ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — Enrico Betti *in Pisa*

Eugenio Beltrami *in Pavia* — Felice Casorati *in Pavia.*

SERIE II – TOMO X

(dal luglio 1880 al maggio 1882).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO X.^{0} (SERIE II.^{a})

Indice.

Di una proprietà delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

(*Nota di* F. Brioschi, *in Milano.*)

In uno degli ultimi Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences (23 Dicembre 1879) il sig. Hermite continuando la pubblicazione delle sue ricerche: *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* ha dimostrato il seguente teorema. Indicando con y_1, y_2 due funzioni di x integrali particolari di una equazione differenziale lineare del secondo ordine, se si suppone noto il prodotto $y_1 y_2 = z$ degli integrali stessi, si potranno determinare i valori dei coefficienti dell'altra equazione differenziale lineare del secondo ordine che ha per integrali particolari le espressioni:

$$Y_1 = y_1 e^{cx}, \qquad Y_2 = y_2 e^{-cx}$$

nelle quali c è costante, in funzione dei coefficienti della prima, di z e delle loro derivate rispetto ad x.

L'esposto teorema è suscettibile di una importante generalizzazione, giacchè esso sussiste altresì allorquando i valori delle Y_1, Y_2 sieno i seguenti:

$$Y_1 = y_1 u_1, \qquad Y_2 = y_2 u_2$$

essendo u_1, u_2 funzioni di x.

Supponiamo che le due equazioni differenziali sieno:

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= 0 \\ Y'' + lY' + mY &= 0. \end{aligned}$$

Dalla prima si ha come è noto la:

$$y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = C e^{-\int p dx} \tag{1}$$

Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

(*Memoria seconda di* F. Brioschi, *in Milano.*)

1.° Nel volume IX di questi Annali ho pubblicato, col titolo del presente, un primo lavoro nel quale ho dimostrato come nella integrazione di alcune equazioni differenziali lineari del secondo ordine possano giovare altre equazioni differenziali di ordine superiore connesse alle prime da certe determinate relazioni.

Se con:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

indichiamo una equazione differenziale del secondo ordine, nella quale p, q sono funzioni di x ed $y' = \frac{dy}{dx}$, è noto per un teorema di Liouville che la potenza ennesima di un integrale particolare dell'equazione stessa soddisfa una equazione differenziale lineare dell'ordine $n+1$.

Sieno y_1, y_2 due integrali particolari della equazione differenziale (1) ed $f(y_1, y_2)$ una forma binaria dell'ordine n; la proprietà sopra ricordata sussisterà per la forma f, vale a dire la forma f soddisferà una equazione differenziale lineare dell'ordine $n+1$ di cui i coefficienti saranno funzioni di p, di q e delle loro derivate rispetto ad x.

Sieno, come nella prima Memoria, $h(y_1, y_2)$, $\theta(y_1, y_2)$ i due seguenti covarianti della forma f:

$$h(y_1, y_2) = f_{11} f_{22} - f_{12}^2; \qquad \theta(y_1, y_2) = 2(f_1 h_2 - f_2 h_1);$$

posto:

$$f(y_1, y_2) = F(x), \qquad h(y_1, y_2) = H(x), \qquad \theta(y_1, y_2) = \Theta(x)$$

si hanno come nella Memoria stessa le:

$$\left.\begin{aligned} H(x) &= \frac{\mu^2}{n^2(n-1)C^2}[nFF'' - (n-1)F'^2 + npFF' + n^2qF^2] \\ \Theta(x) &= \frac{\mu}{n(n-2)C}[2(n-2)F'H - nH'F] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

nelle quali:

$$\mu = e^{\int p dx} \quad \text{e } C \text{ una costante.}$$

Sieno ora:

$$\left.\begin{aligned} &P_0 = 1, \qquad P_1 = 0, \qquad P_2 = H(x), \qquad P_3 = \Theta(x) \\ &P_{r+1} = \frac{\mu}{n(n-r)C}[r(n-2)F'P_r - nFP'_r] + \frac{r(n-1)}{n-r}P_2P_{r-1}; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

la equazione differenziale dell'ordine $n+1$ alla quale soddisfa la funzione $F(x)$ sarà la seguente:

$$\frac{\mu}{C}[(n-2)F'P_n - FP'_n] + n(n-1)P_2P_{n-1} = 0. \qquad (4)$$

Per una forma f quadratica, o per $n=2$, la equazione richiesta sarà quindi la:

$$P'_2 = H'(x) = 0,$$

per $n=3$ la seguente:

$$\frac{\mu}{C}[F'\Theta - F\Theta'] + 6H^2 = 0$$

ossia la:

$$3FH'' - (2F' - 3pF)H' + (F'' + pF' + 9qF)H = 0$$

e per $n=4$:

$$2F\Theta'' - (5F' - 2pF)\Theta' + (5F'' + 5pF' + 32qF)\Theta = 0$$

od anche:

$$2FH''' - 3(F' - 2pF)H'' + (3F'' + 2\lambda F)H' - 2(F''' + 3pF'' + \lambda F')H = 0$$

posto:

$$\lambda = p' + 2p^2 + 16q.$$

2.° Consideriamo il caso $n=2$. La equazione $H'(x)=0$ conduce facilmente alla nota equazione differenziale lineare del terzo ordine:

$$F''' + 3pF'' + (p' + 2p^2 + 4q)F + 2(q' + 2pq)F = 0 \qquad (5)$$

mentre indicando con Δ il discriminante della forma quadratica f si ha dalla prima delle (2):

$$\Delta = \frac{\mu^2}{4C^2}[2FF'' - F'^2 + 2pFF' + 4qF^2]. \tag{6}$$

Sieno ora:

$$p = \frac{1}{2}\frac{\gamma(x)}{\varphi(x)}, \qquad q = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

si hanno le:

$$p' + 2p^2 + 4q = \frac{1}{2\varphi^2}[\varphi(\gamma' + 8\psi) + \gamma(\gamma - \varphi')]$$

$$q' + 2pq = \frac{1}{\varphi^2}[\varphi\psi' + \psi(\gamma - \varphi')]$$

se quindi supponiamo essere:

$$\varphi = (\gamma - \varphi')\delta \tag{7}$$

si avrà che la equazione differenziale superiore prende la forma:

$$2\varphi\delta F''' + 3\gamma\delta F'' + [\gamma + \gamma'\delta + 8\psi\delta]F' + 4(\psi + \psi'\delta)F = 0 \tag{8}$$

mentre la (1) può scriversi:

$$y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{1}{\delta}\right)y' + \frac{\psi}{\varphi}y = 0. \tag{9}$$

Sieno:

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3; \qquad \gamma(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\delta(x) = lx + m; \qquad \psi(x) = \alpha x + \beta.$$

I coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri della equazione (7) daranno dapprima le quattro relazioni:

$$l(a - 12) = 4, \qquad lb + m(a - 12) = 0, \qquad l(c + g_2) + mb = -g_2,$$

$$m(c + g_2) = -g_3$$

dalle quali eliminando a, b, c si ottiene la:

$$4m^3 - g_2 l^2 m + g_3 l^3 = 0$$

e quindi $m = -le$ essendo e una radice della equazione $\varphi(x) = 0$. Posto $l = \frac{1}{\rho}$ si hanno quindi le:

$$a = 4(\rho + 3), \qquad b = 4\rho e, \qquad c = 4\rho e^2 - g_2(\rho + 1)$$

$$\delta = \frac{1}{\rho}(x - e).$$

Sieno e_1, e_2, e_3 le radici della equazione $\varphi(x)=0$ e pongasi:

$$x-e_1=(e_2-e_1)sn^2u, \qquad x-e_2=(e_1-e_2)cn^2u, \qquad x-e_3=(e_1-e_3)dn^2u$$

per le quali $k^2=\frac{e_2-e_1}{e_3-e_1}$. Si hanno tosto le:

$$\frac{dy}{du}=y'\frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{e_3-e_1}}, \qquad \frac{d^2y}{du^2}=\frac{\varphi(x)}{e_3-e_1}\left[y''+\frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y'\right]$$

per le quali e pel valore di δ l'equazione differenziale lineare del secondo ordine (9) prende la forma:

$$\frac{d^2y}{du^2}+\rho(e_2-e_1)\frac{snu\,cnu\,dnu}{x-e}\frac{dy}{du}+\frac{\alpha x+\beta}{e_3-e_1}y=0$$

e quindi:

$$\left.\begin{array}{llll} 1.^\circ \text{ se} & e=e_1 & \dfrac{d^2y}{du^2}+\rho\,\dfrac{cnu\,dnu}{snu}\dfrac{dy}{du}+\dfrac{\alpha x+\beta}{e_3-e_1}y=0 \\ 2.^\circ \text{ se} & e=e_2 & \dfrac{d^2y}{du^2}-\rho\,\dfrac{snu\,dnu}{cnu}\dfrac{dy}{du}+\dfrac{\alpha x+\beta}{e_3-e_1}y=0 \\ 3.^\circ \text{ se} & e=e_3 & \dfrac{d^2y}{du^2}-\rho k^2\dfrac{snu\,cnu}{dnu}\dfrac{dy}{du}+\dfrac{\alpha x+\beta}{e_3-e_1}y=0. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

3.° Consideriamo ora l'equazione differenziale del terzo ordine (8). Supponiamo dapprima essere:

$$\psi+\psi'\delta=0$$

ossia:

$$\psi=-\frac{\alpha}{\rho}(x-e);$$

la equazione suddetta sarà evidentemente soddisfatta supponendo $F(x)=A$ costante; ed in questa ipotesi si ha dalla relazione (6):

$$\Delta=\frac{A^2}{C^2}q\mu^2=-\frac{A^2}{C^2}\frac{\alpha}{\rho}(x-e)^{\rho+1}$$

dalla quale si ha tosto $\rho+1=0$. Le tre equazioni differenziali del secondo ordine diventano quindi:

$$\begin{array}{lll} 1.^\circ \text{ se} & e=e_1 & \dfrac{d^2y}{du^2}-\dfrac{cnu\,dnu}{snu}\dfrac{dy}{du}-m^2k^2sn^2u\cdot y=0 \\ 2.^\circ \text{ se} & e=e_2 & \dfrac{d^2y}{du^2}+\dfrac{snu\,dnu}{cnu}\dfrac{dy}{du}+m^2k^2cn^2u\cdot y=0 \\ 3.^\circ \text{ se} & e=e_3 & \dfrac{d^2y}{du^2}+k^2\dfrac{snu\,cnu}{dnu}\dfrac{dy}{du}+m^2dn^2u\cdot y=0 \end{array}$$

posto $\alpha = -m^2$. Supponiamo la forma quadratica $f(y_1, y_2) = y_1 y_2$, sarà $\Delta = -\frac{1}{4}$ quindi $m = \frac{C}{2A}$. Dalle due relazioni:

$$y_1 y_2 = A \qquad y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = C e^{-\int p dx} = C \frac{\sqrt{x-e}}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

si deduce la:

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{2mX} \text{ essendo } X = \int \frac{\sqrt{x-e}}{\sqrt{\varphi(x)}} dx;$$

saranno perciò:

$$y_1 = \sqrt{A} \cdot e^{mX}, \qquad y_2 = \sqrt{A} \cdot e^{-mX}$$

integrali particolari delle tre equazioni differenziali superiori, risultando nei tre casi:

1.° $\qquad X = k \int snu\, du = \frac{1}{2} \log \frac{dnu - k\, cnu}{dnu + k\, cnu}$

2.° $\qquad X = -ik \int cnu\, du = -i \operatorname{ang} \cdot \operatorname{sen}(k\, snu)$

3.° $\qquad X = -i \int dnu\, du = -i\, amu.$

Quest'ultimo caso fu già considerato dal sig. Gyldén (*) (Comptes Rendus, 2 Février 1880).

4.° Ma si può in generale soddisfare alla equazione differenziale del terzo ordine (8) assumendo per $F(x)$ un polinomio del grado n, ponendo cioè:

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Infatti il primo membro di quella equazione risulta del grado $n+1$ ed egualiando a zero i coefficienti delle varie potenze di x si otterranno $n+2$ equazioni per mezzo delle quali rimangono determinati gli n coefficienti di $F(x)$ e le α, β in funzione di g_2, g_3, ρ, e. Ora dai coefficienti di x^{n+1} e di x^n si ottengono le:

$$\alpha = -n(n+\rho+1), \qquad \beta = -n\rho e + (2n+\rho-1)a_1$$

per le quali:

$$\frac{\alpha x + \beta}{e_3 - e_1} = -\left[n(n+\rho+1)\frac{x-e}{e_3-e_1} + h\right]$$

(*) Vedi anche una Nota del sig. Hermite nel Giornale di Borchardt.

dove:

$$h = \frac{n(n+2\rho+1)e - (2n+\rho-1)a_1}{e_3 - e_1};$$

quindi:

1.° se $\quad e = e_1 \quad \frac{\alpha x + \beta}{e_3 - e_1} = -[(n+\rho+1)k^2 sn^2 u + h_1]$

2.° se $\quad e = e_2 \quad = n(n+\rho+1 k^2 cn^2 u - h_2$

3.° se $\quad e = e_3 \quad = n(n+\rho+1) dn^2 u - h_3.$

Supponiamo ancora essere $f(y_1, y_2) = y_1 y_2$ quindi $\Delta = -\frac{1}{4}$, se con x_s si indica una radice qualsivoglia della equazione $F(x) = 0$ si hanno le:

$$y_1 y_2 = F(x) \qquad y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = C \frac{\sqrt{x-e}}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

e per la (6):

$$C = (x_s - e)^{\frac{1}{2}\rho} F'(x_s) \sqrt{\varphi(x_s)}$$

dalle quali:

$$\log \frac{y_1}{y_2} = \sum_1^n {}_s (x_s - e)^{\frac{\rho}{2}} \sqrt{\varphi(x_s)} \int \frac{\sqrt{x-e}}{(x-x_s)\sqrt{\varphi(x)}} dx$$

ed infine:

$$\log \frac{y_1}{y_2} = \sum_1^n {}_s (x_s - e)^{\frac{\rho}{2}+1} \log \frac{t_1(x_s)}{t_2(x_s)}$$

essendo:

$$t_1(x_s) = \sqrt{\upsilon(x)} - \sqrt{\upsilon(x_s)} - (x - x_s), \qquad t_2(x_s) = \sqrt{\upsilon(x)} + \sqrt{\upsilon(x_s)} - (x - x_s)$$

e:

$$\sqrt{\upsilon(x)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{x-e}}.$$

Evidentemente si sarebbe giunti a risultati analoghi assumendo per $\varphi(x)$, $\gamma(x)$, $\psi(x)$ tre polinomi dei gradi s, $s-1$, $s-2$.

Febbrajo 1880.

Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa.

(*Memoria di* F. Casorati, *a Pavia.*)

Introduzione.

Le ricerche che si fanno colla variabilità complessa si basano, almeno in parte, essenzialmente sulle relazioni che scaturiscono dal considerare i modi di comportarsi delle funzioni di una variabile complessa al girare di questa intorno a taluni suoi valori particolari. Questa osservazione mi fece nascere il pensiero di investigare e stabilire, una volta per sempre in anticipazione ed indipendentemente da ogni studio o scopo particolare, le proprietà e le formole generali che da siffatte relazioni fondamentali importa ed è possibile di ricavare a beneficio delle singole ricerche ulteriori; così da costituire una teorica a sè, della quale, come di strumento comune, possano valersi tutti coloro che d'ora innanzi vorranno intraprendere studî sulle funzioni di variabili complesse.

Nel tradurre in atto questa idea riconobbi che il mio compito era assai più facile di quello che in prima reputassi; riducendosi esso in gran parte ad interpretare convenientemente il *Calcolo delle differenze finite.* Vidi poi anche esserci *non uno solo,* ma *diversi* modi di interpretare questo calcolo delle funzioni di variabili *discrete* a vantaggio delle ricerche sulle funzioni di variabili *continue.*

Nel Cap. 1 di questa Memoria esporrò distesamente la interpretazione che per la prima viene suggerita dalla osservazione sovra esposta, e ne mostrerò subito la fecondità, facendone applicazione nei Cap.[i] 3, 4, 5 a studî in oggi assai coltivati, quali sono principalmente quelli sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili. Si vedrà nel Cap. 4 che la parte principale della teorica generale di queste equazioni, per la quale va meritamente celebrato il nome del sig. Fuchs, diventa un'ovvia traduzione di ciò che da tempo si sapeva nel *Calcolo delle differenze* relativamente all'integrazione delle equazioni alle differenze, lineari e con coefficienti costanti.

Terminerò la Memoria indicando parecchie altre interpretazioni.

Cap. 1. Prima interpretazione.

§ **1**. Sia x una variabile complessa indipendente i cui valori imagineremo rappresentati nel solito modo dai punti di un piano, e sia x_1 un suo valore particolare intorno a cui converrà imaginare che essa giri. Insino a quando non sia necessario di considerare simultaneamente giri intorno a più punti, giova ritenere che la variabile abbia a muoversi soltanto entro una porzione del piano racchiusa fra due cerchi di centro x_1, porzione che diremo *corona,* ed occorrendo, di centro x_1.

Prenderemo in considerazione esclusivamente funzioni analitiche di x, aventi in x_1 quella qualunque singolarità che si voglia, ma per le quali si possa imaginare intorno ad x_1 una corona entro cui esse siano esenti da ogni singolarità. Scegliendo comunque un punto x_0 nella corona, una qualunque, y, di tali funzioni si potrà imaginare rappresentata da una serie di potenze intere positive di $x-x_0$, convergente nel massimo cerchio di centro x_0 contenuto nella corona. Da questa prima serie se ne potranno imaginare dedotte altre ed altre quante si vorranno relative analogamente ad altri punti presi successivamente, come x_0, nella corona, le quali darebbero i valori di y lungo un cammino qualunque tracciato nella medesima. La y si dirà *monotropa* nella corona, se ripiglierà lo stesso valore al ritornare di x in uno stesso punto; *politropa* in ogni altro caso.

Riterremo come *positivo* un giro intorno ad x_1 quando si faccia nel senso stesso in cui deve rotare la parte positiva dell'asse reale per sovrapporsi con un quarto di giro alla parte positiva dell'asse imaginario. È anche il senso secondo cui si ritiene che cresca l'angolo od argomento di $x-x_1$.

Ciò premesso, significherò con Δy la differenza o l'incremento che la funzione y riceve mentre la variabile indipendente, partendo dal punto qualunque x dalla corona, vi ritorna compiendo un giro positivo intorno ad x_1.

Ora osservo che risulta

$$\Delta \log(x - x_1) = 2\pi i$$

cioè che la funzione logaritmica, $\log(x - x_1)$, si comporta, rispetto alle differenze di cui vogliamo trattare, come si comporta nel *Calcolo delle differenze* la variabile, che ivi si assume come indipendente. Dunque, riferendo metodicamente da qui innanzi le differenze di tutte le altre funzioni a quella del logaritmo di $x - x_1$, come se questo fosse la variabile indipendente, potremo tradurre immediatamente tutti i risultati già conseguiti nel detto *Calcolo* in altrettanti di spettanza della teorica che ci siamo proposto di costituire. In altre parole, questa teorica non è altro in sostanza che lo stesso *Calcolo delle differenze,* interpretato, come dicemmo, in guisa particolarmente opportuna per le ricerche sulla variabilità complessa. A siffatta particolare interpretazione poteva condurre senz'altro la osservazione del frequente comparire della funzione elementare $\log(x - x_1)$ in coteste ricerche.

Per maggiore semplicità, ci riferiremo, non al $\log(x - x_1)$, ma al quoziente

$$t = \frac{\log(x - x_1)}{2\pi i},$$

così che questa variabile t avrà per differenza l'unità ($\Delta t = 1$). Quindi, imaginare che la x compia uno, due,... giri intorno ad x_1 sarà lo stesso che imaginare che t cresca di una, due,... unità; e potremo riguardare le funzioni secondo l'opportunità come dipendenti da x o come dipendenti da t.

Pel frequente uso, giova significare con una sola lettera ϖ il modulo di periodicità $2\pi i$ del logaritmo. Pertanto x e t dipenderanno sempre tra loro come segue:

$$t = \frac{\log(x - x_1)}{\varpi}, \qquad x - x_1 = e^{\varpi t}.$$

§ **2.** Nel *Calcolo delle differenze* le grandezze che hanno la differenza nulla si dicono costanti; ma s'intende che possono essere funzioni periodiche, aventi per periodo la differenza costante della variabile indipendente. Dal presente nostro punto di vista, le grandezze che avranno la differenza nulla saranno quelle le quali, come funzioni di x, ripigliano al girare di x nella corona sempre lo stesso valore in uno stesso punto, cioè sono *monotrope;* e le quali come funzioni di t riescono appunto dotate dal periodo $\Delta t = 1$.

In questa Memoria, per significare brevemente *funzione monotropa* userò della lettera φ, minuscola o majuscola, ed accompagnata occorrendo da indici od accenti. Sarà dunque sempre

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\varphi\cdot y = \varphi\Delta y.$$

E, come soluzione della equazione $\Delta y = 0$, si potrà scrivere $y = \varphi$, intendendosi una φ del resto arbitraria. E, giusta il teorema di LAURENT, potremo sempre assumere

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(x - x_1)^n = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{n\varpi t},$$

ove le c significhino grandezze affatto costanti, non solo rispetto alla variazione discontinua ($\Delta t = 1$) di t, ma anche rispetto alla sua variazione continua.

§ **3**. Si sa che nel *Calcolo delle differenze* importa di considerare, insieme con le differenze Δy, $\Delta^2 y$,... di una funzione, anche separatamente i valori che essa prende corrispondentemente ai valori $t+1$, $t+2$,... della variabile. Questi valori vengono per lo più significati come segue:

$$y_{t+1}, \qquad y_{t+2},\ldots$$

Ma vi ha grande vantaggio a significare questi valori con altra notazione, come la seguente

$$\theta y, \qquad \theta^2 y,\ldots,$$

la quale si presta a lasciar riguardare θ come un simbolo di operazione, cioè di quell'operazione che eseguita su y_t dà per risultato y_{t+1}.

Riterremo dunque sempre per definizione

$$\theta y = y_{t+1} = y + \Delta y, \qquad \Delta y = \theta y - y.$$

Le Δ, ossia differenze, successive restano definite e rappresentate, come si sa, a seconda delle eguaglianze

$$\Delta\cdot\Delta y = \Delta^2 y, \qquad \Delta\Delta^2 y = \Delta^3 y,\ldots$$

Similmente le θ successive restano definite dalle

$$\theta\cdot\theta y = \theta^2 y, \qquad \theta\cdot\theta^2 y = \theta^3 y,\ldots;$$

le quali definizioni equivalgono alle

$$y_{t+2} = \theta^2 y, \qquad y_{t+3} = \theta^3 y,\ldots\ .$$

§ **4**. Per procedere con maggiore brevità e chiarezza giova qui notare alcune ovvie proprietà fondamentali della operazione θ.

Questa operazione è eminentemente *distributiva,* in quanto che lo è, non soltanto rispetto ad una somma di funzioni u, v, w,..., ma rispetto altresì a qualunque altra combinazione univoca F. Infatti sussistono le

$$\theta(u+v)=\theta u+\theta v, \qquad \theta(u-v)=\theta u-\theta v, \qquad \theta(uv)=\theta u\cdot\theta v, \qquad \theta\frac{u}{v}=\frac{\theta u}{\theta v}$$

ed in generale

$$\theta F(u,\ v,\ w,\ldots)=F(\theta u,\ \theta v,\ \theta w,\ldots),$$

come si riconosce subito, seguendo colla mente il variare simultaneo di u, v, $w,\ldots$, F al girare di x intorno ad x_1. Ed altrettanto ha luogo per θ^n, cioè

$$\theta^n F(u,\ v,\ w,\ldots)=F(\theta^n u,\ \theta^n v,\ \theta^n w,\ldots).$$

Invece di $\theta y-ay$ si potrà e gioverà sovente scrivere $(\theta-a)y$. Quindi, in particolare, $(\theta-1)y$ invece di Δy, e viceversa $(1+\Delta)y$ invece di θy. E, facendo astrazione da ogni particolare soggetto y, potremo significare la relazione tra le operazioni θ e Δ scrivendo $\theta-1=\Delta$, $1+\Delta=\theta$.

Le operazioni

$$\theta-a_1, \qquad \theta-a_2,$$

da eseguirsi, s'intende, sopra una funzione y, e dove a_1, a_2 significano costanti rispetto ad x_1 ossia a t, sono tra loro *commutative;* perciocchè è identicamente

$$(\theta-a_1)(\theta-a_2)y=(\theta-a_2)(\theta-a_1)y=(\theta^2-[a_1+a_2]\theta+a_1a_2)y.$$

E più in generale, significando a_1, $a_2,\ldots$, a_n le radici dell'equazione in z

$$A_0z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_{n-1}z+A_n=0$$

a coefficienti costanti rispetto a t, potremo scrivere:

$$\begin{aligned} &A_0\theta^n y+A_1\theta^{n-1}y+\cdots+A_{n-1}\theta y+A_n y=\\ &=(A_0\theta^n+A_1\theta^{n-1}+\cdots+A_{n-1}\theta+A_n)y=\\ &=A_0(\theta-a_1)(\theta-a_2)\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (\theta-a_n)y, \end{aligned}$$

ottenendosi un medesimo risultato, sia sommando i singoli risultamenti espressi da $A_0\theta^n y$, $A_1\theta^{n-1}y$, ecc., sia eseguendo sulla y dapprima l'ultima, poi la penultima,..., finalmente la prima delle operazioni elementari,

$$\theta-a_1, \qquad \theta-a_2,\ldots, \qquad \theta-a_n$$

e moltiplicando poi per A_0. Inoltre, per la notata commutatività di queste operazioni elementari tra di loro, sarà indifferente l'ordine secondo cui eseguirle per conseguire il risultato finale.

Il risultamento dell'eseguire n volte di seguito l'operazione $\theta-a$ sulla y si potrà quindi esprimere tanto col primo quanto col secondo membro della eguaglianza

$$(\theta - a)^n y = (\theta^n - n a \theta^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 \theta^{n-2} - \cdots \pm a^n) y.$$

Per $a = 1$, questa si traduce nella nota formola

$$(\theta - 1)^n y = \Delta^n y = \theta^n y - n a \theta^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \theta^{n-2} y - \cdots \pm y,$$

alla quale si accoppia l'altra

$$(1 + \Delta)^n y = \theta^n y = y + n \Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \cdots + \Delta^n y.$$

§ **5.** *Differenziazione finita.* Sotto questo titolo, in una distesa esposizione della presente interpretazione, dovrebbero collocarsi le formole nelle quali, mediante l'introduzione di $\frac{1}{\tilde{\omega}} \log(x - x_1)$ in luogo della variabile discreta e delle φ in luogo delle costanti, si traducono le formole date sotto il medesimo titolo nei trattati di *Calcolo delle differenze;* scegliendole, ben'inteso, o completandole in vista dei particolari bisogni delle ricerche sulla variabilità complessa.

Così, per esempio, per la funzione esponenziale a^t, si danno le formole

$$\theta^n a^t = a^n \cdot a^t, \qquad \Delta^n a^t = (a - 1)^n a^t,$$

ed esse si tradurrebbero nelle

$$\theta^n (x - x_1)^\alpha = a^n (x - x_1)^\alpha, \qquad \Delta^n (x - x_1)^\alpha = (a - 1)^n (x - x_1)^\alpha,$$

dove si intende che la costante α dipende da a come t da $x - x_1$, essendo cioè

$$\alpha = \frac{\log a}{\tilde{\omega}}, \qquad a = e^{\varpi \alpha}$$

e quindi identicamente

$$a^t = (x - x_1)^\alpha.$$

Ma in questa breve Memoria non presenterò altre formole di differenziazione fuorchè le due seguenti, per usarne più in basso.

Giova impiegare anche le *facoltà.* Perciò adotteremo la notazione

$$t^{(n)} = t(t-1) \cdots (t - n + 1),$$

donde

$$\theta\, t^{(n)} = (t + 1)\, t^{(n-1)}, \qquad (\theta - 1)\, t^{(n)} = \Delta\, t^{(n)} = n\, t^{(n-1)}.$$

Si trova anche subito

$$\theta a^t t^{(n)} = a(t + 1) a^t t^{(n-1)}, \qquad (\theta - a) a^t t^{(n)} = n a \cdot a^t t^{(n-1)}. \tag{1}$$

Consideriamo ora una funzione F di t, razionale intera e di grado qualsivoglia n. Esprimendola colle facoltà (*) scriveremo:

$$F = \Phi_0 t^{(n)} + \Phi_1 t^{(n-1)} + \cdots + \Phi_n.$$

Mediante la formola precedente avremo subito il risultato dell'operazione $\theta - a$ eseguita sul prodotto $a^t F$; perciocchè $\theta - a$ è distributiva, ed i coefficienti Φ sono commutativi con $\theta - a$, cioè si possono indifferentemente scrivere prima o dopo il simbolo $\theta - a$. Risulta

$$(\theta - a) a^t F = a \cdot a^t [n \Phi_0 t^{(n-1)} + (n-1) \Phi_1 t^{(n-2)} + \cdots + \Phi_{n-1}].$$

E, ripetendo più volte l'operazione stessa,

$$(\theta - a)^\mu a^t F = a^\mu a^t [n^{(\mu)} \Phi_0 t^{(n-\mu)} + \cdots + \mu^{(\mu)} \Phi_{n-\mu}].$$

§ **6**. *Integrazione finita.* Anche qui sarebbe a farsi la traduzione delle formole e dei procedimenti che si danno nel *Calcolo delle differenze* per determinare le funzioni di cui siano date le differenze, o che devano soddisfare ad equazioni alle differenze. Ma qui pure non mi soffermerò che su pochi punti da applicarsi in seguito.

La y che soddisfa l'equazione

$$(\theta - a) y = 0$$

è

$$y = \Phi a^t, \qquad \text{ossia in } x, \qquad y = (x - x_1)^\alpha \Phi, \tag{1}$$

dove Φ significa la funzione monotropa arbitraria, ossia la costante rispetto al variare di t per gradi eguali all'unità, introdotta dall'integrazione.

La y, s'intende sempre la più generale, *che soddisfa l'equazione*

$$(\theta - a) y = a^t (\Phi_0 t^{(n)} + \Phi_1 t^{(n-1)} + \cdots + \Phi_n)$$

è

$$y = \frac{a^t}{a} \left(\Phi_0 \frac{t^{(n+1)}}{n+1} + \Phi_1 \frac{t^{(n)}}{n} + \cdots + \Phi_n \frac{t}{1} + \Phi_{n+1} \right) \tag{2}$$

dove Φ_{n+1} significa la Φ arbitraria introdotta dall'integrazione. Questa formola

(*) Osservo che qui tralascio anche le formole che servono a passare da una espressione formata colle potenze nella equivalente formata con le facoltà, e viceversa; le quali servono nel tempo stesso a passare da una espressione contenente derivate rispetto ad x alla equivalente formata con derivate rispetto a t. Queste formole sono molto semplici; così che si deve riguardare come data l'espressione formata colle facoltà ogni qualvolta sia data la equivalente formata colle potenze, e viceversa.

si trova subito, se si vuole, applicando in senso inverso la seconda delle formole (1) del paragrafo precedente.

Trovare la y che soddisfa la

$$(\theta - a)^\lambda y = 0.$$

La formola (1) dà

$$(\theta - a)^{\lambda-1} y = \Phi \cdot a^t;$$

e la formola (2), applicata $\lambda - 1$ volte successive, darà

$$y = \frac{a^t}{a^{\lambda-1}} \left(\Phi_0 \frac{t^{(\lambda-1)}}{(\lambda-1)^{(\lambda-1)}} + \Phi_1 \frac{t^{(\lambda-2)}}{(\lambda-2)^{(\lambda-2)}} + \cdots + \Phi_{\lambda-1} \right),$$

dove le $\Phi_0, \Phi_1, \ldots \Phi_{\lambda-1}$ sono λ funzioni arbitrarie della specie Φ introdotte dall'integrazione. Invece delle facoltà si possono introdurre le potenze, e poichè i coefficienti sono arbitrarî, questo risultato in ogni modo esprimerà che *la y deve essere il prodotto di a^t per una funzione intera di t del grado $\lambda - 1$ ed a coefficienti monotropi arbitrarî.* In termini di x, scriverebbesi

$$y = (x - x_1)^\alpha \left(\varphi_0 [\log (x - x_1)]^{\lambda-1} + \varphi_1 [\log (x - x_1)]^{\lambda-2} + \cdots + \varphi_{\lambda-1} \right), \tag{3}$$

sempre intendendosi φ arbitrarie.

Trovare la y, ossia integrare la equazione alle differenze, lineare, omogenea, con coefficienti costanti:

$$A_0 \theta^m y + A_1 \theta^{m-1} y + \cdots + A_{m-1} \theta y + A_m y = 0.$$

Come si è detto nel § 4, potremo scrivere questa equazione come segue (*)

$$A_0 (\theta - \omega_1)(\theta - \omega_2) \cdots (\theta - \omega_m) y = 0. \tag{4}$$

Ora, le equazioni di primo ordine:

$$(\theta - \omega_1) u_1 = 0, \qquad (\theta - \omega_2) u_2 = 0, \ldots, \qquad (\theta - \omega_m) u_m = 0 \tag{5}$$

hanno rispettivamente per soluzioni

$$u_1 = \omega_1{}^t \varphi_1, \qquad u_2 = \omega_2{}^t \varphi_2, \ldots, \qquad u_m = \omega^t{}_m \varphi_m.$$

Epperò la soluzione della (4), per quando le ω siano tutte diverse tra loro,

(*) Adopero i simboli $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ invece degli $a_1, a_2, \ldots, a_m$, perchè usati dal sig. Fuchs nella fondamentale Memoria: *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten*, nel tomo 66 del Giornale del sig. Borchardt.

sarà la somma delle u, cioè

$$y = \omega_1{}^t \varphi_1 + \omega_2{}^t \varphi_2 + \cdots + \omega^t{}_m \varphi_m. \tag{6}$$

Infatti, essendo l'operazione

$$(\theta - \omega_1)(\theta - \omega_2)\cdots(\theta - \omega_m) \tag{7}$$

distributiva, per eseguirla sul secondo membro di (6) basterà eseguirla su ogni termine separatamente e sommare i risultati. Eseguiamola, per esempio, sul termine $\omega_1{}^t\varphi_1$. Poichè le singole operazioni

$$\theta - \omega_1, \qquad \theta - \omega_2, \ldots, \qquad \theta - \omega_m \tag{8}$$

sono tra loro commutative, potremo eseguirle nell'ordine che vorremo. Eseguendo in prima la $\theta - \omega_1$, riuscirà

$$(\theta - \omega_1)\omega_1{}^t\varphi_1 = 0.$$

Dunque resterà anche

$$(\theta - \omega_2)\cdots(\theta - \omega_m)(\theta - \omega_1)\omega_1{}^t\varphi_1 = 0.$$

In termini di x, la soluzione (6) scriverebbesi

$$y = (x - x_1)^{r_1}\varphi_1 + (x - x_1)^{r_2}\varphi_2 + \cdots + (x - x_1)^{r_m}\varphi_m, \tag{9}$$

dove $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sono rispetto ad $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ ciò che α rispetto ad a.

Se le radici ω non sieno tutte diverse fra loro; ma ve ne abbiano λ_1 eguali ad ω_1, λ_2 eguali ad ω_2, ecc...., così che l'equazione (4) sia

$$A_0(\theta - \omega_1)^{\lambda_1}(\theta - \omega_2)^{\lambda_2}\cdots(\theta - \omega_n)^{\lambda_n} y = 0;$$

allora la y sarà la somma delle soluzioni generali delle singole equazioni

$$(\theta - \omega_1)^{\lambda_1}\overset{1}{u} = 0, \qquad (\theta - \omega_2)^{\lambda_2}\overset{2}{u} = 0, \ldots \qquad (\theta - \omega_n)^{\lambda_n}\overset{n}{u} = 0; \tag{10}$$

epperò, volendola in termini di x, essa y sarà espressa, giusta la formola (3), come segue

$$\left.\begin{aligned} y = {} & (x - x_1)^{r_1}\left(\varphi_{1,0}[\log(x - x_1)]^{\lambda_1 - 1} + \cdots + \varphi_{1,\lambda_1 - 1}\right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (x - x_1)^{r_n}\left(\varphi_{n,0}[\log(x - x_1)]^{\lambda_n - 1} + \cdots + \varphi_{n,\lambda_n - 1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

dove entrano $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = m$ funzioni monotrope arbitrarie $\varphi_{\mu,\nu}$.

CAP. 2. CRITERIO PER RICONOSCERE SE PIÙ FUNZIONI ABBIANO TRA LORO RELAZIONE LINEARE A COEFFICIENTI DI UNA NATURA PARTICOLARE.

§ **7.** È noto quanta importanza abbia già acquistato il criterio per riconoscere se più funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ di una variabile continua abbiano o no tra loro una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti; il quale consiste nell'osservare se sia identicamente zero o no il determinante

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \vdots & y_n \\ Dy_1 & Dy_2 & \vdots & Dy_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D^{n-1}y_1 & D^{n-1}y_2 & \vdots & D^{n-1}y_n \end{vmatrix},$$

dove D significa derivazione rispetto a quella variabile.

Ma siffatto teorema non è che un caso particolare di quello che si trova analogamente sussistere nel *Calcolo delle differenze,* il quale ha quindi una assai più estesa applicabilità, ed è di assai maggiore momento anche, in particolare, nello studio delle funzioni di variabili complesse. Enuncierò questo teorema in prima relativamente al simbolo θ inteso nel ristretto significato che gli abbiamo attribuito nel paragrafo precedente.

TEOREMA. *Più funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ della variabile x avranno o no tra loro una relazione lineare omogenea a coefficienti monotropi, nella corona di centro x_1, secondo che sarà identicamente nullo o no il determinante*

$$\Theta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \vdots & y_n \\ \theta y_1 & \theta y_2 & \vdots & \theta y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{n-1}y_1 & \theta^{n-1}y_2 & \vdots & \theta^{n-1}y_n \end{vmatrix}.$$

Infatti, se si ammette che tra le y abbia luogo una relazione di tale natura, cioè che sia

$$\varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \cdots + \varphi_n y_n = 0, \tag{1}$$

è subito visto che il Θ dev'essere nullo; poichè, insieme con questa relazione, sussistono tutte le altre

$$\begin{gathered} \varphi_1 \theta y_1 + \varphi_2 \theta y_2 + \cdots + \varphi_n \theta y_n = 0 \\ \varphi_1 \theta^2 y_1 + \varphi_2 \theta^2 y_2 + \cdots + \varphi_n \theta^2 y_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

in cui essa si converte alla fine di uno, due,... giri di x.

Si tratta dunque di dimostrare, che, reciprocamente, la $\Theta=0$ trae seco una relazione della natura (1).

Comincio dal caso di $n=2$. Se sia

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \theta y_1 & \theta y_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\theta y_1}{\theta y_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

sarà

$$\theta\frac{y_1}{y_2}=\frac{\theta y_1}{\theta y_2}=\frac{y_1}{y_2}.$$

Dunque il rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ ripiglierà alla fine del giro di x il valore stesso iniziale, cioè sarà funzione monotropa. Indicandolo con $-\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, avremo

$$\varphi_1 y_1+\varphi_2 y_2=0.$$

A compiere la dimostrazione, basterà far vedere che, ammesso vero il teorema per qualunque Θ dell'ordine $n-1$, lo sarà anche per qualunque Θ dell'ordine n. A tal fine, applicando a questo determinante la trasformazione data dal sig. Hermite a pag. 25 e 26 del tomo 14 del Giornale del sig. Liouville (*), avremo:

$$\Theta=(-1)^{n-1}\cdot\theta y_1\cdot\theta^2 y_1\cdots\theta^{n-2}y_1\begin{vmatrix} y_2\cdot\theta y_1-y_1\cdot\theta y_2 & \vdots & y_n\cdot\theta y_1-y_1\cdot\theta y_n \\ \theta y_2\cdot\theta^2 y_1-\theta y_1\cdot\theta^2 y_2 & \vdots & \theta y_n\cdot\theta^2 y_1-\theta y_1\cdot\theta^2 y_n \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \theta^{n-2}y_2\cdot\theta^{n-1}y_1-\theta^{n-2}y_1\cdot\theta^{n-1}y_2 & \vdots & \theta^{n-2}y_n\cdot\theta^{n-1}y_1-\theta^{n-2}y_1\cdot\theta^{n-1}y_n \end{vmatrix}.$$

Ora, supponendo zero il primo membro di questa identità, dovrà essere zero anche il secondo. Epperò, ritenendo che y_1 non sia identicamente zero [altrimenti sarebbe $y_1=0$ una relazione della natura (1)], non lo saranno nè anche θy_1, $\theta^2 y_1,\ldots$ ecc.; e dovrà quindi essere zero il determinante. Ma esso è formato colle $n-1$ funzioni

$$y_2\theta y_1-y_1\theta y_2,\qquad y_3\theta y_1-y_1\theta y_3,\ldots,\qquad y_n\theta y_1-y_1\theta y_n$$

come il Θ lo è colle $y_1, y_2,\ldots, y_n$. Quindi, per ciò che abbiamo ammesso, sussisterà fra queste $n-1$ funzioni una relazione lineare a coefficienti φ

$$\varphi_2(y_2\theta y_1-y_1\theta y_2)+\varphi_3(y_3\theta y_1-y_1\theta y_3)+\cdots+\varphi_n(y_n\theta y_1-y_1\theta y_n)=0.$$

(*) Riprodotta nel § 5 dei *Determinanti* del sig. Brioschi.

Ora, questo primo membro non è altro che il determinante di second'ordine

$$\begin{vmatrix} y_1 & \varphi_2 y_2 + \varphi_3 y_3 + \cdots + \varphi_n y_n \\ \theta y_1 & \theta(\varphi_2 y_2 + \varphi_3 y_3 + \cdots + \varphi_n y_n) \end{vmatrix};$$

dunque fra le due funzioni y_1 e $\varphi_2 y_2 + \varphi_3 y_3 + \cdots \varphi_n y_n$ sussisterà una relazione qual'è appunto la (1).

Nell'enunciazione del dimostrato teorema potevasi assumere il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \vdots & y_n \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & \vdots & \Delta y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta^{n-1} y_1 & \Delta^{n-1} y_2 & \vdots & \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix}$$

invece del Θ, poichè l'uno equivale all'altro, come lo attestano le ultime due formole del § 4.

Negli usuali termini del *Calcolo delle differenze,* il teorema enuncierebbesi dicendo, che, più funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ della variabile t avranno o no tra loro relazione lineare omogenea *a coefficienti costanti* (o propriamente dotati del periodo Δt), secondo che sia identicamente nullo o no il determinante Δ o il Θ.

È superfluo l'osservare che il teorema sul determinante **D** scaturisce da questo facendo impiccolire fino a zero la differenza Δt, e che una tale dimostrazione rimane la più semplice e la più naturale fra tutte le altre che se ne possono dare. E non meno superfluo è il dire che il Θ presta nella teoria delle equazioni lineari alle differenze gli analoghi servigi del **D** nella teoria delle equazioni alle derivate.

§ **8.** Il teorema dimostrato somministra anche criterî per riconoscere se più funzioni abbiano o no tra loro relazioni di data forma non lineare. Ma ciò che sopratutto importa di considerare è la sua generalità proveniente dalla varietà delle interpretazioni più o meno estese di cui i simboli Δ e θ sono suscettibili. Per adesso ci contenteremo di notare la sussistenza del teorema quand'anche θy significhi, non particolarmente ciò che y diventa alla fine di un giro della variabile intorno ad x_1, ma ciò che y diventa allorchè la variabile, partendo dal punto qualunque x, vi ritorna dopo avere percorso un cammino K qualsivoglia nel piano rappresentativo; ben'inteso che in tale caso φ deve significare *funzione che ripiglia al termine di questo cammino il valore avuto* *in principio.* Infatti la eguaglianza

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \theta y_1 & \theta y_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ossia } \theta\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

dice che $\frac{y_1}{y_2}$ è una φ di cotesta specie più generale.

Se per esempio, il cammino K fosse ancora contenuto nella solita corona, ma composto di ν giri intorno ad x_1, il θ corrispondente a tale cammino sarebbe il solito θ ripetuto ν volte, cioè θ^ν. Quindi il

Teorema. *Il determinante*

$$\Theta_\nu = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \theta^\nu y_1 & \theta^\nu y_2 & \cdots & \theta^\nu y_n \\ \theta^{2\nu} y_1 & \theta^{2\nu} y_2 & \cdots & \theta^{2\nu} y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{(n-1)\nu} y_1 & \theta^{(n-1)\nu} y_2 & \cdots & \theta^{(n-1)\nu} y_n \end{vmatrix},$$

sarà o no identicamente zero, secondo che tra le y sussisterà o no una relazione lineare, omogenea, a coefficienti che ripigliano alla fine di ν giri della variabile intorno ad x_1 i valori avuti in principio.

Cap. 3. Applicazione alle funzioni definite da equazioni algebriche a coefficienti monotropi.

§ **9**. Consideriamo l'equazione

$$z^n + \psi_1 z^{n-1} + \cdots + \psi_{n-1} z + \psi_n = 0$$

di cui i coefficienti ψ siano funzioni di una variabile complessa x. Quando queste funzioni siano razionali, vedesi dimostrato nelle *Recherches sur les fonctions algébriques* del sig. Puiseux (*) che le radici z_1, $z_2, \ldots,$ z_n dell'equazione, nell'intorno di un valore particolare x_1 qualsiasi della x, si ponno esprimere rispettivamente mediante serie di potenze intere di

$$(x-x_1)^{\frac{1}{\nu_1}}, \quad (x-x_1)^{\frac{1}{\nu_2}}, \ldots, \quad (x-x_1)^{\frac{1}{\nu_n}}$$

dove ν_1, $\nu_2, \ldots,$ ν_n significano i numeri degli elementi dei sistemi circolari a cui le radici rispettivamente appartengono.

(*) Tomo 15 del Giornale del sig. Liouville.

Ora vogliamo far notare, essere questa una delle proposizioni contenute nella formola (9) del § 6, e non soltanto quando le ψ siano razionali, ma qualunque esse sieno ed affette in x_1 da qualsiasi singolarità, purchè monotrope in una corona circondante x_1.

Infatti, imaginando che

$$z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_n$$

siano i valori delle radici nel punto qualunque x della corona, saranno

$$\theta z_1, \quad \theta z_2, \ldots, \quad \theta z_n$$

i valori che per variazione continua ne scaturiranno al termine di un giro della variabile intorno ad x_1. Ma questi valori non possono altro essere che i primitivi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nel medesimo ordine od in ordine diverso. Da ciò segue (*senz'altro*) che le radici sono distribuite in sistemi circolari, in ciascuno dei quali, cioè, le radici che vi appartengono si permutano tra loro circolarmente al girare della variabile intorno ad x_1. Epperò, se z significhi una qualsivoglia delle radici, e ν il numero degli elementi del sistema circolare di cui fa parte, sarà $\theta^\nu z = z$, o se vuolsi

$$(\theta^\nu - 1)z = 0.$$

Questa equazione è un caso particolare della (4) § 6, e quindi avremo per z la espressione (9) di detto paragrafo. Le radici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ sono in questo caso

$$e^{\frac{\varpi}{\nu}}, \quad e^{\frac{2\varpi}{\nu}}, \ldots, \quad e^{\frac{(\nu-1)\varpi}{\nu}}, \quad 1$$

ed i valori degli esponenti $r_1, r_2, \ldots, r_m$ saranno

$$\frac{1}{\nu}, \quad \frac{2}{\nu}, \ldots, \quad \frac{\nu-1}{\nu}, \quad 0$$

fatta astrazione dal numero intero arbitrario che si potrebbe aggiungere a ciascuno di questi valori. Pertanto la (9), su citata, diviene

$$z = (x - x_1)^{\frac{1}{\nu}} \varphi_1 + (x - x_1)^{\frac{2}{\nu}} \varphi_2 + \cdots + (x - x_1)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \varphi_{\nu-1} + \varphi_\nu. \qquad (1)$$

Questa eguaglianza, imaginandovi per le φ le rispettive serie di potenze intere di $x - x_1$, esprime quanto abbiamo asserito (*). Compendiando le ν serie in

(*) Superfluo il dire che, ove le ψ fossero razionali, sarebbe subito visto dover essere finito il numero delle potenze negative contenute nelle φ.

una sola, possiamo poi anche scrivere

$$z = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} c_h (x - x_1)^{\frac{h}{\nu}}.$$

Se si trattasse puramente di verificare la sussistenza di questa formola, ossia della (1), potrebbesi fare come segue. Il determinante

$$\Theta = \begin{vmatrix} z & (x-x_1)^{\frac{1}{\nu}} & \vdots & (x-x_1)^{\frac{\nu-1}{\nu}} & 1 \\ \theta z & \theta(x-x_1)^{\frac{1}{\nu}} & \vdots & \theta(x-x_1)^{\frac{\nu-1}{\nu}} & \theta 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^\nu z & \theta^\nu(x-x_1)^{\frac{1}{\nu}} & \vdots & \theta^\nu(x-x_1)^{\frac{\nu-1}{\nu}} & \theta^\nu 1 \end{vmatrix},$$

quando riesca $\theta^\nu z = z$, viene ad avere l'ultima riga identica alla prima, epperò riesce zero. Quindi fra gli elementi della prima riga avrà luogo una relazione lineare a coefficienti φ, qual'è appunto la (1).

Cap. 4. Applicazione alle funzioni definite da equazioni differenziali lineari a coefficienti monotropi.

§ **10.** Indicherò le proprietà di queste funzioni che scaturiscono immediatamente da un'equazione alle differenze che corrisponde alla *fondamentale* del sig. Fuchs.

Sia

$$D^m y + p_1 D^{m-1} y + p_2 D^{m-2} y + \cdots + p_{m-1} D y + p_m y = 0 \tag{1}$$

l'equazione da considerarsi, dove D significhi derivazione rispetto ad x.

Ad una equazione differenziale lineare si accompagna, per ciascun valore particolare della variabile indipendente, una equazione alle differenze, parimenti lineare e dello stesso ordine, ma con coefficienti costanti, che qualifica il modo di comportarsi degli integrali dell'equazione differenziale intorno a quel valore particolare.

Sia x_1 il valore particolare da considerarsi, e suppongansi monotropi i coefficienti p in una corona di centro x_1.

Formisi con le $m+1$ funzioni

$$y, \quad Dy, \ldots, \quad D^m y \tag{2}$$

il determinante Θ, che chiameremo H,

$$H=\begin{vmatrix} y & Dy & \vdots & D^m y \\ \theta y & \theta D y & \vdots & \theta D^m y \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \theta^m y & \theta^m D y & \vdots & \theta^m D^m y \end{vmatrix} \tag{3}$$

Poichè, per le funzioni analitiche y, i simboli d'operazione θ e D sono commutativi, cioè hanno la proprietà:

$$\theta D y = D\theta y, \qquad \theta^r D^s y = D^r \theta^s y;$$

si potrà scrivere H anche come segue:

$$H=\begin{vmatrix} y & Dy & \vdots & D^m y \\ \theta y & D\theta y & \vdots & D^m \theta y \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \theta^m y & D\theta^m y & \vdots & D^m \theta^m y \end{vmatrix} \tag{4}$$

H è dunque formato ad uno stesso modo rispetto al simbolo D ed al simbolo θ, ossia è ad un tempo determinante Θ rispetto alle funzioni (2) e determinante $\mathbf{D}$ rispetto alle funzioni

$$y, \quad \theta y, \dots, \quad \theta^m y. \tag{5}$$

Ora, se y significhi l'integrale completo della (1), le funzioni (2) avranno tra loro una relazione lineare a coefficienti monotropi, poichè tale appunto è la (1) medesima. Epperò il determinante (3), della specie Θ, sarà zero. Ma essendo zero il determinante H, considerato come in (4) della specie $\mathbf{D}$, le funzioni (5) avranno tra loro una relazione lineare a coefficienti costanti

$$A_0 \theta^m y + A_1 \theta^{m-1} y + \cdots + A_{m-1} \theta y + A_m y = 0. \tag{6}$$

Quest'equazione, a cui devono soddisfare tutti gli integrali della (1), *è l'equazione alle differenze che dicevamo accompagnarsi all'equazione differenziale,* relativamente al punto x_1.

Dallo stesso determinante H deducesi poi anche, viceversa, che ad una equazione alle differenze, ossia in θ a coefficienti costanti si accompagna sempre un'equazione differenziale a coefficienti monotropi nella corona di cui si tratta. Perocchè, sussistendo la (6), il determinante H considerato sotto l'aspetto (4) dev'essere zero; ed essendo quindi zero anche sotto l'aspetto (3), ne segue che tra le funzioni (2) deve sussistere una relazione lineare a coefficienti monotropi.

Dalla (6), considerata come conseguenza della (1), scende subito, giusta le formole d'integrazione delle equazioni lineari a coefficienti costanti che si danno nel *Calcolo delle differenze* e che noi traducemmo nel § 6, che gli integrali della (1) dovranno essere tutti esprimibili colle formole (9) od (11) del § 6 (*).

Terminerò questo paragrafo osservando che la considerazione del determinante H, a cui mi piacque ricorrere per dimostrare l'esistenza dell'equazione fondamentale alle differenze, diverrebbe superflua, se si volesse usare del teorema, che fra $m+1$ soluzioni dell'equazione differenziale (e quindi in particolare fra $y, \theta y, \ldots, \theta^m y$) deve esistere una relazione lineare a coefficienti costanti.

§ **11.** Taluno potrebbe desiderare di veder dimostrato che ognuna delle equazioni semplici

$$(\theta-\omega_1)y=0, \qquad (\theta-\omega_2)y=0,\ldots, \qquad (\theta-\omega_m)y=0,$$

in cui si decompone la precedente equazione (6), darà effettivamente una soluzione della equazione differenziale

$$D^m y + p_1 D^{m-1} y + \cdots + p_m y = 0.$$

Per ciò, osserviamo, che, sostituendo in questo primo membro il prodotto di una φ per $(x-x_1)^r$

$$\varphi(x-x_1)^r,$$

si ha per risultato ancora un'espressione della stessa natura

$$\Phi(x-x_1)^r$$

col medesimo esponente r. Dunque, sostituendo la espressione generale della y

$$\varphi_1(x-x_1)^{r_1} + \cdots + \varphi_m(x-x_1)^{r_m}$$

si avrà un risultato della forma

$$\Phi_1(x-x_1)^{r_1} + \cdots + \Phi_m(x-x_1)^{r_m}.$$

Ora, questo risultato non potrebbe essere zero, come deve, se non fossero zero separatamente ciascuna delle sue m parti; giacchè tra le funzioni

$$(x-x_1)^{r_1},\ldots, \qquad (x-x_1)^{r_m}$$

(*) Le singole parti di queste formole corrispondenti ai diversi esponenti r hanno appunto, come si vede, la forma delle (9) ed (11) date dal sig. Fuchs nelle pag. 134 e 136 della sopra citata di lui Memoria.

non può sussistere relazione lineare a coefficienti Φ, non essendo zero il loro Θ che è

$$\begin{vmatrix} (x-x_1)^{r_1} & \cdot & (x-x_1)^{r_m} \\ \omega_1(x-x_1)^{r_1} & \cdot & \omega_m(x-x_1)^{r_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{m-1}(x-x_1)^{r_1} & \cdot & \omega_m^{m-1}(x-x_1)^{r_m} \end{vmatrix} = (x-x_1)^{r_1+\cdots+r_m} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdot & \omega_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{m-1} & \omega_2^{m-1} & \cdot & \omega_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Con minor brevità, ma ancora facilmente si fa la dimostrazione pel caso di radici ω in parte eguali fra loro.

§ **12.** La espressione

$$A_0\theta^m + A_1\theta^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\theta + A_m$$

dell'operazione da eseguirsi nella (6) del § 10 sulla y, leggendovi ω invece di θ, è il primo membro dell'*equazione* chiamata *fondamentale* dal sig. Fuchs (*) relativamente al punto singolare x_1.

Gli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_m$ cercati dal sig. Fuchs (**) sono quelli che soddisfanno alle singole equazioni (5) del § 6, cioè alle

$$(\theta-\omega_1)u_1 = 0, \qquad (\theta-\omega_2)u_2 = 0, \ldots, \qquad (\theta-\omega_m)u_m = 0. \tag{1}$$

Se l'equazione fondamentale abbia radici eguali, così che la (6) § 10 possa scriversi come segue

$$A_0(\theta-\omega_1)^{\lambda_1}(\theta-\omega_2)^{\lambda_2}\ldots \qquad (\theta-\omega_n)^{\lambda_n} y = 0,$$

gli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ considerati dal sig. Fuchs, relativamente alla radice λ-pla ω, soddisfanno rispettivamente le equazioni

$$(\theta-\omega)u_1 = 0, \qquad (\theta-\omega)^2 u_2 = 0, \ldots, \qquad (\theta-\omega)^\lambda u_\lambda = 0. \tag{2}$$

Il sistema d'equazioni per queste u dato dal sig. Fuchs a pag. 135 della sua Memoria citata è il seguente

$$\begin{aligned} &(\theta-\omega)u_1 = 0 \\ &(\theta-\omega)u_2 = \omega_{21}u_1 \\ &(\theta-\omega)u_3 = \omega_{31}u_1 + \omega_{32}u_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(\theta-\omega)u_\lambda = \omega_{\lambda 1}u_1 + \omega_{\lambda 2}u_2 + \cdots + \omega_{\lambda,\lambda-1}u_{\lambda-1}. \end{aligned}$$

(*) Equazione (6) di pag. 132 della Memoria citata.
(**) A pag. 134.

Facendo sulle 2ª, 3ª,... di queste equazioni rispettivamente le operazioni $\theta-\omega$, $(\theta-\omega)^2$,..., se ne dedurranno le 2ª, 3ª,... delle nostre equazioni (2).

Osserveremo altresì che si possono pure ottenere immediatamente le espressioni degli integrali $v_1, v_2, \ldots, v_l$ di ogni sottogruppo, come li prese il sig. Hamburger (*) cioè come soluzioni del sistema di equazioni alle differenze del primo ordine (**)

$$(\theta-\omega)v_1=0, \qquad (\theta-\omega)v_2=v_1,\ldots, \qquad (\theta-\omega)v_l=v_{l-1};$$

e l'elegante teorema del sig. Jürgens (***), con la forma che egli, così a posteriori, indicò per gli integrali pure di un sottogruppo.

Cap. 5. Applicazione alle funzioni definite da equazioni differenziali lineari a coefficienti politropi.

§ **13.** Accennerò brevemente all'esistenza dell'equazione fondamentale ed alla forma degli integrali di un'equazione differenziale lineare

$$q_0D^my+q_1D^{m-1}y+\cdots+q_{m-1}Dy+q_my=0 \tag{1}$$

per quando i coefficienti q siano politropi, limitandomi ad imaginare che questi coefficienti dipendano razionalmente da x e da una funzione z della x definita da una equazione

$$z^n+\psi_1z^{n-1}+\cdots+\psi_{n-1}z+\psi_n=0 \tag{2}$$

come quella considerata nel Cap. 3.

Senza entrare in particolarità sui punti che possano essere singolari per l'equazione (1), proponiamoci di trovare la forma di un suo integrale qualunque y entro una corona circondante il punto x_1 nella quale i coefficienti ψ siano monotropi.

Sia ν il numero degli elementi del sistema circolare, intorno ad x_1, a cui appartiene quella fra le radici dell'equazione (2) che si vuole assumere per

(*) Il quale pel primo mise in evidenza i sottogruppi, valendosi di un'analisi del signor Jordan, nella Memoria *Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten,* nel tomo 76 del Giornale del sig. Borchardt.

(**) Equazioni (20) di pag. 121 della suddetta Memoria.

(***) A pag. 151 della Memoria *Die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen,* nel tomo 80 del suddetto Giornale.

formare i coefficienti $q(x, z)$ della (1). Sarà $\theta^\nu z = z$, quindi anche

$$\theta^\nu q(x, z) = q(x, \theta^\nu z) = q(x, z).$$

Epperò la (1) sarà una relazione lineare omogenea fra le funzioni,

$$y, \quad Dy, \quad D^2 y, \ldots, \quad D^m y$$

con coefficienti i quali ripigliano alla fine di ν giri della variabile il valore già avuto. Dunque il determinante Θ_ν (§ 8) di queste funzioni sarà identicamente zero. Ma siffatto determinante può essere considerato tanto della specie Θ quanto della specie **D**, essendo identicamente

$$\begin{vmatrix} y & Dy & \vdots & D^m y \\ \theta^\nu y & \theta^\nu Dy & \vdots & \theta^\nu D^m y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{m\nu} y & \theta^{m\nu} Dy & \vdots & \theta^{m\nu} D^m y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & Dy & \vdots & D^m y \\ \theta^\nu y & D\theta^\nu y & \vdots & D^m \theta^\nu y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{m\nu} y & D\theta^{m\nu} y & \vdots & D^m \theta^{m\nu} y \end{vmatrix}.$$

Quindi fra le funzioni

$$y, \quad \theta^\nu y, \ldots, \quad \theta^{m\nu} y,$$

sussisterà una relazione lineare a coefficienti costanti. Questa è *l'equazione fondamentale alle differenze,* che pertanto ci si presenta sotto la forma

$$A_0 \theta^{m\nu} y + A_1 \theta^{(m-1)\nu} y + \cdots + A_{m-1} \theta^\nu y + A_m y = 0$$

e che potremo anche scrivere come segue

$$A_0 (\theta^\nu - \omega_1)(\theta^\nu - \omega_2) \cdots (\theta^\nu - \omega_m) y = 0,$$

intendendo con ω_1, $\omega_2, \ldots$ le radici dell'equazione algebrica

$$A_0 \omega^m + A_{m-1} \omega^{m-1} + \cdots + A_m = 0.$$

La espressione completa della y che soddisfa quest'equazione alle differenze si comporrà della somma delle espressioni complete delle y che soddisfanno rispettivamente le

$$(\theta^\nu - \omega_1) y = 0, \qquad (\theta^\nu - \omega_2) y = 0, \ldots, \qquad (\theta^\nu - \omega_m) y = 0.$$

Ora, come già dalla $(\theta^\nu - 1) z = 0$ si dedusse per z la formola (1) § 9, così dalla $(\theta^\nu - \omega) y = 0$ si deduce per y la formola

$$y = (x - x_1)^{\frac{r}{\nu}} \left[(x - x_1)^{\frac{1}{\nu}} \varphi_1 + (x - x_1)^{\frac{2}{\nu}} \varphi_2 + \cdots + (x - x_1)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \varphi_{\nu-1} + \varphi_\nu \right]$$

ovvero la

$$y=(x-x_1)^{\frac{r}{\nu}}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}c_h(x-x_1)^{\frac{h}{\nu}},$$

dove $r=\frac{1}{\omega}\log\omega$.

Quindi la cercata espressione completa degli integrali della (1) nella corona di centro x_1 sarà

$$y=(x-x_1)^{\frac{r_1}{\nu}}f_1+(x-x_1)^{\frac{r_2}{\nu}}f_2+\cdots+(x-x_1)^{\frac{r_m}{\nu}}f_m,$$

intendendosi con $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funzioni ν-trope nella corona, cioè funzioni che ripigliano gli stessi valori ogni ν giri della variabile intorno ad x_1, e che si possono quindi esprimere con serie di potenze intere di $(x-x_1)^{\frac{1}{\nu}}$.

Superfluo indicare le modificazioni che subentrano quando $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ non siano tutte diverse tra loro.

Cap. 6. Interpretazione del calcolo delle differenze a sussidio particolarmente delle ricerche sulle funzioni periodiche di una sola variabile indipendente.

A sempre meglio dimostrare la fecondità dell'idea di interpretare il *Calcolo delle differenze* a sussidio dell'analisi delle funzioni di variabili continue, farò un cenno di quelle interpretazioni che si riferiscono più particolarmente alle ricerche concernenti le funzioni periodiche, e che consistono nel riguardare le variabili *continue* anche come variabili *discrete,* che varîno per gradi eguali ai periodi che si devono considerare.

