$

D'une autre part,

$$\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{n+1}{n-1}a,$$

comme ci-dessus, et à cause de

$$3g'^2 = 3\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2,\ 9p'^2 - 3\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2.$$

Donc

$$p'^2 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2.$$

Donc

$$g' : p' :: \frac{1}{2n+1}g : \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 g^2 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 a^2}.$$

103. Passons au rapport de $n'$ à $n$. La ligne $gn$ étant la même que $mu$ (fig. 5, pl. 15), $pn$ (fig. 63, pl. 20) sera la même que $au$ (fig. 5, pl. 15). Or,

$$au = \frac{2n'-1}{3n'}a' \text{ (p. 292)},$$

$$pn\text{(fig. 63)} = \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)a = \frac{n+2}{3n-3}a.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'}a' = \frac{n+2}{3n-3}a.$$

Mais d'après ce qui a été dit (p. 421),

$$a' = \frac{n+1}{n-1}a.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'}\cdot\frac{n+1}{n-1} = \frac{n+2}{3n-3}, \text{ ou } \frac{2n'-1}{n'}\cdot(n+1) = n+2;$$

ce qui donne

$$n' = \frac{n+1}{n} \text{ et } n = \frac{1}{n'-1}.$$

Maintenant désignons par $n''$ l'expression de la loi qui produirait le noyau hypothétique, comme forme secondaire du générateur, en agissant par renversement sur l'angle inférieur $e$ de celui-ci. Si nous menons $gl$ parallèle à $px$, $gl$ sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et nous aurons

$$al = \frac{n''}{1-n''}a \text{ (p. 371)}.$$

D'une autre part, les triangles semblables $skp$,

$sgl$, donnent

$$sp : sl :: sk : sg :: 1 : 2;$$

donc $$sl = 2sp, \text{ et } pl = sp;$$

donc puisque $al = ap + pl$, l'on aura aussi

$$al = ap + sp = 2(as) + ap = \left(\frac{2}{n-1} + 1\right)a = \frac{n+1}{n-1}a,$$

et égalant les deux valeurs de $al$,

$$\frac{n''}{1-n''} = \frac{n+1}{n-1};$$

d'où l'on tire

$$n'' = \frac{n+1}{2n}, \text{ et } n = \frac{1}{2n''-1}.$$

104. Supposons de nouveau que le dodécaèdre secondaire soit le métastatique. Nous aurons encore

$$n = 2, g = \sqrt{3}, a = \sqrt{9};$$

donc

$$g' : p' :: \tfrac{1}{5}\sqrt{3} : \sqrt{\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{25} \cdot 3 + 1} :: \sqrt{3} : \sqrt{26}.$$

Dans le même cas,

$$n' = \tfrac{3}{2}, \quad \text{et} \quad n'' = \tfrac{3}{4};$$

c'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au rhomboïde mixte (p. 386), et que le dodécaèdre peut résulter d'un décroissement par trois rangées en largeur et deux en hauteur sur les bords supérieurs de ce rhomboïde.

La variété sextrigésimale de chaux carbonatée (*fig.* 65), dont le signe est $\overset{2}{\underset{c}{e}}\overset{3}{\underset{m}{e}}\overset{\frac{2}{3}}{\underset{s}{e}}\overset{2}{\underset{r}{D}}\underset{\overset{1}{g}}{B}$, présente la *réunion de ce même rhomboïde* et du précédent avec le dodécaèdre métastatique, c'est-à-dire celle des deux noyaux hypothétiques avec le solide auquel chacun d'eux pourrait servir de générateur. Cette variété renferme en même temps les pans du prisme hexaèdre régulier, et les faces du rhomboïde équiaxe.

105. Concevons maintenant que le rhomboïde qui peut être substitué au générateur, dans la production du dodécaèdre, soit celui dont les faces seraient parallèles aux arêtes les plus saillantes $sn$ (fig. 61), $sg$, $sy$, etc. Soient toujours $g$, $p$, les demi-diagonales du générateur, $g'$, $p'$, celles du noyau hypothétique, $n$ l'expression de la loi en vertu de laquelle le générateur produirait le dodécaèdre, $n'$ celui de la loi qui aurait lieu sur les angles latéraux du rhomboïde hypothétique substitué au générateur, et $n''$ celui de la loi à l'aide de laquelle le générateur produirait le noyau hypothétique. Etant données $g$, $p$, $n$, il s'agit de trouver les autres quantités. Cherchons d'abord $g'$ et $p'$.

Soient $adsg$ (fig. 66, pl. 21), et $dpgu$ les mêmes quadrilatères que fig. 63, pl. 20, et soit $a'd's'g'$ (fig. 66) la coupe principale du noyau hypothétique. Ayant mené $g'n'l$ perpendiculaire sur l'axe $pu$, nous aurons, à cause du parallélisme des lignes $a'd'$, $pg$, $\quad gn : pn :: ln' : a'n'$.

Or,

$$pn = ap + an = \left(\frac{1}{n-1}a + \frac{1}{3}a\right) = \frac{n+2}{3n-3}a;$$

donc substituant,

$$gn : \frac{n+2}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a';$$

D'une autre part,

$$gn : un :: d'r' : ur' = us' + r's' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

Mais

$$un = us + ns = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3};$$

donc substituant,

$$gn : \frac{2n+1}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

La première proportion donne

$$gn = \frac{n+2}{3n-3}a\sqrt{\frac{\frac{1}{3}g'^2}{\frac{1}{3}a'}} = \frac{(n+2)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2},$$

et la seconde

$$gn = \frac{\frac{2n+1}{3n-3}a\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}}{us' + \tfrac{1}{3}a'};$$

Egalant les deux valeurs de $gn$, et supprimant les facteurs communs aux deux membres, on trouve

$$\frac{n+2}{a'} = \frac{4n+2}{3us'+a'},$$

d'où l'on tire

$$us' = a'\left(\frac{4n+2}{3n+6}\right) - \tfrac{1}{3}a' = a' \cdot \frac{n}{n+2}.$$

D'une autre part,

$$us' = pu - ps' = pu - a'p - a's' = \frac{n+1}{n-1}a - us' - a';$$

donc

$$2(us') = \frac{n+1}{n-1}a - a',$$

et

$$2(us') = \frac{\frac{n+1}{n-1}a - a'}{2} = a' \cdot \frac{n}{n+2};$$

d'où l'on tire

$$a' = \frac{n+1}{n-1}a \cdot \frac{n+2}{3n+2}.$$

Mais nous avons eu $gn$ ou

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \frac{(n+2)a}{(n-1)a'} \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2};$$

donc

$$2g = \frac{(n+2)a}{(n-1)a'}g', \text{ et } g' = \frac{(2n-2)a'}{(n+2)a} \cdot g;$$

et substituant à la place de $a'$ sa valeur,

$$g' = \frac{2n+2}{3n+2} \cdot g.$$

De plus, nous avons eu

$$a' = \frac{n+1}{n-1} \cdot a \cdot \frac{n+2}{3n+2}.$$

ou, ce qui revient au même,

$$9g'^2 - 3g'^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2 \left(\frac{n+2}{3n+2}\right).$$

Et mettant à la place de $g'^2$ sa valeur,

$$9p'^2 - 3g^2 \left(\frac{2n+2}{3n+2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2 \left(\frac{n+2}{3n+2}^2\right),$$

d'où

$$p' = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{1}{9n+6} \sqrt{a^2(n+2)^2 + 12g^2(n-1)^2};$$

donc

$$g' : p' :: g(6n-6) : \sqrt{a^2(n+2)^2 + 12g^2(n-1)^2}.$$

106. Dans toutes les recherches du genre de celle-ci, je détermine d'abord les valeurs absolues de $g'$ et de $p'$, pour en conclure ensuite le rapport de ces lignes, parce que les solutions des problèmes en sont plus complètes. On abrégerait beaucoup le calcul en se bornant à trouver immédiatement ce rapport. Par exemple il suffirait, dans le cas précédent, d'avoir la proportion

$$gn \text{ ou } \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{n+2}{3n-3} \cdot a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a' \text{ (p. 427)},$$

qui se change en celle-ci,

$$2g : \frac{n+2}{3n-3} \cdot a\sqrt{3} :: \sqrt{g'^2} : \sqrt{3p'^2 - g'^2}.$$

Elevant tout au carré, et égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, puis transposant, on trouve

$$12g^2p'^2=\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2g'^2-4g^2g'^2;$$

d'où l'on tire

$$g'^2:p'^2::12g^2:\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2+4g^2;$$

donc

$$g':p'::2g\sqrt{3}:\sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2+4g^2}$$
$$::(3n-3)2g:\sqrt{(n+2)^2a^2+12(n-1)^2g^2}$$
$$::g(6n-6):\sqrt{(n+2)^2a^2+12(n-1)^2g^2},$$

ce qui est le même rapport que ci-dessus.

107. Pour trouver le rapport de $n'$ à $n$, je reprends l'équation $us'$ ou $a'p=a'\cdot\frac{n}{n+2}$. D'une autre part, considérant le dodécaèdre comme produit par un décroissement sur les angles latéraux du noyau hypothétique, nous aurons

$$a'p=\frac{1}{2n'}a'\text{ (p. 351)}.$$

Donc $$\frac{1}{2n'}=\frac{n}{n+2},$$

ce qui donne

$$n'=\frac{n+2}{2n},\text{ et } n=\frac{2}{2n'-1}.$$

Il reste à déterminer $n''$. Pour y parvenir, j'observe que la diagonale oblique $a'd'$ du noyau hypothétique étant parallèle à l'arête $pg$ du dodécaèdre, si l'on imagine que le rhombe auquel appartient la première se meuve parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il se trouve en contact avec la seconde, il est facile de voir que le noyau hypothétique se trouvera situé à l'égard du générateur dont la coupe est $adsg$, comme un rhomboïde produit en vertu d'un décroissement inverse sur les angles $e$ de ce générateur. Donc $pg$ répond à la même ligne (fig. 43, pl. 18). Donc $ap$ (fig. 66, pl. 21) $= \frac{n''}{1 - n''} . a$ (p. 371); mais $ap$ rapporté au dodécaèdre a pour expression

$$\frac{1}{n - 1} . a;$$

donc

$$\frac{n''}{1 - n''} = \frac{1}{n - 1};$$

d'où l'on tire

$$n'' = \frac{1}{n} \text{ et } n = \frac{1}{n''}.$$

Soit encore $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$; $a = \sqrt{9}$, et $n = 2$. Nous aurons

$$g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{5}. \; n' = 1, \text{ et } n'' = \tfrac{1}{2};$$

c'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au rhomboïde inverse (p. 361), et que le dodécaèdre peut naître du décroissement $E^{1 2}E$ rapporté à ce rhomboïde.

La variété progressive (fig. 67) de la chaux carbonatée, dont le signe est $\underset{f}{E^{1 1}} \underset{r}{\overset{3}{E}} \underset{m}{\overset{3}{D}} e$, offre la réunion des faces du rhomboïde dont il s'agit avec celles du dodécaèdre métastatique et celles du rhomboïde contrastant, en sorte que l'on a ici une espèce de conflit entre deux noyaux hypothétiques dont chacun serait susceptible de produire le dodécaèdre.

108. Il existe parmi les cristaux d'argent antimonié sulfuré une variété qui a beaucoup de rapport avec la précédente. La forme primitive de cette substance métallique est un rhomboïde obtus (fig. 62, pl. 20), dans lequel le rapport de $g$ à $p$ est celui des nombres $\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, ce qui donne $109^d\ 28'$ pour la plus grande incidence des faces, et $70^d 32'$ pour la plus petite. Dans le même rhomboïde, les angles plans sont l'un de $104^d 28'$, et l'autre de $75^d 32'$. La variété dont il s'agit, qui est représentée (fig. 68), se nomme *unibinaire*, et a pour signe $\underset{h}{\overset{2}{D}}\underset{i}{E^{11}E}$, en sorte qu'elle ne diffère de la première, relativement aux lois de la structure, que par l'absence des faces analogues à $m$, $m'$ (fig. 67). En appliquant ici les formules relatives aux décroissemens sur les bords inférieurs (p. 324 et 325), on trouve pour l'incidence de $h$ sur $h$ (fig. 68), $144^d 54'$, et pour celle de $h$ sur $h'$, $105^d 48'$. La première de ces incidences n'excède que d'environ un demi-degré celle de $r$ sur $r$ (fig. 67), et la seconde de $1^d \frac{1}{3}$, celle de $r$ sur la face adjacente à $f$, dans le dodécaèdre métastatique, qui résulte de la même loi $\overset{2}{D}$. Cependant la différence est de $5^d$ entre les incidences des faces primitives, dont l'une est de $109^d 28'$, et l'autre de $184^d 28'$. Mais cette diffé-

rence s'atténue en passant dans les résultats des décroissemens qui donnent les formes secondaires.

Si l'on cherche le rapport entre les demi-diagonales $\gamma$, $\pi$, du noyau hypothétique auxquelles appartiennent les faces *i* (fig 68), en employant les formules que nous avons données (p. 429), on trouve

$$\gamma : \pi :: \sqrt{5} : \sqrt{7},$$

ce qui donne d'une part $80^d\,26'$, pour l'angle plan au sommet du rhomboïde, et $99^d\,34'$ pour l'angle latéral; et d'une autre part $98^d\,13'$ pour la plus grande incidence des faces, et $80^d\,26'$ pour la plus petite. La loi $E^{1}E$ ou $\overset{1}{e}$, d'où dérive le même rhomboïde, ne pouvant être dans le cas présent, comme pour la chaux carbonatée, celle qui produit l'inverse du générateur, si l'on cherche cette dernière à l'aide de la formule $n = \frac{g^2 + p^2}{2g^2 - 2p^2}$ (p. 398), on trouve $n = 2$, c'est-à-dire que l'inverse du véritable noyau de l'argent antimonié sulfuré résulterait d'un décroissement direct par quatre rangées sur les angles inférieurs *e* de ce noyau. Ainsi, l'existence de ce rhomboïde inverse est dans les limites des lois ordinaires de la structure, quoique jusqu'ici on n'en connaisse aucun exemple.

109. Prenons maintenant pour noyau hypothétique le rhomboïde dont les faces sont parallèles aux arêtes les moins saillantes *se* (fig. 61, pl. 20), *sl*, etc., du dodécaèdre, et désignons par $g$, $p$, $g'$, $p'$, les

mêmes lignes que ci-dessus (p. 427), et par $n$, $n'$, $n''$, les exposans des lois relatives aux mêmes parties, soit du générateur, soit du noyau hypothétique. Nous nous servirons de la figure 69, qui est semblable à la figure 66, avec la différence que dans la première la coupe principale $a'd's'g'$ du noyau hypothétique a ses côtés $a'd'$, $g's'$, parallèles aux arêtes $dp$, $gu$, comme cela doit être. Nous aurons égard à cette différence dans la solution du problème, qui d'ailleurs suivra la même marche que le précédent.

Cela posé, $dr$ (fig. 69) : $pr$ :: $ln'$ : $a'n'$, ou

$$dr : \left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a'.$$

D'une autre part,

$$dr : ur = \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)a :: d'r' : u'r,$$

ou $$dr : \frac{n+2}{3n-3} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

La première proportion donne

$$dr = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2},$$

et la seconde

$$dr = \frac{\frac{n+2}{3n-3}\cdot a\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}}{us'+\tfrac{1}{3}a'}.$$

Egalant les deux valeurs de $dr$, puis réduisant,

$$\frac{2n+1}{a'} = \frac{2n+4}{3(us')+a'};$$

d'où l'on tire

$$us' = a' \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

D'une autre part,

$$us' = pu - ps' = \frac{\frac{n+1}{n-1}a - a'}{2};$$

donc

$$\frac{\frac{n+1}{n-1}a - a'}{2} = a' \cdot \frac{1}{2n+1},$$

ce qui donne

$$a' = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+1}{n-1}a;$$

mais $dr$ ou

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2}, \text{ ou } 2g = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'} \cdot g'.$$

Substituant à la place de $a'$ sa valeur, nous aurons

$$g' = g \cdot \frac{2n+2}{2n+3}.$$

La même valeur de $a'$ peut être mise aussi sous cette forme,

$$\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+1}{n-1}a,$$

et élevant tout au carré, puis laissant la quantité $p'$ seule dans le premier membre,

$$p' = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{1}{6n+9}\sqrt{a^2(2n+1)^2 + 12g^2(n-1)^2};$$

donc

$$g' : p' :: g(6n-6) : \sqrt{a^2(2n+1)^2+12g^2(n-1)^2},$$

rapport qui ne diffère de celui que nous avons trouvé, pour le cas précédent, que par le facteur de $a^2$, qui est d'une part $n+2$, et de l'autre $2n+1$.

110. Pour trouver la relation de $n'$ à $n$, reprenons l'équation $us'$ ou $a'p=\frac{a'}{2n+1}$. Si nous considérons le dodécaèdre comme le résultat d'un décroissement sur les angles latéraux du noyau hypothétique, nous aurons $a'p=\frac{1}{2n'}a'$ (p. 351). Donc $\frac{1}{2n'}=\frac{1}{2n+1}$; d'où l'on tire

$$n'=\frac{2n+1}{2} \text{ et } n=\frac{2n'-1}{2}.$$

Maintenant pour avoir $n''$, imaginons que le rhombe auquel appartient la diagonale $a'd'$, se meuve parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que cette diagonale coïncide avec $dp$; le noyau hypothétique se trouvera situé à l'égard du générateur, comme un rhomboïde qui naîtrait d'un décroissement direct sur les angles inférieurs $e$ de ce générateur. Donc $pd$ répond à la même ligne (fig. 42, pl. 18). Donc

$$ap \text{ (fig. 69)} = \frac{1}{n''-1}.a \text{ (p. 369)}.$$

Mais la valeur de $ap$ rapportée au dodécaèdre est

$$\frac{1}{n-1}.a; \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n''-1}=\frac{1}{n-1},$$

ce qui donne $n''=n$.

111. La chaux carbonatée nous fournit encore une application de ces divers résultats, dans une variété représentée figure 70, qui porte le nom de *dïenneaèdre*, et dont le signe est $\overset{\frac{3}{2}}{\underset{ym}{\mathrm{D}}}\overset{3}{e}$. On voit, par la seule inspection de la figure, qu'elle offre l'aspect d'un solide produit par un décroissement incomplet, qui donnerait les faces $y$, $y'$, en agissant sur les angles latéraux du rhomboïde auquel appartiennent les faces $m$, $m'$. Mais si l'on cherche les angles de ce solide dans l'hypothèse du véritable noyau, c'est-à-dire si l'on fait $g = \sqrt{3}$, $a = 3$, et $n = \frac{2}{3}$, dans les formules relatives aux décroissemens sur les bords inférieurs (p. 324 et 325), on trouve que l'incidence de $y$ sur $y$ est de $134^d 25' 2''$, et celle de $y$ sur $y'$, de $108^d 56' 2''$. En faisant les mêmes substitutions dans l'expression générale du rapport entre les diagonales $g'$ et $p'$ du rhomboïde hypothétique (p. 435), on aura $g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$; de plus, la formule

$$n' = \frac{2n+1}{2} \text{ donne } n' = \tfrac{5}{2},$$

et à cause de $n'' = n$, on a $n'' = \frac{3}{2}$; c'est-à-dire que le noyau hypothétique est le rhomboïde contrastant (p. 378), et que le dodécaèdre peut être produit en vertu d'un décroissement par cinq rangées sur les angles latéraux de ce rhomboïde.

112. Si l'on imagine que les faces $gse$ (fig. 61, pl. 20), $esn$, etc., en restant fixes par leurs bords $ge$,

*en*, etc., se relèvent par leur sommet *s*, de manière à faire des angles toujours plus petits avec l'axe du dodécaèdre, il y aura un terme où elles lui deviendront parallèles, et alors celles qui sont situées de part et d'autre d'une même arête *ge*, *en*, etc., étant de niveau, les douze faces n'en feront plus que six, qui se trouveront situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier. Dans le même cas, les arêtes *es*, *ns*, etc., étant aussi parallèles à l'axe, chacun des deux noyaux hypothétiques se trouvera transformé en un prisme triangulaire équilatéral d'une hauteur infinie. Alors la quantité $n'$ étant la même de part et d'autre dans les formules

$$n' = \frac{n+2}{2n} \text{ (p. 431), et } n' = \frac{2n+1}{2} \text{ (p. 435),}$$

on aura

$$\frac{n+2}{2n} = \frac{2n+1}{2},$$

ce qui donne $n=1$, comme cela doit être, d'après ce qui a été dit (p. 341). Maintenant si l'on reprend l'une quelconque des formules qui donnent les valeurs de $n'$, par exemple celle-ci, $n' = \frac{2n+1}{2}$, et que l'on fasse $n=1$, on trouve $n' = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire qu'alors le dodécaèdre est censé être produit en vertu d'un décroissement représenté par $\frac{3}{2}$, sur les angles latéraux de l'un ou l'autre noyau hypothétique. Voici ce que signifie ce résultat. Supposons que l'hexagone régulier *akodfg* (fig. 71) représente la coupe horizontale du dodécaèdre; le triangle équilatéral *aof* représentera en même temps celle de l'un ou de l'autre des noyaux hypothétiques. Soit *kh* une perpendiculaire sur *ao*, et soit *oxz* le triangle qui est censé faire ici la fonction de menstrurateur. Il sera l'analogue du petit triangle *bnm* (fig. 27, pl. 17), qui est relatif aux décroissemens sur les angles latéraux. On aura donc

$$ox : xz :: bn : nm \text{ (p. 349) } :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}}.$$

Or, dans le cas présent, $n = \frac{3}{2}$; et de plus la diagonale $p$ étant infinie, la quantité $g^2$ s'évanouit. Donc

$$ox : xz \text{ (fig. 71) } :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2}{p^2}} :: 2n : \sqrt{3} :: 3 : \sqrt{3} :: \sqrt{3} : 1,$$

ce qui s'accorde avec l'hypothèse présente, puisque ce rapport $\sqrt{3} : 1$ est celui de *oh* à *hk*, par une suite de ce que *akodfg* est un hexagone régulier. Mais ce résultat est purement idéal, le prisme triangulaire équilatéral étant exclus du nombre des formes primitives employées par la cristallisation.

## II. DES DÉCROISSEMENS INTERMÉDIAIRES RELATIFS AU RHOMBOÏDE.

113. Les décroissemens nommés *intermédiaires* dépendent de deux élémens variables qui doivent entrer dans leur calcul. L'un est le rapport entre les nombres d'arêtes de molécule soustraites sur les deux côtés de l'angle vers lequel se fait le décroissement.

L'autre est le nombre de rangées soustraites, ou la distance entre le même angle et le bord de la première lame de superposition. La fraction $\frac{y}{x}$ représentera le rapport dont je viens de parler, et je continuerai de désigner par $n$ le nombre de rangées soustraites.

A mesure que $y$ diminue à l'égard de $x$, le bord de chaque terme s'incline toujours davantage sur l'arête dont $x$ fait partie, jusqu'à ce qu'enfin il se confonde avec cette arête, au point où $y$ s'évanouit. D'une autre part, à mesure que $y$ augmente à l'égard de $x$, le bord de chaque lame décroissante approche davantage du parallélisme avec la diagonale opposée à l'angle vers lequel se fait le décroissement, et lorsque $y$ devient égal à $x$, on a un décroissement ordinaire sur les angles.

Il suit de là que cette espèce de décroissement n'est autre chose que le dernier terme de la série des décroissemens intermédiaires, en sorte que dans les formules générales qui représentent ces décroissemens, et dont la recherche est l'objet de cet article, il suffira de faire $y=x$, pour avoir les résultats relatifs aux décroissemens proprement dits sur les angles. Je n'ai pas laissé de donner des formules particulières pour ces derniers décroissemens, qui sont plus familiers à la cristallisation, parce que l'usage de ces formules revenant à chaque instant, il est plus commode de les trouver toutes préparées, sans être obligé de les simplifier, en faisant disparaître $x$ et $y$.

Les décroissemens intermédiaires relatifs au rhomboïde peuvent agir, soit sur les angles latéraux E, et cela de deux manières différentes, suivant que $x$ répond aux bords inférieurs D, et $y$ aux bords supérieurs B, ou que c'est l'inverse qui a lieu; soit sur l'angle inférieur $e$, soit sur l'angle supérieur A. Dans ces derniers décroissemens, $x$ et $y$ répondent toujours l'un et l'autre aux deux bords D ou B, adjacens à l'angle qui subit le décroissement. Je vais exposer successivement les résultats relatifs à ces quatre modifications.

I. *Décroissemens intermédiaires sur les angles* E, x *étant dans le sens de* D, *et* $y$ *dans le sens de* B.

114. Soit $audb$ (fig. 72, pl. 21) une des faces supérieures du rhomboïde qui fait la fonction de générateur, et $\gamma\lambda$, $\pi\zeta$ deux parallèles aux bords produits par le décroissement. Il est facile de concevoir qu'ici comme dans les décroissemens ordinaires sur les angles latéraux, le solide secondaire sera en général un dodécaèdre à triangles scalènes. Soit XH (fig. 73) ce dodécaèdre, et $as$ le noyau rhomboïdal qui lui est inscrit; soit de plus $adsg$ (fig. 74) la coupe principale du noyau; soient $gx$, $gh$, les mêmes arêtes que QX, QH (fig. 73), dont la dernière passe par l'angle $d$, et l'autre se forme à une certaine distance au-dessus de la diagonale $ad$ (fig. 74). Quant aux lignes $vx$, $vh$, elles représentent les arêtes opposées aux précédentes sur le dodécaèdre. Menons $dp$ parallèle à $gx$;

elle sera située comme la diagonale oblique d'un rhomboïde résultant d'un décroissement sur l'angle $d$, dans lequel la distance d'une lame à l'autre, prise dans le sens de $da$, serait la même que pour le dodécaèdre dont il s'agit. Soit $dkf$ le triangle mensurateur rapporté au plan $pds$ ; $kf$ représentera une arête de molécule, c'est-à-dire que si nous désignons par $g'$ la demi-diagonale horizontale, et par $p'$ la demi-diagonale oblique de la molécule, nous aurons

$$kf = \sqrt{g'^2 + p'^2}.$$

Reste à trouver l'expression de $dk$.

Pour y parvenir, concevons que la position de la ligne $\gamma\lambda$ (fig. 72) soit relative au cas où il n'y aurait qu'une rangée de soustraite par l'effet du décroissement intermédiaire sur l'angle $u$. Menons $\lambda\mu$ parallèle à $da$, $\gamma\pi$ perpendiculaire sur $\lambda\mu$, $d\varepsilon$ parallèle à $\gamma\lambda$, puis ayant pris $\varepsilon\vartheta$ égale à $u\gamma$, menons $\vartheta\nu$ parallèle à $d\varepsilon$, et enfin $\nu\varphi$ parallèle à $au$. Il est clair que $d\varepsilon$, et enfin $\nu\vartheta$ répondront aux bords de deux lames consécutives, et par conséquent $d\nu$ sera la distance d'une lame à l'autre, prise dans le sens de $da$, en ne supposant toujours qu'une rangée de soustraite. Ainsi l'on aura $d\nu . n = dk$ (fig. 74). La question se réduit donc à trouver l'expression algébrique de $d\nu$ (fig. 72).

Or, $\lambda\mu$ mesure autant de fois la demi-diagonale oblique d'une molécule, qu'il y a d'arêtes de molécule contenues dans $u\lambda + u\mu = 2x\sqrt{g'^2 + p'^2}$ ; donc on peut représenter $\lambda\mu$ par $2p'x$. D'une autre part,

$$\omega\nu = \varepsilon\vartheta = u\gamma = y\sqrt{g'^2 + p'^2}.$$

Or, les triangles semblables $\omega\nu d$, $\gamma\mu\lambda$, donnent

$$\gamma\mu : \lambda\mu :: \omega\nu : d\nu,$$

ou

$$(x-y)\sqrt{g'^2+p'^2} : 2p'x :: y\sqrt{g'^2+p'^2} : d\nu = \frac{2p'xy}{x-y}.$$

Donc

$$dk \text{ (fig. 74)} = \frac{2p'nxy}{x-y};$$

donc

$$dk : kf :: \frac{2p'nxy}{x-y} : \sqrt{g'^2+p'^2};$$

ou, parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau,

$$dk : kf :: \frac{2pnxy}{x-y} : \sqrt{g^2+p^2}.$$

Si nous prolongeons $ga$ jusqu'à la rencontre $y$ de $dp$, nous aurons aussi

$$da : ay :: \frac{2pnxy}{x-y} : \sqrt{g^2+p^2} :: 2p : \frac{x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc, puisque $da = 2p$, nous aurons

$$ay = \frac{x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}.$$

115. Cherchons aussi le prolongement $a\nu$ de $da$, jusqu'à la rencontre de $\nu x$.

Soit $as$ (fig. 75) le même générateur que fig. 74;

soient $tm$, $d\psi$, les lignes de départ du décroissement considéré sur la face $audb$, et $tu$ celle qui leur correspond vers l'angle $b$ considéré sur la face $abng$. Bornons-nous à considérer ce qui se passe à l'égard de $tm$ et $tu$, et menons $my$, $ty$, $ue$, $te$, de manière que les plans $tmy$, $tue$ soient parallèles aux faces CXQ, CXB (fig. 73). Soient enfin $mftb$ (fig. 75), $rtbu$, $mlyb$, $bexu$, les parallélogrammes qui ont pour diagonales les lignes $tm$, $tu$, $my$, $eu$. Nous aurons $ez=by$, et $yz=be$. Menons la diagonale $bz$ du rhombe $bezy$, et par le point $c$ où elle coupe $ue$ et $my$, menons $ct$. Il est aisé de voir que le triangle $bct$ est semblable au triangle $vag$ (fig. 74). Car si l'on suppose que le rhomboïde $as$ (fig. 75) soit tourné de manière que l'angle $b$ coïncide avec l'angle $g$ (fig. 74), $bc$ (fig. 74) tombera sur $gs$ (fig. 74), $bt$ sur $ga$, et $ct$ sera parallèle à l'intersection $vx$ des deux faces qui se réunissent sur cette même arête.

Or $bm$ et $bt$ (fig. 75) renferment autant de fois, l'une la quantité $x\sqrt{g'^2+p'^2}$, et l'autre la quantité $y\sqrt{g'^2+p'^2}$, qu'il y a de rangées soustraites; donc

$$bm=nx\sqrt{g'^2+p'^2},\text{ et }bt=ny\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

De plus, $by$ étant égale à la différence en hauteur entre deux lames consécutives de superposition, prise dans un sens parallèle à $bn$, il est visible que $by$ est égale à $kf$ (fig. 74). Donc $by=\sqrt{g'^2+p'^2}$.

Les triangles semblables $bmc$, $yzc$ (fig. 75), donnent

$$bm : yz = by :: bc : cz, \text{ ou } bm : by :: bc : bz - bc.$$

Substituant les valeurs algébriques, et faisant attention que $bz = 2p'$, par une suite de ce que

$$by = \sqrt{g'^2 + p^2},$$

on aura

$$nx\sqrt{g'^2 + p'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2} :: bc : 2p' - bc;$$

d'où l'on tire

$$bc = \frac{2p'nx}{nx + 1}.$$

Donc

$$bt : bc :: ny\sqrt{g'^2 + p'^2} : \frac{2p'nx}{nx + 1} :: \sqrt{g'^2 + p'^2} : \frac{2p'x}{nxy + y}$$

$$:: \sqrt{g^2 + p^2} : \frac{2px}{nxy + y}.$$

Mais

$$bt : bc :: ag = \sqrt{g^2 + p^2} : av \text{ (fig. 74)};$$

donc $$av = \frac{2px}{nxy + y}.$$

116. Cherchons encore $ap$ et $ax$.

1°. Pour $ap$. Les triangles semblables $pay$, $psd$, donnent $$ap : ay :: ap + as : ds,$$

ou

$$ap : \frac{x - y}{nxy}\sqrt{g^2 + p^2} :: ap + a : \sqrt{g^2 + p^2};$$

d'où l'on tire

$$ap = \frac{x - y}{nxy - x + y} . a.$$

2°. Pour $ax$. Les triangles $xav$, $xsg$, étant semblables, on a

$$ax : av :: ax + as : sg,$$

ou

$$ax : \frac{2px}{nxy + y} :: ax + a : 2p;$$

ce qui donne

$$ax = \frac{x}{nxy - x + y} . a.$$

117. Avant d'appliquer les données précédentes, j'observe que si l'on fait passer dans le dodécaèdre six plans coupans, dont chacun coïncide avec deux arêtes latérales contiguës, telles que CQ, CB, ces plans intercepteront un rhomboïde inscrit dans le dodécaèdre, comme le rhomboïde calcaire primitif l'est dans le cristal métastatique ( *voyez* p. 41 ).

J'ai à prouver que ce rhomboïde peut être substitué, comme noyau hypothétique, au générateur, de manière à en faire dériver le dodécaèdre, par une loi ordinaire de décroissement sur les bords inférieurs, et que le même rhomboïde est susceptible à son tour d'être produit par le générateur comme forme secondaire.

Cherchons d'abord les expressions des demi-diagonales $g'$ et $p'$ du rhomboïde dont il s'agit. Soit $\gamma q \varepsilon \nu$

(fig. 74) sa coupe principale. La ligne $qe$, perpendiculaire sur l'axe, étant représentée par $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$, son expression en fonction de $x$, $y$, $a$ et $p$, nous donnera la valeur de $g'$.

Or, d'une part, $dr : hr :: qe : eh$, et d'une autre part, $dr : pr :: qe : ex$; donc $eh : ex :: hr : pr$.

Ayant trouvé le rapport entre $eh$ et $ex$, et connaissant la somme $as + 2ax$ de ces quantités, nous en déduirons la valeur de $2h$, qui, étant mise à sa place dans la première des proportions précédentes, nous donnera l'expression de $qe$.

Maintenant

$$hr = ax + \tfrac{1}{3}a = \frac{x}{nxy + y - x} \cdot a + \tfrac{1}{3}a = \frac{nxy + 2x + y}{3nxy + 3y - 3x} a;$$

$$pr = ap + \tfrac{2}{3}a = \left(\frac{x - y}{nxy + y - x} + \frac{2}{3}\right) a = \frac{2nxy + x - y}{3nxy - 3x + 3y} a;$$

donc

$$eh : ex :: nxy + 2x + y : 2nxy + x - y.$$

Maintenant, soit $nxy + 2x + y = m'$, et .... $2nxy + x - y = n'$. Nous aurons

$$m' + n' : m' :: hx = as + 2ax : eh;$$

et mettant à la place de $m'$, $n'$, $as$ et $ax$, leurs valeurs

$$3nxy + 3x : nxy + 2x + y :: a + \frac{2x}{nxy - x + y} \cdot a$$
$$= \frac{nxy + x + y}{nxy - x + y} \cdot a : eh;$$

donc la proportion $dr:hr::qe:eh$ deviendra

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}.a::qe:a\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3x}\right);$$

ou

$$g:\tfrac{1}{3}::g':\frac{nxy+x+y}{3nxy+3x};$$

d'où l'on tire

$$g'=g.\frac{nxy+x+y}{nxy+x}.$$

Pour avoir la valeur de $p'$, commençons par chercher celle de $\gamma\varepsilon$ ou de $a'$, qui est le triple de la différence entre $eh$ et $ex$.