§ **14.** Occupiamoci dapprima del caso di funzioni di una sola variabile x. Significando con ω una costante destinata ad essere periodo di funzioni della x, e significando con $f(x)$ una funzione uniforme qualsiasi della x, intenderemo qui con $\theta f(x)$ ciò che diventa $f(x)$ quando x cresce di $\Delta x=\omega$, ossia riterremo (*)

$$\theta f(x)=f(x+\omega)$$

(*) Egli è per maggiore chiarezza e brevità che qui suppongonsi *uniformi* le funzioni da considerarsi. Volendosi considerare funzioni anche non uniformi, basta intendere con $\theta f(x)$ ciò che $f(x)$ diventa quando la variabile passa dal punto x al punto $x+\omega$ secondo un determinato cammino.

e

$$\theta^2 f(x) = \theta f(x+\omega) = f(x+2\omega), \ldots, \qquad \theta^n f(x) = f(x+n\omega), \ldots$$

Ogniqualvolta x varî soltanto per gradi eguali ad ω, le funzioni dotate del periodo ω non variano, e tengono luogo delle costanti nel *Calcolo delle differenze* applicato a questo caso. Le indicheremo colla lettera φ, di guisa che sarà qui pure

$$\theta\varphi = \varphi, \qquad \Delta\varphi = 0.$$

Considerando adunque la variabile discreta di esso *Calcolo* anche come variabile continua e surrogando le costanti con funzioni della specie φ, tutte le formole o proposizioni di questo *Calcolo* compariranno come altrettante proposizioni di spettanza della teorica delle funzioni dotate di un periodo ω.

Così, per esempio, la formola che esprime l'integrale completo di un'equazione alle differenze, lineare e con coefficienti costanti,

$$A_0\theta^m y + A_1\theta^{m-1} y + \cdots + A_{m-1}\theta y + A_m y = 0,$$

ci dirà, che, se una funzione y della variabile continua x deva soddisfare questa equazione, o, ciò ch'è lo stesso, se fra

$$y(x), \qquad y(x+\omega), \ldots, \qquad y(x+m\omega)$$

deva sussistere una relazione lineare a coefficienti costanti, tale funzione sarà esprimibile nella seguente maniera

$$y = a_1^{\frac{x}{\omega}}\Phi_1 + a_2^{\frac{x}{\omega}}\Phi_2 + \cdots + a_m^{\frac{x}{\omega}}\Phi_m, \tag{1}$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_m$ significano le radici dell'equazione algebrica $A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_m = 0$, e $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ m funzioni dotate del periodo ω.

§ **15.** Nei trattati di *Calcolo delle differenze,* a me noti, si considerano sistemi di equazioni simultanee fra *più* funzioni incognite, ma non mai sistemi di equazioni simultanee relative ad *una sola* funzione incognita. Per imbattersi in sistemi di quest'ultima specie bisognava considerare non un solo, ma simultaneamente parecchi incrementi della variabile indipendente. Ora, dal presente punto di vista della periodicità, si è portati affatto naturalmente a considerare parecchi incrementi. Anche già nel ristretto campo delle funzioni uniformi di una sola variabile possiamo imaginare la periodicità doppia.

In questi ultimi mesi il giovane geometra sig. Picard fu condotto a considerare sistemi di due equazioni simultanee alle differenze relative ad una sola funzione in alcune ricerche interessanti presentate dal sig. Hermite all'Accademia delle Scienze di Parigi; ma egli non ha pensato di considerarle come del dominio del solito *Calcolo delle differenze* (*).

Sia dunque ω' una costante destinata ad essere un secondo periodo di funzioni della x, e significhiamo con $\theta' f(x)$ ciò che diventa la funzione uniforme $f(x)$ quando x cresce di ω', e con φ' o Φ' una funzione qualsivoglia dotata del periodo ω', per cui

$$\theta'\varphi' = \varphi', \qquad \Delta'\varphi' = 0.$$

Nulla vieta di imaginare che una funzione y, la quale deva soddisfare una equazione in θ, ossia alle differenze relative all'incremento $\Delta x = \omega$ della variabile, deva altresì soddisfare un'altra equazione alle differenze relative all'altro incremento $\Delta' x = \omega'$ di essa variabile. Io qui mi limiterò a supporre che la y deva soddisfare l'equazione in θ a coefficienti costanti

$$A_0\theta^m y + A_1\theta^{m-1} y + \cdots + A_{m-1}\theta y + A_m y = 0$$

e l'equazione in θ' pure a coefficienti costanti

$$B_0\theta'^n y + B_1\theta'^{n-1} y + \cdots + B_{n-1}\theta' y + B_n y = 0,$$

le quali equazioni si possono scrivere come segue

$$\left.\begin{aligned} (\theta - a_1)(\theta - a_2)\cdots(\theta - a_m) y = 0 \\ (\theta' - b_1)(\theta' - b_2)\cdots(\theta' - b_n) y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

In forza della prima fra queste equazioni la y deve essere, come dicemmo, esprimibile sotto la forma

$$y = a_1^{\frac{x}{\omega}}\Phi_1 + a_2^{\frac{x}{\omega}}\Phi_2 + \cdots + a_m^{\frac{x}{\omega}}\Phi_m; \tag{2}$$

in forza della seconda, dovrà potersi similmente esprimere sotto la forma

$$y = b_1^{\frac{x}{\omega'}}\Phi'_1 + b_2^{\frac{x}{\omega'}}\Phi'_2 + \cdots + b_n^{\frac{x}{\omega'}}\Phi'_n. \tag{3}$$

(*) Vedi le Note: *Sur une généralisation des fonctions périodiques et sur certaines équations différentielles linéaires* nei Comptes Rendus del 21 luglio 1879, e *Sur une classe d'équations différentielles linéaires* nei Comptes Rendus del 19 febbrajo 1880. Nella prima si vedranno le equazioni (1) e (2) corrispondenti al caso $m = n = 2$ del nostro sistema (1), e nella seconda le equazioni più generali (1) e (2) corrispondenti al caso $n = m$ del detto nostro sistema; i periodi ω, ω' essendo $2K$, $2iK'$.

Eguale osservazione rispetto alla Nota del sig. Mittag-Leffler: *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques* nei Comptes Rendus del 16 febbrajo 1880.

Ora importa di trovare la forma più particolare che y deve avere come soluzione delle due equazioni ad un tempo. La via più facile e chiara di arrivarvi mi pare la seguente.

Cominciamo a cercare la soluzione del sistema (1) nel caso semplicissimo di $m=n=1$. In tal caso le equazioni

$$(\theta-a)y=0, \qquad (\theta'-b)y=0 \tag{4}$$

o, se vuolsi, le $\theta y=ay$, $\theta' y=by$ esprimono che la funzione y deve riprodursi moltiplicata per la costante a quando x cresce di ω, e moltiplicata per b quando x cresce di ω'. Il sig. HERMITE chiama *doppiamente periodiche di seconda specie* le funzioni dotate di siffatte proprietà. Valendoci pertanto di questa denominazione, potremo dire, che, *la soluzione completa di questo sistema di equazioni di primo ordine è una funzione doppiamente periodica di seconda specie, corrispondente ai periodi ω e ω' ed ai moltiplicatori a e b, ma del resto affatto arbitraria.*

Indicando con u una soluzione particolare dèl sistema (4), il rapporto di altra soluzione qualunque y alla u sarà doppiamente periodico (di prima specie). E pertanto, se si designa col simbolo Ψ una qualsiasi funzione dotata della perfetta periodicità doppia, cioè tale da soddisfare le

$$\theta\Psi=\Psi, \qquad \theta'\Psi=\Psi,$$

ossia le

$$\Delta\Psi=0, \qquad \Delta'\Psi=0,$$

la soluzione completa y del sistema (4) si potrà esprimere con

$$y=u\Psi.$$

Questa Ψ arbitraria esprime l'indeterminazione che rimane in una funzione definita da due equazioni alle differenze del primo ordine; essa può dirsi la costante (quando x varia per gradi eguali ad ω o ad ω') introdotta dall'integrazione.

Ritorniamo ora al sistema (1). Si riconoscerà subito che *questo sistema, costituito da due equazioni degli ordini m e n, ha per soluzione completa la somma di $m \cdot n$ funzioni doppiamente periodiche di seconda specie, corrispondenti ai periodi ω ed ω', ed ai moltiplicatori a_r e b_s ($r=1, 2,\ldots, m$; $s=1, 2,\ldots, n$), ma del resto affatto arbitrarie.*

Infatti, se $U_{r,s}$ significhi la funzione doppiamente periodica di seconda specie corrispondente ai moltiplicatori a_r, b_s e del resto arbitraria, cioè contenente un fattore arbitrario Ψ, si avrà

$$(\theta - a_r) U_{r,s} = 0, \qquad (\theta' - b_s) U_{r,s} = 0.$$

Ora, eseguendo sopra $(\theta - a_r) U_{rs}$, che è zero, successivamente tutte le altre operazioni elementari

$$\theta - a_1, \qquad \theta - a_2, \ldots, \qquad \theta - a_m,$$

il risultato rimarrà sempre zero. Ciò è quanto dire, come già vedemmo nel § 6, che la funzione $U_{r,s}$ soddisfa la prima delle equazioni (1). Ed è chiaro, per lo stesso ragionamento, che essa soddisfa anche la seconda. Quindi, in virtù del carattere distributivo delle operazioni $(\theta - a_1)$, $(\theta - a_2)$,... ecc., conchiuderemo che la somma

$$\sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=n} U_{r,s} \tag{5}$$

di tutte le funzioni U, che si possono imaginare prendendo tutte le coppie diverse di moltiplicatori a e b, soddisferà pure il sistema (1).

Ma per riconoscere che questa somma, contenente $m \cdot n$ funzioni arbitrarie della specie Ψ, è la soluzione *completa* di questo sistema, procederemo come segue. Sieno V_1, $V_2, \ldots$, V_m le soluzioni complete delle equazioni semplici

$$(\theta - a_1) V_1 = 0, \qquad (\theta - a_2) V_2 = 0, \ldots, \qquad (\theta - a_m) V_m = 0.$$

La soluzione completa della prima equazione (1) sarà data da

$$y = V_1 + V_2 + \cdots + V_m.$$

Sostituendo questa somma ad y nella seconda equazione (1), si avrà

$$(\theta' - b_1)(\theta' - b_2) \cdots (\theta' - b_n) V_1 + \cdots + (\theta' - b_1)(\theta' - b_2) \cdots (\theta' - b_n) V_m = 0.$$

Ma questa relazione lineare esige che siano separatamente

$$(\theta' - b_1)(\theta' - b_2) \cdots (\theta' - b_n) V_r = 0 \qquad (r = 1,\ 2, \ldots,\ m); \tag{6}$$

perocchè le m funzioni

$$(\theta' - b_1)(\theta' - b_2) \cdots (\theta' - b_n) V_r, \qquad (r = 1,\ 2, \ldots,\ m)$$

se non fossero nulle identicamente, sarebbero linearmente indipendenti tra loro. Infatti formiamo il determinante Θ di queste m funzioni o di μ quali si siano (per esempio delle corrispondenti ad $r = 1,\ 2, \ldots,\ \mu$) fra le medesime. Siccome la prima riceve il moltiplicatore a_1, quando x cresce di ω, e la seconda il moltiplicatore a_2, ecc.; così questo Θ risulterà eguale al prodotto delle funzioni stesse per il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdot & a_\mu \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_1^{\mu-1} & a_2^{\mu-1} & \cdot & a_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}.$$

Ma questo determinante è diverso da zero, dunque il Θ non potrebbe essere zero se le funzioni stesse non fossero zero (*).

Ora, poichè V_r deve soddisfare l'equazione (6), potremo porre

$$V_r = W_{r,1} + W_{r,2} + \cdots + W_{r,n},$$

intendendo che le funzioni W soddisfacciano le equazioni

$$(\theta' - b_1) W_{r,1} = 0, \qquad (\theta' - b_2) W_{r,2} = 0, \ldots, \qquad (\theta' - b_n) W_{r,n} = 0.$$

Ma, in forza dello stesso ragionamento testè fatto, si vede che ciascuna di queste funzioni deve soddisfare l'equazione

$$(\theta - a_r) V_r = 0,$$

a cui soddisfa la loro somma. Dunque $W_{r,s}$ soddisferà simultaneamente le equazioni

$$(\theta - a_r) W_{r,s} = 0, \qquad (\theta' - b_s) W_{r,s} = 0,$$

mentre si ha per y la espressione

$$y = \sum_{r=1}^{r=m} V_r = \sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=n} W_{r,s}.$$

La espressione (5), che coincide con questa se vi si sostituisce la lettera W alla U, è dunque davvero la soluzione completa del proposto sistema di equazioni (**).

(*) Noi seguitiamo a considerare soltanto il caso in cui i moltiplicatori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sieno diversi tra loro, e diversi pure tra loro i $b_1, b_2, \ldots, b_n$; giacchè il presente nostro scopo è puramente di far apprezzare le nostre idee circa le possibili interpretazioni del *Calcolo delle differenze.*

(**) Questa proposizione, come ogni altra che scenda puramente dalle proprietà delle differenze, sussisterà del pari per ogni altra interpretazione che si vorrà fare di esse differenze. Così, per esempio, attribuendo al simbolo θ il significato che aveva nel Cap. 1 e al simbolo θ' il significato analogo relativamente al punto x_2, le equazioni (4) esprimeranno che y è una funzione che si riproduce col moltiplicatore a quando x fa un giro intorno ad x_1, e col

§ **16.** Rispetto alle funzioni doppiamente periodiche di seconda specie è pure opportuno di qui notare il seguente

TEOREMA. *Fra più funzioni doppiamente periodiche di seconda specie, delle quali i moltiplicatori relativi ad un periodo sieno diversi tra loro, ed i moltiplicatori relativi all'altro periodo sieno pure diversi tra loro, non può aver luogo veruna relazione lineare, omogenea, a coefficienti dotati di perfetta periodicità doppia.*

Per riconoscerne la verità, indichiamo con $U_{r,s}$ le funzioni di cui si tratta, con $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ i moltiplicatori che si presentano quando x cresce di ω, e con $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ i moltiplicatori relativi al periodo ω'. Queste funzioni si troveranno tutte fra quelle del quadro

$$\begin{array}{cccc} U_{1,1} & U_{1,2} & \cdots & U_{1,\nu} \\ U_{2,1} & U_{2,2} & \cdots & U_{2,\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{\mu,1} & U_{\mu,2} & \cdots & U_{\mu,\nu}. \end{array}$$

Supponiamo che esista, se possibile, la relazione

$$\sum_{r=1}^{r=\mu} \sum_{s=1}^{s=\nu} \Psi_{r,s} U_{r,s} = 0.$$

Facendo crescere x della quantità $h\omega + k\omega'$, h e k significando numeri interi positivi, questa relazione darebbe

$$\sum\sum \Psi_{r,s} \theta^h \theta'^k U_{r,s} = 0.$$

---

moltiplicatore b quando x fa un giro intorno ad x_2. E poichè

$$(x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta, \text{ dove } \alpha = \frac{1}{\omega} \log a, \qquad \beta = \frac{1}{\omega} \log b,$$

è una funzione di tal specie, l'espressione generale di y sarà

$$(x - x_1)^\alpha (x - x_2)^\beta \Psi,$$

dove Ψ significa funzione monotropa intorno sia ad x_1 che ad x_2. Quindi, in cotesta interpretazione, la proposizione concernente il sistema (1) sarebbe, che, una funzione la quale deva soddisfare questo sistema di equazioni, può esprimersi nella seguente maniera

$$\sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=n} (x - x_1)^{\alpha_r} (x - x_2)^{\beta_s} \Psi_{r,s},$$

dove le $\Psi_{r,s}$ sono tutte funzioni monotrope sia intorno ad x_1 che ad x_2.

Ora, considerando le $\mu\nu$ equazioni di questa forma corrispondenti ai $\mu\nu$ incrementi

$$\begin{array}{cc:c}
0 & \omega & (\mu-1)\omega \\
\omega' & \omega'+\omega & \omega'+(\mu-1)\omega \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
(\nu-1)\omega' & (\nu-1)\omega'+\omega & (\nu-1)\omega'+(\mu-1)\omega
\end{array}$$

come altrettante equazioni fra le $\mu\nu$ incognite $\Psi_{r,s}$, si vede che queste incognite dovranno essere nulle tutte quante, se il determinante dei loro coefficienti non è zero. Questo determinante, che per brevità scriverò solamente pel caso $\mu=2$ e $\nu=3$, è il seguente

$$\Theta_{\mu,\nu}=\begin{vmatrix}
U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{21} & U_{22} & U_{23} \\
\theta U_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \theta U_{23} \\
\theta' U_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \theta' U_{23} \\
\theta'\theta U_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \theta'\theta U_{23} \\
\theta'^2 U_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \theta'^2 U_{23} \\
\theta'^2\theta U_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \theta'^2\theta U_{23}
\end{vmatrix}.$$

Tenendo conto della proprietà

$$\theta^h \theta'^k U_{r,s} = a_r^h b_s^k U_{r,s},$$

questo determinante si riduce al prodotto delle funzioni $U_{r,s}$ medesime per il determinante

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
a_1 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_2 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\
b_1 a_1 & b_2 a_1 & b_3 a_1 & b_1 a_2 & b_2 a_2 & b_3 a_2 \\
b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\
b_1^2 a_1 & b_2^2 a_1 & b_3^2 a_1 & b_1^2 a_2 & b_2^2 a_2 & b_3^2 a_2
\end{vmatrix},$$

il quale è manifestamente eguale al prodotto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \end{vmatrix}^2.$$

Avremo dunque identicamente (ritornando a μ e ν qualunque)

$$\Theta_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \vdots & a_\mu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{\mu-1} & a_2^{\mu-1} & \vdots & a_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}^{\nu} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \vdots & b_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1^{\nu-1} & b_2^{\nu-1} & \vdots & b_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix}^{\mu} \Pi U_{r,s}.$$

Da qui si vede che il determinante $\Theta_{\mu\nu}$ non è zero, se non lo siano le funzioni $U_{r,s}$. Il teorema è dunque dimostrato.

Cap. 7. Applicazione alle equazioni differenziali lineari con coefficienti periodici.

§ **17**. *Una equazione fondamentale alle differenze,* cioè *una relazione lineare omogenea ed a coefficienti costanti tra le funzioni*

$$y, \quad \theta y, \quad \theta^2 y, \ldots, \quad \theta^m y \tag{1}$$

soddisfacenti un'equazione differenziale

$$D^m y + p_1 D^{m-1} y + \cdots + p_m y = 0, \tag{2}$$

non esisterà solamente per rispetto al significato di θ stabilito nel Cap. 1, ma anche per rispetto a qualsiasi altro significato di θ pel quale riesca parimenti

$$\theta p_1 = p_1, \quad \theta p_2 = p_2, \ldots, \quad \theta p_m = p_m, \tag{3}$$

rimanendo commutative fra loro le operazioni θ e D. Infatti l'equazione (2) sarà ancora una relazione lineare omogenea tra le funzioni

$$y, \quad Dy, \quad D^2 y, \ldots, \quad D^m y$$

con coefficienti della specie φ relativa al nuovo significato di θ, e quindi il determinante

$$\begin{vmatrix} y & Dy & \vdots & D^m y \\ \theta y & \theta D y & \vdots & \theta D^m y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^m y & \theta^m D y & \vdots & \theta^m D^m y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & Dy & \vdots & D^m y \\ \theta y & D\theta y & \vdots & D^m \theta y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^m y & D\theta^m y & \vdots & D^m \theta^m y \end{vmatrix}$$

dovrà ancora essere zero identicamente. Risguardando questo determinante come della specie **D**, se ne conchiuderà l'esistenza di una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti fra le (1).

§ **18.** Veniamo ora a considerare il caso particolare in cui i coefficienti p sieno dotati di un periodo ω. Confrontando le equazioni

$$p_1(x+\omega)=p_1(x),\ldots, \qquad p_m(x+\omega)=p_m(x)$$

colle (3) del paragrafo precedente, vediamo che, attribuendo adesso a θ il significato

$$\theta f(x)=f(x+\omega),$$

si avrà per gli integrali y dell'equazione

$$D^m y+p_1 D^{m-1} y+\cdots+p_{m-1} D y+p_m y=0 \tag{1}$$

un'equazione alle differenze relativa al periodo ω

$$A_0 \theta^m y+A_1 \theta^{m-1} y+\cdots+A_{m-1} \theta y+A_m y=0, \tag{2}$$

donde conchiuderemo che la soluzione completa dell'equazione differenziale può esprimersi colla formola (1) del § 14.

Supponiamo ora che i coefficienti p possedano anche un secondo periodo ω'. In tal caso ogni integrale dell'equazione differenziale dovrà soddisfare ad una prima equazione alle differenze, qual'è la (2), relativa al periodo ω, e ad una seconda relativa al periodo ω'

$$B_0 \theta'^m y+B_1 \theta'^{m-1} y+\cdots+B_{m-1} \theta' y+B_m y=0.$$

In forza di queste due equazioni fondamentali alle differenze, la soluzione completa dell'equazione differenziale si potrà esprimere, non che sotto la forma (2) o sotto la (3) del § 15, anche sotto la forma (5) del detto paragrafo, dove si faccia $n=m$. Si avrà cioè il teorema, che, *l'integrale di un'equazione differenziale lineare a coefficienti doppiamente periodici può esprimersi mediante la somma di* m^2 *funzioni doppiamente periodiche di seconda specie.* Sempre, ben'inteso, nel caso in cui le radici a sieno diverse tra loro, e le radici b pure diverse tra loro.

Però questo teorema non esprime *completamente* il carattere dell'equazione differenziale di avere i coefficienti doppiamente periodici. Ed invero ora dimostreremo, *essere condizione necessaria e sufficiente per la doppia periodicità dei coefficienti dell'equazione differenziale che l'integrale completo si possa esprimere linearmente per mezzo, non di* m^2, *ma soltanto di* m *funzioni doppiamente periodiche di seconda specie.*

La condizione è necessaria (*). Infatti sostituendo nel primo membro della

(*) Lo si vede già notato nella seconda delle Note del sig. Picard che abbiamo citato.

(1), che significheremo con $P(y)$, ad y la somma $\sum\sum U_{rs}$ del § 15, si ha

$$P(\sum\sum U_{r,s}) = \sum\sum P(U_{r,s}).$$

Ma, poichè la derivata di una funzione doppiamente periodica di seconda specie è ancora una funzione doppiamente periodica di seconda specie corrispondente ai medesimi moltiplicatori, si vede che $P(U_{r,s})$ sarà una funzione doppiamente periodica di seconda specie corrispondente ai moltiplicatori a_r, b_s. Dunque, pel teorema del § 16, la eguaglianza

$$\sum\sum P(U_{r,s}) = 0$$

non può sussistere senza che sieno separatamente

$$P(U_{r,s}) = 0 \qquad \begin{cases} r = 1,\ 2,\dots,\ m \\ s = 1,\ 2,\dots,\ m. \end{cases}$$

Ciascuna delle funzioni U_{rs}, che entrano nell'espressione dell'integrale completo dell'equazione $P(y) = 0$, deve dunque essere un'integrale dell'equazione medesima. Perciò non ve ne possono essere più di m linearmente indipendenti fra loro; ma esse sono tutte indipendenti fra loro; dunque il loro numero non può essere maggiore di m.

La condizione è sufficiente. Infatti, cerchiamo i coefficienti p di una equazione differenziale lineare avente m integrali

$$u_1, \quad u_2, \dots, \quad u_m$$

doppiamenti periodici di seconda specie, corrispondenti ai moltiplicatori

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, \dots, & a_m & \text{per il periodo } \omega \\ b_1, & b_2, \dots, & b_m & \text{per il periodo } \omega'. \end{array}$$

Questi coefficienti saranno dati, come si sa, dalla formola

$$p_i = \frac{\begin{vmatrix} D^{m-1}u_1 \dots & D^m u_1 \dots & u_1 \\ D^{m-1}u_2 \dots & D^m u_2 \dots & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D^{m-1}u_m \dots & D^m u_m \dots & u_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D^{m-1}u_1 \dots & D^{m-i}u_1 \dots & u_1 \\ D^{m-1}u_2 \dots & D^{m-i}u_2 \dots & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D^{m-1}u_m \dots & D^{m-i}u_m \dots & u_m \end{vmatrix}}. \qquad (i = 1,\ 2,\dots,\ m).$$

Ora, quando x cresce di ω, le m linee di ognuno di questi determinanti ricevono rispettivamente i moltiplicatori $a_1, a_2, \ldots, a_m$, epperò il rapporto dei due determinanti, ossia p_i, non muta. Similmente p_i non muta quando x cresce di ω'; dunque è doppiamente periodico.

Cap. 8. Interpretazione a sussidio delle ricerche sulla periodicità simultanea rispetto a più variabili indipendenti.

§ **19.** Ci sia permesso un brevissimo cenno del significato da attribuirsi al simbolo θ se si tratti di proprietà relative ai periodi simultanei che possono avere le funzioni di più variabili indipendenti.

Esprimendo $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ una qualsiasi funzione uniforme delle p variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_p$, ed $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ un sistema di costanti che devano essere periodi simultanei di talune funzioni uniformi delle variabili stesse, al simbolo θ va qui attribuito il significato seguente

$$\theta f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1 + \omega_1, x_2 + \omega_2, \ldots, x_p + \omega_p),$$

e per il Δ, come al solito,

$$\Delta f = \theta f - f = (\theta - 1) f.$$

È manifesto che anche per questo θ valgono le proprietà fondamentali notate pel θ dei Capitoli precedenti; quindi, per esempio, anche la seguente:

Più funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n$ delle p variabili $x_1, x_2, \ldots, x_p$ avranno o no tra loro una relazione lineare omogenea a coefficienti dotati dei periodi simultanei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, secondo che sarà o no identicamente zero il determinante:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \vdots & f_n \\ \theta f_1 & \theta f_2 & \vdots & \theta f_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{n-1} f_1 & \theta^{n-1} f_2 & \vdots & \theta^{n-1} f_n \end{vmatrix}.$$

Intendendo anche qui con Φ una funzione qualsiasi dotata della detta periodicità, cioè una funzione caratterizzata da

$$\Delta\Phi = 0,$$

potremo rappresentare la soluzione completa dell'equazione di primo ordine

$$\theta y = a y, \qquad \text{ossia} \qquad (\theta - a) y = 0,$$

dove $\Delta a = 0$, con

$$y = a^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_p}{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_p}} \Phi;$$

e la soluzione completa di una equazione alle differenze dell'ordine m, qual'è

$$(\theta - a_1)(\theta - a_2) \cdots (\theta - a_m) y = 0,$$

dove $\Delta a_1 = \cdots = \Delta a_m = 0$, con

$$f = a_1^{\frac{\Sigma x}{\Sigma \omega}} \Phi_1 + a_2^{\frac{\Sigma x}{\Sigma \omega}} \Phi_2 + \cdots + a_m^{\frac{\Sigma x}{\Sigma \omega}} \Phi_m,$$

essendo $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ altrettante Φ arbitrarie.

§ **20**. Consideriamo ora più sistemi di periodi simultanei, per esempio, il massimo numero di tali sistemi compatibile coll'uniformità delle funzioni di p variabili, cioè $2p$ sistemi

$$\begin{array}{cccc} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \vdots & \omega_{1,p} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \vdots & \omega_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \omega_{2p,1} & \omega_{2p,2} & \cdot & \omega_{2p,p} \end{array} \tag{1}$$

ed indichiamo con $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{2p}$ il θ per ciascuno di essi sistemi, così che sia

$$\theta_r f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1 + \omega_{r,1}, x_2 + \omega_{r,2}, \ldots, x_p + \omega_{r,p}).$$

Applicati a funzioni uniformi, questi diversi θ sono ad evidenza commutativi tra loro, come lo erano θ e θ' nel Capitolo precedente.

Riguardo a questo complesso di sistemi, possiamo, per esempio, notare la generalizzazione del teorema relativo alla soluzione completa delle equazioni (1) del § 15.

Chiamando, conformemente a ciò che fece il sig. Hermite per $p = 1$, *$2p$-volte periodica di seconda specie* una funzione $U(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ quando abbia le proprietà

$$(\theta_1 - a_1) U = 0, \qquad (\theta_2 - a_2) U = 0, \ldots, \qquad (\theta_{2p} - a_{2p}) U = 0, \tag{2}$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ significhino delle costanti, potremo dire che la soluzione completa di questo sistema di $2p$ equazioni è una funzione $2p$ volte periodica di seconda specie, corrispondente ai periodi (1) ed ai moltiplicatori $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$, ma del resto arbitraria. L'arbitrarietà che nella U comporta il sistema (2) consiste in un fattore dotato di perfetta periodicità relativamente a tutti i periodi simultanei (1), ma del resto qualunque.

Ora consideriamo il sistema delle $2p$ equazioni

$$\left.\begin{array}{l}(\theta_1 - a_{1,1})\,(\theta_1 - a_{1,2})\cdots(\theta_1 - a_{1,m_1})\ y=0,\\ (\theta_2 - a_{2,1})\,(\theta_2 - a_{2,2})\cdots(\theta_2 - a_{2,m_2})\ y=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (\theta_{2p} - a_{2p,1})(\theta_{2p} - a_{2p,2})\cdots(\theta_{2p} - a_{2p,m_{2p}})y=0.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Se sia

$$U = U_{r_1, r_2, \dots, r_{2p}}$$

la soluzione completa (cioè contenente un fattore arbitrario $2p$ volte esattamente periodico) del sistema

$$(\theta_1 - a_{1,r_1})U=0, \qquad (\theta_2 - a_{2,r_2})U=0, \dots, \qquad (\theta_{2p} - a_{2p,r_{2p}})U=0,$$

cogli stessi ragionamenti del § 15 si riconoscerà essere

$$y = \sum_{r_1=1}^{r_1=m_1} \sum_{r_2=1}^{r_2=m_2} \cdots \sum_{r_{2p}=1}^{r_{2p}=m_{2p}} U_{r_1, r_2, \dots, r_{2p}} \tag{4}$$

la soluzione completa del sistema (3), la quale dunque è una somma di $m_1 \cdot m_2 \cdots m_{2p}$ funzioni $2p$ volte periodiche di seconda specie.

INDICE.

Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. C. Neumann sulle funzioni potenziali.

(*Nota del prof.* Eugenio Beltrami, *a Pavia.*)

Nel fascicolo 3° (testè uscito alla luce) del t. 16 dei *Mathematische Annalen,* il sig. C. Neumann, promotore indefesso della teoria matematica del potenziale, ha pubblicati (in gran parte senza dimostrazione) molti nuovi teoremi relativi a questa teoria, teoremi i quali sono da giudicarsi come molto importanti, sia per le lacune ch'essi colmano, sia per quelle ch'essi contribuiranno a colmare in seguito. Essi sono raggruppati in due distinti Articoli, il primo dei quali (p. 409-431) riguarda il potenziale logaritmico di distribuzioni lineari semplici e doppie, ed il secondo (p. 432-438) riguarda il potenziale newtoniano di distribuzioni superficiali semplici e doppie.

L'interesse in me destato dai nuovi risultamenti cui il sig. Neumann è pervenuto mi ha indotto a cercarne subito la dimostrazione e, trovatala, a comunicarla agli studiosi. Ciò faccio colla presente Nota, nella quale tuttavia mi restringo alla considerazione dei potenziali newtoniani, sia per il più immediato vantaggio che ogni nuova agevolezza nel loro maneggio può recare alla fisica matematica, sia per la visibile analogia dei procedimenti (ancor più semplici) coi quali si potrebbero stabilire i teoremi corrispondenti circa i potenziali logaritmici. D'altronde il sig. Neumann è in parte già entrato, rispetto a questi ultimi, in particolari più minuti, e tutti devono desiderare ch'egli stesso svolga, da par suo, le delicate proposizioni che si contengono nella seconda parte del suo primo Articolo: desiderio tanto più legittimo, in quanto che Egli afferma d'aver già in pronto, da tempo non breve, siffatti svolgimenti.

Il sig. Neumann considera espressamente ed esclusivamente il caso delle superficie *chiuse*, e, supponendole riferite a coordinate curvilinee, sceglie per tali coordinate quelle che definiscono le linee di curvatura della superficie. Avendo io creduto più conveniente (e non già per sola vaghezza di generalità) di prescindere da queste due particolarizzazioni, dirò le ragioni che mi hanno indotto a ciò fare.

Quanto alla scelta delle coordinate, chiaro essendo (per la natura stessa della questione) che le espressioni in cui esse debbono figurare definitivamente non possono essere altro che *invarianti differenziali,* è naturale che l'uso di coordinate generiche debba condurre più direttamente, come infatti conduce, a quella forma delle suddette espressioni nella quale si rende manifesto il loro carattere invariantivo.

Quanto poi alla considerazione d'una superficie aperta, anzichè chiusa, parmi ch'essa si raccomandi di preferenza, non solo per l'opportunità che dà di conoscere come si atteggino le formole in quel caso più generale (che pur risponde, come il secondo, a questioni fisiche possibili), ma eziandio per un'altra ragione più concreta. È noto infatti che per applicare alle superficie curve certe relazioni fondamentali fra integrali di superficie ed integrali di contorno, analoghe a quelle notissime di Gauss e di Green e costituenti l'essenziale meccanismo di quasi tutte le operazioni sulle funzioni potenziali, bisogna che il reticolo curvilineo tracciato sulla superficie dalle linee coordinate presenti dovunque lo stesso aspetto generale del reticolo cartesiano nel piano, bisogna, cioè, che sia possibile concepire la trasformazione continua dell'uno nell'altro. Ora per una superficie chiusa questa trasformazione è impossibile. Diventa dunque necessario dividere una tale superficie in due o più pezzi, per ciascun dei quali si possa concepire l'esistenza d'un reticolo curvilineo dotato del carattere suddetto. È certo che, ad operazione compiuta, gli integrali lineari, relativi ai due margini di ciascun taglio fatto nella superficie primitiva, si debbono elidere a vicenda; ma ciò non pertanto questi integrali si presentano spontaneamente nell'applicazione delle mentovate formole, e non pare quindi inopportuno, anche per questo solo riguardo, di conservarne la traccia.

Supporrò dunque, in ciò che segue, che si tratti sempre d'un pezzo di superficie, σ, nel quale il reticolo delle coordinate curvilinee possegga dovunque il suaccennato carattere (*); le formole ottenute saranno valide, naturalmente, per un altro pezzo qualunque, o per una superficie chiusa, divisibile in parti dotate separatamente della stessa proprietà.

(*) Per maggiori schiarimenti si consulti la mia Memoria: *Sulle variabili complesse in una superficie qualunque,* nel t. 1 della nuova Serie di questi *Annali* (Art. I).

Sieno ξ, η, ζ le coordinate rettangolari d'un punto qualunque dello spazio, u, v le coordinate curvilinee d'un punto qualunque della superficie σ. Pei punti di questa superficie le ξ, η, ζ sono funzioni determinate delle variabili u, v, e ponendo

$$E = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$
$$F = \xi'\xi_{,} + \eta'\eta_{,} + \zeta'\zeta_{,},$$
$$G = \xi_{,}^2 + \eta_{,}^2 + \zeta_{,}^2,$$

(dove l'apice superiore od inferiore designa una derivazione parziale rispetto ad u od a v) si ha

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

come espressione del quadrato d'un elemento lineare qualunque della superficie σ. In virtù dei valori di E, F, G la quantità $EG - F^2$ non può mai diventare negativa: la supposizione fatta sulla natura del reticolo curvilineo esclude ch'essa possa annullarsi entro i limiti di σ e sul contorno s. Designeremo con H il valore positivo del radicale

$$H = \sqrt{EG - F^2} > 0.$$

Per un punto qualunque (u, v) della superficie σ passano due linee di questa superficie, l'una lungo la quale varia soltanto u, l'altra lungo la quale varia soltanto v. Le tangenti in quel punto a queste due linee, dirette nel senso in cui crescono le rispettive variabili u, v, fanno tra loro un angolo il cui coseno è

$$\frac{F}{\sqrt{EG}}$$

e che, per le ipotesi fatte, è maggiore di 0° e minore di 180°. Chiameremo n la normale alla superficie nel punto (u, v), diretta in modo che la prima delle dette due tangenti, percorrendo il detto angolo per raggiungere la seconda, giri intorno alla retta n nello stesso senso in cui l'asse positivo delle ξ deve girare (d'un angolo retto) intorno all'asse positivo delle ζ, per raggiungere l'asse positivo delle η. Per tale convenzione, designando con α, β, γ i coseni degli angoli che la retta n fa coi tre assi delle ξ, η, ζ, cioè ponendo

$$\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial n}, \qquad \beta = \frac{\partial \eta}{\partial n}, \qquad \gamma = \frac{\partial \zeta}{\partial n},$$

si hanno le formole

$$H\alpha = \eta'\zeta_{,} - \eta_{,}\zeta',$$
$$H\beta = \zeta'\xi_{,} - \zeta_{,}\xi',$$
$$H\gamma = \xi'\eta_{,} - \xi_{,}\eta'.$$

Ciò posto osserviamo che, se la superficie ha dovunque una curvatura finita, si possono, in sufficiente prossimità di essa, considerare le ξ, η, ζ come funzioni monodrome di u, v, n (u e v essendo le coordinate curvilinee del piede della normale n), epperò si può scrivere

$$d\xi = \xi' du + \xi_, dv + \alpha dn,$$
$$d\eta = \eta' du + \eta_, dv + \beta dn,$$
$$d\zeta = \zeta' du + \zeta_, dv + \gamma dn,$$

donde

$$\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta = E du + F dv,$$
$$\xi_, d\xi + \eta_, d\eta + \zeta_, d\zeta = F du + G dv.$$

Introducendo dunque i simboli

$$\frac{G\varphi' - F\varphi_,}{H} = M_\varphi, \qquad \frac{E\varphi_, - F\varphi'}{H} = N_\varphi$$

(dove φ è una funzione qualunque di u e v), si ha

$$du = \frac{1}{H}(M_\xi d\xi + M_\eta d\eta + M_\zeta d\zeta)$$
$$dv = \frac{1}{H}(N_\xi d\xi + N_\eta d\eta + N_\zeta d\zeta)$$
$$dn = \alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta.$$

Sostituendo questi valori nell'identità

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} d\zeta = \varphi' du + \varphi_, dv + \frac{\partial\varphi}{\partial n} dn,$$

(dove φ è una funzione qualunque di ξ, η, ζ) ed osservando essere

$$M_\xi \varphi' + N_\xi \varphi_, = M_\varphi \xi' + N_\varphi \xi_,,$$

si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{1}{H}(M_\varphi \xi' + N_\varphi \xi_,) + \alpha \frac{\partial\varphi}{\partial n},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{1}{H}(M_\varphi \eta' + N_\varphi \eta_,) + \beta \frac{\partial\varphi}{\partial n},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{1}{H}(M_\varphi \zeta' + N_\varphi \zeta_,) + \gamma \frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Moltiplicando ordinatamente queste equazioni per

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}$$

(dove ψ è un'altra funzione qualunque di ξ, η, ζ) e sommando membro a membro, si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}$$

$$=\frac{1}{H}(M_\varphi\psi'+N_\varphi\psi_,)+\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n},$$

o più brevemente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}=\Delta_1(\varphi,\ \psi)+\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n}, \tag{1}$$

dove l'espressione

$$\Delta_1(\varphi,\ \psi)=\frac{1}{H^2}\{G\varphi'\psi'-F(\varphi'\psi_,+\varphi_,\psi')+E\varphi_,\psi_,\}$$

è quella di cui ho già da lungo tempo fatto uso sotto il nome di parametro differenziale intermedio o misto delle due funzioni φ e ψ, e che, più brevemente, può designarsi come il loro invariante bilineare (*).

Facendo successivamente nell'equazione (1) $\varphi=\xi$, $=\eta$, $=\zeta$, si ottengono le formole

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}&=\Delta_1(\psi,\ \xi)+\alpha\frac{\partial\psi}{\partial n},\\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta}&=\Delta_1(\psi,\ \eta)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n},\\ \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}&=\Delta_1(\psi,\ \zeta)+\gamma\frac{\partial\psi}{\partial n},\end{aligned}\right\} \tag*{(1)$_a$}$$

che non differiscono punto da quelle che abbiamo ottenute più sopra per φ e che abbiamo adoperate per la deduzione della formola generale (1).

(*) Veggansi le mie *Ricerche di analisi applicata alla geometria,* nei tomi 2 e 3 del Giornale di Battaglini (1864-65), la già citata Memoria *Sulle variabili complesse* ecc., la Memoria *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima* e quella intitolata *Teorica generale dei parametri differenziali,* nella Serie II, t. 7 e 8 delle Memorie dell'Accademia di Bologna. Ho dato un riassunto delle principali formole circa questo argomento in un Articolo *Zur Theorie des Krümmungsmaasses,* nel t. 1 dei *Mathematische Annalen.* L'attuale equazione (1) non è che un caso particolare della seconda equazione (26) del § 3 della suddetta *Teorica.*

Consideriamo ora un integrale della forma

$$\int \mu \Delta_1(\varphi,\ \psi) d\sigma,$$

esteso a tutto il pezzo di superficie σ. Le quantità μ, φ, ψ sono tre funzioni delle u, v di cui indicheremo fra breve le proprietà necessarie. Osservando che si può porre $d\sigma = H du dv$, il precedente integrale può scriversi così:

$$\int\int \mu (M_\varphi \psi' + N_\varphi \psi_{,}) du\, dv.$$

Ma si ha identicamente

$$\mu M_\varphi \psi' = (\mu M_\varphi \psi)' - \{\mu (M_\varphi)' + \mu' M_\varphi\} \psi,$$
$$\mu N_\varphi \psi_{,} = (\mu N_\varphi \psi)_{,} - \{\mu (N_\varphi)_{,} + \mu_{,} N_\varphi\} \psi;$$

quindi il detto integrale si può di nuovo convertire nell'espressione seguente

$$\int\int \{(\mu M_\varphi \psi)' + (\mu N_\varphi \psi)_{,}\} du\, dv - \int \{\mu \Delta_2 \varphi + \Delta_1(\varphi,\ \mu)\} \psi\, d\sigma,$$

dove il simbolo

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{H} \{(M_\varphi)' + (N_\varphi)_{,}\}$$

rappresenta il secondo parametro differenziale della funzione φ (*).

D'altronde, se χ è una funzione di u, v che in tutta la superficie σ sia monodroma, continua e finita e sia dotata di derivate prime, si ha (**)

$$\int\int \chi' du\, dv = -\int \left(E \frac{\partial u}{\partial \nu} + F \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) \frac{\chi\, ds}{H},$$
$$\int\int \chi_{,} du\, dv = -\int \left(F \frac{\partial u}{\partial \nu} + G \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) \frac{\chi\, ds}{H},$$

dove gli integrali del primo membro sono estesi a tutta la superficie σ e quelli del secondo membro a tutto il contorno s, percorso nel senso positivo (rispetto alla normale n d'ogni punto di σ prossimo al contorno stesso), e dove ν è la direzione dell'elemento lineare di σ condotto da un punto qualunque del contorno normalmente al contorno stesso, verso la regione di superficie che si considera. Quindi, supponendo che μ e ψ siano funzioni monodrome, continue,

(*) Memorie citate.
(**) Memoria *Sulle variabili complesse* ecc. (Art. 5).

finite e dotate di derivate prime, e che φ sia una funzione monodroma, continua e finita insieme colle sue derivate prime e dotata di derivate seconde, si ha

$$\begin{aligned}&\int\int\{(\mu M_\varphi \psi)' + (\mu N_\varphi \psi)_{,}\} du\, dv\\
&= -\int\left\{M_\varphi\left(E\frac{\partial u}{\partial \nu} - F\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) + N_\varphi\left(F\frac{\partial u}{\partial \nu} - G\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\right\}\frac{\mu \psi\, ds}{H}\\
&= -\int \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\psi\, ds.\end{aligned}$$

Si ha dunque finalmente l'identità seguente:

$$\left.\begin{aligned}&\int \mu \Delta_1(\varphi,\ \psi) d\sigma\\
&= -\int\{\mu \Delta_2 \varphi + \Delta_1(\varphi,\ \mu)\}\psi\, d\sigma - \int \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\psi\, ds,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

che comprende come caso particolare (per $\mu = 1$) la formola da me stabilita nella citata Memoria: *Sulle variabili complesse* ecc. e coll'ajuto della quale ho potuto stabilire il teorema analogo a quello di Green per una superficie qualunque.

Premesso ciò, veniamo alla nostra questione, incominciando a considerare l'ordinaria funzione potenziale di superficie

$$V = \int \frac{h\, d\sigma}{r}, \tag{3}$$

dove h è la densità ed r la distanza assoluta dell'elemento $d\sigma$ dal punto *potenziato* (*), di cui diremo $x,\ y,\ z$ le coordinate e che supporremo a distanza finita dalla superficie σ.

Ponendo per comodo

$$\psi = \frac{1}{r},$$

si ha

$$\left.\begin{aligned}V &= \int h \psi\, d\sigma,\\
\frac{\partial V}{\partial x} &= \int h \frac{\partial \psi}{\partial x} d\sigma = -\int h \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\sigma,\end{aligned}\right\} \tag{3$_a$}$$

(*) Parmi che adottando le denominazioni di *punto potenziato* e di *punto potenziante,* di *masse potenziate* e di *masse potenzianti,* si eviterebbero, nella teoria delle funzioni potenziali, molte perifrasi e molti sottintesi che rendono talora penoso e talora oscuro il linguaggio.

ossia, in virtu delle formole $(1)_a$,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int h \Delta_1(\psi, \xi) d\sigma - \int h \alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma.$$

Applicando la relazione (2), con che si suppone che h sia funzione monodroma, continua e finita di u, v, dotata di derivate prime, si ottiene immediatamente

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1(h, \xi)\} \psi d\sigma - \int h \alpha \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma + \int h \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \psi ds, \tag*{$(4)_a$}$$

e riponendo per ψ il suo valore

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{h \Delta_2 \xi + \Delta_1(h, \xi)}{r} d\sigma - \int h \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int h \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \frac{ds}{r}. \tag{4}$$

È questa la formola $(13)B$ del sig. Neumann, completata da un termine (l'ultimo) che è la funzione potenziale d'una massa distribuita lungo il contorno s, termine il quale naturalmente svanisce quando la superficie σ è chiusa.

Dal processo di dimostrazione risulta che questa formola, scritta sotto la forma $(4)_a$, è indipendente dalla legge d'attrazione.

La massa totale cui sono dovute le funzioni potenziali del secondo membro è espressa da

$$\int \{h \Delta_2 \xi + \Delta_1(h, \xi)\} d\sigma + \int h \frac{\partial \xi}{\partial \nu} ds$$

ed è $= 0$, come risulta dal porre nell'identità (2) $\mu = h$, $\varphi = \xi$, $\psi = 1$.

Passiamo alla funzione potenziale di doppio strato

$$W = \int g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma, \tag{5}$$

dove g è il momento. Introducendo di nuovo il simbolo ψ, si ha

$$W = \int g \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma = \int g \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \beta + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \gamma \right) d\sigma, \tag*{$(5)_a$}$$

donde

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\int g \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \alpha + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \beta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} \gamma \right) d\sigma.$$

Per applicare le formole generali al secondo membro di questa equazione, conviene dargli prima un'altra forma. A tal fine consideriamo i valori di g, i quali, per il significato di questa quantità, dipendono soltanto dalle variabili

u e v, come i valori che prende sulla superficie σ una funzione delle tre coordinate ξ, η, ζ, funzione che dobbiamo supporre dotata di derivate prime, almeno in prossimità della superficie. In tale ipotesi, la quale esige evidentemente che anche la data funzione $g(u, v)$ sia dotata di derivate prime, si può scrivere

$$g\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},$$

$$g\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$

$$g\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)-\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta},$$

epperò

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\int\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma$$
$$-\int\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\cdot\alpha+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\cdot\beta+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\cdot\gamma\right\}d\sigma.$$

Ora, dal noto teorema

$$\int_s(X d\xi+Y d\eta+Z d\zeta)$$
$$=\int\left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial\eta}-\frac{\partial Y}{\partial\zeta}\right)\alpha+\left(\frac{\partial X}{\partial\zeta}-\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right)\beta+\left(\frac{\partial Y}{\partial\xi}-\frac{\partial X}{\partial\eta}\right)\gamma\right\}d\sigma,$$

dove il primo integrale è preso lungo il contorno s (percorso positivamente) della superficie σ alla quale si estende il secondo integrale, e dove le X, Y, Z sono tre funzioni di ξ, η, ζ monodrome, continue, finite e dotate di derivate prime in prossimità della superficie σ, si desume, in particolare,

$$\int_s g\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}d\eta=\int\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\cdot\gamma-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\cdot\alpha\right\}d\sigma,$$

$$\int_s g\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\zeta=\int\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\cdot\alpha-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(g\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\cdot\beta\right\}d\sigma.$$

Ponendo dunque

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}=\nabla\psi,$$

si ha

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\int\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial n}d\sigma-\int g\nabla\psi\cdot d\sigma$$

$$-\int\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}+\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}+\frac{\partial g}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)\alpha\, d\sigma+\int_s g\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}d\zeta-\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}d\eta\right).$$

Possiamo adesso, per la definitiva trasformazione di quest'espressione, invocare le formole stabilite al principio.

Facendo nella formola (1) $\varphi=g$, si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}+\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}+\frac{\partial g}{\partial \zeta}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}=\Delta_1(g,\ \psi)+\frac{\partial g}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n},$$

e facendo nella prima delle formole $(1)_\alpha$ $\psi=g$ si ottiene pure

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}-\alpha\frac{\partial g}{\partial n}=\Delta_1(g,\ \xi).$$

Si ha dunque

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\int\Delta_1(g,\ \xi)\frac{\partial \psi}{\partial n}d\sigma+\int_s g\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}d\zeta-\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}d\eta\right)$$

$$-\int g\nabla\psi\, d\sigma-\int\alpha\Delta_1(g,\ \psi)\, d\sigma,$$

espressione in cui di nuovo non intervengono che i valori superficiali di g e dove non resta che da trasformare l'ultimo integrale mediante la formola (2), facendo in questa $\mu=\alpha$, $\varphi=g$; il che esige che $g(u,\ v)$ sia funzione monodroma, continua e finita, insieme colle sue derivate prime, e che sia dotata altresì di derivate seconde. Operando questa trasformazione e ponendo inoltre, per brevità,

$$\int_s g\psi\, d\xi=X,\qquad \int_s g\psi\, d\eta=Y,\qquad \int_s g\psi\, d\zeta=Z,$$

si ottiene finalmente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}&=\int\{\alpha\Delta_2 g+\Delta_1(g,\ \alpha)\}\psi\, d\sigma+\int\Delta_1(g,\ \xi)\frac{\partial \psi}{\partial n}d\sigma\\&-\int g\nabla\psi\, d\sigma+\int\alpha\frac{\partial g}{\partial \nu}\psi\, ds+\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\end{aligned}\right\}\qquad (6)_\alpha$$

e riponendo per ψ il suo valore

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}=\int\frac{\alpha\,\Delta_2 g+\Delta_1(g,\,\alpha)}{r}d\sigma+\int\Delta_1(g,\,\xi)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma\\+\int\alpha\frac{\partial g}{\partial\nu}\frac{ds}{r}+\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

È questa la formola $(14)B$ dal sig. NEUMANN, completata da tre nuovi termini (i tre ultimi), dei quali il primo è la funzione potenziale d'una massa distribuita lungo il contorno s, e gli altri due sono le derivate prime delle funzioni potenziali di due analoghe distribuzioni lineari (*).

Per rendere questa formola indipendente dalla legge d'attrazione bisogna aggiungere un altro integrale di superficie [il terzo nella formola $(6)_a$].

Le due formole (4) (6), a ciascuna delle quali se ne possono associare due altre, relative alle coordinate y e z, fanno evidentemente riscontro a quelle, già note da lungo tempo, che forniscono le derivate d'una funzione potenziale di spazio per mezzo di funzioni potenziali di spazio e di superficie. Quando σ è una superficie chiusa, esse prendono le forme seguenti

$$\frac{\partial V}{\partial x}=V_1+W_1,\qquad \frac{\partial W}{\partial x}=V_2+W_2,$$

dove V_1, V_2 sono funzioni della specie di V e W_1, W_2 sono funzioni della specie di W; donde si conclude, col sig. NEUMANN, l'importante risultato che ogni derivata, qualunque ne sia l'ordine, di V o di W, rispetto alle coordinate x, y, z, è sempre esprimibile sotto forma di somma di due funzioni potenziali di superficie, l'una di semplice, l'altra di doppio strato.

Se si ammette, come fa il sig. NEUMANN, che sia già stata dimostrata la continuità della funzione

$$V=\int\frac{h\,d\sigma}{r},$$

nel passaggio del punto $(x,\,y,\,z)$ attraverso alla superficie, e la discontinuità della funzione

$$W=\int g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma,$$

(*) Quando g è costante questi due termini sono i soli che rimangano nel secondo membro, e l'equazione che si ottiene è la traduzione analitica del teorema fondamentale di AMPÈRE.

nel passaggio medesimo, discontinuità definita dall'equazione

$$W_n - W_{n'} = 4\pi g,$$

dove W_n e $W_{n'}$ sono i due valori di W nell'immediata prossimità del punto cui si riferisce il valore di g, l'uno dalla parte della normale n l'altro da quella della normale opposta n', le formole (4) e (6) conducono molto facilmente alla determinazione della discontinuità delle derivate di V e di W nel passaggio attraverso alla superficie, passaggio che supporremo effettuarsi in un punto posto a distanza finita dal contorno s della superficie σ.

Limitiamoci a considerare le derivate normali, e supponiamo quindi (per applicare direttamente a questo caso le formole già scritte) che nel punto di passaggio si abbia $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, cioè

$$\eta'\zeta_, - \eta_,\zeta' = H > 0, \qquad \zeta'\xi_, - \zeta_,\xi' = 0, \qquad \xi'\eta_, - \xi_,\eta' = 0,$$

epperò

$$\xi' = \xi_, = 0,$$

come è d'altronde manifesto. Scrivendo le formole (4) e (6) così

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int h\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + P, \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = \int \Delta_1(g, \xi) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + Q,$$

dove P e Q sono funzioni di x, y, z che restano continue nel passaggio del punto (x, y, z) attraverso alla superficie, in ogni punto a distanza finita dal contorno, si ha immediatamente, dalle proprietà ammesse,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_n - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{n'} = -4\pi h, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_n - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{n'} = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h, \qquad \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial n'} = 0,$$

formole che esprimono le notissime proprietà delle prime derivate normali di V e di W, nell'immediata prossimità della superficie.

Per trovare le analoghe proprietà delle derivate seconde, scriviamo le equazioni (4) (6) in quest'altro modo

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{h_1 d\sigma}{r} + \int g_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + p,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int \frac{h_2 d\sigma}{r} + \int g_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + q,$$

dove

$$h_1 = h\Delta_2\xi + \Delta_1(h,\ \xi),\qquad g_1 = -h\alpha,$$
$$h_2 = \alpha\Delta_2 g + \Delta_1(g,\ \alpha),\qquad g_2 = \Delta_1(g,\ \xi),$$

e dove p, q sono funzioni dipendenti dal solo contorno s. Di quì, in virtù delle stesse formole (4), (6), si trae

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int \{-h_1\alpha + \Delta_1(g_1,\ \xi)\} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + P,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \int \{-h_2\alpha + \Delta_1(g_2,\ \xi)\} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + Q,$$

dove P, Q sono di nuovo funzioni che rimangono continue nel passaggio attraverso alla superficie. Ora nel punto di passaggio si ha, per ipotesi, $\xi' = \xi_{,} = 0$, epperò

$$\Delta_1(g_1,\ \xi) = 0,\qquad \Delta_1(g_2,\ \xi) = 0;$$

dunque

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_n - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{n'} = -4\pi h_1,$$
$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_n - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{n'} = -4\pi h_2,$$

dove

$$h_1 = h\Delta_2\xi,\qquad h_2 = \Delta_2 g + \Delta_1(g,\ \alpha).$$

Ma da formole note (*) si ha, in generale,

$$\Delta_1\xi = 1 - \alpha^2,\qquad \Delta_2\xi = -\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

dove R_1, R_2 sono i due raggi principali di curvatura della superficie nel punto considerato, contati positivamente quando la loro direzione (dal centro di curvatura verso la superficie) coincide con quella della normale positiva n, negativamente nel caso contrario. Dalla prima di queste due formole si ha, per $\alpha = 1$,

$$\alpha' = -\tfrac{1}{2}(\Delta_1\xi)',\qquad \alpha_{,} = -\tfrac{1}{2}(\Delta_1\xi)_{,};$$

(*) Cfr. le mie Memorie già citate. Del resto la prima equazione si deduce dalla prima delle $(1)_\alpha$ facendo $\psi = \xi$, e la seconda si ricava da una formola generale dimostrata più sotto (vedi in fine della presente Nota).

quindi, per essere $\Delta_1 \xi$ funzione quadratica ed omogenea delle derivate ξ', $\xi_{,}$, che si annullano nel punto di passaggio, si ha, in questo stesso punto, $\alpha' = \alpha_{,} = 0$, donde

$$\Delta_1(g, \alpha) = 0,$$

epperò

$$h_1 = -h\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad h_2 = \Delta_2 g.$$

Le formole cercate sono dunque

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial n'^2} &= 4\pi h\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial n'^2} &= -4\pi \Delta_2 g. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

La prima di queste formole è una di quelle (17. *E*) che il sig. Neumann dà come applicazioni dei suoi teoremi, ed era già stata dimostrata (con qualche restrizione) dal prof. Paci (*). La seconda mi sembra nuova (**). Ambedue però sono intimamente connesse fra loro in virtù d'una proposizione più generale, che ora procedo a stabilire, e dalla quale mi pare che venga meglio chiarita la loro vera origine analitica.

Riferiamo i punti dello spazio a tre coordinate curvilinee u, v, w, corrispondenti a tre famiglie di superficie, le prime due delle quali sieno ortogonali alla terza. La superficie σ sia una di quelle appartenenti alla terza famiglia, e, per semplicità, sia quella che corrisponde al valore $w = 0$ del parametro di questa famiglia, il quale supporremo crescente dalla parte della normale positiva n. Il quadrato dell'elemento lineare generico dello spazio è, per le ammesse ipotesi, evidentemente rappresentato da un'espressione della forma

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 + K^2 dw^2,$$

dove E, F, G, K sono quattro funzioni di u, v, w, circa le prime tre delle quali possiamo supporre che, per $w = 0$, si riducano a quelle stesse che vennero precedentemente designate coi medesimi simboli, e, circa la quarta, riterremo essere $K > 0$.

(*) Giornale di Battaglini, t. 15.

(**) Il confronto di essa con quella che il sig. Neumann ha trovato pei potenziali logaritmici (18. *D*) conferma ancora una volta l'esattezza d'una osservazione di Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes,* § 15), già da me rilevata nel § 16 delle citate *Ricerche d'analisi* ecc.

Continuiamo a denotare con Δ_1 e Δ_2 i parametri differenziali di primo e second'ordine relativi all'ipotesi $dw=0$, cioè relativi al caso in cui si considerino come variabili le sole u, v; e denotiamo invece con ∇_1, ∇_2 le analoghe espressioni rispetto allo spazio a tre dimensioni, rispetto, cioè, al caso in cui si consideri come variabile anche w. Per tale convenzione, rammentando le regole generali per la formazione dei parametri differenziali (*), si ottiene dapprima, per una funzione qualunque φ,

$$\nabla_1\varphi=\Delta_1\varphi+\frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2;$$

indi

$$\nabla_2\varphi=\frac{1}{HK}\left\{(KM_\varphi)'+(KN_\varphi)_,+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right\},\qquad (H=\sqrt{EG-F^2})$$

ossia

$$\nabla_2\varphi=\Delta_2\varphi+\frac{\Delta_1(\varphi,K)}{K}+\frac{1}{HK}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right).$$

Di quì si trae, per $\varphi=w$,

$$\nabla_1 w=\frac{1}{K^2}\qquad \nabla_2 w=\frac{1}{HK}\frac{\partial}{\partial w}\frac{H}{K},$$

epperò

$$\frac{\nabla_2 w}{\sqrt{\nabla_1 w}}-\frac{\partial\sqrt{\nabla_1 w}}{\partial w}=\frac{1}{HK}\frac{\partial H}{\partial w},$$

ossia, per una nota formola di Lamé (**),

$$\frac{1}{HK}\frac{\partial H}{\partial w}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2},$$

dove R_1, R_2 sono i raggi principali di curvatura della superficie $w=$ *costante*, nel punto (u, v, w).

Si può quindi scrivere

$$\nabla_2\varphi=\Delta_2\varphi+\frac{\Delta_1(\varphi,K)}{K}+\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

ossia finalmente

$$\nabla_2\varphi=\Delta_2\varphi+\frac{\Delta_1(\varphi,K)}{K}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s},\tag{8}$$

(*) Cfr. la citata *Teorica generale dei parametri differenziali*, § 3.
(**) *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 42.

dove s è l'arco della linea secondo cui s'intersecano le superficie $u = cost.$, $v = cost.$, arco contato positivamente nel senso di w crescente.

È questa una formola generale che comprende molti risultati conosciuti e che potrebbe porgere argomento ad altre applicazioni. Ma, per venire senz'altro alla questione che ci occupa, supponiamo che la variabile designata generalmente con w sia il segmento n della normale positiva condotta nel punto (u, v) alla superficie σ, cosicchè la famiglia $w = cost.$ sia formata delle superficie parallele alla data, e le famiglie $u = cost.$, $v = cost.$ sieno formate di superficie rigate normali alle precedenti. È evidente che in tal caso, essendo $ds = dn$, si ha $K = 1$ e quindi

$$\Delta_1(\varphi, K) = 0,$$

cosicchè l'equazione (8) diventa

$$\nabla_2 \varphi = \Delta_2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial n} \,. \tag{8$_a$}$$

Se invece della normale positiva n si volesse considerare la normale negativa n', opposta alla n, si avrebbe evidentemente

$$\nabla_2 \varphi = \Delta_2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n'^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial n'} \,.$$

Ciò posto distinguiamo coi simboli φ e φ' i valori che la funzione φ prende, in prossimità della superficie σ, dalle due opposte parti di questa. Avremo

$$\nabla_2 \varphi = \Delta_2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial n} \,,$$

$$\nabla_2 \varphi' = \Delta_2 \varphi' + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial n'^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial n'} \,,$$

equazioni in ciascuna delle quali i valori delle quantità

$$E, \quad F, \quad G, \quad R_1, \quad R_2$$

debbono naturalmente riferirsi al punto cui corrisponde il valore φ, ovvero φ', della funzione. Se supponiamo che i due punti sieno sopra una stessa normale, le loro coordinate saranno rispettivamente u, v, n ed u, v, n'. Ma facendo decrescere indefinitamente i valori di n e di n', è chiaro che quelle cinque quantità tenderanno a prendere gli stessi valori nell'una e nell'altra equazione, tenderanno, cioè, a prendere i valori che loro competono nel punto (u, v) della superficie σ. In tale stato limite potremo dunque scrivere

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial n'^2}\\&=-\Delta_2(\varphi_n-\varphi_{n'})-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)+(\nabla_2\varphi)_n-(\nabla_2\varphi)_{n'},\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

dove φ_n e $\varphi_{n'}$ sono i valori che la funzione φ prende sulla faccia positiva e sulla faccia negativa della superficie σ, come limiti di quelli che essa prende in prossimità di questa superficie dalle due opposte parti di essa.

È questa la formola che ci proponevamo di stabilire e che esprime la discontinuità della seconda derivata normale d'una funzione qualunque, attraverso ad una superficie, per mezzo dei valori che la funzione stessa, la sua prima derivata normale e il suo secondo parametro differenziale (completo) prendono da ambedue le parti della superficie, nell'immediata prossimità di essa.

Se φ è una funzione potenziale procedente da sole masse distribuite sulla superficie stessa, si ha

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial n'^2}=-\Delta_2(\varphi_n-\varphi_{n'})-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right).\tag*{(9)$_a$}$$

Se, più in particolare, si tratta d'una funzione potenziale ordinaria

$$\varphi=V=\int\frac{h\,d\sigma}{r},$$

si ha

$$V_n=V_{n'},\qquad \frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'}=-4\pi h,$$

epperò

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial n'^2}=4\pi h\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Se, invece, si tratta d'una funzione potenziale di doppio strato

$$\varphi=W=\int g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma,$$

si ha

$$W_n-W_{n'}=4\pi g,\qquad \frac{\partial W}{\partial n}+\frac{\partial W}{\partial n'}=0,$$

epperò

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial n'^2}=-4\pi\Delta_2 g.$$

Questi risultati s' accordano perfettamente, come si vede, con quelli che abbiamo più sopra ricavati dalle formole del sig. NEUMANN. Col procedimento attuale essi appariscono quali semplici corollarii dell' equazione di LAPLACE.