Nous avons eu plus haut

$$eh:ex::nxy+2x+y:2nxy+x-y;$$

donc

$$eh+ex:eh-ex::3nxy+3x:x+2y-nxy.$$

Mais

$$eh+ex \quad \text{ou} \quad hx=\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.a.$$

Substituant cette valeur à la place de $eh+ex$, et $\frac{1}{3}a'$ à la place de $eh-ex$, nous aurons

$$\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.a:\tfrac{1}{3}a'::3nxy+3x:x+2y-nxy;$$

d'où l'on tire

$$a'=a.\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y};$$

donc

$$9p'^2-3g'^2=a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy+y}\right)^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)^2.$$

Et mettant à la place de $g'^2$ sa valeur $g^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy+x}\right)^2$, puis dégageant $p'^2$ et simplifiant,

$$p'^2=\left[\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2\right]\left(\frac{x+nxy+y}{nxy+x}\right)^2;$$

donc

$$g':p'::g:\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2}.$$

118. Voyons maintenant s'il est possible que le dodécaèdre résulte d'un décroissement sur les bords inférieurs du noyau hypothétique. Soit N le nombre de rangées soustraites. On aura $\gamma x=\frac{1}{N-1}.a'$. Or,

$$\begin{aligned}\gamma x&=\tfrac{1}{2}(hx-a')\\&=\tfrac{1}{2}a\left[\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}-\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}\right)\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)\right]\\&=a\left(\frac{nxy-y}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right).\end{aligned}$$

Donc l'équation $\gamma x=\frac{1}{N-1}.a'$ devient

$$a\left(\frac{nxy-y}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)=\frac{1}{N-1}.a\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right),$$

ou

$$nxy-y=\frac{1}{N-1}(x+2y-nxy);$$

d'où l'on tire $N=\frac{nxy-y}{x+y}$. Donc, puisque $x$, $y$ et $n$ sont des quantités rationnelles, il y aura toujours pour N une valeur qui sera elle-même rationnelle.

La formule précédente donne aussi $n = \frac{Ny + x + y}{Nxy}$.

119. Le dodécaèdre étant également susceptible d'être produit, comme forme secondaire, par le générateur et par le noyau hypothétique, nous pouvons déjà en conclure que ce dernier est lui-même forme secondaire relativement au générateur. Mais pour le prouver directement, concevons que les lignes $\nu\gamma$, $\nu\varepsilon$, $q\varepsilon$, $\gamma q$, se meuvent parallèlement à elles-mêmes, en s'éloignant du centre, jusqu'à ce que le quadrilatère *adsg* se trouve inscrit dans le quadrilatère $\gamma q \varepsilon \nu$, comme on le voit figure 76. S'il existe un décroissement admissible, en vertu duquel le générateur puisse produire le noyau hypothétique, on voit, à la seule inspection de la figure, que ce décroissement doit agir par renversement sur les angles inférieurs du générateur. Soit $n'$ le nombre de rangées soustraites. Nous aurons cette série de rapports :

$$\nu y' \text{ (fig. 74)} : \nu'\gamma :: \nu'y' \text{ (fig. 76)} : y'\gamma' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}a'$$
$$:: gu : u\gamma' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\tfrac{1}{3} + \frac{n'}{1-n'}\right) a\,;$$

donc

$$g' : 2a' :: g : \frac{2n'+1}{1-n'} . a.$$

Mais en comparant les valeurs de $g'$ et de $a'$, que nous avons données plus haut (p. 447), on en conclura que

$$g' : 2a' :: g : 2a\left(\frac{x+2y-nry}{nxy-x+y}\right);$$

donc

$$g : \frac{2n'+1}{1-n'}a :: g : 2a\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right).$$

et

$$2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)=\frac{2n'+1}{1-n'},$$

d'où l'on déduit

$$n'=\frac{x+y-nxy}{2y},$$

ce qui indique la possibilité du cas dont il s'agit.

La figure 74 a été tracée d'après la condition que la diagonale oblique $\gamma\nu$ du noyau hypothétique diverge moins avec l'axe $hx$ que l'arête $ag$ du générateur. Nous verrons plus bas qu'il peut arriver que ce soit le contraire qui ait lieu, et que dans ce cas la même formule peut être encore employée pour déterminer la valeur de $n'$.

120. Il nous reste à trouver les formules qui donnent les incidences mutuelles des faces du dodécaèdre, aux endroits des arêtes QX (fig. 73), CX, BX, etc. Si nous menons les lignes BQ, CN, qui seront les diagonales horizontales de deux faces du noyau hypothétique, et si des points $\omega$, $\lambda$, situés au milieu de ces diagonales, nous menons $\omega\mu$, $\lambda\vartheta$, perpendiculaires l'une sur CX, et l'autre sur le prolongement de QX, le sinus de la moitié de la plus grande incidence des faces du dodécaèdre sera au cosinus :: B$\omega$ : $\omega\mu$ ; et le sinus de la moitié de la plus petite incidence sera au cosinus :: C$\lambda$ : $\vartheta\lambda$.

Or, les quantités $g$, $p$, $x$, $y$, $n$, étant supposées être connues, il est facile, d'après les formules données plus haut, d'en déduire les expressions de $g'$, $p'$, N, et parce que B$\omega$ ou C$\lambda$ est égale à $g'$, on pourra trouver les incidences cherchées, en considérant le dodécaèdre comme produit par un décroissement sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, et en se servant des formules ordinaires relatives à cette espèce de décroissement (p. 324 et suiv.). Mais pour donner aussi une solution directe du même problème, nous allons chercher les expressions des rapports entre les sinus et les cosinus des angles du dodécaèdre, en fonctions de $g$, $p$, $n$, $x$, $y$.

Commençons par le rapport entre B$\omega$ et $\omega\mu$. Nous avons déjà B$\omega$ ou

$$g' = g \cdot \frac{x+nxy+y}{nxy+y};$$

donc tout se réduit à trouver la valeur de $\omega\mu$. Si nous menons $\gamma\delta$ (fig. 74) sur $vx$, elle sera le double de $\omega\mu$. Or, les triangles semblables $\gamma\delta x$, $gux$, donnent $gx : gu :: \gamma x : \gamma\delta$.

Mais

$$gx = \sqrt{(ux)^2 + (gu)^2} = \sqrt{(hr)^2 + (gu)^2},\quad gu = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

$$hr = ax + \tfrac{1}{3}a = \frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x} \cdot a;$$

donc

$$gx = \sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2},$$

$$\gamma x = a\left(\frac{nxy-y}{nxy+x} \cdot \frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right).$$

Mettant à la place de $gx$, $gu$, et $\gamma x$ leurs valeurs, et prenant la valeur de $\frac{1}{2}\gamma\delta$, on a

$$\omega\mu = \frac{1}{2}a\frac{\left(\frac{2nxy-2y}{nxy+x}\cdot\frac{x+nxy+y}{nxy-x+y}\right)\sqrt{\frac{1}{3}g^2}}{\sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}}$$

Les valeurs de $B\omega$ et de $\omega\mu$ ayant pour facteurs communs les quantités $g$ et $\frac{x+nxy+y}{nxy+x}$, si l'on supprime celles-ci, on aura

$$B\omega : \omega\mu :: 1 : \frac{1}{2}a . \frac{\frac{2nxy-2y}{nxy-x+y}\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2} : \frac{1}{2}a . \frac{2nxy-2y}{nxy-x+y}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$:: \sqrt{(nxy+2x+y)^2\frac{1}{3}a+(nxy+y-x)^2 4g^2}$$

$$: (nxy-y)\sqrt{a^2}.$$

Maintenant, pour avoir le rapport entre $C\lambda$ et $\lambda\vartheta$ (fig. 73), il suffit de trouver la valeur de $\lambda\vartheta$, parce que $C\lambda = B\omega$, dont nous connaissons déjà la valeur. $\lambda\vartheta$ (fig. 74) étant la même ligne que fig. 73, du point $\varepsilon$ (fig. 74) menons $\varepsilon\zeta$ perpendiculaire sur $x\zeta$, et qui sera le double de $\lambda\vartheta$. Les triangles semblables $pdr$, $x\varepsilon\zeta$, donnent $dp : dr :: \varepsilon x : \varepsilon\zeta$ ; mais

$$dp = \sqrt{(pr)^2+(dr)^2},\quad dr = \sqrt{\frac{4}{3}g^2},\quad pr = ap + \frac{2}{3}a$$

$$= \frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}a;$$

donc

$$dp=\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\tfrac{4}{3}g^2};$$

$$\begin{aligned}\varepsilon x=a'+\gamma x&=a.\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\\ &+a.\frac{nxy-y}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\\ &=a.\frac{x+y}{nxy+x}\times\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.\end{aligned}$$

Mettant à la place de $dp$, $dr$ et $\varepsilon x$ leurs valeurs, et prenant la moitié de celle de $\varepsilon\zeta$, on trouve

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\zeta \text{ ou } \lambda\vartheta=a\frac{\left(\frac{x+y}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)\sqrt{\frac{1}{3}g^2}}{\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}}.$$

Comparant les valeurs de $C\lambda$ et de $\lambda\vartheta$ (fig. 73 et 74), et faisant attention qu'elles ont pour facteur commun la quantité $g.\frac{nxy+x+y}{nxy+y}$, que l'on peut supprimer, on aura

$$\begin{aligned}C\lambda:\lambda\vartheta :: 1 : a.&\frac{\frac{x+y}{nxy-x+y}\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}}\\ &:: \sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{x+y}{nxy-x+y}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}\\ &:: \sqrt{(2nxy+x-y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy-x+y)^2 4g^2}\\ &: (x+y)\sqrt{a^2}.\end{aligned}$$

121. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que le dodécaèdre tournait ses arêtes les plus saillantes QX, BX, etc. (fig. 73), vers les faces du générateur, ou, ce qui revient au même, que $eh$ (fig. 74) était plus grande que $ex$. Les choses étant dans cet état, si l'on imagine que la quantité $n$ vienne à augmenter progressivement, les arêtes QX, BX, etc. (fig. 73), deviendront moins saillantes, tandis que les intermédiaires CX, NX, prendront plus de saillie, et il y aura un terme où les unes et les autres faisant avec l'axe HX des angles égaux, le dodécaèdre se trouvera composé de deux pyramides droites réunies base à base. On aura donc alors $eh$ (fig. 77)$=ex$, ou $hr=pr$, ou algébriquement $nxy+2x+y=2nxy+x-y$; d'où l'on tire

$$n=\frac{x+2y}{xy}.$$

Ainsi, il y aura toujours une loi susceptible de satisfaire au cas dont il s'agit.

Si dans l'équation $N=\frac{x+y}{nxy-y}$ on met à la place de $n$ sa valeur $\frac{x+2y}{xy}$, relative à ce même cas, on trouve $N=1$. C'est effectivement ce qui doit être; car $\gamma x$ (fig. 74) étant alors égale à $ex$ (fig. 77), l'équation $\gamma x=\frac{1}{N-1}a'$ devient $ex=\frac{1}{N-1}a'$; et parce que le noyau hypothétique se trouve réduit à un simple plan, qui est la base commune des deux pyramides, $a'$ s'évanouit; donc

$$ex = \frac{0}{N-1}; \text{ donc } (N-1)\,ex = 0, \text{ ou } N-1 = 0,$$

ce qui donne $N = 1$.

122. A mesure que le dodécaèdre approche du terme où il se trouve composé de deux pyramides droites, la diagonale oblique $\gamma v$ (fig. 74) du noyau hypothétique diverge de plus en plus avec l'axe, et il y a un point où elle devient parallèle à l'arête $ag$ du générateur. Alors la quantité $n'$ s'évanouit, c'est-à-dire que dans l'équation $n' = \frac{x+y-nxy}{2y}$ on a

$$x+y-nxy=0, \text{ et } nxy = x+y;$$

d'où il suit que le cas dont il s'agit a lieu lorsque

$$n = \frac{x+y}{xy}.$$

Au-delà du même terme, la diagonale $\gamma v$ faisant avec l'axe un angle plus ouvert que l'arête $ag$, le décroissement en vertu duquel le générateur produirait le noyau hypothétique ne peut plus se faire sur l'angle $e$ de ce générateur. Il a lieu par renversement sur l'angle A. Mais la formule $n' = \frac{x+y-nxy}{xy}$ ayant la même propriété que celle qui a été donnée pour les décroissemens ordinaires (p. 373), avertit d'abord de ce changement, en donnant pour $n'$ une quantité négative, et cette quantité prise avec un signe contraire représente la loi du décroissement.

123. Pendant les variations que nous venons de considérer, $n$ continuant d'augmenter, le point $v$ monte de plus en plus, tandis que le point $q$ s'abaisse : alors le dodécaèdre tourne ses arêtes les moins saillantes, telles que $qx$, $hv$ (fig. 78), vers les diagonales obliques du générateur, et ses arêtes les plus saillantes $vx$, $qh$, vers les bords supérieurs du même générateur. Le noyau hypothétique dont $q\gamma v\varepsilon$ représente la coupe principale se trouve alors dans une position renversée, relativement à celle qu'il avait d'abord (fig. 74), c'est-à-dire que ses diagonales obliques $\gamma q$, $\varepsilon v$, et ses arêtes supérieures $\gamma v$, $\varepsilon q$, correspondent à celles du générateur.

Dans le même cas $ex$ est plus grande que $eh$, et si l'on cherche les valeurs de $g'$ et de $p'$, en opérant comme ci-dessus, on verra d'abord que celle de $g'$ reste la même, c'est-à-dire que

$$g' = g \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy + x}.$$

Mais pour avoir celle de $p'$, il faudra mettre $ex - eh$ à la place de $eh - ex$, ou $nxy - x - 2y$, à la place de $x + 2y - nxy$, et l'on trouvera d'abord

$$a' = a \cdot \frac{nxy - x - 2y}{nxy + x} \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy - x + y},$$

puis

$$p'^2 = \left[\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy - x - 2y}{nxy - x + y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2\right]\left(\frac{x + nxy + y}{nxy + x}\right)^2;$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy - x - 2y}{nxy - x + y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2}.$$

valeurs qui ne diffèrent des premières que par la substitution de $nxy - x - 2y$ à $x + 2y - nxy$, provenant de celle de $ex - eh$ à $eh - ex$, et qui dépend d'un simple changement dans les signes + et — des quantités du numérateur.

124. En procédant d'après la même substitution, relativement à la valeur de N, on aura $N = \frac{nxy - y}{x + y}$, quantité qui n'est autre chose qu'une inversion de celle à laquelle conduit la supposition de $eh$ plus grande que $ex$. On tire de la même formule

$$n = \frac{Nx + Ny + y}{xy}.$$

Pour trouver $n'$, on partira du rapport

$$qe : e\gamma \text{ (fig. 74)} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{a'^2};$$

mais d'une autre part, le décroissement qui donne le noyau hypothétique ayant lieu sur l'angle A du générateur, on aura

$$qe : e\gamma :: (n' + 1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n' - 1}{3}\sqrt{a^2} \text{ (p. 311)};$$

donc

$$g' : 2\sqrt{a'^2} :: (n' + 1)g : (2n' - 1)\sqrt{a^2}.$$

Substituant aux rapports entre $g'$ et $g$, et entre $a'$ et $a$ ceux de leurs valeurs algébriques, on aura

$$nxy + x + y : 2\left(\frac{nxy - x - 2y}{nxy + x}\right) :: (n' + 1)(nyx + x)$$
$$: (2n - 1)\frac{n2x - x + y}{nxy + x + y};$$

d'où l'on déduit

$$n' = \frac{nxy - x - y}{2y},$$

expression qui ne diffère encore de celle que nous avons obtenue (p. 450) que par le changement de $+$ en $-$ et de $-$ en $+$ dans le numérateur.

Mais il n'y a aucun changement à faire entre les sinus et les cosinus des incidences des faces du dodécaèdre, en sorte que relativement à celle des faces CXQ, CXB, qui dans l'hypothèse présente sont les moins inclinées l'une sur l'autre, le sinus sera encore au cosinus

$$:: \sqrt{(nxy+2x+y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy+y-x)^2 4g^2} : (nxy-y)\sqrt{a^2},$$

et que relativement à l'incidence des faces NXQ, CXQ, qui maintenant sont les plus inclinées entre elles, le sinus sera toujours au cosinus

$$:: \sqrt{(2nxy+x-y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy-x+y)^2 4g^2} : (x+y)\sqrt{a^2}.$$

Je vais en donner la raison, en prenant pour exemple ce dernier rapport. Soit *on* (fig. 74) une ligne menée du milieu *o* de la diagonale *ad*, perpendiculairement sur l'arête *qx*. Le rapport dont il s'agit sera le même que celui de la demi-diagonale *g* du rhombe *abdu* (fig. 73) à la perpendiculaire *on* (fig. 74). Or, pendant toutes les variations que subit le rhomboïde, soit que l'on ait *eh* plus grande que *ex*, ou *ex* plus grande que *eh*, *g* est constante, et la ligne *on*, en restant fixe par son extrémité *o*, ne fait autre chose que varier dans sa direction et dans sa longueur. Donc les quantités dont est composé le rapport conservent leurs fonctions, en sorte que $n$ change seulement de valeur. Le même raisonnement s'applique à la ligne $f'i$, menée du milieu de $gs$ perpendiculairement sur le prolongement de $xg$, et considérée comme cosinus de l'inclinaison relative au premier rapport, dans lequel on a aussi pour sinus la demi-diagonale $g$ du générateur.

125. Dans la construction représentée par la figure 74, le noyau hypothétique a ses demi-diagonales $g'$ et $p'$ dans un rapport différent de celui des demi-diagonales $g$ et $p$ du générateur. Or, à mesure que le dodécaèdre approche de l'état où il se trouve composé de deux pyramides droites, le rapport $g':p'$ diffère de moins en moins du rapport $g:p$, en sorte qu'il y a un terme où les deux rapports deviennent égaux, c'est-à-dire qu'alors le noyau hypothétique est semblable au générateur. On a donc alors (p. 448)

$$g^2 : p^2 :: g^2 : \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2,$$

ou

$$p^2 = \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2;$$

d'où l'on tire

$$3p^2 - g^2 = \tfrac{1}{3}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2.$$

Mais

$$3p^2 - g^2 = \tfrac{1}{3}a^2;$$

donc

$$\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}=1;$$

d'où l'on déduit

$$n=\frac{2x+y}{2xy}.$$

Ainsi, il y aura toujours une loi susceptible de remplir la condition proposée.

Connaissant la loi qui donne le dodécaèdre rapporté au noyau hypothétique, il est facile de trouver les valeurs numériques de $p$, $x$ et $y$ dans la supposition présente. Car si l'on considère le noyau hypothétique comme faisant à son tour les fonctions de générateur, et celui-ci comme étant le noyau hypothétique, la loi qui le donne sera désignée par N, qui est censé connu, et celle qui donne le noyau hypothétique aura $n$ pour exposant. Or, d'une part,

$$n=\frac{Ny+x+y}{Nxy},$$

à l'ordinaire (p. 449). Mais à cause de la similitude entre les deux noyaux, $n=\frac{2x+y}{2xy}$. Donc

$$\frac{Ny+x+y}{N}=\frac{2x+y}{2};$$

d'où l'on tire

$$x:y::N+2:2N-2.$$

Ayant trouvé les valeurs numériques de $x$ et $y$, et les substituant dans l'équation $n=\frac{2x+y}{2xy}$, on aura l'expression numérique de $n$.

126. Supposons maintenant $eh = 2\ (ex)$. Dans ce cas, le solide secondaire sera un rhomboïde qui aura la ligne $qe$ pour perpendiculaire sur l'axe. On aura donc $nxy + 2x + y = 2(2nxy + x - y)$ (*voyez* p. 446), d'où l'on tire $n = \frac{1}{x}$, expression qui aura toujours lieu, quelque valeur que l'on donne à $y$. Voici ce que signifie ce résultat. Soit $an$ (fig. 79) un rhomboïde qui ait ses sommets en $a$ et en $n$. Supposons un décroissement ordinaire par plus d'une rangée sur l'angle $bdf$, et soit $osr$ un plan parallèle à la face qui en résultera. Ce décroissement en entraînera deux intermédiaires sur les angles $bdn$, $fdn$, des faces adjacentes; et il est facile de voir que si l'on considère, par exemple, celui qui a lieu sur l'angle $bdn$, on aura $do = x$, $ds = y$. De plus, le décroissement se fera en hauteur, de manière que $dr$ représentera le nombre de rangées soustraites dans le même sens. Donc si l'on désigne par $n$ la distance entre $d$ et $os$, on aura $n = \frac{1}{dr}$. Mais $dr = do = x$; donc $n = \frac{1}{x}$, ce qui aura toujours lieu, quelle que soit la valeur de $ds$ ou de $y$. Le cas dont il s'agit ici se rapporte donc implicitement à l'effet d'un décroissement ordinaire, dans lequel le décroissement intermédiaire agit subsidiairement.

Si l'on fait $x = 2$, on aura $n = \frac{1}{2}$. Supposons de plus $y = 1$. On trouve dans ce cas

$$ap\ (\text{fig. } 74) = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2}\ (\text{p. } 445),$$

ce qui indique que l'axe du rhomboïde est infini ; et ainsi les faces produites sont disposées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier. Ce cas est celui de la chaux carbonatée prismatique, dans laquelle les décroissemens intermédiaires qui secondent l'effet du décroissement principal ont lieu, en effet, par des soustractions de deux rangées en hauteur. C'est ce que l'on concevra aisément, si l'on fait attention que le décroissement principal ayant lieu par deux rangées, on a (fig. 79) $do$ ou $y=2$, et $dr=2$; donc $n$ ou $\frac{1}{dr}=\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$. A l'égard de $ds$ ou de $y$, il est visible qu'elle égale l'unité.

127. Pour faire quelques applications, je commence par la variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *paradoxale*, et qui est représentée (fig. 80). Son signe est $\underset{x}{(E^{11}EB^{1}D^{2})}\underset{r}{\overset{2}{D}}\underset{f}{E^{11}E}$, c'est-à-dire que les faces $x$, $x$, étant celles qui sont données par le décroissement intermédiaire, les faces $r$, $r$ appartiennent au dodécaèdre métastatique, et les faces $f$, $f$ au rhomboïde inverse.

On a donc, dans le cas présent, $x=2, y=1, n=1$. La quantité $n$ étant ici plus petite que la fraction $\frac{5}{2}$, donnée par la formule $n=\frac{x+2y}{xy}$, relative au cas du dodécaèdre à double pyramide droite (p. 454), on voit que le solide produit par le décroissement intermédiaire tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du générateur, comme dans la figure 73, où, ce qui revient au même, $eh$ est plus grande que $ex$ (fig. 74).

Si l'on cherche, d'après les données précédentes, le rapport entre les demi-diagonales $g'$, $p'$, du noyau hypothétique, on trouvera (p. 448) $g':p'\ \sqrt{3}:\sqrt{15}$, d'où l'on conclura que ce noyau est semblable au rhomboïde inverse. Dans le même cas, la formule $N=\frac{x+y}{nxy-y}$ (p. 448) donne $N=3$, d'où il suit que le dodécaèdre est susceptible d'être produit en vertu d'un décroissement par trois rangées sur les bords inférieurs du noyau hypothétique.

De plus, la formule $n'=\frac{x+y-nxy}{2y}$ donne $n'=\frac{1}{2}$, ce qui fait connaître que le noyau hypothétique peut résulter d'un décroissement par une rangée sur les angles inférieurs du générateur; et telle est effectivement la loi qui convient au rhomboïde inverse.

Si dans le rapport de $B\omega$ à $\omega\mu$ (p. 452) on substitue les valeurs de $x$, $y$, $a$, $g$, on trouve

$$B\omega:\omega\mu::\sqrt{53}:\sqrt{3},$$

ce qui donne pour l'incidence de CXB sur CXQ (fig. 73) 153$^d$ 13′ 58″; et si l'on fait les mêmes substitutions dans le rapport de $C\lambda$ à $\lambda\vartheta$ (p. 453), on trouve $C\lambda:\lambda\vartheta::\sqrt{29}:\sqrt{27}$, ce qui donne 92$^d$ 3′ 10″ pour l'incidence de CXQ sur NXQ.

Il est remarquable que les plus longs bords des faces $r$, $r$ (fig. 80), qui appartiennent au métastatique soient parallèles entre eux. Cette propriété dépend de ce que l'arête $o$, qui est parallèle à $qx$ (fig. 74), a la même inclinaison que l'arête $dp$ (fig. 6, pl. 16) qui lui correspond sur le métastatique. Car on a, dans ce dernier cas, $ap = a = 3$, et $ar = \frac{2}{3}a = 2$. Donc $pr = 5$. De plus, $dr = \sqrt{\frac{4}{3}g^2} = \sqrt{\frac{4}{3} . 3} = 2$; donc $dp : pr :: 2 : 5$. Maintenant, dans la fig. 74, on a aussi

$$dr = 2, \quad ar = 2, \quad ap = \frac{x-1}{nxy - x + y} . a (\text{p. } 445) = 3.$$

Donc aussi $pr = 5$, ce qui conduit au parallélisme dont j'ai parlé.

128. Si l'on observe attentivement la forme de la variété qui nous occupe, on trouve que la substitution d'un noyau hypothétique au générateur, est en quelque sorte aidée par l'aspect des facettes $f$, $f$, qui sont celles d'un rhomboïde semblable à ce noyau. Mais, d'une autre part, les facettes $r$, $r$, appartiennent au métastatique, et leurs arêtes inférieures $l$, $l$, sont dans le sens des arêtes latérales du générateur. Le cristal porte donc l'empreinte de deux noyaux, l'un réel, l'autre hypothétique, relatifs aux deux dodécaèdres; et quoique la cristallisation n'ait travaillé que sur le premier noyau, elle se prête, relativement au second, à un résultat idéal, plus simple que celui qui a lieu en effet, puisqu'il dépend d'une des lois les plus ordinaires, tandis que l'autre sup-

pose une loi intermédiaire. C'est de cette sorte de résultat inattendu, ou de *paradoxe* qu'offre la variété dont il s'agit, que dérive le nom de *paradoxale* que je lui ai donné. Cette variété a été trouvée par M. Tonnellier, dans une carrière de craie située à l'extrémité des faubourgs de Saint-Julien-du-Sault, département de l'Yonne.

129. Une autre variété que j'ai nommée *chaux carbonatée numérique*, et dont on voit la projection figure 81, a pour signe $\overset{\frac{5}{6}}{E}\overset{\frac{5}{6}}{B^2}D^3$ (1). En appliquant ici les formules qui ont été données précédemment, et en faisant attention que l'exposant $\frac{5}{6}$ de E, plus petit que $\frac{5}{2}$ qui convient au cas de la double pyramide droite (p. 462) indique que le dodécaèdre tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du générateur, on trouvera que le rapport $g' : p'$ des demi-diagonales du noyau hypothétique est celui de $\sqrt{12}$ à $\sqrt{5}$, d'où il suit que ce noyau est semblable au rhomboïde équiaxe. On trouvera de plus $N = \frac{5}{3}$; et quand à la valeur de $n'$ ou de $\frac{x+y-nxy}{2y}$, elle devient $\frac{0}{6}$, quantité infiniment petite qui fait

(1) Le nom de *numérique* est tiré des propriétés de nombres que présente ce signe, dans lequel la somme 2 plus 3 des exposans de B et de D est égale au numérateur 5 de l'exposant de E, et leur produit est égal au dénominateur 6 du même exposant. J'ai déjà fait connaître cette variété sous un autre rapport, p. 344.

connaître que les faces du noyau hypothétique sont parallèles aux arêtes *ag*, *ds* (fig. 74) du générateur. C'est effectivement ce qui a lieu dans l'équiaxe. On aura enfin pour l'incidence de $\gamma$ sur $\gamma'$, $115^d\,1'\,44''$, et pour celle de $\gamma$ sur $\gamma''$, $142^d\,24'\,6''$. M. Mabru, minéralogiste très instruit, qui a découvert la variété dont il s'agit près de Clermont-Ferrand, département du Puy-de-Dôme, avait très bien remarqué qu'elle présentait l'aspect du rhomboïde équiaxe, dont les six bords inférieurs seraient remplacés par autant de biseaux.

130. La variété qui va maintenant nous occuper offre un résultat que j'avais donné comme purement hypothétique, dans la première édition de mon Traité (1), n'ayant vu jusqu'alors aucun cristal qui le réalisât. Il consistait dans la possibilité que la forme du dodécaèdre métastatique fût l'effet d'une loi intermédiaire de décroissement, que j'avais déterminée. Ce résultat s'est présenté depuis à mon observation dans des cristaux dont on voit la projection (fig. 82). Les faces $\vartheta$, $\vartheta'$, qui appartiennent au dodécaèdre dont je viens de parler s'y combinent avec celles du rhomboïde inverse, savoir, $f$, $f$, et avec les pans $c$, $c'$ du prisme hexaèdre régulier. Le signe est $(\underset{\vartheta}{{}^{\frac{5}{4}}E}\,{}^{\frac{5}{4}}B^1D^2)\,\underset{f}{E^{11}}\,\underset{c}{E}e$.

Le métastatique ordinaire tourne ses arêtes les

(1) Tome II, page 35.

moins saillantes vers les faces du générateur, tandis que ce sont au contraire les plus saillantes qui ont cette position dans le dodécaèdre produit par une loi intermédiaire. D'une autre part, le rhomboïde inverse ordinaire a ses faces tournées vers les bords supérieurs du noyau. Mais il y a une loi, savoir, celle dont l'expression est $\overset{5}{e}$, susceptible de donner le même rhomboïde, avec la condition que ses faces correspondent à celles du noyau. Il suit de là que l'aspect du cristal qui nous occupe peut également résulter de la combinaison des lois indiquées par le signe donné ci-dessus, ou de celles qui le sont par cet autre signe $\underset{\vartheta}{\overset{2}{D}}\underset{f}{\overset{5}{e}}\underset{c}{\overset{2}{e}}$. La division mécanique fait disparaître l'ambiguité, en prouvant que c'est le premier cas qui a lieu. De là le nom de *chaux carbonatée ambiguë* que j'ai donné à la variété dont il s'agit.

Les formules de la page 460 fournissent un moyen simple pour trouver les exposans de la quantité qui, dans le signe, représente les faces $\vartheta$, $\vartheta$, d'après la condition que le cristal secondaire soit semblable au dodécaèdre métastatique : car alors on a $N=2$; donc la proportion $x : y :: N+2 : 2N-2$, devient $x : y :: 2 : 1$. Faisant $x=2$ et $y=1$, dans l'équation $n=\frac{2x+y}{2xy}$, on trouve $n=\frac{5}{4}$, comme dans le signe.

131. J'ai fait connaître (p. 355) une variété de corindon que je nomme *ternaire*, et dont la forme, qui est celle d'un dodécaèdre composé de deux pyra-

mides droites, résulte du décroissement $\overset{33}{E}E$. Le corindon nous offre d'autres dodécaèdres du même genre, produits par des lois intermédiaires sur les angles E. L'un d'eux, dont on voit la projection figure 83, et que j'appelle *corindon assorti*, a pour signe $(\overset{22}{E}\underset{h}{E}\overset{2}{D}\overset{1}{B})$. Dans le cas présent on a $x=2$, $y=1$, si dans la formule $n=\frac{x+2y}{xy}$ relative au décroissement qui produit la double pyramide droite hexaèdre (p. 454), on met à la place de $x$ et de $y$ leurs valeurs numériques, on trouve $n=2$, comme l'indique le signe. Substituant les mêmes valeurs et celle de $n$ dans le rapport de $dr$ à $pr$ (fig. 74), qui est celui de $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$ à $\frac{2nxy+x-y}{3(nxy-x+y)}.a$, on trouve

$$dr:pr::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:a,$$

ce qui fournit un moyen simple pour déterminer les incidences respectives des faces du dodécaèdre.

Soit $syrz$ (fig. 84) la pyramide supérieure, $c$ étant le centre de la base, et $sc$ la hauteur. Menons le rayon $cr$, ensuite $co$ perpendiculaire sur $tr$, puis $os$. Nous aurons

$$cr:cs::dp:pr \text{ (fig. 74)}::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:a;\ \text{donc } co:cs::g:a.$$

Or, dans le corindon, $g=\sqrt{15}$, $p=\sqrt{17}$; donc $a=\sqrt{108}$; donc $co:cs::\sqrt{15}:\sqrt{108}::\sqrt{5}:6$. D'après ces données, on trouve pour l'incidence de $h$ sur $h$ (fig. 83) $124^d 6'$, et pour celle de $h$ sur $h'$ $139^d 6'$ (1).

132. Une seconde variété, qui est représentée figure 85, réunit les faces $r$, $r$ de l'uniternaire avec celles d'un dodécaèdre produit par une loi intermédiaire différente de la précédente, en sorte que le signe du cristal est $\underset{l}{(E^{\frac{7}{5}}\,{}^{\frac{7}{5}}ED^5B^1)}\underset{r}{E^{33}E}$. Si nous supposons que *syrtz* (fig. 84) soit encore une des pyramides qui résulte du décroissement intermédiaire, et si dans le rapport $\sqrt{\frac{4}{3}g^2} : \frac{2nxy+x-y}{(3nxy-x-y)} . a$ ou $dp : pr$ nous faisons $x=5$, $y=1$, $n=\frac{7}{5}$, nous aurons $dp : pr :: \sqrt{\frac{4}{3}g^2} : 2a :: cr : cs$; donc $co : cs :: g : 2a$, rapport double de celui qui donne la variété décrite précédemment. En faisant usage de ces données, on trouve $121^d 6'$ pour l'incidence de $l$ sur $l$, et $158^d 52'$ pour celle de $l$ sur $l'$. Quant à celle de $r$ sur $l$, on la trouvera de $161^d 21'$, d'après les mesures indiquées (p. 355), pour la variété ternaire.

On voit ici que la loi intermédiaire qui donne les faces $l$, $l$, et qui pourrait paraître peu admissible par

---

(1) Le nom de *corindon assorti* que j'ai donné à cette variété est tiré de ce qu'elle offre l'accord ou l'assortiment d'une loi de décroissement qui est une des plus simples de ce genre, avec un rapport également simple entre les dimensions de la pyramide, prises dans le sens horizontal et dans le sens vertical.

sa complication, dépend d'un rapport très simple, pris dans les dimensions du noyau, savoir, $g:2a$. Il arrive assez souvent que ces lois qui, considérées en elles-mêmes, sembleraient propres à faire naître des préjugés contre la théorie, ont un côté qui les ramène à l'analogie des résultats ordinaires qui, en général, sont remarquables par leur simplicité.

133. Il arrive souvent que la combinaison des faces qui résultent d'un décroissement intermédiaire, avec d'autres faces produites par des décroissemens ordinaires, imprime à la forme qui en dérive des caractères de symétrie dont on peut tirer avantage pour simplifier et pour abréger les calculs. C'est ce qui a lieu en particulier dans la variété paradoxale (fig. 80), et je vais faire voir comment son aspect géométrique suffit seul pour fournir des données à l'aide desquelles on arrive, sans aucun tâtonnement, à la détermination du décroissement intermédiaire qu'elle présente.

Supposons que l'on ait reconnu que les faces $f$, $f$ appartiennent au rhomboïde inverse, et les faces $r$, $r$ au dodécaèdre métastatique. En observant attentivement ces deux ordres de faces, on s'apercevra d'abord que les arêtes inférieures des premières sont si sensiblement parallèles aux arêtes $h$, $h$ du dodécaèdre dû au décroissement intermédiaire, que l'on est fondé à en conclure que le parallélisme est rigoureux. Il en résulte que le rhomboïde inverse est le noyau hypothétique du dodécaèdre dont il s'agit.

De plus, on s'apercevra du même parallélisme entre les longs bords des faces $r$, $r$, d'où il suit que les arêtes qu'elles remplacent sur le dodécaèdre sont inclinées à l'axe de la même quantité que celles qui, sur le métastatique, séparent les faces $r$, $r$, et qui sont les moins saillantes parmi les six contiguës à un même sommet.