Per applicare la formola (9) alle funzioni potenziali di spazio bisogna supporre che la densità sia continua da ambedue le parti della superficie σ. In questo caso si ha

$$\varphi_n - \varphi_{n'} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n'} = 0,$$

ed i valori di

$$(\nabla_2 \varphi)_n, \qquad (\nabla_2 \varphi)_{n'}$$

sono determinati dall' equazione di POISSON. Il risultato che si ottiene in tal modo è d' accordo con quello che già si conosce (*).

Scrivendo la formola $(8)_a$ così

$$\Delta_2 \varphi = \nabla_2 \varphi - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2},$$

essa serve alla deduzione di risultati d' altro genere. Facendo, per esempio, $\varphi = \xi$, si ha

$$\nabla_2 \xi = 0, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial n} = \alpha, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial n^2} = 0,$$

epperò

$$\Delta_2 \xi = -\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

formola di cui si è già fatto uso precedentemente.

Se invece delle coordinate curvilinee *speciali* u, v, w si fossero considerate delle coordinate curvilinee generali, in modo che la linea s d' intersezione delle superficie (u), (v) riuscisse *obliqua* e non già normale alle superficie (w), si sarebbe ottenuta una formola analoga alla (9), per la determinazione della discontinuità d' una derivata seconda presa in direzione qualunque. Non credo necessario di sviluppare questo calcolo, e mi limito solamente ad osservare che anche per questa via si può pervenire alla determinazione della discontinuità delle derivate d' ordine superiore, e che forse riesce in tal modo più agevole riconoscere le condizioni strettamente necessarie per la validità delle formole che s' incontrano.

Pavia, 28 Aprile 1880.

(*) Cfr. KIRCHHOFF, *Mechanik*, Lezione XVI, § 2.

Wie viele cyclische Gruppen gibt es in einer quadratischen Transformation der Ebene?

(*Von* S. Kantor, *in Wien.*)

Bei einer synthetischen Untersuchung über periodische quadratische Transformationen bot sich mir zunächst die Frage dar, wie viele cyclische Gruppen es in einer beliebigen quadratischen Transformation gebe. Führt man auf einen Punkt dieser Gruppen die Transformation aus, hernach ebenso auf den Transformirten und successive weiter, so gelangt man zum Ausgangspunkt zurück, nachdem man eine endliche Anzahl Male die Transformation im selben Sinne vollzogen hat. Der Beantwortung dieser Frage mögen die folgenden Zeilen gewidmet sein. Vielleicht wird einerseits die relative Leichtigkeit überraschen, mit der sich die geometrische Seite der Frage erledigen lässt, und andererseits der Zusammenhang interessiren, der zwischen ihr und der Theorie der Zahlen besteht.

1. a, b, c und a', b', c' seien die Hauptpunkte der beiden hier über einander gelegten Systeme Σ_1 und Σ_2. Einem Punkte p der Ebene entspricht, je nachdem man ihn zu Σ_1 oder Σ_2 zählt, ein Punkt p^1 oder p_1 im anderen Systeme. Die Hauptpunkte a, b, c liefern als gewöhnliche Punkte von Σ_2 der Reihe nach $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $c^{(1)}$; $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$;... $a^{(\mu)}$, $b^{(\mu)}$, $c^{(\mu)}$ als Transformationsresultat, die $a'b'c'$ geben die Tripel $a'_{(1)}$, $b'_{(1)}$, $c'_{(1)}$; $a'_{(2)}$, $b'_{(2)}$, $c'_{(2)}$;... $a'_{(\mu)}$, $b'_{(\mu)}$, $c'_{(\mu)}$. Einem Stralbüschel von Σ_1 mit dem Scheitel p entspricht ein Kegelschnittbüschel mit den Scheiteln $a'b'c'p_1$, welches auf jenes projectiv bezogen ist und mit ihm eine Curve dritter Ordnung K_3 erzeugt, die p, p_1, $a'b'c'$ enthält. Dieselbe ist, wie man sieht, der Ort der Punkte von Σ_2, welche mit den ihnen entsprechenden Punkten von Σ_1 auf durch p zielenden Ge-

raden liegen (*). Die zu zwei verschiedenen p gehörigen K_3 schneiden sich ausser in a', b', c' und auf pp' noch in den vier Doppelpunkten $(d)_4$ der Tranformation.

Man kann eine Gerade g zu Σ_1 oder Σ_2 rechnen und erhält entsprechende Curven zwei Kegelschnitte in Σ_2 und Σ_1, die sich in jenen vier Punkten π treffen, für welche π^1 und π_1 auf g liegen. Lässt man g ein Büschel durchlaufen, so beschreiben die Kegelschnitte zwei projectiv auf einander bezogene Büschel, welche als Erzeugnis die von den Punkten π erfüllte Curve liefern, die von der 4 Ordnung ist und durch a, b, c, a', b', c', p_1, p^1, $(d)_4$ geht. Ich bemerke sogleich, dass man von einem Punkte p aus nach zwei verschiedenen Richtungen die Transformation successive appliciren kann und erhalte so zunächst:

Die Punkte, deren erste Transformirte nach beiden Richtungen durch eine in einem festen Punkte eintreffende Gerade verbunden sind, erfüllen eine Curve vierter Ordnung, P_4, welche die Hauptpunkte und die Doppelpunkte enthält.

Zwei verschiedene P_4 schneiden sich ausser in diesen Punkten auch in den vier zur Verbindungsgeraden ihrer p, p' gehörigen π und daher noch in zwei Punkten k, l. Für diese muss die Gerade $k_1 k^1$ durch p, wie durch p' gehen, was, da keine weiteren Doppelpunkte existiren, das Zusammenfallen von k_1 und k^1 bedingt. Also:

In jeder quadratischen Transformation der Ebene gibt es (im Allgemeinen) ein und nur ein Punktepaar, dessen Punkte sich involutorisch entsprechen.

2. Die Curve P_4 für a zerfällt in $b'c'$ und die durch a, b, c, $(d)_4$, a', $a^{(1)}$ gehende Curve 3 Ordnung, analog die für b. Das involutorische Punktepaar kann als der Rest des Schnittes zweier bestimmten Curven 3 Ordnung mit sieben gegebenen gemeinsamen Punkten construirt werden. Wegen der Symmetrie dieser Punkte gegen beide Systeme folgt nun:

Das involutorische Punktepaar stellt sowol für das durch $abc(d)_4$, als das durch $a'b'c'(d)_4$, bestimmte Curvennetz dritter Ordnung ein verbundenes Punktepaar vor.

Die $(d)_4$ wird man am einfachsten als die gemeinsamen Punkte dreier Kegelschnitte construiren, auf deren jedem sich die entsprechenden Stralen eines

(*) Cremona: *Erhält die analoge Curve für seine Transformationen* (Memorie di Bologna, 1865) durch eine Abzählung.

Hauptpunktepaares treffen, welche also als Directionskegelschnitte für die Transformation auftreten. Bemerkt man, dass in den Hauptpunkten a, a' die Stralenpaare ac, $a'b'$ und ab, $a'c'$ sich entsprechen, so erkennt man die Directionskegelschnitte als zu drei Büscheln gehörig, welche bezüglich durch die drei degenerirten Kegelschnittspaare

$$\overline{ab},\ \overline{a'b'} \text{ und } \overline{ac},\ \overline{a\,c'};\qquad \overline{bc},\ \overline{b'c'} \text{ und } \overline{ab},\ \overline{a'b'};\qquad \overline{ac},\ \overline{a'c'} \text{ und } \overline{bc},\ \overline{b'c'}$$

constituirt werden und folglich Büschel eines Netzes sind. Man schliesst so die interessante Beziehung:

Die vier Doppelpunkte der Transformation bilden ein verbundenes Punktquadrupel in dem durch die entsprechenden Seitenpaare der beiden Hauptdreiecke constituirten Kegelschnittsnetze (*).

3. Wird auf den einer Geraden von Σ_1 entsprechenden, Kegelschnitt neuerdings die Transformation ausgeführt, so erhält man eine Curve C'_4 mit Doppelpunkten in a', b', c' und einfachen Punkten in $a'_{(1)}b'_{(1)}c'_{(1)}$. Zwischen den Punkten p und $p_{(2)}$ besteht eine Cremona'sche Transformation, und einem Stralbüschel von Σ_1 entspricht ein dazu projectivisches Büschel der C'_4. Ueberträgt man das Stralbüschel von Σ_2 nach Σ_1, so bekommt man ein zu den C'_4 projectives Büschel von Kegelschnitten C_2, die mit den C_4 jene Punkte bestimmen, für welche die ihren zweiten Transformirten nach Σ_1 hin und ihren ersten Transformirten nach Σ_2 verbindende Gerade durch einen gegebenen Punkt, den Scheitel jenes Büschels verläuft. Der Ort dieser Punkte ist von der sechsten Ordnung, hat a', b', c' doppelt, a, b, c und $a'_{(1)}$, $b'_{(1)}$, $c'_{(1)}$ einfach und enthält jedenfalls die Doppelpunkte, da für sie jene Gerade unbestimmt wird oder auch, da sich in ihnen entsprechende Curven der beiden Büschel schneiden. Durchläuft der Scheitel des Stralbüschels eine Gerade, so muss die Curve 6 Ordnung ein Büschel durchlaufen, denn durch einen Punkt der Ebene sind seine Transformirten, ihre Verbindungslinie, deren Schnitt mit der Ortsgeraden und folglich die Curve P_6 festgestellt. Zu den Scheiteln des Büschels gehören die Fundamentalpunkte, die Doppelpunkte, die Schnittpunkte der C'_4 und C_2 für die Ortsgerade und daher noch $36-3\cdot4-3-3-4-8=6$ Punkte, welche derart liegen müssen, dass jene Verbindungsgerade unbestimmt

(*) Man kann die n^2 Basispunkte eines in einem Curvennetze $n$ter Ordnung enthaltenen Büschels als eine in diesem Netze verbundene oder einfacher: enthaltene Punktgruppe bezeichnen.

wird ($p^{(2)} \equiv p_{(1)}$), und nach der dritten Transformation in sich zurückkehren. Dann hat jede Phase dieses Punktes dieselbe Eigenschaft, die Zahl ist durch 3 zu dividiren und es kommt:

In einer beliebigen quadratischen Transformation gibt es zwei cyclische Gruppen von je drei Punkten.

4. Wollen wir nun die cyclischen N punktigen Gruppen finden, so teilen wir die Zahl N in beliebiger Weise in zwei Summanden M und $N-M$ und suchen jene Punkte, deren Mte Transformirte gegen Σ_2 hin mit der $(N-M)$ten Transformirten gegen Σ_1 hin zusammenfällt. Die $(N-M)$te Transformirte von $p^{(N-M)}$ gegen Σ_2 hin ist dann p, also p seine eigene $M+(N-M)=N$te Transformirte gegen Σ_2 hin.

Wir setzen der Einfachheit wegen $M=1$.

Applicirt man auf eine Gerade g $(N-1)$ mal die Transformation gegen Σ_2 hin, so erhält man eine Curve der 2^{N-1}ten Ordnung, welche

$$2^{N-2} \text{ fache Punkte in } a'b'c'; \qquad 2^{N-3} \text{ fache Punkte in } a'_{(1)},\ b'_{(1)},\ c'_{(1)};\ldots$$
$$\text{einfache Punkte in } a'_{(N-2)},\ b'_{(N-2)},\ c'_{(N-2)}$$

hat und zur Geraden in eindeutiger Beziehung steht.

Einem Büschel von Geraden g entspricht ein Büschel von Curven $C'_{2^{N-1}}$. Bringt man jede derselben mit dem der betreffenden Geraden in Σ_1 entsprechenden Kegelschnitt zum Schnitt, so erhält man Punkte $p^{(N-1)}$ und $p_{(1)}$ auf jener g liegen. Das Erzeugnis der beiden Curvenbüschel ist eine Curve $2^{N-1}+2$ter Ordnung, der Ort der Punkte, deren $p^{(N-1)}$ und $p_{(1)}$ mit einem festen Punkte in gerader Linie sind. Diese curve $P_{2^{N-1}+2}$ enthält $(a', b', c')2^{N-2}$ fach, $(a'_{(1)}, b'_{(1)}, c'_{(1)})2^{N-3}$ fach, schliesslich $a'_{(N-2)}, b'_{(N-2)}, c'_{(N-2)}$ sowie a, b, c einfach und überdies die $(d)_4$.

Zwei verschiedene Curven $P_{2^{N-1}+2}$ schneiden sich ausser in diesen Punkten nur noch in den Schnittpunkten der Erzeugungscurven, welche der Verbindungsgeraden ihrer Stralbüschelscheitel entsprechen, und in solchen, für welche die Gerade $p^{(N-1)}p_{(1)}$ unbestimmt wird, die beiden Transformirten identisch sind.

Es sei f ein beliebiger Factor von N und p_a ein Punkt, der nach f Transformationen in sich zurückkehrt; dann gelangt er nach $N-f$ Transformationen in sich selbst und daher nach $(N-1)-(N-f)=f-1$ weiteren Transformationen in den gegen Σ_1 hin $(f-1)$ten Punkt seiner Gruppe, das ist in den ihm gegen Σ_2 hin benachbarten Punkt derselben Gruppe. Nach der ersten Transformation gegen Σ_2 gelangt p_α in eben diesen Punkt, daher wird auch für ihn die Gerade $p^{(N-1)}p_{(1)}$ unbestimmt, und er wird gemeinsamer Schnittpunkt aller $P_{2^{N-1}+2}$ sein müssen. Ist also f ein beliebiger Factor von N, Z_f die Zahl der cyclischen Gruppen $f$ten Grades, so ist die Summe $\Sigma f\cdot Z_f$, über alle einfachen und zusammengesetzten Factoren von N ausgedehnt, von der Anzahl der Schnittpunkte zu subtrahiren. Es bleiben daher noch

$$(2^{N-1}+2)^2-3(2^{N-2}\cdot 2^{N-2}+2^{N-3}\cdot 2^{N-3}+\cdots+1)-3-4-2\cdot 2^{N-1}-\Sigma f\cdot Z_f$$

eigentliche Lösungen unserer Aufgabe. Will man nur die cyclischen Gruppen haben, so hat man noch durch N zu dividiren, und erhält nach gehöriger Reduction

$$Z_N=\frac{2^N-2-\Sigma f\cdot Z_f}{N} \tag{1}$$

als eine Recursionsformel für die gesuchte Anzahl, wobei ich wiederhole, dass die Summe Σ auf alle möglichen in N enthaltenen Zahlen f auszudehnen ist.

Ist insbesondere N eine Primzahl, so fällt die Summe weg, und es bleibt

$$Z_N=2\,\frac{2^{N-1}-1}{N}\,. \tag{2}$$

Der Bruch rechts muss nothwendig eine ganze Zahl sein, und hierin kann man einen geometrischen Beweis eines Theiles des Fermat'schen Satzes (für die Basis 2) erblicken.

Ist N die Potenz einer Primzahl, a^α, so sind a, a^2,... $a^{\alpha-1}$ sämmtliche Factoren und man hat nach (1)

$$aZ_a+a^2Z_{a^2}+\cdots+a^{\alpha-1}Z_{a^{\alpha-1}}+a^\alpha Z_{a^\alpha}=2^{a^\alpha}-2,$$

andererseits besteht analog

$$aZ_a+a^2Z_{a^2}+\cdots+a^{\alpha-1}Z_{a^{\alpha-1}}\qquad\qquad=2^{a^{\alpha-1}}-2,$$

daher durch Subtraction

$$a^\alpha Z_{a^\alpha}=2^{a^\alpha}-2^{a^{\alpha-1}}$$

oder

$$Z_{a^\alpha}=2^{a^{\alpha-1}}\,\frac{2^{a^{\alpha-1}(a-1)}-1}{a^\alpha}\,. \tag{3}$$

Hat N die Form $a^\alpha b^\beta$, wo a und b Primzahlen sind, so ergibt sich ($Z' = N \cdot Z$)

$$Z'_{a^\alpha} + Z'_{a^{\alpha-1}} + \cdots + Z'_a = 2^{a^\alpha} - 2$$

$$Z'_{ba^\alpha} + Z'_{ba^{\alpha-1}} + \cdots + Z'_{ba} = 2^{ba^\alpha} - 2 - (2^{a^\alpha} - 2) = 2^{ba^\alpha} - 2^{a^\alpha}$$

$$Z'_{b^2a^\alpha} + Z'_{b^2a^{\alpha-1}} + \cdots + Z'_{b^2a} = 2^{b^2a^\alpha} - 2^{ba^\alpha}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z'_{b^\beta a^\alpha} + Z'_{b^\beta a^{\alpha-1}} + \cdots + Z'_{b^\beta a} = 2^{b^\beta a^\alpha} - 2^{b^{\beta-1}a^\alpha}.$$

Subtrahirt man von der Summe dieser Gleichungen die analoge nur bis $b^{\beta-1}$ vorschreitende Summe, so bleibt

$$Z'_{b^\beta a^\alpha} + Z'_{b^{\beta-1}a^\alpha} + \cdots + Z'_{a^\alpha} = 2^{b^\beta a^\alpha} - 2^{b^\beta a^{\alpha-1}}$$

und hievon wieder die analoge nur bis $b^{\beta-1}$ laufende Gleichung, so wird

$$Z'_N = \frac{2^{b^\beta a^\alpha} - 2^{b^\beta a^{\alpha-1}} - 2^{b^{\beta-1}a^\alpha} + 2^{b^{\beta-1}a^{\alpha-1}}}{b^\beta a^\alpha}. \tag{4}$$

Die vollständige Herleitung der allgemeinen independenten Formel für Z_N würde zu viel Raum benöthigen. Es sei daher das Resultat allein angeführt.

Ist N eine ganze Zahl, welche die Primfactoren $a_1, a_2, \ldots a_n$ enthält, also die Form $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_\nu^{m_\nu}$ besitzt, so ist die Anzahl der in einer beliebigen quadratischen Transformation der Ebene existirenden Gruppen, von denen jeder Punkt nach N maliger Anwendung der Transformation wieder in die Anfangslage gelangt, gleich

$$Z_N = \frac{2^N - \Sigma 2^{\frac{N}{a_r}} + \Sigma 2^{\frac{N}{a_r a_s}} \cdots + (-1)^\nu 2^{\frac{N}{a_1 a_2 \ldots a_\nu}}}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=\nu} \sum_{r=1}^{r=\nu} (-1)^\mu 2^{\frac{N}{a_{r_1} a_{r_2} \cdots a_{r_\mu}}} \tag{5}$$

wo für $r_1 r_2 \ldots r_\mu$ jede beliebige Complexion von μ verschiedenen Zahlen aus $1, 2, \ldots \nu$ einzutreten hat.

In einer quadratischen Transformation gibt es also ein involutorisches Punktepaar, zwei periodische Tripel, drei periodische Quadrupel, 6, 9, 18 periodische Quintupel, Sextupel und Septupel, etc.

Die Zahl auf der rechten Seite von Gleichung (5) muss stets eine ganze Zahl sein und man hat hiedurch den zahlentheoretischen Satz gewonnen:

THEOREM. Ist $N = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_\nu^{m_\nu}$, wo $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ Primzahlen, so ist die Zahl

$$2^N - \left(2^{\frac{N}{a_1}} + \ldots 2^{\frac{N}{a_\nu}}\right) + \left(2^{\frac{N}{a_1 a_2}} + \ldots 2^{\frac{N}{a_{\nu-1} a_\nu}}\right) - \ldots + (-1)^\nu 2^{\frac{N}{a_1 a_2 \ldots a_\nu}}$$

durch N theilbar.

Für $N = a^\alpha$ geht daraus ein Theil des FERMAT'schen Satzes hervor.

Rom, den 13 Februar 1880.

Beantwortung derselben Frage für Cremona'sche Transformation.

(*Von* S. Kantor, *in Wien.*)

Die Frage nach der Anzahl Π der cyclischen Gruppen lässt sich mittelst eines ganz analogen Gedankenganges auch bei der allgemeinen rationalen Transformation beantworten.

Zu dem Zwecke seien die i fachen Fundamentalpunkte des Systemes Σ_1, deren Zahl α_i sein möge, durch

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \ldots \quad I_{\alpha_i}$$

bezeichnet; i variirt von 1 bis $n-1$. Ebenso treten in Σ_2

$$J_1, \quad J_2, \quad J_3, \ldots \quad J_{\alpha_i}$$

auf.

Werden die I als Punkte des zweiten Systemes und die J als Punkte des ersten wiederholt transformirt, so erscheinen successive

$$\begin{array}{llll c llll} I_{1(1)}, & I_{2(1)}, & I_{3(1)}, \ldots & I_{\alpha_i(1)} & & J_1^{(1)}, & J_2^{(1)}, & J_3^{(1)}, \ldots & J_{\alpha_i}^{(1)} \\ I_{1(2)}, & I_{2(2)}, & I_{3(3)}, \ldots & I_{\alpha_i(2)} & \text{und} & J_1^{(2)}, & J_2^{(2)}, & J_3^{(2)}, \ldots & J_{\alpha_i}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Die Ordnung der Transformation sei a und wir setzen voraus, dass sich die Fundamentalgebilde beider Systeme in g a n z a l l g e m e i n e r gegenseitiger Lage befinden.

Demgemäss setzt sich eine Gerade g von Σ_1 nach der $(N-1)$ten Transformation in eine Curve der a^{N-1}ten Ordnung um, welche die $J^{(\mu)}$ zu $a^{N-2-\mu}\cdot i$ fachen Punkten hat. Einem Büschel der g entspricht ein Büschel von Curven $C'_{a^{N-1}}$, welches mit dem ihm projectiven Büschel von Curven C_a, in welche sich die g nach Σ_1 hin übertragen, eine Curve der Ordnung $a^{N-1}+a$ erzeugt, die $J^{(\mu)}$ zu $a^{N-2-\mu}\cdot i$ fachen und J zu i fachen Punkten hat und überdies die

$a+2$ Doppelpunkte der Transformation enthält. Sie ist der Ort der Punkte, deren erster Transformirter nach Σ_2 hin mit dem $(N-1)$ten Transformirten gegen Σ_2 hin auf einer durch den Scheitel des g-Büschels strebenden Geraden liegt. Zwei derartige Curven treffen sich noch in den der Verbindungslinie der beiden Scheitel entsprechenden $a \cdot a^{N-1}$ und in weiteren Punkten, von denen jene beiden Transformirten identisch werden.

Man beweist wie oben, dass in diesen letzteren Punkten die der cyclischen Gruppen für sämmtliche Perioden f, wo f irgend ein Factor von N ist, inbegriffen sind. Für die Zahl Π_N besteht daher

$$\left.\begin{aligned} N\cdot\Pi_N=(a^{N-1}+a)^2-(a+2)-a\cdot a^{N-1}-&\sum_i a^{2(N-2)}i^2\alpha_i\\ -&\sum_i a^{2(N-3)}i^2\alpha_i\\ &\dots\dots\dots\\ -&\sum_i i^2\alpha_i-\sum_i i^2\alpha'_i-\sum f\cdot\Pi_f. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Erinnert man sich, dass für jede Cremona'sche Transformation die Gleichung (*)

$$\sum i^2\alpha_i+1=a^2$$

gilt, so kann man in (6) statt der Summen schreiben

$$(a^2-1)(a^{2(N-2)}+a^{2(N-3)}+\cdots 1)+(a^2-1)$$

oder

$$a^{2(N-1)}-1+(a^2-1),$$

wonach

$$\Pi_N=\frac{a^N-a-\sum f\cdot\Pi_f}{N}, \tag{7}$$

das Summenzeichen ist über alle in N aufgehenden Zahlen zuerstrecken.

Die Formel (7) kann man wieder durch eine independente ersetzen:

Es gibt in einer rationalen Transformation $a$ter Ordnung in der Ebene stets

$$\Pi_N=\frac{a^N-\left(a^{\frac{N}{f_1}}+\cdots a^{\frac{N}{f_\nu}}\right)+\left(a^{\frac{N}{f_1f_2}}+\cdots a^{\frac{N}{f_{\nu-1}f_\nu}}\right)-\cdots+(-1)^\nu a^{\frac{N}{f_1f_2\cdots f_\nu}}}{N}$$

(*) Cremona: *Sulle transformazioni geometriche delle figure piane* (Memorie di Bologna, 1865).

Gruppen von N Punkten, für welche die Transformation eine derart periodische ist, dass jeder Punkt der Gruppe nach N Transformationen und nicht früher in sich zurückkert, wenn N die Form $f_1^{m_1} f_2^{m_2} \dots f_\nu^{m_\nu}$ hat.

Hierin liegt abermals der Beweis für ein zahlentheoretisches Theorem, das die Verallgemeinerung von dem früheren ist:

THEOREM. Die Zahl $\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=\nu} \sum\limits_{r=1}^{r=\nu} (-1)^\nu a^{\frac{N}{f_{r_1} f_{r_2} \dots f_{r_\mu}}}$, wo $N = f_1^{m_1} . f_2^{m_2} \dots f_\nu^{m_\nu}$, und $r_1, r_2, \dots r_\mu$ jede Complexion von μ verschiedenen Buchstaben aus $1, 2, \dots \nu$ ist, ist immer durch N theilbar.

Es scheint nicht bemerkt worden zu sein, dass sich das FERMAT'sche Theorem ausser nach der bekannten von GAUSS angedeuteten Richtung noch in anderer Weise verallgemeinern lässt.

Es gibt speciell $\frac{1}{2} a(a-1)$ involutorische Punktepaare, $\frac{1}{3} a(a-1)(a+1)$ periodische Punktetripel, $\frac{1}{4} a^2(a-1)(a+1)$ periodische Quadrupel, etc.

Rom, Februar 1880.

Sulla generazione di una classe di equazioni differenziali lineari integrabili per funzioni ellittiche.

(*Nota di* F. Brioschi, *in Milano.*)

1.° In una Memoria presentata all'Accademia dei Lincei nella prima adunanza dello scorso Giugno ho dimostrato come dalle proprietà di alcune funzioni algebriche irrazionali si potevano dedurre prontamente i risultati già ottenuti dai sig.i Picard ed Hermite (*) rispetto ad alcune equazioni differenziali di terzo e di quarto ordine integrabili per funzioni ellittiche. Nella stessa Memoria io osservava come il metodo quivi esposto prestavasi con mirabile semplicità alla generazione di equazioni differenziali di più alto ordine, e specialmente alla ricerca di certe due equazioni di condizione che hanno molta importanza nella quistione. È appunto ciò che mi propongo dimostrare nella presente Nota.

Posto $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$ e:

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{\varphi(\xi)}}{x - \xi}$$

considero le seguenti espressioni:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1 = \mu + \psi(x)\\
&A_2 = A_1^2 + A'_1 \sqrt{\varphi}\\
&A_3 = A_1 A_2 + A'_2 \sqrt{\varphi}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&A_3 = A_1 A_{r-1} + A'_{r-1} \sqrt{\varphi}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(*) Vedi anche le interessanti ricerche del sig. Mittag-Leffler nei Comptes Rendus del Febbrajo e Marzo scorsi.

nelle quali μ, ξ sono due indeterminate, $A'_1 = \frac{dA_1}{dx} \cdots$ e $\sqrt{\varphi}$ è posto in luogo di $\sqrt{\varphi(x)}$.

Osserviamo dapprima che essendo:

$$\psi^2 + \psi'\sqrt{\varphi} = 2x + \xi$$

si ha:

$$A_2 = 2\mu A_1 + 2x + \xi - \mu^2$$

e da essa:

$$A'_2 = 2\mu A'_1 + 2$$

e quindi:

$$A_3 = 2\mu A_2 + (2x + \xi - \mu^2) A_1 + 2\sqrt{\varphi}$$

ossia pel valore di A_2:

$$A_3 = (2x + \xi + 3\mu^2) A_1 + 2\mu(2x + \xi - \mu^2) + 2\sqrt{\varphi}.$$

Si noti ora che la prima delle relazioni (1) dà pel valore di $\psi(x)$ che:

$$\sqrt{\varphi} = \sqrt{\varphi(\xi)} + 2(x - \xi) A_1 - 2(x - \xi)\mu \tag{2}$$

perciò sostituendo questo valore di $\sqrt{\varphi}$ nella superiore si avrà:

$$A_3 = (6x - 3\xi + 3\mu^2) A_1 + 2\sqrt{\varphi(\xi)} + 6\mu\xi - 2\mu^3$$

ossia ponendo:

$$a = 3(\xi - \mu^2), \qquad b = 2\mu^3 - 6\mu\xi - 2\sqrt{\varphi(\xi)} \tag{3}$$

si avranno le:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= 2\mu A_1 + 2x + \tfrac{1}{3}a \\ A_3 &= (6x - a) A_1 - b. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Derivando quest'ultima rispetto ad x si ha:

$$A'_3 = (6x - a) A'_1 + 6A_1$$

e quindi:

$$A_4 = (6x - a) A_2 - b A_1 + 6 A_1 \sqrt{\varphi}; \tag{5}$$

ma pel valore di A_1 si ha:

$$A_1\sqrt{\varphi} = \mu\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\varphi - \varphi(\xi)}{x - \xi} - \psi(x)\sqrt{\varphi(\xi)}$$

e sostituendo nel secondo membro il valore di $\sqrt{\varphi}$ dato dalla (2):

$$A_1\sqrt{\varphi} = [2\mu x - 2\mu\xi - \sqrt{\varphi(\xi)}] A_1 + 2x^2 + 2(\xi - \mu^2)x + 2\mu^2\xi + 2\xi^2 - \tfrac{1}{2}g_2 + 2\mu\sqrt{\varphi(\xi)}$$

o pei valori di a, b (3):

$$A_1\sqrt{\varphi}=[2\mu x+\tfrac{1}{3}a\mu+\tfrac{1}{2}b]A_1+2x^2+\tfrac{2}{3}ax+\tfrac{1}{18}a^2+\tfrac{1}{6}c$$

essendo:

$$c=a^2-6b\mu-3g_2.$$

Infine pel valore (4) di A_2 si ha:

$$A_1\sqrt{\varphi}=xA_2+\tfrac{1}{6}aA_2+\tfrac{1}{2}bA_1+\tfrac{1}{6}c$$

la quale espressione sostituita nella (5) dà:

$$A_4=12xA_2+2bA_1+c.$$

Procedendo in questo modo si ottengono le due serie di relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&A_2-2x=2\mu A_1+\tfrac{1}{3}a\\
&A_3-6xA_1=-aA_1-b\\
&A_4-12xA_2=2bA_1+c\\
&A_5-20xA_3=-\tfrac{1}{3}dA_1-\tfrac{4}{3}e\\
&A_6-30xA_4+18g_2A_2=2eA_1+5f\\
&A_7-42xA_5+42g_2A_3=-gA_1-h\\
&A_8-56xA_6+84g_2A_4+720g_3A_2=\tfrac{4}{3}hA_1\,\tfrac{7}{3}l
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I}^{\mathrm{a}})$$

$$\left.\begin{aligned}
&xA_1-\tfrac{1}{2}\sqrt{\varphi}=\tfrac{1}{2}\mu A_2+\tfrac{1}{3}aA_1+\tfrac{1}{4}b\\
&xA_2-A_1\sqrt{\varphi}=-\tfrac{1}{6}aA_2-\tfrac{1}{2}bA_1-\tfrac{1}{6}c\\
&xA_3-\tfrac{3}{2}A_2\sqrt{\varphi}=\tfrac{1}{4}bA_2+\tfrac{1}{3}(c+3g_2)A_1+\tfrac{1}{6}e\\
&xA_4-2A_3\sqrt{\varphi}-g_2A_2=-\tfrac{1}{6}cA_2-\tfrac{1}{3}eA_1-\tfrac{1}{2}f\\
&xA_5-\tfrac{5}{2}A_4\sqrt{\varphi}-2g_2A_3=\tfrac{1}{6}eA_2+(f+18g_3)A_1+\tfrac{1}{6}h\\
&xA_6-3A_5\sqrt{\varphi}-3g_2A_4-36h_3A_2=-\tfrac{1}{2}fA_2-\tfrac{1}{6}hA_1-\tfrac{1}{6}l
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{II}^{\mathrm{a}})$$

nelle quali:

$$\begin{array}{lll}
5c+24g_2=d & 2b^2-ac=f & bd-4ae=h\\
ab-3c\mu=e & 7f+216g_3=g & cd-8be=l.
\end{array}$$

Si noti che siccome le a, b, c sono di 2°, 3°, 4° grado rispetto a μ così saranno e del quinto f, g del sesto, h del settimo, l dell'ottavo, ecc.

2.° Se dai valori (3) di a e di b si elimina la indeterminata ξ si ottiene fra le a, b, μ la seguente, o meglio fra le a, b, c, μ le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} 27b^2-16ac+12ab\mu-36c\mu^2-12g_2a+108g_3=0 \\ c=a^2-66\mu-3g_2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Aggiungendo a queste altre due equazioni in a, b, c, μ ed eliminando dalle quattro le a, b, c si otterrà una equazione in μ la quale supposta del grado n darà n valori per μ e per la prima delle (3) n valori corrispondenti per ξ.

Ora se le due equazioni sono:

$$a=\alpha, \qquad b=\beta$$

α, β costanti, si ha tosto dalle (6) che l'equazione in μ è del terzo grado; per questi *tre* valori di μ e pei corrispondenti di ξ dalla seconda delle equazioni del gruppo (I°) si otterrà quindi identicamente:

$$A_3+(6x-\alpha)A_1+\beta=0. \qquad (7)$$

Così dalla prima e terza relazione dello stesso gruppo si ottiene la:

$$A_4-12xA_2+\alpha(A_2-2x)+\beta A_1+\gamma=0 \qquad (8)$$

purchè sieno soddisfatte le due condizioni:

$$2b+2\mu\alpha+\beta=0$$

$$c+\tfrac{1}{3}a\alpha+\gamma=0$$

nelle quali α, β, γ sono costanti. Eliminando le a, b, c da queste ultime e dalle (6) si ottiene una equazione del quarto grado in μ; e quindi pei quattro valori di μ e pei corrispondenti di ξ la equazione superiore sarà identicamente soddisfatta.

Analogamente dalla prima, seconda, e quarta relazione del gruppo (I°) si ottiene la:

$$A_5-20xA_3+\alpha(A_3-6xA_1)+\beta(A_2-2x)+\gamma A_1+\delta=0 \qquad (9)$$

purchè:

$$-\tfrac{1}{3}d-a\alpha+2\mu\beta+\gamma=0$$

$$-\tfrac{1}{3}e-b\alpha+\tfrac{1}{3}a\beta+\delta=0$$

essendo α, β, γ, δ costanti. Anche qui la eliminazione delle a, b, c dà una equazione del quinto grado in μ, e quindi si avranno le conseguenze sopra indicate.

Importa notare che le costanti α, β... le quali sono due per la relazione (7) del terzo ordine, sono tre per la (8) del quarto ordine, quattro per la (9) del quinto ordine e saranno quindi $n-1$ in quella dell'ordine ennesimo. Però questo numero deve considerarsi come un maximum, mentre *alcune* fra quelle costanti possono annullarsi senza che la equazione in μ si abbassi di grado.

4 Luglio 1880.

ANNUNCIO NECROLOGICO (*)

È coll'animo addolorato che dobbiamo annunciare ai lettori degli *Annali* la grave perdita subita pochi giorni sono dalle scienze matematiche. Il distinto cultore di esse, l'eminente direttore del *Journal für die reine und angewandte Mathematik* di Berlino, prof. **C. W. Borchardt** spirava il mattino del 27 scorso Giugno in Rüdersdorf dopo dolorosa agonia. L'illustre Hermite comunicando pel primo il doloroso avvenimento a chi scrive aggiungeva « *Je lui étais très-attaché et depuis bien longtemps, depuis 1846, ainsi sa perte m'a bien attristé, et me laisse un grand vide.* » Questo sentimento di tristezza è diviso da tutti i matematici italiani che ebbero la fortuna di conoscere personalmente od ebbero relazione scientifica coll'egregio geometra di Berlino. È perciò in nome di essi tutti ed interpretando il loro comune desiderio che inviamo alla desolata famiglia sua, ed ai suoi eminenti colleghi ed amici dell'Accademia delle Scienze di Berlino una parola di cordoglio e di conforto.

F. B.

(*) A questo cenno farà seguito nel prossimo fascicolo un lavoro intitolato: *Carlo Guglielmo Borchardt ed i suoi scritti scientifici.*

Algebraïscher Beweis des Satzes von der Anzahl der linearunabhängigen Integrale erster Gattung.

(*Von* E. B. Christoffel, *in Strassburg.*)

In meiner Abhandlung über die canonische Form der Integrale I. G. habe ich mich auf einige bekannte Sätze bezogen und dabei angemerkt, dass dieselben sich aus rein algebraïschen Betrachtungen schöpfen lassen. Der Wunsch, dies näher zu erläutern und namentlich die algebraïschen Methoden nachzuweisen, deren ich mich bediene, veranlasst mich, im Folgenden meinen Beweis von einem dieser Sätze mitzutheilen.

Der Gegenstand dieser Untersuchung gehört in die Grundlagen der Lehre von den Abelschen Functionen, und betrifft einerseits die Anzahl der linearunabhängigen Integranden I. G. w', die zu einer gegebenen Gleichung

$$F(\overset{n}{s} \mid \overset{m}{z}) = 0 \tag{1}$$

gehören, andererseits die Kriterien für die Irreductibilität von F resp. die Anzahl seiner irreductibeln Factoren.

Bevor ich zu dieser Untersuchung übergehe, muss ich befürworten, dass in dieser Materie mehrere Sätze von einander getrennt werden müssen. Ist die Gleichung (1) irreductibel und, indem ich mich zunächst der üblichen Bezeichnungen bediene, r die Anzahl der Doppelpunkte $s \mid z = \gamma \mid \delta$, so lautet der erste Satz, dass die Anzahl der linearunabhängigen Functionen w', welche zu dieser Gleichung gehören, stets gleich

$$(m-1)(n-1)-r$$

ist. Der zweite Satz ist von anderer Natur, und betrifft die zur Gleichung (1) gehörige Fläche T. Aus der Irreductibilität von (1) folgt, dass diese n-blättrige Fläche eine zusammenhängende ist, also ist die Anzahl der Doppellinien, in denen je zwei Blätter in einander übergehen, $\gtreqless n-1$. Bezeichnet man sie durch

$$n-1+p,$$

so ist die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte $w=2(n-1+p)$, und da auch $w=2m(n-1)-2r$ ist, so folgt die bekannte Relation

$$p=(m-1)(n-1)-r.$$

Der erste Satz sagt also auch aus, dass die Anzahl der linearunabhängigen Functionen w' gleich ist der Anzahl p der überzähligen, d. h. für den Zusammenhang von T entbehrlichen Doppellinien dieser Fläche.

Der zweite Satz lehrt, dass (1) diese Fläche durch Querschnitte in eine einfachzusammenhängende verwandelt werden kann und dass dies (2) unter anderm durch p Querschnittbündel c, a, b (Riemanns, *Theorie der Abelschen Functionen*, § 19) geleistet wird.

Beide Sätze vereinigt geben den dritten Satz, dass die Anzahl der linearunabhängigen Functionen w' der Anzahl dieser Querschnittbündel gleich ist.

In dieser Form rührt der Satz von Riemann her; unabhängig vom Dirichlet'schen Princip ist derselbe meines Wissens zuerst von Herrn Prÿm bewiesen worden (Vergl. Borchardt's Journal 71, pag. 231-232); der Beweis folgt direct aus einem Riemann'schen Satze über die Periodicitätsmoduln der Integrale I. G. (*Th. d. A. F.*, § 21) wenn man berücksichtigt, dass der Riemann'sche Ausdruck von w' die Existenz von mindestens p linearunabhängigen Functionen w' auf jeden Fall sicherstellt.

Der zweite von diesen Sätzen wird in der Lehre vom Zusammenhange der Fläche T mit selbstständigen Hülfsmitteln bewiesen; ein Gleiches kann man vom ersten Satze verlangen, und dann erst erhält der so eben erwähnte Beweis des dritten Satzes seine wahre Bedeutung, da er in den Eigenschaften der Periodicitätsmoduln das Band nachweist, welches die beiden ersten, so sehr verschiedenartigen Lehrsätze direct miteinander verknüpft.

Von einem algebraïschen Beweise der ersten Satzes muss man hiernach fordern, dass er von der Querschnittstheorie unabhängig ist, aber ausserdem muss er die Irreductibilität der Gleichung (1), an die allein der Satz geknüpft ist, auch als den allein und unmittelbar entscheidenden Beweisgrund hervortreten lassen.

Beides leistet die folgende Untersuchung dadurch dass sie von einer neuen Darstellung der Functionen w' ausgeht, und sie liefert ausserdem die Kriterien für die Irreductibilität des Polynoms F resp. die Anzahl seiner irreductibeln Factoren. Unmittelbar vorausgesetzt ist dabei der allgemeine Fall, den Riemann seinen Untersuchungen zu Grunde legt; der Schlussausdruck von w' ist indessen so beschaffen, dass man die Veränderungen überblicken kann, welche in ihm vorgehen, wenn sich beim Uebergange zu besondern Fällen höhere Singularitäten bilden.

Am Schlusse theile ich noch den doppelten Ausdruck einer Integralfunction R mit, von welcher man sofort zu den Integralen III. und II. G. gelangt, sowie den Ausdruck einer algebraïschen wie T verzweigten Function S von z mittelst des Integranden R'.

I.

Sei in bekannter Bezeichnung

$$\overset{n}{F}(s \mid \overset{m}{z}) \equiv a s^n + a_1 s^{n-1} \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

eine Gleichung zwischen s und z, und ihr Polynom F entweder selbst irreductibel oder durch jeden irreductibeln Factor nur einmal theilbar; ausserdem sei T die n-blättrige Fläche, durch deren Punkte man die Werthe von z repräsentiren muss, damit s denselben eindeutig zugeordnet werden kann, ohne an Linien (lignes d'arrêt nach Cauchy) unstetig zu sein. Iede Function σ von z, welche diese Eigenschaft mit s gemein hat, heisst verzweigt wie die Fläche T. Sind $s_1 s_2 \ldots s_n$ die Werthe von s für das nämliche z, und bezichungs weise $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ die gleichzeitigen, den nämlichen Punkten von T zugeordneten Werthe von σ, so kann man sich die Aufgabe stellen, im Ausdrucke

$$\psi(t \mid z) = U + U_1 t \cdots + U_{n-1} t^{n-1}$$

die von t unabhängigen Coefficienten U, $U_1, \ldots$ als Functionen von z so zu bestimmen, dass für $i = 1, 2, \ldots n$

$$\psi(s_i \mid z) = \sigma_i$$

wird. Die Interpolationsformel von Lagrange gibt sofort

$$\psi(t \mid z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{F'(s_i \mid z)} \cdot \frac{F(t \mid z)}{t - s_i},$$

wenn

$$F'(t \mid z) = \frac{\partial F(t \mid z)}{\partial t}$$

ist. Der vorstehende Ausdruck für ψ ist unzulässig, wenn $F'(s\,|\,z)$ identisch Null ist; aber dies ist durch die Bedingung ausgeschlossen, dass $F(t\,|\,z)$ durch keinen irreductibeln Factor zweimal aufgeht.

Zur Untersuchung von ψ als Function von z wird diese Variable ausser in T auch noch in einer besondern Ebene E repräsentirt. Beschreibt dann z in dieser irgend einen in sich zurückkehrenden Weg l, welcher durch keinen Verzweigungswerth z von s führt, so gibt dies in T für den Punkt z n allenthalben getrennte Wege $l_1 l_2 \ldots l_n$, deren Endpunkte demnach eine Permutation ihrer Anfangspunkte bilden. Die Endwerthe von $s_1 s_2 \ldots s_n$ und ebenso der zugeordneten Zweige $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$ bilden die nämliche Permutation ihrer Anfangswerthe, folglich ist der Endwerth von ψ dem Anfangswerthe gleich. Als Function von z hat also ψ gar keine Verzweigungspunkte, also ist ψ einwerthige Function von z für jedes t, d. h. $U U_1 \ldots$ sind einwerthige Functionen von z.

Iede wie T verzweigte Function σ von z lässt sich also durch s und z in der Form

$$\sigma = \psi(s\,|\,z) = U + U_1 s \cdots + U_{n-1} s^{n-1}$$

ausdrücken, wo die Coefficienten einwerthige Functionen von z sind, und zwar liefert diese Gleichung zu jedem Zweige von s den ihm zugeordneten Zweig von σ.

Wird insbesondere σ weder unendlich oft noch je zu unendlich hoher Ordnung unstetig, so überträgt sich dies auf $\psi(t\,|\,z)$, also ist dann $\psi(t\,|\,z)$ eine rationale Function von z.

II.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, $\sigma = \psi(s\,|\,z)$ auf die allgemeinste Weise so zu bestimmen, dass

$$w = \int \sigma\, dz = \int \psi(s\,|\,z)\, dz$$

ein Integral I. G., d. h. weder im Endlichen noch im Unendlichen jemals unstetig wird. Bei der Lösung dieser Aufgabe beschränken wir uns auf den Fall, wo s als Function von z nur einfache und getrennte Singularitäten hat, und diese alle nur im Endlichen stattfinden d. h. wo (1) die Punkte in denen $s = \infty$ wird oder eine mehrfache Wurzel s stattfindet, alle im Endlichen liegen und niemals zwei solcher Punkte für das nämliche z stattfinden, ausserdem aber (2) als mehrfache Wurzeln nur Doppelwurzeln vorkommen.

Es ist ein Fundamentalsatz, dass (1) dieser einfachste Fall für alle Grade m, n der Gleichung (1) existirt und (2) wenn man ihn mit RIEMANN als den allgemeinen bezeichnet, jeder besondere Fall Grenzfall des allgemeinen ist, nämlich durch stetige Aenderung der Fläche T und stetige Verlegung der Werthe von s in ihr erreicht werden kann. Auch dieser wichtige Lehrsatz lässt sich mit rein algebraïschen Hülfsmitteln beweisen, wie es beim gegenwärtigen Stande der Lehre von den algebraïschen Functionen verlangt werden muss.

Im Uebrigen muss bemerkt werden, dass auch der directen Behandlung besonderer Fälle nach der hier auseinander zu setzenden Methode keine principiellen Hindernisse im Wege stehen.

Unter den vorstehenden Voraussetzungen nun darf σ unstetig werden nur in den Verzweigungspunkten, und zwar wie $1:\sqrt{z-\beta}$, wenn für $z=\beta$ ein solcher stattfindet; im Unendlichen muss auf jedem Blatte $\sigma_i = 0^2$ werden, und umgekehrt sind diese Bedingungen auch ausreichend, damit das $\int \sigma dz$ nie unstetig wird also ein Integral I. G. ist.

Im gegenwärtigen Falle ist also

$$\psi(t\,|\,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i}{F'(s_i\,|\,z)} \cdot \frac{F(t\,|\,z)}{t-s_i}$$

rationale Function von z, und wir haben zu untersuchen, wo und wie sie unstetig wird.

a) Nimmt z einen solchen Werth an, dass $s_i = t$ wird, so bleibt der zweite Factor

$$\frac{F(t\,|\,z)}{t-s_i}$$

stetig, da $t-s_i$ Wurzelfactor des Zählers ist. Dieser Factor wird also nur im Unendlichen unstetig, und zwar $=\infty^m$; aber dort wird auch $F'(s_i\,|\,z) = \infty^m$ und $\sigma_i = 0^2$; im Unendlichen wird also ψ nicht unstetig, sondern unendlich klein zur zweiten Ordnung.

b) Die Unstetigkeitspunkte von ψ liegen also alle im Endlichen und sie entsprechen den Werthen von z, für welche in der Fläche T der erste Factor

$$\tau_i = \frac{\sigma_i}{F'(s_i\,|\,z)}$$

unendlich wird, also den Verzweigungspunkten von T und den Doppelpunkten von s.

Der Vereinfachung wegen benutze ich nun für die Werthe, welche s, z in den

$$r = (m-1)(n-1) - p$$

Punktepaaren, welche Doppelpunkte heissen, und in den

$$w = 2m(n-1) - 2r = 2(n-1+p)$$

Verzweigungspunkten annehmen, die nämliche Bezeichnung

$$s \mid z = \alpha_i \mid \beta_i,$$

so dass wir $w+r$ solcher Werthepaare zu berücksichtigen haben.

Ist alsdann $s \mid z = \alpha_i \mid \beta_i$ ein Verzweigungspunkt, so wird in ihm $\sigma = \infty$, $F' = 0$, aber $\sigma\sqrt{z-\beta_i}$ und $\frac{F'}{\sqrt{z-\beta_i}}$ werden weder Null noch unendlich. Das nämliche gilt von $(z-\beta_i)\tau_i$, und zwar erlangt dieses Product im Verzweigungspunkte denselben Werth für beide Zweige von τ, welche dort zusammenhängen. Bezeichnet man ihn durch $\frac{1}{2}A_i$, so folgt für $z = \beta_i$

$$\lim (z-\beta_i)\psi(t \mid z) = A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t-\alpha_i};$$

für $z = \beta_i$ wird also ψ unstetig und zwar

$$\psi(t \mid z) = A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t-\alpha_i\, z-\beta_i} + \text{funct. cont.}$$

Findet für $z = \beta_k$ ein Doppelpunkt $s_1 = s_2 = \alpha_k$ statt, so bleiben σ_1, σ_2 stetig, aber $F'(s_1 \mid z)$, $F'(s_2 \mid z)$ verschwinden wie $z-\beta_k$; also folgt für $z = \beta_k$

$$\lim (z-\beta_k)\psi(t \mid z) = A_k \frac{F(t \mid \beta_k)}{t-\alpha_k},$$

wo A_k eine Constante ist. Für $z = \beta_k$ wird also ψ eben falls unstetig und

$$\psi(t \mid z) = A_k \frac{F(t \mid \beta_k)}{t-\alpha_k \cdot z-\beta_k} + \text{funct. cont.}$$

Setzen wir daher den, bei Untersuchungen dieser Art stets wiederkehrenden Ausdruck

$$\frac{F(t \mid \beta_i)}{t-\alpha_i \cdot z-\beta_i} = T_i(t \mid z),$$

so folgt, dass $\psi(t \mid z)$ nur für die $w+r$ Werthe β_i von z unstetig wird, und für $z = \beta_i$

$$\psi(\, t\, z = A_i T_i(t \mid z) + \text{funct. cont.}$$

ist. Der Ueberschuss von ψ über die Summe aller Ausdrücke $A_i T_i$ wird also niemals unstetig, also ist er constant, und $=0$, da er im Unendlichen verschwindet. Es folgt

$$\psi(t \mid z) = \sum_{i=1}^{w=r} A_i T_i(t \mid z) = \sum_{i=1}^{w=r} A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t - \alpha_i \cdot z - \beta_i}.$$

Aber da ψ im Unendlichen zur zweiten Ordnung verschwindet, so muss in seiner absteigenden Entwicklung das Glied mit $\frac{1}{z}$ fehlen, also

$$\sum A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t - \alpha_i} = 0 \qquad (A)$$

sein, und zwar für jedes t.

III.

Ietzt erhalten wir

$$\sigma = \sum_i A_i T_i(s \mid z) = \sum_i A_i \frac{F(s \mid \beta_i)}{s - \alpha_i \cdot z - \beta_i}$$

und haben zunächst zu untersuchen, in wie weit dieser Ausdruck den an σ zustellenden Anforderungen genügt.

1) Im Unendlichen wird wegen (A) auf jedem Blatte der Fläche T: $\sigma = 0^2$, wie erforderlich ist.

2) Wir untersuchen demnach die Unstetigkeiten einer einzelnen Function

$$T_i = \frac{F(s \mid \beta_i)}{s - \alpha_i \cdot z - \beta_i}$$

nur noch für endliche Werthe von z.

a) Wenn beide Factoren des Nenners unendlich klein werden, so werden zwei Wurzelfactoren des Zählers $= s - \alpha_i$ bis auf Glieder von noch höherer Ordnung, also wird in diesen Falle

$$T_i = \frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i} G$$

und an der Grenze G weder Null, noch unendlich, noch $= \frac{0}{0}$.

Ist nun $\alpha_i \beta_i$ ein Verzweigungspunkt, so folgt, das T_i in ihm unendlich wird wie $\frac{1}{\sqrt{z - \beta_i}}$, das $\int \sigma \, dz$ bleibt also dort stetig; das letztere gilt auch von den übrigen Functionen T_k.

Entspricht dem Werthepaar $\alpha_i\beta_i$ ein Doppelpunkt, d. h. findet dasselbe in zwei getrennten Punkten der Fläche T statt, so nimmt G, da es nicht $=\frac{0}{0}$ wird, in beiden Punkten den nämlichen Werth an, ebenso jede andere Function T_k; aber $\frac{s-\alpha_i}{z-\beta_i}$, welches in beiden Punkten ebenfalls stetig bleibt, erlangt in ihnen ungleiche Werthe, ebenso T_i. Letzteres und das $\int\sigma dz$ bleiben also stetig.

Hieraus ergibt sich der im Folgenden unentbehrliche Satz, dass die $w+r$ Functionen T_i linearunabhängig sind. Sollte nämlich T_i sich durch die übrigen Functionen T_k linear und mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen, so müsste, wenn $\alpha_i\beta_i$ ein Verzweigungspunkt ist, wenigstens eine der letztern dort unendlich werden, und wenn $\alpha_i\beta_i$ ein Doppelpunkt ist, wenigstens eine der übrigen Functionen T_k in den entsprechenden Punkten von T ungleiche Werthe annehmen, wovon weder das eine noch das andere der Fall ist.

b) Sodann ist der Fall zu untersuchen, wo nur ein Factor im Nenner von T_i verschwindet. Wird $s=\alpha_i$ aber nicht $z=\beta_i$, so bleibt T_i also σ stetig, da $s-\alpha_i$ Wurzelfactor des Zählers von T_i ist; wird $z=\beta_i$ aber s nicht $=\alpha_i$, so wird s eine andere Wurzel des Zählers, also abermals T_i und σ nicht unstetig.

c) Im Unendlichen sowie in allen denjenigen Punkten der Fläche T, in denen der Nenner einer der Functionen T_1, T_2,... verschwindet, hat also σ alle verlangten Eigenschaften. Aber ausserhalb dieser Punkte wird noch jede Function T_i, und im Allgemeinen auch σ, unendlich so oft $s=\infty$ wird; soll also σ auch in diesen Fällen stetig bleiben, so müssen seine $w+r$ Constanten A_1, A_2,... in geeigneter Weise beschränkt werden, und andere Beschränkungen derselben sind für unsere Aufgabe nicht erforderlich.

IV.

Sei

$$Q(z)=(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_{w+r}),$$

also $Q(z)$ der Ausdruck, welcher sich ergibt, wenn man die Discriminante D der Gleichung (1) von dem Factor befreit, den sie mit ihrer Derivirten gemein hat. Dann ist $\psi(t\,|\,z)\,Q(z)$ eine ganze Function von t und z, und von den

Graden $n-1$ und $w+r-2$, da für $z=\infty$ $\psi=0^2$ wird. Sei also

$$\psi(t\,|\,z)\cdot Q(z)=G(\overset{n-1}{t}\,|\,\overset{w+r-2}{z})$$

mithin

$$\sigma=\frac{G(\overset{n-1}{s}\,|\,\overset{w+r-2}{z})}{Q(z)},$$

wovon die Formeln der art. II. III. die Partialbruchzerfällungen sind.

Hier muss nun der Zähler G ohne unnöthige Beschränkungen so bestimmt werden, dass er für $s=\infty$ niemals unstetig werden kann. Dies gelingt durch folgende Ueberlegungen. Schreibt man die Gleichung (1) in der Form

$$a s^{\mu}+a_1 s^{\mu-1}\cdots+a_{\mu}=-\frac{a_{\mu+1}}{s}-\frac{a_{\mu+2}}{s^2}-\cdots$$

so folgt, für $\mu=0,\ 1,\dots\ n-1$, dass der Ausdruck zur Linken zur ersten Ordnung verschwindet, so oft $s=\infty$ wird. Wir setzen

$$a t^{\mu}+a_1 t^{\mu-1}\cdots+a_{\mu}=f_{\mu}(t\,|\,z),$$

dann ist $f_n(s\,|\,z)$ identisch $=0$, die übrigen Functionen $f_{\mu}(s\,|\,z)$ werden $=0^1$ für $s=\infty$.

Eine ganze Function von s und z, die in s vom μ^{ten} Grade ist, wird im Allgemeinen $=\infty^{\mu}$ für $s=\infty$. Soll sie in jedem Falle, wo s unendlich wird, entweder stetig bleiben oder doch nur zu einer kleinern als der μ^{ten} Ordnung unendlich werden, so muss der Factor von s^{μ} ohne Rest durch a theilbar sein; ist er $=b\cdot a$, also auch b ganze Function von z, so kann man das Glied höchster Ordnung

$$b\cdot a s^{\mu}=b f_{\mu}(s\,|\,z)-\text{einer ganzen Function von } s \text{ und } z$$

setzen, die in s nur auf den Grad $\mu-1$ steigt; vereinigt man mit dieser die übrigen Glieder der in Rede stehenden ganzen Function, so erlangt sie die Ausdrucks form

$$b f_{\mu}(s\,|\,z)+C_1 s^{\mu-1}+\cdots+C_{\mu-1},$$

wo $b,\ C_1,\dots\ C_{\mu-1}$ ganze Functionen von z sind.

Wendet man dies wiederholt auf die Function G an, welche für $s=\infty$ niemals unstetig werden darf, so folgt, dass sie nothwendig die Form

$$G(\overset{n-1}{s}\,|\,\overset{w+r-2}{z})=\Lambda_0(z)f_{n-1}(s\,|\,z)+\Lambda_1(z)f_{n-2}(s\,|\,z)\cdots+\Lambda_{n-2}(z)f_1(s\,|\,z)+\Lambda_{n-1}(z)$$

hat, wo $\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{n-1}$ ganze Functionen von z sind, und zwar ist Λ_{n-1} vom Grade $w+r-2$, alle übrigen sind nur vom Grade $w+r-m-2$.

Demnach haben wir nur noch die Bedingungen zu ermitteln, damit bei diesen Graden der Functionen Λ identisch

$$\psi(t \mid z) = \frac{1}{Q(z)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-2} \Lambda_\nu(z) f_{n-\nu-1}(t \mid z) + \Lambda_{n-1}(z) \right\} = \sum_{i=1}^{w+r} A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t - \alpha_i \cdot z - \beta_i} \tag{α}$$

wird. Dies gibt zunächst

$$A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t - \alpha_i} = \sum_0^{n-2} \frac{\Lambda_\nu(\beta_i)}{Q'(\beta_i)} f_{n-\nu-1}(t \mid \beta_i) + \frac{\Lambda_{n-1}(\beta_i)}{Q'(\beta_i)}.$$

Nun ist, wenn $F(\alpha \mid \beta) = 0$ ist,

$$\frac{F(t \mid \beta)}{t - \alpha} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha^\nu f_{n-\nu-1}(t \mid \beta);$$

berücksichtigt man, dass $f_0(\beta) = a(\beta)$ ist, so geht die vorige Formel über in

$$A_i \sum_0^{n-2} \alpha_i^\nu f_{n-\nu-1}(t \mid \beta_i) + A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i) = \sum_0^{n-2} \frac{\Lambda_\nu(\beta_i)}{Q'(\beta_i)} f_{n-\nu-1}(t \mid \beta_i) + \frac{\Lambda_{n-1}(\beta_i)}{Q'(\beta_i)}.$$

Aber da $a(\beta_i)$ nicht $=0$ ist, so folgt aus der Gleichheit der Coefficienten von t^{n-1} diejenige der Coefficienten von $f_{n-1}(t \mid \beta_i) = a(\beta_i) t^{n-1} + \cdots$; hebt man diese Glieder weg, so folgt ebenso die Gleichheit der Coefficienten von $f_{n-2}(t \mid \beta_i)$, u. s. w., so dass wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Lambda_\nu(\beta_i)}{Q'(\beta_i)} &= A_i \alpha_i^\nu \qquad (\text{für } \nu = 0,\ 1, \dots\ n-2) \\ \frac{\Lambda_{n-1}(\beta_i)}{Q'(\beta_i)} &= A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i), \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

beides für $i = 1,\ 2, \dots\ w+r$. Daraus ergeben sich weiter die Partialbruchzerfällungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Lambda_\nu(z)}{Q(z)} &= \sum_i \frac{A_i \alpha_i^\nu}{z - \beta_i} \qquad (\text{für } \nu = 0,\ 1, \dots\ n-2) \\ \frac{\Lambda_{n-1}(z)}{Q(z)} &= \sum_i \frac{A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i)}{z - \beta_i}. \end{aligned}\right\} \tag{γ}$$

Aus den Graden $w+r-m-2$, $w+r-2$ und $w+r$ von Λ_ν, Λ_{n-1} und Q folgt, dass die absteigende Entwicklung in der ersten Formel mit z^{-m-2}, in der zweiten mit z^{-2} beginnen muss; also folgt endlich

$$\sum_i A_i \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} \nu = 0, 1, \ldots n-2 \\ \mu = 0, 1, \ldots \quad m \end{array} \right| \tag{B}$$

$$\sum_i A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i) = 0. \tag{C}$$

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so liefern die Gleichungen (γ) jedes Λ mit dem in (α) vorgeschriebenen Grade, während (α) selbst auch ohne dies Folge von (β) und dies Folge von (γ) ist. Die vorstehenden Bedingungen (B) (C) sind also nothwendig und zugleich hinreichend, damit

$$\psi(s \mid z) = \sum_i A_i \frac{F(s \mid \beta_i)}{s - \alpha_i \cdot z - \beta_i}$$

für $s = \infty$ niemals unstetig wird.

V.

Jeder Integrand I. G. lässt sich also in die Form

$$\sigma = \sum_{i=1}^{w+r} A_i \frac{F(s \mid \beta_i)}{s - \alpha_i \cdot z - \beta_i} = \sum_i A_i T_i(s \mid z)$$

bringen, wo die $w + r$ Functionen T_i linearunabhängig und ihre Coefficienten A_i constant sind.

Aber es ist nicht jeder Ausdruck dieser Form ein Integrand I. G., sondern es sind hierzu die folgenden Bedingungen zwischen den Coefficienten A_i erfor derlich und hinreichend:

$$\sum_i A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t - \alpha_i} = 0 \qquad \text{für jedes } t; \tag{A}$$

$$\sum_i A_i \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0 \qquad \text{für} \left| \begin{array}{l} \nu = 0, 1, \ldots n-2 \\ \mu = 0, 1, \ldots \quad m \end{array} \right| \tag{B}$$

$$\sum_i A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i) = 0. \tag{C}$$

Dieselben sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Die Gleichungen (B) kann man durch die folgende ersetzen, dass für jede ganze Function $g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z})$

sein muss

$$\sum_i A_i g(\overset{n-2}{\alpha_i} \mid \overset{m}{\beta_i}) = 0. \tag{B 1}$$

Nun ist $\frac{1}{n} F'(s \mid z) = a(z) s^{n-1} + g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z})$, also folgt aus ($B$) oder ($B$ 1)

$$\frac{1}{n} \sum_i A_i F'(\alpha_i \mid \beta_i) = \sum_i A_i \alpha_i^{n-1} a(\beta_i);$$

da $F'(\alpha_i \mid \beta_i) = 0$ ist, so ist (C) eine Folge von (B), also überzählig. Sodann ist

$$f_{n-1}(s \mid z) = a s^{n-1} + g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z}),$$

also können wir auch schreiben

$$\frac{F(t \mid z)}{t - s} = f_{n-1}(s \mid z) + t f_{n-2}(s \mid z) + \cdots = a s^{n-1} + g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z}),$$

mithin ist, als nothwendige Folge von (B), auch

$$\sum A_i \frac{F(t \mid \beta_i)}{t - \alpha_i} = 0, \tag{A}$$

und zwar für jedes t. In der That ist die Bedingung (A), dass im Unendlichen $\psi(t \mid z) = 0^2$ werden soll, auch durch die geforderten Grade der Λ ausgedrückt.