Cela posé, il est d'abord facile de trouver la valeur de N. Car $adsg$ (fig. 86) étant toujours la section principale du véritable noyau, soient $dk$, $dl$, les arêtes du métastatique qui ont l'angle $d$ pour point commun. Désignant l'angle $as$ par 3, nous aurons

$$dr=2,\ ar=2,\ ak=\dot{3}\ ;\ \text{donc}\ dr : rk :: 2:5,$$

lequel rapport est aussi celui de $qe$ à $ex$ (fig. 74). Soit $qe=2$; dans la coupe principale $q\gamma\nu\varepsilon$ du noyau hypothétique, nous aurons $e\gamma=qe=2$; donc $\gamma x=3$. Mais $\gamma\varepsilon=6$; donc l'équation $\gamma x=\frac{a'}{N-1}$ devient

$$3=\frac{6}{N-1},\ \text{d'où l'on tire}\ N=3.$$

133. On peut, au moyen des formules ordinaires relatives aux décroissemens sur les arêtes D, vérifier tout de suite la justesse des données prises dans l'aspect géométrique du dodécaèdre dont il s'agit ici. Mais il restera à connaître la loi intermédiaire dont il dérive; et pour y parvenir il suffira de chercher le rapport entre $x$ et $y$, parce que ce rapport étant donné on aura la valeur de $n$, à l'aide de la for-

mule $n = \frac{Ny+x+y}{Nxy}$. Pour dispenser ceux qui voudraient faire cette recherche de recommencer chaque fois le calcul compliqué qu'entraîneraient ici les méthodes particulières, je vais généraliser le problème, pour arriver à une formule qui soit applicable à tous les cas.

Soient *asb*, *gsb* (fig. 87) les mêmes faces que NXQ, CXQ (fig. 73), limitées par le plan horizontal *abg* (fig. 87), et par le plan vertical *asg*. Je mène *ag*, ensuite *bc* perpendiculaire sur *ag*, puis *sc*, qui sera aussi perpendiculaire sur la même ligne. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que le point *b* coïncide avec le point Q (fig. 73), ou avec le point *q* (fig. 74). Je prolonge *bc* (fig. 87), jusqu'à ce qu'elle soit égale à *qe* (fig. 74), puis je mène *af* (fig. 87); ensuite je fais passer par le point *b* un plan *obz*, parallèle à la face *audb* (fig. 73) du générateur. Enfin je mène *oz*, et par le point où elle coupe *cs*, je mène *br*.

Cherchons d'abord le rapport entre *bf* et *af*. Si nous prolongeons *qe* (fig. 74) jusqu'à la rencontre de l'arête *vx*, le prolongement *el* étant la distance entre le point *e* de l'axe et l'arête *vx*, qui est une des moins saillantes, il est évident que dans la supposition présente on a *bf* (fig. 87) = *qe* (fig. 74). On aura, d'une autre part, *af* (fig. 87) = *el* (fig. 74), puisque *bs* fait partie d'une des arêtes les plus saillantes du dodécaèdre, et que *as* est prise sur une des moins saillantes. Or, $qe$ (fig. 74) ou son égale

$$vy' : el :: y'x : ex :: \tfrac{2}{3}a' + \frac{1}{N-1}a' : \tfrac{1}{3}a' + \frac{1}{N-1}a' :: 2N-1 . N+2.$$

Donc aussi,

$$bf\text{ (fig. 87)} : af :: 2N+1 : N+2.$$

134. Maintenant nous avons à déterminer le rapport entre $br$ et $or$, dont l'une est dans le sens de la diagonale oblique du noyau, et l'autre est parallèle à la diagonale horizontale. Cherchons d'abord $br$. Soit $bf = 2N+1$; on aura $af = N+2$, et à cause de l'angle $acf = 60^d$,

$$cf = \tfrac{1}{2}af = \frac{N+2}{2},\ bc = bf - cf = 2N+1 - \frac{(N+2)}{2} = \frac{3N}{2},$$

$$bc : cs :: qe\text{ (fig. 74)} : ex :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a' + \frac{1}{N-1}a'$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \frac{N+2}{3N-3}a'.$$

Mettant à la place de $bc$ sa valeur $\frac{3N}{2}$, on trouvera

$$cs = \frac{N^2+2N}{4N-4} \cdot \frac{a'}{g'}\sqrt{3}.$$

D'une autre part

$$bc : cr :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \tfrac{1}{3}a :: g : a\sqrt{\tfrac{1}{3}};\ \text{ou}\ \frac{3N}{2} : cr :: g : a\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Donc $$cr = \frac{3N}{2} \cdot \frac{a}{g}\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$br = \sqrt{(bc)^2 + (cr)^2} = \sqrt{\frac{9N^2}{4} + \frac{9N^2}{4}\cdot\frac{a^2}{3g^2}} = \sqrt{\frac{9N^2}{4}\left(\frac{3g^2+a^2}{3g^2}\right)};$$

et mettant à la place de $a^2$ sa valeur $9p^2 - 3g^2$,

$$br = \sqrt{\frac{9N^2}{4} \cdot \frac{3p^2}{g^2}}.$$

Reste à chercher $or$, au moyen de la proportion

$$or : rs :: ac : cs.$$

1°. Pour $rs$; nous aurons

$$rs = cs - cr = \frac{N^2 + 2N}{4N - 4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3} - \frac{3N}{2} \cdot \frac{a}{g} \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

2°. Pour $ac$; nous aurons

$$ac = cf\sqrt{3} = \frac{N+2}{2}\sqrt{3}.$$

3°. Nous avons déjà eu

$$cs = \frac{N^2 + 2N}{4N - 4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la proportion précédente, elle devient

$$or : \frac{N^2+2N}{4N-4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3} - \frac{3N}{2} \cdot \frac{a}{g} \sqrt{\frac{1}{3}} :: \frac{N+2}{2} \sqrt{3} : \frac{N^2+2N}{4N-4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3},$$

ou

$$or : \left[(N+2)\frac{a'}{g'} - (2N-2)\frac{a}{g}\right]\sqrt{3} :: 1 : \frac{2a'}{g'};$$

d'où l'on tire

$$or = \left[(N+2)\frac{a'}{g'} - (2N-2)\frac{a}{g}\right]\frac{g}{2a'}\sqrt{3}.$$

Supprimant dans les expressions de $br$ et de $or$ le facteur commun $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, on aura

$$br:or::\frac{3Np}{g}:\left[(N+2)\frac{a'}{g'}-(2N-2)\frac{a}{g}\right]\frac{g'}{a'}$$
$$::\frac{3Np}{g}:N+2-(2N-2)\frac{ag'}{a'g}.$$

Supposons $g'=g$, et soit $m$ le nombre qui, dans cette hypothèse, exprime le rapport entre $a'$ et $a$, en sorte que l'on ait $a'=ma$. La proportion précédente deviendra

$$br:or::\frac{3Np}{g}:N+2-(2N-2)\frac{1}{m}::3Np:(N+2)g-2(N-2)\frac{g}{m}$$
$$::3Nmp:(N+2)gm-(2N-2)g,$$

et faisant les multiplications indiquées, puis réduisant,

$$br:or::3Nmp(Nm+2m-2N+2)g.$$

Il reste maintenant à prouver que $x$ est à $y$ comme la somme des coëfficiens de $p$ et de $g$ est à leur différence.

Soit $obz$ (fig. 88) le même triangle que figure 87, et $biku$ (fig. 88) le rhombe dont ce triangle fait partie. Soit $hl$ le bord situé vers l'angle $i$ de la première lame de superposition, lequel sera parallèle à $bo$. $x$ et $y$ seront en même temps les nombres d'arêtes de molécule contenues dans $hi$ et $il$. Soient X et Y ceux que renferment $bi$ et $io$. Soit de plus $s$ le nombre de fois que la demi-diagonale oblique $p''$ de la molécule est contenue dans $br$ ou $bn+nr$, et $t$ le nombre de fois que la demi-diagonale horizontale $g''$ est contenue dans $or$. Il est évident que le premier nombre $s$ est égal à celui d'arêtes de molécule renfermé dans $bi+io$, et que le second nombre $t$ est égal à celui d'arêtes renfermé dans $ok=ik-io=bi-io$; donc $s=X+Y$ et $t=X-Y$; et parce que les nombres d'arêtes de molécules contenues dans $hi$ et $il$ sont proportionnels à ceux que renferment $bi$ et $io$, $s:t::x+y:x-y$. Or, $br=sp''$, et $or=tg''$; donc $sp'':tg''::3Nmp:(Nm+2m-2N+2)g$; et parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau, $s:t$, ou bien

$$x+y:x-y::3Nm:Nm+2m-2N+2.$$

Si dans la proportion $x+y:x-y::s:t$ on ajoute le second terme de chaque rapport au premier, on aura

$$2x:x-y::s+t:t; \text{ ou, } 2x:2x-2y::s+t:2t.$$

Si dans cette nouvelle proportion on retranche le second terme de chaque rapport du premier, elle devient

$$2x:2y::s+t:s-t, \text{ ou } x:y::s+t:s-t;$$

c'est-à-dire que $x$ est à $y$ comme la somme des coëfficiens de $p$ et de $g$ dans le rapport de $br$ à $or$ trouvé plus haut est à leur différence. Mettant donc ces coefficiens à la place de $s$ et de $t$, on aura

$$x:y::(2N+1)m-N+1:(N-1)m+N-1.$$

Maintenant, dans la variété paradoxale, $N=3$, $g=\sqrt{3}$, $a=3$, et si l'on fait $g'=g=\sqrt{3}$, on aura

$$p'=\sqrt{5},\ a'=\sqrt{9p'^2-3g'^2}=\sqrt{45-9}=6=2a;$$

d'où il suit que $m=2$. Substituant à la place de N et de $m$ leurs valeurs, dans la proportion précédente, on trouve $x:y::2:1$. Donc on peut faire $x=2$, $y=1$. Reprenant la formule $n=\frac{Ny+x+y}{Nxy}$, et mettant à la place de N, $x$, $y$, leurs valeurs, on aura $n=\frac{6}{6}=1$.

135. Lorsqu'un des décroissemens qui ont lieu sur les angles E donne la double pyramide droite, le noyau hypothétique devient le prisme hexaèdre régulier. L'hypothèse la plus simple est celle dans laquelle le rapport entre la perpendiculaire menée du centre de la base du prisme sur un des côtés, et la hauteur du même prisme est égal à celui qui a lieu entre la demi-perpendiculaire $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$ sur l'axe du rhomboïde et la longueur de cet axe (1). Dans ce cas, le décroissement ordinaire relatif au prisme hexaèdre étant donné, il est bien facile d'avoir la loi du décroissement intermédiaire qui lui correspond dans le rhomboïde. Je supposerai toujours que $x$ soit dans le sens de D, et $y$ dans le sens de B.

(1) Le prisme alors est censé résulter d'un décroissement par une rangée sur les bords D du rhomboïde.

Soient $asg$, $hsg$ (fig. 89), deux faces contiguës sur la pyramide, limitées par le plan vertical $ash$, et par le plan horizontal $agh$, et soit $mgl$ un plan qui coïncide avec la face du noyau qui regarde l'arête $gs$. Je mène $ah$, ensuite $so$ perpendiculaire sur $ah$, puis $ok$ perpendiculaire sur $gh$, et enfin $sk$ et $gn$.

Le triangle $kos$ pourra être regardé comme mensurateur, relativement au décroissement qui en agissant sur le bord de la base du prisme alligné comme $gh$, donne la face $gsh$.

Soit $go = \sqrt{\frac{1}{3}g^2}$. Nous aurons

$on = \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$, $gn = p$, $ao : go$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}g^2} :: \sqrt{3} : 1$, $ao = g$.
Soit $z$ l'exposant du décroissement relatif à la face $gsh$, considéré dans le sens de la largeur. $go = \sqrt{\frac{1}{3}g^2}$. $ok$ sera $= \frac{1}{2}g$. Mais dans l'hypothèse où $ok$ égalerait $g$ et $go$ serait $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, la hauteur du prisme aurait pour expression $\sqrt{9p^2 - 3g^2}$. Donc, si nous supposons comme ici $ok = \frac{1}{2g}$, la hauteur sera exprimée par $\frac{1}{2}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$; donc $os = \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$;

$$ns = os - on = \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} - \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2},$$

$$= \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{3}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \frac{3 - 2z}{6z}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$ Or,

$$ns : mn :: os : ao, \quad \text{ou} \quad \frac{3 - 2z}{6z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} : mn$$

$$:: \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} : g.$$

d'où l'on tire

$$mn = \frac{3-2z}{3} \cdot g,$$

donc

$$gn : mn :: p : \frac{3-2z}{3} \cdot g :: 3p : (3-2z)g.$$

Or, d'après ce qui a été dit ailleurs, $x:y$ comme la somme des facteurs de $p$ et de $g$ est à leur différence,

$$:: 3+3-2z : 3-3+2z :: 6-2z : 2z :: 3-z : z.$$

Ayant le rapport entre $x$ et $y$, on aura le nombre de rangées soustraites par la formule $n = \frac{x+2y}{xy}$.

136. Choisissons pour exemple le corindon, et supposons que la pyramide résulte du décroissement $\overset{1}{B}$. On aura $z = 1$ ;

$$x : y :: 3-1 : 1 :: 2 : 1, n = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Donc le signe du décroissement intermédiaire sera $(E^{22}ED^2B^1)$. C'est le corindon assorti.

Supposons que le décroissement rapporté au prisme soit $\overset{\frac{1}{2}}{B}$. On aura

$$z = \tfrac{1}{2} \text{ et } x : y :: 3-z : z :: 3-\tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2} :: 6 : 1, \quad n = \frac{5+2}{5} = \tfrac{7}{5}.$$

Donc le signe du décroissement intermédiaire sera $(E^{\frac{7}{5}\,\frac{7}{5}}ED^5B^1)$. Ce signe appartient à douze des faces du corindon di-dodécaèdre.

Supposons pour le prisme $\overset{\frac{3}{2}}{B}$. On aura

$$z = \tfrac{3}{2}, \; x : y :: 3-\tfrac{3}{2} : \tfrac{3}{2} :: 6-3 : 3 :: 1 : 1 ;$$

c'est-à-dire que le décroissement devient ordinaire. Et comme $n=3$, il a lieu par 3 rangées, parce qu'ici 3 exprime le nombre de rangées soustraites, et non pas le nombre de diagonales soustraites.

Passé ce terme, le problème appartient à une autre hypothèse dans laquelle $x$ est dans le sens de B et $y$ dans le sens de D.

## II. *Décroissemens intermédiaires sur les angles* E, x *étant dans le sens de* B, *et* y *dans le sens de* D.

137. Soit *abdu* (fig. 90) la même face du générateur que celle qui est représentée figure 72. Les lignes $\gamma\lambda$, $\pi\zeta$ (fig. 90), parallèles aux bords produits par le décroissement, seront nécessairement tournées en sens contraire de celui qui a lieu dans la figure 72; $b\lambda$ et $\pi u$ (fig. 90), ou $x$, $x$, qui sont dans le sens de B, B, étant plus grandes que $b\gamma$, $u\zeta$ ou $y$, $y$, qui sont dans le sens D, D. Il en résulte que dans le dodécaèdre HX (fig. 91) à triangles scalènes qui est l'effet du décroissement, les arêtes XQ, XB, etc., qui correspondent aux faces du générateur, divergent avec ses diagonales obliques, en allant du sommet vers les parties inférieures, au lieu que c'est l'inverse dans le cas représenté (fig. 73). La figure 92 devant être alors substituée à la figure 74, on voit, en les comparant, que les arêtes situées comme $xv$, $hq$ (fig. 92), passeront encore par les angles $d$, $g$ du générateur, et que les arêtes $xq$, $hv$ se formeront aussi à une certaine distance au-dessus des diagonales

obliques $ad$, $gs$. Mais la ligne $al$ parallèle à $xq$ part du sommet, et non plus de l'angle $d$, comme dans la figure 74, en sorte que $ap$ et $ay$ disparaissent, et que la dernière se trouve remplacée par le décroissement $dl$ (fig. 92) de l'arête $sd$. Quant à la ligne $av$, elle sera la même que figure 74.

Soit $at$ (fig. 92) le prolongement de $ga$ jusqu'à la rencontre de $qx$, les trois lignes $dl$, $av$ et $at$ seront celles qui, dans le calcul relatif au cas présent, font l'office des lignes $ay$, $av$ et $ap$ (fig. 74), employées à la détermination du dodécaèdre précédent.

La différence entre les deux cas dépend des positions de $x$ et de $y$ qui sont inverses l'une de l'autre. La plupart des résultats portent l'empreinte de cette différence, en sorte que si l'on met $x$ à la place de $y$, et réciproquement dans ceux qui se rapportent au premier cas, on a les formules relatives au second. Il faut en excepter la valeur de $ay$ (fig. 74), qui se change en celle de $\lambda\vartheta$ (fig. 91), sans aucune substitution, ainsi que la valeur de $g'$ ou de $qe$ (fig. 74 et 92), qui n'offre la différence dont il s'agit que dans le dénominateur de la fraction représentative de cette valeur, ce qui n'empêche pas que le rapport de $g'$ à $p'$ ne participe, sans aucune restriction, à la différence dont j'ai parlé.

138. La marche du calcul étant presque la même dans les deux cas, je me bornerai à indiquer en général celle qui se rapporte au dodécaèdre que nous

considérons ici, et je ne la développerai que dans les parties où elle diffère de la précédente.

Dans le triangle mensurateur $akf$ (fig. 92) qui répond à $dkf$ (fig. 74), on aura toujours

$$kf = \sqrt{g'^2 + p'^2},$$

et si l'on applique littéralement à la figure 90 tout ce qui a été dit de la figure 72 (p. 441), on trouvera que

$$ak : kf (\text{fig. } 92) :: \frac{2pnxy}{x-y} : \sqrt{g^2 + p^2},$$

et parce que $ak : kf :: ad : dl$, on aura

$$dl = \frac{x-y}{nxy} \sqrt{g^2 + p^2},$$

expression qui doit être la même que celle de $ay$, ainsi qu'il est facile de le concevoir, avec un peu d'attention.

Pour avoir le prolongement $av$ de $da$, on substituera la figure 93 à la figure 75. La seule différence entre les expressions des lignes tracées sur ces deux figures consiste en ce que $bm$ qui était $nx\sqrt{g'^2 + p'^2}$ devient $ny\sqrt{g'^2 + p'^2}$; et quant à $by$, elle sera toujours $\sqrt{g'^2 + p'^2}$. D'après les substitutions indiquées, le même calcul donne $av = \frac{2py}{nxy + x}$, au lieu de $av = \frac{2px}{nxy + y}$, conformément à ce qui a été annoncé ci-dessus (p. 481).

L'expression de $ax$ sera $\frac{y}{nxy + x - y} \cdot a$.

Pour trouver celle de $at$, on prendra les triangles semblables $xta$, $als$, qui donnent $ax : at :: as : ls$. Or,

$$ls = ds + dl = \left(1 + \frac{x - y}{nxy}\right)\sqrt{g^2 + p^2} = \frac{nxy + x - y}{nxy}\sqrt{g^2 + p^2};$$

donc

$$\frac{y}{nxy + x - y} \cdot a : at :: a : \frac{nxy + x - y}{nxy}\sqrt{g^2 + p^2};$$

d'où l'on déduit

$$at = \frac{1}{nx}\sqrt{g^2 + p^2}.$$

139. Pour appliquer les données précédentes, il s'agit d'abord de chercher les expressions de $g'$ et de $p'$. On aura comme ci-dessus $dr : hr :: qe : eh$. Mais à la place de la proportion $dr : pr :: qe : ex$, dont les deux premiers termes n'existent pas dans le cas présent, on prendra $lz : az :: qe : ex$. De plus

$$lz : ls :: dr : ds,$$

ou

$$lz : \frac{nxy + x - y}{nxy}\sqrt{g^2 + p^2} :: dr : \sqrt{g^2 + p^2};$$

donc

$$lz = \frac{nxy + x - y}{nxy} \times dr;$$

donc la proportion $lz : az :: qe : ex$, peut être mise sous cette forme

$$\frac{nxy + x - y}{nxy} \times dr : az :: qe : ex, \text{ ou } dr : \frac{nxy}{nxy + x - y} \times az :: qe : ex.$$

31..

Mais nous avons eu

$$dr : hr :: qe : eh;$$

donc

$$eh : ex :: hr : \frac{nxy}{nxy + x - y} \times az.$$

Maintenant

$$hr = ax + \tfrac{1}{3}a = \frac{ay}{nxy + x - y} + \tfrac{1}{3}a = a\left(\frac{nxy + x + 2y}{3nxy + 3x - 3y}\right),$$

$az = as - sz$, $sz : sr :: lz : dr$; mais $lz = \frac{nxy + x - y}{nxy} \times dr$;

donc

$$sz = \frac{nxy + x - y}{nxy} . sr;$$

donc

$$az = a - \left(\frac{nxy + x - y}{3nxy}\right) a = \frac{2nxy - x + y}{3nxy} . a;$$

donc la proportion $eh : ex :: hr : \frac{nxy}{nxy + x - y} \times az$

devient

$$eh : ex :: a\left(\frac{nxy + x + 2y}{3nxy + 3x - 3y}\right) : \frac{nxy}{nxy + x - y} . a\left(\frac{2nxy - x + y}{3nxy}\right),$$

ou

$$eh : ex :: nxy + x + 2y : 2nxy - x + y.$$

Continuant l'opération comme ci-dessus, on trouve

$$g' = g . \frac{nxy + x + y}{nxy + y}; \; p' = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x + y - nxy}{nxy + x - y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x + y - nxy}{nxy + x - y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2}.$$

140. Il n'y a rien à changer dans la marche du calcul qui donne l'expression de N. On trouvera

$$N = \frac{x+y}{nxy-x}, \text{ d'où l'on tire } n = \frac{Nx+x+y}{Nxy}.$$

A l'égard de $n'$, on observera que le décroissement qui s'y rapporte agit ici comme dans le premier cas par renversement sur les angles inférieurs du générateur. On aura donc encore $g' : g :: 2a' : \frac{2n'+1}{1-n'} a$. Et en poursuivant comme ci-dessus (p. 449) on trouvera $n' = \frac{x+y-nxy}{2x}$.

Même manière d'opérer pour avoir la plus grande incidence des faces du dodécaèdre. Le rapport entre le sinus et le cosinus de sa moitié, ou entre $B\omega = g'$ (fig. 91) et $\omega\mu$ (fig. 91 et 92), sera celui de

$$\sqrt{(nxy+x+2y)^2 \tfrac{1}{3}a^2 + (nxy+x-y)^2 4g^2} \text{ à } (nxy-x)\sqrt{a^2}.$$

Quant au rapport entre le sinus et le cosinus de la plus petite, ou entre $g'$ et $\lambda\vartheta$, on y parviendra de la manière suivante. Les triangles semblables $alz$, $\varepsilon\zeta x$, donnent $al : lz :: \varepsilon x : \varepsilon\zeta$. Or,

$$al = \sqrt{(az)^2 + (lz)^2}$$
$$= \sqrt{a^2\left(\frac{2nxy-x+y}{3nxy}\right) + \left(\frac{nxy+x-y}{nxy}\right)^2 \frac{4}{3}g^2},$$

$$\varepsilon x = a' + \gamma x = a\left(\frac{2x+y-nxy}{nxy+y} \cdot \frac{nxy+x+y}{nxy+x-y}\right)$$
$$+ a\left(\frac{nxy+x+y}{nxy+x-y} \cdot \frac{nxy-x}{nxy+y}\right) = a \cdot \frac{nxy+x+y}{nxy+x-y} \cdot \frac{x+y}{nxy+y}.$$

Substituant dans la proportion précédente les valeurs de $al$, $lz$ et $\varepsilon x$, et prenant la valeur de $\frac{1}{2}e\zeta = \lambda\vartheta$, on trouve

$$\frac{1}{2}\varepsilon\zeta = \frac{a(nxy+x+y)\frac{x+y}{nxy+y}\sqrt{\frac{1}{3}g^2}}{\sqrt{\frac{1}{9}a^2(2nxy-x+y)^2+(nxy+x-y)^2\frac{4}{3}g^2}}.$$

Mais on a toujours

$$g' = g\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy+y};$$

donc

$$g' : \lambda\vartheta :: \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy-x+y)^2+(nxy+x-y)^2 4g^2} : (x+y)\sqrt{a^2}.$$

Pour le cas où le dodécaèdre est composé de deux pyramides droites, réunies base à base, on trouvera, en égalant les valeurs de $ex$ et $eh$, $n = \frac{2x+y}{xy}$.

Il y a aussi un terme où le noyau hypothétique devient semblable au générateur. Pour trouver dans ce cas la valeur de $n$, on fera

$$g^2 : p^2 :: g^2 : \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x+y-nxy}{nxy+x-y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2.$$

Et opérant comme ci-dessus (p. 459), on trouvera

$$n = \frac{x+2y}{2xy}.$$

141. Si l'on suppose $ex$ plus grande que $eh$, auquel cas le dodécaèdre tourne ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur, on aura toujours

$$g' = g\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy+y};$$

mais on trouvera

$$a' = a \cdot \left(\frac{nxy - 2x - y}{nxy + y} \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy + x - y}\right),$$

et

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy - 2x - y}{nxy + x - y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2}.$$

La quantité N sera $\frac{nxy - x}{x + y}$, d'où l'on déduira

$$n = \frac{Nx + Ny + x}{xy}.$$

Pour avoir $n'$, on fera attention que dans le cas présent, $\gamma q$ (fig. 92) représente la diagonale oblique du noyau hypothétique ; on aura donc

$$qe : e\gamma :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \sqrt{a'^2};$$

et parce que le décroissement qui donne le noyau hypothétique agit sur l'angle A du générateur,

$$qe : e\gamma :: (n' + 1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n' - 1}{3}\sqrt{a^2} \text{ (p. 311)};$$

donc

$$g' : 2\sqrt{a'^2} :: (n' + 1)g : (2n' - 1)\sqrt{a^2}.$$

Et substituant à la place des rapports entre $g'$ et $g$, et entre $a'$ et $a$ ceux de leurs valeurs algébriques, comme on l'a fait (p. 457), on trouvera

$$n' = \frac{nxy - x - y}{2x}.$$

A l'égard des rapports entre les sinus et les cosinus des angles qui mesurent les moitiés des incidences des faces du dodécaèdre, il n'y aura aucun changement à y faire, par une raison semblable à celle que nous avons exposée ci-dessus (p. 458).

142. Je n'ai encore rencontré qu'un seul exemple d'une loi analogue à celle dont il s'agit ici. Le cristal qui la présente appartient à l'argent antimonié sulfuré. On voit (fig. 94) la projection de ce cristal, dont le signe rapporté au noyau (fig. 95) est..... $\underset{n}{\overset{1}{\mathrm{D}}}\underset{x}{({}^{1}\mathrm{E}^{1}\mathrm{B}^{3}\mathrm{D}^{2})}\underset{t}{\overset{6}{\mathrm{A}}}\underset{s}{\overset{2}{\mathrm{A}}}$. Si l'on fait $g=\sqrt{5}$, $p=\sqrt{3}$, $x=3$, $y=2$, $n=1$, on trouve pour l'incidence de $x$ sur $x$ $131^d\ 16'$, et pour celle de $x$ sur $x'$ $158^d\ 12'$.

Dans le noyau hypothétique on a

$$g' : p' :: 7\sqrt{5} : \sqrt{87}.$$

De plus $N=\frac{5}{3}$, et $n'=-\frac{1}{6}$, ce qui indique que la diagonale oblique $\gamma\nu$ du même noyau faisant un angle plus ouvert avec l'axe que l'arête $ag$, le décroissement désigné par $n'$ agit par renversement sur l'angle A du générateur (p. 455). La véritable formule rapportee à cet angle sera donc $n'=\frac{1}{6}$.

Les facettes $s$, $s$ (fig. 94) sont inclinées l'une sur l'autre de $158^d\ 12'$. A l'égard des facettes $t$, leurs plus longs bords étant parallèles entre eux, on voit que les diagonales obliques du rhomboïde qu'elles formeraient par leur réunion sont inclinées à l'axe de la même quantité que les arêtes $q\nu$ qu'elles remplacent. Désignant donc par $g''$ la demi-diagonale horizontale du rhomboïde dont il s'agit, et par $a''$ son axe, on aura $qe : ex$ ou

$$lz : az :: g'' : \sqrt{3p''^2 - g''^2} :: (nxy + x - y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$: \frac{2nxy - x + y}{3}\sqrt{a^2}\ (\text{p. } 483) :: 8\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{10}{3}\sqrt{a^2}.$$

Mais d'une autre part

$$g'' : \sqrt{3p''^2 - g'^2} :: mu : au :: (3n + 3)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$: (2n - 1)\sqrt{a^2}(\text{p. } 311);$$

donc

$$8 : \tfrac{10}{3} :: 2n + 3 : 2n - 1;$$

d'où l'on tire $n = 3$, ce qui indique un décroissement par six rangées sur l'angle A du générateur. L'incidence des mêmes facettes $t$ sur les faces voisines $x$, $x$, sera de $155^d\,38'$.

III. *Décroissemens intermédiaires sur les angles* e.

143. Nous avons fait voir, dans l'article précédent, qu'il existe entre les deux espèces de décroissemens qui ont lieu sur les angles E une relation qui permet de suivre à peu près la même marche pour les calculs qui concernent les uns et les autres. Cette relation s'étend aux décroissemens qui ont lieu sur les angles inférieurs, abstraction faite de quelques différences qui dépendent de celle que présentent les positions des quantités $x$ et $y$ situées toutes les deux sur les bords D, D, au lieu que dans les décroissemens sur E, l'une coïncide avec B et l'autre avec D. Nous

prendrons pour terme de comparaison avec l'espèce de décroissement dont il s'agit ici, celle qui se rapporte à E, de manière que $x$ est dans le sens de D et $y$ dans le sens de B.

Supposons d'abord que le générateur *as* (fig. 75) prenne une position renversée, comme on le voit (fig. 96). Les droites *ue*, *my* deviendront alors les lignes de départ du décroissement. Soit XH (fig. 97) le dodécaèdre produit en vertu de ce décroissement, et soient *uet*, *myt* (fig. 96) deux plans parallèles aux faces QXN, QXC (fig. 97). On voit d'abord que les angles inférieurs *d*, *n'*, etc. du générateur (1) étant situés à la naissance du décroissement, ces angles coïncideront toujours avec des points pris sur les arêtes les moins saillantes QX, BX, qui sont tournées vers les faces du générateur, tandis que les arêtes les plus saillantes NX, CX se formeront constamment à une certaine distance au-dessus des bords *au*, *ab*, etc., du générateur. Ainsi les unes et les autres conserveront les mêmes positions relatives à l'égard du noyau, au lieu que dans les deux décroissemens précédens, les arêtes les moins saillantes, par exemple, pouvaient être tournées tantôt vers les faces du généra-

(1) On a rétabli ici la position du générateur, conformément à celle qu'il a dans la figure 73, le renversement qui a lieu (figure 96) n'étant destiné qu'à faciliter un calcul commun aux deux espèces de décroissement, ainsi qu'on le verra bientôt.

teur, et tantôt vers ses bords supérieurs, suivant que le nombre des rangées soustraites était plus grand ou plus petit. Par une suite nécessaire, les résultats relatifs aux décroissemens sur *e* se trouvent resserrés entre des limites plus étroites que ceux qui dépendent des deux premiers décroissemens, ainsi que je l'exposerai plus bas.

Soit maintenant *hx* (fig. 98) un système de lignes qui aient avec le dodécaèdre (fig. 97) les mêmes relations que celles qui composent la figure 74, avec le dodécaèdre que représente la figure 73. En comparant les deux systèmes, on voit que *gp* (fig 98) parallèle à *vx* remplace *dp* (fig. 74) parallèle à *qx*, et que *dp* (fig. 74) qui en partant de l'angle *d* se dirige parallèlement à *qx*, est remplacée par *dx* (fig. 98), qui en partant du même angle est l'analogue de *qx* (fig. 74). Par une suite nécessaire, *ay* qui était limitée par *dp* (fig. 74); s'étend jusqu'à ce qu'elle rencontre *qx* (fig. 98). De plus, *eh* qui était tantôt plus grande et tantôt plus petite que *ex*, dans les résultats relatifs au dodécaèdre (fig. 73), sera constamment plus petite, comme on le voit (fig. 98), dans ceux qui se rapportent au dodécaèdre (fig. 97).

144. La différence générale entre les formules de part et d'autre consiste en ce que la quantité *y*, toutes les fois qu'elle n'est point multipliée par *n*, prend dans les calculs qui vont nous occuper un signe contraire à celui dont elle était affectée dans ceux qui ont pour objet le dodécaèdre (fig. 73). Du reste, les

valeurs de $ay$ et de $av$ sont les mêmes, et celles de $ap$ et de $ax$ présentent l'inverse l'une de l'autre, conformément à ce qui a été dit plus haut.

Quant aux valeurs de N, $n$ et $n'$, et aux rapports entre $g'$ et $p'$, ainsi qu'entre les sinus et les cosinus des angles sous-doubles de ceux qui mesurent les incidences respectives des faces du dodécaèdre, ils ont la même conformité avec ceux qu'offrent les quantités analogues, pour les décroissemens sur E, dans les cas où l'on a $ex$ plus grande que $eh$, ainsi que cela doit être d'après l'observation ci-dessus. La seule quantité qui ne participe point de la différence des signes qui précèdent $y$, est celle qui donne la valeur absolue de $g'$.

La marche des calculs qui concernent ce décroissement se trouve comme tracée d'avance par tout ce que nous venons de dire, et sera facile à suivre, en prenant pour objet de comparaison celle qui conduit aux résultats des décroissemens sur E, dans lesquels $x$ coïncide avec D et $y$ avec B.

145. Cherchons d'abord l'expression de $ay$, que nous tirerons de la fig. 96 comparée avec la fig. 75, qui avait donné au contraire l'expression de $av$ (fig. 74). Nous avons eu (p. 443),

$$bm = nx\sqrt{g'^2+p'^2} \text{ (fig. 75)},\ bt = ny\sqrt{g'^2+p'^2}$$

et $$by = \sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Dans le cas présent, $bm$ (fig. 96) sera toujours égale à $nx\sqrt{g'^2+p'^2}$; mais

$$bt=\sqrt{g'^2+p'^2} \text{ et } by=ny\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la proportion

$$bm:yz=by::bc:cz, \text{ ou } bm:by::bc:bz-bc,$$

et observant que $bz=2p'ny$, puisqu'il renferme autant de diagonales $2p'$ que $by$ renferme de fois $\sqrt{g'^2+p'^2}$, nous aurons

$$nx\sqrt{g'^2+p'^2}:ny\sqrt{g'^2+p'^2}::bc:2p'ny-bc,$$

ce qui donne $\qquad bc=\frac{2p'nxy}{x+y}.$

Mais $bt:bc::ay$ (fig. 98) $:ad$, ou

$$\sqrt{g'^2+p'^2}:\frac{2p'nxy}{x+y}::ay:2p, \text{ ou } \sqrt{g^2+p^2}:\frac{2pnxy}{x+y}::ay:2p;$$

donc $ay=\frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}$, quantité qui étant comparée à celle que nous avions obtenue (p. 442), offre, relativement au signe de $y$, la différence que nous avons annoncée (p. 491).

146. Passons à l'expression de $av$. Soit $fh$ (fig. 96) la ligne qui correspond à $mt$ vers l'angle $u$ opposé à $b$. Le plan $mty$ étant parallèle à la face QXC (fig. 97) du dodécaèdre, si nous faisons passer par $fh$ (fig. 96) un second plan parallèle à BXC (fig. 97), et si nous supposons que les deux plans se prolongent en allant de $mt$ vers $fh$ (fig. 96), leur réunion se fera sur une ligne parallèle à l'arête CX (fig. 97). Il suit de là que nous pouvons considérer la formation de cette arête,

ou plutôt de celle qui répond à *gp* (fig. 98), parallèlement à CX (fig. 97), comme étant l'effet d'un décroissement hypothétique qui agirait sur les angles *b*, *u* (fig. 96) de la face *dbau*, parallèlement aux lignes *mt*, *fh*, en suivant une certaine loi que nous déterminerons dans un instant.