Lassen wir die hiernach überzähligen Gleichungen (A) und (C) weg, so bleiben nur noch die Bedingungen (B) übrig, und wir haben nun zu untersuchen ob und unter welchen Bedingungen dieses System von überzähligen Gleichungen frei ist.

Angenommen, das System (B) enthalte eine oder mehr als eine überzählige Gleichung. Dann kann man mit Benutzung von Multiplicatoren, die nicht alle $= 0$ sind, aus (B) alle Unbekannten A_i eliminiren. Nimmt man diese Multiplicatoren zu Coefficienten der Function $g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z})$, so wird also in der Gleichung (B 1) allgemein $g(\alpha_i \mid \beta_i) = 0$, ohne dass alle Coefficienten von g verschwinden. Es gibt also in diesem Falle eine ganze Function $g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z})$, die in jedem Verzweigungs-und jedem Doppelpunkte verschwindet. Von dieser Function g erhalten wir also $w + 2r = 2m(n-1)$ Nullpunkte. Ich werde beweisen, dass g von der Ordnung $2m(n-1)$ ist; dann folgt, dass g nur in jenen Punkten, und in keinem von ihnen zu einer höhern als der ersten Ordnung verschwindet. In der That wird in n Fällen (für $z = \infty$)

$g = \infty^m$, und in m Fällen (für $s = \infty$) $g = \infty^{n-2}$, während sonst g nicht mehr unstetig wird; also wird genau $nm + m(n-2) = 2m(n-1)$ mal $g = \infty'$, wie so eben angegeben wurde.

Diese Null-und Unstetigkeitspunkte, nebst den nämlichen Ordnungszahlen, kommen auch der in jedem Falle wirklich existirenden Function $F'(s \mid z)$ zu; also ist $g : F' = \gamma$ wie T verzweigt, aber nie unstetig noch Null, also in jedem zusammenhängenden Theile von T constant und in keinem $= 0$. Vereinigt man jedesmal γ mit g, so folgt:

> Enthält das System (B) eine oder mehr als eine überzählige Gleichung, so genügen diejenigen Wurzeln s der Gleichung
>
> $$F(\overset{n}{s} \mid \overset{m}{z}) = 0, \tag{1}$$
>
> welche dem nämlichen zusammenhängenden Theile der Fläche T zugeordnet sind, auch einer Gleichung kleinern Grades
>
> $$g(\overset{n-2}{s} \mid \overset{m}{z}) + F'(s \mid z) = 0, \tag{2}$$
>
> die ebenfalls in z rational ist.

Hier trennen sich nun zwei Fälle voneinander.

A) Ist die Gleichung (1) irreductibel, so kann s nicht auch noch der Gleichung (2) genügen; dann also ist es ein Widerspruch, anzunehmen, das System (B) sei nicht frei von überzähligen Gleichungen. Die Anzahl der Gleichungen (B) ist aber $(n-1)(m+1) = (m-1)(n-1) + 2(n-1) = r + p + + 2(n-1) = r + w - p$, also um p Einheiten kleiner als die Anzahl der Unbekannten A_i. Von diesen lässt sich also wenigstens eine Gruppe von $w + r - p$ Unbekannten (*) aus den Gleichungen (B) ermitteln; sie drücken sich linear und homogen durch die p übrigen aus, welche willkürlich bleiben, abgesehen vom Falle $p = 0$, wo sämmtliche $A = 0$ werden, und also ein Integral I. G. überhaupt nicht existirt. Sind $A_1 \ldots A_p$ die Coefficienten, welche willkürlich bleiben, so erhält man für $k > p$ Auflösungsformeln

$$A_k = \sum_{\rho=1}^{p} A_\rho \cdot \Delta_{k\rho},$$

(*) Eine genauere Bestimmung über diese Gruppe von Unbekannten ergibt sich am Schlusse des folgenden art.

wo alle Δ Determinantenquotienten sind; setzt man alsdann den Gesammtfactor von A_ρ, nämlich

$$T_\rho(s \mid z) + \sum_{k>p} \Delta_{k\rho} T_k(s \mid z) = w'_\rho,$$

so wird

$$\sigma = \psi(s \mid z) = A_1 w'_1 + A_2 w'_2 \cdots + A_p w'_p.$$

Hier sind demnach $w'_1 w'_2 \ldots w'_p$ Integranden I. G., und sie sind linearunabhängig. Wären sie es nämlich nicht, so liesse sich wenigstens ein Anfangsglied T_ρ durch andere Functionen T_i linear und mit constanten Coefficienten ausdrücken, was unmöglich ist. Da der vorstehende Ausdruck alle Integranden I. G. enthält, so haben wir den Satz:

Ist die Gleichung

$$\overset{n}{F}(s \mid \overset{m}{z}) = 0 \tag{1}$$

irreductibel, so sind die $w+r-p$ Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{w+r} A_i \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} \nu = 0, 1, \ldots\ n-2 \\ \mu = 0, 1, \ldots\ \ m \end{array} \right| \tag{B}$$

voneinander unabhängig, und mit Benutzung derselben ist jeder, der Gleichung (1) zugeordnete Integrand I. G. in der Form

$$\sigma = \sum_{i=1}^{w+r} A_i \frac{F(s \mid \beta_i)}{s - \alpha_i \cdot z - \beta_i)}$$

darstellbar; die Anzahl der linearunabhängigen Integranden I. G. ist in allen Fällen $=p$, insbesondere $=0$ für $p=0$.

B) Enthält das System (*B*) überzählige Gleichungen, so kann die Gleichung (1) nicht irreductibel sein. Dieses Resultat ist unter der Voraussetzung hergeleitet, dass (art. I) das Polynom F durch keinen irreductibeln Factor zweimal aufgehe, weil sonst $F'(s \mid z)$ identisch Null ist: diese Bedingung, an der wir festhalten, lässt sich auch so ausdrücken, dass die Discriminante D von F nicht identisch Null sein darf. Sei unter dieser Voraussetzung k die Anzahl der irreductibeln, also ungleichen Factoren von F. Dann zerfällt die n-blättrige Fläche T in k zusammenhangende Flächen, den einzelnen Factoren von F entsprechend, und jeder ist nach dem vorigen Satze eine Anzahl linearunabhängiger Integranden I. G. zugeordnet, gleich der Anzahl ihrer überzähligen Doppellinien. Die Anzahl aller der Gleichung (1) zugeordneten Integranden I. G. ist also gleich der Anzahl p der überzähligen Doppellinien in dieser zerfallenden Fläche T. Für den Zusammenhang dieser Fläche sind unentbehrlich nur noch $(n-1)-(k-1)$ Doppellinien, also ist $(n-1)-(k-1)+p$ die Anzahl aller, und das Doppelte hiervon ist die Anzahl aller einfachen Verzweigungspunkte von T. Aber diese ist wieder $w=2m(n-1)-2r$, wenn r die Anzahl aller Doppelpunkte ist, also folgt $(n-1)-(k-1)+p=m(n-1)-r$, d. i. $p=[(m-1)(n-1)-r]+k-1$: die Anzahl der linearunabhängigen Integranden I. G. ist also um $k-1$ grösser wie in dem Falle, wo das System (B) keine überzählige Gleichung enthält. Da diese Functionen unter Voraussetzung der Gleichungen (B) alle im obigen Ausdrucke von σ enthalten sind, so folgt, dass das System (B) genau $k-1$ überzählige Gleichungen enthält. Dies lässt sich umkehren:

Enthält das System (B) $k-1$ überzählige Gleichungen, und ist die Discriminante D von F nicht identisch Null, so zerfällt F in k ungleiche irreductible Factoren.

Denn wäre F durch denselben irreductibeln Factor zweimal theilbar, so wäre D identisch Null; wäre F das Product aus l ungleichen, irreductibeln Factoren, und l nicht $=k$, so enthielte das System (B) $l-1$ und nicht $k-1$ überzählige Gleichungen.

VI.

Nunmehr ist

$$\varphi(t\,|\,z)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\frac{F(t\,|\,z)}{t-s_i}$$

ganze Function von t und rationale Function von z. Für $s_i=t$ bleibt sie stetig, ebenso wenn $\sigma=\infty$ wird. Denn wenn dies für $z=\beta$ stattfindet, so wird $(z-\beta)\sigma=0$, also auch $(z-\beta)\varphi(t\,|\,z)=0$, mithin φ nicht unstetig. Da hiernach die rationale Function φ für kein endliches z unstetig wird, so ist sie ganze Function von z. Für $z=\infty$ findet sich $\varphi=\infty^{m-2}$, also ist φ in z vom Grade $m-2$. Ist, nach t geordnet, $\varphi=Ct^{n-1}+C_1t^{n-2}+\cdots$, so wird der leitende Coefficient

$$C=a\sum\sigma_i;$$

derselbe ist gleich Null, denn die $\sum\sigma_i$ ist ebenfalls rational, im Endlichen nie unstetig und im Unendlichen Null, also identisch Null. Folglich ist φ in t nur vom Grade $n-2$, und wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \frac{F(t\,|\,z)}{t-s_i} = \varphi(\overset{n-2}{t}\,|\,\overset{m-2}{z}).$$

Findet für $z=\delta$ ein Doppelpunkt $s_1=s_2=\gamma$ statt, so hat $F(t\,|\,\delta)$ den Factor $t-\gamma$ zweimal, in zwei Gliedern hebt er sich aber einmal weg, also hat $\varphi(t\,|\,\delta)$ ihn einmal. Für σ ergibt sich der bekannte Ausdruck Riemanns

$$\sigma F'(s\,|\,z) = \varphi(\overset{n-2}{s}\,|\,\overset{m-2}{z})$$

mit dem Zusatze, dass $\varphi(s\,|\,z)$ in den r Doppelpunkten verschwindet; es ist ebenfalls bekannt, dass diese Eigenschaft auch ausreicht, damit σ Integrand I. G. wird. Zwischen den $(m-1)(n-1)$ Coefficienten von φ ergeben sich also in Riemann'scher Bezeichnung die r Bedingungsgleichungen

$$\varphi(\gamma_\rho\,|\,\delta_\rho)=0 \qquad (\rho=1,\ 2,\dots\ r); \tag{B'}$$

ist l die Anzahl der überzähligen Gleichungen dieses Systems, so ergeben sich $[(m-1)(n-1)-r]+l$ Functionen σ; dieselben sind linearunabhängig, da φ nicht durch alle irreductibeln Factoren von F theilbar sein kann.

Ist die Gleichung (1) irreductibel, so ist $l=0$:

> Ist die Gleichung (1) irreductibel, so ist die Anzahl r und die Lage der Doppelpunkte γ, δ eine solche, dass unter den r Gleichungen (B') sich keine überzählige findet.

Dazu kommt wie am Schlusse des vorigen art. der Satz:

> Enthält das System (B') vermöge der Anzahl r und der Lage der Doppelpunkte überzählige Gleichungen, und ist die Anzahl derselben $=k-1$, so zerfällt F in k ungleiche irreductible Factoren, vorausgesetzt dass seine Discriminante nicht identisch Null ist.

Die gegenwärtige Untersuchung zeigt, dass in allen diesen Fällen ein Integrand I. G. w' in den beiden Punkten von T, die einem Doppelpunkte entsprechen, ungleiche Werthe annimmt; stellt man also w' durch Functionen T dar, so muss sein Ausdruck alle Functionen T_k enthalten, welche einem Doppelpunkte $\alpha_k\beta_k$ zugeordnet sind.

Die entsprechenden Coefficienten A_k gehören daher auf alle Fälle zu derjenigen Gruppe von Unbekannten, nach denen das System (B) aufgelöst werden kann,

denn wenn A_k willkürlich bleibt, kommt T_k nur in einer Function w'_k vor.

VII.

Auf diesen Sätzen beruht die Möglichkeit der Integrale III. und II. G. für jedes p, auch für $p=0$. Ich finde in dieser Bezichung folgende Resultate, deren Beweis ich nach dem Vorangehenden wohl übergehen darf. Sei ε ein von $s \mid z$ unabhängig veränderlicher Punkt der Fläche T und in ihm $z=\zeta$, $s=\sigma$, ferner, wenn wieder $\alpha_i \beta_i$ einen Verzweigungs oder Doppelpunkt bedeutet

$$\mathfrak{A}(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{w+r} A_i(\varepsilon)\frac{F(s\mid\beta_i)}{s-\alpha_i\cdot z-\beta_i}-\frac{1}{F'(\sigma\mid\zeta)}\frac{F(s\mid\zeta)}{s-\sigma\cdot z-\zeta},$$

während die $w+r$ Constanten $A_i(\varepsilon)$ an die $w+r-p$ Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{w+r} A_i(\varepsilon)\alpha_i^{\nu}\beta_i^{\mu}=\frac{\sigma^{\nu}\zeta^{\mu}}{F'(\sigma\mid\zeta)} \qquad \left| \begin{array}{l} \nu=0,\ 1,\ldots\ n-2 \\ \mu=0,\ 1,\ldots\ \ m \end{array} \right|$$

gebund en sind. Wir setzen voraus, dass die Gleichung (1) irreductibel ist, dann folgt aus art. V., dass diese Gleichungen niemals einander widersprechen können, und $w+r-p$ Unbekannte A_i durch die p übrigen und die unabhängigen Glieder ohne Widerspruch bestimmen. Insbesondere ist also $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ bestimmt bis auf einen additiven Integranden I. G. Durch die vorstehenden Bedingungen ist also auch die Integralfunction

$$R(\varepsilon)=\int\mathfrak{A}(\varepsilon)dz$$

widerspruchsfrei bestimmt bis auf ein additives Integral I. G. Dieselbe hat die folgenden Eigenschaften:

1. Im Punkte ε ist

$$R(\varepsilon)=-\log(z-\zeta)+\text{funct. cont. mon.}$$

2. In jedem der n unendlich fernen Punkte ∞_ν von T ist

$$R(\varepsilon)=\frac{1}{n}\log\frac{1}{z}+\text{funct. cont. mon.}$$

3. Dies sind die einzigen Punkte, in denen diese Function unendlich wird.

Um sie eindeutig zu machen, verwandle man daher die Fläche T mittelst der bekannten Querschnittbündel c, a, b in eine einfach zusammenhängende Fläche T', und ziche durch diese aus dem nämlichen Punkte, von dem alle Schnitte c nach den Schnittpaaren a, b ausgehen, nacheinander noch einen Schnitt l bis ε und Schnitte $l_1 l_2 \ldots l_n$ nach den unendlich fernen Punkten $\infty_1 \infty_2 \ldots \infty_n$. Wird der Integrationsweg auf diese, ebenfalls noch einfach zusammenhängende Fläche T_1 beschränkt, so wird R eindeutig und im Innern von T_1 nie unstetig; die Periodicitätsmoduln dieser Function sind alle constant. Bezeichnet man die Seiten der Querschnitte a, b in üblicher Weise und die Seiten der Schnitte l so, dass man durch einen positiven Umlauf um den Endpunkt von der negativen auf die positive Seite des Schnittes gelangt, so ist

$$4.\quad \text{an } l \qquad \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = -2\pi i$$

$$\text{an } l_1 l_2 \ldots l_n \qquad \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = \frac{2\pi i}{n}.$$

Ist sodann u_μ das μ^{te} Normalintegral I. G. und

$$5.\quad \text{an } a_\lambda \qquad \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = A_\lambda(\varepsilon) \qquad \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = \binom{\lambda}{\mu}\pi i$$

$$\text{an } b_\lambda \qquad \overset{+}{R} - \overset{-}{R} = B_\lambda(\varepsilon) \qquad \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = a_{\lambda\mu},$$

während an c_λ beide Functionen stetig sind, so folgt aus der Untersuchung der Function $\int R\,du_\mu$ in bekannter Weise

$$6.\quad B_\mu(\varepsilon) = \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda(\varepsilon)a_{\lambda\mu} - 2u_\mu(\varepsilon) + \frac{2}{n}\sum_{\nu=1}^{n} u_\mu(\infty_\nu).$$

Hier bedeuten $u_\mu(\varepsilon)$, $u_\mu(\infty_\nu)$ die Werthe von u_μ in den Punkten ε, ∞_ν von T'; unter dem Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ verstehe ich die Einheit, wenn $\lambda = \mu$ ist, in allen übrigen Fällen die Null (*).

(*) Ein ähnliches Symbol für die Zwecke der Determinantentheorie findet sich in der Literatur zuerst in einer Abhandlung des Herrn Kronecker (Monatsber. d. Berliner Ac. vom 15 Oct. 1866, pag. 601); ich selbst bin vor langer Zeit zum obigen Symbol durch Untersuchungen genöthigt worden, in denen Derivirten wie $\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ nicht zu vermeiden sind. während $x_1 x_2 \ldots x_n$ unabhängige Variabeln bedeuten.

Die Differenz zweier Functionen R ist demnach ein Integral III. G.,

$$R(\varepsilon_1)-R(\varepsilon_2)=\varpi(\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2)$$

und

$$t(\varepsilon)=\frac{dR(\varepsilon)}{d\zeta}$$

ein Integral II. G. (Riemanns: *Th. d. A. F.*, art. 4.)

Die nämliche Function R lässt sich auch in der folgenden Form darstellen

$$R(\varepsilon)=\int\left\{\Phi(\overset{n-2}{s}\mid\overset{m-2}{z})-\frac{F(s\mid\zeta)}{s-\sigma\cdot z-\zeta}-\frac{1}{n}\frac{F'(s\mid z)-F'(s\mid\zeta)}{z-\zeta}\right\}\frac{dz}{F'(s\mid z)},$$

wofern die $(m-1)(n-1)=r+p$ Constanten von Φ so bestimmt werden, dass der Ausdruck zwischen den gewundenen Klammern in den r Doppelpunkten verschwindet. Nach art. VI. sind diese r Bedingungsgleichungen widerspruchsfrei und voneinander unabhängig; also ist auch in dieser Form R völlig bestimmt bis auf ein additives Integral I. G.

Um von den Anwendungen dieser Function R nur ein Beispiel anzudeuten, sei S eine algebraïsche wie T verzweigte Function von z, die nur im Endlichen und zwar in den q Punkten $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_q$ unstetig wird. Der Einfachheitwegen beschränken wir uns auf den Fall, wo S nur zur 1. Ordnung unendlich wird, und sei

$$\text{in } \varepsilon_k\text{:} \qquad S=\frac{E_k}{z-\zeta_k}+\text{funct. cont.} \qquad (k=1,\ 2,\ldots\ q),$$

wenn ζ_k den Werth von z in ε_k und E_k eine Constante bedeutet. Dann ergibt sich die wirkliche Darstellung von S als rationale Function von s und z wie folgt. Ist w irgend ein Integral I. G. und seine Derivirte $\frac{dw}{dz}$ in ε_k gleich $w'(\varepsilon_k)$, so ist bekanntlich

$$\sum_{k=1}^{q} E_k w'(\varepsilon_k)=0. \tag{α}$$

Nun bilde man $I=\int S\,dw$, $\Delta=\sum_k E_k w'(\varepsilon_k)R(\varepsilon_k)$, beides Integrale algebraïscher wie T verzweigter Functionen von z. Dann bleibt I, und wegen (α) auch Δ im Unendlichen stetig, im Endlichen werden sie beide unendlich nur in den Punkten ε, aber wie man sofort sicht so, dass ihre Summe $I+\Delta$ auch dort stetig bleibt. Letztere ist also ein allenthalben endliches Integral, also ein Integral I. G. $c_1 w_1 + c_2 w_2 \cdots + c_p w_p +$ const.; daraus folgt

$$Sw' = c_1 w'_1 + c_2 w'_2 \cdots + c_p w'_p - \sum_{k=1}^{q} E_k w'(\varepsilon_k) \frac{dR(\varepsilon_k)}{dz}.$$

Hier sind noch die p Constanten $c_1 c_2 \ldots c_p$ zu bestimmen, was sofort zu meiner Unterscheidung von Functionen S der I. und der II. G. führt.

Es ist unnöthig, die Modificationen zu erläutern, welche sich im Ausdrucke von S ergeben, wenn S in einem Punkte ε zu höherer Ordnung unendlich wird, oder im Ausdrucke und den Unstetigkeiten von $R(\varepsilon)$, wenn ε in einen unendlich fernen Punkt ∞_ν rückt; der erste von den obigen Ausdrücken von R liefert die Entscheidung der letztern Frage ohne Weiteres.

Strassburg, 18 Februar 1880.

Sur les équations différentielles linéaires du second ordre.

(*Extrait d'une lettre de M.r* HERMITE *à M.r* BRIOSCHI.)

. . . . . . Dans votre récent article: *Di una proprietà delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine* (*), vous avez montré par un nouvel exemple qui m'a beaucoup interessé, quel rôle important joue le produit de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre. Permettez-moi de vous indiquer encore une circonstance où intervient ce produit qui m'a été suggerée par mes recherches sur l'équation de LAMÉ, mais que je présenterai en considérant l'équation générale:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Supposons que l'intégrale étant:

$$y = CU + C'V$$

on connait la quantité $UV = F(x)$; je dis qu'au moyen de $F(x)$ et des coefficients p, q il sera aisé de former l'équation du second ordre, ayant pour intégrale l'expression:

$$z = CU^\omega + C'V^\omega$$

quel que soit l'exposant ω.

Considérons en effet le déterminant:

$$\begin{vmatrix} z & U^\omega & V^\omega \\ z' & (U^\omega)' & (V^\omega)' \\ z'' & (U^\omega)'' & (V^\omega)'' \end{vmatrix}$$

ou encore, après avoir supprimé dans la seconde et la troisième colonne, les

(*) Vedi la prima Nota del fascicolo precedente.

facteurs $U^{\omega-2}$, $V^{\omega-2}$, celui-ci:

$$\begin{vmatrix} z & U^2 & V^2 \\ z' & \omega UU' & \omega VV' \\ z'' & \omega(\omega-1)U'^2+\omega UU'' & \omega(\omega-1)V'^2+\omega VV'' \end{vmatrix}.$$

Remplaçons maintenant U'' par $-pU'-qU$ et V'' par $-pV'-qV$, il sera possible de remplacer encore un nouveau facteur à savoir: $\omega(UV'-U'V)$, de sorte que l'équation cherchée étant représentée par:

$$Gz''-Hz'+Kz=0$$

on aura:

$$G=UV$$
$$H=(\omega-1)(UV'+VU')-pUV$$
$$K=(\omega^2-\omega)U'V'+\omega qUV.$$

Or en différentiant deux fois l'équation $UV=F(x)$, on obtient facilement, comme vous l'avez remarqué:

$$U'V'=\tfrac{1}{2}F''(x)+\tfrac{1}{2}pF'(x)+qF(x);$$

les coefficients de l'équation ont donc ces valeurs très-simples:

$$G=F(x)$$
$$H=(\omega-1)F'(x)-pF(x)$$
$$K=\tfrac{1}{2}(\omega^3-\omega)F''(x)+\tfrac{1}{2}(\omega^2-\omega)pF'(x)+\omega^2F(x).$$

Ce résultat appliqué à l'équation de Lamé, donne, comme vous voyez, un type d'équations linéaires du second ordre dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques uniformes, l'intégrale cessant d'être uniforme lorsqu'on suppose ω fractionnaire ou incommensurable.

Et inversement dans le cas de l'équation:

$$y''=\left[\frac{n(n+2)}{4}k^2sn^2x+h\right]y$$

dont vous avez obtenu le premier la solution (*), pour n impair, la transformée en z, en supposant $\omega=2$, aurait une intégrale uniforme, tandis que votre solution contient les racines carrées de fonctions uniformes.

(*) *Sopra una classe di equazioni differenziali del secondo ordine;* Annali di Matematica, t. IX, pag. 11.

On trouverait en particulier pour $\omega = 0$, l'équation:

$$F(x)z'' + [F'(x) + pF(x)]z' = 0$$

et en employant la relation:

$$UV' - VU' = Ce^{-\int p dx}$$

l'intégrale s'obtient aisement sous la forme:

$$z = A + B \log \frac{U}{V}$$

A, B étant les deux constantes arbitraires. C'est bien en effet ce que donne l'expression dont je suis parti:

$$z = CU^{\omega} + C'V^{\omega}$$

si l'on introduit la supposition de ω infiniment petit.

Soit pour cela:

$$U^{\omega} = 1 + \omega \log U + \frac{\omega^2}{2} \log^2 U + \cdots$$

$$V^{\omega} = 1 + \omega \log V + \frac{\omega^2}{2} \log^2 V + \cdots$$

et changeons les constantes en posant:

$$C + C' = A$$

$$\omega(C - C') = 2B$$

on verra, pour $\omega = 0$, l'expression de z, se réduire immédiatement à la forme annoncée:

$$z = A + B \log \frac{U}{V}.$$

Les Sables d'Olonne (Vendée), 3 juillet 1880.

Sulle equazioni differenziali del tetraedro dell'ottaedro e dell'icosaedro.

(*Memoria di* F. Brioschi, *in Milano.*)

I.

1.° Le tre espressioni:

1.ª $$t = 1 + a z^2$$

2.ª $$t = \frac{a z^6 + b}{z^2}$$

3.ª $$t = \frac{a z^{12} + b z^6 + c}{z^2}$$

soddisfano alla equazione differenziale:

$$t^3 - 1 = \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 R(z) \tag{1}$$

essendo $R(z)$ una funzione intiera di z, purchè per la 2.ª sia:

$$a b^2 = \frac{4}{27}$$

e per la 3.ª sussistano le:

$$b^2 = 20 a c, \qquad b c^2 = 2 \frac{5^3}{\overline{12}^3}.$$

Il valore della funzione R è nei tre casi:

1.ª $$R = \frac{1}{4a}(a^2 z^4 + 3 a z^2 + 3)$$

2.ª $$R = \frac{1}{16}(a z^6 + 4b)$$

3.ª $$R = \frac{1}{4 \cdot 5^2}\left(a z^{12} + \frac{11}{5} b z^6 + 5^2 c\right).$$

Dalla equazione (1) si ha:

$$(t^3-1)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = R(z)$$

la quale differenziata due volte rispetto a t conduce alla:

$$2(t^3-1)\frac{d^3z}{dt^3}+9t^2\frac{d^2z}{dt^2}+6t\frac{dz}{dt}=R''(z)\frac{dz}{dt}. \qquad (2)$$

Ma dai tre valori superiori di $R(z)$ si ha tosto che indicando con ρ un coefficiente numerico ha luogo nei tre casi la relazione:

$$R''(z)=\rho\left[t+\frac{1}{2}z\frac{dt}{dz}\right] \qquad (3)$$

essendo in ciascuno di essi:

$$\rho=\frac{3}{2}, \qquad \rho=\frac{5}{8}, \qquad \rho=\frac{11}{50} \text{ ossia } \rho=\frac{2(n-1)}{(n-2)^2} \text{ per } n=4,\ 6,\ 12.$$

Sostituendo questa espressione di $R''(z)$ nella (2) si ottiene la equazione differenziale lineare del terzo ordine seguente:

$$2(t^3-1)\frac{d^3z}{dt^3}+9t^2\frac{d^2z}{dt^2}+(6-\rho)t\frac{dz}{dt}-\frac{1}{2}\rho z=0.$$

Ora posto:

$$P=\frac{3}{2}\frac{t^2}{t^3-1}, \qquad Q=-\frac{1}{8}\rho\frac{t}{t^3-1}$$

la equazione stessa divisa per $2(t^3-1)$ può scriversi:

$$\frac{d^3z}{dt^3}+3P\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dP}{dt}+2P^2+4Q\right)\frac{dz}{dt}+2\left(\frac{dQ}{dt}+2PQ\right)z=0; \qquad (4)$$

la z cioè è eguale ad una forma quadratica (a coefficienti costanti) di due integrali particolari v_1, v_2 della equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2v}{dt^2}+P\frac{dv}{dt}+Qv=0. \qquad (5)$$

2.° Pel valore di P risultando:

$$e^{\int P dt}=\sqrt{t^3-1}$$

se supponiamo $z = v_1 v_2$ ed indichiamo con $Z(t)$ l'integrale:

$$Z(t) = \int \frac{dt}{z\sqrt{t^3 - 1}}$$

si hanno per gli integrali particolari v_1, v_2 i valori:

$$v_1 = \sqrt{z} \cdot e^{\frac{1}{2} C Z(t)}, \qquad v_2 = \sqrt{z} \cdot e^{-\frac{1}{2} C Z(t)}$$

essendo C una costante. L'integrale Z trasformasi per la relazione (1) nel seguente:

$$Z = \int \frac{dz}{z\sqrt{R(z)}}$$

cioè le v_1, v_2 sono evidentemente, nei tre casi, funzioni algebriche di z.

La equazione differenziale (5) trasformata assumendo come variabile la z dà:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{R'(z)}{R(z)} \frac{dv}{dz} - \frac{1}{8} \rho \frac{t}{R(z)} v = 0 \tag{6}$$

nella quale t, ρ hanno i valori corrispondenti sopra indicati. Ora dalla $z = v_1 v_2$ e dai valori di v_1, v_2 in funzione di z si hanno le:

$$1 = v_2 \frac{dv_1}{dz} + v_1 \frac{dv_2}{dz}$$

$$\frac{C}{\sqrt{R(z)}} = v_2 \frac{dv_1}{dz} - v_1 \frac{dv_2}{dz}$$

dalle quali si ottiene la:

$$2 \frac{dv_1}{dz} \frac{dv_2}{dz} = \frac{1}{2zR} (R - C^2).$$

Ma differenziando di nuovo la prima delle superiori e sostituendo alle $\frac{d^2 v_1}{dz^2}$, $\frac{d^2 v_2}{dz^2}$ i valori dati dalla (6) si ha facilmente per quest'ultima che:

$$C^2 = R - zR' + \frac{1}{2} \rho t z^2$$

equazione la quale differenziata rispetto a z riconduce alla (3).

Il valore della espressione $R - zR'$ trovasi essere nei tre casi:

1.° $$R - zR' = \frac{3}{4a} - \frac{1}{2} \rho t z^2$$

2.° $$R - zR' = \frac{9}{16} b - \frac{1}{2} \rho t z^2$$

3.° $$R - zR' = \frac{9}{25} c - \frac{1}{2} \rho t z^2$$

nelle quali ρ ha i valori corrispondenti a ciascuno di essi. I valori di C saranno quindi:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a}}, \qquad C = \frac{3}{4}\sqrt{b}, \qquad C = \frac{3}{5}\sqrt{c}.$$

3.° Passiamo ora alla determinazione dei tre valori di Z in funzione di z. Nel primo caso posto:

$$\omega = \frac{1}{a z^2}[4\sqrt{aR} - (a z^2 + 2)\sqrt{3}]$$

si ottiene:

$$Z = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}} \log \omega$$

quindi pel primo dei valori di C si avranno le:

$$v_1 = \sqrt{z} \cdot \omega^{\frac{1}{4}}, \qquad v_2 = \sqrt{z} \cdot \omega^{-\frac{1}{4}}.$$

Ma evidentemente:

$$\omega = \frac{\varphi^2(z)}{z^2}$$

essendo:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{ia}}[\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2(1 + a z^2)} + i\varepsilon^2\sqrt{1 - \varepsilon(1 + a z^2)}]$$

posto $i = \sqrt{-1}$ ed indicando con ε una radice cubica immaginaria della unità. E siccome posto:

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{-ia}}[\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2(1 + a z^2)} - i\varepsilon^2\sqrt{1 - \varepsilon(1 + a z^2)}]$$

si ha che:

$$\varphi(z)\psi(z) = z^2$$

sarà:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\psi^2(z)}{z^2}$$

od infine:

$$v_1 = \sqrt{\varphi(z)}, \qquad v_2 = \sqrt{\psi(z)}.$$

Ponendo nelle funzioni φ, ψ in luogo di $1+az^2$ la t si otterranno altresì i valori di v_1, v_2 in funzione di t.

Si noti che pel valore superiore di ω si ha tosto la:

$$v_1^4-v_2^4=-\frac{2\sqrt{3}}{a}(az^2+2)$$

da cui:

$$f(v_1,\ v_2)\quad=v_1^4+2\sqrt{3}\cdot v_1^2v_2^2-v_2^4=-\frac{4\sqrt{3}}{a}$$

e:

$$h(v_1,\ v_2)\sqrt{3}=v_1^4-2\sqrt{3}\cdot v_1^2v_2^2-v_2^4=-\frac{4\sqrt{3}}{a}t$$

essendosi posto t in luogo di $1+az^2$.

Nel secondo caso posto:

$$\omega=\frac{2}{z^3\sqrt{a}}[2\sqrt{R}-\sqrt{b}]$$

si ottiene:

$$Z=\frac{2}{3\sqrt{b}}\log\omega$$

quindi pel valore di C:

$$v_1=\left(\frac{\varphi(z)}{z}\right)^{\frac{1}{4}}\qquad v_2=\left(\frac{\psi(z)}{z}\right)^{\frac{1}{4}}$$

nelle quali

$$\varphi(z)=\frac{2}{\sqrt{a}}(2\sqrt{R}-\sqrt{b}),\qquad \psi(z)=\frac{2}{\sqrt{a}}(2\sqrt{R}+\sqrt{b}).$$

Si osservi che essendo:

$$\varphi(z)\psi(z)=z^6\qquad \varphi(z)-\psi(z)=-4\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\varphi^2(z)+\psi^2(z)=\frac{2}{a}(az^6+8b)$$

si hanno le:

$$f(v_1,\ v_2)=v_1v_2(v_1^4-v_2^4)=-4\sqrt{\frac{b}{a}}=-\frac{8}{\sqrt[4]{108a^3}}$$

$$6^2\cdot h(v_1,\ v_2)=-(v_1^8+14v_1^4v_2^4+v_2^8)=-\frac{16}{a}t$$

posto t in luogo di $\frac{a z^6 + b}{z^2}$, in quest' ultima, e rammentando nella prima essere $ab^2 = \frac{4}{27}\cdot$ Supponendo inoltre:

$$A = 1 - \sqrt{1 - t^3}, \qquad B = 1 + \sqrt{1 - t^3}$$

i valori di v_1, v_2 espressi in funzione di t sono:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt[8]{3a}}\left[\sqrt{\varepsilon A^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2 B^{\frac{1}{3}}} - i\sqrt{\varepsilon^2 A^{\frac{1}{3}} + \varepsilon B^{\frac{1}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt[8]{3a}}\left[\sqrt{\varepsilon A^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2 B^{\frac{1}{3}}} + i\sqrt{\varepsilon^2 A^{\frac{1}{3}} + \varepsilon B^{\frac{1}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Infine pel terzo caso, posto:

$$\omega = \frac{5}{2 b z^6}\left[4.5^2\sqrt{cR} - \frac{11}{5} b z^6 - 2.5^2 c\right]$$

si ottiene:

$$Z = \frac{1}{3\sqrt{c}} \log \omega$$

per la quale e pel corrispondente valore di C:

$$v_1 = \sqrt{z}\cdot\omega^{\frac{1}{10}}, \qquad v_2 = \sqrt{z}\cdot\omega^{-\frac{1}{10}}$$

od indicando con $\varphi(z)$, $\psi(z)$ le funzioni:

$$\varphi(z) = \frac{5}{2b}\left[4.5^2\sqrt{cR} - \frac{11}{5} b z^6 - 2.5^2 c\right]$$

$$\psi(z) = \frac{5}{2b}\left[4.5^2\sqrt{cR} + \frac{11}{5} b z^6 + 2.5^2 c\right]$$

si hanno le:

$$v_1 = \left(\frac{\varphi(z)}{z}\right)^{\frac{1}{10}}, \qquad v_2 = \left(\frac{\psi(z)}{z}\right)^{\frac{1}{10}}.$$

Anche in questo caso essendo:

$$\varphi(z)\psi(z) = z^{12}, \qquad \varphi(z) - \psi(z) = -\frac{1}{b}[11 b z^6 + 2.5^3 c]$$

$$\varphi^2(z) + \psi^2(z) = \frac{4\cdot 5\cdot c}{b^2}[123 a z^{12} + 11.5^2 b z^6 + 5^5 c]$$

si deducono le:

$$f(v_1,\ v_2)=v_1v_2(v_1^{10}+11v_1^5v_2^5-v_2^{10})=-2\cdot5^3\frac{c}{b}=-\frac{5^3}{\sqrt[5]{\overline{12}^3a^3}}$$

$$\overline{12}^2\cdot h(v_1,\ v_2)=-[v_1^{20}+v_2^{20}-228v_1^5v_2^5(v_1^{10}-v_2^{10})+494v_1^{10}v_2^{10}]=-\frac{5^5}{a}t.$$

4.° Le tre funzioni $h(v_1,\ v_2)$ trovate sopra sono gli hessiani delle corrispondenti forme binarie $f(v_1,\ v_2)$. Ora importa qui osservare che le tre forme $f(v_1,\ v_2)$ sono *costanti* e che per ciascuna di esse si hanno le:

1.ª $$I=3\sqrt{3}\frac{h^3}{f^3}$$

2.ª $$I=-3^3\cdot4^2\cdot\frac{h^3}{f^4}$$

3.ª $$I=\overline{12}^3\frac{h^3}{f^5}$$

essendosi posto $I=t^3$.

5.° Se nella terza delle espressioni t del § 1.° si pone $a=\frac{5^5}{12}$ sicchè la corrispondente funzione $f(v_1,\ v_2)$ diventa eguale a -1, si hanno le

$$b=\frac{5^3}{6},\qquad c=\frac{1}{12}$$

e ponendo $5z^2=\nu$ si deduce dalla espressione stessa la equazione:

$$\nu^6+10\nu^3-12t\nu+5=0$$

vale a dire una equazione Jacobiana del sesto grado per la trasformazione di quinto ordine delle funzioni ellittiche. Se nella equazione stessa supponesi:

$$I=t^3=\frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4k'^4}$$

si ha:

$$\nu^3=\mu\sqrt{\mu\frac{\lambda\lambda'}{kk'}}$$

essendo μ il moltiplicatore, λ, k i moduli. La radice quadrata di una radice qualsivoglia di quella equazione Jacobiana soddisferà quindi la equazione differenziale lineare del terzo ordine (4).

II.

1.° Posto $I = t^3$ la equazione differenziale lineare del secondo ordine della quale ci siamo occupati nel capitolo precedente, si trasforma nella:

$$\frac{d^2 v}{dI^2} + P\frac{dv}{dI} + Qv = 0 \tag{1}$$

posto:

$$P = \frac{1}{6}\frac{4 - 7I}{I(1-I)}, \qquad Q = \frac{1}{72}\rho\frac{1}{I(1-I)}.$$

Siccome è noto, la equazione superiore è una equazione differenziale *ipergeometrica,* cioè i suoi integrali particolari possono esprimersi per mezzo di serie ipergeometriche.

La forma generale di queste equazioni è la:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1 - \lambda - (2 - \lambda - \nu)\xi}{\xi(1-\xi)}\frac{dy}{d\xi} - \frac{1}{4}\frac{(1-\lambda-\nu)^2 - \mu^2}{\xi(1-\xi)}y = 0$$

e da essa si deduce la (1) supponendo:

$$y = v, \qquad I = \xi, \qquad \lambda = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{2\rho + 1}}{6}, \qquad \nu = \frac{1}{2}.$$

Si ponga ora in quest'ultima:

$$\xi = \frac{c - b}{c - a}\frac{x - a}{x - b} \tag{2}$$

la equazione stessa si trasformerà nella:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3}$$

dove $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, e:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{1-\lambda}{x-a} + \frac{\lambda+\nu}{x-b} + \frac{1-\nu}{x-c} \\ q &= \frac{(1-\lambda-\nu)^2 - \mu^2}{4\Delta}\left[\frac{\Delta}{(x-b)^2} + \frac{(b-c)^2}{x-a} + \frac{(2b-c-a)(c-a)}{x-b} - \frac{(b-a)^2}{x-c}\right] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

essendo $\Delta = (b-c)(c-a)(a-b)$.

Ci proponiamo in questo capitolo di determinare i valori delle λ, μ, ν; a, b, c pei quali le due equazioni differenziali (1) (3) si trasformano l'una nell'altra, ossia pei quali un integrale particolare y della seconda si possa dedurre dal corrispondente integrale particolare v della prima per mezzo della relazione:

$$y = wv$$

essendo w una funzione di x; colla condizione che la I sia una funzione razionale di x.

2.° Derivando la equazione $y = wv$ due volte rispetto ad x e sostituendo i valori di y, y', y'' nella (3) si ottiene una equazione differenziale la quale dovendo coincidere colla (1) conduce alle due relazioni:

$$PI'^2 = I'' + \left(2\frac{w'}{w} + p\right)I'$$

$$QI'^2 = \frac{w''}{w} + p\frac{w'}{w} + q.$$

La prima di queste dà tosto:

$$e^{-\int P dI} \cdot I' = \frac{D}{C}\frac{e^{-\int p dx}}{w^2}$$

le costanti D, C essendo quelle delle due relazioni:

$$y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = D e^{-\int p dx}, \qquad v_2 \frac{dv_1}{dI} - v_1 \frac{dv_2}{dI} = C e^{-\int P dI}$$

Pel valore di P si avrà quindi:

$$\frac{I'}{I^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-I}} = \frac{D}{C}\frac{e^{-\int p dx}}{w^2} = \frac{D}{C}\frac{1}{\eta^2} \tag{5}$$

posto:

$$w = \eta e^{-\frac{1}{2}\int p dx}.$$

La seconda relazione per questo valore di w diventa:

$$QI'^2 = \frac{d^2 \log\eta}{dx^2} + \left(\frac{d\log\eta}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\Pi$$

essendo:

$$\Pi = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'$$

e se in essa si pone per Q il suo valore e per I' il valore dato dalla precedente, si giunge alla:

$$I^{\frac{1}{3}} = \frac{72 C^2}{\rho D^2} \eta^4 \left[\frac{d^2 \log \eta}{dx^2} + \left(\frac{d \log \eta}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \Pi \right].$$

Questa espressione per I dimostra che la condizione posta dover essere I una funzione razionale di x esige sia η^{12} una funzione razionale; perciò ponendo:

$$\eta^{12} = \psi(x)$$

sarà $\psi(x)$ una funzione razionale di x, e si avrà:

$$I = \delta \psi(x) \Phi^3(x) \tag{6}$$

nella quale:

$$\delta = \left(\frac{C^2}{2 \rho D^2} \right)^3, \qquad \Phi(x) = 12 \frac{d^2 \log \psi}{dx^2} + \left(\frac{d \log \psi}{dx} \right)^2 + 72 \Pi. \tag{7}$$

D'altra parte dalla equazione (5) si deduce la:

$$\frac{I'}{\sqrt{I(1-I)}} = \frac{D}{C} \frac{I^{\frac{1}{6}}}{\eta^2} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \sqrt{\Phi} \tag{8}$$

se quindi da quest'ultima e dalla (6) si elimina la I si otterrà fra le ψ, p, q la relazione:

$$2 \rho \delta [3 \psi \Phi' + \psi' \Phi]^2 = \psi (1 - \delta \psi \Phi^3). \tag{9}$$

Le espressioni (4) di p, q danno pel valore di Π la:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{M(x)}{\varphi^2(x)}$$

nella quale:

$$\varphi(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

ed:

$$M(x) = \Sigma (1 - \lambda^2)(a-b)(a-c)(x-b)(x-c)$$

il segno sommatorio indicando la somma di tre termini formati analogamente al primo. Ora se nella (8) poniamo ξ in luogo di I ritenendo per ξ il valore (2) si ottiene:

$$\Phi = -2 \rho \frac{(b-c)(b-a)(x-c)(x-a)}{\varphi^2}$$

e quindi:

$$\Phi - 72\Pi = \frac{1}{\varphi}\left[\frac{32(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{35(b-c)(b-a)}{x-b} + \frac{27(c-a)(c-b)}{x-c}\right]$$

allorquando nel valore di Π si sostituiscono a λ, μ, ν i valori corrispondenti ad $I=\xi$. Quest'ultima equazione dimostra dover essere:

$$\psi(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma$$

posto $\alpha=4$, $\beta=5$, $\gamma=3$.

Assumendo in generale questa espressione per $\psi(x)$ colla condizione che le α, β, γ sieno numeri interi, positivi, si avrà:

$$12\frac{d^2\log\psi}{dx^2} + \left(\frac{d\log\psi}{dx}\right)^2 = \frac{L(x)}{\varphi^2(x)}$$

essendo:

$$L(x) = 2\varphi\Sigma\beta\gamma(x-a) - \Sigma\alpha(12-\alpha)(x-b)^2(x-c)^2;$$

inoltre indicando con $\Psi(x)$ ed $N(x)$ le due espressioni:

$$\Psi(x) = L(x) + 36M(x)$$

$$N(x) = \frac{\varphi^6}{\psi} = (x-a)^{6-\alpha}(x-b)^{6-\beta}(x-c)^{6-\gamma}$$

si avranno per le (6) (9):

$$I = \delta\frac{\Psi^3(x)}{N(x)} \tag{10}$$

$$2\rho\delta[3\varphi\Psi' - \Psi\Sigma(6-\alpha)(x-b)(x-c)]^2 = N - \delta\Psi^3 \tag{11}$$

nella seconda delle quali supponendo ciascuna delle α, β, γ non maggiori del numero 6, l'uno e l'altro membro sono funzioni intiere di x.

Si avrà infine:

$$w = (x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\beta_1}(x-c)^{\gamma_1} \tag{12}$$

posto:

$$\alpha_1 = \frac{1}{12}[\alpha - 6(1-\lambda)], \qquad \beta_1 = \frac{1}{12}[\beta - 6(\lambda+\nu)], \qquad \gamma_1 = \frac{1}{12}[\gamma - 6(1-\nu)].$$

Nelle ipotesi sopra espresse le equazioni (10), (12) risolvono adunque il problema che abbiamo di mira, mentre la equazione (11) considerata siccome equazione identica stabilisce le necessarie condizioni alle quali devono soddisfare le α, β, γ; λ, μ, ν; a, b, c.

3.° La espressione $\Psi(x)$ è in generale un polinomio del 4° grado, perciò il primo membro della equazione (11) sarà del 12° grado, come pure sarà del 12° grado il secondo termine del secondo membro. Il primo termine del medesimo non potendo essere di grado superiore a 12 dovrà quindi verificarsi la:

$$g = \alpha + \beta + \gamma \quad \text{non} \quad < 6.$$

Supponiamo $g > 6$; eguagliando i coefficienti di x^{12} nei due membri della equazione (11) si ha:

$$2\rho g^2 (g-6)^2 (g-12)^2 = -g^3 (g-12)^3$$

la quale rammentando essere:

$$\rho = \frac{2(n-1)}{(n-2)^2} \quad \text{per} \quad n = 4,\ 6,\ 12$$

è soddisfatta nei due casi:

$$g = 12, \qquad g = 12\frac{n-1}{n} \tag{13}$$

e siccome supponendo $g = 6$, dal confronto di quei coefficienti si otterrebbe per δ un valore numerico costante, il che evidentemente non può sussistere, possiamo concludere che i soli valori di g a considerarsi sono i due superiori (13).

4.° Se nel valore di $\Psi(x)$ si sostituiscono in luogo di x le a, b, c si ottengono le:

$$\Psi(a) = [36(1-\lambda^2) - \alpha(12-\alpha)](a-b)^2(a-c)^2$$
$$\Psi(b) = [36(1-\mu^2) - \beta(12-\beta)](b-c)^2(b-a)^2$$
$$\Psi(c) = [36(1-\nu^2) - \gamma(12-\gamma)](c-a)^2(c-b)^2$$

e siccome operando la stessa sostituzione nella equazione di condizione (11) si hanno:

$$\Psi(a) = 0 \quad \text{oppure} \quad \Psi(a) + 2\rho(6-\alpha)^2(a-b)^2(a-c)^2 = 0$$

e le analoghe; dovranno sussistere fra le λ, μ, ν; α, β, γ le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda = \dfrac{6-\alpha}{6} & \text{oppure} & \lambda = \dfrac{n}{n-2}\,\dfrac{6-\alpha}{6} \\[2ex] \mu = \dfrac{6-\beta}{6} & \text{"} & \mu = \dfrac{n}{n-2}\,\dfrac{6-\beta}{6} \\[2ex] \nu = \dfrac{6-\gamma}{6} & \text{"} & \nu = \dfrac{n}{n-2}\,\dfrac{6-\gamma}{6} \end{array}\right\} \tag{14}$$

per $n=4$, 6, 12. Da queste relazioni, considerando che per la natura del problema le λ, μ, ν devono essere frazioni numeriche minori dell'unità, si deduce tosto che le α, β, γ non possono avere valori maggiori di cinque o minori di due.

5.° Consideriamo dapprima il caso in cui:

$$g=\alpha+\beta+\gamma=12.$$

Il polinomio $\Psi(x)$ si riduce al secondo grado, risultando in questo caso:

$$L(x)=-\beta\gamma(b-c)^2(x-a)^2-\gamma\alpha(c-a)^2(x-b)^2-\alpha\beta(a-b)^2(x-c)^2$$

e ciascun membro della (11) diventa del sesto grado.

Si noti che le α, β, γ possono permutarsi nei valori di I, w, senza alterare i valori stessi, purchè si faccia subire la stessa permutazione alle a, b, c; le condizioni trovate sopra per α, β, γ non possono perciò dar luogo in questo caso che alle tre combinazioni:

$$\left.\begin{array}{lll}\alpha=4, & \beta=5, & \gamma=3\\ \alpha=4, & \beta=4, & \gamma=4\\ \alpha=5, & \beta=5, & \gamma=2.\end{array}\right\} \tag{15}$$

La espressione $\Psi(x)$ essendo del secondo grado, non possono essere insieme $\Psi(a)=0$, $\Psi(b)=0$, $\Psi(c)=0$. Supponiamo dapprima sieno nulli due fra quei valori, per esempio:

$$\Psi(a)=0, \qquad \Psi(c)=0$$

si avranno le:

$$\lambda=\frac{6-\alpha}{6}, \qquad \mu=\frac{n}{n-2}\,\frac{6-\beta}{6}, \qquad \nu=\frac{6-\gamma}{6}$$

per le quali il valore di $\Psi(x)$ diventa:

$$\Psi(x)=-2\rho(6-\beta)^2(b-c)(b-a)(x-c)(x-a). \tag{16}$$

I valori di I, w sono in questo caso:

$$I=-8\delta\rho^3(6-\beta)^6(b-c)^3(b-a)^3\frac{(x-c)^3(x-a)^3}{N}, \qquad w=1$$

e la equazione di condizione (11) si riduce alla:

$$8\delta\rho^3(6-\beta)^4\Delta(b-a)(b-c)[(\alpha-3)^2(a-b)(x-c)+(\gamma-3)^2(b-c)(x-a)]=\frac{N}{(x-a)(x-c)\varphi} \tag{17}$$

essendo come precedentemente $\Delta=(b-c)(c-a)(a-b)$.

La 1.ª combinazione $\alpha=4$, $\beta=5$, $\gamma=3$ conduce alla:

$$I=\frac{c-b}{c-a}\frac{x-a}{x-b}$$

ossia alla $I=\xi$, come doveva essere per quanto si è veduto nel § 2.°; e la combinazione $\alpha=4$, $\beta=4$, $\gamma=4$ dà per I il valore:

$$I=-4\frac{(b-c)(b-a)}{(a-c)^2}\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(x-b)^2}.$$

La terza combinazione (15) non può sussistere nel caso attuale, come provasi sostituendo per α, β, γ questi valori nella (17).

Se suppongonsi invece:

$$\Psi(a)=0 \qquad \Psi(b)=0$$

vale a dire si permutano le b, c; β, γ; μ, ν; sono:

$$\lambda=\frac{6-\alpha}{6}, \qquad \mu=\frac{6-\beta}{6}, \qquad \nu=\frac{n}{n-2}\frac{6-\gamma}{6}$$

e si ha per la (12):

$$w=\left(\frac{x-c}{x-b}\right)^{\frac{6-\gamma}{6(n-2)}}$$

e permutando le β, γ; b, c nel valore superiore (16) di Ψ si otterrà:

$$\Psi(x)=-2\rho(6-\gamma)^2(c-b)(c-a)(x-b)(x-a)$$

ed analogamente per la (17). Si giungerà così ai due valori di I corrispondenti alle prime due combinazioni (15), nelle quali si permutino le β, γ; cioè

$$I=\frac{b-c}{b-a}\frac{x-a}{x-c}, \qquad I=-4\frac{(c-b)(c-a)}{(a-b)^2}\cdot\frac{(x-b)(x-a)}{(x-c)^2}$$

non potendo sussistere anche nel caso attuale la terza combinazione (15).

Riassumendo si ha che supponendo eguali a zero due fra i valori di $\Psi(x)$ corrispondenti ad $x=a$, $x=b$, $x=c$ si presentano i seguenti risultati:

$$\text{per } \alpha=4, \qquad \beta=5, \qquad \gamma=3$$

$$\lambda=\frac{1}{3}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{1}{2}$$

si hanno:

$$y=v, \qquad I=\frac{c-b}{c-a}\frac{x-a}{x-b}=\xi$$

e

$$\text{per}\left\{\begin{array}{lll}\alpha=4, & \beta=4, & \gamma=4\\ \lambda=\frac{1}{3}, & \mu=\frac{1}{3}, & \nu=\frac{n}{3(n-2)}\end{array}\right.$$

sono:

$$y=\left(\frac{x-c}{x-b}\right)^{\frac{1}{3(n-2)}} v, \qquad I=-4\frac{(c-b)(c-a)}{(a-b)^2}\frac{(x-b)(x-a)}{(x-c)^2}=-\frac{4\xi}{(1-\xi)^2}.$$

Negli altri due casi le μ, ν si permutano, i valori di I si ottengono dai superiori cambiando la ξ in $\frac{\xi}{\xi-1}$ e nell'uno è $y=v$, nell'altro:

$$y=\left(\frac{x-c}{x-b}\right)^{\frac{1}{6(n-2)}} v.$$

Passiamo a considerare il caso in cui una sola delle funzioni $\Psi(x)$ corrispondenti ad $x=a$, b, c sia nulla. Supponiamo sia:

$$\Psi(c)=0$$

si hanno le:

$$\lambda=\frac{n}{n-2}\,\frac{6-\alpha}{6}, \qquad \mu=\frac{n}{n-2}\,\frac{6-\beta}{6}, \qquad \nu=\frac{6-\gamma}{6}$$

ed il valore di $\Psi(x)$:

$$\Psi(x)=-2\rho(b-a)(x-c)R(x)$$

essendo:

$$R(x)=(6-\beta)^2(b-c)(x-a)+(6-\alpha)^2(c-a)(x-b).$$

Sieno $\alpha=4$, $\beta=5$, $\gamma=3$ la equazione di condizione (11) si riduce alla:

$$8\cdot 27\cdot\delta\rho^3\Delta(b-c)(a-b)^2=1$$

per la quale alle:

$$\lambda=\frac{n}{3(n-2)}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{1}{2}$$

corrispondono i valori:

$$I=-\frac{1}{27}\,\frac{a-b}{(c-a)(c-b)^3}\,\frac{[(b-c)(x-a)+4(c-a)(x-b)]^3}{(x-a)^2(x-b)}=-\frac{1}{27}\,\frac{(\xi-4)^3}{\xi^2}$$

$$y=\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{1}{3(n-2)}} v.$$

In secondo luogo supponendo $\alpha=5$, $\beta=5$, $\gamma=2$ si hanno le:

$$\lambda=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{2}{3}$$

ed i valori:

$$I=-\frac{1}{4}\frac{(b-a)^2}{(c-a)(c-b)}\frac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=-\frac{1}{4}\frac{(1-\xi)^2}{\xi}$$

$$y=\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{1}{6(n-2)}}v.$$

Infine ponendo $\alpha=3$, $\beta=5$, $\gamma=4$ e permutando le a, c si ottengono per:

$$\lambda=\frac{1}{3}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{n}{2(n-2)}$$

le:

$$I=-\frac{1}{4^3}\frac{b-c}{(a-c)(a-b)^3}\frac{(x-a)[(b-c)(x-a)+8(a-c)(x-b)]^3}{(x-b)(x-c)^3}=-\frac{1}{4^3}\frac{\xi(\xi+8)^3}{(1-\xi)^3}$$

$$y=\left(\frac{x-c}{x-b}\right)^{\frac{1}{2(n-2)}}v.$$

Le altre due combinazioni $\alpha=\beta=\gamma=4$; $\alpha=2$, $\beta=5$, $\gamma=5$ essendo escluse per la sussistenza della (11) non si hanno a considerare altri casi nella ipotesi che una sola delle $\Psi(a)$, $\Psi(b)$, $\Psi(c)$ sia nulla.

Supponiamo da ultimo che nessuna di queste funzioni sia eguale a zero; si avranno allora le:

$$\lambda=\frac{n}{n-2}\frac{6-\alpha}{6}, \qquad \mu=\frac{n}{n-2}\frac{6-\beta}{6}, \qquad \nu=\frac{n}{n-2}\frac{6-\gamma}{6}$$

e:

$$\Psi=-2\rho[\Sigma\beta\gamma(b-c)^2(x-a)^2+36\,\Sigma(a-b)(a-c)(x-b)(x-c)].$$

Se $\alpha=\beta=\gamma=4$ si ottengono così le:

$$\lambda=\frac{n}{3(n-2)}, \qquad \mu=\frac{n}{3(n-2)}, \qquad \nu=\frac{n}{3(n-2)}$$

ed:

$$I=\frac{4}{27}\frac{1}{\Delta^2(c-a)^2}\frac{[(a-b)(a-c)(x-b)(x-c)+(b-c)^2(x-a)^2]^3}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}=\frac{4}{27}\frac{(1-\xi+\xi^2)^3}{\xi^2(1-\xi)^2}$$

$$y=\left[\frac{(x-a)(x-c)}{(x-b)^2}\right]^{\frac{1}{3(n-2)}}v.$$

L'altra combinazione $\alpha=\beta=5$, $\gamma=2$ dà luogo alle:

$$\lambda=\mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{2n}{3(n-2)}$$

$$I=\frac{1}{4\cdot 27}\cdot\frac{1}{\Delta(b-a)^3}\frac{[16(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)+(a-b)^2(x-c)^2]^3}{(x-a)(x-b)(x-c)^4}=\frac{1}{4\cdot 27}\frac{(1+14\xi+\xi^2)^3}{\xi(1-\xi)^4}$$

$$y=\left[\frac{(x-a)(x-c)^4}{(x-b)^5}\right]^{\frac{1}{6(n-2)}} v.$$

La supposizione $\alpha=4$, $\beta=5$, $\gamma=3$ non è sussistente in questo caso come si dimostra tosto colla equazione di condizione (11).

Riassumendo i risultati di questo paragrafo possiamo concludere che allorquando sia:

$$\alpha+\beta+\gamma=12$$

1.° Se due dei valori di $\Psi(x)$ corrispondenti ad $x=a$, b, c sono nulli possono essere:

$$\alpha=4, \qquad \beta=5, \qquad \gamma=3$$
$$\alpha=4, \qquad \beta=4, \qquad \gamma=4$$

e quindi:

$$\lambda=\frac{1}{3}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{1}{2}$$
$$\lambda=\frac{1}{3}, \qquad \mu=\frac{n}{3(n-2)}, \qquad \nu=\frac{1}{3}.$$

2.° Se uno solo dei suddetti valori è nullo, possono essere:

$\alpha=4, \quad \beta=5, \quad \gamma=3$ oppure $\alpha=3, \quad \beta=5, \quad \gamma=4$

$\alpha=5, \quad \beta=5, \quad \gamma=2$

per le quali:

$$\lambda=\frac{n}{3(n-2)}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{1}{2}$$

oppure

$$\lambda=\frac{n}{2(n-2)}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{1}{3}$$
$$\lambda=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{2}{3}.$$

3.° Infine se nessuno di quei valori è nullo: sussistono le:

$$\alpha=4, \qquad \beta=4, \qquad \gamma=4$$
$$\alpha=5, \qquad \beta=5, \qquad \gamma=2$$

ed in conseguenza:

$$\lambda=\frac{n}{3(n-2)}, \qquad \mu=\frac{n}{3(n-2)}, \qquad \nu=\frac{n}{3(n-2)}$$
$$\lambda=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \mu=\frac{n}{6(n-2)}, \qquad \nu=\frac{2n}{3(n-2)}.$$

Devesi notare che il primo gruppo di valori delle λ, μ, ν soddisfa alla:

$$\lambda+\frac{n-2}{n}\mu+\nu=1$$

il secondo alla:

$$\frac{n-2}{n}\lambda+\frac{n-2}{n}\mu+\nu=1$$

ed il terzo alla:

$$\lambda+\mu+\nu=1.$$

Nelle ipotesi di $n=4$, 6 alcuni fra i valori superiori di λ, μ, ν devono escludersi se i valori stessi si sottopongono alla condizione di essere minori dell'unità.

6.° Esaurito così il caso di $g=12$ passiamo a considerare l'altro pel quale, come si è dimostrato, si ha:

$$g=\alpha+\beta+\gamma=12\frac{n-1}{n}.$$

Nel medesimo $\Psi(x)$ essendo del quarto grado, potranno essere insieme:

$$\Psi(a)=0, \qquad \Psi(b)=0, \qquad \Psi(c)=0$$

e quindi:

$$\lambda=\frac{6-\alpha}{6}, \qquad \mu=\frac{6-\beta}{6}, \qquad \nu=\frac{6-\gamma}{6}.$$

Il valore di $\Psi(x)$ diventa così:

$$\Psi(x)=(Ax+B)\varphi(x)$$

essendo:

$$A=-g(12-g), \qquad B=(12-g)[(g-2\alpha)a+(g-2\beta)b+(g-2\gamma)c]$$

e l'equazione di condizione (11) si trasforma nella:

$$2\rho\delta[3A\varphi-(Ax+B)\Sigma(3-\alpha)(x-b)(x-c)]^2=\frac{N}{\varphi^2}-\delta\varphi(Ax+B)^3$$

nella quale il grado di N è $\frac{6(n+2)}{n}$, e perciò sempre superiore a 6. Si può quindi supporre sia per $n=4$ che per $n=6$ oppure $n=12$ che una almeno delle α, β, γ, per esempio la γ sia eguale a 3; l'equazione di condizione superiore diventa allora divisibile per $x-c$ e si ha:

$$2\rho\delta(x-c)\{3A(x-a)(x-b)-(Ax+B)[(3-\alpha)(x-b)+(3-\beta)(x-a)]\}^2=$$
$$=\frac{N}{(x-c)\varphi^2}-\delta(x-a)(x-b)(Ax+B)^3.$$

Sia $n=4$, dovrà essere $\alpha+\beta=6$ quindi $\alpha=\beta=3$ oppure $\alpha=4$, $\beta=2$. Nel primo caso l'equazione di condizione si riduce alla:

$$3\cdot 9^4\cdot\delta\varphi(x)=1+9^3\cdot\delta(3x-a-b-c)^3$$

la quale è soddisfatta se:

$$a^2+b^2+c^2=bc+ca+ab$$

e:

$$3\cdot 9^3\cdot\delta[a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2]=1.$$

Si avranno così le:

$$\lambda=\mu=\nu=\frac{1}{2}$$

$$I=-\frac{1}{3}\frac{(3x-a-b-c)^3}{a(b-c)^3+b(c-a)^2+c(a-b)^2},\qquad y=\frac{v}{(x-b)^{\frac{1}{4}}}.$$

In secondo luogo supponendo $\alpha=4$, $\beta=2$; l'equazione di condizione conduce alle:

$$a-4b+3c=0,\qquad 12\cdot 9^4\cdot\delta(b-c)^3=1$$

e perciò:

$$\lambda=\frac{1}{3},\qquad \mu=\frac{2}{3},\qquad \nu=\frac{1}{2}$$

$$I=-\frac{1}{4}\frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-c)^3},\qquad y=\frac{v}{(x-b)^{\frac{1}{4}}}.$$

Per $n=6$, essendo $\alpha+\beta=7$ potranno essere $\alpha=4$, $\beta=3$; $\alpha=5$, $\beta=2$. Nel primo caso la equazione di condizione condurrà ad una relazione fra le a, b, c ed alla determinazione del valore di δ; e cioè:

$$8(a-b)(a-c)+27(b-c)^2=0, \qquad \delta=\frac{5}{4\cdot 27\cdot(2a-b-c)^4};$$

e si avranno le:

$$\lambda=\frac{1}{3}, \qquad \mu=\nu=\frac{1}{2}, \qquad I=-\frac{5\cdot 4^2}{3^3}\frac{(x-a)(5x-a-2b-2c)^3}{(2a-b-c)^4}$$

$$y=\frac{v}{(x-b)^{\frac{1}{6}}}.$$

Il secondo caso $\alpha=5$, $\beta=2$ non può sussistere; ma devesi inoltre considerare la combinazione $\alpha=\beta=4$, $\gamma=2$ per la quale sono:

$$2c-a-b=0; \qquad \lambda=\mu=\frac{1}{3}, \qquad \nu=\frac{2}{3}$$

ed:

$$I=-4^3\cdot\frac{(x-c)\varphi(x)}{(a-b)^4}, \qquad y=\frac{v}{(x-b)^{\frac{1}{6}}}.$$

Infine se $n=12$ e quindi $g=11$ si hanno dapprima $\alpha=4$, $\beta=4$, $\gamma=3$ e quindi $\lambda=\frac{1}{3}$, $\mu=\frac{1}{3}$, $\nu=\frac{1}{2}$. Anche in questo caso si ha una equazione di condizione fra le a, b, c, cioè la:

$$135(c-a)(c-b)+64(a-b)^2=0$$

e saranno:

$$I=\frac{\overline{11}^2}{3^3\cdot 4^3}\frac{(x-a)(x-b)(11x-3a-3b-5c)^3}{(2c-x-b)^5}, \qquad y=\frac{v}{(x-b)^{\frac{1}{12}}}.$$

Le altre combinazioni devono essere escluse.