Soient $n\pi$, *rl*, deux lignes parallèles, l'une à *mt*, l'autre à *fh*, et tellement prises que *dn* égale la quantité dont le bord de chaque lame de superposition est dépassé par celui de la précédente, dans le sens de la diagonale *da*; soit de plus *di* une portion de l'arête *ds* égale à la dimension en hauteur.

Maintenant *duab* (fig. 99) étant le même rhombe que figure 96, soit $\lambda\gamma$ la ligne de départ du décroissement située vers l'angle *b*, en supposant une seule rangée soustraite. Appliquons ici la construction représentée (fig. 72), en menant $\lambda\mu$ parallèle à *da*, $\gamma\pi$ perpendiculaire sur $\lambda\mu$, $d\varepsilon$ parallèle à $\gamma\lambda$, puis $\nu\varphi$, autre parallèle à la même ligne, et située de manière que l'on ait $\varepsilon\vartheta = b\gamma$. Dans ce cas $d\nu$ sera la distance d'une lame à l'autre prise sur *da*. On aura donc

$$d\nu \times n = dn \text{ (fig. 96)}.$$

Maintenant $b\lambda$ étant la ligne qui répond à *bm* (fig. 96), dont l'expression est $nx\sqrt{g'^2 + p'^2}$, et la figure 99 étant construite dans l'hypothèse d'une seule rangée soustraite, on aura $b\lambda = x\sqrt{g'^2 + p'^2}$. Par la même raison, $b\gamma$ étant l'analogue de *bt* (fig. 96), dont l'expression est $\sqrt{g'^2+p'^2}$, on aura, en divisant celle-ci par $n$, $b\gamma=\frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}$ (fig. 99). D'ailleurs $b\mu$ égale à $b\lambda$ a aussi pour expression $x\sqrt{g'^2+p'^2}$. Donc

$$\gamma\mu \text{ ou } b\mu-b\gamma=\left(x-\frac{1}{n}\right)\sqrt{g'^2+p'^2}=\frac{nx-1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

De plus

$$\lambda\mu=2p'x,\ \omega\gamma=b\gamma=\frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Or,

$$\gamma\mu : \lambda\mu :: \omega\nu : d\nu\,;$$

donc

$$\frac{nx-1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2} : 2p'x :: \frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2} : d\nu=\frac{2p'x}{nx-1}\,;$$

donc $$dn \text{ (fig. 96)}=\frac{2p'nx}{nx-1}.$$

Mais $di$, qui représente la dimension en hauteur, est égale à $by$ ou à $ny\sqrt{g'^2+p'^2}$. De plus, le triangle $ndi$ est semblable au triangle $\nu ag$ (fig. 98). Donc

$$di : dn \text{ (fig. 96)} :: ag : a\nu \text{ (fig. 98)} :: \frac{2p'nx}{nx-1} : ny\sqrt{g'^2+p'^2},$$

ou

$$:: \frac{2pnx}{nx-1} : ny\sqrt{g^2+p^2} :: \frac{2px}{nxy-y} : \sqrt{g^2+p^2}\,;$$

donc puisque $ag=\sqrt{g^2+p^2}$, on aura

$$a\nu=\frac{2px}{nxy-y}, \text{ au lieu de } \frac{2px}{nxy+y} \text{ (p. 444).}$$

147. Il est facile maintenant de déterminer les expressions de $ax$ et de $ap$.

1°. Pour $ax$. On a $ax : ay :: ax + as : ds$. Substituant à la place de $ay$ sa valeur, et faisant $as = a$ et $ds = \sqrt{g^2 + p^2}$, puis dégageant $ax$, on trouve

$$ax = \frac{x + y}{nxy - x - y} \cdot a.$$

C'est l'expression de $ap$ (p. 445), dans laquelle les signes de $y$ sont changés.

2°. Pour $ap$. Nous avons $ap : av :: ap + as : gs$. Faisant de même les substitutions convenables, on trouve $ap = \frac{x}{nxy - y - x}$. C'est l'expression de $ax$ (p. 445), avec un changement de signe relativement à la quantité $y$.

148. Pour avoir les expressions des demi-diagonales $g'$ et $p'$ du noyau hypothétique, on se servira des deux proportions $gu : uh :: qe : ex$, et $gu : pu :: qe : eh$, d'où l'on tire $ex : eh :: uh : pu$. Or

$$uh = ax + \tfrac{2}{3}a = a \cdot \frac{2nxy + x + y}{3nxy - 3x - 3y},$$

$$pu = ap + \tfrac{1}{3}a = a \cdot \frac{nxy - 2x - y}{3nxy - 3y - 3x}.$$

Ces deux valeurs étant substituées à la place de $uh$ et de $pu$, on trouve

$$ex : eh :: 2nxy + x + y : nxy + 3x.$$

En suivant la même marche que dans le calcul relatif au décroissement sur E (p. 446), on aura

$$eh = a\,\frac{nxy + x + y}{nxy - x - y} \cdot \frac{2nxy + x + y}{3nxy + 3x}.$$

Substituant cette valeur ainsi que celle de $uh$ dans la proportion

$$gu = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : uh :: ge = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : eh,$$

et dégageant $g'$, on trouvera comme page 447,

$$g' = g \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy + x}.$$

Maintenant,

$$eh + ex : eh - ex :: 3nxy + 3x : nxy - x + 2y.$$

D'une autre part,

$$eh + ex = hx = as + 2(ax) = a \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy - x - y},$$

et $$(eh - ex) = \tfrac{1}{3}a.$$

Ces deux rapports combinés donnent

$$a' = a \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy - x - y} \cdot \frac{nxy - x + 2y}{nxy + x}.$$

Egalant cette dernière quantité à $9p'^2 - 3g'^2$, et mettant à la place de $g'$ sa valeur, puis dégageant $p'$, on aura

$$p' = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left[\left(\frac{nxy - x + 2y}{nxy - x + y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2\right]\left(\frac{nxy + x + y}{nxy + x}\right)^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy - x + 2y}{nxy - x - y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2}.$$

rapport qui ne diffère que par les signes qui précèdent $y$, de celui que nous avons donné page 448.

149. L'expression de N se déduit comme ci-dessus, page 448, de l'équation $\gamma x = \frac{1}{N-1} a'$, ou

$$\tfrac{1}{2}(hx - a') = \frac{1}{N-1} . a'.$$

Ayant mis à la place de $hx$ et de $a'$ leurs valeurs algébriques, on aura

$$a\left(\frac{x-y}{nxy+x} . \frac{nxy+x+y}{nxy-x-y}\right) = \frac{1}{N-1} a\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x-y} . \frac{nxy-x+2y}{nxy+x}\right);$$

et réduisant, puis dégageant N, on trouvera

$$N = \frac{nxy+y}{x-y},$$

comme à la page 448, sauf la différence déjà indiquée. La même équation donne

$$n = \frac{Nx - Ny - y}{xy}.$$

Pour avoir $n'$, concevons que les lignes $\nu\gamma$, $\nu\varepsilon$, $q\varepsilon$, $\gamma q$, se meuvent parallèlement à elles-mêmes, en s'éloignant du centre, jusqu'à ce que le quadrilatère $adsg$ se trouve inscrit dans le quadrilatère $\gamma q \varepsilon \nu$, comme le représente la figure 100. Nous aurons cette suite de rapports,

$$qe \text{ (fig. 98)} : e\gamma :: q'e \text{ (fig. 100)} : e\gamma' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}a' :: dr : r\gamma'$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}a + \frac{1}{n'-1} a = \frac{2n'+1}{3n'-3} a;$$

le décroissement qui produit le noyau hypothétique étant censé agir directement sur l'angle $e$ du générateur. Donc $g' : g :: 2a' : \frac{2n'+1}{n'-1} . a$. Mettant à la place des rapports entre $g'$ et $g$, et entre $a'$ et $a$ ceux de leurs valeurs algébriques, et faisant les autres opérations convenables, on trouvera $n' = \frac{nxy - x + y}{2y}$, comme à la page 450, avec la différence ordinaire.

150. Il ne reste plus qu'à déterminer les incidences respectives des faces du dodécaèdre. En commençant par le rapport $C\omega : \omega\mu$ qui est celui du sinus au cosinus de la moitié de l'angle que font entre elles les faces NXQ, CXQ, on a d'abord $C\omega$ ou

$$g' = g . \frac{nxy + x + y}{nxy + x} \text{ (p. 497)}.$$

On cherchera ensuite $\gamma\delta$ (fig. 98), qui est double de $\omega\mu$, en se servant de la proportion $dx : dr :: \gamma x : \gamma\delta$. Or,

$$dr = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2},\ dx = \sqrt{(rx)^2 + (dr)^2} = \sqrt{(hu)^2 + dr^2},\ \gamma x = \tfrac{1}{2}(hx - a').$$

Substituant à la place de $dx$, $dr$ et $\gamma x$ leurs valeurs algébriques, et prenant la moitié de la valeur de $\gamma\delta$, on aura celle de $\omega\mu$, et l'on trouvera $g'$ ou

$$C\omega : \omega\mu :: \sqrt{(2nxy + x + y)^2 \tfrac{1}{3}a^2 + (nxy - x - y)^2 4g^2} : (x - y)\sqrt{a^2},$$

rapport qui est le même, sauf la différence ordinaire, que celui qui a été trouvé page 453, pour les faces les

32..

plus inclinées du dodécaèdre, lorsque dans les décroissemens sur E, *ex* est plus grande que *eh*.

Pour avoir ensuite le rapport B$\lambda$ ou $g'$ à $\lambda\vartheta$ (fig. 97), ou celui du sinus au cosinus de la moitié de l'angle que font entre elles les faces CXQ, BXC du dodécaèdre, il suffira de trouver l'expression algébrique de la quantité $\varepsilon\zeta$ (fig. 98) double de $\lambda\vartheta$. La proportion qui y conduit est $gp : gu :: \varepsilon x : \varepsilon\zeta$. Or,

$$gp = \sqrt{(pu)^2 + (gu)^2},\ \varepsilon x = \gamma\iota + \gamma x = a' + \gamma x.$$

Mettant à la place de $pu$, $gu$, $a'$ et $\gamma x$ leurs valeurs, on déduira de la proportion celle de la moitié de $\varepsilon\zeta$ ou de $\lambda\vartheta$, et l'on aura définitivement

$$B\lambda : \lambda\vartheta :: \sqrt{\overline{nxy + 2x - y}^2 \tfrac{1}{3}a^2 + \overline{(nxy - x - y)}^2 4g^2}$$
$$: (nxy + y)\sqrt{a^2},$$

rapport qui est encore le même, à l'exception des signes de $y$, que celui auquel nous sommes parvenus (p. 452), relativement aux faces les moins inclinées du dodécaèdre produit par le décroissement sur E.

151. Les résultats qui vont suivre dérivent des propriétés particulières à l'espèce de décroissement dont il s'agit ici. Le point $d$ de l'arête $qx$ (fig. 98) ayant, comme je l'ai déjà remarqué, une position fixe, pendant les variations que subit le dodécaèdre, si l'on suppose que la valeur de $n$ augmente de plus en plus, la quantité $ax$ ira au contraire en diminuant, et au terme où $n$ sera infinie, l'arête $qx$ se confondant avec la diagonale oblique $ad$, les faces du noyau hy-

pothétique se trouveront sur les mêmes plans que celles du générateur, ce qui ne pourra se faire sans que les bords NQ, CQ, etc. (fig. 97), ne coïncident avec les arêtes *du*, *db*, etc. Il en résulte qu'alors $y$ s'évanouit, et c'est effectivement ce qu'indique la formule relative à ce cas. Pour le prouver, servons-nous encore des rapports entre les diagonales du noyau hypothétique et du générateur, qui donnent la proportion suivante :

$$g^2 : p^2 :: g^2 : \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2;$$

d'où l'on tire

$$3p^2-g^2=\tfrac{1}{3}a^2\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2;$$

et parce que $3p^2-g^2$ représente le tiers du carré de l'axe, $\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2=1$ ; ce qui donne, toute réduction faite, $y=0$.

152. A l'égard du cas où le dodécaèdre se trouverait changé en une double pyramide droite, il est facile de juger, à la seule inspection de la figure 98, qu'il ne peut avoir lieu en vertu du décroissement que nous considérons ici, puisque le point *d* de l'arête *qx* étant toujours plus éloigné du sommet $x$ que du sommet $h$, quelque position que l'on donne à cette arête, jamais on n'aura $qx=qh$, ou $ex=eh$. Voyons ce que donne la formule relative à cette équation. Si nous substituons à la place de $ex$ et

de $eh$ leurs valeurs algébriques, nous aurons

$$2nxy+x+y=nxy+2x-y;$$

d'où l'on tire $n=\frac{x-2y}{xy}$. Mettons à la place de $n$ cette valeur dans les équations

$$ay=\frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2} \text{ et } av=\frac{2px}{nxy-y};$$

la première devient $ay=\frac{x+y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2}$, et la seconde $av=\frac{2px}{x-3y}$. On voit que toutes les fois que $x$ surpassera $2y$, la valeur de $ay$ sera une quantité rationnelle plus grande que l'unité; la même chose aura lieu pour la valeur de $av$, tant que $x$ surpassera $3y$. Donc, dans tous les cas de l'un ou l'autre genre, $ay$ ou $av$ étant plus grande l'une que l'arête $ds$, et l'autre que la diagonale $ad$, les lignes $qx$ et $gp$ se rejetteront vers la partie opposée de l'axe, en prenant des positions telles que $yz$, $vt$ (fig. 100), et la ligne $gp$ (fig. 98) entraînant avec elle sa parallèle $vx$, celle-ci passera à la position $\varphi z$ (fig. 100). Le même changement aura lieu à l'égard des lignes $vh$, $qh$ (fig. 98), qui se rejetteront vers la partie supérieure de l'axe. Il en résulte qu'alors le dodécaèdre sera devenu une double pyramide droite par un effet analogue à celui des décroissemens ordinaires produits par renversement.

En effet, d'une part,

$$sz : ds :: as + sz : ay,$$

ou

$$sz : \sqrt{g^2+p^2} :: a + sz : \frac{x-y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2},$$

ce qui donne

$$sz = a\left(\frac{x-2y}{3y}\right).$$

D'une autre part,

$$st : gs :: at : av; \text{ ou } st : 2p :: a + st : \frac{2px}{x-3y},$$

ce qui donne

$$st = a\left(\frac{x-3y}{3y}\right).$$

Donc

$$dr : rz :: \sqrt{\tfrac{4}{35}g^2} : \tfrac{1}{3}a + a\left(\frac{x-y}{3y}\right) :: \sqrt{\tfrac{4}{35}g^2} : \left(\frac{x-y}{3y}\right)a,$$

et

$$gu : ut :: \tfrac{2}{3}a + a\left(\frac{x-2y}{3y}\right) :: \sqrt{\tfrac{4}{35}g^2} : \left(\frac{x-y}{3y}\right)a.$$

Or, les deux rapports étant identiques, il en résulte que les lignes $yz$, et $vt$, ou sa parallèle $\varphi z$, sont également inclinées en sens contraire, ce qui indique la double pyramide droite.

La loi qui donne cette double pyramide rentre alors parmi les décroissemens intermédiaires qui ont lieu directement sur les angles latéraux *dba*, *n'ba* (fig. 96), par une suite de ce que la ligne *ct* au lieu de se rejeter vers le sommet $s$, comme auparavant, s'incline vers le sommet $a$. Tant que $bm$ est plus grande que $bt$, le décroissement se fait de manière que $x$ est dans le sens de D et $y$ dans celui de B. Lorsque $bt$ devient égale à $bm$, on a l'équivalent du décroissement ordinaire sur les mêmes angles, d'où résulte la double pyramide; et parce que ce décroissement a lieu par trois rangées (p. 355), on a

$$bm = bt = 3by.$$

Dans l'équation $st = a\left(\frac{x - 3y}{3y}\right)$ ou $st = a\left(\frac{bm - 3by}{3by}\right)$, la valeur de $st$ s'évanouit alors, c'est-à-dire que l'arête $\nu t$ se confond avec la diagonale $gs$, d'où il suit que $\varphi z$ devient parallèle à cette diagonale, comme cela doit être dans le cas présent.

Lorsqu'ensuite $bt$ devient plus grande que $bm$, on a l'équivalent d'un décroissement intermédiaire sur les angles latéraux, dans lequel $x$ coïncide avec B, et $y$ avec D. Il y a un terme où $bt$ devenant infinie, $bm$ s'évanouit, et la ligne $ct$ devient parallèle à l'arête $ba$. Ce terme répond au cas où, dans l'équation $sz$ (fig. 100) $= a\left(\frac{x - 2y}{3x}\right)$, $x$ est double de $y$, ce qui donne $sz = \frac{a \times 0}{3y}$; c'est-à-dire que $sz$ étant nulle, l'arête $yz$ coïncide avec $ds$. On a alors l'effet du décroissement ordinaire par deux rangées sur les bords B du générateur, d'où résulte la double pyramide droite (p. 297).

Au-delà du même terme, $x$ devenant plus petit que $2y$, la valeur de $sz$ ou $a\left(\frac{x-2y}{3y}\right)$ est négative, alors les lignes $yz$, $\varphi z$ se réunissent en un point situé entre les sommets $s$, $a$, et le résultat est censé appartenir aux décroissemens intermédiaires sur l'angle supérieur A du générateur, qui feront l'objet de l'article suivant.

153. La cristallisation ne m'a encore offert qu'une seule forme à laquelle l'espèce de décroissement qui vient de nous occuper soit applicable, savoir, celle dont on voit la projection (fig. 101), et qui a pour signe $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{\nu}{\left(\overset{\frac{5}{3}}{E}D^{3}D^{1}D^{1}D^{3}\right)}\underset{r}{\overset{2}{D}}\,\underset{t}{\underset{3}{B}}$. Les facettes $\nu$ qui dépendent du décroissement intermédiaire sont interposées entre les faces $r$ de la variété métastatique et les faces $c$ qui appartiennent au prisme hexaèdre régulier. Il résulte de cette disposition que la figure des faces $c$, qui serait celle d'un trapézoïde, si elles existaient solitairement, devient un rhombe par l'effet de ses intersections avec les facettes $\nu$, $\nu'$. Je prouverai plus bas que l'existence de ce rhombe peut avoir lieu pour un rhomboïde quelconque, et en vertu d'une infinité de combinaisons différentes de deux décroissemens, l'un ordinaire sur les bords inférieurs du générateur, l'autre intermédiaire sur les angles compris entre ces bords. De plus, le cristal est terminé de chaque côté par les facettes $t$, $t$, dont les

intersections avec les faces *r*, *r*, sont sur un même plan horizontal, et je ferai voir que cette propriété est de même indépendante des angles du générateur, et peut exister en vertu d'une infinité de combinaisons de deux décroissemens ordinaires, l'un sur les bords inférieurs, l'autre sur les bords supérieurs du générateur. C'est du caractère de symétrie qu'impriment à cette variété les deux assortimens dont je viens de parler, que j'ai emprunté son nom de *chaux carbonatée euthétique*, c'est-à-dire qui offre des positions heureusement combinées.

Si dans le rapport des demi-diagonales $g'$ et $p'$ du noyau hypothétique (p. 497), on fait $n = \frac{5}{3}$, $x = 3$, $y = 1$, on trouve $g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$, ce qui fait connaître que le noyau dont il s'agit est semblable à la variété contrastante (p. 378). Les mêmes substitutions donnent $N = 3$, ce qui est l'indice d'un décroissement par trois rangées sur les bords inférieurs du noyau hypothétique; et $n' = \frac{3}{2}$, comme nous l'avions déjà trouvé par une autre méthode (p. 378). L'incidence de *v* sur *v*, ou de *v'* sur *v'* sera de $152^d\, 28'\, 22''$; celle de *v* sur *v'*, de $88^d\, 55'\, 8''$; et celle de *c* sur *v*, de $164^d\, 3'\, 16''$.

J'ai maintenant à démontrer les deux propriétés qui ont été énoncées plus haut. La première consiste en ce que les facettes *c*, *c* ont la figure d'un rhombe, par une suite de la manière dont elles sont coupées par les plans *v*, *r*.

Concevons que l'une quelconque de ces facettes soit divisée par une diagonale horizontale en deux triangles isocèles dont cette diagonale sera la base commune, et dont l'un, que nous désignerons par T, proviendra du décroissement ordinaire sur D, et l'autre qui sera indiqué par S, résultera du décroissement intermédiaire sur *e*. Soit $b$ la base commune des deux triangles, $h$ l'apothème du triangle T, $h'$ celui du triangle S, $n$ la loi relative au décroissement sur D, et $n'$ celle qui se rapporte au décroissement sur *e*.

Maintenant $adsg$ (fig. 102) étant la coupe principale du noyau, et $dp$, $dy$, deux arêtes contiguës du dodécaèdre produit par le décroissement sur D, si par le milieu $o$ de la diagonale oblique $ad$ nous menons $oz$ parallèle à l'axe $py$, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}b : h :: g : oz :: g : \tfrac{1}{2}ay :: g : \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{n-1}\cdot a\right) :: g \quad \tfrac{1}{2} \quad \frac{n}{n-1}.$$

D'une autre part, si nous menons $\omega\psi$ (fig. 98) parallèle à l'axe $hx$, nous aurons

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}b : h' :: g' : \omega\psi :: g' : \tfrac{1}{2}\gamma x \\ :: g . \frac{n'xy+x+y}{n'xy+x} : \tfrac{1}{2}a . \frac{n'xy+x+y}{n'xy-x-y} . \frac{x-y}{n'xy+x} \\ :: g : \tfrac{1}{2}a\frac{x-y}{n'xy-x-y}.\end{aligned}$$

On aura donc, dans le cas du rhombe,

$$\tfrac{1}{2}a . \frac{n}{n-1} = a . \frac{x-y}{n'xy-x-y}.$$

d'où l'on tire

$$n'=\frac{2nx-x+y}{nxy},\ \text{et}\ n=\frac{y-x}{n'xy-2x}.$$

Dans le cas présent $x=3$, $y=1$, $n'=\frac{5}{3}$, $n=2$, ce qui donne $\frac{5}{3}$ pour chaque membre de la première équation, et 2 pour chaque membre de la seconde.

Reste à démontrer la propriété en vertu de laquelle les faces des deux dodécaèdres qui proviennent l'un d'un décroissement sur D, l'autre d'un décroissement sur B, se rencontrent de manière que leurs intersections se trouvent sur un même plan perpendiculaire à l'axe. Il est d'abord facile de concevoir que les intersections dont il s'agit ont leur origine aux angles solides E, E du générateur. Soit *am* (fig. 103) celle des arêtes du solide provenant du décroissement sur B, laquelle répond à la diagonale oblique *ad* du générateur. Si l'on mène *gu* perpendiculaire sur l'axe, et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre *x* de *am*, le point *x* situé vis-à-vis du point *g*, qui est un des angles latéraux du générateur, sera le point d'intersection de l'arête *am* avec celle qui lui correspond sur le dodécaèdre produit par le décroissement sur D; soit *pd* (fig. 102) cette dernière arête. Si nous prolongeons de même *gu* jusqu'à ce qu'elle coupe en *t* l'arête dont il s'agit, le point *t* devra se confondre avec le point *x* (fig. 103), c'est-à-dire que $ux=ut$. Soit $n'$ le nombre de rangées soustraites relatif au décroissement sur B, et $n$ celui qui se rapporte au décroissement sur D, nous aurons

$$ux\ (\text{fig. } 103) = \frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}\ (\text{p. } 294).$$

D'une autre part,

$$ap\ (\text{fig. } 102) = \frac{1}{n-1}.a,\ pr:dr::pu:ut;$$

ou

$$\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{3}\right)a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)a : ut;$$

donc

$$ut = \frac{n+2}{2n+1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

d'où l'on tire $n' = n+1$.

Parmi les différentes lois de décroissement qui déterminent les formes des variétés de chaux carbonatée, on en connaît huit, dont quatre ont pour expressions $\underset{2}{B}$, $\underset{3}{B}$, $\underset{4}{B}$, $\underset{6}{B}$, et les quatre autres $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$, $\overset{5}{D}$, ce qui donne les combinaisons suivantes, $\overset{1}{D}\underset{2}{B}$, $\overset{2}{D}\underset{3}{B}$, $\overset{3}{D}\underset{4}{B}$, $D\overset{4}{\underset{6}{B}}$, qui toutes réalisent la propriété que je viens de démontrer. Mais jusqu'ici il n'y a que les deux lois représentées par la seconde qui soient associées dans une même cristallisation, qui est celle de la variété euthétique; les autres agissent solitairement dans la production des formes qui en offrent les résultats.

### IV. *Décroissemens intermédiaires sur l'angle* A.

154. Cette espèce de décroissement est distinguée des précédentes surtout par l'égalité qui existe constamment entre l'axe du rhomboïde *adn's* (fig. 104), qui y fait la fonction de générateur et celui du dodécaèdre secondaire *a*NB*s*. Il en résulte que les extrémités du même axe sont les seuls points qui soient communs aux deux solides.

Soit *adsg* (fig. 105) la coupe principale du générateur, et $a\eta$, $s\eta$, $a\lambda$, $s\lambda$, les quatre arêtes du dodécaèdre situées dans le même plan que cette coupe. En comparant cette figure avec la 74ᵉ, pl. 21, on voit que la ligne *ax*, qui dans celle-ci mesure la distance entre les sommets des deux solides, disparaît dans l'autre; et que les lignes *ay*, $a\nu$, ou les prolongemens de *ag*, *ad*, sont remplacées par les lignes $d\nu$, $g\vartheta$ (fig. 105), qui sont les prolongemens de l'arête et de la diagonale opposées à celles de la figure 74. Ainsi, au lieu des expressions des quatre données *ap*, *ax*, *ay*, $a\nu$, à l'aide desquelles nous avons résolu les problèmes relatifs au décroissement sur E, nous n'aurons, dans le cas présent, que celles de $d\nu$, $g\vartheta$, qui suffiront pour nous conduire au même but.

Si nous continuons de prendre pour terme de comparaison les formules qui dépendent du décroissement sur E, dans lequel *x* coïncide avec D, nous trouverons qu'en général ces dernières passent à celles du décroissement sur A, par la substitution de *x* à *y*, et de $-y$ à $x$, dans les quantités où elles ne sont multipliées ni par $n$, ni l'une par l'autre. Je ferai connaître les exceptions à mesure qu'elles se présenteront.

155. Soit $as$ (fig. 106) le générateur, et $ltf$, $cef$, deux plans parallèles aux faces N$a$Q (fig. 104), C$a$Q, pris de manière que $lt$, $ce$, représentent les lignes de départ du décroissement. Nous aurons, en appliquant ici ce qui a été dit des autres décroissemens,

$$al = nx\sqrt{g'^2+p'^2},\ at = ny\sqrt{g'^2+p'^2},\ am = 2p'ny,$$

et $$af = \sqrt{g'^2+p'^2};$$

et parce que les triangles $maf$ (fig. 106), $adv$ (fig. 105) sont semblables, $am : af$ (fig. 106) :: $ad : dv$. Or, dans le cas particulier dont il s'agit ici, ces triangles font l'un à l'égard de l'autre les mêmes fonctions que les triangles $tbc$ (fig. 96) et $day$ (fig. 98) ; d'où il suit que l'expression de $dv$ (fig. 105) sera la même que celle qui a été trouvée (p. 493) pour $ay$ ; c'est-à-dire que $dv = \frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}$.

La construction de la figure 106 peut encore nous servir pour trouver l'expression de $g\vartheta$ (fig. 105). Car soit $ir$ (fig. 106) une ligne située en sens contraire de la ligne $tf$, et inclinée de la même quantité. Si nous menons $tl$ et $fl$, les deux plans $ltf$, $lir$, seront parallèles aux faces Q$a$C, B$a$C (fig. 104) du dodécaèdre. Menons $fz$ (fig. 106) parallèle à $at$ et égale à $af$, puis $az$. Les triangles semblables $ato$, $fzc$, donnent $at : af :: ao : oz = az - ao$. Substituant à la place de $at$ et de $fz = af$ leurs expressions trouvées ci-dessus, et à la place de $az$ la quantité $2p$, nous aurons

$$ny\sqrt{g'^2+p'^2} : \sqrt{g'^2+p'^2} :: ao : 2p'-ao,$$

d'où l'on tire

$$ao = \frac{2p'ny}{ny+1}.$$

Maintenant les triangles semblables $alf$ (fig. 106), $ag\vartheta$ (fig. 105), donnent

$$al = nx\sqrt{g'^2+p'^2} : ao :: ag : g\vartheta,$$

ou

$$nx\sqrt{g'^2+p'^2} : \frac{2p'ny}{ny+1} :: \sqrt{g^2+p^2} : g\vartheta,$$

ou

$$nx\sqrt{g^2+p^2} : \frac{2pny}{ny+1} :: \sqrt{g^2+p^2} : g\vartheta;$$

donc $$g\vartheta = \frac{2py}{nxy+x}.$$

Cette expression, comparée avec celle de $av$ (p. 495), laquelle est $\frac{2px}{nxy-y}$, et se rapporte au décroissement sur $e$, présente, comme par exception, les différences que nous avons dit avoir lieu généralement (p. 510) entre les formules relatives au décroissement sur A et celles qui dépendent du décroissement sur E.

156. Je commencerai les applications, comme à l'ordinaire, en cherchant le rapport entre les demi-diagonales $g'$ et $p'$ du noyau hypothétique dont la

coupe principale est représentée par le quadrilatère $a'\eta s'\lambda$ (fig. 107). Ce rapport dépend de celui de $a\omega$ à $\omega s$, et pour avoir ce dernier, il faut chercher successivement ceux de $\eta\omega$ à $\omega s$, et de $\eta\omega$ à $a\omega$.

Ayant mené $\vartheta\sigma$ (fig. 105) perpendiculaire sur l'axe $as$, nous aurons

$$\eta\omega : \omega s :: \lambda\mu : a\mu :: \vartheta\sigma : a\sigma,$$

Cherchons $\vartheta\sigma$ et $a\sigma$.

1°. Pour $\vartheta\sigma$. Nous avons

$$sg : s\vartheta :: gu : \vartheta\sigma,$$

ou

$$2p : 2p + \frac{2py}{nxy+x} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \vartheta\sigma = \frac{nxy+x+y}{nxy+x}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. Pour $a\sigma$.

$$\vartheta\sigma : \sigma s = as - a\sigma :: gu : us,$$

ou

$$\frac{nxy+x+y}{nxy+x}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : a - a\sigma :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \tfrac{1}{3}a;$$

d'où l'on tire

$$a\sigma = a - \left(\frac{nxy+x-y}{nxy+x}\right)\tfrac{2}{3}a = \frac{nxy+x-2y}{3nxy+3x}.a.$$

Ces expressions de $\vartheta\sigma$ et $a\sigma$ substituées dans la proportion $\eta\omega : \omega s :: \vartheta\sigma : a\sigma$, donnent

$$\eta\omega : \omega s :: (3nxy+3x+3y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : (3nxy+x-2y)a.$$

Le second rapport, qui est celui de $\eta\omega$ à $a\omega$, dépend de la proportion $\eta\omega : a\omega :: \gamma\tau : a\tau$.

1°. Pour $\nu\tau$.

$$sd : s\nu = sd + d\nu :: dr : \nu\tau,$$

ou

$$\sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{g^2+p^2} + \frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$

$$: \nu\tau = \frac{nxy+x+y}{nxy}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. Pour $a\tau$.

$$\nu\tau : \tau s = as - a\tau :: dr : rs,$$

ou

$$\frac{nxy+x+y}{nxy}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : a - a\tau :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}\ \gamma\ \tfrac{1}{3}a;$$

d'où l'on tire

$$a\tau = a - \frac{nxy+x+y}{nxy}.a = \frac{2nxy-x-y}{3nxy}.a.$$

Donc

$$n\omega : a\omega :: \frac{nxy+x+y}{nxy}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2nxy-x-y}{3nxy}.a$$

$$:: (3nxy+3x+3y)\tfrac{4}{3}g^2 : (2nxy-x-y)a;$$

donc

$$a\omega : \omega s :: 2nxy - x - y : nxy + x - 2y.$$

Soit $2nxy - y - x = m$ et $nxy + x - 2y = n$. Nous aurons $m+n : m :: as : a\omega$. Et mettant à la place de $m$, $n$, $as$, leurs valeurs, puis réduisant,

$$3nxy - 3y : 2nxy - x - y :: a : a\omega = \frac{2nxy-x-y}{3nxy-3y}.a.$$

$$\omega s = as - a\omega = a - \left(\frac{2nxy-x-y}{3nxy-3y}\right) = \frac{nxy+x-2y}{3nxy-3y}.a.$$

Mais nous avons eu

$$n\omega=\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}:\omega s::(3nxy+3x+3y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:(nxy+x-2y)a.$$

Mettant à la place de $\omega s$ sa valeur, et réduisant, on trouvera $g'=g.\frac{nxy+x+y}{nxy-y}$, quantité dont le dénominateur seul est affecté de la différence indiquée plus haut (p. 510).

La valeur de $p'$ dépend de celle de $a'$ qu'il faut d'abord trouver. Or, $a\omega-\omega s$ est le tiers de cette dernière; prenant la différence entre les expressions de $a\omega$ et $\omega s$, et la triplant, on trouve

$$a'=a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right);$$

donc

$$9p'^2-3g'^2=a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right).$$

Mettant à la place de $g'^2$ sa valeur, puis dégageant $p'$, on aura

$$p'=\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy+x+y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-y}\right)^2};$$

donc

$$g':p'::g:\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2},$$

rapport qui est le même, sauf la différence indiquée, que celui qui a été trouvé pour les décroissemens sur E (p. 456), dans le cas où le dodécaèdre tourne, comme ici, ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur.

157. Pour avoir N, on considérera que l'axe du dodécaèdre étant égal dans le cas présent à l'axe du générateur, la partie de l'axe du premier, qui excède l'axe du noyau hypothétique est $\frac{1}{2}(a-a')=\frac{x-y}{nxy-y}$, toute réduction faite. Donc

$$\frac{1}{N-1}a'=\frac{x-y}{nxy}.a=\frac{nxy-y}{nxy-2x+y}.a';$$

d'où l'on tire

$$N=\frac{nxy-x}{x-y},$$

expression qui est la même que celle de N (p. 457), dans l'hypothèse de *ex* plus grande que *eh*, en ayant égard à la différence indiquée. La même équation donne $n=\frac{Nx-Ny+x}{xy}$.

158. Concevons que les quatre côtés du quadrilatère $a'ns'\lambda$ se meuvent parallèlement à eux-mêmes, en s'éloignant du centre, jusqu'à ce que les points $a'$, $s'$, se confondent avec les points $a$, $s$, comme on le voit. fig. 108. Il est visible que le décroissement d'où résulterait un rhomboïde semblable au noyau hypothétique agirait sur les angles supérieurs du générateur. Soit toujours $n'$ le nombre de rangées soustraites. Nous aurons d'une part

$$n'r : ar :: n\omega \text{ (fig. 107)} : a\omega :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{1}{2}a',$$

et d'une autre part

$$n'r \text{ (fig. 108)} : ar :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n'-1}{n'+1}\sqrt{a^2};$$

donc

$$g' : g :: 2a' : \frac{2n'-1}{n'+1} \cdot a.$$

Substituant aux rapports entre $g$ et $g'$ et entre $a$ et $a'$ ceux de leurs valeurs algébriques, on aura

$$nxy+x+y : nxy-y :: 2nxy-4x+2y : \frac{2n'-1}{n'+1}(nxy-y);$$

d'où l'on tire

$$n' = \frac{nxy-x+y}{2x},$$

comme nous l'avons eu pour les décroissemens sur E (p. 458), en tenant compte de la différence ordinaire.

159. Pour avoir le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de l'incidence de N$a$Q sur C$a$Q, menons $a'f$ perpendiculaire sur $a\varkappa$ (fig. 107), et du milieu $o$ de $a'\varkappa$ une autre perpendiculaire sur la même ligne $a\varkappa$. Le rapport cherché sera celui de $g'$ à $oh$, moitié de $a'f$, dont il s'agit de trouver l'expression. Les triangles semblables $a'af$, $a\varkappa\omega$ ou $a\nu\tau$ (fig. 105), donnent

$$a\varkappa : \nu\tau :: aa' : a'f,\quad a\nu = \sqrt{(a\tau)^2+(\nu\tau)^2}$$

$$= \sqrt{a^2\left(\frac{2nxy-x-y}{3nxy}\right)^2+\left(\frac{nxy+x+y}{nxy}\right)^2 \tfrac{4}{3}g^2} \text{ (p. 514)},$$

$$aa' = \tfrac{1}{2}(as-a's) = \tfrac{1}{2}(a-a') = a - a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right)$$

$$= a \cdot \frac{x-y}{nxy-y}.$$

Mettant dans la proportion précédente à la place de $a\nu$, $\nu\tau$ et $aa'$ leurs valeurs, et cherchant celle de $a'f$, on aura

$$a'f = \frac{(nxy+x+y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \times a . \dfrac{x-y}{nxy-y}}{\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2(2nxy-x-y)^2+(nxy+x+y)^2\tfrac{4}{3}g^2}}$$

Prenant la valeur de $g'$ ou $g . \dfrac{nxy+x+y}{nxy-y}$ pour le premier terme du rapport et la moitié de $a'f$ pour le second terme, on trouvera que le sinus est au cosinus de l'angle cherché

$$:: \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy-x-y)^2+(nxy+x+y)^2 4g^2} : (x-y)\sqrt{a^2},$$

rapport qui conserve l'analogie ordinaire avec celui qui a été trouvé (p. 453) entre C$\lambda$ et $\lambda\vartheta$.

160. Passons à la détermination de l'incidence respective des faces Q$a$C, B$a$C. Si du sommet $s'$ (fig. 107) de l'axe du noyau hypothétique et du milieu $l$ de la diagonale $s'\lambda$ nous menons $s't$ et $lu$ perpendiculaires sur l'arête $a\lambda$, le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de l'angle qui donne l'incidence cherchée sera celui de $g'$ à $lu$ moitié de $s't$. Tout se réduit donc à trouver l'expression de cette dernière ligne. Or, les triangles semblables $as't$, $a\lambda\mu$ donnent

$$as' : s't :: a\lambda : \lambda\mu :: a\vartheta \text{ (fig. 105)} : \vartheta\sigma,$$

$$as' = as - ss' \text{(fig. 107)} = as - aa'$$

$$= a - a\left(\frac{x-y}{nxy-y}\right) \text{(p. 517)} = a . \frac{nxy-y}{nxy-x},$$

$$a\vartheta = \sqrt{(\vartheta\sigma)^2+(a\sigma)^2} = \sqrt{\left(\frac{nxy+x+y}{nxy+x}\right)\tfrac{4}{3}g^2+\left(\frac{nxy+x-2y}{3nxy+3x}\right)a}$$

Mettant, dans la proportion précédente, à la place de $as'$, $a\vartheta$ et $\vartheta\sigma$ leurs valeurs, et prenant celle de $s't$, on trouve

$$s't = \frac{\frac{nxy-x}{nxy-y} \cdot a\sqrt{(nxy+x+y)^2\frac{4}{3}g^2}}{\sqrt{(nxy+x-2y)^2\frac{1}{9}a^2+(nxy+x+y)^2\frac{4}{3}g^2}}.$$

Donc la valeur de $g'$ étant le premier terme du rapport et la moitié de celle de $s't$ étant le second, le sinus cherché sera au cosinus

$$:: \sqrt{(nxy+x-2y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy+x+y)^2 4g^2} : (nxy-x)\sqrt{a^2}.$$

Comparez ce rapport avec celui qui a été trouvé (p. 452) entre B$\omega$ et $\omega\mu$.

161. A mesure que $n$ diminue, l'angle que font entre elles les faces Q$a$C, B$a$C augmente, et il y a un terme où ces faces se trouvant sur un même plan, le dodécaèdre se trouve converti en rhomboïde. On peut aussi considérer ce rhomboïde comme le résultat d'un décroissement ordinaire par renversement sur les angles A.

Soit $adsg$ (fig. 109) la coupe principale du générateur, et soit $aor$ le triangle mensurateur relatif au rhomboïde dont il s'agit. Soit $n'$ la loi qui le produit par renversement. De plus, soit $as$ (fig. 110) le générateur, $gl$ et $fh$ les directions des bords des lames qui subissent le décroissement intermédiaire, lorsque le dodécaèdre s'est converti en rhomboïde; soit $gk$ une autre direction qui a lieu sur la face $agmn$. Dans ce cas $al=ak$. Or, $al=y$; donc $n=\frac{1}{ak}=\frac{1}{y}$.

On peut obtenir le même résultat en considérant que, dans le cas présent, le cosinus de la demi-incidence des faces $QaC$, $BaC$ (fig. 104) s'évanouit. Donc $(nxy-x)\sqrt{a^2}=0$ (p. 519), ou simplement

$$nxy-x=0;$$

donc

$$nxy=x,\ ny=1,\ \text{et}\ n=\frac{1}{y}.$$

Cherchons le rapport entre $ga$ ou $x$, et $al$ ou $y$, et menons auparavant $lk$, puis $gt$, au point où $lk$ coupe la diagonale $ad$. Soit $gt$ (fig. 109) la même ligne que fig. 110. Les triangles semblables $aor$, $atg$, donnent

$$ag : at :: or : ao :: n'\sqrt{g'^2+p'^2} : p'.$$

Mais $ag$ (fig. 109 et 110) $=x\sqrt{g'^2+p'^2}$, et $at$ renferme autant de fois $p'$ qu'il y a d'arêtes de molécule renfermées dans $al$; et puisque ce nombre d'arêtes est $y$, nous aurons $at=yp'$; donc nous aurons au lieu de $ag : at :: n'\sqrt{g'^2+p'^2} : p'$,

$$x\sqrt{g'^2+p'^2} : yp' :: n'\sqrt{g'^2+p'^2} : p',\ \text{ou}\ x : y :: n' : 1.$$

On voit combien il est facile de passer du décroissement ordinaire à celui qui est intermédiaire.

Soit $n'=\frac{3}{2}$ comme dans le cuivre gris mixte.

Alors $$x : y :: n' : 1 :: 3 : 2;$$

donc on peut faire $x=3$, $y=2$; donc $n'=\frac{1}{2}$.

Dans ce cas, le rapport entre le sinus et le cosinus de la demi-incidence des faces du rhomboïde est égal au rapport entre le sinus et le cosinus de celle des faces N$a$Q, C$a$Q (fig. 104); c'est-à-dire au rapport

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy-x-y)^2+(nxy+x+y)^2 4g^2} : (x-y)\sqrt{a'^2}.$$

Mais $g=\sqrt{1}$, $p=\sqrt{3}$, $a=\sqrt{24}$, $x=3$, $y=2$, $n=\frac{1}{2}$. Donc

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid.} : \text{cosin} :: \sqrt{8(6-5)^2+(3+5)^2 4} : \sqrt{24}$$
$$:: \sqrt{66} : \sqrt{6} :: \sqrt{11} : 1.$$

D'une autre part, dans un rhomboïde,

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid} : \cos :: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2-g^2}.$$

Or ici, $g=\sqrt{8}$, $p=\sqrt{3}$; donc

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid.} : \cos :: \sqrt{11} : \sqrt{1},$$

ce qui est le même rapport.

162. Le cas où $a\omega$ étant égale à $\omega s$, le dodécaèdre devient une double pyramide droite hexaèdre, peut aussi avoir lieu en vertu du décroissement dont il s'agit ici. On a alors

$$2nxy-x-y=nxy+x-2y,$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{2x-y}{xy}, \text{ au lieu de } n=\frac{x+2y}{xy} \text{ (p. 454)}.$$

Si l'on substitue cette valeur $\frac{2x-y}{xy}$ de $n$ dans celle de $a'$ qui est $a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right)$, on trouve $a'=a\left(\frac{0}{2x-2y}\right)$, ce qui doit être, puisqu'alors le noyau hypothétique s'évanouit.

Si $n$ diminue au-delà du terme qui donne la double pyramide, $a\omega$ deviendra plus petite que $\omega s$, et les faces N$a$Q, C$a$Q (fig. 104) feront entre elles de plus petits angles que les faces Q$a$C, B$a$C. En même temps le noyau hypothétique tournera ses diagonales obliques vers les arêtes $ds$, $ag$, et ses arêtes vers les diagonales $ad$, $sg$, comme on le voit figure 111.

La valeur de $g'$ sera la même que ci-dessus (p. 515), c'est-à-dire que $g'=g.\frac{nxy+x+y}{nxy-y}$.

Pour avoir celle de $p'$, on mettra $\omega s-a\omega$ à la place de $a\omega-\omega s$, ou $2x-y-nxy$ à la place de $nxy-2x+y$ (p. 515), et en suivant la même marche pour le calcul, on aura

$$a'=a.\frac{2x-y-nxy}{nxy-y}, \text{ ou } a=a'.\frac{nxy-y}{2x-y-nxy},$$

et

$$p'=\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x-y-nxy}{nxy-y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-y}\right)^2};$$

donc

$$g':p'::g:\sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2},$$

rapport qui diffère de celui que nous avons obtenu (p. 515), par le changement de signes des quantités qui forment le numérateur de la fraction multipliée par $\frac{1}{9}a^2$, ce qui est conforme à l'analogie des autres décroissemens.

En poursuivant le calcul, d'après la même substitution, on trouvera

$$N = \frac{x-y}{nxy-x} \text{ au lieu de } N = \frac{nxy-x}{x-y},$$

d'où l'on déduira $n = \frac{Nx+x-y}{Nxy}$.

Pour avoir l'expression de $n'$, on supposera que les côtés de la coupe principale $a'ns'\lambda$ (fig. 111) du noyau hypothétique se meuvent parallèlement à eux-mêmes en s'écartant de l'axe, jusqu'à ce que la coupe principale du générateur se trouve inscrite dans la précédente, comme le représente la fig. 112. Il est facile de juger, à la seule inspection de celle ci, que le décroissement relatif à $n'$ est censé agir par renversement sur l'angle supérieur de la face du générateur à laquelle appartient la diagonale *ad*.

Or, d'une part,

$$\lambda' r : ar :: \lambda\mu \text{ (fig. 111)} : a'\mu :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}a';$$

d'une autre part,

$$\lambda' r : ar \text{(fig. 112)} :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n'}{3} \cdot a \text{ (p. 317)};$$

donc

$$g : g' :: \frac{1-2n'}{n'+1} \cdot a : 2a'.$$

Mais

$$g' = g \cdot \frac{nxy+x+y}{nxy-y}, \text{ et } a' = a \cdot \frac{2x-y-nxy}{nxy-y}.$$

Si dans la proportion précédente on met à la place des rapports entre $g'$ et $g$, et entre $a'$ et $a$, ceux de leurs expressions algébriques, et que l'on dégage $n'$, on trouvera $n'=\frac{nxy-x+y}{2x}$, valeur qui est la même que celle qui a été trouvée (p. 517) pour le cas où $a\omega$ est plus grande que $\omega s$, parce que le décroissement se fait de part et d'autre sur l'angle A du générateur, en sorte qu'il ne tient qu'à la valeur de $n$ qu'il agisse d'une manière directe ou par renversement. Le premier cas aura lieu toutes les fois que $n$ sera plus grande que la quantité $\frac{2x-y}{xy}$ (p. 521) qui donne la double pyramide droite, et le second toutes les fois qu'elle sera plus petite.

Quant aux rapports entre les sinus et les cosinus des angles qui donnent les moitiés des incidences des faces du dodécaèdre, ils restent les mêmes que dans le cas de $a\omega$ plus grande que $\omega s$, par une raison semblable à celle que j'ai exposée page 458.

163. Si l'on s'en tient aux résultats admissibles en Cristallographie, l'hypothèse dans laquelle le noyau hypothétique serait semblable au générateur ne peut être réalisée par l'espèce de décroissement dont il s'agit ici. Car il est facile de voir que pendant toutes les variations de $x$, $y$ et $n$, qui modifient les angles du dodécaèdre secondaire, l'axe du noyau hypothétique ne pouvant surpasser en longueur celui du générateur, et d'une autre part la quantité $n\omega$

(fig. 197) ou $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$ étant toujours plus grande que *dr* (fig. 105) ou $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, il n'arrive jamais que les dimensions du noyau hypothétique soient en rapport avec celles du générateur. Cependant, comme le calcul conduit à des formules qui représentent ce dernier cas, j'ai cru qu'il ne serait pas inutile de faire connaître ce que signifient ces formules, et de donner ici un nouvel exemple de ces sortes d'excursions que font les théories, au-delà des limites tracées par les résultats de la nature.

Concevons que l'axe du noyau hypothétique soit égal à celui du générateur. Faisant $a' = a$, dans l'équation $a' = \frac{2x - y - nxy}{nxy - y}$, nous aurons

$$2x - y - nxy = nxy - y,$$

ce qui donne $n = \frac{1}{y}$. Si nous mettons cette valeur à la place de $n$, dans la quantité $(nxy - x)\sqrt{a^2}$ (p. 519) qui représente le cosinus de la moitié de l'angle que font entre elles les faces Q*a*C, B*a*C (fig. 104) du dodécaèdre secondaire, nous aurons pour résultat $(x - x)\sqrt{a^2}$, c'est-à-dire qu'alors le cosinus s'évanouissant, les deux faces dont il s'agit coïncident sur un même plan, en sorte que le dodécaèdre se trouve transformé en rhomboïde. Les faces du noyau hypothétique se confondent avec celles de ce rhomboïde, en sorte que le nombre de rangées soustraites désigné par N devient infini. Effectivement, si dans l'équation $N=\frac{x-y}{nxy-x}$ (p. 523), on substitue à $n$ sa valeur $\frac{1}{y}$, on trouve $N=\frac{x-y}{0}$, quantité infinie. Au-delà de ce terme, le point $\eta$ (fig. 111) continuant de monter, et le point $\lambda$ de descendre, les lignes $a\eta$, $a\lambda$ arrivent à la position horizontale. Dans ce cas $a\omega$ s'évanouit, c'est-à-dire que l'on a

$2nxy-x-y=0$ (p. 514), ce qui donne $n=\frac{x+y}{2xy}$.

Si l'on met cette valeur de $n$ dans l'équation

$$a'=a\,.\frac{2x-y-nxy}{nxy-y},$$

celle-ci devient $a'=3a$, ce qui doit être, parce qu'alors les lignes $a\eta$, $\lambda s$ devenant les perpendiculaires sur l'axe, dans le noyau hypothétique, il en résulte que les parties de cet axe situées l'une en dessus et l'autre en dessous de ces perpendiculaires sont égales à $as$ ou à l'axe du générateur.

164. Si $n$ continue de diminuer, les arêtes $a\eta$, $\lambda s$ se renversent pour s'incliner en sens contraire de la position qu'elles ont dans la figure, tandis que les arêtes $s\eta$, $s\lambda$ restent inclinées dans le même sens. C'est à un certain terme, compris dans ces variations, que le noyau hypothétique devient semblable au générateur, ainsi qu'on le voit (fig. 113). Dans ce cas, comme dans tous les autres, les arêtes telles que $a\gamma$, $s\gamma$ qui répondent à $a\eta$, $s\eta$ (fig. 114), continuent de satisfaire à la condition que leurs intersections se

confondent avec les angles solides du noyau hypothétique. C'est ce que nous allons vérifier à l'aide du calcul.

Le quadrilatère $\zeta\gamma\upsilon\pi$ (fig. 113) étant la coupe principale du noyau hypothétique, et *adsg* celle du générateur, menons $\gamma\varphi$ perpendiculaire sur l'axe $\zeta\upsilon$, et qui aura pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$. Soient $d\nu$ et $g\vartheta$ les lignes qui, dans le cas présent, répondent à celles que désignent les mêmes lettres (fig. 107). Par les points $a$, $\nu$ menons la ligne indéfinie $a\nu$, et désignons par $\gamma'$ le point, quel qu'il soit, où elle rencontre la perpendiculaire $\gamma\varphi$. Il s'agit de prouver que

$$\gamma'\varphi = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Puisque le noyau hypothétique est semblable au véritable, nous aurons

$$p'^2 = p^2 = \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y}\right) + \tfrac{1}{3}g^2,$$

et

$$9p^2 - 3g^2 = a^2 \cdot \left(\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y}\right)^2.$$

Or, $$9p^2 - 3g^2 = a^2.$$

Donc $$\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y} = 1\,;$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{x-2y}{2xy}.$$

Si l'on met le dernier membre à la place de $n$, dans les équations qui donnent les valeurs de $d\nu$ (p. 511),

$g\vartheta$ (p. 512), $g'$ et $a'$ (p. 522), elles deviennent

$$d\nu = \left(\frac{2x+2y}{x-2y}\right)\sqrt{g^2+p^2},\ g\vartheta = \frac{2y\cdot 2p}{3x-2y},\ g' = g\cdot\frac{3x}{x-4y},$$

et
$$a' = a\cdot\frac{3x}{x-4y}.$$

Menons $\nu\xi$ perpendiculaire sur $\zeta\upsilon$, nous aurons

$$a\xi : \nu\xi :: a\varphi : \gamma'\varphi.$$

Cherchons successivement $\nu\xi$, $a\xi$ et $a\varphi$.

1°. $\nu s : ds :: \nu\xi : dr$.

$$\nu s = \sqrt{g^2+p^2} + \frac{2x+2y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2} = \frac{3x}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2};$$

donc la proportion devient

$$\frac{3x}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2} : 1 :: \nu\xi : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc
$$\nu\xi = \frac{3x}{x-2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. $a\xi = s\xi - as$.

$$s\xi : rs :: \nu\xi : dr,\quad \text{ou}\quad s\xi : \tfrac{1}{3}a :: \frac{3x}{x-2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc
$$s\xi = \frac{ax}{x-2y};$$

donc
$$a\xi = \frac{ax}{x-2y} - a = \frac{2ay}{x-2y}.$$

3°. $a\varphi = a\zeta - \varphi\zeta = \frac{1}{2}a' - \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a' = \frac{a'-3a}{6}$;

donc la proportion $a\xi : \nu\xi :: a\varphi : \gamma'\varphi$ devient

$$\frac{2ay}{x-2y} : \frac{3x}{x-2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \frac{a'-3a}{6} : \gamma'\varphi;$$

ce qui donne

$$\gamma'\varphi = \frac{a' - 3a}{12 \cdot ay} \times 3x \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Et mettant à la place de $a'$ sa valeur $a \cdot \frac{3x}{x - 4y}$,

$$\gamma'\varphi = \frac{3x}{x - 4y} \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Mais $$g' = g \cdot \frac{3x}{x - 4y},$$

ou $$\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \cdot \frac{3x}{x - 4y};$$

donc $$\gamma'\varphi = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Donc les points $\gamma'$ et $\gamma$ se confondant, la ligne $a\nu$ prolongée passe par l'angle solide $\gamma$ du noyau hypothétique.

Maintenant $dn$, prolongement de $ad$, étant l'analogue de $g\vartheta$, il faut encore prouver que si, par les points $s$, $n$, on mène une ligne indéfinie, laquelle répond à l'arête $sn$ (fig. 111), le point $\gamma''$ (fig. 113), quel qu'il soit, où elle rencontrera la ligne $\gamma\varphi$, se confondra avec les points $\gamma'$, $\gamma$; ou, ce qui revient au même, il faut prouver que la ligne indéfinie menée par les points $a$, $\vartheta$, et qui répond à $a\lambda$ (fig. 107), va couper la perpendiculaire $\pi\sigma$ (fig. 113) sur l'axe du noyau hypothétique, en un point $\pi'$ qui se confond avec le point $\pi$, en sorte que l'on aura

$$\pi'\sigma = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Si nous menons $\vartheta\pi$ perpendiculaire sur l'axe $as$, nous aurons $a\pi : \vartheta\pi :: a\sigma : \pi'\sigma$.

Cherchons successivement $\vartheta\pi$, $a\pi$ et $a\sigma$.

1°. $sg : s\vartheta = sg + g\vartheta :: gu : \vartheta\pi$,

ou

$$1 : 1 + \frac{2y}{3x - 2y} :: \sqrt{\tfrac{3}{4}g^2} : \vartheta\pi = \frac{3x}{3x - 2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. $a\pi = as - s\pi$, $sg : s\vartheta = sg + g\vartheta :: su : s\pi$,

ou

$$1 : 1 + \frac{2y}{3x - 2y} :: \tfrac{2}{3}a : s\pi = \frac{2ax}{3x - 2y};$$

donc

$$a\pi = a - \frac{2x}{3x - 2y}\cdot a = a\left(\frac{x - 2y}{3x - 2y}\right).$$

3°. $a\sigma = av - \sigma v$,

$$av = sv + as = \tfrac{1}{2}a' - \tfrac{1}{2}a + a = \frac{a' + a}{2};$$

donc

$$a\sigma = \frac{a' + a}{2} - \tfrac{1}{3}a' = \frac{a' + 3a}{6};$$

donc la proportion $a\pi : \vartheta\pi :: a\sigma : \pi'\sigma$ devient

$$a\cdot\frac{x - 2y}{3x - 2y} : \frac{3x}{3x - 2y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \frac{a' + 3a}{6} : \pi'\sigma = \frac{3x}{a(x - 2y)}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \times \frac{a' + 3a}{6}.$$

Et mettant à la place de $a'$ sa valeur $a\cdot\frac{3x}{x - 4y}$,

$$\pi'\sigma = \frac{3x}{x - 4y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2},$$

ce qui est l'expression de $\pi\sigma$ ou $\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}$. Donc les points $\pi'$ et $\pi$ se confondent.

165. Je n'ai rencontré jusqu'ici aucun exemple d'un décroissement intermédiaire sur A. Mais pour avoir une application au moins hypothétique des résultats précédens, choisissons d'abord le cas où $a\omega$ est plus grande que $\omega s$, et faisons $g = \sqrt{3}, p = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{9}$, comme dans le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et $x = 5$, $y = 1$, $n = 3$.

Dans le cas où le solide secondaire que je supposerai être représenté par la figure 104, tourne ses faces les plus inclinées vers les rhombes du générateur, on trouvera $g' : p' :: \sqrt{47} : \sqrt{53}$, ce qui donne pour les angles plans du rhomboïde hypothétique $118^d\ 2'\ 4''$, et $61^d\ 57'\ 56''$. On aura, dans la même hypothèse, $N = \frac{5}{2}$ et $n' = \frac{3}{5}$. Le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de l'angle qui mesure la plus grande inclinaison des faces du dodécaèdre sera celui de $\sqrt{195} : \sqrt{4}$, d'où il suit que l'angle dont il s'agit est de $163^d\ 41'\ 54''$. Le rapport analogue, pour la plus petite inclinaison, sera celui de $\sqrt{174}$ à 5, et l'on aura pour cette inclinaison $138^d\ 28'\ 54''$.

Dans le cas de la double pyramide droite hexaèdre, on trouvera $n = \frac{9}{5}$.

Si l'on suppose ensuite que $a\omega$ soit plus petite que $\omega s$, ou, ce qui revient au même, que le dodécaèdre tourne ses faces les moins inclinées vers les faces du générateur, et si, en continuant de faire

$$g = \sqrt{3},\ a = 3,\ x = 5,\ y = 1,$$

on désigne $n$ par la fraction $\frac{6}{5}$, on trouvera

$$g' : p' :: \sqrt{48} : \sqrt{17},$$

et pour les angles du rhombe qui dépend de ce rapport, $118^d\ 29'\ 4''$, et $61^d\ 30'\ 56''$; pour N le nombre 4, et pour $n'$ la fraction $\frac{1}{5}$, sur quoi il est à remarquer que le rhomboïde produit par le décroissement inverse que désigne cette fraction est semblable à celui qui résulterait d'un décroissement direct par deux rangées sur l'angle A du générateur; car la formule $n = \frac{2 - n'}{4n' + 1}$ (p. 319) donne, dans ce cas,

$$n = \frac{2 - \frac{1}{5}}{\frac{4}{5} + 1} = 1.$$

Le rapport entre le sinus et le cosinus de l'angle qui mesure la plus grande inclinaison des faces du dodécaèdre secondaire sera celui de $\sqrt{219} : 1$, ce qui donne pour cette inclinaison $172^d\ 16'\ 6''$, et le rapport correspondant, pour la plus petite inclinaison, sera celui de $\sqrt{51}$ à 2, d'où l'on conclura que cette dernière inclinaison est de $148^d\ 42'\ 34''$.

J'ai choisi le rapport 5 à 1 pour celui de $x$ à $y$, parce qu'il donne des quantités positives pour l'axe du noyau hypothétique et pour les autres lignes qu'il s'agit d'évaluer, lorsque l'on veut pousser les applications du calcul jusqu'aux résultats de pure curiosité dont j'ai parlé (p. 525 et suiv.). Ainsi, dans le cas où le noyau hypothétique devient semblable au générateur, comme on le voit (fig. 113), on trouve

$$dv \text{ ou } \frac{2x+2y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2}=4\sqrt{5},\ g\vartheta, \text{ ou } \frac{2y}{3x-2y}\cdot\frac{2p}{}=\tfrac{2}{13}\sqrt{8},$$

$$g' \text{ ou } g.\frac{3x}{x-4y}=15\sqrt{3}, \text{ et } a' \text{ ou } a.\frac{3x}{x-4y}=15\times 3.$$

Si l'on fait $x=4$, $y=1$, on trouve $dv=5\sqrt{g^2+p^2}$,

$$g\vartheta=\tfrac{1}{5}.2p, \text{ et } a'=a.\frac{12}{0},$$

c'est-à-dire qu'alors l'axe du noyau hypothétique devient infini. En voici la raison. Nous avons, dans le cas présent, $ad : dv :: 2p : 5\sqrt{g^2+p^2}$, et

$$g\vartheta : ag :: \tfrac{1}{5}.2p : \sqrt{g^2+p^2} :: 2p : 5\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc les triangles $adv$, $\vartheta ga$ étant semblables, les lignes $a\pi'$, $a\gamma'$ d'une part, et $s\gamma'$, $s\pi'$ de l'autre, coïncident sur une même direction, d'où il suit que $a\gamma'$ devenant parallèle à $s\gamma'$ et $a\pi'$ à $s\pi'$, les points de concours de ces lignes, ou, ce qui revient au même, les angles $\gamma$, $\pi$ du noyau hypothétique sont censés être à une distance infinie de l'axe $as$. Donc l'axe $\zeta v$ devient lui-même une quantité infinie.

166. Je terminerai la théorie des décroissemens intermédiaires relatifs au rhomboïde, par la solution d'un problème analogue à celui qui nous a occupés pages 416 et suivantes. Dans ce dernier, j'ai supposé un dodécaèdre produit par un décroissement quelconque sur les bords inférieurs d'un rhomboïde pris pour générateur, et j'ai prouvé que l'on pouvait con-

sidérer dans ce dodécaèdre plusieurs noyaux hypothétiques, dont chacun était également susceptible de lui donner naissance. Mais les décroissemens qui se rapportaient à ces divers noyaux étaient de ceux qui ont lieu, d'après les lois ordinaires, soit sur les bords B ou D, soit sur les angles E, A ou *e*. Le problème dont il s'agit ici est d'une beaucoup plus grande généralité, en ce que l'on peut assigner aux faces du rhomboïde hypothétique une infinité de positions, dans chacune desquelles la loi qui en fait dépendre le dodécaèdre est du nombre des lois intermédiaires.

Voici donc l'énoncé du problème : Etant donné le rapport $g:p$ entre les demi-diagonales d'un rhomboïde considéré comme générateur, l'exposant N du décroissement qui produit un dodécaèdre, en agissant sur les bords D du générateur, et le rapport $g':p'$ entre les demi-diagonales d'un noyau hypothétique quelconque qui soit seulement une forme secondaire relativement au générateur, prouver qu'au défaut d'une loi ordinaire il y en aura toujours une intermédiaire susceptible de produire le dodécaèdre, comme forme secondaire dérivée du noyau hypothétique, et déterminer les quantités $x$, $y$ et $n$, dont les deux premières représentent les nombres de molécules soustraites sur l'angle du noyau hypothétique, auquel se rapporte le décroissement, et la troisième le nombre de rangées soustraites, en vertu du même décroissement.

167. Soient *bsh*, *gsh* (fig. 115), deux faces du dodécaèdre limitées par un plan horizontal *bhg*, et par un plan vertical *bsg*. Supposons d'abord que *hs* soit une des arêtes les plus saillantes. Soit *uht* la section de la face du noyau hypothétique, laquelle est tournée vers *hs*. Il est facile de concevoir que, dans le cas présent, le dodécaèdre est censé résulter d'un décroissement sur les angles E du noyau hypothétique, de manière que $x$ est dans le sens de D, et $y$ dans le sens de B. Mais nous verrons que les formules auxquelles on parvient s'appliquent également soit au cas où $x$ serait dans le sens de B, soit à celui où le décroissement agirait sur un autre angle A ou *e*.

Concevons que *bh*, *ho* soient deux perpendiculaires sur l'axe du dodécaèdre, puis menons *bg*, *tu*, ensuite *sc* perpendiculaire sur *bg*, et *hz* à la rencontre de *tu* et de *sc*.

Soit $bo = m \cdot ho$, $m$ étant une quantité que nous déterminerons bientôt. L'angle *boc* étant de $60^d$, on aura

$$oc = \tfrac{1}{2} bo = \tfrac{1}{2} m \cdot ho,$$

$$bc = \sqrt{(bo)^2 - (oc)^2} = \sqrt{m^2 \cdot (ho)^2 - \tfrac{1}{4} m^2 \cdot (ho)^2}$$
$$= m \cdot ho \sqrt{\tfrac{3}{4}},$$

$$ch = ho - oc = ho - \tfrac{1}{2} m \cdot ho = \frac{2 - m}{2} \cdot ho;$$

donc $$ho = \frac{2 \cdot ch}{2 - m}.$$

Mettant cette valeur à la place de *ho* dans l'équation $bc = m \cdot ho \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$, on aura

$$bc = \frac{ch \cdot m}{2 - m} \sqrt{3}.$$

Supposons que $cz$ représente le tiers de l'axe du noyau hypothétique; nous aurons

$$cz = \tfrac{1}{3} a' \text{ et } ch = \sqrt{\tfrac{1}{3} g'^2}.$$

Soit $sz = ra'$, $r$ étant une quantité que nous déterminerons plus bas : nous aurons

$$cs = \tfrac{1}{3} a' + ra'.$$

Or, les triangles semblables $suz$, $sbc$ donnent

$$sz : sc :: uz : bc, \text{ ou } ra' : \frac{a' + 3ra'}{3} :: uz : g' \cdot \frac{m}{2 - m};$$

d'où l'on tire

$$uz = \frac{3r \cdot g'm}{(3r + 1)(2 - m)}.$$

D'une autre part, il est évident qu'à cause de $ch = \sqrt{\frac{1}{3} g'^2}$, on a

$$hz = p';$$

donc

$$hz : uz :: p' : \frac{3r \cdot g'm}{(3r + 1)(2 - m)} :: (3r + 1)(2 - m)p' : 3r \cdot g'm.$$

168. Soit $amnh$ (fig. 116) le rhombe dont le triangle $uht$ (fig. 115) fait partie. Nous aurons

$$ah \text{ (fig. 116) } : au :: x : y.$$

Soit $ah = x$, $au = y$; $hz$ renferme autant de diagonales obliques de molécule qu'il y a d'arêtes de molécule contenues dans $ah+au$, et $uz$ répond à autant de diagonales horizontales de molécule qu'il y a d'arêtes de molécule comprises dans ........., $um=am-au=ah-au$. Donc

$$hz : uz :: (x+y)p' : (x-y)g';$$

donc

$$x+y : x-y :: (3r+1)(2-m) : 3r.m.$$

Mais $x : y$ comme la somme des quantités $x+y$ et $x-y$ est à leur différence; donc nous aurons aussi

$$\begin{aligned} x:y &:: (3r+1)(2-m)+3r.m : (3r+1)(2-m)-3r.m \\ &:: 6r-m+2 : 6r-m+2-6mr. \end{aligned}$$

Or, la quantité $m$, qui exprime le rapport entre $bo$ et $ho$ (fig. 115) est évidemment une quantité rationnelle, puisque ces deux lignes sont en rapport commensurable avec la diagonale $g$; d'une autre part, le noyau hypothétique étant une des formes secondaires dérivées du générateur, son axe $a'$ est en rapport commensurable avec l'axe $a$ du générateur, et par conséquent la quantité $r$ qui exprime le rapport entre $sz$ et $a'$ est aussi une quantité rationnelle; donc le rapport entre $x$ et $y$ sera toujours lui-même un rapport rationnel. Dailleurs on a

$$n=\frac{Ny+x+y}{Nxy} \text{(p. 449)},$$

expression dans laquelle tout est rationnel. Donc, il y aura toujours une loi admissible de décroissement, en vertu de laquelle le dodécaèdre pourra être produit par le générateur.

169. Déterminons maintenant $r$ et $m$.

1°. Pour $r$. Soit $adsg$ (fig. 117) la coupe principale du générateur, et $dp$, $du$, $pg$, $gu$, quatre arêtes du dodécaèdre, situées dans le même plan que $adsg$. Nous aurons

$$gn : np :: ch(\text{fig. } 115) : se :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{a'}{3}(3r+1)$$
$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : an+ap = \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1}\cdot a = \frac{N+2}{3N-3}\cdot a.$$

D'où l'on tire

$$g' : a'(3r+1) :: 2g : \frac{N+2}{N-1}\cdot a, \text{ et } r = \frac{N+2}{2(3N-3)}\cdot\frac{ag'}{ga'} - \tfrac{1}{3}.$$

2°. Pour $m$. Ayant prolongé $gn$ (fig. 117) jusqu'à la rencontre de $dp$, nous aurons

$$gn : kn :: ho(\text{fig. } 115) : bo :: ho : m \cdot ho :: 1 : m.$$

D'une autre part,

$$gn : kn (\text{fig. } 117) :: dr : kn :: pr : pn :: \tfrac{2}{3}a + \frac{1}{N-1}\cdot a$$
$$: \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1}\cdot a :: 2N+1 : N+2;$$

donc

$$1 : m :: 2N+1 : N+2,$$

ce qui donne

$$m = \frac{N+2}{2N+1}.$$

170. Supposons maintenant que *hs* (fig. 115) soit une des arêtes les moins saillantes. On aura toujours

$$x : y :: 6r - m + 2 : 6r - m + 2 - 6mr.$$

Mais dans le calcul relatif à la détermination de $r$, nous aurons au lieu de $gn : np$ (fig. 117) :: $ch : sc$ (fig. 115),

$$dr : pr \text{ (fig. 117)} :: ch : sc \text{ (fig. 115)} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{a'}{3}(3r+1)$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : ar + ap \text{ (fig. 117)} = \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1} \cdot a = \frac{2N+1}{3N-3}.$$

Donc

$$g' : a'(3r+1) :: 2g : \frac{2N+1}{N-1};$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{2N+1}{2(3N-3)} \cdot \frac{ag'}{ga'} - \tfrac{1}{3};$$

quantité qui ne diffère de la première que par la substitution de $2N+1$ à $N+2$ dans le numérateur du premier terme.