Supponiamo in secondo luogo che due fra i valori di $\Psi(x)$ corrispondenti ad $x=a$, b, c sieno nulli; sieno cioè:

$$\Psi(a)=0, \qquad \Psi(c)=0$$

e quindi:

$$\lambda=\frac{6-\alpha}{6}, \qquad \mu=\frac{n}{n-2}\,\frac{6-\beta}{6}, \qquad \nu=\frac{6-\gamma}{6}.$$

Il valore di $\Psi(x)$ sarà:

$$\Psi(x)=(x-a)(x-c)R(x)$$

indicando $R(x)$ il polinomio:

$$R(x) = (12-g)(x-b)[-gx+(g-2\alpha)a+(g-2\beta)b+(g-2\gamma)c]-2\rho(6-\beta)^2(b-a)(b-c)$$

e la equazione di condizione si trasformerà nella:

$$2\rho\delta\{3\varphi R' - R[(3-\alpha)(x-b)(x-c)+(6-\beta)(x-c)(x-a)+(3-\gamma)(x-a)(x-b)]\}^2 =$$
$$= \frac{N}{(x-a)^2(x-c)^2} - \delta(x-a)(x-c)R^3.$$

Suppongasi ora dapprima $\gamma = 2$, posto in quest'ultima $x = c$, vedesi tosto dover essere $R(c) = 0$, e quindi:

$$(12-g)[(g-2\alpha)a+(g-2\beta)b-4c]+2\rho(6-\beta)^2(b-a)=0 \qquad (18)$$

relazione lineare fra le a, b, c che deve verificarsi pei tre valori di n; ed il valore di $\Psi(x)$ diventa:

$$\Psi(x) = -[g(12-g)(x-b)+2\rho(6-\beta)^2(b-a)](x-a)(x-c)^2.$$

Sia $n = 12$ quindi $g = 11$, sarà $\alpha = 4$, $\beta = 5$ da cui:

$$\lambda = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{1}{5}, \qquad \nu = \frac{2}{3}.$$

Fra le a, b, c dovrà sussistere la relazione (18) ossia la:

$$16a + 9b - 25c = 0 \qquad (19)$$

ed il valore di $R(x)$ sarà:

$$R(x) = -\frac{11}{25}[5^2(x-b)+b-a](x-c).$$

Posto questo valore nella equazione di condizione questa risulterà dapprima nuovamente divisibile per $(x-c)^2$, ed avendo riguardo alla (19) la equazione stessa si riduce alla:

$$\frac{\overline{11}^{3} \cdot 3^6 \cdot 4^3}{5^{10}}\delta(a-b)^5 = 1$$

per la quale si avrà:

$$I = \frac{5^4}{3^6 \cdot 4^3}\frac{(x-a)(x-c)^2[25x-a-24b]^3}{(a-b)^5(x-b)}$$

ed:

$$y = \frac{1}{(x-b)^{\frac{1}{12}}}v.$$

Sieno in secondo luogo per $n=12$

$$\alpha=4, \qquad \beta=4, \qquad \gamma=3 \quad \text{e quindi} \quad \lambda=\frac{1}{3}, \qquad \mu=\frac{2}{5}, \qquad \nu=\frac{1}{2}$$

si ha:

$$R(x)=(x-b)(-11x+3a+3b+5c)-\frac{4\cdot 11}{25}(b-a)(b-c)$$

e posto questo valore nella equazione di condizione si ottengono da essa le due sole relazioni:

$$64a-189b+125c=0$$

$$\frac{3^3\cdot 4^3\cdot 7^7\cdot \overline{11}^3}{5^{15}}\delta(a-b)^5=1$$

per le quali:

$$I=\frac{1}{3^3\cdot 4^3\cdot 7^7}\frac{[5^3(x-b)(25x-a-24b)-4^4(a-b)^2]^3(x-a)}{(b-a)^5(x-b)^2}$$

ed y come pel caso precedente.

Suppongasi ora un solo valore di $\Psi(x)$ per $x=a,\ b,\ c$ eguale a zero. Sia $\Psi(a)=0$ ed in conseguenza:

$$\lambda=\frac{6-\alpha}{6}, \qquad \mu=\frac{n}{n-2}\,\frac{6-\beta}{6}, \qquad \nu=\frac{n}{n-2}\,\frac{6-\gamma}{6}$$

sarà:

$$\Psi(x)=(x-a)R(x)$$

essendo:

$$\begin{aligned}R(x)=(12-g)(x-b)(x-c)[-gx+(g-2\alpha)a+(g-2\beta)b+(g-2\gamma)c]-\\ -2\rho(b-c)[(6-\beta)^2(b-a)(x-c)-(6-\gamma)^2(c-a)(x-b)].\end{aligned}$$

La equazione di condizione (11) diventerà in questo caso:

$$\begin{aligned}2\rho\delta\{3\varphi R'-R[(3-\alpha)(x-b)(x-c)+(6-\beta)(x-c)(x-a)+(6-\gamma)(x-a)(x-b)]\}^2\\ =\frac{N}{(x-a)^2}-\delta(x-a)R^3.\end{aligned}$$

Ora se poniamo nella medesima:

$$\alpha=4, \qquad \beta=4, \qquad \gamma=3$$

e quindi:

$$\lambda=\frac{1}{3}, \qquad \mu=\frac{2}{5}, \qquad \nu=\frac{3}{5}$$

si ha facilmente che allorquando sieno:

$$5a+27b-32c=0$$

$$\frac{3^3\cdot 4^7\cdot \overline{11}^3}{5^5}\delta(c-b)^5=1$$

la equazione stessa è soddisfatta. Supponendo quindi che fra le a, b, c sussista l'equazione lineare superiore si hanno le:

$$I=\frac{1}{3^3\cdot 4^7\cdot 5^4}\frac{(x-a)[25(5x+6b-11c)(x-b)(x-c)-(b-c)^2(115x-243b+128c)]^3}{(b-c)^5(x-b)^2(x-c)^3}$$

$$y=\left[\frac{(x-c)^3}{(x-b)^8}\right]^{\frac{1}{60}}v.$$

Così se:

$$\alpha=4,\qquad \beta=5,\qquad \gamma=2$$

dalle quali:

$$\lambda=\frac{1}{3},\qquad \mu=\frac{1}{5},\qquad \nu=\frac{4}{5}$$

si ottiene la relazione lineare:

$$80a+b-81c=0$$

che insieme colla:

$$3^{12}\cdot 4^3\cdot \overline{11}^3\cdot \delta(a-c)^5=1$$

rendono soddisfatta l'equazione di condizione, e si avranno le:

$$I=\frac{1}{4^3\cdot 3^{12}}\frac{(x-a)[(x-16a+15c)^3-5\cdot 27\cdot(c-a)(x-c)^2]^3}{(x-b)(x-c)^4}$$

$$y=\left[\frac{(x-c)^4}{(x-b)^9}\right]^{\frac{1}{60}}v.$$

Infine se:

$$\alpha=2,\qquad \beta=5,\qquad \gamma=4$$

sono:

$$\lambda=\frac{2}{3},\qquad \mu=\frac{1}{5},\qquad \nu=\frac{2}{5};$$

l'equazione di condizione conduce alle:

$$25a+2b-27c=0$$

$$2\cdot 3^3\cdot 4^3\cdot \overline{11}^3\delta(a-c)^5=1$$

per le quali:

$$I = \frac{1}{2 \cdot 3^3 \cdot 4^3} \frac{(x-a)^2 [(x-c)^2 - 14(c-a)(x-c) + 25(c-a)^2]^3}{(c-a)^5 (x-b)(x-c)^2}$$

$$y = \left[\frac{(x-c)^2}{(x-b)^7}\right]^{\frac{1}{60}} v.$$

Assumendo per ξ il valore (2) come precedentemente si otterranno così fra le I e ξ le seguenti relazioni:

$$\text{per} \quad \lambda = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{1}{5}, \qquad \nu = \frac{2}{3}$$

$$I = -\frac{27}{4} \frac{\xi(1-\xi)^2(128-3\xi)^3}{(9\xi+16)^5}$$

$$\text{per} \quad \lambda = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{2}{5}, \qquad \nu = \frac{1}{2}$$

$$I = -\frac{\xi[4 \cdot 27^2 \xi^2 - 7 \cdot 13 \cdot 27 \cdot \xi - 7 \cdot 8^3]^3}{(189\xi - 64)^5}$$

$$\text{per} \quad \lambda = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{2}{5}, \qquad \nu = \frac{3}{5}$$

$$I = -\frac{1}{4 \cdot 5^4} \frac{\xi[27^2 \xi^3 - 5^2 \cdot 27 \cdot \xi^2 + 5^3 \cdot 23 \cdot \xi - 5^4]^3}{(1-\xi)^3 (5+27\xi)^5}$$

$$\text{per} \quad \lambda = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \frac{1}{5}, \qquad \nu = \frac{4}{5}$$

$$I = -\frac{1}{4 \cdot 5^5} \frac{\xi[\xi^3 - 6 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot \xi^2 + 3 \cdot 5^3 \cdot 71 \cdot \xi + 2 \cdot 4^3 \cdot 5^4]^3}{(1-\xi)^4 (\xi+80)^5}$$

infine

$$\text{per} \quad \lambda = \frac{2}{3}, \qquad \mu = \frac{1}{5}, \qquad \nu = \frac{2}{5}$$

$$I = -\frac{1}{4^3} \frac{\xi^2[\xi^2 - 16 \cdot 17 \cdot \xi + 8 \cdot 5^3]^3}{(1-\xi)^2 (2\xi+25)^5}.$$

Notiamo da ultimo che se nessuno dei valori di $\Psi(x)$ corrispondenti ad $x=a$, b, c è nullo, non sussistono valori di α, β, γ e perciò di λ, μ, ν che soddisfino l'equazione di condizione (11).

III.

1.° Indicando con $f(y_1, y_2)$ la forma binaria che si ottiene sostituendo le y_1, y_2 alle v_1, v_2 nelle forme considerate al capo I, rammentando essere $y = wv$ si ha:

$$f(y_1, y_2) = w^n f(v_1, v_2)$$

per $n = 4, 6, 12$; ed essendo $f(v_1, v_2)$ nei tre casi eguali ad una costante G, sarà:

$$f(y_1, y_2) = G w^n$$

nella quale w ha il valore (12).

Così dalla equazione (5) del precedente capitolo, osservando essere $\eta^{12} = \psi(x)$ si ottiene la:

$$\frac{dI}{I^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-I}} = \frac{D}{C} \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma}}$$

e quindi per ciascuno dei valori di α, β, γ sopra considerati si hanno le corrispondenti relazioni fra I ed x che riducono alle funzioni ellittiche il trascendente del secondo membro.

Infine dai valori di w o dalle relazioni trovate fra y e v si ottengono gli integrali delle varie equazioni differenziali lineari del secondo ordine della forma (3), supposti noti gli integrali particolari v_1, v_2 di cui i valori furono dati nel capitolo I.

Queste equazioni differenziali sono quelle che denominiamo del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro secondo che $n = 4, 6, 12$ per le relazioni scoperte dal prof. Schwarz fra le medesime e gli indicati corpi regolari nella sua importante Memoria: *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt* (Journal für die Mathematik, Bd. 75). Si possono altresì consultare intorno all'argomento le interessanti ricerche del prof. Klein pubblicate nei Mathematische Annalen, Bd. 11, 12; ed una mia Nota nello stesso periodico inserta nel volume XI.

Settembre, 1880.

Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes.

(*Von* H. A. Schwarz, *in Göttingen.*)

Es sei t eine reelle stetig veränderliche Grösse, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ seien drei Functionen des Argumentes t, welche ebenfalls nur reelle Werthe annehmen und welche für alle in Betracht kommenden Werthe dieses Argumentes endlich, stetig und eindeutig sind.

Unter dieser Voraussetzung stellen die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t),$$

wenn x, y, z rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten eines Punktes bedeuten, allgemein zu reden, eine krumme Linie im Raume dar.

Wenn die drei betrachteten Functionen Ableitungen erster Ordnung

$$\varphi'(t), \qquad \psi'(t), \qquad \chi'(t)$$

besitzen, welche für alle in Betracht kommenden Werthe von t endlich und stetig sind, so besitzt die erwähnte Curve in jedem Punkte, für welchen die drei Ableitungen erster Ordnung nicht gleichzeitig den Werth Null annehmen, eine bestimmte Tangente.

Ist P_0 der dem Werthe t_0 des Argumentes t entsprechenden Punkt der Curve, während mindestens eine der drei Grössen

$$\varphi'(t_0), \qquad \psi'(t_0), \qquad \chi'(t_0)$$

einen von Null verschiedenen Werth hat, und ist P_1 ein dem Werthe t_1 entsprechender, dem Punkte P_0 benachbarter Punkt der Curve, so wird die Tangente der betrachteten Curve im Punkte P_0 definirt als die Grenzlage, welcher die durch die beiden Punkte P_0 und P_1 hindurchgehende Gerade unter der Voraussetzung unendlich nahe kommt, dass der Punkt P_1 dem Punkte P_0 unendlich nahe rückt.

Unter den angegebenen Voraussetzungen besteht der Satz:

Sind P_1 und P_2 zwei von einander verschiedene, dem Punkte P_0 benachbarte Punkte der Curve, welche den Werthen t_1 und t_2 des Argumentes t entsprechen, und lässt man diese beiden Punkte unabhängig von einander dem Punkte P_0 unendlich nahe rücken, so ist die Grenzlage der durch die beiden Punkte P_1 und P_2 hindurchgehenden Geraden die Tangente der Curve im Punkte P_0.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf den Fundamentalsatz der Analysis, dass, wenn t_1 und t_2 zwei von einander verschiedene Werthe bezeichnen, der Werth des Quotienten

$$\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1},$$

welchem man auch die Form

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{vmatrix}}$$

geben kann, nicht grösser ist als der grösste und nicht kleiner ist als der kleinste unter denjenigen Werthen, welche die erste Ableitung $\varphi'(t)$ der Function $\varphi(t)$ in dem Intervalle $t_1 \ldots t_2$ annimmt.

Besitzen die drei betrachteten Functionen ausser den Ableitungen der ersten Ordnung auch Ableitungen der zweiten Ordnung

$$\varphi''(t), \qquad \psi''(t), \qquad \chi''(t),$$

welche für alle in Betracht kommenden Werthe von t endlich und stetig sind, so besitzt die erwähnte Curve in jedem ihrer Punkte, für welchen die drei Determinanten zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} \psi'(t) & \chi'(t) \\ \psi''(t) & \chi''(t) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \chi'(t) & \varphi'(t) \\ \chi''(t) & \varphi''(t) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix}$$

nicht gleichzeitig den Werth Null annehmen, nicht bloss eine bestimmte Tangente, sondern auch eine bestimmte Osculationsebene, und zwar ist, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Osculationsebene in dem dem Werthe t_0 entsprechenden Punkte P_0 der Curve bezeichnen,

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \varphi(t_0) & \psi(t_0) & \chi(t_0) & 1 \\ \varphi'(t_0) & \psi'(t_0) & \chi'(t_0) & 1 \\ \varphi''(t_0) & \psi''(t_0) & \chi''(t_0) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung derselben.

Der Abstand der dem Punkte P_0 benachbarten Punkte der Curve von der Osculationsebene ist eine kleine Grösse von höherer als der zweiten Ordnung. Diese Eigenschaft enthält zugleich eine Definition der Osculationsebene für jeden nicht singulären Punkt, das heisst, für alle diejenigen Punkte der Curve, für welche die erwähnten drei Determinanten zweiter Ordnung nicht gleichzeitig den Werth Null annehmen.

Nun besteht der Satz: Sind P_1, P_2, P_3 drei von einander verschiedene, dem Punkte P_0 benachbarte Punkte der betrachteten Cuive, welche den Werthen t_1, t_2, t_3 des Argumentes t entsprechen, so ist, wenn diese Punkte unabhängig von einander dem Punkte P_0 unendlich nahe rücken, unter den angegebenen Voraussetzungen die Grenzlage für die durch die drei Punkte P_1, P_2, P_3 hindurchgehende Ebene die Osculationsebene der betrachteten Curve im Punkte P_0.

Bei dem Versuche diesen Satz in seiner vollen Allgemeinheit zu beweisen bin ich auf eine Verallgemeinerung des vorhin erwähnten Fundamentalsatzes geführt worden, mit deren Hülfe der erwähnte Beweis ohne Schwierigkeit geführt werden kann.

Da die Gleichung der durch die Punkte P_1, P_2, P_3 hindurchgehenden Ebene in die Form

$$\begin{vmatrix} 1 & \psi(t_1) & \chi(t_1) \\ 1 & \psi(t_2) & \chi(t_2) \\ 1 & \psi(t_3) & \chi(t_3) \end{vmatrix} \cdot [\xi - \varphi(t_1)] + \begin{vmatrix} 1 & \chi(t_1) & \varphi(t_1) \\ 1 & \chi(t_2) & \varphi(t_2) \\ 1 & \chi(t_3) & \varphi(t_3) \end{vmatrix} \cdot [\eta - \psi(t_1)] + \begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1) & \psi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \psi(t_2) \\ 1 & \varphi(t_3) & \psi(t_3) \end{vmatrix} \cdot [\zeta - \chi(t_1)] = 0$$

gesetzt werden kann und da die Coefficienten der Grössen ξ, η, ζ mit jeder der drei Differenzen $t_1 - t_2$, $t_2 - t_3$, $t_3 - t_1$ gleichzeitig unendlich klein werden, so wird es sich darum handeln, einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1) & \psi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \psi(t_2) \\ 1 & \varphi(t_3) & \psi(t_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix}}$$

in der Weise zwischen Grenzen einzuschliessen, dass diese Grenzen, wenn die drei Werthe t_1, t_2, t_3 unabhängig von einander dem Werthe t_0 unendlich nahe kommen, einander ebenfalls unendlich nahe kommen.

Zu diesem Ziele gelangt man durch folgende Betrachtungen.

Es sei t_1 die kleinste, t_3 die grösste der drei Grössen t_1, t_2, t_3.

Es seien t', t'' zwei von einander unabhängige reelle veränderliche Grössen und zwar sei das Gebiet aller Systeme von Werthen, welche diese veränderlichen Grössen annehmen können, bestimmt durch die Bedingungen

$$t_1 \leqq t' \leqq t_3, \qquad t' \leqq t'' \leqq t_3.$$

Es sei g der grösste, k der kleinste unter allen den Werthen, welche die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi''(t'') & \psi''(t'') \end{vmatrix}$$

in dem betrachteten Gebiete annimmt. Hierbei soll der Fall nicht ausgeschlossen werden, in welchem diese Determinante in dem ganzen Gebiete einen constanten Werth hat, nur ist dann $k = g$ zu setzen.

Es ist also

$$k \leqq \begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi''(t'') & \psi''(t'') \end{vmatrix} \leqq g.$$

Durch Multiplication mit dt'' und Integration zwischen den Grenzen t' und t''

erhält man zunächst

$$k\begin{vmatrix} 1 & t' \\ 1 & t'' \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi'(t'') & \psi'(t'') \end{vmatrix} \overline{\leqq} g \begin{vmatrix} 1 & t' \\ 1 & t'' \end{vmatrix},$$

sodann durch Multiplication mit dt' und Integration zwischen den Grenzen t_1 und t'

$$k\begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ 1 & t'' \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi(t')-\varphi(t_1) & \psi(t')-\psi(t_1) \\ \varphi'(t'') & \psi'(t'') \end{vmatrix} \overline{\leqq} g \begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ 1 & t'' \end{vmatrix},$$

endlich durch abermalige Multiplication mit dt'' und Integration zwischen den Grenzen t_2 und t'', wobei $t_2 < t''$,

$$k\begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ t''-t_2 & \frac{1}{2}(t''^2-t_2^2) \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi(t')-\varphi(t_1) & \psi(t')-\psi(t_1) \\ \varphi(t'')-\varphi(t_2) & \psi(t'')-\psi(t_2) \end{vmatrix} \overline{\leqq} g \begin{vmatrix} t'-t_1 & \frac{1}{2}(t'^2-t_1^2) \\ t''-t_2 & \frac{1}{2}(t''^2-t_2^2) \end{vmatrix}.$$

Wenn nun $t' = t_2$, $t'' = t_3$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$\frac{1}{2}k\begin{vmatrix} t_2-t_1 & t_2^2-t_1^2 \\ t_3-t_2 & t_3^2-t_2^2 \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} \varphi(t_2)-\varphi(t_1) & \psi(t_2)-\psi(t_1) \\ \varphi(t_3)-\varphi(t_2) & \psi(t_3)-\psi(t_2) \end{vmatrix} \overline{\leqq} \frac{1}{2} g \begin{vmatrix} t_2-t_1 & t_2^2-t_1^2 \\ t_3-t_2 & t_3^2-t_2^2 \end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{1}{2}k\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix} \leqq \begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1) & \psi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \psi(t_2) \\ 1 & \varphi(t_3) & \psi(t_3) \end{vmatrix} \overline{\leqq} \frac{1}{2} g \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix}.$$

Est ist also der Satz bewiesen:

« Der Werth des Quotienten

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1) & \psi(t_1) \\ 1 & \varphi(t_2) & \psi(t_2) \\ 1 & \varphi(t_3) & \psi(t_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{vmatrix}}, \qquad t_1 < t_2 < t_3$$

ist nicht grösser als $\frac{1}{2}g$ und nicht kleiner als $\frac{1}{2}k$, wo g den grössten, k den kleinsten unter denjenigen Werthen bezeichnet, welche die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi'(t') & \psi'(t') \\ \varphi''(t'') & \psi''(t'') \end{vmatrix}$$

in dem Gebiete

$$t_1 \leqq t' \overline{\overline{<}} t_3, \qquad t' \leqq t'' \overline{\overline{<}} t_3$$

annimmt. »

Mit Hülfe dieses Lehrsatzes bietet der Beweis des vorher angeführten geometrischen Satzes keine Schwierigkeit dar.

Es kann auch bemerkt werden, dass das soeben mitgetheilte Beweisverfahren ohne Schwierigkeit in der Weise verallgemeinert werden kann, dass es dazu dient folgenden Satz zu beweisen.

« Es seien $f_1(t)$, $f_2(t)$,… $f_n(t)$ n Functionen derselben stetig veränderlichen Grösse t, welche nebst ihren Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich für alle in Betracht kommenden Werthe des Argumentes t endlich, stetig und eindeutig sind. Sowohl die Grösse t, als auch die betrachteten Functionen nehmen nur reelle Werthe an.

Unter diesen Voraussetzungen ist, wenn t_1, t_2,… t_n n von einander verschiedene, dem Intervalle $a \ldots b$ angehörende Werthe des Argumentes t bezeichnen, der Werth des Quotienten

$$\frac{\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \vdots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \vdots & f_n(t_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \vdots & f_n(t_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \vdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \vdots & t_2^{n-1} \\ 1 & t_3 & t_3^2 & \vdots & t_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \vdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

nicht grösser als $\frac{g}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}$ und nicht kleiner als $\frac{k}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}$, wo g den grössten, k den kleinsten unter denjenigen Werthen bezeichnet, welche die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(t') & f_2(t') & \vdots & f_n(t') \\ f'_1(t'') & f'_2(t'') & \vdots & f'_n(t'') \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \vdots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix}$$

in dem Gebiete

$$a \leqq t' < b, \qquad t' \leqq t'' \leqq b, \qquad t'' \leqq t''' \leqq b, \quad \ldots \quad t^{(n-1)} \leqq t^{(n)} \leqq b$$

annimmt. »

Eine Anwendung dieses Satzes für den Fall $n=4$ möge diese Mittheilung beschliessen.

Eine krumme Linie im Raume sei bestimmt durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t),$$

in welchen x, y, z rechtwinklige Punktcoordinaten bezeichnen. Es wird vorausgesetzt, dass die drei Functionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ nebst ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschliesslich für die in Betracht kommenden Werthe der Argumentes t endlich, stetig und eindeutig sind.

Dem Werthe t_λ des Argumentes t entspreche der Punkt P_λ der Curve, dessen Coordinaten x_λ, y_λ, z_λ sein mögen, während r_λ den Abstand desselben vom Coordinatenanfangspunkte bezeichnet. Dem Index λ gebe man die Werthe 0, 1, 2, 3, 4.

Es seien ξ, η, ζ die rechtwinkligen Coordinaten des Mittelpunktes der durch die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 hindurchgehenden Kugelfläche, R sei der Radius derselben. Bezeichnet man die Grösse $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-R^2$, die Potenz der erwähnten Kugelfläche in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt, mit -2ω, so erhält man zur Bestimmung der vier Grössen ξ, η, ζ, ω die vier Gleichungen ersten Grades

$$x_\lambda \xi + y_\lambda \eta + z_\lambda \zeta + \omega - \tfrac{1}{2} r_\lambda^2 = 0, \qquad \lambda = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Es ergeben sich also für ξ, η, ζ Ausdrücke von der Form

$$\xi = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{|\, r_\lambda^2 \; y_\lambda \; z_\lambda \; 1 \,|}{|\, x_\lambda \; y_\lambda \; z_\lambda \; 1 \,|}, \qquad \eta = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{|\, x_\lambda \; r_\lambda^2 \; z_\lambda \; 1 \,|}{|\, x_\lambda \; y_\lambda \; z_\lambda \; 1 \,|}, \qquad \zeta = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{|\, x_\lambda \; y_\lambda \; r_\lambda^2 \; 1 \,|}{|\, x_\lambda \; y_\lambda \; z_\lambda \; 1 \,|},$$

in welchen die Zähler und Nenner Determinanten vierter Ordnung bezeichnen, welche die in dem vorstehenden Lehrsatze angegebene Gestalt besitzen:

Aus diesen Ausdrücken ergeben sich durch Anwendung dieses Lehrsatzes ohne Schwierigkeit die Grenzwerthe, welchen die Grössen ξ, η, ζ unter der Voraussetzung unendlich nahe kommen, dass die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 unabhängig von einander dem Punkte P_0 unendlich nahe rücken. Hierbei ergibt sich, dass die Grenzlage für die erwähnte Kugelfläche mit der zu dem Punkte P_0 gehörenden Schmiegungskugel der betrachteten Curve zusammenfällt.

Rezzonico am Comer See, im September 1880.

Sur une représentation analytique des fonctions, au moyen des transcendantes elliptiques.

(*Extrait d'une lettre de M.^r* HERMITE *à M.^r* U. DINI.)

La question du développement des fonctions en séries dont les termes sont proportionnels aux quantités: $\frac{H(x+a)}{\Theta(x)}$ ou $\frac{\Theta(x+b)}{\Theta(x)}$, en prenant pour les constantes a et b les racines des équations $\Theta'(x)=0$ et $H'(x)=0$, m'a beaucoup préoccupé lorsque j'ai commencé à étudier l'équation de LAMÉ. Mais je me suis bientôt engagé dans une autre direction et j'ai renoncé entièrement à chercher une démonstration complète et rigoureuse des nouvelles formules de développement. De mes premières tentatives il ne reste que bien peu qui puisse vous interesser, et voici seulement ce que j'ajoute aux leçons dont Mr. MITTAG-LEFFLER vous a donné le résumé. Au moyen des formules:

$$\frac{2K}{\pi}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}=\sum\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x+miK')+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x-miK')\right]$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(x)}{H(x)}=\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2K}+\sum\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x+niK')+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x-niK')\right],$$

où l'on suppose: $m=1, 3, 5,\ldots$, $n=2, 4, 6,\ldots$, j'établis directement que l'équation $\Theta'(x)=0$, a pour seules racines réelles des multiples de K, et pour racines imaginaires, $x=nK+i\omega$, les quantités ω étant en nombre infini et comprises successivement entre deux multiples impairs consécutifs de K'. Si l'on fait abstraction des multiples pairs de K, on peut donc écrire: $a=0$, $a=K$ et $a=i\omega$. Pareillement on trouve: $b=K$, $b=i\varpi$, ϖ ayant une infinité de valeurs renfermées entre deux multiples pairs consécutifs de K'. La démonstration de ces résultats est fort simple comme vous allez voir. Faisons $x=\xi+i\omega$ dans l'expression de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, afin de la mettre sous la forme $A+iB$, et considérons principalement la partie réelle A. La formule élémentaire:

$$\operatorname{cotg}(a+ib)=\frac{\sin 2a-\sin 2ib}{2\sin(a+ib)\sin(a-ib)}=\frac{\sin 2a-\sin 2ib}{2\,\mathrm{Mod}^2\sin(a+ib)}$$

donne facilement:

$$A=\sin\frac{\pi\xi}{K}S$$

où S représente la série suivante:

$$S=\frac{1}{2}\sum\left\{\frac{1}{\mathrm{Mod}^2\sin\frac{\pi}{2K}[\xi+(\omega+m)i]}+\frac{1}{\mathrm{Mod}^2\sin\frac{\pi}{2K}[\xi+(\omega-m)i]}\right\}$$

dont les termes sont tous positifs et qui ne sera jamais nulle.

On ne peut donc avoir $A=0$, qu'en supposant ξ multiple de K, par conséquent les seules racines réelles sont: $a=0$, $a=K$ et les racines imaginaires sont toutes de la forme: $a=i\omega$, ou: $a=K+i\omega$. Mais nous avons en posant: $x=K+i\omega$:

$$\frac{2K}{\pi}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}=-\sum\left[\operatorname{tang}\frac{i\pi}{2K}(\omega+mK')+\operatorname{tang}\frac{i\pi}{2K}(\omega-mK')\right]$$

$$=-\sin\frac{i\pi\omega}{K}\sum\frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2K}(\omega+mK')\cos\frac{i\pi}{2K}(\omega-mK')},$$

et cette expression ne peut s'évanouir pour aucune valeur de ω, les termes de la série qui y entre étant encore tous positifs. Ayant ainsi prouvé que les racines imaginaires sont comprises dans la formule: $a=i\omega$, je tire de la relation de Jacobi

$$\Theta(i\omega,\ k')=\sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{\frac{\pi\omega^2}{4KK'}}H_1(\omega,\ k'),$$

l'équation suivante:

$$\frac{H'_1(\omega,\ k')}{H_1(\omega,\ k')}+\frac{\pi\omega}{2KK'}=0.$$

De cette forme bien connue résulte immédiatement l'existence d'une infinité de racines ω, comprises chacune entre deux racines réelles consécutives de l'équation: $H_1(\omega,\ k')=0$ c'est-à-dire entre: $(2p-1)K'$ et $(2p+1)K'$. Enfin j'ajoute qu'il n'y a dans ces limites qu'une seule et unique racine. Soit en effet: $\omega=2pK'+\upsilon$, nous aurons:

$$\frac{H'_1(\upsilon,\ k')}{H_1(\upsilon,\ k')}+\frac{\pi\upsilon}{2KK'}+\frac{p\pi}{K}=0,$$

or le premier membre de cette équation décroit continuellement lorsqu'on fait croître υ de $-K'$ à $+K'$, la dérivée par rapport à υ étant la quantité essentiellement négative: $-\frac{J}{K}-\frac{k^2 sn^2(\upsilon, k')}{cn^2(\upsilon, k')}$. Voici pour ne rien omettre le calcul de cette dérivée. On a d'abord:

$$D_v \frac{H'_1(\upsilon, k)}{H_1(\upsilon, k)} = \frac{J}{K} - \frac{1}{sn^2(\upsilon+K, k)} = \frac{J}{K} - \frac{dn^2(\upsilon, k)}{cn^2(\upsilon, k)};$$

changeant k en k' et observant que $\frac{J}{K}$ devient par là: $1-\frac{J'}{K'}$ j'obtiens:

$$D_v \frac{H'_1(\upsilon, k')}{H_1(\upsilon, k')} = 1 - \frac{J'}{K'} - \frac{dn^2(\upsilon, k')}{cn^2(\upsilon, k')} = -\frac{J'}{K'} - \frac{k^2 sn^2(\upsilon, k')}{cn^2(\upsilon, k')};$$

ajoutons enfin la quantité $\frac{\pi}{2KK'}$ et nous trouverons le résultat donné au moyen de l'équation de Mr. Weierstras: $\frac{J'}{K'}-\frac{J}{K}=\frac{\pi}{2KK'}$. La même méthode s'applique sans qu'il y ait rien à y changer à l'équation $H'(x)=0$ et conduit immédiatement aux conclusions que j'ai énoncées. Elle montre aussi qu'en considérant au lieu de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, l'expression plus générale, où les coefficients α_m et β_m sont supposés réels et positifs, à savoir:

$$\Pi(x) = \sum\left[\alpha_m \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x+miK') + \beta_m \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x-miK')\right],$$

l'équation $\Pi(x)=0$, aura toutes ses racines de l'une ou l'autre de ces deux formes, $x=i\omega$, $x=K+i\omega$. Et dans le cas de $\alpha_m=\beta_m$, la première forme subsiste seule, l'équation n'admettant alors d'autres racines réelles que: $x=0$ et $x=K$.

J'ai essayé de m'éclairer sur la nature des développements des fonctions donnés par les formules:

$$F(x) = \sum A \frac{H(x+a)}{\Theta(x)}, \qquad \Theta'(a)=0$$

$$G(x) = \sum B \frac{\Theta(x+b)}{\Theta(x)}, \qquad H'(b)=0,$$

en cherchant des cas où les coefficients A et B, s'expriment sous forme explicite. En général on a:

$$A\int_0^{2K} \frac{H(x+a)H(x-a)}{\Theta^2(x)}dx = \int_0^{2K} F(x)\frac{H(x-a)}{\Theta(x)}dx,$$

$$B\int_0^{2K} \frac{\Theta(x+b)\Theta(x-b)}{\Theta^2(x)}dx = \int_0^{2K} G(x)\frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)}dx,$$

et j'observerai d'abord, qu'au moyen des expressions suivantes:

$$\frac{H(x+a)H(x-a)}{\Theta^2(x)} = \frac{\Theta^2(a)}{k\Theta^2(0)}\left[D_a \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]$$

$$\frac{\Theta(x+b)\Theta(x-b)}{\Theta^2(x)} = \frac{H^2(b)}{k\Theta^2(0)}\left[D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - D_b \frac{H'(b)}{H(b)}\right],$$

et en employant les conditions $\Theta'(a)=0$, $H'(b)=0$, nous obtenons:

$$\int_0^{2K} \frac{H(x+a)H(x-a)}{\Theta^2(x)}\,dx = +\frac{\pi\Theta(a)\Theta''(a)}{kk'}$$

$$\int_0^{2K} \frac{\Theta(x+b)\Theta(x-b)}{\Theta^2(x)}\,dx = -\frac{\pi H(b)H''(b)}{kk'}.$$

Il semble donc convenable d'écrire désormais:

$$F(x) = \sum A \frac{kk' H(x+a)}{\Theta(a)\Theta''(a)},$$

$$G(x) = \sum B \frac{kk'\Theta(x+b)}{H(b)H''(b)},$$

afin d'avoir plus simplement:

$$A = +\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} F(x)\frac{H(x-a)}{\Theta(x)}\,dx,$$

$$B = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} G(x)\frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)}\,dx.$$

Cela posé, je dis que ces intégrales s'obtiendront, lorsque les fonctions $F(x)$ et $G(x)$, étant supposées uniformes, satisfont aux conditions:

$$F(x+2K) = -F(x), \qquad F(x+2iK') = \mu F(x),$$

$$G(x+2K) = +G(x), \qquad G(x+2iK') = \mu G(x),$$

où μ est un facteur constant, et n'admettent qu'un nombre fini de pôles dans le rectangle des périodes $2K$ et $2iK'$.

On voit en effet que les produits: $F(x)\frac{H(x-a)}{\Theta(x)}$, $G(x)\frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)}$, sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce pour les quelles le multiplicateur relatif à la période $2K$ est l'unité. Par conséquent l'élément simple de ce genre de fonctions qui est en général: $\frac{\Theta(x+\omega)e^{\lambda x}}{\Omega\Theta(x)}$, se reduit à l'expression: $\frac{\Theta(x+\omega)}{\Omega\Theta(x)}$. Remplaçant la constante Ω par sa valeur qui est le résidu de $\frac{\Theta(x+\omega)}{\Theta(x)}$ correspondant au pôle $x = iK'$, nous ferons:

$$f(x) = \frac{H'(0)\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\Theta(x)} e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}.$$

En désignant alors par $\Phi(x)$ l'une ou l'autre des quantités,

$$F(x)\frac{H(x-a)}{\Theta(x)}, \qquad G(x)\frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)},$$

on aura:

$$\Phi(x) = \sum[Rf(x-\alpha) + R_1 f'(x-\alpha) + \cdots + R_i f^i(x-\alpha)],$$

les coefficients R du premier terme étant les résidus de $\Phi(x)$ qui correspondent à tous les pôles de cette fonction, $x = \alpha + iK'$ situés à l'intérieur du rectangle des périodes.

De cette expression résulte l'intégrale cherchée, à savoir:

$$\int_0^{2K} \Phi(x)\,dx = \sum R \int_0^{2K} f(x-\alpha)\,dx,$$

puisque les autres termes disparaissent comme prenant la même valeur aux limites. On a d'ailleurs à cause de la condition, $f(x+2K) = f(x)$, et en admettant comme il est nécessaire, qu'aucune des quantités $f(x-\alpha)$ ne devienne infinie lorsque x croît de zéro à $2K$, la relation:

$$\int_0^{2K} f(x-\alpha)\,dx = \int_0^{2K} f(x)\,dx.$$

Il suffit donc d'employer la formule donnée par Jacobi à savoir:

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0)\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi n x}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(\omega + 2niK')},$$

où n représente tous les nombres entiers positifs et négatifs, pour obtenir immédiatement:

$$\int_0^{2K} f(x)\,dx = \frac{\pi e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}}{\sin\frac{\pi\omega}{2K}},$$

et par suite:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2K}\Phi(x)\,dx = \frac{e^{\frac{i\pi\omega}{2K}}}{\sin\frac{\pi\omega}{2K}}\sum R.$$

Je remarque enfin que la constante ω se déduit du multiplicateur μ et des quantités a et b de la manière suivante. Posant: $\mu = e^{-\frac{i\pi}{K}\xi}$, vous voyez que les multiplicateurs de $F(x)\frac{H(x-a)}{\Theta(x)}$ et $G(x)\frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)}$ relatifs à la période $2iK'$, sont respectivement: $e^{-\frac{i\pi}{K}(\xi-a)}$, $e^{-\frac{i\pi}{K}(\xi-b)}$, nous avons donc dans le premier cas: $\omega = \xi - a$ et dans le second $\omega = \xi - b$.

J'appliquerai ces résultats en supposant en particulier:

$$F(x) = \frac{H(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)},$$

$$G(x) = \frac{\Theta(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)}.$$

Ces expressions donnent l'une et l'autre $\mu = e^{-\frac{i\pi}{K}\xi}$, cela étant nous avons à calculer les résidus des deux fonctions:

$$\frac{H(x+\xi+h)H(x-a)}{\Theta(x+h)\Theta(x)}, \qquad \frac{\Theta(x+\xi+h)\Theta(x-b)}{\Theta(x+h)\Theta(x)},$$

qui correspondent aux pôles $x = iK'$, $x = iK' - h$. Pour la première, ces résidus sont:

$$\frac{\Theta(a)\Theta(\xi+h)}{H'(0)H(h)}e^{\frac{i\pi}{2K}(a-\xi)}, \qquad -\frac{\Theta(\xi)\Theta(a+h)}{H'(0)H(h)}e^{\frac{i\pi}{2K}(a-\xi)}$$

d'où:

$$\sum R = \frac{\Theta(a)\Theta(\xi+h) - \Theta(\xi)\Theta(a+h)}{H'(0)H(h)}e^{\frac{i\pi}{2K}(a-\xi)}$$

La seconde donne ensuite:

$$\frac{H(b)H(\xi+h)}{H'(0)H(h)}e^{\frac{i\pi}{2K}(b-\xi)}, \qquad -\frac{H(\xi)H(b+h)}{H'(0)H(h)}e^{\frac{i\pi}{2K}(b-\xi)}$$

et on en conclut:

$$\sum R = \frac{H(b)H(\xi+h) - H(\xi)H(b+h)}{H'(0)H(h)}e^{\frac{i\pi}{2K}(b-\xi)}$$

Au moyen de ces valeurs et en remarquant qu'on a obtenu tout à l'heure: $\omega = \xi - a$ et $\omega = \xi - b$, il vient:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} F(x)\frac{H(x-a)}{\Theta(x)}\,dx = \frac{\Theta(a)\Theta(\xi+h)-\Theta(\xi)\Theta(a+h)}{H'(0)H(h)\sin\frac{\pi}{2K}(\xi-a)}$$

puis:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} G(x)\frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)}\,dx = \frac{H(b)H(\xi+h)-H(\xi)H(b+h)}{H'(0)H(h)\sin\frac{\pi}{2K}(\xi-b)}.$$

Nous avons en conséquence, en posant pour abréger:

$$\chi(x,\ a) = \frac{kk'H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)\Theta''(a)},$$

$$\varphi(x,\ b) = \frac{kk'\Theta(x+b)}{\Theta(x)H(b)H''(b)},$$

les formules suivantes:

$$\frac{H(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)} = \sum\frac{\Theta(a)\Theta(\xi+h)-\Theta(\xi)\Theta(a+h)}{H'(0)H(h)\sin\frac{\pi}{2K}(\xi-a)}\chi(x,\ a),$$

$$\frac{\Theta(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)} = \sum\frac{H(\xi)H(b+h)-H(b)H(\xi+h)}{H'(0)H(h)\sin\frac{\pi}{2K}(\xi-b)}\varphi(x,\ b),$$

dans les quelles x et h doivent être limitées de manière qu'en faisant $x = \alpha + i\beta$, $x + h = a + ib$, il est nécessaire et il suffit que β et b restent compris entre $+K'$ et $-K'$.

On en tire ensuite au moyen de différentiations par rapport à h, les développements des quantités:

$$D_x^n\frac{H(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)}, \qquad D_x^n\frac{\Theta(x+\xi+h)}{\Theta(x+h)}.$$

Enfin en différentiant la seconde par rapport à ξ et faisant ensuite $\xi = 0$, nous parvenons à l'élément simple des fonctions doublement périodiques de première espèce, à savoir: $\frac{\Theta'(x+h)}{\Theta(x+h)}$ et par conséquent au développement en série de ces fonctions, par les quantités $\varphi(x,\ b)$.

Tels sont, Monsieur, les quelques résultats que j'ai rencontrés dans une question à laquelle vous avez consacré des recherches beaucoup plus approfondies que les miennes. Me bornant à ce que j'ai trouvé, j'ai des doutes je vous l'avoue, sur leur valeur analytique, les formules précédentes ne me paraissant guère que des identités à ajouter à tant d'autres dans la théorie des fonctions elliptiques. Aussi me permettrez vous d'ajouter encore un mot sur ce sujet si intéressant des nouveaux modes d'expressions des fonctions par les transcendantes elliptiques. Un résultat obtenu par M. Gylden et que l'éminent géomètre a publié dans les Comptes-rendus, consistant en ce que l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} \cdot \frac{dy}{dx} + \mu^2 \operatorname{dn}^2 x \cdot y = 0$$

a pour solution:

$$y = C \sin \mu \operatorname{am} x + C' \cos \mu \operatorname{am} x,$$

m'a suggéré la remarque suivante. La fonction $u = \operatorname{am} x$ qui est réelle et n'admet qu'une seule et unique détermination pour toute valeur réelle de la variable, offre cette circonstance qu'elle croit constamment avec x de $-\infty$ à $+\infty$, en prenant successivement les valeurs $u = 0$, π, 2π, etc. pour $x = 0$, $2K$, $4K$, etc. C'est ce qui résulte en effet de l'expression de $\frac{du}{dx}$ qui est la quantité toujours positive $\Delta \operatorname{am} x$. Faisant donc la substitution $u = \operatorname{am} x$, dans les équations:

$$\int_0^\pi \cos pu \cos qu \, du = 0, \qquad \int_0^\pi \cos^2 pu \, du = \frac{\pi}{2},$$

et les autres analogues, où p et q sont des entiers inégaux, on trouvera ainsi:

$$\int_0^{2K} \cos p \operatorname{am} x \cos q \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x \, dx = 0, \qquad \int_0^{2K} \cos^2 p \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

etc. N'y aurait-il point là, l'origine d'une généralisation de la série de Fourier:

$$F(x) = \sum [A_p \cos px + B_p \sin px],$$

par la formule:

$$F(x) = \sum [A_p \cos p \operatorname{am} x + B_p \sin p \operatorname{am} x]?$$

13 Septembre 1880.

Intorno agli sviluppi delle funzioni di una variabile reale per serie di funzioni Jacobiane.

(*Nota del prof.* Ulisse Dini, *a Pisa.*)

1. Nel decorso aprile avendo avuto la fortuna di passare alcuni giorni insieme col sig. Mittag-Leffler, seppi da Lui che il sig. Hermite nelle sue lezioni sulle funzioni ellittiche aveva dato la forma di uno sviluppo delle funzioni arbitrarie di una variabile reale per serie di funzioni Jacobiane.

Il sig. Mittag-Leffler ebbe anche la gentilezza di comunicarmi le note che aveva prese al corso di Hermite, e in queste note trovai che la forma data da Hermite pel detto sviluppo era la seguente:

$$\frac{k'}{\pi}\sum\frac{\Theta(\alpha+a)}{\Theta(\alpha)\Theta^2(a)(1-\zeta sn^2 a)}\int_0^{2K} f(x)\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x)}dx, \tag{1}$$

ove $\zeta=\frac{1}{K}\int_0^K k^2 sn^2 z\,dz$, e le a sono radici della equazione $H'(z)=0$ e hanno delle proprietà notevoli che Hermite dimostra nelle stesse lezioni; ma in quelle note non trovai traccia alcuna della dimostrazione della possibilità dello sviluppo, se si toglie l'osservazione che al crescere indefinito di n i suoi termini tendono verso i corrispondenti dello sviluppo di Fourier.

Avendo allora in corso di stampa la prima parte del mio ultimo libro (*) ove do un metodo generale per la ricerca della possibilità di sviluppi di forma data, pensai che questo metodo potesse applicarsi utilmente per lo studio dello

(*) *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale* (Pisa, Nistri, 1880).

sviluppo precedente che con osservare che $1-\zeta sn^2 a = -\frac{H(a)H''(a)}{k\Theta^2(a)}$ può anche scriversi

$$-\frac{kk'}{\pi}\sum\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)H(x)H''(a)}\int_0^{2K} f(x)\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x)}dx; \tag{2}$$

e lo stesso metodo potesse pure applicarsi all'altro sviluppo simile

$$\frac{kk'}{\pi}\sum\frac{H(x+b)}{\Theta(x)\Theta(b)\Theta''(b)}\int_0^{2K} f(x)\frac{H(x-b)}{\Theta(x)}dx, \tag{3}$$

ove le b sono radici della equazione $\Theta'(x)=0$; e le mie ricerche ebbero un felice successo, poichè trattandosi di funzioni $f(x)$ che fra 0 e $2K$ sono atte alla integrazione, e se divengono infinite si mantengono atte alla integrazione anche ridotte ai loro valori assoluti, potei dimostrare che « intendendo che le » a nella (2) fossero la radice K e le radici sull'asse y della equazione » $H'(x)=0$, e le b nella (3) fossero le radici 0 e K e le altre sull'asse y » della equazione $\Theta'(x)=0$, questi sviluppi (1) e (3), o (2) e (3) applicati a » tali funzioni $f(x)$ valgono per quei punti x fra 0 e $2K$ negli intorni dei » quali esse soddisfanno a una almeno delle condizioni seguenti:

» a) di fare soltanto un numero finito di oscillazioni;

» b) di ammettere una derivata che in questi intorni resta atta all'inte- » grazione anche ridotta ai valori assoluti;

» c) che scomposti quegli intorni in intervalli parziali sufficientemente » piccoli, la somma delle oscillazioni in questi intervalli sia inferiore a un nu- » mero dato a piacere. E nei punti interni all'intervallo $(0, 2K)$ nei quali » $f(x)$ è continua o ha soltanto discontinuità ordinarie, questi sviluppi hanno » per somma $f(x)$ o il solito valor medio $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, mentre pei punti » estremi 0 e $2K$ il primo sviluppo ha per somma $\frac{f(+0)+f(2K-0)}{2}$, e il » secondo ha per somma $\frac{f(+0)-f(2K-0)}{2}$ nel punto 0 e $\frac{f(2K-0)-f(+0)}{2}$, » nel punto $2K$ ».

Incerto però ancora se Hermite avesse dimostrata o no la possibilità degli sviluppi medesimi, io gli scrissi nell'agosto scorso annunziandogli ciò che allora avevo ottenuto per lo sviluppo (1), e chiedendogli di comunicarmi la sua dimostrazione nel caso che l'avesse avuta, ed è in replica alla mia lettera che Egli mi scrisse quella gentilissima di cui ho quì pubblicato un estratto.

La prima parte del mio libro è ora già pubblicata, e in esso trovansi le dimostrazioni suindicate degli sviluppi precedenti, insieme a un processo semplice per la determinazione effettiva dei lori coefficienti in molti casi, processo che per altra via fu trovato anche da Hermite, come apparisce dalla sua lettera.

Ma, non ostante la pubblicazione già fatta della prima parte del mio libro, può essere utile il dare qui accanto alla lettera di Hermite un breve cenno dei miei studî almeno per quello che si riferisce alla possibilità degli sviluppi (1) e (3), o (2) e (3); e a ciò appunto mi accingo con questa Nota.

2. Mi giova perciò ricordare, per sommi capi, i metodi generali del mio libro.

Secondo questi metodi, data la forma di uno sviluppo:

$$\sum_1^{\infty} A_n P(\alpha, \lambda_n)$$

ove:

$$A_n = \int_a^b f(x)\, Q(x, \lambda_n)\, dx$$

e λ_n è un parametro variabile, per riconoscere se questo sviluppo sia applicabile alla funzione $f(x)$ pei punti α fra a e b, occorre prendere ad esaminare la funzione:

$$\sum_1^{n} P(\alpha, \lambda_n) \int_\alpha^{\alpha+t} Q(x, \lambda_n)\, dx,$$

o meglio l'altra:

$$\sum_1^{n} \int_0^t Q(\alpha + t, \lambda_n) P(\alpha, \lambda_n)\, dt, \tag{4}$$

insieme alla sua derivata rispetto a t:

$$\sum_1^{n} Q(\alpha + t, \lambda_n) P(\alpha, \lambda_n), \tag{5}$$

per t diverso da zero e compreso fra $a - \alpha$ e $b - \alpha$, e vedere se queste somme (5) e (4) come funzioni di t godano delle proprietà che si richiedono per le funzioni che nel Cap. III del mio libro, seguendo le notazioni del Du Bois Reymond, ho indicato con $\varphi(x, h)$ e per i loro integrali $\int_0^x \varphi(x, h)\, dx$.

In altri termini, basta esaminare: 1.° se la somma (4) ha un valore sempre inferiore a un numero finito, e per $n=\infty$ ha un limite indipendente da t che per t positivo è uguale a $\frac{1}{2}$ e per t negativo è uguale a $-\frac{1}{2}$; 2.° se la derivata (5) per t discosto da zero più di ε si mantiene sempre numericamente inferiore a un numero finito. E quando le verificazioni volessero farsi per funzioni $f(x)$ più generali di quelle di cui è parola nell'enunciato del teorema precedente, allora occorre fare altri esami relativi ai massimi e minimi della somma (4) come si dice nei Cap.[i] III e V del libro citato.

Ridotte così le questioni all'esame delle somme (4) e (5), si cerca una funzione $w(z)$ che fra i suoi infiniti ne abbia alcuni i cui residui sono i termini della espressione (4), e allora preso un contorno C_n nel cui *interno* cadano i punti cui corrispondono questi residui, e indicati con γ_r i residui corrispondenti agli altri punti d'infinito che cadessero entro C_n, basta valersi della formola

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w(z)\,dz - \sum\gamma_r = \sum_1^n \int_\alpha^t Q(\alpha+t,\ \lambda_n)P(\alpha,\ \lambda_n)\,dt$$

per concludere che la questione si riduce tutta a vedere se per la differenza

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w(z)\,dz - \sum\gamma_r, \tag{6}$$

e per la derivata rispetto a t di questa differenza sono soddisfatte le condizioni 1.ª e 2.ª di cui abbiamo parlato sopra.

3. Nel caso degli sviluppi (1) e (2) le somme che corrispondono rispettivamente alla somma (4) sono le due:

$$-\frac{kk'}{\pi}\sum\int_0^t \frac{\Theta(\alpha+a)\Theta(\alpha+t-a)}{\Theta(\alpha)H(a)H''(a)\Theta(\alpha+t)}\,dt,$$

$$\frac{kk'}{\pi}\sum\int_0^t \frac{H(\alpha+b)H(\alpha+t-b)}{\Theta(\alpha)\Theta(b)\Theta''(b)\Theta(\alpha+t)}\,dt,$$

nelle quali intenderemo che a e b debbano prendere il valore K e i valori che annullano respettivamente $H'(x)$ e $\Theta'(x)$ sull'asse delle y; quindi osservando che $\frac{1}{H''(a)}$ e $\frac{1}{\Theta''(b)}$ sono i residui respettivi di $\frac{1}{H'(z)}$ e $\frac{1}{\Theta'(z)}$ per $z=a$

e $z=b$, si vede subito che le funzioni:

$$w(z) = -\frac{kk'}{\pi}\int_0^t \frac{\Theta(\alpha+z)\Theta(\alpha+t-z)}{\Theta(\alpha)H(z)H'(z)\Theta(\alpha+t)}dt, \tag{7}$$

$$w_1(z) = \frac{kk'}{\pi}\int_0^t \frac{H(\alpha+z)H(\alpha+t-z)}{\Theta(\alpha)\Theta(z)\Theta'(z)\Theta(\alpha+t)}dt, \tag{8}$$

pel caso degli sviluppi (1) e (3) o (2) e (3) possono tenere respettivamente luogo della funzione $w(z)$ indicata sopra; talchè per decidere se gli sviluppi (1) e (3), o (2) e (3) sono possibili basta studiare gli integrali corrispondenti:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w(z)dz - \sum\gamma_r, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w_1(z)dz - \sum\gamma_r,$$

insieme alle loro derivate rapporto a t.

4. Incominciando dal primo di questi integrali, prenderemo per contorno C_n un rettangolo con due lati paralleli all'asse delle y condotti pei punti $x=K+\varepsilon$, $x=-K+\varepsilon$ dell'asse delle x, e cogli altri due lati condotti pei punti $y=(2n+1)K'$, $y=-(2n+1)iK'$ dell'asse delle y, essendo ε compreso fra 0 e K (0 e K escl.)

Ora Hermite dimostra, nelle sue Lezioni e anche nella sua lettera, che le radici reali di $H'(z)=0$ sono soltanto nei punti $z=(2n+1)K$, e quelle complesse non possono essere che sulle verticali condotte pei punti $z=2pK$ (p intero); dunque, entro C_n la funzione $H'(z)$ non si annulla altro che nei punti λ_n, e in conseguenza le γ_r si riducono ai residui di $w(z)$ corrispondenti ai punti d'infinito che provengono dall'annullarsi di $H(z)$.

In questi punti si ha $z=2riK'$ ($r=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$) e il residuo corrispondente di $\frac{1}{H(z)}$ è $\frac{1}{H'(2riK')}$; quindi sarà evidentemente:

$$\gamma_r = -\frac{kk'}{\pi\Theta(\alpha)}\frac{\Theta(\alpha+2riK')}{H'^2(2riK')}\int_0^t \frac{\Theta(\alpha+t-2riK')}{\Theta(\alpha+t)}dt;$$

e osservando che da formole note si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\Theta(z+2riK') &= (-1)^r\Theta(z)e^{-\frac{ri\pi}{K}(z+riK')} \\
H(z+2riK') &= (-1)^r H(z)e^{-\frac{ri\pi}{K}(z+riK')} \\
H'(z+2riK') &= (-1)^r\left\{H'(z)-\frac{ri\pi}{K}H(z)\right\}e^{-\frac{ri\pi}{K}(z+riK')},
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

si vede subito che sarà:

$$\gamma_r = -\frac{kk'}{\pi H'^2(0)}\int_0^t e^{\frac{ri\pi t}{K}}dt;$$

e poichè ricavando $H'(z)$ dalla formola $H(z) = \sqrt{k}\Theta(z) sn z$, e poi facendo $z = 0$ si trova $H'(0) = \sqrt{k}\Theta(0) = \sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}$ perchè $\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$, sarà anche:

$$\gamma_r = -\frac{1}{2K}\int_0^t e^{\frac{ri\pi t}{K}}dt,$$

e in conseguenza sarà

$$\sum\gamma_r = -\frac{1}{K}\int_0^t\left(\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos\frac{r\pi t}{K}\right)dt = -\frac{1}{2K}\int_0^t \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi t}{2K}}{\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2K}}dt,$$

o anche, ponendo $\frac{\pi t}{2K} = \xi$,

$$\sum\gamma_r = -\frac{1}{\pi}\int_0^\xi \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi}d\xi,$$

di modo che la differenza $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w(z)dz - \sum\gamma_r$ che ora vogliamo considerare si ridurrà a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w(z)dz + \frac{1}{\pi}\int_0^\xi \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi}d\xi. \tag{10}$$

Ora nel primo termine gli integrali estesi ai lati paralleli all'asse delle y si distruggono identicamente, perchè nella integrazione questi lati sono percorsi in senso opposto, e nei punti di essi che si trovano alla stessa distanza dall'asse delle x i valori di $w(z)$ sono uguali; dunque l'integrale $\int_{C_n} w(z)dz$ si riduce ai due integrali estesi ai lati orizzontali sui quali $z = x \pm (2n+1)iK'$, e x và da $-K+\varepsilon$ a $K+\varepsilon$, o anche se vuolsi da $-K$ a K.

Ora ponendo $z = x \pm (2n+1)iK'$ e facendo uso delle formole (9), si trova che sui detti lati il valore di $w(z)$ è:

$$w(z) = -\frac{kk'}{\pi\Theta(\alpha)}\frac{\Theta(\alpha + x \pm iK')}{H^2(x \pm iK')\left\{\frac{H'(x \pm iK')}{H(x \pm iK')} \mp \frac{ni\pi}{K}\right\}}\int_0^t \frac{\Theta(\alpha + t - x \mp iK')}{\Theta(\alpha + t)}e^{\frac{\pm nint}{K}}dt,$$

dunque questi valori di $w(z)$ restano sempre finiti insieme alle loro derivate rispetto a t e al crescere indefinito di n tendono a zero e vi tendono anche in ugual grado per tutti i valori di x e anche per tutti i valori di t; dimodochè l'integrale $\int\limits_{C_n} w(z)dz$ e la sua derivata rispetto a t sono sempre finiti e al crescere indefinito di n tendono a zero per ogni valore finito di α e di t e vi tendono anche in ugual grado.

Per questo e perchè l'ultimo termine della espressione (10) è l'integrale stesso che figura negli sviluppi di Fourier pel quale sono certamente soddisfatte le condizioni 1.ª e 2.ª di cui sopra parlammo, si può ora concludere che queste condizioni sono altresì soddisfatte per la differenza (6), e pei punti estremi 0 e $2K$ si hanno le stesse particolarità che per gli sviluppi di Fourier; talchè, la possibilità dello sviluppo (1) o (2) per le funzioni indicate sopra resta completamente dimostrata.

S'intende evidentemente, stando al processo seguito, che in questi sviluppi devono essere aggruppati due a due i termini corrispondenti alle radici conjugate λ_n.

5. Un processo del tutto simile serve per dimostrare la possibilità degli sviluppi (3).

In questo caso infatti, bisogna, come già notammo, fare le opportune verificazioni sulla differenza

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} w_1(z)dz - \sum\gamma_r,$$

ove $w_1(z)$ è dato dalla (8), e per questo giova prendere per contorno C_n un rettangolo di cui i lati paralleli all'asse delle x passino pei punti $y=2nK'$, $y=-2nK'$ dell'asse delle y, e gli altri due lati passino pei punti $x=K+\varepsilon$, $x=-K+\varepsilon$ dell'asse delle x.

Allora osservando che entro C_n la $\Theta'(z)$ non si annulla altro che nei punti λ'_0, λ'_1, $\lambda'_2,\ldots$ si vede subito che le γ_r verranno ora ad essere i residui di $w_1(z)$ corrispondenti ai punti $z=\pm(2r+1)iK'(r=0, 1, 2,\ldots, n-1)$ nei quali $w_1(z)$ diviene infinita per l'annullarsi di $\Theta(z)$; dunque, poichè in questi punti il residuo di $\frac{1}{\Theta(z)}$ è $\frac{1}{\Theta'[\pm(2r+1)iK']}$, si avrà:

$$\gamma_r = \frac{kk'}{\pi\,\Theta(\alpha)}\,\frac{H[\alpha+(2r+1)iK']}{\Theta'^2[(2r+1)iK']}\int_0^t \frac{H[\alpha+t-(2r+1)iK']}{\Theta(\alpha+t)}dt,$$

ovvero per le (9):

$$\gamma_r = \frac{kk'}{\pi\Theta(\alpha)} \frac{H(\alpha+iK')}{\Theta'^2(iK')} \int_0^t \frac{H[\alpha+t-iK')}{\Theta(\alpha+t)} e^{\frac{ri\pi t}{K}} dt;$$

talchè essendo:

$$\Theta(z+iK') = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{i\pi z}{2K}} H(z),$$

$$H(z+iK') = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{i\pi z}{2K}} \Theta(z),$$

$$\Theta'(iK') = iq^{-\frac{1}{4}} H'(0) = iq^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}},$$

con $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, sarà:

$$\gamma_r = -\frac{1}{2K} \int_0^t e^{(2r+1)\frac{i\pi t}{2K}} dt.$$

Ponendo dunque $\frac{\pi t}{2K} = \xi$, si troverà:

$$\sum \gamma_r = -\frac{2}{\pi} \int_0^\xi [\cos\xi + \cos 3\xi + \cdots + \cos(2n-1)\xi] d\xi,$$

e poichè

$$\sum_0^{n-1} \cos(2r+1)\xi = \frac{1}{2} + \sum_1^{2n} \cos r\xi - \left(\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos 2r\xi\right) = \frac{\operatorname{sen}(4n+1)\frac{\xi}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\xi}{2}} - \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{2\operatorname{sen}\xi},$$

sarà:

$$\sum \gamma_r = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\xi_1} \frac{\operatorname{sen}(4n+1)\xi_1}{\operatorname{sen}\xi_1} d\xi_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\xi \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\xi}{\operatorname{sen}\xi} d\xi,$$

con $\xi_1 = \frac{\pi t}{4K}$, e quindi anche questa somma $\sum \gamma_r$ è ridotta a integrali di Fourier, e il suo limite per $n = \infty$, quando t non è zero ed è fra $-2K$, e $2K$($\pm 2K$ escl.) è appunto uguale a $\mp \frac{1}{2}$ secondochè t è positivo o negativo.