D'une autre part, dans le calcul relatif à la détermination de $m$, nous aurons $dr : r\pi$ ou au prolongement de $dr$ jusqu'à la rencontre de celui de $pg$

$$:: ha \text{ (fig. 115)} : bo;$$

ou

$$gn : r\pi :: ho : bo \text{ (fig. 115)} \; ho : m \,.\, ho :: 1 : m.$$

D'une autre part,

$$gn : r\pi \text{ (fig. 117)} :: pn : pr :: \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1} \cdot a : \tfrac{2}{3}a + \frac{1}{N-1} \cdot a$$

$$:: N+2 : 2N+1;$$

donc

$$1 : m :: N+2 : 2N+1 ;$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{2N+1}{N+2},$$

quantité qui est le renversement de la première.

171. Les formules précédentes se rapportent immédiatement, ainsi que je l'ai dit, aux décroissemens intermédiaires sur E, dans lesquels $x$ coïncide avec D et $y$ avec B. Mais elles ont cet avantage, que quand on y a substitué, à la place de $a$, $g$, $a'$, $g'$, N, leurs valeurs numériques, elles font connaître si elles continuent de s'appliquer à l'espèce de décroissement dont je viens de parler, ou si c'est un autre décroissement qui est le sujet du problème, et de plus elles indiquent ce décroissement. Tout ce qui regarde ces diverses applications dont elles sont susceptibles est renfermé dans les quatre règles suivantes, qui se déduisent des changemens que subissent $x$ et $y$ dans le passage des formules relatives aux décroissemens sur E, dans lesquels $x$ coïncide avec D, à celles qui concernent les autres décroissemens. Pour plus grande simplicité, je représenterai par le rapport de $s$ à $t$ celui des quantités numériques qui répondent à

$$6r - m + 2 \text{ et } 6r - m + 2 - 6mr,$$

en sorte que, par l'hypothèse, on aura en général,

$$x : y :: s : t.$$

1°. Si $s$ est plus grande que $t$, et si l'une et l'autre sont positives, le décroissement aura lieu sur E, $x$ étant dans le sens de D, et il n'y aura aucun changement à faire au rapport de $s$ à $t$.

2°. Si $s$ est plus petite que $t$, auquel cas l'une et l'autre seront encore positives, le décroissement aura lieu sur E, $x$ étant dans le sens de B, et $y$ dans le sens de D; alors on renversera le second rapport, en faisant $x : y :: t : s$.

3°. Si $t$ est négative, ce sera l'indice d'un décroissement sur $e$. Dans ce cas, on se bornera à changer le signe de $t$.

4°. Si $s$ est négative, le décroissement aura lieu sur A. Alors on mettra $s$ à la place de $t$, et $-t$ à la place de $s$, c'est-à-dire qu'au lieu de $x : y :: -s : t$, on fera $x : y :: t : s$. Je vais faire quelques applications relatives à ces différens cas.

172. Supposons d'abord que le générateur étant le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et le dodécaèdre étant le résultat du décroissement $\overset{3}{D}$, on prenne pour noyau hypothétique un rhomboïde semblable à la chaux carbonatée équiaxe, et que l'on demande la loi du décroissement intermédiaire en vertu de laquelle ce noyau produirait le dodécaèdre, avec la condition que les arêtes les plus saillantes de ce dernier fussent tournées vers les faces du même noyau.

Nous aurons $g=\sqrt{3}$, $a=3$, $N=3$, $g'=\sqrt{12}$, $a'=3$.

Par conséquent

$$r = \frac{N+2}{2(3N-5)} \cdot \frac{ag'}{ga'} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2},$$

et
$$m = \frac{N+2}{2N+1} = \tfrac{5}{7}.$$

Donc

$$x : y :: 6r + 2 - m : 6r + 2 - m - 6mr :: 2 : 1;$$

donc le décroissement a lieu sur les angles E, $x$ étant dans le sens de D, et $y$ dans le sens de B. De plus,

$$n = \frac{Ny + x + y}{Nxy} = 1;$$

donc il a lieu par une rangée de molécules doubles.

Il existe une variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *isométrique*, et qui est représentée fig. 118, dans laquelle les faces λ, λ qui appartiennent au décroissement $\overset{3}{D}$ se combinent avec les faces $g, g'$, du noyau hypothétique, en sorte que ces dernières, qui sont dominantes, impriment au cristal l'empreinte de ce noyau. Ainsi le signe est $\underset{\lambda}{\overset{3}{D}}\ \underset{g}{\overset{1}{B}}$.

Si l'on cherche, à l'aide des formules ordinaires, les incidences respectives des faces du dodécaèdre, on trouvera pour celle de λ sur λ, ou de λ' sur λ', 155ᵈ44′29″, et pour celle de λ sur λ″, 101ᵈ52′26″. Il sera de même facile de déterminer celle de $g$ sur λ ou sur λ', laquelle est de 134ᵈ49′54″.

173. Imaginons que les choses restant d'ailleurs

dans le même état, la seule différence consiste en ce que le noyau hypothétique soit placé de manière que ses faces correspondent aux arêtes les moins saillantes du dodécaèdre. Dans cette hypothèse, on aura

$$r = \frac{2N+1}{2(3N-3)}\frac{ag'}{ga'} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6};\ m = \frac{2N+1}{N+2} = \frac{7}{5};$$

et

$$x : y :: 6r+2-m : 6r+2-m-6mr :: 4 : -1;$$

ce qui indique un décroissement sur l'angle $e$.

On fera donc $x=4$, $y=1$. Mais $N=3$. Donc la formule $n = \frac{Nx-Ny-y}{xy}$ (p. 498) deviendra $n=2$. On pourra vérifier ce résultat, en supposant que le rhomboïde équiaxe fasse la fonction de générateur, et en cherchant dans cette hypothèse le rapport entre les demi-diagonales $g'$ et $p'$ du noyau hypothétique. Faisant donc $g=\sqrt{12}$, $a=3$, $n=2$, $x=4$, $y=1$, on aura (p. 497)

$$g' : p' :: g : \sqrt{\frac{\frac{1}{9}a^2(nxy-x+2y)^2}{nxy-x-y}} :: \sqrt{12} : \sqrt{8} :: \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

ainsi que cela doit être, puisque c'est le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée qui est censé faire la fonction de noyau hypothétique.

176. Prenons pour générateur un rhomboïde dans lequel on aurait $g=\sqrt{48}$, $p=\sqrt{17}$, ce qui donne $a=3$. Supposons de plus $N=4$, et proposons-nous de déterminer la loi en vertu de laquelle

le dodécaèdre serait produit par le rhomboïde de $104^{d}\frac{1}{2}$, considéré de nouveau comme noyau hypothétique. Nous aurons $g' = \sqrt{3}$, et $a' = 3$. Choisissons le cas où les arêtes les plus saillantes du dodécaèdre seraient tournées vers les faces du noyau dont nous venons de parler.

Dans cette supposition,

$$r = \frac{N+2}{2(3N-3)} \cdot \frac{ag'}{ga'} - \tfrac{1}{3} = -\tfrac{1}{4}; \quad \text{et} \quad m = \frac{N+2}{2N+1} = \tfrac{2}{3}.$$

D'après cela, on trouve par la formule ci-dessus (p. 537) $x : y :: -1 : 5$, ce qui indique un décroissement sur A. Ainsi il faudra faire $x : y :: 5 : 1$. La formule relative à $n$ (p. 523) donnera

$$n = \frac{Nx + x - y}{Nxy} = \tfrac{6}{5}.$$

Ces résultats ne sont autre chose qu'une inversion de ceux qui ont été exposés (p. 532), et dans lesquels le rhomboïde de $104^{d}\frac{1}{2}$ a été pris pour générateur; tandis que celui qui a ses demi-diagonales dans le rapport de $\sqrt{48}$ à $\sqrt{17}$ a fait la fonction de noyau hypothétique.

177. Pour faire une nouvelle application, choisissons le dodécaèdre résultant du prolongement des faces $\lambda$, $\lambda$ (fig. 118), qui appartiennent à la chaux carbonatée isométrique (p. 542). Ce dodécaèdre est représenté séparément (fig. 119). Si nous prenons pour noyau hypothétique le rhomboïde inverse de

la même substance, et si nous lui donnons sa position naturelle, relativement au générateur, il est facile de voir que ses faces seront tournées vers les arêtes les plus saillantes, telles que $\varepsilon$, du dodécaèdre.

Cela posé, nous aurons $g=\sqrt{3}$, $a=3$, $N=3$, $g'=\sqrt{3}$, $a'=6$; donc

$$r=\frac{N+2}{2(3N-3)}\cdot\frac{ag'}{ga'}-\tfrac{1}{3}=-\tfrac{1}{8}, \text{ et } m=\frac{N+2}{2N+1}=\tfrac{5}{7}.$$

Donc la proportion $x:y::6r-m+2:6r-m+2-6mr$ deviendra $x:y::1:2$, d'où l'on conclura que le décroissement intermédiaire agit sur les angles E du rhomboïde inverse, de manière que $x$ coïncide avec B, et $y$ avec D. Faisant donc $x=2$, $y=1$, nous aurons

$$n=\frac{Nx+x+y}{Nxy}\,(\text{p. } 485)=\tfrac{3}{2}.$$

178. Tout restant d'ailleurs dans le même état, substituons au dodécaèdre qui résulte du décroissement $\overset{3}{\mathrm{D}}$, le métastatique dont le signe est $\overset{2}{\mathrm{D}}$, auquel cas nous aurons $N=2$.

Dans cette hypothèse, on trouve

$$r \text{ ou } \frac{N+2}{2(3N-3)}\cdot\frac{ag'}{ga'}-\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}=0,$$

ce qui fait connaître que, dans ce cas, on a aussi

$$sz\ (\text{fig. } 115)=0;$$

d'où il suit que le point $z$ se confond avec le sommet $s$, et que la diagonale du noyau hypothétique est parallèle à l'arête $hs$. Si l'on fait $r=0$, dans le rapport de $x$ à $y$, on aura $x : y :: 2-m : 2-m$, ou $x=y$, d'où l'on conclura que le décroissement qui donne le dodécaèdre est du nombre des décroissemens ordinaires sur les angles E. Pour avoir $n$, on peut choisir à volonté entre la formule $n=\frac{Ny+x+y}{Nxy}$ (p. 449), relative au cas où $x$ est dans le sens de D, et la formule $n=\frac{Nx+x+y}{Nxy}$ (p. 485), qui se rapporte au cas où $x$ est dans le sens de B. L'une et l'autre donneront $n=2$.

Nous avons présenté plus haut le même problème, sous une autre forme (p. 430), en cherchant la loi en vertu de laquelle le dodécaèdre métastatique serait produit par un noyau hypothétique dont les faces seraient parallèles aux arêtes les plus saillantes de ce dodécaèdre. Nous avons eu alors pour la valeur de $n$ l'unité, c'est-à-dire une quantité sous-double de celle que nous venons de trouver, parce que $n$ désignait le nombre des diagonales soustraites, au lieu qu'ici il indique le nombre de rangées soustraites.

179. Les résultats précédens peuvent être employés avec avantage pour faciliter et simplifier la détermination des formes qui dépendent des décroissemens intermédiaires. Supposons, par exemple, qu'ayant observé la chaux carbonatée numérique (fig. 81), on ait reconnu que le rhomboïde dont elle porte l'empreinte est celui de la chaux carbo-

natée équiaxe, ce qui est d'autant plus aisé que l'on peut mesurer immédiatement les incidences des faces de ce rhomboïde. On cherchera la loi de décroissement en vertu de laquelle le dodécaèdre auquel appartiennent les faces $y, y$, serait produit par le rhomboïde dont il s'agit. Cette loi, comme nous l'avons vu, a pour exposant $\frac{5}{3}$. On considérera ensuite le même rhomboïde comme étant le générateur, et le rhomboïde primitif comme étant le noyau hypothétique, et appliquant ici les formules qui donnent le rapport entre $x$ et $y$ (p. 539), et les valeurs de $m$ et de $r$, dans le cas où le dodécaèdre tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du noyau hypothétique, on fera $g = \sqrt{12}$, $a = 3$, $N = \frac{5}{3}$, $g' = \sqrt{3}$, $a' = 3$, ce qui donnera $r = \frac{1}{8}$, $m = \frac{11}{13}$, et $x : y :: 3 : 2$. Mettant à la place de N, $x$ et $y$, leurs valeurs numériques, dans la formule $n = \frac{Ny + x + y}{Nxy}$, on trouvera $n = \frac{5}{6}$, et l'on sera ainsi parvenu par une méthode indirecte, mais expéditive, à un résultat qui aurait pu exiger de longs tâtonnemens, si l'on avait cherché immédiatement la loi du décroissement intermédiaire.

### *De diverses formes secondaires dérivées du rhomboïde.*

Parmi les nombreuses variétés de formes originaires du rhomboïde, que nous offre la cristallisation, surtout dans l'espèce de la chaux carbonatée, j'ai choisi, pour les résultats que j'avais à exposer, celles qui m'ont paru se prêter le mieux aux applications de la théorie dont ces résultats ont été les sujets. Je vais en décrire encore quelques-unes qui n'ont point trouvé place dans les articles précédens, et que je crois dignes de l'attention des géomètres.

180. La première, qui appartient à la chaux carbonatée, porte le nom d'*analogique*, à cause des propriétés qui mettent en rapport ses différentes parties, soit entre elles, soit avec d'autres formes remarquables par leur symétrie, comme celles qui offrent des angles droits, ou des angles de 60 degrés. Les figures 121 et 122 représentent cette variété dont le signe rapporté au noyau (fig. 120) est $\overset{2}{e}\overset{2}{D}B$. Sa

$c \; r \; \overset{1}{g}$

limite géométrique est celle que montre la fig. 121, où toutes les faces sont des quadrilatères; mais il arrive assez souvent que les unes prennent respectivement plus d'étendue que les autres, d'où résultent diverses modifications accidentelles; dans celle que l'on voit (fig. 122) le cristal est censé avoir subi, dans le sens de son axe, un allongement qui change les trapézoïdes $c$, $c'$ (fig. 121) en hexagones.

Les différentes faces qui composent la surface de cette variété sont situées si avantageusement, que la connaissance acquise d'ailleurs des angles que forment entre elles celles d'un même ordre, suffirait pour vérifier les lois d'où dépend la forme du cristal. Mais en faisant abstraction de cette connaissance, je me propose de déterminer ici d'abord les angles plans du cristal ramené à sa limite, et ensuite les incidences des faces d'un ordre sur celles de l'ordre voisin.

Soit *criz* (fig. 123) une des faces verticales *c* (fig. 121), *cγpr*, *cεsz* (fig. 123) deux des faces *r* (fig. 121) qui appartiennent au cristal métastatique, et *γcεm* (fig. 123) une des faces *g* de l'equiaxe. Soient de plus *dof*, *qof*, *duf*, *quf* (fig. 123) quatre faces du cristal métastatique supposé complet. Menons l'axe *ou*, les deux diagonales *ci*, *rz* du trapézoïde *criz*, la grande diagonale *γr* du trapézoïde *cγpr*, et les deux *cμ*, *γε* du trapézoïde *γcεμ*.

Commençons par *criz*. Les points *r*, *z* étant situés au milieu des arêtes *df*, *qf*, qui sont communes au cristal métastatique et au noyau, il est évident que $rz = g = \sqrt{3}$.

Donc $rh = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Soit *h* (fig. 124) le même point que figure 123. Si nous menons *hc* parallèle à l'axe, cette ligne sera aussi la même que figure 123. Or, le point *h* (fig. 124) est situé au $\frac{1}{4}$ de la diagonale oblique *ft*; donc $fh = \frac{1}{2}p$. Mais $fh : ft :: hc : to$. De plus $to = 2a = 6$; donc la proportion devient

$$\tfrac{1}{2} : 2 :: hc : 6 ;$$

donc $hc = \frac{3}{2}$; donc (fig. 123) $rh : hc :: \sqrt{\frac{3}{4}} : \frac{3}{2} :: 1 : \sqrt{3}$; donc le triangle *rcz* est équilatéral.

D'une autre part, *hi* (fig. 124) est égale à la même ligne (fig. 123), et en comparant les triangles semblables *fhi*, *ftu*, on en conclura que $hi = \frac{1}{4} tu = \frac{3}{4}$; donc *hi* (fig. 123) $= \frac{1}{2} hc$. D'après ces données on aura $rcz = 60^d$, $cri$ ou $czi = 100^d\ 53'\ 37''$; $riz = 98^d\ 12'\ 46''$ (1).

Déterminons, en second lieu, le trapézoïde $\gamma c \varepsilon \mu$. Soient $ou$, $of$, $uf$, $c\mu$ (fig. 125), les mêmes lignes que figure 123; par le point $\zeta$ (fig. 125), qui est le même que figure 123, menons $o\zeta$ prolongée indéfiniment. Cette ligne est évidemment dans le plan $\gamma o \varepsilon$ (fig. 123), ou, ce qui revient au même, dans le plan $doq$; donc elle passe par le milieu de la diagonale qui va de $d$ en $q$. Soit $\vartheta$ (fig. 125) ce point du milieu. Menons $\vartheta\varphi$, $c\sigma$, $\zeta\nu$ perpendiculaires sur l'axe, puis $\zeta\tau$ perpendiculaire sur $c\sigma$. Il s'agit de faire voir que $c\zeta = 2\zeta\mu$.

Les triangles semblables $c\tau\zeta$, $c\sigma\mu$ donnent

$$c\tau : \tau\sigma :: c\zeta : \zeta\mu.$$

Donc on aura $c\zeta = 2\zeta\mu$, s'il est prouvé que $c\tau = 2\tau\sigma$. Cherchons successivement les valeurs de $c\tau$ et de $\tau\sigma$.

1°. Pour $c\tau$. $c\tau = c\lambda + \lambda\tau$.

$c\lambda = c\sigma = \sigma\lambda$.

Pour avoir $\sigma\lambda$, j'observe que la ligne $\vartheta\varphi$ étant la demi-perpendiculaire sur l'axe par rapport à l'un des rhombes inférieurs du noyau, sa position est la même que $gn$ (fig. 124); donc

$o\varphi$ (fig. 125) $= og$ (fig. 124) $= oa + ag = 3 + 2 = 5$.

---

(1) On conclura aisément de ce qui précède, qu'en général $rh : ch :: \frac{n}{n-1} \cdot \frac{a}{2}$, et $rh : ih :: g : \frac{1}{n-1} \cdot \frac{a}{2}$.

De plus, $\vartheta\varphi$ (fig. 125) $=\sqrt{\frac{1}{3}g^2}=1$. Maintenant, les triangles semblables $o\sigma\lambda$, $o\varphi\vartheta$ donnent

$$o\sigma : \sigma\lambda :: o\varphi : \varphi\vartheta :: 5 : 1.$$

Reste à chercher $o\sigma$. Si du point $c$ (fig. 124) nous menons une perpendiculaire sur l'axe, elle tombera à l'extrémité $a$ de cet axe. Car $cf=\frac{1}{4}of$; donc, puisque $ca$ est parallèle à $fr$, la distance $ar$ sera $\frac{1}{4}$ de $or$. Donc $ar=\frac{1}{3}ao$, d'où il suit que l'extrémité $a$ de la perpendiculaire se confond avec celle de l'axe du noyau. Donc, puisque la ligne $c\sigma$ (fig. 125) correspond à $ca$ (fig. 124), le point $\sigma$ (fig. 125) est tellement situé, que $o\sigma$ est l'excès de l'axe du métastatique sur celui du noyau; donc $o\sigma=3$; donc la proportion $o\sigma : \sigma\lambda :: 5 : 1$ devient $3 : \sigma\lambda :: 5 : 1$; donc $\sigma\lambda=\frac{3}{5}$.

Cherchons maintenant $c\sigma$ ou son égale $ac$ (fig. 124). $or : fr :: ao : ac$, ou $4 : 2 :: 3 : ac=\frac{3}{2}=c\sigma$; donc l'équation $c\lambda=c\sigma-\sigma\lambda$ devient $c\lambda=\frac{3}{2}-\frac{3}{5}=\frac{9}{10}$.

Reste à chercher $\lambda\tau$. Les triangles $c\tau\zeta$ et $c\sigma\mu$ donnent $c\tau : \tau\zeta :: c\sigma : \sigma\mu$, ou $c\lambda+\lambda\tau : \tau\zeta :: c\sigma : \sigma\mu$. Or, d'une part, $\tau\zeta=5\lambda\tau$, parce que ces quantités sont proportionnelles à $o\sigma=3$ et $\sigma\lambda=\frac{3}{5}$.

D'une autre part, appelant $g'$ et $p'$ les deux demi-diagonales de l'équiaxe, on a

$$c\sigma : \sigma\mu :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2-3g'^2} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 12} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9\cdot 5-3\cdot 12}$$
$$:: \sqrt{4} : \sqrt{1} :: 2 : 1.$$

Enfin, $c\lambda = \frac{9}{10}$; donc la proportion $c\lambda + \lambda\tau : \tau\zeta :: c\sigma : \sigma\mu$ devient $\frac{9}{10} + \lambda\tau : 5\lambda\tau :: 2 : 1$; d'où l'on tire $\lambda\tau = \frac{1}{10}$.

Donc, substituant à la place de $c\lambda$ et de $\lambda\tau$ leurs valeurs dans l'équation $c\tau = c\lambda + \lambda\tau$, on aura

$$c\tau = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1.$$

2°. Pour $\tau\sigma$.

$$\tau\sigma = c\sigma - c\lambda - \lambda\tau = \frac{3}{2} - \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Donc $c\tau = 2\tau\sigma$; donc aussi $c\zeta = 2\zeta\mu$, ce qu'il fallait prouver. Maintenant, puisque

$$\zeta\mu \text{ (fig. 123)} : \gamma\zeta :: \sqrt{5} : \sqrt{12},$$

nous aurons

$$c\zeta : \gamma\zeta :: \sqrt{20} : \sqrt{12} :: \sqrt{5} : \sqrt{3},$$

ce qui est précisément le rapport entre les deux demi-diagonales du rhomboïde inverse. Ainsi, des deux triangles $\epsilon\mu\gamma$, $\epsilon c\gamma$, l'un appartient à l'équiaxe et l'autre à l'inverse; et les deux hauteurs $c\zeta$, $\mu\zeta$ de ces triangles ont entre elles le même rapport que les hauteurs $ch$, $ih$ des triangles qui composent le trapézoïde $ircz$.

Passons au trapézoïde $c\gamma pr$, et cherchons d'abord les expressions des trois côtés du triangle $c\gamma r$.

1°. Pour $c\gamma$.

$$c\gamma = \sqrt{(c\zeta)^2 + (\gamma\zeta)^2};\ c\zeta \text{ (fig. 125)} = \sqrt{(c\tau)^2 + (\tau\zeta)^2}$$
$$= \sqrt{(c\tau)^2 + (5\lambda\tau)^2} = \sqrt{1 + \frac{25}{100}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

De plus,

$$\gamma\zeta \text{ (fig. 123)} : c\zeta :: \sqrt{3} : \sqrt{5}, \text{ ou } \gamma\zeta : \sqrt{\tfrac{5}{4}} :: \sqrt{3} : \sqrt{5}.$$

Donc $\gamma\zeta=\sqrt{\frac{3}{4}}$; donc $c\gamma=\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{2}$.

2°. Pour $cr$.

$$cr=\sqrt{(ch)^2+(hr)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}.$$

3°. Pour $\gamma r$. Si l'on fait passer par la ligne $\gamma\varepsilon$ un plan perpendiculaire à l'axe, ce plan coupera l'axe au point $\nu$ (fig. 125.) Cherchons la valeur de $o\nu$. Nous avons

$$o\nu=o\sigma-\sigma\nu=o\sigma-\tau\zeta=o\sigma-5\lambda\tau=3-\tfrac{5}{10}=\tfrac{5}{2}.$$

Or, l'axe $ou=9=\frac{18}{2}$. Donc le point $\gamma$ (fig. 123) qui est à la hauteur du point $\nu$ (fig. 125) se trouve situé vis-à-vis les $\frac{5}{18}$ de l'axe. Mais le point $d$ (fig. 123 et 124) est situé vis-à-vis les $\frac{5}{9}$ de l'axe, puisque... $og=5$; donc le point $\gamma$ (fig. 123) est au milieu de l'arête $od$. Mais le point $r$ est au milieu de l'arête $df$. Donc

$$\gamma r=\tfrac{1}{2}of=\tfrac{1}{2}\sqrt{(or)^2+(fr)^2}\,(\text{fig. }48)=\tfrac{1}{2}\sqrt{16+4}=\sqrt{5}.$$

D'ailleurs, $cr=\sqrt{3}$ et $c\gamma=\sqrt{2}$. Concluons de là : 1°. que l'angle $\gamma cr$ est droit; 2°. que le triangle $c\gamma r$ est semblable et égal au quart d'une des faces du noyau divisée par les deux diagonales.

Ayant déjà l'angle $\gamma cr$ de $90^d$, cherchons encore les angles $\gamma pr$ et $c\gamma p$.

1°. Pour l'angle $\gamma pr$. Cet angle est le supplément de $dpr$. Or, dans le triangle $rpd$, nous connaissons $dr=\frac{1}{2}df=\frac{1}{2}\sqrt{5}$. De plus,

$$pr=ir=\sqrt{(rh)^2+(ih)^2}=\sqrt{\tfrac{3}{4}+\tfrac{9}{10}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{21}.$$

Donc

$$dr : pr :: \sqrt{20} : \sqrt{21}.$$

Enfin, l'angle *pdr*, qui appartient à l'une des faces du cristal métastatique est censé connu, et sa valeur est de $54^d\,27'\,30''$. D'après ces données, on trouve que $dpr = 52^d\,34'\,7''$, d'où il suit que $\gamma pr = 127^d\,25'\,53''$.

2°. Pour l'angle $c\gamma p$. Cet angle est composé des deux angles $c\gamma r$ et $p\gamma r$, dont le premier est la moitié de l'angle obtus du rhombe primitif, c'est-à-dire qu'il est de $50^d\,46'\,6''$. Reste à trouver $p\gamma r$, ce qui sera facile d'après la connoissance de $\gamma pr = 127^d\,25'\,53''$, de $pr = \frac{1}{4}\sqrt{21}$, et de $\gamma r = \sqrt{5}$. On aura $p\gamma r = 24^d\,0'\,24''$; laquelle valeur ajoutée à celle de $c\gamma r$, donne $74^d\,46'\,30''$ pour l'angle $c\gamma p$. Le quatrième angle *crp* sera donc de $67^d\,47'\,37''$.

Nous avons encore à déterminer l'incidence de $c\gamma pr$ sur *czir*, et celle de $c\gamma\mu\varepsilon$ sur *cpr*.

1°. Pour l'incidence de $c\gamma pr$ sur *czir*.

Soit *rcz* (fig. 126) le même triangle que fig. 123. Menons *cn* (fig. 126) située comme *cf* (fig. 123), et tellement prolongée, que les lignes *rn*, *zn* menées à son extrémité soient perpendiculaires sur elle. Menons aussi *ch*, hauteur du triangle *rcz*, ensuite *nh*, puis *ng* perpendiculaire sur *cr*, *na* perpendiculaire sur *ch*, et enfin *ag*. L'angle *nga* qui mesure l'incidence de *ncr* sur *crz* sera le supplément de celui qui mesure l'incidence mutuelle des plans *criz*, $c\gamma pr$ (fig. 123). Le problème se réduit donc à la recherche de l'angle *nga* (fig. 126). Déterminons successivement $ng$ et $na$.

1°. Pour *na*. A cause du triangle rectangle *cnh*,

$$na = \frac{cn \times hn}{ch}.$$

$ch = \sqrt{\frac{9}{4}}$. $rh : hn :: \sqrt{5} : \sqrt{3}$, parce que l'angle *nrz* mesure la plus petite incidence des faces du cristal métastatique. Mais $rh = \sqrt{\frac{3}{4}}$; donc

$$hn = \sqrt{\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{5}} = \sqrt{\tfrac{9}{20}};\ cn = \sqrt{(ch)^2 - (hn)^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{20}} = \sqrt{\tfrac{9}{5}}.$$

Donc

$$na = \frac{\sqrt{\frac{9}{5} \times \frac{9}{20}}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \sqrt{\tfrac{9}{25}}.$$

2°. Pour *ng*. $ng = \dfrac{cn \times nr}{cr}$.

Nous avons déjà $cn = \sqrt{\frac{9}{5}}$;

$$nr = \sqrt{(rh)^2 + (hn)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{20}} = \sqrt{\tfrac{6}{5}};$$
$$cr = \sqrt{(ch)^2 + (rh)^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{4}} = \sqrt{3};$$

donc

$$ng = \frac{\sqrt{\frac{9}{5} \times \frac{6}{5}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{18}{25}}.$$

Donc $ng : na :: \sqrt{18} : \sqrt{9} :: \sqrt{2} : 1$. D'où il suit que $nga = 45^d$; et par conséquent l'incidence de $c\gamma pr$ sur $czir$ est de $135^d$.

2°. Pour l'incidence de $c\gamma\mu\varepsilon$ (fig. 123) sur $c\gamma pr$.

Soit $\gamma c\varepsilon$ (fig. 127) le même triangle que fig. 123.

Menons $c\nu$ (fig. 127) située comme $co$ (fig. 123) et limitée dans sa longueur, de manière que les droites $\gamma\nu$, $\varepsilon\nu$ (fig. 127) menées à son extrémité soient perpendiculaires sur elle. Menons aussi $\nu\zeta$ perpendiculaire sur $\gamma\varepsilon$, $\nu\lambda$ perpendiculaire sur $c\zeta$, $\nu\pi$ perpendiculaire sur $c\zeta$, et enfin $\lambda\pi$. L'angle $o\lambda\pi$ sera le supplément de celui qui mesure l'incidence proposée. Cherchons successivement $\nu\lambda$ et $\nu\pi$.

1°. Pour $\nu\lambda$. $\nu\lambda = \frac{c\nu \times \gamma\nu}{c\gamma}$.

Nous avons trouvé plus haut $c\gamma = \sqrt{2}$. Mais

$$c\nu = \sqrt{(c\zeta)^2 - (\zeta\nu)^2};$$

et nous avons eu aussi $c\zeta = \sqrt{\frac{5}{4}}$; de plus, $\gamma\zeta = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Or,

$$\gamma\zeta : \zeta\nu :: \sqrt{5} : \sqrt{3}.$$

Donc $\zeta\nu = \sqrt{\frac{9}{20}}$; donc $c\nu = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{9}{20}} = \sqrt{\frac{16}{20}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$.

$$\gamma\nu = \sqrt{(\gamma\zeta)^2 + (\zeta\nu)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{20}} = \sqrt{\frac{6}{5}};$$

donc

$$\nu\lambda = \frac{\sqrt{\frac{4}{5} \times \frac{6}{5}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{25}}.$$

2°. Pour $\nu\pi$

$$\nu\pi = \frac{c\nu \times \zeta\nu}{c\zeta},\ c\nu = \sqrt{\frac{4}{5}},\ \zeta\nu = \sqrt{\frac{9}{20}},\ c\zeta = \sqrt{\frac{5}{4}};$$

donc

$$\nu\pi = \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{9}{20}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}} = \sqrt{\frac{36}{25.5}};$$

donc

$$\nu\lambda : \nu\pi :: \sqrt{\frac{12}{25}} : \sqrt{\frac{36}{25.5}} :: \sqrt{5} : \sqrt{3},$$

ce qui est le rapport entre le côté du rhombe primitif et la moitié de la diagonale horizontale. Donc l'angle $\nu\lambda\pi = \frac{101^d 32' 13''}{2} = 50^d 56' 6''$; d'où il suit que l'incidence de $c\gamma\mu\varepsilon$ (fig. 123) sur $c\gamma pr$ est de $129^d 13' 54''$.

181. Une seconde variété qui est représentée figure 128, et dont le signe est $\underset{c\ m\ n}{\overset{2\ 3\ 4}{e\,e\,D}}$, a été appelée *ascendante*, parce que les trois lois dont elle dépend suivent la marche indiquée par ce nom, en partant des angles et des bords inférieurs du générateur (1). Voici les mesures de ses angles saillans. Incidence de $c$ sur $c'$, $120^d$; de $c$ sur $m$, ou de $c'$ sur $m'$, $165^d 51' 49''$; de $m$ sur $m'$, $114^d 18' 56''$; de $n$ sur $n$, $161^d 48' 18''$; de $n$ sur la face de retour, $101^d 32' 13''$.

Cette dernière incidence est égale à l'angle au sommet du rhombe primitif. Je vais prouver que cette égalité peut avoir lieu relativement à tous les rhomboïdes obtus dans lesquels les carrés des expressions des demi-diagonales sont des quantités rationnelles, quelles que soient d'ailleurs les mesures de leurs angles, en sorte que la loi qui la donne dépend, pour chaque rhomboïde, du rapport entre les diagonales dont il s'agit.

Il est d'abord facile de voir que le sinus de la moitié de l'incidence égale à l'angle du rhombe pri-

---

(1) J'ai déjà indiqué, p. 340, celle de ces lois qui donne les faces $n$, $n$.

mitif étant alors au cosinus comme $g : p$, et leur rapport étant le même que celui de *de* (p. 324) ou de $g$ à $ek$, on aura l'équation

$$ek,\ \text{ou}\ \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{36}g^2}}=p;$$

d'où l'on tire, en mettant à la place de $a^2$ sa valeur $9p^2-3g^2$, et en faisant les opérations convenables,

$$n^2+n\left(\frac{4p^4-4g^2p^2}{g^4-2g^2+p^2+p^4}\right)+\frac{4p^4}{g^4-2g^2p^2+p^4}=0;$$

ou en simplifiant,

$$n^2-\frac{n\,.\,4p^2}{g^2-p^2}+\frac{4p^4}{g^4-2g^2p^2+p^4}=0.$$

Extrayant la racine du premier membre, on a

$$n-\frac{2p^2}{g^2-p^2}=0,$$

ce qui donne

$$n=\frac{2p^2}{g^2-p^2}.$$

182. Il y a une manière beaucoup plus simple de démontrer la même propriété. Elle est fondée sur l'observation que quand la plus petite incidence de deux faces du dodécaèdre, telles que *dpf*, *qpf* (fig. 17, pl. 16), est égale à l'angle *dfq* du générateur, la ligne *dk* perpendiculaire sur *pf* prolongée se confond avec l'arête *df*, puisque l'on a $ek=p=ef$. Il en résulte que les angles *dfp*, *gfp* sont droits, et

par conséquent les triangles *dpf*, *qpf* sont perpendiculaires sur le plan du rhombe *dfqs*.

Soit toujours *amhl* (fig 19) la coupe transversale du générateur, prise par un plan perpendiculaire aux arêtes *ab*, *df* (fig 17). La ligne *mt* (fig. 19) étant perpendiculaire sur le prolongement de *la*, coïncidera avec la face *dpf* (fig. 17) du dodécaèdre. Soit *mou* (fig. 19) le triangle mensurateur, *d* la dimension qui sur la molécule répond à *am*, et *n* le nombre de rangées soustraites. La ligne *at* étant le cosinus du petit angle du rhombe primitif, nous aurons

$$om : ou :: d\times n : d :: am : at :: 2p^2 : g^2 - p^2 \text{ (p. 392)},$$

ou

$$n : 1 :: 2p^2 : g^2 - p^2 ;$$

donc

$$n = \frac{2p^2}{g^2 - p^2}.$$

Ainsi la valeur de *n* est égale au rapport qui représente la valeur du cosinus du petit angle du rhombe primitif. Nous avons déjà vu que les valeurs correspondantes relativement à d'autres formules qui généralisent la propriété du dodécaèdre métastatique (p. 330) et du rhomboïde inverse (p. 399), dépendaient du même rapport, en sorte que celui-ci sert à lier toutes ces propriétés doublement intéressantes, soit en elles-mêmes, soit par leur réunion autour d'un point commun de ralliement.

183. Si l'on fait $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{2}$, on trouve $n=4$, comme dans la variété qui est le sujet de cet article.

Si l'on suppose $g=\sqrt{5}$, $p=\sqrt{3}$, comme dans l'argent antimonié sulfuré, on aura $n=3$.

En faisant $g=\sqrt{2}$, $p=\sqrt{1}$, on trouverait $n=2$, ce qui a lieu, comme nous le verrons dans la suite, dans une variété du dodécaèdre rhomboïdal, c'est-à-dire d'une forme primitive dont la théorie peut être ramenée à celle du rhomboïde.

Lorsque $g$ est égale à $p$, comme dans le cube, on a $n=\frac{2}{o}$, c'est-à-dire qu'alors $n$ devient infinie, en sorte que le dodécaèdre se confond avec le générateur. Passé cette limite, le générateur devenant un rhomboïde aigu, on a $n=-\frac{2p^2}{p^2-g^2}$, c'est-à-dire qu'alors la valeur de $n$ devient négative.

184. La figure 129 représente une autre variété de chaux carbonatée dont le signe est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{u}{\overset{1}{D}}(E^{\frac{4}{7}}\underset{\psi}{D^{7}}B^{2})\underset{7}{\overset{\frac{5}{7}}{e}}\underset{\overset{3}{t}}{B}$.

Je lui ai donné le nom d'*imitative*, parce que les faces $\psi$ et $n$, dont l'une résulte d'un décroissement intermédiaire, et l'autre d'un décroissement mixte, ont été produites, pour ainsi dire, à l'imitation de celles qui, dans d'autres variétés, sont dues à des lois différentes et en même temps plus simples.

Les premières, si elles étaient prolongées jusqu'à s'entrecouper, composeraient la surface d'un dodécaèdre semblable à celui auquel appartiennent les faces $y, y$ (fig. 130) de la variété dïennéaèdre, lesquelles dépendent du décroissement $\overset{\frac{3}{2}}{D}$.

Pour démontrer la relation qui existe entre les deux décroissemens, supposons que *pu* (fig. 130) représente le dodécaèdre dont il s'agit. Il est évident que, dans l'hypothèse du décroissement $\overset{\frac{3}{2}}{D}$, le générateur tournera ses faces vers les arêtes les moins saillantes, telles que $\gamma$. Mais dans le dodécaèdre qui résulterait du prolongement des faces $\psi, \psi$ (fig. 129), ce seraient au contraire les arêtes les plus saillantes, telles que $\varepsilon$ (fig. 130), qui répondraient aux faces du générateur (1). Ainsi la question se réduit à chercher la loi de décroissement intermédiaire en vertu de laquelle le générateur, considéré comme noyau hypothétique, produirait le dodécaèdre, avec la condition que les arêtes $\varepsilon$ fussent tournées vers les faces de ce noyau.

En appliquant ici les formules que nous avons données ci-dessus (p. 538), nous aurons

$$a = 3,\ g = \sqrt{3},\ N = \tfrac{3}{2},\ a' = 3,\ g' = \sqrt{3},$$

ce qui donnera

$$r = \tfrac{5}{6},\ m = \tfrac{7}{8},\ \text{et}\ x : y :: 7 : 2.$$

(1) Dans le cas présent, ces arêtes sont celles qui naîtraient de l'intersection des faces $\psi$, $\psi$, situées en avant.

On trouvera ensuite $n = \frac{4}{7}$, résultats qui s'accordent avec les indications du signe du cristal.

D'une autre part, les pentagones $n$, $n$, ayant leurs grands côtés sensiblement parallèles entre eux, il est facile de voir que dans le rhomboïde qui résulte de leur prolongement, les diagonales obliques sont parallèles aux arêtes les moins saillantes du dodécaèdre auquel appartiennent les faces $\psi$, $\psi'$. Cherchons d'abord le rapport entre les demi-diagonales $g'$ et $p'$ du rhomboïde dont il s'agit.

Soit toujours *adsg* (fig. 16, pl. 16) la coupe du générateur, et *dp* une des arêtes les moins saillantes du dodécaèdre. Nous avons, dans le cas présent,

$$ap \text{ ou } \frac{1}{N-1} \cdot a = \frac{3}{\frac{3}{2}-1} = 6;$$

donc $$pr = 8.$$

Mais $$dr : pr :: 2 : 8 :: 1 : 4;$$

donc $$g' : \sqrt{3p'^2 - g'^2} :: 1 : 4,$$

ou $$g'^2 : 3p'^2 - g'^2 :: 1 : 16;$$

d'où l'on tire

$$g' : p' :: \sqrt{17} : \sqrt{3},$$

ce qui indique que le rhomboïde est le contrastant (p. 378).

Or, le dodécaèdre étant placé à contre-sens de celui que représente la fig. 46, pl. 19, ses arêtes les moins saillantes, et par conséquent les faces du rhomboïde sont tournées vers les bords supérieurs du véritable générateur, d'où il suit que le rhomboïde est produit par renversement sur les angles inférieurs de ce générateur, et que la loi qui le donne a pour exposant $\frac{7}{10}$, comme je l'ai démontré (p. 378). Ainsi le décroissement a lieu par 7 rangées en largeur et par 5 en hauteur, comme l'indique le signe. J'ajouterai ici les mesures des principaux angles du cristal. Incidence de *c* sur *c*, 120$^{d}$; de *c* sur *u*, 150$^{d}$; de $\psi$ sur $\psi$, 108$^{d}$ 56′ 2″; de $\psi$ sur $\psi'$, 134$^{d}$ 25′ 2″; de *n* sur *n*, 65$^{d}$ 41′ 4″; de *n* sur $\psi$, 157$^{d}$ 12′ 31″; de *t′* sur *t′*, 137$^{d}$ 39′ 26″; de *t* sur *t′*, 159$^{d}$ 11′ 34″.

185. La variété qui va maintenant nous occuper appartient au fer oligiste. La fig. 131 la représente, et son signe rapporté au noyau (fig. 132) est......

$\overset{1}{D}PE^{33}EE^{11}EA$. Je la nomme *fer oligiste soustractif*,
$k\ P\ \ n\ \ \ u\ \ \overset{2}{s}$

parce que l'exposant 3 de la loi qui donne les faces *n* est moindre d'une unité que la somme 4 des autres exposans. En examinant son signe, on concevra que sa surface est composée de six faces verticales *k*, *k*, situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier; de douze autres faces *n*, *n*, *n′*, *n′*, qui étant prises six à six et prolongées jusqu'à se rencontrer par leurs parties supérieures, formeraient deux pyramides droites dont les bases se confondraient avec celles du prisme; de six pentagones P, P, parallèles aux faces du noyau, de six autres *s*, *s*, placés trois à trois aux extrémités du cristal, et enfin de six quadrilatères *u* qui interceptent les angles solides à la rencontre des faces *k* et *n*. J'ai à prouver que ces dernières facettes sont des rhombes, et que leur figure symétrique peut avoir lieu dans une infinité de cas, sous une condition qui diffère de celle à laquelle est soumise la même figure dans la variété euthétique de chaux carbonatée (p. 505). Voici en quoi elle consiste :

Soient *bxqz* (fig. 133), *qztl*, etc., six faces verticales analogues aux pans d'un prisme hexaèdre régulier, et *pbzy* une pyramide droite qui repose sur la base de ce prisme ; soit de plus *drsk* un quadrilatère qui remplace l'angle solide *t*, et qui ait ses deux bords supérieurs *dr*, *dk*, parallèles aux arêtes *pz*, *py*, de la pyramide. Ce quadrilatère sera un rhombe, quelles que soient les inclinaisons des faces de la pyramide sur la base.

Pour le prouver, je mène le rayon oblique *ct* de la base, ensuite *zy*, et je prolonge le plan *zpy*, jusqu'à ce que ses deux sections sur les pans *ztlq*, *ytlu*, se rencontrent en un point *n* de l'arête *tl*. Il est évident que les quadrilatères *drsk*, *pzny*, sont semblables ; il suffit donc de démontrer que le dernier est un rhombe. Si l'on mène *pg* à l'endroit où *zy* et *ct* s'entrecoupent, et qu'on la prolonge indéfiniment, elle passera par le point *n*, puisqu'elle restera nécessairement sur le plan du quadrilatère *pzny*, qu'elle divisera en deux parties égales *pzn*, *pyn*. Or, les triangles *gcp*, *gtn*, sont évidemment semblables; mais de plus $cg=gt$, parce que la base du prisme est un hexagone régulier; donc les deux triangles sont non-seulement semblables, mais égaux; donc $gp=gn$; d'où il suit que le quadrilatère *pzny* est un rhombe, et ainsi du quadrilatère *drsk*.

Or, les bords supérieurs des facettes *u* (fig. 131) étant parallèles aux arêtes que remplacent les faces P, ou, ce qui est la même chose, aux plus longs bords de ces dernières faces, et cela par une suite de ce qu'elles proviennent du décroissement $E^{11}E$, il en résulte que ces facettes sont aussi des rhombes, et l'on juge aisément que cette figure ne dépend point du rapport entre les diagonales du générateur, mais qu'elle tient uniquement à une combinaison de lois de décroissement d'où résulte le parallélisme dont j'ai parlé. Voici les principaux angles du cristal :

Incidence de *k* sur *k*, $120^d$; de *k* sur *n*, $150^d\,26'$; de *n* sur *n*, $128^d\,28'$; de *n* sur *n'*, $120^d\,52'$; de P sur *n*, $154^d\,13'$; de P sur *s*, $144^d\,8'$; de *s* sur *s*, $144^d$; de P sur *u*, $128^d\,39'$.

186. Je n'ajouterai plus qu'une variété que je choisis dans l'espèce du fer sulfaté, non qu'elle offre des propriétés remarquables, mais parce que les décroissemens dont elle dépend agissent à la fois sur ses différentes parties, et ont toutes une même mesure, ce qui est très rare dans les solides dérivés d'un noyau rhomboïdal, qui n'ayant pas un caractère particulier de régularité, comme le cube et l'octaèdre

à triangles équilatéraux, n'exige pas que les lois qui produisent ses formes secondaires participent de sa symétrie.

Le rhomboïde primitif P (fig. 134) du fer sulfaté, qui est aigu, a ses diagonales $g$ et $p$ dans le rapport de $\sqrt{7}$ à $\sqrt{10}$. La forme secondaire dont il s'agit est représentée figure 135, et a pour signe $\underset{P}{P}\,\underset{s}{\overset{1}{D}}\,\overset{11}{E}\,\underset{o}{E}\,\underset{r}{\overset{1}{B}}\,\underset{n}{\overset{1}{A}}$, d'où l'on voit que les décroissemens qui lui donnent naissance ont lieu par une simple rangée sur tous les angles du rhomboïde primitif. Je nomme cette variété *fer sulfuré pantogène*, c'est-à-dire *qui tire son origine de toutes les parties de son noyau.* Voici les mesures de ses angles.

Incidence de P sur P, $81^{d}23'$; de P sur $n$, $118^{d}54'$; de P sur $o$, $123^{d}24'$; de P′ sur $o$, $135^{d}48'$; de P sur $r$, $130^{d}41'$; de P ou P′ sur $s$, $139^{d}18'$.

Je n'ai point parlé de la tourmaline dont la forme primitive est aussi un rhomboïde, et qui offre plusieurs variétés intéressantes, parce que cette substance est du nombre des corps naturels qui s'électrisent par la chaleur, et dont la description fera le sujet d'un article particulier.

### *Formule pour la détermination des angles des formes composées.*

187. J'ai donné des formules générales pour déterminer immédiatement les incidences mutuelles

des faces qui appartiennent aux formes secondaires simples, produites en vertu d'un seul décroissement par un nombre quelconque de rangées soustraites sur tel bord ou tel angle d'un rhomboïde primitif.

Les surfaces des formes que j'appelle *composées* étant des assemblages de facettes de différens ordres, qui se rencontrent et s'entrecoupent dans différentes directions, la complication qui en résulte semble d'abord écarter l'idée d'étendre à ces formes les avantages qui naissent des formules générales, relativement à la détermination des premières. Il ne reste plus alors que des méthodes particulières, qui ne conduisent au but proposé qu'à travers les détails prolixes d'une opération que l'on est obligé de recommencer tout entière, chaque fois qu'il survient un nouveau problème à résoudre. Ce n'est que depuis peu de temps que j'ai conçu l'idée de généraliser, autant qu'il serait possible, les applications de la théorie à la recherche des angles des formes secondaires composées, et les résultats de mon travail, que je vais exposer, m'ont fait regretter que cette idée ne se soit pas offerte dès le commencement.

Les angles dont il s'agit sont produits par le concours tantôt de deux faces situées sur deux rhomboïdes différens, tantôt d'une face de rhomboïde et d'une autre face qui appartient à un dodécaèdre, tantôt enfin d'une face située soit sur un rhomboïde, soit sur un dodécaèdre, et d'une seconde qui est perpendiculaire ou parallèle à l'axe.

La détermination du premier de ces angles souffre peu de difficulté. C'est vers celle des deux autres angles que j'ai dirigé mes recherches, et je suis parvenu à circonscrire les différens cas auxquels elle se rapporte (1) dans une même formule, qui s'applique directement à l'un d'eux, et n'a besoin que d'être plus ou moins légèrement modifiée, pour donner tout d'un coup la solution du problème dont chacun des autres offre le sujet. Elle m'a même paru mériter d'autant plus d'être publiée, qu'indépendamment de l'avantage qu'elle a d'apporter une économie de temps et de travail dans les applications de la théorie, elle peut être employée au développement de plusieurs propriétés remarquables, que réalisent une partie des formes dont j'ai parlé, et que je ferai bientôt connaître.

188. Mais avant d'exposer cette formule il est nécessaire d'entrer dans quelques détails sur les différens cas auxquels elle peut s'appliquer, et sur les quantités qui m'ont fourni les données d'où je suis parti pour arriver à mon but.

La construction de cette formule dépend du rapport entre trois coordonnées, dont l'une est une perpendiculaire menée d'un des angles solides latéraux

---

(1) J'ai exclus de mon plan le cas où l'angle est formé par la rencontre d'une face de rhomboïde avec une face perpendiculaire ou parallèle à l'axe, parce que ce cas est si simple qu'il serait superflu d'y employer une formule.

du dodécaèdre, pris à volonté, et les deux autres sont les sous-divisions de l'axe situées de part et d'autre de cette perpendiculaire. Je vais indiquer ces coordonnées relativement à chaque cas particulier.

Je supposerai d'abord que les dodécaèdres dont il s'agit aient été produits par les décroissemens ordinaires. Il pourra arriver que ces décroissemens aient eu lieu sur les bords inférieurs du rhomboïde primitif, ou sur ses bords supérieurs ou sur ses angles latéraux. Dans le premier cas on voit, par la seule inspection de la fig. 16, pl. 16, dont nous avons déjà fait usage pour la théorie de l'espèce de décroissement dont il s'agit, que les trois coordonnées sont les lignes *dr*, *pr* et *ur*, qui ont pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

$$\frac{2}{3}a+\frac{a}{n-1} \text{ ou } a\,\frac{(2n+1)}{3n-3}, \text{ et } \frac{1}{3}a+\frac{a}{n-1} \text{ ou } a\left(\frac{n+2}{3n-3}\right).$$

Dans le second cas, *adsg* (fig. 5, pl. 15) étant la coupe principale du générateur, et *amsp* celle qui lui correspond sur le dodécaèdre, les trois coordonnées sont *mu*, *au*, *us*, que nous avons représentées algébriquement par les expressions $\frac{n+1}{n}\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

$$\frac{2n-1}{3n}a, \text{ et } \frac{n+1}{8n}.$$

La figure a été tracée dans l'hypothèse où le dodécaèdre tournerait ses arêtes les moins saillantes vers les faces du noyau. Alors *au* est plus grande que *us*.

Lorsqu'elle est plus petite, ce sont les arêtes les plus saillantes du dodécaèdre qui répondent aux faces du noyau. Mais il n'y a de changé que le rapport entre les expressions des coordonnées, par une suite de ce que la quantité $n$ se trouve diminuée.

Le troisième cas exigera un calcul particulier pour mettre les expressions des coordonnées sous la forme qui convient à la formule. Dans la figure 29, pl. 17, qui est celle dont nous nous sommes servis pour les résultats relatifs aux décroissemens sur les angles latéraux, les lignes $oz$, $px$ ne coïncident pas sur une même direction avec les lignes $ln$, $dr$; elles sont situées au-dessus ou au-dessous, suivant que le dodécaèdre tourne vers le noyau ses arêtes les plus saillantes, ou les moins saillantes. Cette différence de position est une suite du parallélisme qui a lieu entre $to$ et $ad$. Nous n'avions besoin alors que des expressions de $ln$ et $dr$. Mais ici il est nécessaire de chercher celles de $oz$ et $dr$, qui sont les véritables coordonnées, prises sur la direction de l'axe.

Soit toujours $as=a$. Nous avons déjà $dr=\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$. De plus,

$$oz : dr :: oi : di :: it : ia,$$

ou

$$oz : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: a+\frac{a}{n} : a+\frac{a}{2n} :: 2n+2 : 2n+1,$$

donc

$$oz=\frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Or, d'une part,

$$tz : oz :: ar : dr :: \tfrac{2}{3} a : \sqrt{\tfrac{4}{3} g^2};$$

donc

$$tz = \frac{oz}{\sqrt{\tfrac{4}{3} g^2}} \times \tfrac{2}{3} a = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \tfrac{2}{3} a.$$

D'une autre part,

$$iz : oz :: ir : dr :: \frac{2n+3}{6n} a : \sqrt{\tfrac{4}{3} g^2};$$

donc

$$iz = \frac{oz}{\sqrt{\tfrac{4}{3} g^2}} \times \frac{2n+3}{6n} a = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)\ \ 6n} a.$$

Dans la figure 29, *tn* est plus petite que *iz*, par une suite de ce que le dodécaèdre tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du générateur. Si elle était plus grande par une suite du contraire, les expressions des coordonnées resteraient les mêmes : il n'y aurait de changé que leur rapport.

Si le dodécaèdre est produit par un décroissement intermédiaire, on substituera le noyau hypothétique au véritable, et l'on prendra les coordonnées dans la coupe du dodécaèdre qui naîtrait d'un décroissement sur les bords inférieurs de ce noyau hypothétique; ce qui fera rentrer le cas dont il s'agit dans le premier de ceux que nous venons de considérer.

189. Je vais maintenant donner la construction de la formule générale dans laquelle les expressions des trois coordonnées n'ont besoin que d'être remplacées dans chaque cas particulier par leurs valeurs numé-

riques pour conduire à la solution du problème proposé.

Soit $\lambda\mu$ (fig. 136) un dodécaèdre produit par un décroissement ou réel ou hypothétique sûr les bords inférieurs $ah$, $bh$, etc., d'un noyau rhomboïdal, et dont les sommets soient remplacés par les faces $\gamma\varepsilon\delta\lambda$, etc., et d'un rhomboïde quelconque originaire du véritable noyau. On propose de déterminer l'incidence de l'une des mêmes faces sur les faces adjacentes $r$, $r$, du dodécaèdre. Nous supposons ici que ces faces naissent sur les arêtes longitudinales les moins saillantes du même dodécaèdre.

Par les angles $a$, $b$, faisons passer un plan $asb$ parallèle à l'axe, et coupons-le par un autre plan $agb$ perpendiculaire au même axe. Soit $acbsg$ (fig. 137) la pyramide donnée par ces plans, et $hgk$ un plan parallèle à la face $\gamma\lambda\delta\varepsilon$ (fig. 136). Menons $gp$ prolongée convenablement, et abaissons $sr$ perpendiculaire sur $gk$ prolongée, puis $sz$. L'angle $szr$ sera le supplément de l'incidence cherchée.

Soit $odmz$ (fig. 138) la coupe du générateur, et $du$, $dt$, deux arêtes longitudinales du dodécaèdre. Les deux lignes $ku$, $kt$, seront les coordonnées dont nous avons parlé plus haut, et qui ont pour expressions générales $\frac{2}{3}a+\frac{a}{n-1}$, $\frac{1}{3}a+\frac{a}{n-1}$. Représentons-les, pour abréger, par $s$ et $t$; et enfin exprimons par $m$, $b$, les deux lignes $cg$, $cp$, dont le rapport est celui de $g' : \sqrt{3p'^2-g'^2}$, $g'$ et $p'$ étant les demi-diagonales du rhomboïde dont une des faces est γλδε.

Cela posé, cherchons successivement $sr$ et $rz$, qui sont l'une le sinus, et l'autre le cosinus de l'angle $szr$.

1°. Pour $sr$. Les triangles semblables $pcg$, $prs$, donnent $sr : pr :: cg : cp :: m : b$; donc $sr = \frac{m}{b} \times pr$. Calculons $pr$.

$$pr : cp :: ps, \text{ ou } cs - cp : gp;$$

donc

$$pr : b :: cs - b : \sqrt{m^2 + b^2};$$

mais

$cs$ (fig. 137) $: cg :: ku : dk$ (fig. 138), ou $cs : m :: s : \sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, d'où l'on tire

$$cs = \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}};$$

donc

$$pr : b :: \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} - b : \sqrt{m^2 + b^2};$$

ce qui donne

$$pr = \frac{\frac{bms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} - b^2}{\sqrt{m^2 + b^2}}.$$

Multipliant cette valeur de $pr$ par $\frac{m}{b}$, on a

$$sr = \frac{m(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2 + b^2)}}.$$

2°. Pour $rz$.

$$rz : gr :: pk : gk, \text{ d'où } rz = \frac{gr \times pk}{gk}.$$

Or,

$$gr=gp+pr=\sqrt{m^2+b^2}+\frac{\frac{bms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}}-b^2}{\sqrt{m^2+b^2}}$$

$$=\frac{m(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2}+bs)}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2+b^2}}.$$

D'une autre part,

$$pk : cb :: ps : cs, \text{ ou } pk : g :: cs-b : cs,$$

d'où l'on tire

$$pk=g\times\left(\frac{cs-b}{cs}\right)=\frac{g(ms-b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{ms}.$$

De plus,

$$gk=\sqrt{(gp)^2+(pk)^2}=\sqrt{m^2+b^2+\frac{g^2(ms-b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{m^2s^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{m^2s^2(m^2+b^2+g^2(ms-b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{m^2s^2}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de $rz$, on aura

$$rz=\frac{m(ms-b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2+b^2)}}+\frac{g(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2}+bs)}{\sqrt{m^2s^2(m^2+b^2)+g^2(ms-b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}}.$$

Maintenant, si nous prenons le rapport de $sr$ à $rz$, simplifié par la suppression des facteurs communs aux deux quantités, nous aurons

$$sr : rz :: \sqrt{m^2s^2(m^2+b^2)+g^2(ms-b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})} : g(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2}+bs).$$

190. Il est aisé d'introduire dans cette formule la

seconde coordonnée $t$; pour cela, remarquons que le point $c$ (fig. 137) étant situé au milieu de la diagonale oblique du noyau, $cs$ (fig. 137) est la moitié de $ap$ (fig. 16, pl. 16). Or,

$$ap = 2pn - un = 2t - s\text{; donc } c^s = \frac{2t-s}{2}.$$

Mais nous avons trouvé plus haut $cs = \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}}$; donc

$$ms = \frac{2t-s}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = (2t-s)\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2},$$

et

$$m^2s^2 = (2t-s)^2\tfrac{1}{3}g^2.$$

Si l'on substitue cette valeur de $m^2s^2$ dans la formule, celle-ci prendra la forme

$$sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2\tfrac{1}{3}(m^2+b^2)+(ms-2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2})^2}$$
$$: 2m\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}+bs \text{ (A) (1).}$$

191. Les faces du rhomboïde, en s'inclinant dans un sens ou dans l'autre, subissent des variations qui se rapportent à certaines limites dont chacune présente sous un nouvel aspect géométrique le cristal qui s'y rapporte. Mais il est facile de conserver à la formule sa généralité, en la modifiant d'une manière assortie à ces variations.

(1) Pour faciliter les applications aux différens cas qui peuvent avoir lieu, je désignerai cette formule et les suivantes par les lettres A, B, C.... qui serviront de renvois.

Supposons d'abord que les trois faces situées vers chaque sommet restant fixes par leurs angles inférieurs $\varepsilon$ (fig. 136) s'abaissent par leurs parties supérieures, en formant entre elles des angles toujours plus ouverts. Il y aura un terme où elles coïncideront sur un même plan perpendiculaire à l'axe, comme on le voit fig. 139. Alors la quantité $b$ s'évanouit, et la formule devient

$$sr : rz :: \sqrt{(2t - s)^2 + 3s^2} : 2g \text{ (B)}.$$

192. Concevons maintenant que les mêmes faces se relèvent par leurs parties supérieures, en faisant avec l'axe des angles toujours plus aigus. Leurs diagonales obliques finiront par coïncider avec les arêtes $\varepsilon h$ (fig. 136) du dodécaèdre, et si l'on suppose qu'ensuite elles se meuvent vers l'axe parallèlement à elles-mêmes, la forme se présentera sous l'aspect d'un dodécaèdre (fig. 140) dans lequel les arêtes longitudinales les moins saillantes seraient remplacées par des hexagones $f$, $f$, dont les plus longs bords $\delta$, $\delta$, seraient parallèles. L'incidence de ces faces sur leurs adjacentes dans le dodécaèdre est censée être donnée d'avance, comme étant égale à la moitié de celle de $r$ sur $r$, plus à $90^d$. Mais si l'on voulait appliquer la formule à ce cas, on ferait attention qu'alors le rapport de $m$ à $b$ devient égal à celui de $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$ à $s$; et par la substitution de ces secondes quantités aux premières, la formule ordinaire se ré-

duirait à

$$sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2 \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{4}{3}g^2+s^2\right)} : 4\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2+s^2}. \quad (a).$$

193. Les faces du rhomboïde continuant de s'incliner dans le même sens, interceptent les angles latéraux du dodécaèdre, en sorte que la forme devient semblable à celle qu'on voit (fig. 141). La construction à laquelle se rapporte la figure 137 se change alors en celle que représente la figure 142, et qui ne diffère de l'autre qu'en ce que le triangle *hsk* y est situé en sens contraire de la position qu'il a dans celle-ci. Le rapport entre les deux côtés de l'angle qui donne l'incidence proposée, est alors celui de $gr : rz$ (fig. 142), et si l'on cherche ce rapport, en assimilant la marche du calcul à celle qui a été suivie à l'égard de la construction de la figure 137, on trouve

$$gr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2 \tfrac{1}{3}(m^2+b^2)+\left(2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}-ms\right)^2} \\ : bs + 2m\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} \; (C);$$

lequel rapport est le même que celui qui est indiqué par la lettre (A), excepté que dans celui-ci le second membre du premier terme est $\left(ms-2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}\right)^2$, où il y a inversion dans les signes.

194. Au-delà du terme précédent, les faces du rhomboïde, en se relevant de plus en plus par leurs parties supérieures, arrivent au parallélisme avec l'axe, et à ce terme la forme présente l'aspect d'un

dodécaèdre dont les faces se combinent avec les pans d'un prisme hexaèdre régulier, produits en vertu du décroissement $\overset{2}{e}$ (1), ainsi qu'on le voit fig. 143. Dans ce cas $m$ devient nul, et la formule (C) se change en la suivante :

$$gr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2\tfrac{1}{3}b^2 + (2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2})^2} : bs$$
$$:: \sqrt{(2t-s)^2\tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{3}g^2} : s$$
$$:: \sqrt{(2t-s)^2 + 4g^2} : s\sqrt{3} \text{ (D)}.$$

On peut remarquer que des deux triangles dont chaque trapézoïde $c$ est l'assemblage, l'un, tel que $kln$, est tourné vers une face du générateur, tandis que l'autre, $ksn$, correspond à l'un de ses bords contigus aux sommets. Il en résulte deux incidences différentes d'un même trapézoïde sur les faces adjacentes du dodécaèdre, que l'on détermine à l'aide de la formule, en faisant successivement $s$ plus petite et plus grande que $t$, ou réciproquement.

195. Il est facile, en faisant subir un léger changement aux formules précédentes, de les rendre suscep-

(1) J'omets le cas où les pans du prisme résultent du décroissement $\overset{1}{D}$, parce que l'angle que font entre elles deux faces du dodécaèdre, telles que $r$, $r''$ (fig. 139), situées des deux côtés d'une même arête latérale, étant censé connu, il suffit d'en prendre la moitié et d'y ajouter 90$^d$, pour avoir l'incidence de l'une quelconque de ces mêmes faces sur le pan adjacent.

tibles d'être appliquées au cas où le dodécaèdre a pour faces des triangles isocèles ; il suffit de considérer qu'alors les quantités $s$ et $t$ deviennent égales, d'où il suit que, dans le premier terme, il faut mettre $s$ à la place de $2t-s$.

196. Je vais maintenant faire des applications des quatre formules à des variétés de formes que je choisirai parmi celles qui appartiennent aux trois cas que le dodécaèdre est susceptible d'offrir.

La variété analogique de la chaux carbonatée (fig. 144) fournit deux exemples du premier cas, dont l'un concerne l'incidence des faces $r$ du dodécaèdre sur les faces $g$ de l'équiaxe, et l'autre celle des mêmes faces sur les pans $c$, $c$, parallèles à l'axe. Son signe rapporté au noyau que représente la figure 145 est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{r}{\overset{2}{D}}\underset{\overset{1}{g}}{B}$.

Ici les arêtes les plus saillantes du dodécaèdre sont tournées vers les faces du rhomboïde, d'où il suit que $t$ est plus grande que $s$. Nous aurons donc, d'après les expressions générales de $t$, $s$, $m$ et $b$, et la formule (A),

$$t=5,\ s=4,\ m=2,\ b=1,\ g=\sqrt{3};$$

et (A)

$$sr : rz :: \sqrt{36\times 5+[(8-2)\sqrt{3}]^2} : (4+4)\sqrt{3} :: \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

ce qui doit être, parce que l'incidence proposée est égale à la moitié de l'angle obtus du rhombe primitif, plus à $90^d$, c'est-à-dire qu'elle est de $129^d 13' 54''$.

L'autre exemple offre deux incidences différentes, dont l'une est celle de la face $r''$, et l'autre celle de la face $r$ sur le même trapézoïde $c'$.

Nous aurons pour la première

$$t=5,\ s=4,\ g=\sqrt{3};$$

ce qui donne

$$\text{(D)}\ gr : rz :: \sqrt{48} : 4\sqrt{3},$$

d'où l'on conclut $gr=rz$; c'est-à-dire que l'incidence dont il s'agit est exactement de $135^{d}$, ainsi que je l'ai annoncé en traitant de la variété dont il s'agit ici.

Pour la seconde,

$$t=4,\ s=5,\ g=\sqrt{3};$$

donc

$$gr : rz :: \sqrt{7} : 5,$$

d'où l'on conclut que l'incidence proposée est de $152^{d}\,6'\,52''$.

197. Les deux exemples suivans seront tirés du dodécaèdre auquel appartiennent les faces $x$, $x$, de la variété paradoxale de la même substance, combiné avec des faces les unes $f$, $f'$, obliques, les autres $c$, $c'$ parallèles à l'axe (fig. 146), ou avec des faces $g$ et $f$ (fig. 147) toutes obliques à l'axe. Ce dodécaèdre étant produit par un décroissement intermédiaire, on peut, comme je l'ai dit, l'assimiler à ceux qui sont compris dans le premier cas, en sub-

stituant le noyau hypothétique au véritable. La dernière variété, que j'appelle *articulée*, a pour signe $\underset{x}{\left({}^{1}E^{1}B^{1}D^{2}\right)}\underset{r}{\overset{2}{D}}\underset{f}{E^{11}}\underset{\overset{1}{g}}{E}B$. Celui de l'autre, qui porte le nom d'*itérative*, est $\underset{c}{\overset{2}{e}}\underset{x}{\left({}^{1}E^{1}B^{1}D^{2}\right)}\underset{f}{E^{11}}E$. Le noyau hypothétique étant le rhomboïde inverse dans lequel $g = \sqrt{3}$, $a = 6$, et l'exposant du décroissement étant 3, l'axe du dodécaèdre sera égal à 12, et les valeurs de $s$ et de $t$ seront 7 et 5.

Nous avons à déterminer, dans la variété articulée (fig. 147), les incidences de $f$ et de $g$ sur $x$. Le rapport de $m$ à $b$, qui est celui de 2 à 1, étant ajouté aux valeurs qui viennent d'être indiquées, la formule devient, relativement à la face $g$,

$$(A)\ sr : rz :: \sqrt{159} : 11,$$

d'où il suit que l'incidence est de $131^{d}\,4'\,11''$. Pour avoir celle de $f$ sur $x$, nous nous servirons des mêmes expressions, excepté le rapport de $m$ à $b$, qui est ici celui de 2 à 1. Nous aurons ainsi $sr : rz :: \sqrt{6} : 8$, ce qui donnera $162^{d}\,58'\,2''$ pour l'incidence cherchée.

En conservant à $s$ et $t$ les mêmes valeurs, nous aurons pour l'incidence de $x''$ sur $c$, dans la variété itérative (fig. 146), (D) $gr : rz :: 1 : 7$, et l'incidence sera égale à $159^{d}\,18'$. Faisant $s = 5$, et $t = 7$, pour celle de $x$ sur $c$, nous aurons $gr : rz :: \sqrt{31} : 5$, ce qui donne $131^{d}\,34'\,8''$.

Les deux variétés que nous considérons ici offrent la réunion des faces *r*, *g*, *c*, de la variété analogique, et la manière dont ces faces se combinent avec les faces *x*, *x*, donne naissance à des rapports mutuels qui me paraissent mériter d'être remarqués. Dans l'analogique, les trapézoïdes qui remplacent les sommets du dodécaèdre sont composés de deux triangles réunis par leurs bases, dont l'un, tel que *onl* (fig. 144), qui est semblable à la moitié d'une face du rhomboïde équiaxe, entre dans l'ordre de la structure, et l'autre, tel que *ohl*, qui est semblable à la moitié d'une face du rhomboïde inverse, ne se rencontre là que par l'effet des intersections des faces *g* avec les faces *r*. Dans la variété articulée (fig. 147) les mêmes triangles qui sont aussi accolés l'un à l'autre, ont leurs positions respectives déterminées par les lois de la structure, en sorte qu'ils forment entre eux un angle de $143^d 7' 49''$.

Les triangles obtus qui font partie des faces *c* de la variété itérative (fig. 146) sont semblables à ceux qui leur correspondent sur la variété analogique, en sorte que leur base est à leur apothème dans le même rapport de $\sqrt{4}$ à $\sqrt{3}$; mais l'apothème du triangle aigu, dans la variété articulée, est à celui du triangle obtus comme 3 est à 1, au lieu que dans l'analogique il n'en est que le double. C'est une suite de ce que les apothèmes sont entre eux dans chaque dodécaèdre comme l'exposant *n* du décroissement est à l'unité.

198. Je choisirai, pour dernier exemple, un des cas où les faces du dodécaèdre sont des triangles isocèles, comme les faces $\xi$, $\xi$ de la variété *synallactique* (fig. 148), qui se combinent avec celles de la variété analogique (fig. 144). Le dodécaèdre a pour signe $\left(\overset{\frac{7}{5}}{E}D^5B^1\right)$. Son noyau hypothétique serait le prisme hexaèdre régulier, qui dépendrait des décroissemens $\overset{1}{D}\underset{1}{A}$, et aurait une hauteur égale à l'axe du véritable noyau; et le signe du dodécaèdre rapporté à ce prisme serait $\overset{\frac{1}{2}}{B}$, B représentant le côté de l'hexagone.