Osservando poi che, coi processi stessi del paragrafo precedente, si dimostra che l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} w_1(z)dz$ ha per limite zero per $n=\infty$, si conclude come volevamo che lo sviluppo (3) è possibile per le funzioni indicate nell'enunciato del nostro teorema finchè α è fra 0 e $2K$.

Se poi $\alpha=0$, o $\alpha=2K$, allora, osservando che i limiti superiori ξ e ξ_1 degli integrali che figurano in $\sum\gamma_r$ vengono respettivamente $\frac{\pi}{2}$ e π per $\alpha=0$, e $-\frac{\pi}{2}$ e $-\pi$ per $\alpha=2K$, per le osservazioni generali dei Cap.[i] III e V del mio libro si vedrà subito che lo sviluppo (3) quando è applicabile a questi punti ha per somma $\frac{f(+0)-f(2K-0)}{2}$ e $\frac{f(2K-0)-f(+0)}{2}$ respettivamente, e così il teorema enunciato sopra resta ora completamente dimostrato.

6. Messa così in chiaro la possibilità degli sviluppi (1) e (3), io potrei dedurne varie conseguenze, e dare al tempo stesso un metodo semplice per calcolare in molti casi i loro coefficienti, come ho fatto anche nel mio libro; ma poichè lo scopo di questa Nota è stato soltanto quello di pubblicare insieme alla lettera di Hermite quella parte dei miei studî che le dettero luogo, così io mi arresto senz'altro, rimandando per il resto al mio libro più volte ricordato.

Pisa, Novembre 1880.

Sopra un recentissimo scritto del sig. L. Stickelberger.

(*Lettera di* F. Casorati *al Direttore degli Annali.*)

Stimatissimo Sig. Direttore

Pavia, 28 Dicembre 1880.

Vorrei che questa lettera giungesse in tempo per essere inserta, se Ella permette, nel fascicolo degli Annali che sta per uscire. Essa m'è dettata dalla penosa impressione che mi fa il preambolo di una pubblicazione di questi giorni, intitolata:

ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

AKADEMISCHE ANTRITTSSCHRIFT

VON

Dr. LUDWIG STICKELBERGER

ausserord. Prof. der Mathematik an der Universität zu Freiburg I. B.

Ella sa che il fascicolo 1.° del tomo X dei nostri Annali veniva in luce nel luglio; adesso poi le dico, che, sino dal principio di agosto, io trasmetteva copia del mio lavoro (*), contenuto nel fascicolo, a persone aventi strettissimi rapporti di studio col sig. Stickelberger. Perciò Ella comprenderà la meraviglia ed il disgusto mio nel vedere che il sig. Stickelberger presenta *quietamente ed in maniera impersonale* nel preambolo della sua Antrittsschrift (**) *una delle idee cardinali* del mio lavoro (***) prima di fare alcuna menzione del

(*) Intitolato: *Il Calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa.*

(**) Nella prima pagina, colle parole « In dem ersten Theile dieser Arbeit (§ 1-4) werden zunächst im Anschluss an die vollständige Integration eines Systems von *Differenzengleichungen,* etc. ».

(***) Cioè quella di introdurre in questo argomento il *Calcolo delle differenze.*

medesimo. E questo non è tutto. Più oltre, si compiace di citarlo, ma per tentare d'infirmarne il valore con un'osservazione (*), che non può venire se non da chi non abbia capito lo scopo della mia Memoria, o ponga interesse a svogliare altrui dal prenderne cognizione. E, per giunta, dice ch'è *appena* comparsa (**), e che riposa sulle stesse considerazioni della sua (***), e non viceversa, che la sua riposa sulle stesse considerazioni della mia.

Come Ella vede, il professore di Friburgo è troppo generoso e troppo cortese verso il suo collega di Pavia!

Ma ritorniamo all'*osservazione*. Il titolo e tutta l'introduzione della mia Memoria dicono e ridicono chiaramente (a chi non vuole frantendere) che scopo di essa non è di trattare minutamente qualche determinata questione, bensì di presentare idee e considerazioni d'indole generale, in virtù delle quali il *Calcolo delle differenze* viene ad acquistare, a mio giudizio, nuova ed inattesa importanza nell'analisi della variabilità continua. Del resto, anche senza queste dichiarazioni, trovando un capitolo di sole quattro pagine dedicato alle belle scoperte del sig. Fuchs, il lettore capisce che non era mio intendimento di offrire un'ampia e minuta rifusione delle ricerche accumulatesi in questo campo; ma che mi premeva soltanto di dimostrare la fecondità delle mie idee con una applicazione, che, per l'attualità e l'importanza della cosa, attirasse l'attenzione degli Annalisti (****). Ora domando: in qual forma dovevo presentare quest'applicazione, per essere più sicuro di colpire ed interessare il lettore? Evidentemente, nella forma più semplice, più famigliare, meno impacciata da simboli e da calcoli, e più prontamente conclusiva, che fosse possibile. I lettori competenti giudicheranno se io abbia scelto forma opportuna o no. Per intanto, seguito a credere di sì. Far vedere che l'integrale *completo* dell'equazione differenziale a coefficienti variabili soddisfa un'*equazione alle differenze a coefficienti costanti*, e conchiuderne immediatamente che le *note* formole per gli integrali di questa *si traducono* in espressioni analitiche per gli integrali di quella: ecco le idee facili, se si vuole, ma nuove, a mio credere, e cardinali, che, nel capitolo quarto, era mio scopo di far apprezzare dal lettore. Il quale ben vedrà, dunque, quanto sia fuor di posto il *nicht rathsam*, con cui il sig. Stickelberger s'è troppo affrettato di raccomandare la mia Memoria.

(*) Pag. seconda (numerata 4), lin. 3 « Aus diesem Grunde scheint es nicht rathsam, etc. ».
(**) Ibid., lin. 6 « *eben* erschienenen Abhandlung ».
(***) Ibid. « die auf ähnlichen Betrachtungen wie die vorliegende beruht ».
(****) Annali di Matematica, tomo X, pag. 10 e seguente « e ne mostrerò subito la fecondità, ecc. ».

Come poi avrei fatta la ricerca dei sottogruppi di integrali (*), o trattato altri punti, e perchè abbia fatto stampare trentasei pagine e non più; il sig. STICKELBERGER per adesso non lo può sapere.

Ed ora vorrei finire. Ma ad ogni nuova occhiata che getto sulle prime tre pagine, il malvolere del sig. STICKELBERGER mi sembra aggravarsi. Ed ecco che devo sospettare un altro cattivo pensiero nella pag. terza. Ond'è che domando: perchè mai il sig. STICKELBERGER non dichiara, neppure qui apertamente, a chi sia dovuto l'*attuale* ravvicinamento fra le equazioni differenziali e quelle alle differenze; mentre, quando segnala quest'ultime equazioni (**), si dà premura di avvertire il lettore che l'introduzione del logaritmo come variabile indipendente è dovuta a RIEMANN ed al sig. HAMBURGER? Ma il sig. HAMBURGER, che, nell'applicare opportunamente alla distinzione degli integrali in sottogruppi un procedimento del sig. JORDAN, non ha punto tentato di nasconderne la paternità, riconoscerà certamente colla lealtà stessa, che, nell'uso da lui fatto di $\log x$, non entra affatto la mia idea di *tradurre i risultati del Calcolo delle differenze in altrettanti di spettanza della variabilità continua e complessa* (***). Nè in nessun luogo io trovai che questa idea fosse concepita ed esposta da RIEMANN; il quale introduceva bensì nell'equazione differenziale le derivate rispetto a $\log x$, ma per semplice ragione di brevità; lasciandone i coefficienti, per la ragione stessa, ancora espressi in x, e non facendo allusione di sorta al Calcolo delle differenze (****).

Terminerò domandando al sig. STICKELBERGER, se proprio tutte le parti della mia Memoria *riposino sulle stesse considerazioni della sua;* per esempio, anche il capitolo secondo, dove è dato il teorema (*****) sul determinante

(*) Si persuada pure il sig. STICKELBERGER, che, dopo attenta lettura dell'articolo del sig. HAMBURGER (*Bemerkung,* etc. nel tomo 76 del Giornale di BORCHARDT), non è facile di smarrirsi in questa ricerca; la quale può essere condotta all'ultimo compimento senza abbandonare la via tracciata dal sig. HAMBURGER.

(**) Le equazioni segnate (3).

(***) Nella pag. 122 del tomo 76 egli indica bensì con u il $\dfrac{\log(x-a)}{2\pi i}$, ma dice apertamente *der Einfachheit wegen;* ed usa bensì il simbolo Δ, ma senza affatto chiamare in ajuto il Calcolo delle differenze. E neppure lo invoca nella Memoria del tomo 83.

(****) A calmare gli scrupoli, se veramente li ha, di plagio mio su RIEMANN, il sig. STICKELBERGER potrebbe leggere le *Notizie storiche* e tutte le *Sezioni* successive della *Teorica delle funzioni di variabili complesse,* pubblicata in Pavia nel 1868, allo scopo di diffondere in Italia i principî della variabilità complessa, e specialmente le idee e i risultati di RIEMANN appunto e di CAUCHY.

(*****) Prendo quest'occasione per avvertire d'aver scritto inesattamente la formola (Annali di Matem., tomo 10, pag. 20) su cui si fonda la dimostrazione del teorema. La formola

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \theta y_1 & \theta y_2 & \cdots & \theta y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{n-1} y_1 & \theta^{n-1} y_2 & \cdots & \theta^{n-1} y_n \end{vmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & \cdots & \Delta y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta^{n-1} y_1 & \Delta^{n-1} y_2 & \cdots & \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix};$$

teorema ch' egli non avrebbe dovuto dimenticare; non foss' altro perchè contiene come caso particolare quello sul determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ D y_1 & D y_2 & \cdots & D y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D^{n-1} y_1 & D^{n-1} y_2 & \cdots & D^{n-1} y_n \end{vmatrix},$$

considerato in special modo dal sig. FROBENIUS, i cui lavori il sig. STICKELBERGER non ignora, nè smania di screditare.

Perdoni, sig. Direttore, la noja di questa lettera, ed aggradisca l'attestazione del rispettoso affetto del

Suo devotissimo

F. CASORATI.

---

esatta è:

$$(-1)^{n-1} \theta y_1 \,.\, \theta^2 y_1 \ldots \theta^{n-2} y_1 \Theta =$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 \,.\, \theta y_1 - y_1 \,.\, \theta y_2 & \cdots & y_n \,.\, \theta y_1 - y_1 \,.\, \theta y_n \\ \theta y_2 \,.\, \theta^2 y_1 - \theta y_1 \,.\, \theta^2 y_2 & \cdots & \theta y_n \,.\, \theta^2 y_1 - \theta y_1 \,.\, \theta^2 y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{n-2} y_2 \,.\, \theta^{n-1} y_1 - \theta^{n-2} y_1 \,.\, \theta^{n-1} y_2 & \cdots & \theta^{n-2} y_n \,.\, \theta^{n-1} y_1 - \theta^{n-2} y_1 \,.\, \theta^{n-1} y_n \end{vmatrix},$$

di cui il secondo membro può anche scriversi come segue

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ \theta y_2 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ \theta y_3 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} y_n & y_1 \\ \theta y_n & \theta y_1 \end{vmatrix} \\ \theta \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ \theta y_2 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \theta \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ \theta y_3 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \cdots & \theta \begin{vmatrix} y_n & y_1 \\ \theta y_n & \theta y_1 \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta^{n-1} \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ \theta y_2 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \theta^{n-1} \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ \theta y_3 & \theta y_1 \end{vmatrix} & \cdots & \theta^{n-1} \begin{vmatrix} y_n & y_1 \\ \theta y_n & \theta y_1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Correggendo lo sbaglio, la dimostrazione riesce ancor più breve.

MICHELE CHASLES.

(CENNO NECROLOGICO.)

Il 18 dicembre dello scorso anno spegnevasi in Parigi una vita tutta consacrata al lavoro ed alla beneficenza. MICHELE CHASLES, una delle individualità matematiche più spiccate del nostro secolo, moriva in quel giorno all'età di ottantasette anni. L'Accademia delle Scienze, radunata due giorni dopo, sospendeva la seduta in segno di lutto, ed il Segretario perpetuo sig. BERTRAND, in nome di essa, il sig. BOUQUET in nome della Facoltà delle Scienze, il sig. LAUSSEDAT per la Scuola Politecnica, il sig. DUMAS in nome della Società degli Amici delle Scienze, infine il sig. ROLLAND per la Società degli antichi allievi della Scuola Politecnica, pronunciavano discorsi sulla tomba dell'illustre geometra, nei quali l'ammirazione per lo scienziato è pari a quella a lui dovuta per le sue eminenti qualità morali.

MICHELE CHASLES nacque a Epernon (Dipartimento di Eure-et-Loire) il 15 novembre 1793. Compiuti gli studî preliminari nel Liceo Imperiale, ed ammesso nell'anno 1812 alla Scuola Politecnica, prese parte gloriosa alla difesa di Parigi nel 1814; classificato dapprima per l'arma del genio, diede poco tempo dopo le sue dimissioni, e rientrò nella Scuola nell'anno 1815 in qualità d'allievo. Ne escì di nuovo circa un anno dopo, e rinunziando volontariamente pel momento a qualunque carriera pubblica, ritiravasi a Chartres per dedicarsi completamente ai suoi prediletti studî. Il fatto di quella prima dimissione rivela la grande bontà d'animo del giovane uffiziale, non mai smentita dall'eminente geometra; perciò ci piace narrarlo qui colle stesse parole del sig. BERTRAND, tanto più che queste ricordano con lode il nome di uno scienziato italiano, che nei pochi suoi scritti matematici giovanili, lasciava una prova non dubbia di ingegno fecondo ed originale.

« Lorsqu'en 1814 M.r Chasles quitta l'École Polytechnique, brusquement » licencié, così si esprime il sig. Bertrand, sa première préoccupation fut » pour ses camarades; plus d'un, dans son embarras, trouva près de lui plus » que des bons conseils. Rappelé à Chartres par sa famille, il y offrit l'hospi- » talité à son jeune et brillant condisciple du Lycée Impérial, Gäetan Giorgini, » qui, entrâiné par lui vers la Géométrie et guidé dans ses premiers pas, avait » assez bien profité de ses leçons et fait assez de progrès pour lui enlever le prix » d'honneur au Concours général et le premier rang à l'École Polytechnique. »

» Les élèves furent admis à subir leurs examens. M.r Chasles, classé dans » le Génie, s'apprêtait à partir pour Chartres; il voulait embrasser sa mère » avant de se rendre à Metz et lui montrer son uniforme d'officier, quand il » reçut la visite du père d'un de ses camarades; — Mon fils, lui dit-il, est le » premier des élèves qui n'ont pas obtenu de place; vous avez hésité, je le sais, » à accepter l'épaulette; votre refus aurait assuré à votre camarade une car- » rière qui lui plait et pour laquelle j'ai fait les derniers sacrifices; il m'est » impossible de les continuer pur lui en préparer une autre. — M.r Chasles » ne repondit rien; il partit pour Chartres. En arrivant, sa résolution était » prise: il annonça à sa mère qu'il resterait près d'elle. »

I primi lavori di Chasles rimontano all'epoca nella quale egli trovavasi ancora nella Scuola Politecnica e furono pubblicati in quella *Correspondence sur l'École Polytechnique* che porta il nome del suo fondatore Hachette, così ricca di importanti memorie. Già questi primi scritti accennano all'indirizzo dei suoi studî, consistendo in molta parte in dimostrazioni puramente geometriche delle belle proprietà delle superficie di secondo ordine, che Monge ed altri andavano allora scoprendo col mezzo della geometria analitica. Quanti progressi egli avesse già fatti in quella via lo dimostra l'*Aperçu historique sur l'origine et les développements des méthodes en géométrie,* col quale egli rispondeva ad un tema posto a concorso nel 1829 dall'Accademia di Bruxelles. Quest'Opera, frutto di un lungo, paziente lavoro, e di una mente matura, rivelava un nuovo aspetto dell'ingegno di Chasles, quello della ricerca storica. Da questa pubblicazione la riputazione scientifica di Chasles acquistava così solide basi, che ogni scritto suo, ciascuna comunicazione sua a periodici scientifici o ad Accademie era ricercata colla maggior premura, e con non minor premura studiata in Francia ed all'estero.

Non è certamente in questa breve comunicazione che noi possiamo rammentare le numerose memorie, sparse in molti giornali scientifici francesi o stranieri, quali il *Journal de l'École Polytechnique,* gli *Annales de Mathématiques* *de Gergonne,* la *Corréspondence mathématique et physique de Quetelet* ed altri. Ma, pur limitandoci a pochi ricordi, dobbiamo porre in prima linea « son classique, synthétique et dogmatique *Traité de Géométrie supérieure,* écrit à la manière des anciens (*) » di cui la prima edizione comparve nel 1852, e dal quale fece seguito nel 1865 il *Traité des Sections coniques;* e nel frattempo *Les trois livres des Aphorismes d'Euclide, rétablis pour la première fois, d'après la notice et les lemmes de Pappus,* pubblicati nel 1860.

Nominato nel 1841 professore di Macchine e di Geodesia alla Scuola Politecnica, si dimetteva da quel posto nel 1850 in seguito alle modificazioni *profondes et très-regrettables,* come egli stesso le dichiara, apportate all'ordinamento di quella Scuola. Però, egli non si distaccava da quella istituzione, e la morte lo colse mentre era occupato a scrivere una storia della medesima. Il Corso di Geometria superiore, creato per lui nel 1864 alla *Sorbonne,* era sempre seguito da una eletta schiera di giovani cultori, i quali, dalla chiarezza della sua parola e dalla sua grande erudizione, ritraevano il più utile ammaestramento. Nè il crescere degli anni diminuiva in lui la potenza dell'intelletto, ed è compiuto il settantesimo anno che egli immaginava la teoria ed il metodo delle caratteristiche, così fecondi per lui e per altri Geometri di importanti risultati; e che la Società Reale di Londra premiava colla più alta delle sue distinzioni, la medaglia di Copley.

Non v'è cultore di scienze matematiche in Europa che, visitando Parigi, non abbia avuto occasione di esperimentare l'ospitalità e la grande cortesia di Chasles. Egli era un gentiluomo nel vero senso della parola, e, congiungendo alla squisitezza della forma la benevolenza del giudizio, rendeva le sue riunioni periodiche, in quel suo appartamento del *Passage Sainte-Marie, Rue du Bac,* ove più volte mi accolse con tanta bontà, assai apprezzate e desiderate. Egli lascia, e giustamente, una larga eredità di affetti; ma lascia altresì un buon numero di geometri valorosi, che sapranno continuare l'opera sua.

Milano, 16 gennajo 1881.

F. Brioschi.

(*) Così definisce il Poncelet questo classico lavoro in quelle *Notes et Additions* al 1° volume delle *Applications d'Analyse et de Géométrie,* pubblicate nel 1862, nelle quali certamente è fatta più larga parte alla critica che alla lode (pag. 484).

La relazione di Göpel per funzioni iperellittiche d'ordine qualunque.

(*Nota di* F. Brioschi, *in Milano.*)

1.° Göpel nella sua oramai classica Memoria: *Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis*, pubblicata dopo la sua morte nel vol. 35 del Giornale di Crelle (pag. 277) ha dimostrato sussistere fra quattro funzioni Θ a due argomenti, scelte opportunamente, una relazione biquadratica, formata colle quarte potenze di quelle funzioni, coi prodotti a due a due dei loro quadrati, e col prodotto delle funzioni stesse. Questa memorabile relazione fu recentemente ricordata dal sig. Cayley nella sua Memoria: *On the double Θ-functions in connexion with a 16-nodal quartic surface* e dal compianto Borchardt nella *Ueber die Darstellung der Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten durch die Göpelsche biquadratische Relation zwischen vier Theta-functionen mit zwei Variabeln,* ambedue pubblicate nello stesso fascicolo del Giornale già diretto da quest'ultimo (vol. 83, fasc. 3°).

Noi torneremo più avanti sull'argomento speciale di questi più recenti lavori, sul nesso cioè esistente fra la relazione di Göpel e la superficie di quarto ordine con sedici punti singolari considerata la prima volta da Kummer nella sua Memoria: *Ueber die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten* (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1864); ma vogliamo dimostrare dapprima che relazioni affatto analoghe a quella di Göpel sussistono fra $2n$ funzioni Θ ad n argomenti opportunamente scelte. Posto:

$$R(x) = A(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{2n+1})$$

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

e:

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n),$$
$$Q(x) = A\,(x - a_{n+1})(x - a_{n+2})\cdots(x - a_{2n+1})$$

indicando con l_m una quantità eguale a $P(a_m)$ se $m > n$ ed eguale a $-Q(a_m)$ quando sia $m \leqq n$, è noto per le ricerche del sig. Weierstrass (*) che le $2n+1$ funzioni ad indice semplice:

$$p_m = \sqrt{\frac{\varphi(a_m)}{l_m}}$$

e le $n(2n+1)$ funzioni ad indice doppio:

$$p_{r\,s} = p_{s\,r} = p_r p_s \sum_1^n {}_i \frac{\sqrt{R(x_i)}}{(x_i - a_r)(x_i - a_s)\varphi'(x_i)}$$

sono eguali al rapporto di due funzioni Θ ad n argomenti, in ciascuno dei quali rapporti il denominatore è comune (**).

Sieno $r_1, r_2, \ldots r_n$, n qualsivogliano fra i numeri $1, 2, 3, \ldots 2n+1$, ma differenti fra loro, e pongasi:

$$S(x) = (x - a_{r_1})(x - a_{r_2})\cdots(x - a_{r_n});$$

se con μ, ν si indicano altri due numeri di quella serie essi pure differenti da $r_1, r_2, \ldots r_n$, si hanno fra quelle funzioni p le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
A p^2_\mu &= \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} - \sum_{r_1}^{r_n} {}_r \frac{l_r p^2_{r,\mu}}{S'(a_r)} \\
\frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p^2_{\nu,\mu} &= \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu (a_\mu - a_\nu) S(a_\mu)} + \sum_{r_1}^{r_n} {}_r \frac{l_r p^2_{r,\mu}}{(a_\nu - a_r) S'(a_r)} \\
A p_\mu p_\nu &= -\sum_{r_1}^{r_n} {}_r \frac{l_r p_{r.\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

delle quali le prime due trovansi nella succitata Memoria del sig. Weierstrass (pag. 319) e la terza fu da me data nel 1° volume di questi Annali (Anno 1858, pag. 29).

Da queste tre relazioni quadratiche si deducono le biquadratiche omogenee analoghe a quella di Göpel nel modo seguente. Permutando dapprima nella

(*) *Zur Theorie der Abel'schen Functionen.* Giornale di Crelle, vol.i 47, 52.

(**) Formando nello stesso modo funzioni p a tre, a quattro... ad n indici si ha che il numero totale di esse è $4^n - 1$.

seconda di esse i numeri μ, ν si ottiene l'altra:

$$\frac{l_\mu}{S(a_\mu)} p^2_{\mu,\nu} = \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu(a_\nu - a_\mu)S(a_\nu)} + \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p^2_{r,\nu}}{(a_\mu - a_r)S'(a_r)}$$

ma $p_{\mu,\nu} = p_{\nu,\mu}$ quindi:

$$Mp^2_{\mu,\nu} = \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p^2_{r,\mu}}{(a_\nu - a_r)S'(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p^2_{r,\nu}}{(a_\mu - a_r)S'(a_r)}$$

posto:

$$M = \frac{R'(a_\nu)}{S^2(a_\nu)} + \frac{R'(a_\mu)}{S^2(a_\mu)}.$$

In secondo luogo dalla prima e dalla seconda di quelle relazioni si deduce facilmente la:

$$Ap^2_\mu = \frac{(a_\mu - a_\nu)l_\nu}{S(a_\nu)} p^2_{\mu,\nu} - \sum_{r_1}^{r_n} \frac{(a_\mu - a_r)l_r}{(a_\nu - a_r)S'(a_r)} p^2_{r,\mu}$$

e sostituendo in quest'ultima il valore di $p^2_{\mu,\nu}$ dato dalla precedente si giunge ad una delle relazioni richieste, cioè alla:

$$\left.\begin{aligned} AMp^2_\mu = \frac{(a_\mu - a_\nu)l_\nu}{S(a_\nu)} \left[\frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p^2_{r,\mu}}{(a_\nu - a_r)S'(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p^2_{r,\nu}}{(a_\mu - a_r)S'(a_r)} \right] - \\ - M \sum_{r_1}^{r_n} \frac{(a_\mu - a_r)l_r}{(a_\nu - a_r)S'(a_r)} p^2_{r,\mu} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

per la quale il valore di p^2_μ è espresso in funzione dei quadrati delle $2n$ funzioni a doppio indice $p_{r,\mu}$, $p_{r,\nu}$. Permutando nuovamente in quest'ultima i numeri μ, ν, siccome M rimane invariata, si avrà analogamente:

$$\left.\begin{aligned} AMp^2_\nu = \frac{(a_\nu - a_\mu)l_\mu}{S(a_\mu)} \left[\frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p^2_{r,\nu}}{(a_\mu - a_r)S'(a_r)} + \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p^2_{r,\mu}}{(a_\nu - a_r)S'(a_r)} \right] - \\ - M \sum_{r_1}^{r_n} \frac{(a_\nu - a_r)l_r}{(a_\mu - a_r)S'(a_r)} p^2_{r,\nu}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ma dalla terza delle relazioni (1) si ha:

$$AMp_\mu p_\nu = -M \sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)} \quad (4)$$

vale a dire il prodotto $p_\mu p_\nu$ espresso pei prodotti a due a due delle stesse $2n$ funzioni a doppio indice $p_{r,\mu}$, $p_{r,\nu}$; quindi moltiplicando le prime due membro per membro e sottraendo dal prodotto il quadrato di ques'ultima, si ottiene il tipo delle relazioni biquadratiche analoghe a quella di Göpel per le funzioni iperellittiche d'ordine superiore, cioè:

$$0=-\frac{(a_\mu-a_\nu)^2 l_\mu l_\nu}{S(a_\mu)S(a_\nu)}H^2+(a_\mu-a_\nu)MHG+M^2F$$

posto:

$$H=\frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)}\sum_{r_1}^{r_n}{}_r\frac{l_r p^2_{r,\mu}}{(a_\nu-a_r)S'(a_r)}+\frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)}\sum_{r_1}^{r_n}{}_r\frac{l_r p^2_{r,\nu}}{(a_\mu-a_r)S'(a_r)}$$

$$G=\frac{l_\mu}{S(a_\mu)}\sum\frac{(a_\mu-a_r)l_r}{(a_\nu-a_r)S'(a_r)}p^2_{r,\mu}-\frac{l_\nu}{S(a_\nu)}\sum_{r_1}^{r_n}{}_r\frac{(a_\nu-a_r)l_r}{(a_\mu-a_r)S'(a_r)}p^2_{r,\nu}$$

$$F=\sum_{r_1}^{r_n}{}_r\frac{(a_\mu-a_r)l_r}{(a_\nu-a_r)S'(a_r)}p^2_{r,\mu}\sum_{r_1}^{r_n}{}_r\frac{(a_\nu-a_r)l_r}{(a_\mu-a_r)S'(a_r)}p^2_{r,\nu}-\left[\sum_{r_1}^{r_n}{}_r\frac{l_r p_{r,\mu}p_{r,\nu}}{S'(a_r)}\right]^2.$$

La relazione del quarto grado così trovata sarà evidentemente omogenea, e conterrà le quarte potenze delle $2n$ funzioni $p_{r,\mu}$, $p_{r,\nu}$; i prodotti a due a due dei quadrati di quelle funzioni, ed i prodotti quattro a quattro della forma $p_{r_1,\mu}p_{r_1,\nu}p_{r_2,\mu}p_{r_2,\nu}$.

2.° Applichiamo ora le formole generali superiori al caso considerato da Göpel ponendo $n=2$. Supporremo per maggiore semplificazione sieno $r_1=1$, $r_2=2$; $\mu=3$, $\nu=4$, e posto $a_r-a_s=(rs)$ introdurremo le quattro denominazioni:

$$\alpha=(13)(23)(45) \qquad \gamma=(14)(24)(35)$$
$$\beta=(13)(14)(25) \qquad \delta=(23)(24)(15)$$

e la:

$$N=(13)(45)+(24)(15)=(13)(25)+(24)(35)=(14)(25)+(23)(45)=$$
$$=(14)(35)+(23)(15)$$

e quindi:

$$N(13)=\alpha+\beta \qquad N(14)=\beta+\gamma$$
$$N(24)=\gamma+\delta \qquad N(23)=\alpha+\delta$$
$$\beta\delta-\alpha\gamma=(13)(14)(23)(24)N.$$

Con queste denominazioni le relazioni (2) (3) (4) diventano nel caso qui considerato le seguenti:

$$(12)Np_3^2\ =(13)(15)\beta p_{13}^2+(14)(15)\gamma p_{14}^2-(23)(25)\delta p_{23}^2-(24)(25)\gamma p_{24}^2$$
$$(12)Np_4^2\ =(13)(15)\alpha p_{13}^2+(14)(15)\beta p_{14}^2-(23)(25)\alpha p_{23}^2-(24)(25)\delta p_{24}^2$$
$$(12)Np_3p_4=N[(13)(14)(15)p_{13}p_{14}-(23)(24)(25)p_{23}p_{24}]$$

e si otterrà così la relazione biquadratica di Göpel sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (13)^2(15)^2\alpha\beta p_{13}^4 + (14)^2(15)^2\beta\gamma p_{14}^4 + (23)^2(25)^2\alpha\delta p_{23}^4 + (24)^2(25)^2\gamma\delta p_{24}^4 - \\ &- (\alpha+\gamma)[(13)(14)(15)^2\beta p_{13}^2 p_{14}^2 + (23)(24)(25)^2\delta p_{23}^2 p_{24}^2] - \\ &- (\beta+\delta)(15)(25)[(13)(23)\alpha p_{13}^2 p_{23}^2 + (14)(24)\gamma p_{14}^2 p_{24}^2] - \\ &- (\alpha\gamma+\beta\delta)(15)(25)[(13)(24)p_{13}^2 p_{24}^2 + (14)(23)p_{14}^2 p_{23}^2] + 2\beta\delta N^2 p_{13}p_{14}p_{23}p_{24}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Questa relazione semplificasi assai ponendo:

$$a = \frac{(15)+(25)}{(21)}, \qquad b = \frac{(35)+(45)}{(43)}, \qquad c = \frac{(13)(24)+(14)(23)}{(12)(43)}$$

dalle quali si deducono dapprima le:

$$a+1 = 2\frac{(25)}{(21)}, \qquad b+1 = 2\frac{(45)}{(43)}, \qquad c+1 = 2\frac{(14)(23)}{(12)(43)}$$

$$a-1 = 2\frac{(15)}{(21)}, \qquad b-1 = 2\frac{(35)}{(43)}, \qquad c-1 = 2\frac{(13)(24)}{(12)(43)}$$

poi le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &= \rho\frac{\alpha\beta}{(13)^2} \\ (a+1)(b-1)(c-1) &= \rho\frac{\beta\gamma}{(14)^2} \\ (a-1)(b+1)(c-1) &= \rho\frac{\alpha\delta}{(23)^2} \\ (a-1)(b-1)(c+1) &= \rho\frac{\gamma\delta}{(24)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Per gli stessi valori delle a, b, c si ottengono inoltre le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} 2(a-bc)(a+1) &= -\rho\frac{(\alpha+\gamma)\beta}{(13)(14)}, & 2(a-bc)(a-1) &= -\rho\frac{(\alpha+\gamma)\delta}{(23)(24)} \\ 2(b-ca)(b+1) &= -\rho\frac{(\beta+\delta)\alpha}{(13)(23)}, & 2(b-ca)(b-1) &= -\rho\frac{(\beta+\delta)\gamma}{(14)(24)} \\ 2(c-ab)(c+1) &= -\rho\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{(13)(24)}, & 2(c-ab)(c-1) &= -\rho\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{(14)(23)}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

infine:

$$K = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1 = -\frac{1}{2}\rho N^2$$

essendo in tutte $\rho = -\dfrac{8}{(12)^2(34)^2}$.

Se ora si moltiplica per ρ la equazione biquadratica superiore (5), e si pone:

$$w=(13)\sqrt{(15)}p_{13};\qquad x=(14)\sqrt{(15)}p_{14};\qquad y=(23)\sqrt{(25)}p_{23};\qquad z=(24)\sqrt{(25)}p_{24}$$

la equazione stessa prenderà la forma:

$$\begin{aligned}0=&(a+1)(b+1)(c+1)w^4+(a+1)(b-1)(c-1)x^4+(a-1)(b+1)(c-1)y^4+\\&+(a-1)(b-1)(c+1)z^4+\\&+2(a-bc)[(a+1)w^2x^2+(a-1)y^2z^2]+2(b-ca)[(b+1)w^2y^2+(b-1)z^2x^2]+\\&+2(c-ab)[(c+1)w^2z^2+(c-1)x^2y^2]-4Kwxyz.\end{aligned}$$

La relazione superiore si può ancora semplificare facendo uso di una trasformazione già indicata da Borchardt nella sua Memoria sopra citata. Ponendo infatti:

$$\begin{aligned}s&=w+x+y+z\\p&=w+x-y-z\\q&=w-x+y-z\\r&=w-x-y+z\end{aligned}$$

la relazione stessa si trasforma nella:

$$0=\varphi^2-16Kspqr$$

essendo:

$$\varphi=s^2+p^2+q^2+r^2+2a(sp+qr)+2b(sq+rp)+2c(sr+pq).$$

Quest'ultima forma della relazione di Göpel acquista importanza dal fatto che essa coincide colla equazione della superficie di quarto ordine con sedici punti nodali riferita ad un dato sistema di quattro suoi piani tangenziali singolari, superficie denominata di Kummer in onore dell'illustre geometra di Berlino che pel primo fece conoscere le sue proprietà.

Ora le s, p, q, r essendo quattro funzioni lineari delle coordinate di quella superficie, si avrà che le coordinate della superficie di Kummer si possono esprimere in funzione lineare di quattro funzioni iperellittiche di secondo ordine ad indice doppio p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}.

Per determinare i valori delle coordinate dei sedici punti singolari si osservi:

1° Che indicando con w_0, x_0, y_0, z_0 le espressioni:

$$\begin{aligned}w_0&=\sqrt{(a-1)(b-1)(c-1)}&\qquad y_0&=\sqrt{(a+1)(b-1)(c+1)}\\x_0&=\sqrt{(a-1)(b+1)(c+1)}&\qquad z_0&=\sqrt{(a+1)(b+1)(c-1)}\end{aligned}$$

e con Φ il secondo membro dell'equazione superiore, si hanno le:

$$\frac{d\Phi}{dw}=0 \qquad \frac{d\Phi}{dx}=0 \qquad \frac{d\Phi}{dy}=0 \qquad \frac{d\Phi}{dz}=0$$

per:

$$w=w_0 \qquad x=x_0 \qquad y=y_0 \qquad z=z_0$$

cioè il punto di coordinate w_0, x_0, y_0, z_0 è un punto nodale della superficie.

2° Che permutando nella equazione superiore le w, x, y, z nelle

$$\begin{array}{cccc}
w & x & y & z \\
x\left(\dfrac{w_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & w\left(\dfrac{x_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & z\left(\dfrac{y_0}{z_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & y\left(\dfrac{z_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{4}} \\
y\left(\dfrac{w_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & z\left(\dfrac{x_0}{z_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & w\left(\dfrac{y_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & x\left(\dfrac{z_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}} \\
z\left(\dfrac{w_0}{z_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & y\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & x\left(\dfrac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{4}}, & w\left(\dfrac{z_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}}
\end{array}$$

la equazione stessa rimane inalterata. Come pure rimane inalterata se una coppia qualsivoglia di quelle coordinate si assume con segno negativo.

Si hanno così i valori delle coordinate di quattro punti singolari nelle espressioni:

$$\begin{array}{cccc}
w_0, & x_0, & y_0, & z_0 \\
(x_0^3 w_0)^{\frac{1}{4}}, & (w_0^3 x_0)^{\frac{1}{4}}, & (z_0^3 y_0)^{\frac{1}{4}}, & (y_0^3 z_0)^{\frac{1}{4}} \\
(y_0^3 w_0)^{\frac{1}{4}}, & (z_0^3 x_0)^{\frac{1}{4}}, & (w_0^3 y_0)^{\frac{1}{4}}, & (x_0^3 z_0)^{\frac{1}{4}} \\
(z_0^3 w_0)^{\frac{1}{4}}, & (y_0^3 z_0)^{\frac{1}{4}}, & (x_0^3 y_0)^{\frac{1}{4}}, & (w_0^3 z_0)^{\frac{1}{4}}
\end{array}$$

e quelli delle coordinate degli altri dodici punti saranno w_0, x_0, $-y_0$, $-z_0$; w_0, $-x_0$, y_0, $-z_0$; w_0, $-x_0$, $-y_0$, z_0 e così di seguito.

3.° La relazione (5) si può anche subito esprimere sotto la forma assegnatale da Göpel ponendo:

$$\sqrt{(13)(15)}\sqrt[4]{\alpha\beta}\cdot p_{13}=W \qquad \sqrt{(23)(25)}\sqrt[4]{\alpha\delta}\cdot p_{23}=Y$$

$$\sqrt{(14)(15)}\sqrt[4]{\beta\gamma}\cdot p_{14}=X \qquad \sqrt{(24)(25)}\sqrt[4]{\gamma\delta}\cdot p_{24}=Z$$

giacchè si ha:

$$0 = W^4 + X^4 + Y^4 + Z^4 + 2C(W^2X^2 + Y^2Z^2) - 2F(W^2Y^2 + Z^2X^2) - \\ - 2E(W^2Z^2 + X^2Y^2) - 4DWXYZ$$

essendo:

$$C = -\frac{1}{2}\frac{\alpha+\gamma}{\sqrt{\alpha\gamma}}, \qquad F = \frac{1}{2}\frac{\beta+\delta}{\sqrt{\beta\delta}}, \qquad E = \frac{1}{2}\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}}$$

$$D = -\frac{1}{2}N^2\frac{\sqrt{(13)(14)(23)(24)}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}}$$

dalle quali per le relazioni (6) (7) si ottengono anche le seguenti:

$$C = -\frac{bc-a}{\sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}}, \qquad F = \frac{ca-b}{\sqrt{(c^2-1)(a^2-1)}}, \qquad E = \frac{ab-c}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}$$

$$D = \frac{K}{\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}}$$

e quindi:

$$D^2 = E^2 + F^2 + C^2 - 2EFC - 1$$

come si ha nella Memoria di Göpel (pag. 304). Queste relazioni sono importanti mentre da esse si deducono pei valori dei parametri a, b, c della superficie del quarto grado le seguenti espressioni:

$$a = \frac{C-FE}{\sqrt{(F^2-1)(E^2-1)}}, \qquad b = \frac{F-EC}{\sqrt{(E^2-1)(C^2-1)}}, \qquad c = \frac{E-CF}{\sqrt{(C^2-1)(F^2-1)}}$$

e da queste:

$$K = \frac{D^3}{(E^2-1)(F^2-1)(C^2-1)}.$$

4.° Si è dimostrato al § 1° come dalle relazioni (1) si possano dedurre le (2) (3), le quali presentano il tipo di relazioni quadratiche omogenee fra $2n+1$ funzioni p. Ora dalle stesse equazioni (1) e da altre tre, le quali completano le relazioni di quella specie, si può dedurre un numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ di relazioni fra $(n+1)^2$ funzioni p che per la loro forma si prestano a varie applicazioni. Notiamo dapprima come la seconda delle relazioni (1) si possa esprimere nel modo seguente:

$$\frac{l_\mu S(a_\mu)}{R'(a_\mu)}(\mu\nu)\left[\sum_{r_1}^{r_n} \frac{l_r p^2_{r\mu}}{(r\nu)S'(a_r)} + \frac{l_\nu}{S(a_\nu)}p^2_{\nu\mu}\right] = 1$$

ed aggiungiamo ad essa le altre tre:

$$\sum_{r_1}^{r_n} r \frac{l_r p^2_r}{(r\nu) S'(a_r)} + \frac{l_\nu p^2_\nu}{S(a_\nu)} = 1$$

$$\sum_{r_1}^{r_n} r \frac{l_r p_r p_{r,\mu}}{(r\nu) S'(a_r)} + \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_\nu p_{\nu,\mu} = 0$$

$$\sum_{r_1}^{r_n} r \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\lambda}}{(r\nu) S'(a_r)} + \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_{\nu,\mu} p_{\nu,\lambda} = 0$$

nelle quali $(r\nu) = a_r - a_\nu$ e le μ, ν, λ sono numeri della serie 1, 2, 3,... $(2n+1)$ differenti fra loro e differenti da r_1, r_2,... r_n.

Pongasi:

$$\alpha_r = \sqrt{\frac{l_r}{(r\nu) S'(a_r)}} \cdot p_r; \qquad \alpha_\nu = \sqrt{\frac{l_\nu}{S(a_\nu)}} \cdot p_\nu$$

$$\alpha_{r\mu} = \sqrt{\left[\frac{(\mu\nu)}{(r\nu)} \frac{l_r l_\mu S(a_\mu)}{R'(a_\mu) S'(a_r)}\right]} p_{r\mu}; \qquad \alpha_{\nu\mu} = \sqrt{\left[(\mu\nu) \frac{l_\mu l_\nu S(a_\mu)}{R'(a_\mu) S(a_\nu)}\right]} p_{\nu\mu}$$

le prime due relazioni superiori potranno scriversi come segue:

$$\sum_{r_1}^{r_n} r \alpha^2_r + \alpha^2_\nu = 1, \qquad \sum_{r_1}^{r_n} r \alpha^2_{r\mu} + \alpha^2_{\nu\mu} = 1 \tag{8}$$

ed osservando essere:

$$\alpha_r \alpha_{r\mu} = H \frac{l_r}{(r\nu) S'(a_r)} p_r p_{r\mu}; \qquad \alpha_\nu \alpha_{\nu\mu} = H \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_\nu p_{\nu\mu}$$

$$\alpha_{r\mu} \alpha_{r\lambda} = K \frac{l_r}{(r\nu) S'(a_r)} p_{r\mu} p_{r\lambda}; \qquad \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} = K \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} p_{\nu\mu} p_{\nu\lambda}$$

nelle quali

$$H = \sqrt{\left[(\mu\nu) \frac{l_\mu S(a_\mu)}{R'(a_\mu)}\right]}, \qquad K = \sqrt{\left[(\mu\nu)(\lambda\nu) \frac{l_\mu l_\lambda S(a_\mu) S(a_\lambda)}{R'(a_\mu) R'(a_\lambda)}\right]}$$

le altre due prenderanno la forma:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r_1}^{r_n} r \alpha_r \alpha_{r\mu} + \alpha_\nu \alpha_{\nu\mu} &= 0 \\ \sum_{r_1}^{r_n} r \alpha_{r\mu} \alpha_{r\lambda} + \alpha_{\nu\mu} \alpha_{\nu\lambda} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Se ora si suppone che essendo ν un numero della serie 1, 2, 3,... $(2n+1)$ differente da r_1, r_2,... r_n, i numeri μ, λ differenti fra loro possano assumere i valori degli altri n numeri di quella serie, si otterranno $n+1$ equazioni della forma (8) ed $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni della forma (9), ossia in tutto $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ relazioni fra $(n+1)^2$ funzioni p.

Sia $n=2$ e consideriamo le nove funzioni seguenti:

$$\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_4 \\ p_{13} & p_{23} & p_{43} \\ p_{15} & p_{25} & p_{45} \end{array}$$

posto:

$$\alpha_1 = \sqrt{A\,\frac{(13)(15)}{(21)}}\cdot p_1; \qquad \beta_1 = \sqrt{A\,\frac{(23)(25)}{(12)}}\cdot p_2; \qquad \gamma_1 = p_4$$

$$\alpha_2 = (31)\sqrt{\frac{(23)(15)}{(21)(35)}}\cdot p_{13}; \qquad \beta_2 = (23)\sqrt{\frac{(13)(25)}{(12)(35)}}\cdot p_{23}; \qquad \gamma_2 = \sqrt{\frac{(13)(23)}{A(35)}}\cdot p_{43}$$

$$\alpha_3 = (15)\sqrt{\frac{(13)(25)}{(12)(35)}}\cdot p_{15}; \qquad \beta_3 = (52)\sqrt{\frac{(23)(15)}{(21)(35)}}\cdot p_{25}; \qquad \gamma_3 = \sqrt{\frac{(15)(25)}{A(53)}}\cdot p_{45}$$

dalle (8) (9) si ottengono le sei relazioni:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1 & \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0 \\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1 & \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0 \\ \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1 & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0 \end{array}$$

per le quali:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1 \qquad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0$$

e le analoghe che corrispondono alle altre due relazioni (1), e le:

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2$$

e simili, ossia le:

$$\left.\begin{array}{l}
p_1 = \frac{(23)(25)}{A(53)}(p_{23}p_{45}-p_{25}p_{43}), \qquad p_2 = \frac{(13)(15)}{A(35)}(p_{43}p_{15}-p_{45}p_{13}), \\
\qquad p_4 = \frac{(13)(23)(15)(25)}{(12)(35)}(p_{13}p_{25}-p_{15}p_{23}) \\
p_{13} = \frac{(25)}{(31)}(p_4p_{25}-p_2p_{45}), \qquad p_{23} = \frac{(15)}{(23)}(p_1p_{45}-p_4p_{15}), \\
\qquad p_{43} = A\,\frac{(15)(25)}{(12)}(p_2p_{15}-p_1p_{25}) \\
p_{15} = \frac{(23)}{(15)}(p_2p_{43}-p_4p_{23}), \qquad p_{25} = \frac{(13)}{(53)}(p_4p_{13}-p_1p_{43}), \\
\qquad p_{45} = A\,\frac{(13)(23)}{(21)}(p_1p_{23}-p_2p_{13})
\end{array}\right\} \quad (10)$$

per le quali:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ p_{13} & p_{23} & p_{43} \\ p_{15} & p_{25} & p_{45} \end{vmatrix} = \frac{(12)(35)}{(13)(23)(15)(25)}.$$

5.° È noto per le sopra indicate ricerche del sig. WEIERSTRASS che supponendo μ, ν due numeri differenti da r si hanno nel caso generale le equazioni differenziali:

$$\frac{d p_\mu}{d u_r} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} p_r p_{r\mu}; \qquad \frac{d p_{\mu\nu}}{d u_r} = \frac{Q(a_r)}{P'(a_r)} p_{r\mu} p_{r\nu}$$

$$\frac{d p_{\mu r}}{d u_r} = \frac{p_{\mu r}}{p_r} \frac{d p_r}{d u_r} - \frac{1}{(r\mu)} \frac{p_\mu}{p_r}.$$

Pel caso in cui $n=2$ le relazioni (10) danno tosto:

$$\frac{d p_1}{d u_1} = \frac{(13)(14)}{(12)(34)} [(24) p_4 p_{14} - (23) p_3 p_{13}]$$

$$\frac{d p_2}{d u_2} = \frac{(23)(24)}{(12)(34)} [(13) p_3 p_{23} - (14) p_4 p_{24}]$$

e le altre che si deducono da esse permutando i numeri 3, 4, 5.

Si ottengono così le seguenti equazioni differenziali:

$$p_3 p_{35} = (24)\left[p_{13} \frac{d p_{24}}{d u_1} - p_{24} \frac{d p_{13}}{d u_1}\right] = (14)\left[p_{23} \frac{d p_{14}}{d u_2} - p_{14} \frac{d p_{23}}{d u_2}\right]$$

$$p_4 p_{45} = (23)\left[p_{14} \frac{d p_{23}}{d u_1} - p_{23} \frac{d p_{14}}{d u_1}\right] = (13)\left[p_{24} \frac{d p_{13}}{d u_2} - p_{13} \frac{d p_{24}}{d u_2}\right]$$

dalle quali se si introducono le denominazioni del § 3° e si pone:

$$p = \frac{Z}{W}, \qquad q = \frac{Y}{X}, \qquad s = \frac{W}{X}$$

si hanno le:

$$\frac{dp}{du_1} = \frac{1}{(13)} \sqrt[4]{\frac{(25)(35)}{(15)(45)}} \cdot \frac{p_3 p_{35}}{p_{13}^2}, \qquad \frac{dp}{du_2} = -\frac{(24)}{(13)^2} \sqrt[4]{\frac{(25)(35)}{(15)(45)}} \cdot \frac{p_4 p_{45}}{p_{13}^2}$$

$$\frac{dq}{du_1} = \frac{1}{(14)} \sqrt[4]{\frac{(25)(45)}{(15)(35)}} \frac{p_4 p_{45}}{p_{14}^2}, \qquad \frac{dq}{du_2} = -\frac{(23)}{(14)^2} \sqrt[4]{\frac{(25)(45)}{(15)(35)}} \frac{p_3 p_{35}}{p_{14}^2}$$

e da queste:

$$\left.\begin{aligned}
s\frac{dp}{du_1}+\frac{1}{s}\frac{dq}{du_1}&=m\frac{\sqrt{(13)(14)}}{WX}\left[\sqrt{(13)(23)}p_3p_{35}+\sqrt{(14)(24)}p_4p_{45}\right]\\
s\frac{dp}{du_2}-\frac{1}{s}\frac{dq}{du_2}&=m\frac{\sqrt{(23)(24)}}{WX}\left[\sqrt{(13)(23)}p_3p_{35}-\sqrt{(14)(24)}p_4p_{45}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

essendo

$$m=\sqrt{(15)(25)}\cdot\sqrt[4]{(15)(25)(35)(45)}.$$

Ora i quadrati di p_{35}, p_{45}, come il loro prodotto, si possono esprimere in funzione delle p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24} nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
N(12)p_{35}^2&=A[(13)^2(14)(45)p_{13}^2+(14)^2(24)(15)p_{14}^2-(23)^2(24)(45)p_{23}^2-\\
&\qquad-(24)^2(14)(25)p_{24}^2]\\
N(12)p_{45}^2&=A[(13)^2(23)(15)p_{13}^2+(14)^2(13)(35)p_{14}^2-(23)^2(13)(25)p_{23}^2-\\
&\qquad-(24)^2(23)(35)p_{24}^2]\\
(12)p_{35}p_{45}&=A[(13)(14)p_{13}p_{14}-(23)(24)p_{23}p_{24}]
\end{aligned}$$

e siccome la stessa proprietà ha luogo, come si è visto al § 2° per p_3^2, p_4^2, p_3p_4; si giunge facilmente alle:

$$\frac{(12)m^2}{W^2X^2}\left[\sqrt{(13)(23)}p_3p_{35}+\sqrt{(14)(24)}p_4p_{45}\right]^2=A\varphi^2$$

$$\frac{(12)m^2}{W^2X^2}\left[\sqrt{(13)(23)}p_3p_{35}-\sqrt{(14)(24)}p_4p_{45}\right]^2=A\psi^2$$

essendo:

$$\sqrt{(E^2-1)(F^2-1)}\cdot\varphi^2=(CF-E+D)(1+p^2q^2)-(F^2-1)(p^2+q^2)+2(C-EF-DF)pq$$

$$\sqrt{(E^2-1)(F^2-1)}\cdot\psi^2=(CF-E-D)(1+p^2q^2)-(F^2-1)(p^2+q^2)-2(C-EF+DF)pq$$

nelle quali le C, E, F, D hanno gli stessi valori che al § 3°.

Dalle relazioni (11) si dedurranno così le seguenti:

$$\frac{s\,dp+\frac{1}{s}dq}{\varphi}=\sqrt{\frac{A(13)(14)}{(12)}}\cdot du_1;\qquad \frac{s\,dp-\frac{1}{s}dq}{\psi}=\sqrt{\frac{A(23)(24)}{(12)}}\cdot du_2$$

vale a dire le equazioni differenziali sotto la forma data ad esse da Göpel.

Marzo 1881.

Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale a una massa fluida eterogenea.

(*Memoria del prof.* Enrico Betti, *in Pisa.*)

La determinazione dei moti per i quali è conservata la figura ellissoidale di una massa fluida, soggetta alle sole forze di attrazione newtoniana tra i suoi elementi, è stata trattata, nel caso che il fluido sia omogeneo, da Dirichlet (*) e nella via aperta da questo eminente geometra hanno progredito Dedekind (**), Brioschi (***), Riemann (****) e Padova (*****). La ipotesi della omogeneità rende però inapplicabili alla teorica della figura dei pianeti i risultati ottenuti; per ciò io ho creduto utile di considerare invece il fluido eterogeneo, e colla densità variabile da uno ad un altro degli strati omotetici alla superficie della massa. Con questo non aumentano affatto le difficoltà della integrazione; tutte l'equazioni rimangono le stesse, soltanto un termine vi comparisce moltiplicato per un coefficiente numerico il valore del quale dipende dalla legge con cui varia la densità da strato a strato, e si riduce alla unità nel caso che questa sia costante.

Dirichlet ha trovato che nei moti i quali conservano alla massa fluida la figura ellissoidale le coordinate di un elemento del fluido si possono esprimere per funzioni lineari omogenee delle coordinate iniziali e che quindi la determinazione dei coefficienti e in conseguenza delle coordinate dell'elemento dipende da 8 equazioni differenziali ordinarie di 2° ordine, che si deducono

(*) Crelle, vol. 58, pag. 181.
(**) Crelle, vol. 58, pag. 217.
(***) Crelle, vol. 59, pag. 63.
(****) Abhandlungen der K. G. der Wissenschaften von Göttingen, B. 8.
(*****) Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa, vol. 1.

dall'equazioni fondamentali della Idrodinamica sotto la forma data loro da Lagrange. Di queste equazioni egli ha trovato 7 integrali primi soltanto; quindi per la soluzione generale rimanevano ancora da integrarsi 9 equazioni differenziali ordinarie di primo ordine. Riemann ha decomposto la sostituzione di Dirichlet e quindi il moto del fluido in due: uno dei quali è la rotazione intorno al centro, del sistema degli assi principali dell'ellissoide, l'altro è quello a cui è dovuta la deformazione della massa. Così ha reso più evidente la natura del moto, ed ha ottenuto, per la determinazione di questo e della figura, 2 equazioni differenziali di 2° ordine e 6 di 1°, con tre integrali primi. Quindi restava ancora da integrare un sistema di 7 equazioni differenziali di 1° ordine.

Con i metodi generali della Dinamica io, servendomi delle variabili di Riemann, ho costruito l'equazione a derivate parziali di 1° ordine, la quale con un suo integrale completo dà per mezzo di semplici derivazioni tutti gl'integrali dell'equazioni differenziali del moto. Per dedurre questa equazione da quella che esprime il principio di Hamilton bisogna in questo aggiungere alla energia cinetica aumentata del potenziale del sistema la derivata rispetto al tempo di una funzione delle variabili che deve conservarsi costante in conseguenza della invariabilità della massa, moltiplicata per un coefficiente indeterminato. Ora io trovo che la derivata rapporto al tempo di questo coefficiente è eguale alla differenza tra il valore della pressione alla superficie e il valor medio della pressione in tutta la massa moltiplicata per un coefficiente numerico il cui valore dipende dalla legge con cui la densità varia da strato a strato. Trovo quindi il valore della derivata del coefficiente indeterminato espresso per le quantità che determinano il moto e la figura, e in conseguenza ottengo il valor medio della pressione espresso per la pressione alla superficie e per queste quantità.

Dall'equazioni canoniche ho anche dedotto un'equazione analoga a quella trovata da Jacobi per un sistema di punti soggetto a forze che hanno una funzione potenziale funzione omogenea delle coordinate, dalla quale si possono dedurre analoghe conseguenze rispetto alla stabilità del movimento.

Della equazione a derivate parziali di 1° ordine con 9 variabili indipendenti trovo facilmente 5 integrali Jacobiani. Quindi per ottenere la soluzione generale resta soltanto a trovare un integrale completo di una equazione a derivate parziali di 1° ordine con 4 variabili indipendenti, cioè un solo integrale di un sistema di 6, un solo integrale di un sistema di 4, e un solo integrale di un sistema di 2 equazioni differenziali ordinarie di 1° ordine.

§ 1.

Sia data una massa fluida che abbia la figura di un ellissoide di semi-assi: A_1, A_2, A_3. La densità ρ non sia costante, ma varii soltanto da una all'altra dell'ellissoidi omotetiche alla superficie, quando per centro di omotetia si prenda il centro di figura della massa; cioè sia ρ funzione soltanto del rapporto di omotetia h. Potremo prendere

$$\rho = F'(1-h^2). \tag{1}$$

I moti del fluido siano tali che, sotto l'azione delle sole forze di attrazione newtoniana tra i suoi elementi, la massa conservi sempre la forma di un ellissoide. Dopo un tempo t qualunque siano: a_1, a_2, a_3 i semi-assi della superficie; x, y, z le coordinate, riferite agli assi principali dell'ellissoide iniziale, dell'elemento di fluido le cui coordinate iniziali riferite agli stessi assi erano x_0, y_0, z_0; e ξ, η, ζ siano le coordinate dello stesso elemento riferito agli assi principali nella posizione che essi avranno nel tempo t. Avremo evidentemente

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ed α, β, γ,... saranno i coseni degli angoli che gli assi principali dopo il tempo t fanno cogli assi principali nella posizione iniziale.

Se i moti sono tali che, gli elementi i quali nella posizione iniziale si trovavano sopra l'ellissoide omotetico alla superficie, di equazione

$$\frac{x_0^2}{A_1^2} + \frac{y_0^2}{A_2^2} + \frac{z_0^2}{A_3^2} = h^2,$$

dopo un tempo qualunque si trovino sopra l'ellissoide che ha lo stesso rapporto di omotetia colla superficie, avremo

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{a_2^2} + \frac{\zeta^2}{a_3^2} = h^2,$$

e quindi

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{a_2^2} + \frac{\zeta^2}{a_3^2} = \frac{x_0^2}{A_1^2} + \frac{y_0^2}{A_2^2} + \frac{z_0^2}{A_3^2};$$

onde

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\xi}{a_1} &= \alpha_1 \frac{x_0}{A_1} + \beta_1 \frac{y_0}{A_2} + \gamma_1 \frac{z_0}{A_3}, \\
\frac{\eta}{a_2} &= \alpha'_1 \frac{x_0}{A_1} + \beta'_1 \frac{y_0}{A_2} + \gamma'_1 \frac{z_0}{A_3}, \\
\frac{\zeta}{a_3} &= \alpha''_1 \frac{x_0}{A_1} + \beta''_1 \frac{y_0}{A_2} + \gamma''_1 \frac{z_0}{A_3},
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

e i coefficienti $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1 \ldots$ sono i coseni degli angoli che un sistema di assi A' fa cogli assi iniziali.

Calcoliamo la forza viva T del sistema per questa specie di moti.

Denotando con S lo spazio occupato dalla massa avremo

$$T = \frac{1}{2} \int_S \rho (x'^2 + y'^2 + z'^2) dS,$$

o anche

$$T = \frac{1}{2} \int_S \rho (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) dS, \tag{4}$$

quando si ponga

$$\left.\begin{aligned}
\xi' &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\
\eta' &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\
\zeta' &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dall'equazioni (2) si ricava

$$\left.\begin{aligned}
\xi' &= \frac{d\xi}{dt} - q_3 \eta + q_2 \zeta, \\
\eta' &= \frac{d\eta}{dt} - q_1 \zeta + q_3 \xi, \\
\zeta' &= \frac{d\zeta}{dt} - q_2 \xi + q_1 \eta,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

essendo q_1, q_2, q_3 le componenti secondo gli assi ξ, η, ζ della rotazione di questo sistema di assi.

Dall'equazioni (3) si ricava

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{da_1}{dt} \frac{\xi}{a_1} + a_1 r_3 \frac{\eta}{a_2} - a_1 r_2 \frac{\zeta}{a_3}, \\
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{da_2}{dt} \frac{\eta}{a_2} + a_2 r_1 \frac{\zeta}{a_3} - a_2 r_3 \frac{\xi}{a_1}, \\
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{da_3}{dt} \frac{\zeta}{a_3} + a_3 r_2 \frac{\xi}{a_1} - a_3 r_1 \frac{\eta}{a_2},
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

essendo r_1, r_2, r_3 le componenti della rotazione di un sistema di assi A', secondo i medesimi assi.

Sostituendo i valori dati dalle formule (7) nelle (6), e quelli così ottenuti nella equazione (4) si avrà

$$T=\frac{1}{2}\int_S \rho\left[\left(\frac{da_1}{dt}\frac{\xi}{a_1}+(a_1r_3-a_2q_3)\frac{\eta}{a_2}-(a_1r_2-a_3q_2)\frac{\zeta}{a_3}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{da_2}{dt}\frac{\eta}{a_2}+(a_2r_1-a_3q_1)\frac{\zeta}{a_3}-(a_2r_3-a_1q_3)\frac{\xi}{a_1}\right)^2+\left(\frac{da_3}{dt}\frac{\zeta}{a_3}+(a_3r_2-a_1q_2)\frac{\xi}{a_1}-(a_3r_1-a_2q_1)\frac{\eta}{a_2}\right)^2\right]dS.$$

Poniamo

$$\xi=a_1h\cos\theta,\qquad \eta=a_2h\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\qquad \zeta=a_3h\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Osservando la equazione (1) e integrando a tutta l'ellissoide S, avremo

$$\left.\begin{aligned}T=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi a_1a_2a_3}{3}\int_0^1 F'(1-h^2)h^4dh\Bigg[\sum_1^3\Bigg(\frac{da_i^2}{dt^2}+(a_i^2+a_{i+1}^2)(q_{i+2}^2+r_{i+2}^2)-\\ -4a_ia_{i+1}q_{i+2}r_{i+2}\Bigg)\Bigg].\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Il potenziale P dell'ellissoide soggetta alle forze di attrazione newtoniana è

$$P=\pi^2a_1^2a_2^2a_3^2\int_0^1 F^2(1-h^2)dh\int_0^\infty\frac{d\lambda}{D}\quad(*)$$

dove F è la primitiva di F' che si annulla quando l'argomento è uguale a zero e

$$D=\sqrt{(a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda)}.$$

L'equazione delle forze vive sarà

$$T-P=\text{costante}.$$

Dividendola per $\frac{4}{3}\pi a_1a_2a_3\int_0^1 F'(1-h^2)h^4dh$, osservando che per la invariabilità della massa

$$a_1a_2a_3=A_1A_2A_3,\qquad(9)$$

(*) Vedi Nuovo Cimento, Serie III, t. 9, pag. 224.

e ponendo

$$\eta = \frac{3}{8} \frac{\int_0^1 F^2(1-h^2)\,dh}{\int_0^1 F'(1-h^2)h^4\,dh}, \tag{10}$$

$$Q = 2\pi A_1 A_2 A_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}, \tag{11}$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum_1^3 {}_i [(a_i^2 + a_{i+1}^2)(q_{i+2}^2 + r_{i+2}^2) - 4 a_i a_{i+1} q_{i+2} r_{i+2}], \tag{12}$$

avremo

$$\frac{1}{2} \sum \frac{d a_i^2}{dt^2} + \Theta - \eta Q = \text{costante}. \tag{13}$$

Per ottenere l'equazioni differenziali del moto sotto la forma canonica, e per determinare l'equazione a derivate parziali di primo ordine, che con un suo integrale completo dà tutti gli integrali dell'equazioni del moto, poichè in questo caso a cagione della (9) abbiamo

$$\sum \frac{1}{a_i} \frac{d a_i}{dt} = 0 \tag{14}$$

basterà prendere la funzione

$$H = \frac{1}{2} \sum \frac{d a_i^2}{dt^2} + \Theta - \eta Q + \mu \sum \frac{1}{a_i} \frac{d a_i}{dt}, \tag{15}$$

esprimere q_1, q_2, q_3 per gli angoli di Eulero θ_1, θ_2, θ_3 e delle loro derivate colle note formule

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \theta'_3 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - \theta'_1 \cos\theta_2, \\ q_2 &= \theta'_3 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \theta'_1 \operatorname{sen}\theta_2, \\ q_3 &= -\theta'_3 \cos\theta_1 + \theta'_2; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

esprimere analogamente r_1, r_2, r_3 per altri tre angoli Euleriani θ_4, θ_5, θ_6, cioè prendere

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \theta'_6 \operatorname{sen}\theta_4 \operatorname{sen}\theta_5 - \theta'_4 \cos\theta_5, \\ r_2 &= \theta'_6 \operatorname{sen}\theta_4 \cos\theta_5 + \theta'_4 \operatorname{sen}\theta_5, \\ r_3 &= -\theta'_6 \cos\theta_4 + \theta'_5, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

sostituire nella (13) a $\frac{d a_i}{dt}$, θ'_i, i loro valori espressi in funzione delle derivate di H data dalla (15) rispetto a queste stesse quantità, e finalmente porre invece delle derivate rapporto alle $\frac{d a_i}{dt}$ e alle θ'_i le rispettive derivate di una stessa funzione rapporto alle a_i e alle θ_i (*).