On trouve, à l'aide du calcul, que le rayon de la base commune des deux pyramides, dont le dodécaèdre est l'assemblage, est à l'axe de chacune d'elles dans le rapport de 1 à 3; et parce que ce rayon est égal à la ligne $dr$ (fig. 1) dont l'expression est 2, on a ici $s=6$. Pour avoir maintenant l'incidence de $\xi$ sur $g$, on mettra dans la formule (A) $s$ à la place de $2t-s$, puis substituant à $s$ sa valeur 6, à $g$ la quantité $\sqrt{3}$, et au rapport $m$ à $b$ celui de 2 à 1, qui a lieu dans l'analogique, on trouvera

$$st : rz :: \sqrt{8} : \sqrt{5},$$

ce qui donne pour l'incidence cherchée, $128^d\ 19'\ 44''$.

Celle de $\xi$ sur $c$ sera tirée de la formule (D) avec les mêmes substitutions, ce qui donnera $gr : rz :: 2 : 3$, d'où l'on conclura que l'incidence est de $146^d\ 18'\ 37''$.

199. Je passe aux dodécaèdres compris dans le

second cas, qui naissent d'un décroissement sur les bords supérieurs du générateur. Mais, avant de citer des exemples, je vais déterminer d'une manière générale le noyau hypothétique, qui est aussi susceptible de produire le dodécaèdre à l'aide d'un décroissement sur ses bords inférieurs. J'en userai de même pour les dodécaèdres qui se rapportent au troisième cas. La considération de ces noyaux, outre l'extension qu'elle donne à la théorie, a l'avantage de faire apercevoir les propriétés dont jouissent une partie des variétés auxquelles elle s'applique.

Je supposerai d'abord que *us* soit plus grande que *au*, comme on le voit (fig. 149). Soit *a* l'axe *as* du générateur, *g* sa demi-diagonale horizontale, *n* l'exposant du décroissement qui produit le dodécaèdre, en agissant sur les bords supérieurs du générateur. Les valeurs numériques de ces trois quantités sont censées être toujours connues. Soit, de plus, $a'$ l'axe du noyau hypothétique, $g'$ et $p'$ les demi-diagonales de ses faces, $n'$ l'exposant de la loi qui donne naissance au dodécaèdre en agissant sur ses bords inférieurs, et $n''$ l'exposant de la loi susceptible de produire le noyau hypothétique, en agissant sur l'angle supérieur du générateur.

Déterminons successivement ces cinq quantités.

1°. Pour $a'$. Nous avons eu plus haut $au = \frac{2n-1}{3n} . a$,

et $$us = \frac{(n+1)}{3n} a.$$

Maintenant

$$a' = 3us - 3au = \frac{2-n}{n}a.$$

2°. Pour $g'$. Nous avons eu $mu = \frac{n+1}{n}\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$.

Or, la même quantité est égale à $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$. Donc

$$g' = \frac{n+1}{n}g.$$

3°. Pour $p'$. $p' = \sqrt{\frac{1}{3}g'^2 + \frac{1}{9}a'^2}$.

4°. Pour $n'$. La partie de l'axe du générateur qui excède de chaque côté l'axe du noyau hypothétique, et qui a pour expression $\frac{a'}{n'-1}$, est $\frac{a-a'}{2}$.

Or $$a - a' = a - \frac{(2-n)}{n}a = 2a\frac{(n-1)}{n};$$
donc

$$a\frac{(n-1)}{n} = \frac{a-a'}{2} = \frac{a'}{n'-1},$$

d'où l'on tire

$$n' = \frac{an + a'n - a}{an - a}.$$

5°. Pour $n''$.

$$mu : au :: \frac{n''+1}{n''}\sqrt{\frac{4}{3}g^2} : \frac{2n''-1}{3n''}.a :: \sqrt{\frac{1}{3}g'^2} : \frac{1}{3}a';$$

$$2(n''+1)g : (2n''-1)a :: g' : a',$$

d'où l'on conclut

$$2(n''+1)a'g = (2n''-1)ag',$$

et

$$2n''a'g + 2a'g = 2n''ag' - ag'.$$

On tire de cette équation

$$n'' = \frac{2a'g + ag'}{2ag' - 2a'g}.$$

200. Supposons maintenant $au$ plus grande que $us$, ainsi qu'on le voit figure 5, pl. 15.

Nous aurons, 1°. pour $a'$,

$$a' = 3au - 3us = \frac{3n-6}{3n}a = \frac{n-2}{n}.a.$$

2°. $g'$ aura encore pour expression $\frac{n+1}{n}g$.

3°. Celle de $p'$ sera de même $\sqrt{\frac{1}{3}g'^2 + \frac{1}{9}a'^2}$.

4°. Pour $n'$.

$$\frac{a'}{n'-1} = \frac{a-a'}{2}. \text{ Or, } a - a' = a - \frac{(n-2)}{n}.a = \frac{2a}{n};$$

donc

$$\frac{a'}{n'-1} = \frac{a}{n} \text{ et } a'n = an' - a, \text{ d'où } n' = \frac{a'n + a}{a}.$$

5°. Pour $n''$. Son expression sera toujours $\frac{2a'g + ag'}{2ag' - 2a'g}$.

201. C'est encore la cristallisation de la chaux carbonatée qui m'a offert les deux variétés que je vais citer comme exemples de dodécaèdres compris dans le cas que nous considérons ici. Les faces qui se combinent dans l'une et l'autre avec celles de ces dodécaèdres sont situées parallèlement à l'axe du générateur.

La première, qui est représentée (fig. 150), et

qui porte le nom de *bisadditive*, a pour signe $\underset{\frac{3}{2}}{B}\overset{2}{e}$. Le
$7 \quad c$
dodécaèdre qui en fait partie tourne ses arêtes les plus saillantes, telles que $d$, vers les faces du générateur.

Supposant $a = 9$, d'où il suit que $g = \sqrt{27}$, et $p = \sqrt{18}$, et déterminant les autres quantités d'après les valeurs algébriques trouvées plus haut, nous aurons, pour l'axe du noyau hypothétique, $a' = 3$; pour ses demi-diagonales, $g' = \sqrt{75}$, $p' = \sqrt{26}$; pour l'exposant de la loi qui produit le dodécaèdre en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, $n' = 2$; et pour l'exposant de la loi qui donne naissance au noyau hypothétique en agissant sur les angles supérieurs du générateur, $n'' = \frac{7}{8}$; ce qui donne pour le signe représentatif, $\underset{\frac{7}{4}}{A}$.

On voit que la loi qui produit le dodécaèdre est la même que celle qui a lieu pour la variété métastatique, en agissant par deux rangées sur les bords correspondans du générateur. Mais de plus, si l'on cherche le rapport entre le sinus et le cosinus de la demi-incidence de $7$ sur $7'$, on trouve qu'il est celui de $\sqrt{29}$ à $\sqrt{3}$, lequel a lieu aussi dans le dodécaèdre métastatique (p. 336), avec cette différence, que l'incidence qui en résulte dans le premier dodécaèdre appartient aux faces les moins inclinées entre elles, tandis que dans le second ce sont les faces les plus inclinées qui la donnent. J'ai cru qu'il ne serait pas indifférent de faire remarquer cette analogie entre les lois de structure relatives à deux rhomboïdes qui contrastent si fortement par le rapport de leurs dimensions, l'axe du générateur étant à la demi-diagonale oblique comme 3 à $\sqrt{3}$, et celui du noyau hypothétique étant à la même ligne comme 3 à $\sqrt{75}$, ou comme 3 à 5 $\sqrt{3}$.

Les sinus et les cosinus des angles égaux aux moitiés des incidences qui diffèrent dans les deux dodécaèdres, offrent aussi une corrélation qui me paraît mériter d'être citée. Dans le métastatique, leur rapport est celui de $\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, et dans la variété bisadditive, celui de $\sqrt{175}$ à $\sqrt{3}$, ou celui de $5\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, d'où l'on voit que le cosinus étant le même de part et d'autre, les sinus sont entre eux comme les demi-diagonales du générateur et du noyau hypothétique.

Le calcul donne pour l'incidence de 7 sur 7', qui est commune aux deux dodécaèdres, $144^d\,20'\,26''$, et pour celle de 7 sur 7, qui est particulière à celui-ci, $162^d\,22'\,40''$.

Il me reste à indiquer les deux incidences des faces 7, 7, sur les pans du prisme. L'arête $d$, qui est la plus saillante, étant tournée vers l'un des rhombes du générateur, on fera, dans l'application de la formule à l'incidence de 7' ou de 7 sur $c''$, $s=4$, $t=5$, et l'on aura (D) $gr : sz :: \sqrt{7} : 1$, ce qui donne $110^d\,43'\,43''$, pour l'incidence dont il s'agit. L'arête $n$

étant au contraire la moins saillante, les valeurs de $s$ et de $t$ seront 5 et 4, et l'on trouvera

$$gr : sz :: \sqrt{103} : 5,$$

ce qui donne pour l'incidence de $7'$ sur $c$, $116^d 14' 19''$.

202. La variété que je nomme *surbaissée*, et dont on voit la projection (fig. 151), se présente naturellement à la suite de la précédente, comme exemple d'un dodécaèdre qui tourne ses arêtes les moins saillantes, telles que λ, vers les faces du générateur, ainsi que l'indique la figure 5, pl. 15, dans laquelle $us$ est plus petite que $au$. C'est ce qui la distingue de l'autre, avec laquelle elle a beaucoup d'analogie par son aspect, en sorte qu'à en juger d'après le coup-d'œil, on peut être tenté de les confondre. Le signe de celle dont il s'agit ici est $\underset{\frac{3}{1}}{\mathrm{B}}\underset{c}{\overset{3}{e}}$. En supposant que l'on ait comme ci-dessus, $a=9$, $g=\sqrt{27}$, $p=\sqrt{18}$, et en suivant, par rapport aux valeurs numériques des autres lignes, la marche qui a été tracée à l'égard de la bisadditive, on trouvera

$$a'=3,\ g'=\sqrt{48},\ p'=\sqrt{17},\ n'=2,\ n''=1,$$

ce qui indique deux rangées de soustraites sur l'angle supérieur du générateur. On voit que la loi qui produit le dodécaèdre, en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, a lieu par deux rangées comme dans la variété métastatique, et aussi comme dans la bisadditive. A l'égard des incidences mutuelles des faces du dodécaèdre, on a pour le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de celle de $t$ sur $t'$ celui de $\sqrt{89}$ à $\sqrt{3}$, ce qui donne pour cette incidence $159^d\,11'\,34''$, et pour le rapport entre le sinus et le cosinus de la demi-incidence de $t''$ sur $t'$, $\sqrt{20} : \sqrt{3}$, d'où l'on déduit pour cette incidence $137^d\,39'\,26''$.

Dans les applications de la formule relative aux incidences sur les faces $c$, on fera $s=5$, $t=4$, s'il s'agit de celle de $t$ ou de $t'$ sur $c'$, et l'on aura

$$\text{(D)}\; gr : rz :: \sqrt{67} : 5,$$

ce qui donne pour cette incidence $121^d\,25'\,3''$; et s'il s'agit de celle de $t'$ ou de $t''$ sur $c$, on fera $s=4$, $t=5$; on trouvera $gr : rz :: \sqrt{19} : 2$, ce qui donne pour cette seconde incidence $114^d\,38'\,50''$.

203. Il me reste à traiter des dodécaèdres qui appartiennent au troisième cas, et qui sont produits par des décroissemens sur les angles latéraux du générateur. Je suivrai ici la même marche que dans l'article précédent, où j'ai commencé par déterminer d'une manière générale le noyau hypothétique.

Le dodécaèdre est susceptible, comme ceux qui sont compris dans le second cas, de deux positions différentes, selon que ses arêtes les plus saillantes sont tournées vers les faces du générateur, ou que c'est le contraire qui a lieu. La figure 152 représente la première de ces positions. Les arêtes $ot$, $pi$, qui sont les plus saillantes, répondent aux diagonales obliques *ad*, *gs*, de la coupe principale du générateur. Le quadrilatère *oa'ps'*, qui est celle du noyau hypothétique, tourne vers les mêmes diagonales les bords supérieurs *a'o*, *ps'* du rhomboïde auquel il appartient, et les diagonales obliques *a'p*, *os'* correspondent aux bords supérieurs *ag*, *ds*, du générateur.

A mesure que le décroissement qui donne le dodécaèdre devient plus rapide, les arêtes *to*, *pi*, se rapprochent des diagonales *ad*, *gs*, et leur différence de longueur avec les arêtes *oi*, *tp*, va en diminuant, en sorte qu'il y a un terme où elles deviennent égales, et à ce terme le dodécaèdre se trouve converti en double pyramide droite. Au-delà de ce terme, les effets inverses des précédens prennent leur place, ainsi qu'on le voit fig. 153. Les arêtes les plus saillantes *oi*, *tp*, du dodécaèdre, qui sont en même temps les plus courtes, sont tournées vers les bords supérieurs *ds*, *ag*, du générateur, et le contraire a lieu par rapport aux arêtes *ot*, *pi*. D'une autre part, les diagonales obliques *a'o*, *s'p*, du noyau hypothétique, et celles du générateur sont en regard, et c'est la même chose à l'égard des bords supérieurs.

J'ai déjà remarqué plus haut que les lignes *oz*, *px*, qui sont les perpendiculaires sur l'axe, dans le noyau hypothétique, ne coïncident pas avec les directions des lignes *gn*, *dr*, qui font la même fonction dans le générateur : elles sont tantôt plus éloignées (fig. 152) et tantôt plus voisines du centre (fig. 153). La différence va en diminuant, à mesure que le dodécaèdre approche du terme où il devient un solide pyramidal, et où l'axe du noyau hypothétique s'évanouit. Je reviendrai plus bas sur le défaut de coïncidence dont il s'agit, et je déterminerai le point de l'axe $ti$, qui donne la limite au-delà et en deçà de laquelle les perpendiculaires sur l'axe subissent un changement dans leurs positions respectives.

204. Je reprends maintenant la figure 152, et je vais déterminer diverses quantités relatives à l'hypothèse qu'elle représente.

Soit A l'axe du générateur, G et P les demi-diagonales de ses rhombes, $\frac{a}{g}$ le rapport de A à G, $n$ l'exposant de la loi qui produit le dodécaèdre en agissant sur les angles latéraux, $a'$ l'axe du noyau hypothétique, $g'$ et $p'$ les diagonales de ses faces, $n'$ l'exposant de la loi qui en agissant sur ses bords inférieurs donne naissance au dodécaèdre, et $n''$ l'exposant de la loi susceptible de produire le noyau hypothétique comme forme secondaire du générateur.

J'ai donné plus haut les expressions des trois lignes $az$, $tz$, $iz$, nécessaires pour l'application de la formule, en adoptant comme quantités connues l'exposant $n$ et le rapport $\frac{a}{g}$. J'ai eu pour les expressions dont il s'agit $tz = 4n$, $iz = 2n + 3$ et $oz = \frac{6n}{a}\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$. Je les conserverai, pour la facilité du calcul, et j'en j'en déduirai celles des diverses quantités dont j'ai parlé.

1°. Pour A ou *as*.

$$as = ti - 2at = ti - 2 \cdot \frac{as}{2n} = ti - \frac{as}{n};\ ti = tz + iz = 6n + 3;$$

donc

$$ti - 2at = 6n + 3 - \frac{as}{n};$$

donc

$$as = 6n + 3 - \frac{as}{n},$$

ou

$$as \cdot n = 6n^2 + 3n - as,$$

et

$$as \cdot n + as = 6n^2 + 3n;$$

donc

$$\text{A ou } as = \frac{6n^2 + 3n}{n + 1}.$$

2°. Pour G.

$$\text{A} : \text{G} :: a : g;\ \frac{6n^2 + 3n}{n + 1} : \text{G} :: a : g;\ \text{G} = \frac{g}{a} \cdot \frac{6n^2 + 3n}{n + 1}.$$

3°. Pour P. Connaissant A et G, on aura facilement P, dont l'expression est $\sqrt{\frac{1}{8}\text{G}^2 + \frac{1}{9}\text{A}^2}$.

4°. Pour $a'$.

$$a' = 3iz - 3tz = 6n + 9 - 12n = 9 - 6n.$$

5°. Pour $g'$.

$$\sqrt{\tfrac{4}{38}g'^2} = oz = \frac{6n}{a}\sqrt{\tfrac{4}{38}g^2};$$

donc

$$g' = \frac{6ng}{a}.$$

6°. Pour $p'$. On aura son expression, en procédant de la même manière que pour celle de P.

7°. Pour $n'$. $a't$ ou $\frac{1}{2}(ti-a')$ étant la partie de l'axe du dodécaèdre qui excède de chaque côté l'axe du noyau hypothétique, et le décroissement ayant lieu sur les bords inférieurs de ce noyau, on aura

$$\tfrac{1}{2}(ti-a')=\frac{a'}{n'-1},$$

ou

$$\tfrac{1}{2}(6n+3-9+6n)=\frac{9-6n}{n'-1},\ \text{et}\ 2n-1=\frac{3-2n}{n'-1},$$

d'où l'on déduit $n'=\frac{2}{2n-1}$.

8°. Pour $n''$. Si l'on suppose que la diagonale oblique $a'p$ du noyau hypothétique se meuve parallèlement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle se trouve en contact avec le point $g$, il est aisé de voir qu'elle sera située à l'égard du générateur, comme une face d'un rhomboïde produit en vertu d'un décroissement par renversement sur l'angle situé à l'extrémité inférieure de la diagonale $sg$ du générateur. La figure 154 représente les coupes des deux rhomboïdes dans leurs positions respectives; et d'après la formule qui a été employée pour les exemples du même genre, on a

$$gn:a'n::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n''+2}{6n''-3}.a::g\sqrt{\tfrac{1}{3}}:\frac{n''+1}{6n''-3}.a::g'\sqrt{\tfrac{1}{3}}:\tfrac{1}{3}a',$$

ou

$$(2n''-1)g:(n''+1)a::g':a',$$

d'où l'on conclut

$$2n''a'g-a'g=n''ag'+ag',\ \text{et}\ n''=\frac{a'g+ag'}{2a'g-ag'}$$

205. J'ai promis de déterminer la limite entre les deux positions de la ligne $oz$ (fig. 152), l'une au-dessus, l'autre en dessous de la ligne $ln$. Pour y parvenir, il faut égaler les valeurs de $tz$ et de $tn$, et en déduire la valeur de $n$. Or,

$$tn = at + an = \frac{a}{2n} + \frac{a}{3} = \frac{3a + 2an}{6n};$$

et substituant la valeur de $a = \frac{6n^2 + 3n}{n + 1}$,

$$tn = \frac{18n^2 + 9n + 12n^3 + 6n^2}{(n+1)6n} = \frac{4n^2 + 8n + 3}{2n + 2};$$

mais $$tz = 4n;$$

donc on aura

$$\frac{4n^2 + 8n + 3}{2n + 2} = 4n, \quad \text{ou} \quad 4n^2 = 3,$$

d'où l'on tire $n = \sqrt{\frac{3}{4}}$, quantité incommensurable, d'où il suit que la coïncidence des deux lignes sur une même direction ne répond à aucune loi possible de décroissement, en sorte qu'il y a un saut brusque d'une position à l'autre. Lorsque $n = \frac{3}{4}$, comme dans le dodécaèdre que nous considérons ici, on a $tn = \frac{45}{14}$, et $tz = \frac{45}{15}$. $tz$ étant alors plus petite que $tn$, la ligne $oz$ se trouve au-dessus de $ln$, comme le représente la figure. Si l'on fait $n = 1$, on aura $tz = \frac{45}{12}$, c'est-à-dire qu'elle sera plus grande que $tn$, qui conserve toujours sa valeur $\frac{45}{14}$, et la ligne $oz$ sera située en dessous de $ln$. A mesure que la valeur de $n$ variera entre $\frac{3}{4}$ et l'unité, *oz* approchera de coïncider avec *ln*, soit dans un sens, soit dans l'autre, sans jamais arriver à une coïncidence exacte.

La ligne *oz* continuant de descendre en dessous de la ligne *ln*, après l'avoir dépassée, restera toujours en dessus de *dr*. Seulement, elle s'en rapprochera, à mesure que la loi de décroissement devenant plus rapide, la distance entre *ot* et *da* diminuera. Or, quelque petite qu'elle soit, les points *o* et *d* qui sont les extrémités des lignes *oz* et *dr*, seront toujours séparés, et lorsqu'ils coïncideront, la ligne *ot* se confondant elle-même avec la diagonale *ad*, le dodécaèdre s'évanouira.

La ligne *oz*, en se rapprochant de *dr*, arrive à un terme où les lignes *tz*, *iz* deviennent égales; c'est ce qu'exprime l'équation $4n = 2n + 3$, d'où l'on tire $n = \frac{3}{2}$. Le dodécaèdre se trouve alors converti en une double pyramide droite hexaèdre. Au-delà de ce terme, *tz* devient plus grande que *iz*, ainsi qu'on le voit fig. 153. Voici les expressions algébriques des diverses lignes indiquées plus haut, qui conviennent au cas dont il s'agit.

1°. Pour A ou *as*. On aura toujours $as = \frac{6n^2 + 3n}{n + 1}$.

2°. Pour G. On aura de même $G = \frac{g}{a} \cdot \frac{6n^2 + 3n}{n + 1}$.

3°. Pour P. $P = \sqrt{\frac{1}{3}G^2 + \frac{1}{9}A^2}$.

4°. Pour $a'$.

$$a' = 3tz - 3iz = 12n - 6n - 9 = 6n - 9,$$

5°. Pour $g'$. $g'=\frac{6ng}{a}$, comme ci-dessus.

6°. Pour $p'$. On déterminera son expression, en procédant comme pour celle de P.

7°. Pour $n'$. $\frac{1}{2}(ti-a')=\frac{a'}{n'-1}$. Substituant à la place de $ti$ et de $a'$ leurs valeurs $6n+3$ et $6n-9$, on trouvera $n'=\frac{2n-1}{2}$.

8°. Pour $n''$. Si l'on conçoit que la diagonale $a'o$ du noyau hypothétique se meuve parallèlement à elle-même vers le point $t$, jusqu'à ce qu'elle se trouve en contact avec le point $a$, il est facile de voir qu'elle sera située à l'égard du générateur comme une face d'un rhomboïde produit par un décroissement sur l'angle supérieur de ce générateur. On déterminera la valeur qui en résulte pour $n''$, en appliquant ici le calcul qui a été employé pour les dodécaèdres compris dans le second cas, et qui se rapporte à la fig. 5, pl. 15. La proportion de laquelle on déduit cette valeur est

$$\frac{(n''+1)}{n''}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n''-1}{3n''}.a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a',$$

ce qui donne

$$n''=\frac{2a'g+ag'}{2ag'-2a'g}.$$

206. La variété que j'ai choisie comme premier exemple relatif au troisième cas, et qui appartient encore à la chaux carbonatée, semble enchérir par

ses propriétés sur toutes celles qui ont été citées jusqu'ici. Son noyau hypothétique n'est pas simplement, comme dans ces dernières, un rhomboïde secondaire d'une forme particulière, duquel naît un dodécaèdre qui n'est lui-même qu'hypothétique, c'est une reproduction du générateur, et le résultat de la loi qui en fait dépendre le dodécaèdre se trouve réalisé par la cristallisation dans une autre variété que j'indiquerai plus bas.

Celle dont il s'agit ici, et que représente la fig. 155, porte le nom d'*anarmostique*. Son signe est......
$\underset{u}{\overset{1}{D}}\,\underset{f}{E^{11}}\,\underset{h}{\overset{\frac{4}{5}}{E}}e\,\underset{r}{E^{\frac{3}{2}}}\,\overset{\frac{3}{2}}{E}\,\underset{\overset{1}{o}}{A}$. Les faces $\nu$, $\nu$, appartiennent au dodécaèdre que nous avons ici à considérer, et qui est représenté séparément (fig. 156). On voit (fig. 157) la projection de son noyau hypothétique. En comparant les figures 152 et 157, on remarquera du premier coup-d'œil que ce noyau rentre parmi ceux dont la coupe principale tourne ses bords supérieurs $a'o$, $ps'$, vers les diagonales obliques $ad$, $gs$, du générateur. Dans le même cas, les arêtes les plus saillantes $c$, $c'$ (fig. 156) du dodécaèdre répondent aussi à ces diagonales, et de plus leur sont parallèles.

L'exposant de la loi qui donne le dodécaèdre étant représenté par $\frac{3}{4}$, dans les applications de la théorie, cherchons les valeurs numériques dont nous avons donné plus haut les expressions algébriques. Nous aurons,

1°. A ou $as = \frac{6n^2+3n}{n+1} = \frac{45}{14}$.

2°. $G = \frac{g}{a} \times \frac{6n^2+3n}{n+1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{45}{14}$.

3°. $a' = 9 - 6n = \frac{9}{2}$; $g' = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

De là il suit que

$$a' : g' :: \sqrt{3} : 1 :: A : G.$$

C'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au générateur, ainsi que je l'ai annoncé.

4°. $n' = \frac{2}{2n-1} = 4$.

5°. $n'' = \frac{a'g + ag'}{2a'g - ag'} = 2$. C'est-à-dire que le rhomboïde hypothétique est susceptible d'être produit à l'aide d'un décroissement par deux rangées en hauteur sur les angles inférieurs du générateur, lequel décroissement donne un rhomboïde secondaire semblable au primitif, et c'est ce qui doit avoir lieu dans le cas présent.

207. Mais ce n'est pas tout : la loi du décroissement par quatre rangées qui, en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, est susceptible de faire naître le dodécaèdre, existe dans la variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *ascendante*, et que représente la figure 158. C'est d'elle que dérivent les faces *n*, *n*, qui se combinent avec les faces *m* du rhomboïde contrastant et les pans *c*, *c* du prisme hexaèdre, ce qui donne pour le signe représentatif

de cette variété, $\overset{2}{\underset{c}{e}}\overset{3}{\underset{m}{e}}\overset{4}{\underset{n}{D}}$. Ce second cas donne une existence réelle à ce dont le premier n'indique que la possibilité.

Il me reste à déterminer les incidences de faces *f*, *o* et *h*, sur celles du dodécaèdre.

1°. Pour *f*. Je reprends la figure 152, et je cherche les valeurs numériques des coordonnées *tz*, *iz* et *oz*, à l'aide de leurs expressions algébriques trouvées ci-dessus (p. 592). Nous aurons $tz = 4n = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$,

$$iz = 2n + 3 = 2 \cdot \tfrac{3}{4} + 3 = \tfrac{9}{2}, \quad oz = \frac{6n}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = 3.$$

Maintenant, je considère que le rhomboïde hypothétique qui fait ici la fonction de générateur, et dont la coupe principale est $a'os'p$, tourne ses diagonales obliques vers les arêtes les moins saillantes du dodécaèdre. Ainsi le rapport de $s$ à $t$ sera celui de $tx$ à $ix$. Or, $tx = iz = \frac{9}{2}$; $ix = tz = 3$. Donc $s = \frac{9}{2}$ et $t = 3$. De plus, $px = oz = 3 = \sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$. Donc $g' = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Multipliant toutes ces quantités par $\frac{2}{3}$, nous aurons

$$s = 3, \quad t = 2, \quad g' = \sqrt{3}.$$

Or, les faces du rhomboïde *f* se rapportent au cas de la formule (C) p. 577. Donc

$$gr : rz :: \sqrt{\tfrac{5}{3} + (4 - 3)^2} : 2 + 6 :: \sqrt{\frac{5+3}{3}} : 8$$
$$:: \sqrt{\tfrac{8}{3}} : 8 :: 1 : \sqrt{24};$$

ce qui donne pour l'incidence proposée $168^d\,37'\,47''$.

2°. Pour $o$. La formule (B) donne

$$sr : rz :: \sqrt{1+27} : \sqrt{12} :: \sqrt{7} : \sqrt{3};$$

d'où l'on déduit pour l'incidence de $o$ sur $v$ $132^d 13' 22''$.

3°. Pour $h$. On pourrait conclure l'incidence de cette face sur les faces $v$, $v$, de celle qui a lieu entre ces dernières, en ajoutant $90^d$ à celui qui en donne la mesure. Mais, pour ne pas laisser la formule ($a$) sans application, je la substituerai ici à celle que j'ai indiquée en traitant des décroissemens sur les angles latéraux d'un rhomboïde. Nous aurons donc

$$sr : rz :: \sqrt{\tfrac{1}{3}(4+9)} : 4+9 :: 1 : \sqrt{39},$$

ce qui donne pour l'incidence proposée $170^d 54' 9''$.

La variété ascendente qui sert ici de terme de comparaison à l'anarmostique, va nous fournir une nouvelle application de la formule, dont le sujet sera l'incidence des faces $m$ (fig. 158) du rhomboïde contrastant sur les faces $n$, $n$, du dodécaèdre combiné avec ce rhomboïde. D'après ce qui a été dit de la similitude entre le même dodécaèdre et celui auquel appartiennent les faces $v$, $v$ (fig. 155), nous aurons toujours $s=3$, $t=2$, $g=\sqrt{3}$, et de plus $m=1$, $b=4$. Ces valeurs substituées dans la formule (A) donnent

$$sr : rz :: \sqrt{\tfrac{17}{3}+25} : 2+12 :: \sqrt{82} : \sqrt{588},$$

d'où l'on déduit pour l'incidence de $m$ sur $n$ (fig. 158) $159^d 21' 21''$.

208. J'ai maintenant à proposer un second exemple tiré d'un dodécaèdre qui tourne ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur. Je choisirai la variété de fer oligiste que je nomme *uni-sénaire*, et que représente la fig. 31. Son signe est $\underset{P}{\mathrm{P}}\,\underset{\overset{1}{o}}{\mathrm{A}}\,\underset{g}{\mathrm{E}^{66}\acute{\mathrm{E}}}$.

L'exposant de la loi qui donne le dodécaèdre étant 3, et les valeurs numériques du rapport entre les dimensions du générateur qui sont censées connues étant $a = \sqrt{63}$, $g = \sqrt{9}$, $p = \sqrt{10}$, si l'on cherche celles des autres quantités, d'après les expressions algébriques données plus haut, on aura

1°. A ou $as = \frac{6n^2 + 3n}{n + 1} = \frac{63}{4}$.

2°. $G = \frac{g}{a} \cdot \frac{6n^2 + 3n}{n + 1} = \sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \frac{63}{4}$.

3°. $P = \sqrt{\frac{1}{3}G^2 + \frac{1}{9}A^2} = \frac{3}{4}\sqrt{70}$.

4°. $a' = 6n - 9 = 9$.

5°. $g' = \frac{18}{\sqrt{7}}$.

6°. $p' =$

7°. $n' = \frac{2n - 1}{2} = \frac{5}{2}$.

8°. $n'' = 2$. Cette loi est celle qui donne un rhomboïde semblable à celui dont le signe est $\underset{1}{B}$.

Pour déterminer l'incidence des faces $g$, $g$, du dodécaèdre sur la face $o$ perpendiculaire à l'axe, on se servira de la formule simplifiée relativement aux cas de ce genre, et qui est $sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2+3s^2} : 2g$, $s=4n=12$, $t=2n+3=9$, $g'=\frac{18}{\sqrt{7}}$.

Donc nous pouvons faire $s=4$, $t=3$, $g'=\sqrt{\frac{36}{7}}$.

Ces valeurs substituées dans la formule donnent

$$sv : vz :: \sqrt{4+48} : \sqrt{\tfrac{36}{7}} \,.\, 4 :: \sqrt{13} : \sqrt{\tfrac{36}{7}} :: \sqrt{91} : 6\,;$$

d'où l'on conclura pour l'incidence proposée..... $126^d\,16'$.

209. J'ajouterai ici un exemple relatif au cas où le décroissement sur les angles latéraux ayant $\frac{3}{2}$ pour exposant, le dodécaèdre qui en résulte est composé de deux pyramides droites réunies par leurs bases. Le sujet de cet exemple sera la variété de ferroligiste dont on voit la projection (fig. 35) et que je nomme *bino-ternaire*. Elle a pour signe $\underset{P}{P}\,\overset{33}{\underset{n}{E}}\,\overset{2}{\underset{s}{E}}\,A$. L'incidence qu'il s'agit de déterminer, à l'aide de la formule modifiée convenablement est celle des faces $n$, $n$ du dodécaèdre, sur les faces $s$, $s$ du rhomboïde terminal. Dans ce cas on a

$$sr : rz :: \sqrt{s^2 \,.\, \tfrac{1}{3}(m^2+6^2)+\left(ms-2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}\right)^2} : 2m\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}+65\,;$$

Nous avons eu

$$ti=6n+3=12\,;$$

donc

$$s=6,\ g'\ \frac{6n \,.\, g}{a}=9 \,.\, \sqrt{\tfrac{9}{63}}=\frac{9}{\sqrt{7}}\,;$$

donc

$$s : g' :: 6 : \frac{9}{\sqrt{7}} :: 2 : \frac{3}{\sqrt{7}} :: \sqrt{28} : \sqrt{9}.$$

Ainsi nous pouvons faire $s = \sqrt{28}$. $g = \sqrt{9}$. Dans le rhomboïde terminal $g'' : p'' :: 12 : \sqrt{55}$. Donc

$a'' : g'' :: \sqrt{63} : \sqrt{144}$; et $\sqrt{\frac{1}{3}g''^2} : \frac{1}{3}a' :: \sqrt{48} : \sqrt{7} :: m : b$.

Substituant ces valeurs dans la formule, on aura

$$sr : rz :: \sqrt{28 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 55 + (\sqrt{48 \cdot 28} - 2\sqrt{7 \cdot 3})^2} : 2\sqrt{48 \cdot 5} + \sqrt{7 \cdot 28},$$

et en réduisant, $:: \sqrt{952} : \sqrt{1083}$. Ce rapport donne pour l'incidence proposée $136^d 51'$.

210. Je vais terminer cet article par un résumé des applications que j'ai faites de la formule à la théorie de la chaux carbonatée, qui est de toutes les espèces minérales la plus féconde, sous tous les rapports, en modifications diversifiées. J'ai observé jusqu'ici, parmi ses formes cristallines, 17 rhomboïdes différens, auxquels il faut ajouter les deux limites, dont l'une donne des faces perpendiculaires à l'axe, et l'autre des faces qui lui sont parallèles, ce qui fait en tout 19. Le nombre des dodécaèdres qui font partie de la même série est de 25. Multipliant ces deux nombres l'un par l'autre, on a 475 combinaisons binaires relatives aux solides dont il s'agit, et autant d'incidences respectives des faces comprises dans ces combinaisons. Parmi ces incidences, il y en

a environ 70 qui existent sur les formes que renferme ma collection. Plusieurs de ces mêmes incidences m'ont été offertes par de nouvelles variétés que j'ai reçues récemment, et l'on a tout lieu de présumer qu'à mesure qu'il s'en présentera d'inconnues, le nombre de celles qui seront susceptibles des applications de la formule s'accroîtra de plus en plus. J'ai pensé que ce détail achèverait de faire sentir l'utilité d'un moyen de détermination, à l'aide duquel la marche est tracée d'avance, pour arriver en un instant à une solution aussi expéditive que facile de tous les problèmes du même genre dont les découvertes à venir pourront fournir la matière.

FIN DU TOME PREMIER.

# TABLE

## DES PRINCIPAUX ARTICLES

### CONTENUS DANS CE VOLUME.



### PARTIE SYNTHÉTIQUE.

## PARTIE ANALYTIQUE.



FIN DE LA TABLE DES ARTICLES.