Ora se poniamo

$$\left.\begin{aligned} h_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = (a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2) q_i - 2 a_{i+1} a_{i+2} r_i, \\ k_i &= \frac{\partial H}{\partial r_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial r_i} = (a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2) r_i - 2 a_{i+1} a_{i+2} q_i, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

avremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \theta'_1} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \theta'_1} = p_1 = -h_1 \cos\theta_2 + h_2 \operatorname{sen}\theta_2, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta'_2} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \theta'_2} = p_2 = h_3, \\ \frac{\partial H}{\partial \theta'_3} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \theta'_3} = p_3 = (h_1 \operatorname{sen}\theta_2 + h_2 \cos\theta_2) \operatorname{sen}\theta_1 - h_3 \cos\theta_1. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dalle quali, scrivendo

$$S_1 = \frac{p_3 + p_2 \cos\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_1}, \tag{20}$$

si deduce

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= S_1 \operatorname{sen}\theta_2 - p_1 \cos\theta_2, \\ h_2 &= S_1 \cos\theta_2 + p_1 \operatorname{sen}\theta_2, \\ h_3 &= p_2. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Analogamente ponendo

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \theta'_4} = p_4, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \theta'_5} = p_5, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \theta'_6} = p_6, \tag{22}$$

e scrivendo

$$S_2 = \frac{p_6 + p_5 \cos\theta_4}{\operatorname{sen}\theta_4}, \tag{23}$$

(*) MAYER, *Ueber allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen.* Math. Annalen, vol. XVII, pag. 332.

si ottiene

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= S_2 \operatorname{sen}\theta_5 - p_4 \cos\theta_5, \\ k_2 &= S_2 \cos\theta_5 + p_4 \operatorname{sen}\theta_5, \\ k_3 &= p_5. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Dall'equazioni (18) si ricava

$$q_i + r_i = \frac{h_i + k_i}{(a_{i+1} - a_{i+2})^2}, \qquad q_i - r_i = \frac{h_i - k_i}{(a_{i+1} + a_{i+2})^2}. \tag{25}$$

Sostituendo nella equazione (12) questi valori, otterremo facilmente

$$\Theta = \frac{1}{4} \sum_1^3 \left(\frac{(h_i + k_i)^2}{(a_{i+1} - a_{i+2})^2} + \frac{(h_i - k_i)^2}{(a_{i+1} + a_{i+2})^2} \right). \tag{26}$$

Abbiamo inoltre

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \frac{da_1}{dt}} &= g_1 = \frac{da_1}{dt} + \frac{\mu}{a_1}, \\ \frac{\partial H}{\partial \frac{da_2}{dt}} &= g_2 = \frac{da_2}{dt} + \frac{\mu}{a_2}, \\ \frac{\partial H}{\partial \frac{da_3}{dt}} &= g_3 = \frac{da_3}{dt} + \frac{\mu}{a_3}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Onde, ponendo mente alla equazione (14), si deduce

$$\mu = \frac{\sum_1^3 \frac{g_i}{a_i}}{\sum_1^3 \frac{1}{a_i^2}} \tag{28}$$

$$\frac{1}{2} \sum \frac{da_i^2}{dt^2} = \Omega = \frac{1}{2} \sum g_i^2 - \frac{1}{2} \frac{\left(\sum \frac{g_i}{a_i} \right)^2}{\sum \frac{1}{a_i^2}} = \frac{\sum \left(\frac{g_i}{a_{i+1}} - \frac{g_{i+1}}{a_i} \right)^2}{\sum \frac{1}{a_i^2}}. \tag{29}$$

L'equazione a derivate parziali di prim'ordine della quale per integrare l'equazione del moto, basterà determinare un integrale completo, sarà dunque l'equazione

$$H = \Omega + \Theta - \eta\, Q = \text{costante} \tag{30}$$

nella quale Θ e Ω sono espresse per le g_i e le p_i mediante l'equazioni (26), (21), (24) e (29) e denotando con W l'integrale è posto

$$g_i = \frac{\partial W}{\partial a_i}, \qquad p_i = \frac{\partial W}{\partial \theta_i}. \tag{31}$$

§ 2.

Determiniamo ora il significato fisico del coefficiente μ. Abbiamo l'equazioni canoniche

$$\frac{d g_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial a_i} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a_i} - \frac{\partial(\Theta - \eta Q)}{\partial a_i}. \tag{32}$$

Dalla (29), ponendo mente alle (27), si ottiene

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_i} = \frac{g_i}{a_i^2}\mu - \frac{\mu^2}{a_i^3} = \frac{\mu}{a_i^2}\frac{d a_i}{dt},$$

e dalle (27)

$$\frac{d g_i}{dt} = \frac{d^2 a_i}{dt^2} + \frac{d\mu}{dt}\frac{1}{a_i} - \frac{\mu}{a_i^2}\frac{d a_i}{dt}.$$

Onde avremo

$$\frac{d^2 a_i}{dt^2} = -\frac{d\mu}{dt}\frac{1}{a_i} - \frac{\partial(\Theta - \eta Q)}{\partial a_i}. \tag{33}$$

Se prendiamo l'equazioni generali della Idrodinamica sotto la forma data loro da Lagrange, colle posizioni fatte nel paragrafo precedente, denotando con Π la pressione e con V la funzione potenziale dell'ellissoide, otterremo le tre equazioni

$$\rho\left[\frac{\xi}{a_1}\left(\frac{d^2 a_1}{dt^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial a_1}\right) + \frac{\eta}{a_2}N_1 + \frac{\zeta}{a_3}N'_1 - \frac{\partial V}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = 0,$$

$$\rho\left[\frac{\eta}{a_2}\left(\frac{d^2 a_2}{dt^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial a_2}\right) + \frac{\zeta}{a_3}N_2 + \frac{\xi}{a_1}N'_2 - \frac{\partial V}{\partial \eta}\right] + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = 0,$$

$$\rho\left[\frac{\zeta}{a_3}\left(\frac{d^2 a_3}{dt^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial a_3}\right) + \frac{\xi}{a_1}N_3 + \frac{\eta}{a_2}N'_3 - \frac{\partial V}{\partial \zeta}\right] + \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = 0,$$

dove $N_1, N_2, \ldots$ sono funzioni delle a_i, h_i, k_i e delle loro derivate, che qui non abbiamo bisogno di determinare. Riemann deduce da queste l'equazioni del movimento, supponendo Π funzione lineare di h^2, ed uguagliando a zero in ciascuna i coefficienti di ξ, η e ζ. Osservando che queste equazioni debbono esser soddisfatte in tutti i punti della massa si potranno moltiplicare rispettivamente per $\frac{\xi}{a_1}dS$, $\frac{\eta}{a_2}dS$, $\frac{\zeta}{a_3}dS$ ed integrarle, estendendo l'integrazione a tutto lo spazio S occupato dalla massa. Avremo così

$$\int_S \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\frac{\xi}{a_1}dS + \frac{4}{3}\pi A_1 A_2 A_3 \int_0^1 F'(1-h^2)h^4 dh\left(\frac{d^2 a_1}{dt^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial a}\right) - \int_S \rho \frac{\xi}{a}\frac{\partial V}{\partial \xi}dS = 0$$

e due altre equazioni analoghe relative all'altre due coordinate. Ora prendendo per V la nota espressione della funzione potenziale di un ellissoide eterogeneo (*), si dimostra facilmente l'equazione

$$\int_S \rho \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\xi}{ai}dS = \frac{4}{3}\pi A_1 A_2 A_3 \eta \frac{\partial Q}{\partial ai}.$$

Onde

$$\int_S \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\frac{\xi}{a_1}dS + \frac{4\pi}{3}A_1 A_2 A_3 \int_0^1 F'(1-h^2)h^4 dh\left(\frac{d^2 a_1}{dt^2} + \frac{\partial(\Theta - \eta Q)}{\partial a_1}\right) = 0.$$

Confrontando questa colla equazione (33) si deduce

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\int_S \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\xi dS}{\frac{4}{3}\pi A_1 A_2 A_3 \int_0^1 F'(1-h^2)h^4 dh}.$$

Ora per un teorema noto abbiamo

$$\int_S \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\xi dS = -\int_\sigma \Pi \xi \frac{\partial \xi}{\partial p}d\sigma - \int_S \Pi dS,$$

essendo p la normale alla superficie σ della massa diretta verso l'interno. Se $\Pi = \Pi_0$ quantità costante sopra tutta la superficie σ, osservando che si ha

$$-\int_\sigma \xi \frac{\partial \xi}{\partial p}d\sigma = \int_S dS = \frac{4}{3}\pi A_1 A_2 A_3,$$

(*) Vedi *Teorica delle forze Newtoniane* del prof. Enrico Betti, pag. 73.

avremo

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{4}{3}\pi A_1 A_2 A_3 \Pi_0 - \int_S \Pi \, dS}{\frac{4}{3}\pi A_1 A_2 A_3 \int_0^1 F'(1-h^2)h^4 \, dh},$$

e denotando con Π_m il valor medio della pressione, cioè essendo

$$\Pi_m = \frac{\int_S \Pi \, dS}{\frac{4}{3}\pi A_1 A_2 A_3},$$

e ponendo

$$\varepsilon = \frac{1}{5\int_0^1 F'(1-h^2)h^4 \, dh}$$

otterremo

$$\frac{d\mu}{dt} = 5\,\varepsilon(\Pi_0 - \Pi_m); \tag{34}$$

quindi $\frac{d\mu}{dt}$ negativo finchè il valor medio della pressione sia maggiore della pressione alla superficie della massa.

La equazione (34) ci dà il modo di esprimere il valore medio della pressione in funzione delle h, k, a e $\frac{da}{dt}\cdot$ Infatti se poniamo con Jacobi

$$(f,\ f_1) = \sum_1^6 \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial f_1}{\partial \theta_i} - \frac{\partial f}{\partial \theta_i}\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\right) + \sum_1^3 \left(\frac{\partial f}{\partial g_i}\frac{\partial f_1}{\partial a_i} - \frac{\partial f}{\partial a_i}\frac{\partial f_1}{\partial g_i}\right) \tag{35}$$

avremo

$$\frac{d\mu}{dt} = -(\mu,\ H) = -(\mu,\ \Omega) - (\mu,\ \Theta) + (\mu,\ \eta Q).$$

Ora

$$(\mu,\ \Omega) = \frac{1}{2}(\mu,\ \Sigma g_i^2) - \frac{1}{2}\left(\mu,\ \mu^2 \Sigma \frac{1}{a_i^2}\right) = \frac{1}{\Sigma a_i^2}\left(\Sigma \frac{g_i^2}{a_i^2} - 2\mu \Sigma \frac{g_i}{a_i^3} + \mu^2 \Sigma \frac{1}{a_i^4}\right)$$

e sostituendo alle g_i i valori dati dalle (27)

$$(\mu,\ \Omega) = \frac{\Sigma \frac{d a_i^2}{dt^2}\frac{1}{a_i^2}}{\Sigma \frac{1}{a_i^2}}.$$

Abbiamo inoltre

$$(\mu,\ \eta Q) = -\eta \sum \frac{1}{a_i} \frac{\partial Q}{\partial a_i} = -2\pi A_1 A_2 A_3 \eta \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D} \sum \frac{1}{a_i^2+\lambda} = -4\pi\eta$$

$$(\mu,\ \Theta) = \sum \frac{1}{a_i} \frac{\partial \Theta}{\partial a_i} = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{(h_i+k_i)^2}{(a_{i+1}-a_{i+2})^2} - \frac{(h_i-k_i)^2}{(a_{i+1}+a_{i+2})^2} \right)$$

e quindi

$$\frac{d\mu}{dt} = -4\pi\eta - \frac{\sum \frac{d a_i^2}{dt^2} \frac{1}{a_i^2}}{\sum \frac{1}{a_i^2}} - \frac{1}{2} \sum \left(\frac{(h_i+k_i)^2}{(a_{i+1}-a_{i+2})^2} - \frac{(h_i-k_i)^2}{(a_{i+1}+a_{i+2})^2} \right)$$

$$\Pi_m = \Pi_0 + \frac{1}{5\varepsilon} \left| 4\pi\eta + \frac{\sum \frac{d a_i^2}{dt^2} \frac{1}{a_i^2}}{\sum \frac{1}{a_i^2}} + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{(h_i+k_i)^2}{(a_{i+1}-a_{i+2})^2} - \frac{(h_i-k_i)^2}{(a_{i+1}+a_{i+2})^2} \right) \right| . \tag{36}$$

§ 3.

Dall'equazioni (32) se ne può dedurre una analoga a quella trovata da Jacobi per i sistemi di punti soggetti a forze che hanno una funzione potenziale, funzione omogenea delle coordinate (*).

Moltiplicando le (32) rispettivamente per a_1, a_2, a_3, sommando e osservando che si ha

$$\sum a_i \frac{\partial \Omega}{\partial a_i} = 0, \qquad \sum a_i \frac{\partial \Theta}{\partial a_i} = -2\Theta, \qquad \sum a_i \frac{\partial Q}{\partial a_i} = -Q$$

si ottiene

$$\sum a_i \frac{d g_i}{dt} = 2\Theta - \eta Q. \tag{37}$$

Dalle (27), ponendo mente alla (14) si deduce

$$\sum g_i \frac{d a_i}{dt} = \sum \frac{d a_i^2}{dt^2}.$$

(*) Vedi *Teorica delle forze Newtoniane*, pag. 131.

Ma denotando con C la costante della equazione (30), abbiamo

$$\sum \frac{d a_i^2}{d t^2} = -2\Theta + 2\eta Q + 2C.$$

Onde

$$\sum g_i \frac{d a_i}{d t} = -2\Theta + 2\eta Q + 2C, \tag{38}$$

e sommando la (37) colla (38)

$$\frac{d}{dt} \sum g_i a_i = \eta Q + 2C.$$

Sostituendo i valori (27) e (34), avremo

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{d t^2} \sum a_i^2 = \eta Q + 2C + 15\varepsilon(\Pi_m - \Pi_0). \tag{39}$$

Da questa si deduce che mantenendosi sempre il valore medio della pressione maggiore del valore della pressione alla superficie, non potrà aversi stabilità nel movimento se la costante C non è negativa.

§ 4.

Passiamo ora a trattare la integrazione della equazione (30).

Poichè in essa non compariscono le due variabili θ_3 e θ_6, due integrali Jacobiani saranno

$$p_3 = c_1, \qquad p_6 = c_2, \tag{40}$$

e sostituendo a p_3 e p_6 le costanti c_1 e c_2 avremo da trovare l'integrale completo di una equazione a derivate parziali con 7 variabili indipendenti.

Applicando le operazioni designate col simbolo di Jacobi definito dalla equazione (35) si trova

$$(h_i,\ h_{i+1}) = h_{i+2}, \qquad (k_i,\ k_{i+1}) = k_{i+2}, \qquad (h_i,\ k_s) = 0.$$

Onde

$$(h_i,\ H) = (h_i,\ \Theta) = \sum \frac{\partial \Theta}{\partial h_s}(h_i,\ h_s) = \frac{\partial \Theta}{\partial h_{i+1}} h_{i+2} - \frac{\partial \Theta}{\partial h_{i+2}} h_{i+1}.$$

Ma

$$\frac{\partial \Theta}{\partial h_i} = \frac{1}{2} \frac{h_i + k_i}{(a_{i+1} - a_{i+2})^2} + \frac{1}{2} \frac{h_i - k_i}{(a_{i+1} + a_{i+2})^2} = q_i;$$

e quindi

$$(h_i,\ H) = q_{i+1} h_{i+2} - q_{i+2} h_{i+1}.$$

Analogamente si trova

$$k_i,\ H) = r_{i+1} k_{i+2} - r_{i+2} k_{i+1},$$

e per conseguenza

$$(\sum h_i^2,\ H) = 2 \sum h_i (h_i H) = 0,$$
$$(\sum k_i^2,\ H) = 2 \sum k_i (k_i H) = 0.$$

Dunque abbiamo due integrali

$$\left.\begin{aligned} \sum h_i^2 &= c_3, \\ \sum k_i^2 &= c_4, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

ed essendo

$$(\sum h_i^2,\ \sum k_i^2) = 0,$$

questi integrali sono Jacobiani.

Sostituendo nelle (42) i valori dati dalle (21) e dalle (24) si ottiene

$$S_1^2 + p_1^2 + p_2^2 = c_3, \qquad S_2^2 + p_4^2 + p_5^2 = c_4$$

e ponendo mente all'equazioni (20), (23) e (40) avremo

$$\left.\begin{aligned} p_1^2 + \frac{c_1^2 + p_2^2 + 2\, c_1 p_2 \cos^2\theta_1}{\operatorname{sen}^2\theta_1} &= c_3, \\ p_4^2 + \frac{c_2^2 + p_5^2 + 2\, c_2 p_5 \cos^2\theta_5}{\operatorname{sen}^2\theta_5} &= c_4. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Un altro integrale pure Jacobiano è dato da

$$a_1 a_2 a_3 = A_1 A_2 A_3 \tag{43}$$

e quindi abbiamo 3 integrali Jacobiani della (30).

Pertanto applicando i metodi di Lie e di Meyer, per aver un integrale completo della (30) basterà trovare un integrale completo di una sola equazione a derivate parziali di 1° ordine con 4 variabili indipendenti, cioè basterà trovare un solo integrale comune a 6, un solo integrale comune a 4, e un solo integrale comune a 2 equazioni differenziali ordinarie di prim'ordine, precisamente come nel problema dei tre corpi.

Due altri integrali indipendenti dalle g_i e dalle a_i si trovano facilmente, cioè

$$\left.\begin{aligned} R_1 \operatorname{sen}\theta_3 - p_1 \cos\theta_3 &= \text{costante}, \\ R_2 \operatorname{sen}\theta_6 - p_4 \cos\theta_6 &= \text{costante}, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

essendo

$$R_1 = -\operatorname{sen}\theta_1 \frac{\partial S_1}{\partial \theta_1}, \qquad R_2 = -\operatorname{sen}\theta_4 \frac{\partial S_2}{\partial \theta_4}.$$

Con i sette integrali (40), (42), (43) e (44) non si possono ottenere più di cinque equazioni che colla (30) formino un sistema Jacobiano, e quindi i due integrali (44) non possono servire a diminuire ulteriormente la difficoltà della integrazione della equazione (30).

Sulle equazioni generali dell'elasticità.

(*Memoria del prof.* E. Beltrami, *a Pavia.*)

È noto che Lamé è stato il primo a trasformare le equazioni dell'elasticità in coordinate curvilinee ortogonali. Tale trasformazione, da lui esposta per la prima volta in una Memoria pubblicata nel t. 6 del Giornale di Liouville (1ª Serie), è stata poscia riprodotta nella XVª e nella XVIª delle *Leçons sur les coordonnées curvilignes.*

I calcoli eleganti, ma alquanto prolissi, dell'illustre geometra francese sono stati notabilmente abbreviati, con procedimenti in parte diversi, da C. Neumann e dal compianto Borchardt.

Il primo di questi due Autori, nell'interessantissima sua Memoria: *Zur Theorie der Elasticität* (t. 57 del Giornale di Berlino, 1859), ha ripigliato la questione dal principio, calcolando il potenziale delle forze molecolari nei corpi isotropi, e deducendo direttamente le note equazioni dalla variazione di questo potenziale. Le semplificazioni ottenute in questo lavoro risultano principalmente da certe relazioni, preliminarmente stabilite dall'Autore, fra quelli che egli chiama coefficienti di variazione del detto potenziale, prima e dopo della trasformazione in coordinate curvilinee. (Questi coefficienti non sono altro che le espressioni per le quali trovansi moltiplicate le variazioni delle funzioni incognite, in quella parte della variazione dell'integrale che è rappresentata da un integrale d'egual ordine di moltiplicità.)

Anche Borchardt, nell'elegante articolo intitolato: *Transformation der Elasticitätsgleichungen in allgemeine orthogonale Coordinaten* (t. 76 del suddetto Giornale, 1873), riprodotto nel *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (t. 8, 1875), ha fondato la sua deduzione sulla variazione dell'integrale che rappresenta il potenziale delle forze elastiche, ma la semplificazione da lui raggiunta deriva, sia dalla soppressione di certe parti dell'integrale che sono convertibili in integrali di superficie e che non danno contributo alcuno alle equazioni indefinite, sia dalla trasformazione diretta dell'espressione che rappresenta il quadrato della rotazione elementare.

In fondo, l'artifizio essenziale della trasformazione consiste, presso tutti tre i nominati Autori, nell'aggruppamento delle tre funzioni incognite e delle loro nove derivate sotto quattro sole espressioni distinte, che sono quelle rappresentanti la dilatazione cubica e le tre componenti di rotazione. Infatti Lamé parte direttamente dalle equazioni cartesiane fra queste quattro espressioni, mentre Neumann e Borchardt predispongono il potenziale elementare in guisa che queste sole espressioni forniscano termini alle equazioni trasformate.

Ora il detto artifizio, se permette di giungere a queste equazioni con quella maggiore speditezza che la natura dell'argomento consente, lascia tuttavia nell'ombra una circostanza di molto interesse che, a quanto pare, non è stata ancora avvertita e che conduce a conseguenze del tutto inaspettate.

Per mettere in chiara luce questo punto, incomincierò collo stabilire *direttamente* le equazioni generali dell'equilibrio elastico in coordinate ortogonali di specie qualunque.

Sieno q_1, q_2, q_3 le coordinate curvilinee ortogonali d'un punto qualunque in uno spazio a tre dimensioni e sia

$$ds^2 = Q_1^2 dq_1^2 + Q_2^2 dq_2^2 + Q_3^2 dq_3^2 \tag{1}$$

l'espressione del quadrato d'un elemento lineare qualunque, in questo spazio.

Facendo variare la posizione d'ogni punto, si trova

$$\begin{aligned} ds\,\delta ds = {} & Q_1^2 dq_1 d\delta q_1 + Q_2^2 dq_2 d\delta q_2 + Q_3^2 dq_3 d\delta q_3 \\ & + Q_1 \delta Q_1 dq_1^2 + Q_2 \delta Q_2 dq_2^2 + Q_3 \delta Q_3 dq_3^2. \end{aligned}$$

Ma si ha, per $i = 1, 2, 3$,

$$d\delta q_i = \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_3} dq_3;$$

dunque, ponendo

$$\left.\begin{aligned} \delta\theta_1 &= \frac{\partial \delta q_1}{\partial q_1} + \frac{\delta Q_1}{Q_1}, \\ \delta\theta_2 &= \frac{\partial \delta q_2}{\partial q_2} + \frac{\delta Q_2}{Q_2}, \\ \delta\theta_3 &= \frac{\partial \delta q_3}{\partial q_3} + \frac{\delta Q_3}{Q_3}, \\ \delta\omega_1 &= \frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial \delta q_2}{\partial q_3} + \frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial \delta q_3}{\partial q_2}, \\ \delta\omega_3 &= \frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial \delta q_3}{\partial q_1} + \frac{Q_1}{Q_3}\frac{\partial \delta q_1}{\partial q_3}, \\ \delta\omega_3 &= \frac{Q_1}{Q_2}\frac{\partial \delta q_1}{\partial q_2} + \frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial \delta q_2}{\partial q_1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

si può scrivere

$$\frac{\delta ds}{ds} = \lambda_1^2 \delta\theta_1 + \lambda_2^2 \delta\theta_2 + \lambda_3^2 \delta\theta_3 + \lambda_2\lambda_3 \delta\omega_1 + \lambda_3\lambda_1 \delta\omega_2 + \lambda_1\lambda_2 \delta\omega_3, \qquad (2)_a$$

dove le tre quantità λ_1, λ_2, λ_3, definite da

$$\lambda_i = \frac{Q_i dq_i}{ds},$$

sono i coseni degli angoli che l'elemento lineare ds fa colle tre linee coordinate q_1, q_2, q_3 (così designando, per brevità, le linee lungo le quali varia la sola coordinata q_1, o la sola q_2, o la sola q_3).

Abbiasi ora un sistema materiale continuo, occupante uno spazio connesso S, limitato da una superficie σ, e sia questo sistema in equilibrio sotto l'azione: 1°) di forze esterne applicate ad ogni elemento di volume dS e ad ogni elemento di superficie $d\sigma$; 2° di forze interne sviluppate, in ciascun elemento dS, dalla deformazione che le forze esterne determinano nel sistema. Tale sistema, *già deformato ed equilibrato,* sia quello i cui punti sono individuati dalle coordinate q_1, q_2, q_3.

Sieno

$$F_1 dS, \qquad F_2 dS, \qquad F_3 dS$$

le componenti secondo le direzioni q_1, q_2, q_3 della forza esterna agente sull'elemento di volume dS, e sieno

$$\varphi_1 d\sigma, \qquad \varphi_2 d\sigma, \qquad \varphi_3 d\sigma$$

le analoghe componenti della forza esterna applicata all'elemento di superficie $d\sigma$.

Per esprimere le condizioni d'equilibrio del sistema, s'immagini che ogni suo punto (q_1, q_2, q_3) subisca un nuovo spostamento, per il quale le sue coordinate diventino $q_1 + \delta q_1$, $q_2 + \delta q_2$, $q_3 + \delta q_3$. Il lavoro sviluppato in tale spostamento dalla forza esterna agente sull'elemento di volume dS è

$$(F_1 Q_1 \delta q_1 + F_2 Q_2 \delta q_2 + F_3 Q_3 \delta q_3) dS,$$

e quello sviluppato dalla forza esterna agente sull'elemento di superficie $d\sigma$ è

$$(\varphi_1 Q_1 \delta q_1 + \varphi_2 Q_2 \delta q_2 + \varphi_3 Q_3 \delta q_3) d\sigma.$$

Quanto alle forze interne, se esse non isviluppano lavoro se non in quanto lo spostamento immaginato altera le lunghezze degli elementi lineari, è manifesto che il lavoro da esse sviluppato sull'elemento dS non può avere che un'espressione della forma

$$(\Theta_1\delta\theta_1+\Theta_2\delta\theta_2+\Theta_3\delta\theta_3+\Omega_1\delta\omega_1+\Omega_2\delta\omega_2+\Omega_3\delta\omega_3)dS$$

giacchè la variazione dell'elemento lineare dipende $(2)_a$ dalle sei quantità $\delta\theta_i$, $\delta\omega_i$ e si annulla con esse. I sei moltiplicatori Θ_i, Ω_i sono funzioni di q_1, q_2, q_3 delle quali per ora non occorre indagare il significato.

Dietro quanto precede, l'equazione generale d'equilibrio è la seguente:

$$\left.\begin{aligned}&\int(F_1Q_1\delta q_1+F_2Q_2\delta q_2+F_3Q_3\delta q_3)dS\\&+\int(\varphi_1Q_1\delta q_1+\varphi_2Q_2\delta q_2+\varphi_3Q_3\delta q_3)d\sigma\\&+\int(\Theta_1\delta\theta_1+\Theta_2\delta\theta_2+\Theta_3\delta\theta_3+\Omega_1\delta\omega_1+\Omega_2\delta\omega_2+\Omega_3\delta\omega_3)dS=0.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Per ricavare da questa formola le equazioni d'equilibrio, propriamente dette, bisogna trasformare debitamente gli integrali della forma

$$\int\Theta_i\delta\theta_i dS,\qquad \int\Omega_i\delta\omega_i dS.$$

Incominciando dal primo si ha (2)

$$\int\Theta_i\delta\theta_i dS=\int\Theta_i\left(\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_i}+\frac{\delta Q_i}{Q_i}\right)dS$$

e, ponendo per brevità $Q_1Q_2Q_3=\nabla$,

$$\begin{aligned}\int\Theta_i\delta\theta_i dS&=\int\nabla\Theta_i\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_i}\frac{dS}{\nabla}+\int\frac{\Theta_i\delta Q_i}{Q_i}dS\\&=\int\frac{\partial}{\partial q_i}(\nabla\Theta_i\delta q_i)\frac{dS}{\nabla}-\int\left\{\frac{\partial\nabla\Theta_i}{\partial q_i}\frac{\delta q_i}{\nabla}-\frac{\Theta_i\delta Q_i}{Q_i}\right\}dS.\end{aligned}$$

Ora dalla nota equazione

$$\int\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dS}{\nabla}=-\int\frac{Q_if\cos(nq_i)}{\nabla}d\sigma,$$

dove n è la normale interna alla superficie σ, si ha

$$\int\frac{\partial}{\partial q_i}(\nabla\Theta_i\delta q_i)\frac{dS}{\nabla}=-\int Q_i\Theta_i\cos(nq_i)\delta q_i d\sigma,$$

epperò

$$\int \Theta_i \delta\theta_i dS = -\int \left\{ \frac{\partial \nabla \Theta_i}{\partial q_i} \frac{\delta q_i}{\nabla} - \frac{\Theta_i \delta Q_i}{Q_i} \right\} dS$$
$$-\int Q_i \Theta_i \cos(n q_i) \delta q_i d\sigma.$$

Passando al secondo integrale, si ha (2)

$$\int \Omega_1 \delta\omega_1 dS = \int Q_1 \Omega_1 \left(Q_2^2 \frac{\partial \delta q_2}{\partial q_3} + Q_3^2 \frac{\partial \delta q_3}{\partial q_2} \right) \frac{dS}{\nabla}$$
$$= \int \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} (Q_1 Q_2^2 \Omega_1 \delta q_2) + \frac{\partial}{\partial q_2} (Q_1 Q_3^2 \Omega_1 \delta q_3) \right\} \frac{dS}{\nabla}$$
$$- \int \left\{ \frac{\partial (Q_1 Q_2^2 \Omega_1)}{\partial q_3} \delta q_2 + \frac{\partial (Q_1 Q_3^2 \Omega_1)}{\partial q_2} \delta q_3 \right\} \frac{dS}{\nabla}$$

ossia, per il teorema ricordato,

$$\int \Omega_1 \delta\omega_1 dS = -\int \left\{ \frac{\partial (Q_1 Q_2^2 \Omega_1)}{\partial q_3} \delta q_2 + \frac{\partial (Q_1 Q_3^2 \Omega_1)}{\partial q_2} \delta q_3 \right\} \frac{dS}{\nabla}$$
$$- \int \left\{ Q_2 \cos(n q_3) \delta q_2 + Q_3 \cos(n q_2) \delta q_3 \right\} \Omega_1 d\sigma.$$

Analogamente si trasformano gli altri due integrali

$$\int \Omega_2 \delta\omega_2 dS, \qquad \int \Omega_3 d\omega_3 dS.$$

Sostituendo nell'equazione (3) i valori così trasformati dei sei integrali

$$\int \Theta_i \delta\theta_i dS, \qquad \int \Omega_i \delta\omega_i dS,$$

si ottiene un risultato della forma

$$\int (S_1 \delta q_1 + S_2 \delta q_2 + S_3 \delta q_3) dS + \int (\sigma_1 \delta q_1 + \sigma_2 \delta q_2 + \sigma_3 \delta q_3) d\sigma = 0,$$

il quale, per l'arbitrio che regna sulle variazioni δq_i, si scinde nelle tre equazioni

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0$$

valide in ogni punto dello spazio S e nelle tre equazioni

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = 0, \qquad \sigma_3 = 0$$

valide in ogni punto della superficie σ.

Le sostituzioni effettive danno le tre equazioni indefinite

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 F_1 &= \frac{1}{\nabla}\left\{\frac{\partial(\nabla\Theta_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(Q_1^2 Q_3 \Omega_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(Q_1^2 Q_2 \Omega_2)}{\partial q_3}\right\} \\
&\quad - \left(\frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} + \frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right), \\
Q_2 F_2 &= \frac{1}{\nabla}\left\{\frac{\partial(Q_2^2 Q_3 \Omega_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\nabla\Theta_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(Q_2^2 Q_1 \Omega_1)}{\partial q_3}\right\} \\
&\quad - \left(\frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right). \\
Q_3 F_3 &= \frac{1}{\nabla}\left\{\frac{\partial(Q_3^2 Q_2 \Omega_2)}{\partial q_1} + \frac{\partial(Q_3^2 Q_1 \Omega_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\nabla\Theta_3)}{\partial q_3}\right\} \\
&\quad - \left(\frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3} + \frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3} + \frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e le tre equazioni ai limiti

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \Theta_1 \cos(nq_1) + \Omega_3 \cos(nq_2) + \Omega_2 \cos(nq_3), \\
\varphi_2 &= \Omega_3 \cos(nq_1) + \Theta_2 \cos(nq_2) + \Omega_1 \cos(nq_3), \\
\varphi_3 &= \Omega_2 \cos(nq_1) + \Omega_1 \cos(nq_2) + \Theta_3 \cos(nq_3).
\end{aligned}\right\} \tag*{$(4)_a$}$$

Queste ultime forniscono la definizione delle sei funzioni Θ_i, Ω_i. Esse infatti sono applicabili ad ogni porzione del sistema, qualora si rappresentino con φ_i le componenti delle forze che si devono applicare alla superficie di tale porzione per mantenerne l'equilibrio, quando la rimanente porzione è distrutta. Ora per un elemento $d\sigma_1$ d'una superficie $q_1 = \text{cost.}$ si ha dalle $(4)_a$

$$\varphi_1^{(1)} = \Theta_1, \qquad \varphi_2^{(1)} = \Omega_3, \qquad \varphi_3^{(1)} = \Omega_2;$$

per un elemento $d\sigma_2$ d'una superficie $q_2 = \text{cost.}$ si ha

$$\varphi_1^{(2)} = \Omega_3, \qquad \varphi_2^{(2)} = \Theta_2, \qquad \varphi_3^{(2)} = \Omega_1;$$

per un elemento $d\sigma_3$ d'una superficie $q_3 = \text{cost.}$ si ha

$$\varphi_1^{(3)} = \Omega_2, \qquad \varphi_2^{(3)} = \Omega_1, \qquad \varphi_3^{(3)} = \Theta_3.$$

Dunque le quantità Θ_1, Θ_2, Θ_3 rappresentano le tensioni unitarie che si sviluppano *normalmente* alle superficie coordinate $q_1 = \text{cost.}$, $q_2 = \text{cost.}$, $q_3 = \text{cost.}$, e le quantità Ω_1, Ω_2, Ω_3 rappresentano le tensioni unitarie che si sviluppano *tangenzialmente* alle dette superficie. Le eguaglianze

$$\varphi_2^{(3)} = \varphi_3^{(2)}, \qquad \varphi_3^{(1)} = \varphi_1^{(3)}, \qquad \varphi_1^{(2)} = \varphi_2^{(1)},$$

che risultano dai valori precedenti, sono quelle che ordinariamente si desumono dalla considerazione del tetraedro elementare.

Le equazioni (4) coincidono con quelle che Lamé dedusse dalla trasformazione delle analoghe equazioni in coordinate cartesiane (*Leçons sur les coordonnées curvilignes,* p. 272). La sola differenza consiste in ciò, che Lamé vi ha introdotto le derivate rispetto agli archi in luogo delle Q_1, Q_2, Q_3: ma è facilissimo passare dall'una all'altra forma mediante formole che indicherò più sotto.

Ma quello che più importa di osservare, e che risulta all'evidenza dal processo quì tenuto per stabilire quelle equazioni, è che lo spazio al quale esse si riferiscono non è definito da altro che dall'espressione (1) dell'elemento lineare, senz'alcuna condizione per le funzioni Q_1, Q_2, Q_3. Quindi le equazioni (4), $(4)_a$ posseggono una molto maggiore generalità che non le analoghe in coordinate cartesiane, e, in particolare, giova subito notare ch'esse *sono indipendenti dal postulato* d'Euclide. Questo fatto si collega intimamente con quello cui alludevo al principio. Ma prima di procedere oltre è necessario completare l'esposta teoria delle equazioni d'equilibrio elastico.

Pongasi

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{\partial \varkappa_1}{\partial q_1} + \frac{1}{Q_1}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\varkappa_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\varkappa_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\varkappa_3\right),\\
\theta_2 &= \frac{\partial \varkappa_2}{\partial q_2} + \frac{1}{Q_2}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\varkappa_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\varkappa_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\varkappa_3\right),\\
\theta_3 &= \frac{\partial \varkappa_3}{\partial q_3} + \frac{1}{Q_3}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\varkappa_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\varkappa_2 + \frac{\partial Q_3}{\partial q_3}\varkappa_3\right),\\
\omega_1 &= \frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial \varkappa_2}{\partial q_3} + \frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial \varkappa_3}{\partial q_2},\\
\omega_2 &= \frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial \varkappa_3}{\partial q_1} + \frac{Q_1}{Q_3}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial q_3},\\
\omega_3 &= \frac{Q_1}{Q_2}\frac{\partial \varkappa_1}{\partial q_2} + \frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial \varkappa_2}{\partial q_1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Confrontando queste quantità θ_i, ω_i colle $\delta\theta_i$, $\delta\omega_i$ definite dalle equazioni (2), si scorge che le seconde sono le variazioni delle prime, se si ammette che sia

$$\delta\varkappa_i = \delta q_i,$$

e che le coordinate q_i sieno invariabili rispetto a δ.

Ammettendo, come d'uso, che la deformazione prodotta dalle forze esterne sia talmente piccola da poter trattare come differenziali le variazioni totali subìte dalle coordinate di ciascun punto, è lecito intendere sostituite le coordinate iniziali alle finali nelle funzioni Q_i, Θ_i, Ω_i, e, considerando le quantità $\varkappa_i$ come gli incrementi totali delle coordinate iniziali q_i, si può stabilire l'equazione

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \theta_1\lambda_1^2 + \theta_2\lambda_2^2 + \theta_3\lambda_3^2 + \omega_1\lambda_2\lambda_3 + \omega_2\lambda_3\lambda_1 + \omega_3\lambda_1\lambda_2, \tag{5$_a$}$$

analoga alla $(2)_a$, per determinare la variazione totale Δds subìta dall'elemento ds durante la deformazione.

Le sei quantità θ_i, ω_i (come le precedenti $\partial\theta_i$, $\partial\omega_i$) hanno un significato geometrico semplicissimo. Infatti, per effetto della deformazione prodotta dalle forze esterne, i tre elementi lineari ortogonali

$$ds_1 = Q_1 dq_1, \qquad ds_2 = Q_2 dq_2, \qquad ds_3 = Q_3 dq_3$$

di cui ds è la risultante, diventano tre elementi lineari ds'_1, ds'_2, ds'_3 non più ortogonali ma leggermente obliqui, mentre ds diventa la risultante ds' di questi tre nuovi elementi. Se dunque si designano con ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 i complementi degli angoli piani

$$(ds'_2,\ ds'_3), \qquad (ds'_3,\ ds'_1), \qquad (ds'_1,\ ds'_2),$$

si ha, dalla formola elementare della risultante,

$$ds'^2 = ds'^2_1 + ds'^2_2 + ds'^2_3 + 2\epsilon_1 ds'_2 ds'_3 + 2\epsilon_2 ds'_3 ds'_1 + 2\epsilon_3 ds'_1 ds'_2 .$$

Ponendo

$$ds'_1 = (1+\alpha_1)ds_1, \qquad ds'_2 = (1+\alpha_2)ds_2, \qquad ds'_3 = (1+\alpha_3)ds_3,$$
$$ds' = (1+\alpha)ds$$

si ha di quì

$$\alpha = \alpha_1\lambda_1^2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \alpha_3\lambda_3^2 + \epsilon_1\lambda_2\lambda_3 + \epsilon_2\lambda_3\lambda_1 + \epsilon_3\lambda_1\lambda_2 .$$

Ma è evidente che si ha pure

$$\alpha = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{\Delta ds}{ds};$$

talchè, confrontando il precedente valore di α colla formola $(5)_a$, risulta

$$\alpha_i = \theta_i, \qquad \epsilon_i = \omega_i .$$

Dunque le tre quantità θ_i e le tre quantità ω_i rappresentano rispettivamente gli allungamenti (relativi) dei lati e i decrescimenti degli angoli di un elemento parallelepipedo ortogonale terminato da sei superficie coordinate.

Si ammette, per note ragioni, che il lavoro virtuale delle forze interne

$$\Theta_1\delta\theta_1+\Theta_2\delta\theta_2+\Theta_3\delta\theta_3+\Omega_1\delta\omega_1+\Omega_2\delta\omega_2+\Omega_3\delta\omega_3$$

(riferito all'unità di volume) sia una variazione esatta rispetto alle quantità $\varkappa_i$ che definiscono la deformazione già avvenuta. La precedente espressione, mercè la sostituzione dei valori delle variazioni $\delta\theta_i$, $\delta\omega_i$, che si ricavano dalle formole (5), diventa:

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left(\frac{\Theta_1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i}+\frac{\Theta_2}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i}+\frac{\Theta_3}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_i}\right)\delta\varkappa_i$$

$$+\Theta_1\delta\frac{\partial\varkappa_1}{\partial q_1}+\frac{Q_1\Omega_3}{Q_2}\delta\frac{\partial\varkappa_1}{\partial q_2}+\frac{Q_1\Omega_2}{Q_3}\delta\frac{\partial\varkappa_1}{\partial q_3}$$

$$+\frac{Q_2\Omega_3}{Q_1}\delta\frac{\partial\varkappa_2}{\partial q_1}+\Theta_2\delta\frac{\partial\varkappa_2}{\partial q_2}+\frac{Q_2\Omega_1}{Q_3}\delta\frac{\partial\varkappa_2}{\partial q_3}$$

$$+\frac{Q_3\Omega_2}{Q_1}\delta\frac{\partial\varkappa_3}{\partial q_1}+\frac{Q_3\Omega_1}{Q_2}\delta\frac{\partial\varkappa_3}{\partial q_2}+\Theta_3\delta\frac{\partial\varkappa_3}{\partial q_3}.$$

Dalla forma di quest'espressione risulta che, se esiste una funzione Π di cui essa sia la variazione esatta, questa funzione non può dipendere che dalle q_i, dalle $\varkappa_i$ e dalle $\varkappa_{ij}$, posto per brevità

$$\varkappa_{ij}=\frac{\partial\varkappa_i}{\partial q_j};$$

e propriamente dev'essere

$$\left.\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_i}=\displaystyle\sum_{j=1}^{j=3}\frac{\Theta_j}{Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}, & \dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{ii}}=\Theta_i, & (i=1,\ 2,\ 3)\\[2ex]
\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{12}}=\dfrac{Q_1\Omega_3}{Q_2}, & \dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{13}}=\dfrac{Q_1\Omega_2}{Q_3}, & \\[2ex]
\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{23}}=\dfrac{Q_2\Omega_1}{Q_3}, & \dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{21}}=\dfrac{Q_2\Omega_3}{Q_1}, & \\[2ex]
\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{31}}=\dfrac{Q_3\Omega_2}{Q_1}, & \dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{32}}=\dfrac{Q_3\Omega_1}{Q_2}. &
\end{array}\right\}\qquad(6)$$

Di quì risultano le sei relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{Q_3}{Q_2}\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{23}}=\frac{Q_2}{Q_3}\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{32}}(=\Omega_1),\\
&\frac{Q_1}{Q_3}\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{31}}=\frac{Q_3}{Q_1}\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{13}}(=\Omega_2),\\
&\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{12}}=\frac{Q_1}{Q_2}\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{21}}(=\Omega_3),\\
&\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_i}=\sum_{j=1}^{j=3}\frac{1}{Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{ii}},\qquad (i=1,\ 2,\ 3)
\end{aligned}\right\}\tag{6$_a$}$$

le quali esprimono che le funzioni $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ e le loro derivate prime entrano in Π soltanto nelle sei combinazioni

$$\theta_1,\quad \theta_2,\quad \theta_3,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,$$

epperò che si ha

$$\delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial\theta_1}\delta\theta_1+\frac{\partial\Pi}{\partial\theta_2}\delta\theta_2+\frac{\partial\Pi}{\partial\theta_3}\delta\theta_3+\frac{\partial\Pi}{\partial\omega_1}\delta\omega_1+\frac{\partial\Pi}{\partial\omega_2}\delta\omega_2+\frac{\partial\Pi}{\partial\omega_3}\delta\omega_3$$

ossia

$$\Theta_i=\frac{\partial\Pi}{\partial\theta_i},\qquad \Omega_i=\frac{\partial\Pi}{\partial\omega_i},\qquad (i=1,\ 2,\ 3).\tag{7}$$

Questa conclusione poteva essere fondata sulla semplice osservazione che le sei quantità θ_i, ω_i definite dalle equazioni (5) non sono legate fra loro da alcuna relazione lineare indipendente dalle $\varkappa_i$, $\varkappa_{ij}$. Ma la deduzione precedente mette in evidenza alcune relazioni che permettono di dare immediatamente alle equazioni (4) e $(4)_a$ una nuova forma. Infatti, in virtù delle formole (6), $(6)_a$, le dette equazioni diventano

$$\left.\begin{aligned}
&Q_iF_i=\frac{1}{\nabla}\sum_{j=1}^{j=3}\frac{\partial\left(\nabla\dfrac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{ij}}\right)}{\partial q_j}-\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_i},\\
&Q_i\varphi_i=\sum_{j=1}^{j=3}Q_j\frac{\partial\Pi}{\partial\varkappa_{ij}}\cos(nq_j),
\end{aligned}\right\}\quad (i=1,\ 2,\ 3)\tag{8}$$

ed è appunto sotto questa forma che le equazioni generali dell' elasticità sono state date da C. Neumann, nella citata Memoria.

Propriamente le funzioni introdotte da Neumann (come pure da Lamé) non sono le $\varkappa_i$, ma le $Q_i\varkappa_i$, cioè sono le componenti degli spostamenti: ma è facile vedere che se si pone

$$k_i = Q_i \varkappa_i$$

e quindi

$$k_{ij} = Q_i \varkappa_{ij} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \varkappa_i,$$

si ha, considerando Π come funzione di k_i e di k_{ij},

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varkappa_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial k_i} Q_i + \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial \Pi}{\partial k_{ij}} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varkappa_{ij}} = \frac{\partial \Pi}{\partial k_{ij}} Q_i;$$

e mediante queste relazioni le equazioni (8) si riducono subito alle seguenti:

$$\left.\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{\nabla} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial\left(\nabla \frac{\partial \Pi}{\partial k_{ij}}\right)}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial k_i}, \\ \varphi_i &= \sum_{j=1}^{j=3} Q_j \frac{\partial \Pi}{\partial k_{ij}} \cos(n q_j) \end{aligned}\right\} \tag{8$_a$}$$

che sono quelle di NEUMANN.

Trattasi ora di stabilire le equazioni d'elasticità per i mezzi isotropi, ossia per i mezzi nei quali Π ha la forma

$$\Pi = -\frac{1}{2}(A \vartheta^2 + B \varpi), \tag{9}$$

dove

$$\vartheta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3,$$

$$\varpi = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - 4(\theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_2).$$

Le costanti A e B, che dipendono dalla natura del mezzo, sono quelle usate da GREEN (*On the laws of reflexion and refraction of light* etc., 1837). Nell'ordinaria teoria, i rapporti di queste due costanti alla densità del mezzo rappresentano i quadrati delle velocità di propagazione delle onde longitudinali e delle onde trasversali.

Giova subito notare che la quantità ϑ, cioè la dilatazione cubica, ha una espressione molto semplice. Infatti dalle prime tre equazioni (5) si deduce facilmente

$$\vartheta = \frac{1}{\nabla}\left\{\frac{\partial(\nabla \varkappa_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\nabla \varkappa_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\nabla \varkappa_3)}{\partial q_3}\right\}. \tag{10}$$

Dall'equazione (9), in virtù delle (7), si deduce:

$$\left.\begin{aligned}\Theta_1 &= -A\vartheta + 2B(\theta_2+\theta_3), & \Omega_1 &= -B\omega_1,\\ \Theta_2 &= -A\vartheta + 2B(\theta_3+\theta_1), & \Omega_2 &= -B\omega_2,\\ \Theta_3 &= -A\vartheta + 2B(\theta_1+\theta_2), & \Omega_3 &= -B\omega_3,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

e questi valori debbono essere sostituiti nei secondi membri delle equazioni (4), $(4)_a$.

Tale sostituzione non offre alcuna difficoltà rispetto alle equazioni $(4)_a$.

Rispetto alle equazioni (4) giova innanzi tutto separare la parte moltiplicata per A da quella moltiplicata per B. In quanto alla prima parte, si riconosce immediatamente che i secondi membri delle equazioni (4) si riducono a

$$-A\left\{\frac{1}{\nabla}\frac{\partial(\nabla\vartheta)}{\partial q_i}-\frac{\vartheta}{\nabla}\frac{\partial\nabla}{\partial q_i}\right\},$$

ossia a

$$-A\frac{\partial\vartheta}{\partial q_i}, \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{α}$$

Quanto alla parte che contiene il fattore B, essa ha, nel secondo membro della prima equazione (4), l'espressione seguente:

$$-\frac{B}{\nabla}\left\{-2\frac{\partial[\nabla(\theta_2+\theta_3)]}{\partial q_1}+\frac{\partial(Q_1^2Q_3\omega_3)}{\partial q_2}+\frac{\partial(Q_1^2Q_2\omega_2)}{\partial q_3}\right\}$$

$$-2B\left\{\frac{\theta_2+\theta_3}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}+\frac{\theta_3+\theta_1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}+\frac{\theta_1+\theta_2}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right\}$$

ossia, dopo alcune riduzioni ovvie,

$$\left.\begin{aligned}-\frac{2B}{\nabla}\Big\{Q_1\theta_1\frac{\partial(Q_2Q_3)}{\partial q_1}-Q_3Q_1\frac{\partial(Q_2\theta_2)}{\partial q_1}-Q_1Q_2\frac{\partial(Q_3\theta_3)}{\partial q_1}\\ +\frac{1}{2}\frac{\partial(Q_1^2Q_3\omega_3)}{\partial q_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial(Q_1^2Q_2\omega_2)}{\partial q_3}\Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{β}$$

La sostituzione diretta dei valori (5) in questa espressione (β) condurrebbe ad un calcolo abbastanza prolisso, come nota (nei due luoghi citati) il Lamé, il quale, appunto per evitare tale prolissità, preferisce partire dalle equazioni cartesiane opportunamente predisposte. Ma tale ripiego non sarebbe ammissibile quì, dopo la già fatta osservazione circa la maggiore generalità delle equazioni (4) in confronto delle cartesiane. Bisogna dunque effettuare l'indicato calcolo, il quale tuttavia, in base ad una induzione ragionevole, può essere d'alquanto abbreviato. Poichè, infatti, si sa che nello spazio ordinario le equazioni finali dell'isotropìa non contengono, nei termini moltiplicati per B, che le componenti della rotazione elementare, è naturale di pensare che queste componenti debbano figurare anche nelle equazioni relative ad uno spazio più generale, essendochè il concetto di rotazione elementare, secondo la definizione di W. THOMSON, sussiste per ogni spazio.

Nella mia *Cinematica dei fluidi* (§ 11) ho già dato i valori generali delle componenti di rotazione in coordinate curvilinee qualunque. Colle attuali coordinate ortogonali q_1, q_2, q_3 quelle formole diventano

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1 &= \frac{1}{Q_2 Q_3}\left\{\frac{\partial(Q_3^2\varkappa_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(Q_2^2\varkappa_2)}{\partial q_3}\right\},\\
\vartheta_2 &= \frac{1}{Q_3 Q_1}\left\{\frac{\partial(Q_1^2\varkappa_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(Q_3^2\varkappa_3)}{\partial q_1}\right\},\\
\vartheta_3 &= \frac{1}{Q_1 Q_2}\left\{\frac{\partial(Q_2^2\varkappa_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(Q_1^2\varkappa_1)}{\partial q_2}\right\},
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

dove ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 designano le *doppie componenti della rotazione elementare* che accompagna la deformazione del sistema o mezzo elastico. Queste sono pure le espressioni che figurano nelle equazioni trasformate di LAMÉ, di NEUMANN e di BORCHARDT. La presenza, in queste formole, dei prodotti $Q_i^2\varkappa_i$ suggerisce di porre

$$Q_i^2\varkappa_i = K_i$$

e di scrivere le equazioni (5) sotto la forma seguente:

$$\begin{aligned}
Q_1\theta_1 &= \frac{1}{Q_1}\frac{\partial K_1}{\partial q_1} - \frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}K_1 + \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}K_2 + \frac{1}{Q_3^2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}K_3,\\
Q_2\theta_2 &= \frac{1}{Q_2}\frac{\partial K_2}{\partial q_2} + \frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}K_1 - \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}K_2 + \frac{1}{Q_3^2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}K_3,\\
Q_3\theta_3 &= \frac{1}{Q_3}\frac{\partial K_3}{\partial q_3} + \frac{1}{Q_1^2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}K_1 + \frac{1}{Q_2^2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}K_2 - \frac{1}{Q_3^2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_3}K_3,\\
Q_2Q_3\omega_1 &= \frac{\partial K_2}{\partial q_3} + \frac{\partial K_3}{\partial q_2} - 2\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}K_2 + \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}K_3\right),\\
Q_3Q_1\omega_2 &= \frac{\partial K_3}{\partial q_1} + \frac{\partial K_1}{\partial q_3} - 2\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}K_3 + \frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}K_1\right),\\
Q_1Q_2\omega_3 &= \frac{\partial K_1}{\partial q_2} + \frac{\partial K_2}{\partial q_1} - 2\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}K_1 + \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}K_2\right).
\end{aligned}$$

La sostituzione di questi valori nell'espressione (6) si effettua abbastanza agevolmente, se si tengono separati i termini che contengono le derivate parziali di primo e second'ordine delle funzioni K_i, da quelli che contengono le funzioni stesse. I primi si aggruppano, senza molta difficoltà, nell'espressione

$$-\frac{BQ_1}{Q_2Q_3}\left\{\frac{\partial(Q_2\vartheta_2)}{\partial q_3}-\frac{\partial(Q_3\vartheta_3)}{\partial q_2}\right\}. \tag{γ}$$

I secondi costituiscono una funzione omogenea e lineare delle quantità $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. I coefficienti di questa funzione sono alquanto complicati; ma, con un po' d'attenzione, essi possono facilmente ridursi ad una forma la cui simmetria fa subito riconoscere la legge che presiede alla composizione di tutte tre le analoghe funzioni lineari che entrano nelle equazioni (4). Ponendo, cioè,

$$\left.\begin{aligned}
H=&\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{\frac{1}{Q_1}\frac{\partial(Q_2Q_3)}{\partial q_1}\right\}+\frac{\partial}{\partial q_2}\left\{\frac{1}{Q_2}\frac{\partial(Q_3Q_1)}{\partial q_2}\right\}+\frac{\partial}{\partial q_3}\left\{\frac{1}{Q_3}\frac{\partial(Q_1Q_2)}{\partial q_3}\right\}\\
&-\left\{\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right\},\\
H_{11}=&\,Q_1\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\right)\right\}+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1},\\
H_{22}=&\,Q_2\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\right)+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\right)\right\}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2},\\
H_{33}=&\,Q_3\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right)\right\}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3},\\
H_{23}=&\,H_{32}=\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}-\frac{\partial^2 Q_1}{\partial q_2\partial q_3},\\
H_{31}=&\,H_{13}=\frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_3}-\frac{\partial^2 Q_2}{\partial q_3\partial q_1},\\
H_{12}=&\,H_{21}=\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}+\frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_3}{\partial q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}-\frac{\partial^2 Q_3}{\partial q_1\partial q_2},
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

e, tenendo conto dell'identità

$$H_{11}+H_{22}+H_{33}=H, \tag{13_a}$$

si trova che la funzione lineare delle $\varkappa_i$ relativa alla prima delle equazioni (4) può essere posto sotto la forma

$$-\frac{2B}{Q_2Q_3}\left\{(H_{11}-H)\,Q_1\varkappa_1+H_{12}\,Q_2\varkappa_2+H_{13}\,Q_3\varkappa_3\right\}$$

ossia

$$-\frac{B}{Q_2 Q_3}\frac{\partial\Phi}{\partial(Q_1\varkappa_1)}, \tag{δ}$$

posto

$$\Phi=\sum_{ij} H_{ij}\, Q_i\, Q_j\, \varkappa_i \varkappa_j - H\sum_i Q_i^2 \varkappa_i^2. \tag{14}$$

Raccogliendo le espressioni parziali (α), (γ), (δ) e formando le espressioni analoghe per la seconda e terza delle equazioni (4), si ottengono così le seguenti equazioni indefinite dei mezzi elastici isotropi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A}{Q_1}\frac{\partial\vartheta}{\partial q_1}+\frac{B}{Q_2Q_3}\left\{\frac{\partial(Q_2\vartheta_2)}{\partial q_3}-\frac{\partial(Q_3\vartheta_3)}{\partial q_2}\right\}+\frac{B}{Q_1Q_2Q_3}\frac{\partial\Phi}{\partial(Q_1\varkappa_1)}+F_1=0,\\
&\frac{A}{Q_2}\frac{\partial\vartheta}{\partial q_2}+\frac{B}{Q_3Q_1}\left\{\frac{\partial(Q_3\vartheta_3)}{\partial q_1}-\frac{\partial(Q_1\vartheta_1)}{\partial q_3}\right\}+\frac{B}{Q_1Q_2Q_3}\frac{\partial\Phi}{\partial(Q_2\varkappa_2)}+F_2=0,\\
&\frac{A}{Q_3}\frac{\partial\vartheta}{\partial q_3}+\frac{B}{Q_1Q_2}\left\{\frac{\partial(Q_1\vartheta_1)}{\partial q_2}-\frac{\partial(Q_2\vartheta_2)}{\partial q_1}\right\}+\frac{B}{Q_1Q_2Q_3}\frac{\partial\Phi}{\partial(Q_3\varkappa_3)}+F_3=0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Quanto alle equazioni ai limiti $(4)_a$, esse non danno luogo ad alcuna riduzione degna di nota, nè differiscono dalle ordinarie, e perciò non credo necessario di quì trascriverle per disteso.

Dalla forma delle equazioni (15) si deduce che, per formare le equazioni stesse col metodo della variazione del potenziale, basta prendere questo potenziale sotto la forma

$$-\int\left\{\frac{1}{2}A\vartheta^2+\frac{1}{2}B(\vartheta_1^2+\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)+\frac{B\Phi}{Q_1Q_2Q_3}\right\}dS, \tag{15_a}$$

donde si può subito concludere che l'espressione

$$\frac{\Phi}{Q_1Q_2Q_3}$$

possiede lo stesso carattere invariantivo delle espressioni

$$\vartheta \quad \text{e} \quad \vartheta_1^2+\vartheta_2^2+\vartheta_3^2.$$

Confrontando le precedenti equazioni (15) con quelle date da Lamé, e generalmente ammesse, si scorge che le prime non s'accordano colle seconde se non quando la funzione Φ sia *nulla* indipendentemente da ogni ipotesi sulle funzioni $\varkappa_i$, il che, stante l'identità $(13)_a$, esige che sia

$$H_{11}=0,\qquad H_{22}=0,\qquad H_{33}=0,\qquad H_{23}=0,\qquad H_{31}=0,\qquad H_{12}=0.$$

Ora queste sei equazioni sono precisamente quelle che, nel t. 5 del Giornale di Liouville e posteriormente nella V[a] delle *Leçons sur les coordonnées cur-*

vilignes, lo stesso Lamé ha dimostrato essere necessarie perchè l'espressione (1) sia una trasformata della

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

o, in altri termini, perchè lo spazio in cui esiste il mezzo elastico considerato sia lo spazio euclideo. Dunque le ordinarie equazioni dell'isotropìa sono subordinate alla verità del postulato d'Euclide, mentre le equazioni generali (4) ne sono, come ho già osservato, indipendenti.

A questo fatto, che è quello cui alludevo al principio del presente scritto, è dovuta la necessità dei varii artifizii adoperati dagli Autori citati per dedurre le equazioni dell'isotropìa dalle equazioni generali, quando la forma dell'elemento lineare, per l'indeterminazione de'suoi coefficienti, non include *a priori* l'ipotesi euclidea. Così, per esempio, Borchardt approfitta della forma che prende l'integrale $(15)_a$, quando le coordinate sono le cartesiane, per ridurre senz'altro a

$$\frac{1}{2} A \vartheta^2 + \frac{1}{2} B(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2)$$

la quantità sotto l'integrale.

Se si abbandona l'ipotesi euclidea, le equazioni (15) diventano le *equazioni dell'isotropìa in uno spazio di curvatura costante.* Dico di curvatura *costante,* perchè se la curvatura dello spazio fosse variabile, non sarebbe lecito considerare *a priori* i coefficienti A e B dell'espressione (9) come quantità costanti. Al qual proposito si può osservare che, se la quantità A fosse variabile colle q_i, la parte corrispondente al termine $\frac{1}{2} A \vartheta^2$ di Π nei secondi membri delle equazioni (15) sarebbe ancora molto semplice, cioè sarebbe rappresentata, com'è facile verificare, da

$$\frac{1}{Q_i} \frac{\partial (A \vartheta)}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Non così la parte relativa all'altro termine $\frac{1}{2} B \varpi$.

Ora, negli spazii di curvatura costante, la funzione Φ assume una forma semplicissima.

Infatti l'elemento lineare di uno spazio di curvatura costante $= \alpha$ può sempre essere posto sotto la forma indicata da Riemann

$$ds = \frac{\sqrt{dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2}}{1 + \frac{\alpha}{4}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)},$$

la quale si presta quì molto opportunamente per la sua simmetria. Ponendo

$$Q = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}(q_1^2+q_2^2+q_3^2)} (= Q_1 = Q_2 = Q_3),$$

si trova (13)

$$H = -3Q^3\alpha,$$

indi

$$H_{11} = H_{22} = H_{33} = -Q^3\alpha,$$

e finalmente

$$H_{23} = H_{31} = H_{12} = 0.$$

Ne risulta che, quando le coordinate q_i sono quelle di Riemann, cioè quelle che ho chiamato *stereografiche* nella mia *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* (t. 2 di questi Annali), si ha

$$\frac{\Phi}{Q_1Q_2Q_3} = 2\alpha Q^2(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+\varkappa_3^2).$$

Ora la quantità $Q^2(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+\varkappa_3^2)$ è il quadrato dello spostamento del punto (q_1, q_2, q_3), vale a dire è quella quantità che, colle coordinate ortogonali generali cui si riferisce l'espressione (1), viene rappresentata da $Q_1^2\varkappa_1^2+Q_2^2\varkappa_2^2+Q_3^2\varkappa_3^2$. Dunque in ogni spazio di curvatura costante α riferito a coordinate ortogonali si ha

$$\frac{\Phi}{Q_1Q_2Q_3} = 2\alpha(Q_1^2\varkappa_1^2+Q_2^2\varkappa_2^2+Q_3^2\varkappa_3^2) \tag{16}$$

e per conseguenza

$$\left.\begin{aligned} H &= -3\alpha Q_1Q_2Q_3, \\ H_{11} = H_{22} = H_{33} &= -\alpha Q_1Q_2Q_3, \\ H_{23} = H_{31} = H_{12} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16$_a$}$$

Queste ultime sei formole possono essere trasformate, come le analoghe di Lamé, in altrettante relazioni geometriche fra le curvature delle superficie ortogonali.

Denotando, infatti, con $\frac{1}{r_{ij}}$ la curvatura geodetica della linea d'intersezione delle due superficie $q_i = \text{cost.}$, $q_j = \text{cost.}$, quando questa linea si consideri come esistente sulla *prima* superficie (cosicchè la curvatura geodetica della stessa linea, considerata invece come esistente sulla *seconda* superficie, sarà da denotarsi con $\left.\frac{1}{r_{ji}}\right)$, si hanno, da formole note, le relazioni seguenti:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}=\frac{Q_1 Q_2}{r_{32}}, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial q_3}=\frac{Q_1 Q_3}{r_{23}},$$
$$\frac{\partial Q_2}{\partial q_3}=\frac{Q_2 Q_3}{r_{13}}, \qquad \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}=\frac{Q_2 Q_1}{r_{31}},$$
$$\frac{\partial Q_3}{\partial q_1}=\frac{Q_3 Q_1}{r_{21}}, \qquad \frac{\partial Q_3}{\partial q_2}=\frac{Q_3 Q_2}{r_{12}}.$$

Mediante queste relazioni si possono eliminare dalle ultime sei equazioni $(16)_a$ tutte le derivate delle tre funzioni Q_i, e, se inoltre si pone

$$Q_i dq_i = ds_i,$$

se ne possono eziandio eliminare le Q_i stesse. Così operando, si trova che le tre equazioni

$$H_{11}=H_{22}=H_{33}=-\alpha Q_1 Q_2 Q_3$$

equivalgono alle seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial s_2}+\frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial s_3}+\frac{1}{r_{12}^2}+\frac{1}{r_{13}^2}+\frac{1}{r_{21}r_{31}}+\alpha=0,\\
&\frac{\partial \frac{1}{r_{23}}}{\partial s_3}+\frac{\partial \frac{1}{r_{21}}}{\partial s_1}+\frac{1}{r_{23}^2}+\frac{1}{r_{21}^2}+\frac{1}{r_{32}r_{12}}+\alpha=0,\\
&\frac{\partial \frac{1}{r_{31}}}{\partial s_1}+\frac{\partial \frac{1}{r_{32}}}{\partial s_2}+\frac{1}{r_{31}^2}+\frac{1}{r_{32}^2}+\frac{1}{r_{13}r_{23}}+\alpha=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (16)_b$$

Quanto alle altre tre equazioni

$$H_{23}=H_{31}=H_{12}=0,$$

che sono identiche a tre di quelle di Lamé, esse traduconsi nelle corrispondenti relazioni (*Coordonnées curvilignes,* p. 80) fra i raggi r_{ij}, se non che questi debbono naturalmente considerarsi come raggi di curvatura geodetica e non come raggi di curvatura principale. Inoltre è da notare che Lamé prende le curvature con segno contrario.

Designando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le misure di curvatura (secondo Gauss) delle tre superficie $q_1=$cost., $q_2=$cost., $q_3=$cost. nel punto (q_1, q_2, q_3), e confrontando le precedenti equazioni $(16)_b$ colla nota equazione di Bonnet, si ricava

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{r_{21}r_{31}} + \alpha, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{r_{32}r_{12}} + \alpha, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{r_{13}r_{23}} + \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (16)_c$$

Quando $\alpha = 0$, cioè quando lo spazio è euclideo, i raggi di curvatura geodetica (r_{21}, r_{31}), (r_{32}, r_{12}), (r_{13}, r_{23}) si confondono coi raggi di curvatura principale delle tre superficie ortogonali $q_1 = \text{cost.}$, $q_2 = \text{cost.}$, $q_3 = \text{cost.}$ e i valori precedenti di α_1, α_2, α_3 coincidono con quelli dati dal teorema di Gauss.

In virtù della forma (16), trovata per la funzione Φ, le equazioni indefinite dell'isotropìa in uno spazio di curvatura costante α si possono mettere definitivamente sotto la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{Q_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_1} + \frac{B}{Q_2Q_3}\left\{\frac{\partial(Q_2\vartheta_2)}{\partial q_3} - \frac{\partial(Q_3\vartheta_3)}{\partial q_2}\right\} + 4\alpha B Q_1 \varkappa_1 + F_1 = 0, \\ \frac{A}{Q_2}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_2} + \frac{B}{Q_3Q_1}\left\{\frac{\partial(Q_3\vartheta_3)}{\partial q_1} - \frac{\partial(Q_1\vartheta_1)}{\partial q_3}\right\} + 4\alpha B Q_2 \varkappa_2 + F_2 = 0, \\ \frac{A}{Q_3}\frac{\partial \vartheta}{\partial q_3} + \frac{B}{Q_1Q_2}\left\{\frac{\partial(Q_1\vartheta_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial(Q_2\vartheta_2)}{\partial q_1}\right\} + 4\alpha B Q_3 \varkappa_3 + F_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Si poteva prevedere *a priori* che la curvatura dello spazio non dovesse essere priva d'influenza sulle equazioni dell'elasticità; ma è senza dubbio sommamente notevole che tale influenza vi si manifesti sotto un aspetto così semplice.

Non ostante questa semplicità, la teoria dei mezzi elastici negli spazii di curvatura costante presenta differenze rilevantissime in confronto dell'ordinaria, così da meritare, a quanto mi sembra, uno studio accurato, per le conseguenze a cui essa può condurre.

Mi restringerò, per ora, ad accennare sommariamente alcuni risultati relativi al caso che la deformazione elastica avvenga senza rotazione.

Essendo nulle in questo caso le tre quantità ϑ_i definite dalle equazioni (12), si può porre

$$\varkappa_i = \frac{1}{Q_i^2}\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (18)$$

e quindi (10)

$$\vartheta = \Delta_2 U, \qquad (18)_a$$

dove

$$\Delta_2 U = \frac{1}{Q_1 Q_2 Q_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{Q_2 Q_3}{Q_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{Q_3 Q_1}{Q_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{Q_1 Q_2}{Q_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)\right\}. \quad (18)_b$$

Le equazioni (17) diventano in tal modo

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left\{A\Delta_2 U + 4\alpha B U\right\} + Q_i F_i = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

e mostrano che le forze F devono avere un potenziale V, cioè che deve essere

$$F_i = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial V}{\partial q_i}; \quad (18)_c$$

con ciò le dette tre equazioni equivalgono all'unica

$$A\Delta_2 U + 4\alpha B U + V = 0, \quad (19)$$

nella quale si deve intendere compenetrata in U la quantità, indipendente da q_1, q_2, q_3, che viene introdotta dall'integrazione.

Se si suppone $\vartheta = 0$, cioè $\Delta_2 U = 0$, si ha di quì

$$V = -4\alpha B U, \qquad \Delta_2 V = 0, \quad (19)_a$$

e si ottiene così una deformazione, priva tanto di rotazione quanto di dilatazione, nella quale la forza e lo spostamento hanno in ogni punto la stessa (o la opposta) direzione e le grandezze costantemente proporzionali. Tale risultato, che non ha riscontro nello spazio euclideo, presenta una singolare analogìa con certi concetti moderni sull'azione dei mezzi dielettrici (Maxwell, *Treatise on electricity and magnetism,* t. 1, p. 63). Se si ammette l'eguaglianza di direzione fra la forza e lo spostamento bisogna supporre che la curvatura dello spazio sia negativa.

Per meglio fissare le idee giova considerare una forma particolare dell'elemento lineare dello spazio di curvatura costante α, giova porre, cioè,

$$ds^2 = d\xi^2 + \frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}^2(\xi\sqrt{\alpha})(d\eta^2 + \operatorname{sen}^2\eta\, d\zeta^2), \quad (20)$$

dove ξ è il raggio vettore condotto da un centro fisso ad un punto qualunque dello spazio ed η, ζ sono due angoli che determinano la direzione di questo raggio. Queste quantità ξ, η, ζ sono le coordinate *sferiche* dello spazio di curvatura costante. Con tali coordinate si ha

$$\Delta_2 U = \frac{\alpha}{\operatorname{sen}^2(\xi\sqrt{\alpha})}\left\{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\operatorname{sen}^2(\xi\sqrt{\alpha})\frac{\partial U}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\operatorname{sen}\eta\frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\eta}\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^2}\right\} \quad (20)_a$$

e si soddisfa all'equazione $\Delta_2 U = 0$ prendendo

$$U = \mu \cot(\xi \sqrt{\alpha}), \tag{21}$$

dove μ è una costante. Questa soluzione corrisponde all'ordinario potenziale elementare newtoniano.

Continuando a designare con $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ gli incrementi delle tre variabili ξ, η, ζ dovuti alla deformazione elastica, si ha in tale ipotesi

$$\varkappa_1 = \frac{dU}{d\xi} = -\frac{\mu\sqrt{\alpha}}{\operatorname{sen}^2(\xi\sqrt{\alpha})}, \qquad \varkappa_2 = 0, \qquad \varkappa_3 = 0,$$

epperò (5)

$$\theta_1 = \frac{d^2 U}{d\xi^2}, \qquad \theta_2 = \theta_3 = -\frac{1}{2}\frac{d^2 U}{d\xi^2},$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0.$$

Le tensioni interne del mezzo sono dunque determinate (11) dalle componenti

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 = -2B\frac{d^2 U}{d\xi^2}, \qquad \Theta_2 = \Theta_3 = B\frac{d^2 U}{d\xi^2}, \\ \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21$_a$}$$

vale a dire sono rappresentate da una forza agente, come pressione o come trazione, nella direzione delle linee di forza, e da una forza agente in senso opposto, cioè come trazione o come pressione rispettivamente, nelle direzioni perpendicolari alle dette linee.

Anche questo risultato è in armonia coi noti concetti di Faraday. Per verità Maxwell, svolgendo matematicamente questi concetti (Opera citata, t. 1, p. 128), suppone eguali in valore assoluto la pressione nel senso delle linee di forza e la trazione nel senso normale; ma recentemente Helmholtz, in una nuova teoria dei dielettrici (*Monatsberichte* dell'Accademia di Berlino, febbrajo 1881), è già stato condotto, da altre considerazioni, ad ammettere la possibilità di un rapporto diverso dall'unità.

Un'altra soluzione semplice dell'equazione $\Delta_2 U = 0$, considerata sotto la forma $(20)_a$, è data da

$$U = \mu\zeta, \tag{22}$$

dove μ è una costante. Questa soluzione corrisponde, anzi è identica, all'ordinario potenziale elettromagnetico d'una corrente rettilinea che percorra l'asse polare $\eta = 0$. Per il calcolo delle tensioni interne che si verificano in questo caso si presta però meglio un'altra forma dell'elemento lineare, e cioè la seguente:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2(u\sqrt{\alpha})\,dz^2 + \frac{1}{\alpha}\,\text{sen}^2(u\sqrt{\alpha})\,d\zeta^2,$$

dove u è la distanza di un punto qualunque dello spazio da un asse fisso, z è la distanza del piede di questa perpendicolare da un punto fisso dell'asse medesimo e ζ è l'angolo che il piano condotto per l'asse fisso e per il punto qualunque fa con un piano fisso. Queste quantità u, z, ζ sono le coordinate *cilindriche* dello spazio di curvatura costante.

Mediante queste coordinate si trova (supponendo che la corrente percorra l'asse fisso $u = 0$)

$$\varkappa_1 = 0, \qquad \varkappa_2 = 0, \qquad \varkappa_3 = \frac{\mu\alpha}{\text{sen}^2(u\sqrt{\alpha})},$$

e quindi dalle equazioni (5) si ricava

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,$$

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = -\frac{2\mu\alpha\cos(u\sqrt{\alpha})}{\text{sen}^2(u\sqrt{\alpha})}, \qquad \omega_3 = 0.$$

Le tensioni interne del mezzo sono dunque determinate (11) dalle componenti

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 0, \\ \Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = \dfrac{2B\mu\alpha\cos(u\sqrt{\alpha})}{\text{sen}^2(u\sqrt{\alpha})}, \qquad \Omega_3 = 0, \end{array}\right\} \tag{22$_a$}$$

vale a dire sono rappresentate unicamente da una forza di torsione intorno alle linee $u = \text{cost.}$, $\zeta = \text{cost.}$, ossia intorno alle linee che stanno in uno stesso piano con quella percorsa dalla corrente e che hanno i loro punti equidistanti da questa.

Se, mantenendo l'ipotesi particolare (18), si vuol considerare il moto vibratorio del mezzo elastico, in assenza d'ogni forza acceleratrice esterna, bisogna ammettere che la funzione U dipenda, oltre che dalle coordinate q_i, dal tempo t, e porre

$$F_i = -\rho Q_i \frac{\partial^2 \varkappa_i}{\partial t^2},$$

ossia (18)

$$F_i = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(-\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right),$$

dove ρ è la densità. Quest'ultima relazione, confrontata colla $(18)_c$, dà

$$V = -\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

epperò l'equazione generale del moto vibratorio, ricavata dalla (19), è

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = A \Delta_2 U + 4 \alpha B U. \tag{23}$$

Si ponga, per considerare una vibrazione stazionaria semplice,

$$U = \Psi \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \mu\right), \tag{24}$$

dove Ψ è una funzione delle sole coordinate e τ, μ sono due costanti, la prima delle quali rappresenta il periodo della vibrazione completa e la seconda la fase. Sostituendo questo valore di U nell'equazione (23) si ottiene

$$A \Delta_2 \Psi + 4\left(\frac{\pi^2 \rho}{\tau^2} + \alpha B\right)\Psi = 0. \tag*{$(24)_a$}$$

Quando la curvatura α è nulla (spazio *euclideo*), o positiva (spazio di Riemann, o *sferico*), non vi è alcun valore ammissibile di τ che annulli il coefficiente di Ψ. Ma quando la curvatura α è negativa (spazio di Gauss, o *pseudosferico*), cioè quando si ha

$$\alpha = -\frac{1}{R^2},$$

dove R è il raggio di curvatura costante, prendendo

$$\tau = \pi R \sqrt{\frac{\rho}{B}} \tag*{$(24)_b$}$$

il coefficiente di Ψ diventa nullo, e si ottiene una classe singolare di vibrazioni, definite da

$$U = \Psi \cos\left(\frac{2t}{R}\sqrt{\frac{B}{\rho}} + \mu\right), \tag*{$(24)_d$}$$

per le quali la funzione Ψ delle tre coordinate q_i soddisfa all'equazione

$$\Delta_2 \Psi = 0. \tag*{$(24)_d$}$$

Queste vibrazioni, che sono prive ad un tempo di rotazione e di dilatazione, e che, come tali, non hanno riscontro nello spazio ordinario (eccettuando i cosidetti liquidi incompressibili), avvengono dovunque nella stessa direzione della forza dovuta al potenziale Ψ ed hanno l'amplitudine proporzionale a questa forza. Siffatto moto vibratorio fa nascere delle tensioni interne nel mezzo vibrante, le quali si calcolano colle formole (5) ed (11), come nel caso dell'equilibrio, e contengono tutte il fattore periodico. Se si prendessero, per esempio, per Ψ i valori (21), (22), che soddisfanno all'equazione $(24)_d$, si troverebbero ancora le tensioni $(21)_a$, $(22)_a$, moltiplicate per il detto fattore.

Se nell'equazione (23) si suppone che U dipenda soltanto da ξ e da t [dove ξ ha lo stesso significato che nell'equazione (20)], si ottiene l'equazione differenziale delle onde sferiche, sotto la forma

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{A}{\operatorname{sen}^2(\xi\sqrt{\alpha})} \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\operatorname{sen}^2(\xi\sqrt{\alpha})\frac{\partial U}{\partial \xi}\right\} + 4\alpha B U. \tag{25}$$

Si soddisfa a quest'equazione ponendo

$$U = \frac{E\cos(g\xi + ht + k)}{\operatorname{sen}(\xi\sqrt{\alpha})} \tag{$(25)_a$}$$

dove g, h, k, E sono quattro costanti, le prime due delle quali sono legate dalla relazione

$$h^2 = \frac{A}{\rho} g^2 - \frac{A + 4B}{\rho}\alpha. \tag{$(25)_b$}$$

Si ottengono così delle onde sferiche progressive, la cui velocità di propagazione

$$a = \pm\frac{h}{g}$$

e la cui lunghezza d'onda

$$\lambda = \pm\frac{2\pi}{g}$$

sono legate dalla relazione

$$a^2 = \frac{A}{\rho} - \frac{A + 4B}{\rho}\frac{\alpha\lambda^2}{4\pi^2}. \tag{$(25)_c$}$$

Supponendo $g^2 = \alpha$ si rientrerebbe nel caso dianzi considerato.

Questi risultati, accennati quì con una rapidità di cui debbo chieder venia al lettore, mi sembrano tali da conciliare qualche attenzione alle nuove equazioni (17).

Pavia, 5 giugno 1881.

Ueber ternäre biquadratische Formen.

(*Von* F. R. Scherrer, *in Frauenfeld.*)

[Auszug aus der Beilage zum Programm der Thurgauischen Cantonsschule von 1881.]

I. Theorie der Polaren ebener algebraischer Curven.

Setzt man die ternäre Form n^{ten} Grades der Variabeln α, β, δ

$$\sum_{qrs} \frac{n!}{q!\,r!\,s!} A_{qrs}\alpha^q\beta^r\delta^s, \qquad (q+r+s=n)$$

die mit K^n bezeichnet werden mag, identisch mit

$$\sum_{i=1}^{i=\binom{n+2}{2}} m_i(\alpha x_i+\beta y_i-\delta)^n,$$

fasst x_i, y_i als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, dem die Masse m_i beigelegt ist, und α, β, δ als Coëfficienten der Gleichung

$$\alpha x+\beta y-\delta=0$$

einer Geraden in Normalform auf, so gelangt man durch Betrachtungen, welche denen, die Herr Prof. Reye in Strassburg in seiner Arbeit: *Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen* (*) angestellt hat, ganz analog sind, zu folgenden Sätzen:

1.) *Jede ternäre Form n^{ten} Grades kann auf unendlich viele Arten durch die n^{ten} Momente eines Systemes von $\binom{n+2}{2}$ Massenpunkten bezüglich aller Geraden des Ebene dargestellt werden. Die $\binom{n+2}{2}$ Punkte dürfen nicht auf*

(*) Crelle's Journal für Mathematik, Bd. 78.

einer Curve n^{ter} Ordnung, können aber sonst ganz willkürlich angenommen werden; durch ihre Lage sind die ihnen beizulegenden Massen eindeutig bestimmt.

2.) *Jede beliebige Curve n^{ter} Classe kann als die n^{te} Nullcurve eines $\binom{n+2}{2}$-punktigen Massensystems aufgefasst werden.*

3.) *Wenn des Moment eines Massensystems bezüglich einer Curve n^{ter} Ordnung für irgend eine Richtung den Werth Null hat, so hat es denselben auch für jede andere Richtung.*

4.) *Wenn ein Massensystem indifferent ist hinsichtlich seiner n^{ten} Momente, so ist sein Moment in Bezug auf jede beliebige Curve n^{ter} Ordnung gleich Null.*

Oder:

5.) *Wenn zwei Massensysteme aequivalent sind hinsichtlich ihrer n^{ten} Momente, so sind bezüglich jeder Curve n^{ter} und niedrigerer Ordnung ihre Momente einander gleich.*

Ist K^n eine Curve n^{ter} Classe von der Gleichung

$$\left.\begin{array}{c} K^n \equiv \sum_{qrs} \frac{n!}{q!\,r!\,s!} A_{qrs} \alpha^q \beta^r \delta^s \equiv \sum_{i=1}^{i=\binom{n+2}{2}} m_i (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^n = 0 \\ (q+r+s=n) \end{array}\right\} \tag{1}$$

und C^k eine Curve k^{ter} Ordnung, deren Gleichung

$$C^k_{(x,y)} \equiv \sum_{\rho\sigma\tau} B_{\rho\sigma\tau} x^\rho y^\sigma = 0 \qquad (\rho+\sigma+\tau=k \text{ und } k<n)$$

sein mag, so verstehen wir unter der *Polaren von C^k bezüglich der Curve n^{ter} Classe K^n* die Curve $n-k^{ter}$ Classe Π^{n-k}, welche die Gleichung besitzt

$$\Pi^{n-k} \equiv \sum_{i=1}^{i=\binom{n+2}{2}} m_i C^k_{(x_i,y_i)} (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^{n-k} = 0. \tag{2}$$

Wenn man also

$$\Pi^{n-k} \equiv \sum_{uvw} \frac{(n-k)!}{u!\,v!\,w!} C_{uvw} \alpha^u \beta^v \delta^w \qquad (u+v+w=n-k)$$

setzt, so bestehen zwischen den Coëfficienten der Formen K^n, C^n und Π^{n-k}

die folgenden Relationen:

$$C_{uvw} = \sum_{\rho\sigma\tau} (-1)^{\tau} A_{u+\rho,\, v+\sigma,\, w+\tau} B_{\rho\sigma\tau}, \tag{3}$$

aus denen sich der Satz ergiebt:

6.) *Durchläuft eine Curve k^{ter} Ordnung einen Curvenbüschel, so beschreibt ihre Polare eine zu dem ersteren projectivische Curvenschaar.*

Eine Curve k^{ter} Ordnung wird *apolar zu der Curve n^{ter} Classe K^n* genannt, wenn ihr keine bestimmte Curve $n-k^{ter}$ Classe als Polare in Bezug auf K^n entspricht, das heisst, wenn alle C_{uvw} verschwinden; eine apolare Curve k^{ter} Ordnung ist somit durch $\binom{k+2}{2} - \binom{n-k+2}{2} - 1$ beliebige Punkte bestimmt.

7.) *Zwei apolare Curven k^{ter} Ordnung bestimmen einen Büschel apolarer Curven k^{ter} Ordnung.*

8.) *Jede Curve n^{ter} oder niedrigerer Ordnung, welche eine apolare Curve der K^n als Theil enthält, ist selbst apolar zu K^n.*

9.) *Wenn ein Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente durch r Massenpunkte ersetzt werden kann, so geht jede zur n^{ten} Nullcurve des Systems apolare C^n, welche $r-1$ dieser Massenpunkte enthält, auch durch den r^{ten} Punkt, es sei denn, dass dessen Masse Null ist; im letzteren Falle ist das gegebene Massensystem hinsichtlich seiner n^{ten} Momente aequivalent dem Systeme der $r-1$ übrigen Massenpunkte.*

10.) *Werden auf einer zu K^n apolaren Curve k^{ter} Ordnung C^k beliebige $\binom{n+2}{2} - \binom{n-k+2}{2}$ Punkte angenommen, so können denselben solche Massen beigelegt werden, dass sie dem gegebenen Massensystem hinsichtlich der n^{ten} Momente aequivalent sind; die ihnen beizulegenden Massen sind durch ihre Lage eindeutig bestimmt.*

11.) *Werden von der Punktegruppe, in welcher sich eine apolare Curve i^{ter} und eine solche k^{ter} Ordnung schneiden, beliebige $\binom{n+2}{2} - \binom{n-i+2}{2} - \binom{n-k+2}{2} + \binom{n-i-k+2}{2}$ Punkte angenommen, so können denselben solche Massen beigelegt werden, dass sie dem gegebenen Massensystem hinsichtlich der n^{ten} Momente aequivalent sind; die ihnen beizulegenden Massen sind durch ihre Lage eindeutig bestimmt.*

II. Darstellung der ternären biquadratischen Form als Summe von sechs Biquadraten.

Zufolge Satz (1) lässt sich die ternäre biquadratische Form

$$K^4 \equiv \sum_{qrs} \frac{4!}{q!\,r!\,s!} A_{qrs} \alpha^q \beta^r \delta^s \qquad (q+r+s=4) \tag{4}$$

überführen in

$$K^4 \equiv \sum_{i=1}^{i=15} m_i (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^4. \tag{5}$$

Soll nun die Polare eines Kegelschnittes C^2, dessen Gleichung

$$C^2_{(x,y)} \equiv \sum_{\rho\sigma\tau} B_{\rho\sigma\tau} x^\rho y^\sigma = 0 \qquad (\rho + \sigma + \tau = 2)$$

ist, in Bezug auf die Curve K^4 vierter Classe, welche der Gleichung

$$K^4 = 0$$

entspricht, in den doppelt gelegten Punkt x', y' zerfallen, so muss nach Gleichung (2)

$$\sum_{i=1}^{i=15} m_i C^2_{(x_i, y_i)} (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^2 \equiv \lambda (\alpha x' + \beta y' - \delta)^2$$

sein; das heisst, es müssen der Gl. (3) gemäss die sechs Gleichungen bestehen:

$$\sum_{\rho\sigma\tau} (-1)^\tau A_{u+\rho,\, v+\sigma,\, w+\tau} B_{\rho\sigma\tau} - \lambda x'^u y'^v (-1)^w = 0 \qquad (u+v+w=2).$$

Fügt man zu diesen noch die nachstehende

$$\sum_{\rho\sigma\tau} B_{\rho\sigma\tau} x^\rho y^\sigma = 0,$$

so erhält man durch Elimination der $B_{\rho\sigma\tau}$ und des λ aus diesen sieben Gleichungen:

$$\begin{vmatrix}
0, & x^2, & xy, & y^2, & x, & y, & 1 \\
x'^2, & A_{400}, & A_{310}, & A_{220}, & -A_{301}, & -A_{211}, & A_{202} \\
x'y', & A_{310}, & A_{220}, & A_{130}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{112} \\
y'^2, & A_{220}, & A_{130}, & A_{040}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{022} \\
x', & -A_{301}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{202}, & A_{112}, & -A_{103} \\
y', & -A_{211}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{013} \\
1, & A_{202}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{103}, & -A_{013}, & A_{004}
\end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung, deren linke Seite wir mit $C'^2_{(x,y)}$ bezeichnen wollen, stellt denjenigen Kegelschnitt C'^2 dar, dessen Polare in Bezug auf K^4 der doppelt gelegte Punkt x', y' ist; wir nennen daher den Kegelschnitt C'^2 und dessen Punkte *dem Punkte x', y' in Bezug auf K^4 associirt* (*).

12.) *Geht der einem Punkte associirte Kegelschnitt durch einen gewissen andern Punkt, so geht auch der dem letzteren associirte Kegelschnitt durch den ersteren.*

13.) *Alle sich selbst associirten Punkte liegen auf einer Curve vierter Ordnung* C^4, deren Gleichung

$$C^4_{(x,y)} \equiv \begin{vmatrix} 0, & x^2, & xy, & y^2, & x & y, & 1 \\ x^2, & A_{400}, & A_{310}, & A_{220}, & -A_{301}, & -A_{211}, & A_{202} \\ xy, & A_{310}, & A_{220}, & A_{130}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{112} \\ y^2, & A_{220}, & A_{130}, & A_{040}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{022} \\ x, & -A_{301}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{202}, & A_{112}, & -A_{103} \\ y, & -A_{211}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{112}, & A_{122}, & -A_{013} \\ 1, & A_{202}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{103}, & -A_{013}, & A_{004} \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

ist.

Sind x', y' und x'', y'' zwei einander in Bezug auf K^4 associirte Punkte, C'^2 der dem ersteren, C''^2 der dem letzteren associirte Kegelschnitt, und setzt man

$$m' = \frac{\sum_{i=1}^{i=15} m_i \, C'^2_{(x_i, y_i)}}{C''^2_{(x', y')}} \qquad (8)$$

und

$$m'' = \frac{\sum_{i=1}^{i=15} m_i \, C''^2_{(x_i, y_i)}}{C'^2_{(x'', y'')}},$$

wobei

$$C'^2_{(x,y)} = 0 \quad \text{und} \quad C''^2_{(x,y)} = 0$$

die Gleichungen der beiden Kegelschnitte sind, so wird nach Satz (12) die

(*) Vergleiche die analoge Definition des Herrn Reye in seiner Arbeit: *Darstellung quaternärer* etc., in Crelle's Journal, Bd. 78, pag. 124.

Gleichung

$$\sum_{i=1}^{i=15} m_i C^2_{(x_i, y_i)} (\alpha x_i + \beta y_i - \delta)^2 - m' C^2_{(x', y')} (\alpha x' + \beta y' - \delta)^2 - m'' C^2_{(x'', y'')} (\alpha x'' + \beta y'' - \delta)^2 = 0$$

identisch erfüllt; sobald man $C^2_{(x,y)}$ entweder durch $C'^2_{(x,y)}$ oder $C''^2_{(x,y)}$ ersetzt; folglich sind die beiden Kegelschnitte C'^2 und C''^2 apolar zu der vierten Nullcurve des Massensystems $m_1(x_1, y_1)$, $m_2(x_2, y_2)$,... $m_{15}(x_{15}, y_{15})$, $-m'(x', y')$, $-m''(x'', y'')$, also lassen sich nach Satz (11) den vier Schnittpunkten von C'^2 und C''^2 solche Massen beilegen, dass dieselben dem soeben genannten Massensystem hinsichtlich der vierten Momente aequivalent sind, woraus folgt:

14.) *Jedes ebene Massensystem ist hinsichtlich seiner vierten Momente durch sechs Massenpunkte ersetzbar.*

Oder:

15.) *Jede ternäre biquadratische Form ist auf dreifach unendlich viele Arten als Summe von sechs Biquadraten darstellbar.*

Liesse sich das Massensystem $m_1(x_1, y_1)$, $m_2(x_2, y_2)$,... $m_{15}(x_{15}, y_{15})$ hinsichtlich seiner vierten Momente durch fünf Massenpunkte ersetzen, so wäre der durch diese fünf Punkte gelegte Kegelschnitt C^2 apolar zu K^4, was den Gleichungen (3) gemäss nur dann möglich ist, wenn die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} A_{400}, & A_{310}, & A_{220}, & -A_{301}, & -A_{211}, & A_{202} \\ A_{310}, & A_{220}, & A_{130}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{112} \\ A_{220}, & A_{130}, & A_{040}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{022} \\ -A_{301}, & -A_{211}, & -A_{121}, & A_{202}, & A_{112}, & -A_{103} \\ -A_{211}, & -A_{121}, & -A_{031}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{013} \\ A_{202}, & A_{112}, & A_{022}, & -A_{103}, & -A_{013}, & A_{004} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Wenn umgekehrt A gleich Null ist, so besitzt die K^4 einen apolaren Kegelschnitt C^2, dessen Gleichung

$$C^2_{(x,y)} = 0$$

sein mag. Bezeichnet man nun mit K^4_0 die vierte Nullcurve des um einen beliebigen Massenpunkt $m_0(x_0, y_0)$ vermehrten Massensystems m_1, m_2,... m_{15}, so ist C^2 der dem Punkte x_0, y_0 in Bezug auf K^4_0 associirte Kegelschnitt, somit lässt sich das um $m_0(x_0, y_0)$ vermehrte ursprüngliche Massensystem hinsichtlich seiner vierten Momente durch sechs Massenpunkte ersetzen, von denen $m_0(x_0, y_0)$ einer ist, während die fünf übrigen auf C^2 liegen; folglich lässt sich die ursprüngliche Form durch die vierten Momente der fünf letzten Massenpunkte auf C^2 darstellen, woraus der Satz folgt:

16.) *Eine ternäre biquadratische Form lässt sich stets und auch nur dann als eine Summe von fünf vierten Potenzen linearer Formen darstellen, wenn die Determinante A verschwindet; und zwar ist dann die Darstellung auf unendlich viele Arten möglich. Die betreffenden linearen Formen stellen, wenn die Variabeln als Liniencoordinaten interpretirt werden, fünf Punkte eines von der dargestellten Form allein abhängigen Kegelschnittes dar, auf welchem einer der Punkte beliebig gewählt werden darf* (*).

Dieser Kegelschnitt tritt übrigens doppelt gelegt an die Stelle von C^4 im Falle A verschwindet.

17.) *Eine ternäre biquadratische Form lässt sich stets und nur dann als eine Summe von vier vierten Potenzen linearer Formen darstellen, wenn die sämmtlichen ersten Unterdeterminanten der Determinante A verschwinden* (**).

Die Polare eines Kegelschnittes, der durch fünf von sechs Massenpunkten geht, durch deren vierte Momente die Form K^4 darstellbar ist, reducirt sich auf den doppelt gelegten sechsten Punkt; somit ist jedem der sechs Punkte der Kegelschnitt associirt, welcher durch die fünf übrigen Punkte geht, und wir nennen daher eine Gruppe von sechs Massenpunkten, durch deren vierte Momente K^4 darstellbar ist, *ein Sextupel associirter Punkte in Bezug auf* K^4. Jedem Punkte eines solchen Sextupels gehört eine ganz bestimmte Masse zu, welche mit Hülfe der Gleichung (8) berechnet wird und von den übrigen Punkten des Sextupels unabhängig ist.

Ist C^3 eine durch drei Punkte eines Sextupels gehende zu K^4 apolare Curve dritter Ordnung, so bildet sie mit der Geraden, welche zwei der übrigen Punkte des Sextupels verbindet nach Satz (8) eine apolare Curve vierter Ordnung, die nach Satz (9) auch durch den letzten Punkt des Sextupels gehen muss. Das heisst:

(*) Diesen Satz bewies schon, wenn auch in ganz anderer Weise, Herr Lüroth, Mathematische Annalen, Bd. 1, pag. 41, und wenigstens theilweise Clebsch in seiner Abhandlung *Ueber Curven vierter Ordnung,* Crelle's Journal, Bd. 59, pag. 143.

(**) Vergleiche Lüroth, Mathematische Annalen, Bd. 1, pag. 52.

18.) *Geht eine in Bezug auf K^4 apolare Curve dritter Ordnung durch drei Punkte eines Sextupels associirter Punkte in Bezug auf K^4, so geht sie auch durch die übrigen.*

Hieraus ergiebt sich ohne Weiteres:

19.) *Durch die zwölf Punkte irgend zweier Sextupel associirter Punkte in Bezug auf K^4 lässt sich stets eine Curve dritter Ordnung legen; dieselbe ist apolar zu K^4* (*).

III. Das System der Kegelschnitte, welche den Punkten der Ebene in Bezug auf K^4 associirt sind.

Ist

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden ξ mit den homogenen Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 und diejenige eines Punktes x mit den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3, ferner

$$K^4 \equiv \sum a_{iklm} \xi_i \xi_k \xi_l \xi_m \qquad \begin{pmatrix} i \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

und setzt man voraus, dass sich a_{iklm} nicht ändert, wenn die vier Indices beliebig vertauscht werden, so erhält der Kegelschnitt $C^2_{x'}$, welcher dem Punkte x' in Bezug auf die Curve vierter Classe, deren Gleichung

$$K^4 = 0$$

lautet, associirt ist, in homogenen Coordinaten die Gleichung:

$$C^2_{x'} = \begin{vmatrix} 0, & x_1^2, & x_1 x_2, & x_2^2, & x_2 x_3, & x_3^2, & x_3 x_1 \\ x'^2_1, & a_{1111}, & a_{1112}, & a_{1122}, & a_{1123}, & a_{1133}, & a_{1131} \\ x'_1 x'_2, & a_{1211}, & a_{1212}, & a_{1222}, & a_{1223}, & a_{1233}, & a_{1231} \\ x'^2_2, & a_{2211}, & a_{2212}, & a_{2222}, & a_{2223}, & a_{2233}, & a_{2231} \\ x'_2 x'_3, & a_{2311}, & a_{2312}, & a_{2322}, & a_{2323}, & a_{2333}, & a_{2331} \\ x'^2_3, & a_{3311}, & a_{3312}, & a_{3322}, & a_{3323}, & a_{3333}, & a_{3331} \\ x'_3 x'_1, & a_{3111}, & a_{3112}, & a_{3122}, & a_{3123}, & a_{3133}, & a_{3131} \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

(*) Diesen Satz bewies auch Herr Rosanes in seinem Aufsatze: *Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen,* Crelle, Bd. 76, pag. 328.

Ist endlich

$$A = \begin{vmatrix} a_{1111}, & a_{1112}, & a_{1122}, & a_{1123}, & a_{1133}, & a_{1131} \\ a_{1211}, & a_{1212}, & a_{1222}, & a_{1223}, & a_{1233}, & a_{1231} \\ a_{2211}, & a_{2212}, & a_{2222}, & a_{2223}, & a_{2233}, & a_{2231} \\ a_{2311}, & a_{2312}, & a_{2322}, & a_{2323}, & a_{2333}, & a_{2331} \\ a_{3311}, & a_{3312}, & a_{3322}, & a_{3323}, & a_{3333}, & a_{3331} \\ a_{3111}, & a_{3112}, & a_{3122}, & a_{3123}, & a_{3133}, & a_{3131} \end{vmatrix} \tag{11}$$

und

$$A_{ik.\,lm} = \frac{\partial A}{\partial a_{iklm}},$$

wobei die beiden ersten Indices ik die Zeile und die beiden letzten lm die Colonne bezeichnen, welcher das Element a_{iklm} in der Determinante A angehört, so ist

$$C^2_{x'} \equiv \sum_{ik} \sum_{lm} A_{ik,\,lm} x'_i x'_k x_l x_m \qquad \left(\begin{matrix} ik \\ lm \end{matrix}\right\} = 11,\ 12,\ 22,\ 23,\ 33,\ 31\Bigg).$$

Setzt man die rechte Seite dieser Gleichung unter Weglassung des obern Index der x gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$C^4 \equiv \sum_{ik} \sum_{lm} A_{ik,\,lm} x_i x_k x_l x_m = 0 \tag{12}$$

der Curve der sich selbst associirten Punkte.

20.) *Die Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf den ihm associirten Kegelschnitt ist zugleich die dritte Polare desselben Punktes in Bezug auf C^4.*

Und:

21.) *Jeder Kegelschnitt, welcher einem auf ihm liegenden Punkt associirt ist, berührt in diesem die C^4.*

Hieraus ergiebt sich mit Berücksichtigung des Satzes (12):

22.) *Durch jeden Punkt P der Ebene gehen acht Punkten der C^4 associirte Kegelschnitte; dieselben berühren die C^4 in den Schnittpunkten der letzteren mit dem Kegelschnitt, welcher dem Punkte P associirt ist.*

Der dem Punkte x' associirte Kegelschnitt hat in Liniencoordinaten die

Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 2\sum A_{11,ik}x'_i x'_k, & \sum A_{12,ik}x'_i x'_k, & \sum A_{31,ik}x'_i x'_k, & \xi_1 \\ \sum A_{12,ik}x'_i x'_k, & 2\sum A_{22,ik}x'_i x'_k, & \sum A_{23,ik}x'_i x'_k, & \xi_2 \\ \sum A_{31,ik}x'_i x'_k, & \sum A_{23,ik}x'_i x'_k, & 2\sum A_{33,ik}x'_i x'_k, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Diese Gleichung liefert mit Zuhülfenahme des Satzes (12) den nachstehenden:

23.) *Die Punkte, denen Kegelschnitte associirt sind, welche eine gegebene Gerade g berühren, liegen auf einer Curve C_g^4 vierter Ordnung; dieselbe ist die Enveloppe derjenigen Kegelschnitte, welche den Punkten der Geraden g associirt sind.*

Der dem Punkte x' in Bezug auf K^4 associirte Kegelschnitt zerfällt in ein Geradenpaar, wenn seine Discriminante

$$C^6 \equiv \begin{vmatrix} 2\sum A_{11,ik}x'_i x'_k, & \sum A_{12,ik}x'_i x'_k, & \sum A_{31,ik}x'_i x'_k \\ \sum A_{12,ik}x'_i x'_k, & 2\sum A_{22,ik}x'_i x'_k, & \sum A_{23,ik}x'_i x'_k \\ \sum A_{31,ik}x'_i x'_k, & \sum A_{23,ik}x'_i x'_k, & 2\sum A_{33,ik}x'_i x'_k \end{vmatrix} \qquad (14)$$

verschwindet, woraus folgt:

24.) *Alle Punkte, welchen in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte associirt sind, erfüllen eine Curve sechster Ordnung C^6* (*).

Wenn die Invariante A (11) gleich Null ist, so zerfällt C^6 in den dreifach gelegten Kegelschnitt (**), welcher in diesem Falle an die Stelle von C^4 tritt.

Sind P_1, P_2, P_3 Punkte eines Sextupels associirter Punkte in Bezug auf K^4, dessen drei übrige Punkte auf einer Geraden g liegen, und bezeichnen wir im Dreieck $P_1P_2P_3$ die der Ecke P_i gegenüberliegende Seite mit g_i, dann ist dem Punkte P_i das Geradenpaar gg_i und jedem Punkte von g ein Kegelschnitt associirt, welcher durch die drei Punkte P_i geht; es participirt somit die Gerade g an drei und, wie sich leicht zeigen lässt, auch nur an drei zerfallenden associirten Kegelschnitten. Der irgend einem Punkte P der Ebene

(*) Dieser Satz ist gleichbedeutend mit demjenigen, welchen Clebsch in seinem Aufsatze: *Ueber Curven vierter Ordnung* (Crelle, Bd. 59, pag. 135) bewiesen hat. Es ist indessen der Ausdruck für ψ erwähnten Ortes unrichtig, wodurch die Betrachtungen in § 5 der citirten Arbeit unmöglich werden.

(**) Clebsch in Crelle, Bd. 59, pag. 145.

associirte Kegelschnitt C^2 schneidet die C^6 (14) in zwölf Punkten, welchen zerfallende durch P gehende Kegelschnitte associirt sind; ist g eine durch P gehende Gerade, welche einem dieser Schnittpunkte associirt ist, so participirt dieselbe an drei zerfallenden Kegelschnitten, die Schnittpunkten der C^2 und C^6 associirt sind; es gehen demnach durch jeden Punkte der Ebene blos vier Geraden, welche Theile von associirten Kegelschnitten sind, woraus der Satz folgt:

25.) *Alle Punkten der Ebene associirten Geradenpaare umhüllen eine Curve K'^4 vierter Classe; jede Tangente derselben participirt an drei associirten Geradenpaaren, deren zweite Geraden sich in den Ecken eines der Curve C^6 eingeschriebenen Dreiecks schneiden, welches die Eigenschaft hat, dass jeder Ecke desselben die gegenüberliegende Seite und die allen drei Paaren angehörende Tangente von K'^4 associirt ist. Es existiren somit unendlich viele Dreiecke, welche gleichzeitig der Curve C^6 ein- und der Curve K'^4 umgeschrieben sind; durch die Eckpunkte von irgend zwei solchen Dreiecken lässt sich ein Kegelschnitt legen, welcher die Eckpunkte von noch zwei weiteren Dreicken derselben Art enthält.*

Es lässt sich unschwer darthun, dass die Polare K^3 einer Tangente von K'^4 in Bezug auf K^4 als dritte Nullcurve eines dreipunktigen Massensystems aufgefasst werden kann; es zerfällt daher die Polare der Verbindungslinie zweier dieser Punkte in Bezug auf K^3 in den doppelt gelegten dritten Punkt, also bilden diese drei Punkte die HESSE'sche Curve von K^3, welche bekanntlich nur dann in drei Punkte zerfällt, wenn die in symbolischer Form geschriebene Invariante

$$S = (abc)(abd)(acd)(bcd)$$

verschwindet (*); folglich besitzt die Curve K'^4 die Gleichung

$$(abc)(abd)(acd)(bcd)a_\xi b_\xi c_\xi d_\xi = 0 \qquad (15)$$

welche schon Herr LÜROTH (**) angegeben hat.

Irgend einem Schnittpunkte der C^4 (12) und der C^6 (14), welchen wir mit P bezeichnen wollen, ist ein Geradenpaar gg' associirt, dessen eine Gerade g' in P die C^4 berührt; die Polare von g' in Bezug auf die Polare von g zerfällt somit in den doppelt gelegten Punkt P; der letztere ist daher ein Wen-

(*) CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie,* herausgegeben von LINDEMANN, Bd. 1, pag. 553.
(**) Mathematische Annalen, Bd. 1, pag. 45.

depunkt der Polaren von g in Bezug auf K^4 und g' die zugehörige Wendetangente, wesshalb sie auch die HESSE'sche Curve von K^4 berührt. Hieraus ergiebt sich der Satz:

26.) *Die vierundzwanzig Schnittpunkte von C^4 und C^6 sind die Wendepunkte der ersten Polaren von K^4 und die in ihnen an C^4 gelegten Tangenten die zugehörigen Wendetangenten; die letzteren berühren die K'^4 sowie die Hesse'sche Curve von K^4* (*).

27.) *Die Doppelpunkte derjenigen Kegelschnitte, welche Punkten der Ebene associirt sind und zerfallen, liegen auf einer Curve zwölfter Ordnung C^{12}.*

Einem gemeinsamen Punkte der Curven C^6 und C_g^4 (13) ist ein Geradenpaar associirt, welches die Gerade g berührt, dessen Doppelpunkt also auf g liegt; da aber g die C^{12} nur in zwölf Punkten schneidet, so können C^6 und C_g^4 nicht vierunzwanzig sondern nur zwölf von einander verschiedene gemeinsame Punkte besitzen; das heisst.

28.) *Alle Curven C_g^4 berühren die Curve C^6 zwölfmal.*

Frauenfeld, im December 1880.

(*) In der schon mehrfach citirten Abhandlung von CLEBSCH: *Ueber Curven vierter Ordnung* in CRELLE's Journal, Bd. 59 findet sich der diesem Satze dualistisch entsprechende ebenfalls; jedoch sind dort die Gleichungen (15) sowie die Gestalt von Ω (oben C^4) unrichtig und ergeben nur desshalb ein richtiges Resultat, weil in der Endgleichung diese Unrichtigkeiten herausfallen.

Generalizzazione di alcuni teoremi dei sig.[i] Hermite, Brioschi e Mittag-Leffler, sulle equazioni differenziali lineari del 2° ordine.

(*Nota di* F. Casorati, *in Pavia.*)

I.

Il sig. Hermite, proseguendo l'esposizione delle sue applicazioni delle funzioni ellittiche, nei *Comptes rendus* del 29 dicembre 1879 fa notare la seguente proprietà.

« Considérons en général une équation linéaire du second ordre à laquelle nous donnerons la forme suivante:

$$PX'' - P'X' + QX = 0,$$

où P et Q sont des fonctions quelconques de la variable u, et dont l'intégrale est

$$X = CA + C'B.$$

Je dis que, si l'on connaît le produit de deux solutions particulières (A et B), et qu'on fasse en conséquence

$$AB = R,$$

nous pourrons obtenir l'équation qui aurait pour solution l'expression plus générale

$$CAe^{pu} + C'Be^{-pu}. \text{ »}$$

E dà infatti le espressioni dei coefficienti della nuova equazione in termini della costante p e delle funzioni P, Q, R e loro derivate.

Il sig. BRIOSCHI, nel fasc. 1° del tomo 10 degli *Annali di Matematica,* osserva che « l'esposto teorema è suscettibile di una importante generalizzazione » potendosi formare anche l'equazione che avrebbe per soluzione l'espressione

$$CAf_1 + C'Af_2,$$

essendo f_1, f_2 funzioni qualunque, date, della variabile u.

Ed egli pure somministra le espressioni dei coefficienti della nuova equazione in termini dei coefficienti dell'altra e delle funzioni R, f_1, f_2 e loro derivate.

In seguito a questa generalizzazione, il sig. HERMITE scrive al sig. BRIOSCHI (*Annali di Matematica,* tomo 10, fasc. 2°):

« Dans votre récent article: *Di una proprietà delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine,* vous avez montré par un nouvel exemple, qui m'a beaucoup interessé, quel rôle joue le produit de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre. Permettez-moi de vous indiquer encore une circonstance où intervient ce produit, qui m'a été suggérée par mes recherches sur l'équation de LAMÉ, mais que je présenterai, en considérant l'équation générale

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Supposons que, l'intégrale étant (*):

$$y = Cu + C'v,$$

on connaît la quantité $uv = F(x)$; je dis qu'au moyen de $F(x)$ et des coefficients p, q il sera aisé de former l'équation du second'ordre, ayant pour intégrale l'expression

$$z = Cu^\omega + C'v^\omega,$$

quelque soit l'exposant ω.

E passa a trovare i coefficienti dell'equazione in z espressi in termini di ω, p, q, F, F'.

Il sig. MITTAG-LEFFLER, finalmente, scrive al sig. HERMITE (*Comptes rendus* del 13 dicembre 1880), che si può generalizzare di molto questa osservazione, potendosi, cioè, formare mediante p, q, F, F', F'' i coefficienti della equazione di cui due integrali U, V abbiano con u, v le relazioni

$$\frac{V'}{V} = \varphi\left(x, \frac{v'}{v}\right), \qquad \frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}\right),$$

(*) Per evitar confusione, in riguardo di ciò che devo scrivere in seguito, sostituisco alle majuscole U, V, impiegate dal sig. HERMITE, le minuscole u, v. La variabile indipendente, quì ed in seguito, è significata, non più da u, ma da x.

dove $\varphi(x, \xi)$ significa una funzione razionale di ξ, i cui coefficienti sono date funzioni della x.

Ed espone il modo di trovare quei coefficienti.

II.

Ora, io mi propongo di cercare la sorgente di queste proprietà, ossia la proprietà più generale di cui esse sono casi particolari.

Quando si suppongono date o si cercano soluzioni $u, v, \ldots$ di una equazione differenziale, lineare, omogenea

$$y^{(m)} + p\,y^{(m-1)} + q\,y^{(m-2)} + \cdots = 0,$$

si allude, per lo più, a funzioni determinate soltanto a meno di un fattore costante. Per riferirsi a funzioni totalmente determinate, conviene prendere in considerazione i rapporti delle soluzioni alle rispettive derivate $u', v', \ldots$

Qui considererò appunto questi rapporti

$$\frac{u'}{u}, \qquad \frac{v'}{v}, \ldots, \tag{1}$$

invece delle soluzioni $u, v, \ldots$. I coefficienti $p, q, \ldots$ dell'equazione differenziale si possono esprimere in termini di m di questi rapporti, i quali corrispondano ad m soluzioni linearmente indipendenti tra loro. Per questo basta risolvere le m equazioni

$$\frac{u^{(m)}}{u} + p\frac{u^{(m-1)}}{u} + q\frac{u^{(m-2)}}{u} + \cdots = 0$$

$$\frac{v^{(m)}}{v} + p\frac{v^{(m-1)}}{v} + q\frac{v^{(m-2)}}{v} + \cdots = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

rispetto alle incognite $p, q, \ldots$ e nelle espressioni, che ne risultano, sostituire ai rapporti $\frac{u''}{u}, \frac{v''}{v}, \frac{u'''}{u}$, ecc. i secondi membri delle formole

$$\frac{u''}{u} = \left(\frac{u'}{u}\right)' + \left(\frac{u'}{u}\right)^2$$

$$\frac{u'''}{u} = \left(\frac{u'}{u}\right)'' + 3\frac{u'}{u}\left(\frac{u'}{u}\right)' + \left(\frac{u'}{u}\right)^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Similmente, invece del prodotto $F = u \cdot v \ldots$ delle soluzioni, prenderò in considerazione il rapporto

$$\frac{F'}{F} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \cdots,$$

che, d'ora innanzi designerò con G_1, ponendo in generale

$$G_\nu = \frac{u^{(\nu)}}{u} + \frac{v^{(\nu)}}{v} + \cdots.$$

Rispetto a queste funzioni G, cominciamo a notare, che, da $m-1$ fra esse e dall'equazione differenziale si deducono tutte le altre, come dall'equazione differenziale e da $m-1$ fra i termini della serie

$$\frac{u'}{u}, \quad \frac{u''}{u}, \quad \frac{u'''}{u}, \ldots$$

si dedurrebbero tutti gli altri termini. Così, in particolare, essendo

$$\frac{u^{(m)}}{u} = -p\frac{u^{(m-1)}}{u} - q\frac{u^{(m-2)}}{u} - \cdots,$$

sarà, evidentemente,

$$\frac{G_m}{G_0} = -p\frac{G_{m-1}}{G_0} - q\frac{G_{m-2}}{G_0} - \cdots,$$

dove G_0 significa il numero delle funzioni $u, v, \ldots$.

Le relazioni tra le funzioni simmetriche dei rapporti (1) e loro derivate e le funzioni G e loro derivate sono il fondamento della nostra ricerca. Perciò, presento subito queste relazioni, limitandomi a quelle dei gradi 1, 2, 3 rispetto agli indici di derivazione (*).

$$G_1 = \sum \frac{u'}{u} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} G_2 &= \sum \frac{u''}{u} \\ G'_1 &= \sum \frac{u''}{u} - \sum \frac{u'^2}{u^2} \\ G_1^2 &= \sum \frac{u'^2}{u^2} + 2\sum \frac{u'v'}{uv} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(*) I sommatorî vanno intesi come si suole nella teorica delle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione algebrica. Così, per esempio, ove fossero tre le soluzioni in considerazione, cioè u, v, w, si dovrebbe ritenere

$$\sum \frac{u'v'}{uv} = \frac{u'v'}{uv} + \frac{u'w'}{uw} + \frac{v'w'}{vw}.$$

$$\left.\begin{aligned}
G_3 &= \sum \frac{u'''}{u} \\
G'_2 &= \sum \frac{u'''}{u} - \sum \frac{u''u'}{uu} \\
G_2 G_1 &= \sum \frac{u''u'}{uu} + \sum \frac{u''v'}{uv} \\
G''_1 &= \sum \frac{u'''}{u} - 3\sum \frac{u''u'}{uu} + 2\sum \frac{u'^3}{u^3} \\
G'_1 G_1 &= \sum \frac{u''u'}{uu} + \sum \frac{u''v'}{uv} - \sum \frac{u'^3}{u^3} - \sum \frac{u'^2 v'}{u^2 v} \\
G_1^3 &= \sum \frac{u'^3}{u^3} + 3\sum \frac{u'^2 v'}{u^2 v} + 6\sum \frac{u'v'w'}{uvw}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

III.

Prendiamo, ormai, a considerare particolarmente il caso di un'equazione del secondo ordine, cioè di $m=2$. In tal caso, data G_1, restano determinate tutte le altre G. Per G_2 abbiamo

$$G_2 = -p\,G_1 - 2q.$$

Quindi restano determinati tutti i primi membri delle (3) e quindi anche i sommatorî

$$\sum \frac{u'^2}{u^2} \quad \text{e} \quad \sum \frac{u'v'}{uv}.$$

Per quest'ultimo sommatorio abbiamo

$$\sum \frac{u'v'}{uv} = \frac{1}{2}(G_1^2 + G'_1 - G_2). \tag{5}$$

Prendendo in considerazione soltanto due rapporti (1), restano dunque determinate le quantità

$$\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} = G_1, \qquad \frac{u'}{u} \cdot \frac{v'}{v} = \frac{1}{2}(G_1^2 + G'_1 - G_2), \tag{6}$$

che sono i coefficienti dell'equazione algebrica avente per radici i detti rapporti.

Da quì risulta, che, se cogli argomenti x, $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$ si costituisca in qualsivoglia modo una formola

$$f\left(x,\ \frac{u'}{u},\ \frac{v'}{v}\right);$$

questa formola si potrà esprimere in termini di x, G_1, G'_1, G_2, sostituendo alle radici $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$ le loro espressioni in termini dei coefficienti, ossia dei secondi membri delle (6). E se la formola f sarà razionale e simmetrica rispetto a queste radici, il risultato di questa sostituzione sarà razionale rispetto a G_1, G'_1, G_2. E poichè G_2 è eguale a $-pG_1-2q$, il risultato riuscirà razionale in G_1, G'_1, p, q.

E però, in particolare, se vogliasi formare la equazione differenziale

$$Y''+PY'+QY=0$$

per la quale due rapporti (1), che significheremo con

$$\frac{U'}{U},\quad \frac{V'}{V},$$

debbano essere funzioni date della x e dei rapporti $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$, cioè

$$\frac{U'}{U}=\Phi\left(x,\ \frac{u'}{u},\ \frac{v'}{v}\right),\qquad \frac{V'}{V}=\Psi\left(x,\ \frac{u'}{u},\ \frac{v'}{v}\right);$$

basterà formare in prima le espressioni di P e Q in termini di $\frac{U'}{U}$, $\frac{V'}{V}$ ossia di Φ, Ψ e loro derivate, come fu indicato nel § II, e poi introdurre i coefficienti (6) invece delle radici $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$.

Il primo dei casi considerati dal sig. Hermite si ottiene ponendo

$$\frac{U'}{U}=\frac{u'}{u}+p,\qquad \frac{V'}{V}=\frac{v'}{v}-p.$$

Il secondo, ponendo

$$\frac{U'}{U}=\omega\frac{u'}{u},\qquad \frac{V'}{V}=\omega\frac{v'}{v}.$$

Si ottiene il caso del sig. Brioschi, ponendo

$$\frac{U'}{U}=\frac{u'}{u}+\alpha(x),\qquad \frac{V'}{V}=\frac{v'}{v}+\beta(x),$$

così che in luogo dei simboli u_1, u_2, da lui usati, qui abbiamo $e^{\int\alpha dx}$, $e^{\int\beta dx}$.

Finalmente, si ha il caso del sig. Mittag-Leffler, prendendo per Φ e Ψ una medesima formola φ, composta con gli argomenti x ed $\frac{u'}{u}$ per l'una, e con x e $\frac{v'}{v}$ per l'altra, cioè ponendo

$$\frac{U'}{U}=\varphi\left(x,\ \frac{u'}{u}\right),\qquad \frac{V'}{V}=\varphi\left(x,\ \frac{v'}{v}\right).$$

IV.

Passiamo ora a considerare le equazioni differenziali di terzo ordine. Sieno u, v, w tre soluzioni (linearmente indipendenti) della equazione

$$y'''+py''+qy'+ry=0.$$

Per formare l'equazione algebrica avente per radici i rapporti

$$\frac{u'}{u},\qquad \frac{v'}{v},\qquad \frac{w'}{w},$$

importa di trovare le tre funzioni simmetriche

$$\sum\frac{u'}{u},\qquad \sum\frac{u'v'}{uv},\qquad \sum\frac{u'v'w'}{uvw},\tag{7}$$

l'ultima delle quali nel presente caso consta del solo termine $\frac{u'v'w'}{uvw}$.

Ora, non basta che sia data la prima per poter trovare le altre due; ma è necessario di supporre date due funzioni simmetriche. Qui si possono fare diverse supposizioni. Le più semplici vengono suggerite dalle relazioni (3), e consistono nel supporre date

$$\sum\frac{u'}{u}\quad \text{e}\quad \sum\frac{u''}{u}$$

oppure

$$\sum\frac{u'}{u}\quad \text{e}\quad \sum\frac{u'^2}{u^2}$$

oppure

$$\sum\frac{u'}{u}\quad \text{e}\quad \sum\frac{u'v'}{uv}.$$

Fatta una qualsivoglia di queste supposizioni, si dovranno risguardare come date G_1 e G_2 e quindi ogni altra G. Per G_3 si avrà

$$G_3=-pG_2-qG_1-3r.$$

E quindi, ricorrendo alle sei equazioni (4), i cui primi membri saranno noti, se ne caveranno ordinatamenti i valori dei sei diversi sommatorî che stanno nei secondi membri, l'ultimo dei quali è appunto il terzo dei sommatorî (7). Per questo si trova (*)

$$\sum \frac{u'v'w'}{uvw} = \frac{1}{6}(G_1^3 + 2G_3 - 3G'_2 + G''_1 + 3G'_1 G_1 - 3G_2 G_1). \tag{8}$$

Vogliasi ormai formare l'equazione

$$Y''' + PY'' + QY' + RY = 0$$

che debba avere le soluzioni U, V, W legate alle u, v, w dalle relazioni

$$\frac{U'}{U} = \Phi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right), \qquad \frac{V'}{V} = \Psi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right),$$
$$\frac{W'}{W} = \mathrm{X}\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right).$$

Basterà formare, come si disse nel § II, le espressioni di P, Q, R in termini di

$$\frac{U'}{U}, \quad \frac{V'}{V}, \quad \frac{W'}{W},$$

ossia di Φ, Ψ, X, e poi introdurre i coefficienti (2), (5), (8), cioè

$$-G_1, \qquad \frac{1}{2}(G_1^2 + G'_1 - G_2), \qquad -\frac{1}{6}(G_1^3 + 2G_3 - 3G'_2 + G''_1 + 3G'_1 G_1 - 3G_2 G_1) \tag{9}$$

invece delle radici $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$, $\frac{w'}{w}$.

V.

Terminerò osservando, che non si può nella stessa maniera risolvere per le equazioni del quarto ordine il problema risoluto per quelle del secondo e del terzo. Perocchè, mentre in ciascuno dei gruppi (2), (3), (4) vi hanno tanti sommatorî quant'è il numero delle equazioni, nel gruppo immediatamente succes-

(*) Conservo il segno Σ per ricordare che questa relazione sussiste qualunque sia il numero dei rapporti (1); al pari della (5), e di qualunque altra che scaturisca puramente dalle relazioni fondamentali (2), (3), (4), ecc.

sivo vi hanno 14 sommatorî e soltanto 13 equazioni. I sommatorî sono

$$\sum\frac{u^{\text{IV}}}{u},\quad \sum\frac{u'''u'}{uu},\quad \sum\frac{u'''v'}{uv},\quad \sum\frac{u''^2}{u^2},\quad \sum\frac{u''u'^2}{uu^2},\quad \sum\frac{u''u'v'}{uuv},$$

$$\sum\frac{u''v''}{uv},\quad \sum\frac{u''v'^2}{uv^2},\quad \sum\frac{u''v'w'}{uvw},\quad \sum\frac{u'^4}{u^4},\quad \sum\frac{u'^3v'}{u^3v},\quad \sum\frac{u'^2v'^2}{u^2v^2},$$

$$\sum\frac{u'^2v'w'}{u^2vw},\quad \sum\frac{u'v'w't'}{uvwt};$$

ed i primi membri delle equazioni sono

$$G_4,\quad G'_3,\quad G_3G_1,\quad G'_2G_1,\quad G''_2,\quad G_2^2,\quad G_2G'_1,\quad G_2G_1^2,$$

$$G'''_1,\quad G''_1G_1,\quad G'^2_1,\quad G'_1G_1^2,\quad G_1^4.$$

Le tre equazioni

$$G_4=\sum\frac{u^{\text{IV}}}{u},\qquad G'_3=\sum\frac{u^{\text{IV}}}{u}-\sum\frac{u'''u'}{uu},\qquad G_3G_1=\sum\frac{u'''u'}{uu}+\sum\frac{u'''v'}{uv}$$

contengono soltanto i tre sommatorî

$$\sum\frac{u^{\text{IV}}}{u},\qquad \sum\frac{u'''u'}{uu},\qquad \sum\frac{u'''v'}{uv}$$

e servirebbero a determinarli; ma le rimanenti dieci equazioni fra i rimanenti undici sommatorî non possono servire che ad esprimerne dieci in termini dell'undecimo. Perciò, supposte date, per esempio, G_1, G_2 e G_3, non si potrebbe per anco ottenere il valore di

$$\sum\frac{u'v'w't'}{uvwt},$$

che sarebbe, pel caso di $m=4$, l'ultimo coefficiente dell'equazione algebrica avente per radici

$$\frac{u'}{u},\qquad \frac{v'}{v},\qquad \frac{w'}{w},\qquad \frac{t'}{t};$$

della quale i tre primi coefficienti sono le espressioni (9).

Sopra un sistema di equazioni differenziali.

(*Nota di* F. Brioschi, *in Milano.*)

1.° Posto:

$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

essendo u_1, u_2, u_3 funzioni di una variabile x ed $u'_r = \frac{d u_r}{d x}$, il sistema di equazioni differenziali considerate in questo scritto è il seguente:

$$\left.\begin{aligned} u'_1 &= u_1^2 + \alpha_1 f'(u_1) + \varphi(x) \\ u'_2 &= u_2^2 + \alpha_2 f'(u_2) + \varphi(x) \\ u'_3 &= u_3^2 + \alpha_3 f'(u_3) + \varphi(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

nel quale α_1, α_2, α_3 sono tre costanti indeterminate e $\varphi(x)$ una funzione di x che sarà individuata più avanti (*).

Indicando con U, ρ le espressioni:

$$U = (\alpha_1 + 1) u_1 + (\alpha_2 + 1) u_2 + (\alpha_3 + 1) u_3$$

$$\rho = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

dalle equazioni superiori si ottengono facilmente le seguenti:

$$U - \rho u_1 = \frac{d \log(u_3 - u_2)}{d x}$$

$$U - \rho u_2 = \frac{d \log(u_1 - u_3)}{d x}$$

$$U - \rho u_3 = \frac{d \log(u_2 - u_1)}{d x}$$

(*) Vedi la comunicazione del sig. Halphen all'Accademia delle Scienze nei *Comptes Rendus* del 13 giugno 1881.

una qualsivoglia delle quali è una conseguenza delle altre due. Perciò posto:

$$u_3 - u_2 = z_1, \qquad u_1 - u_3 = z_2$$

si avranno le:

$$U - \rho u_1 = \frac{d \log z_1}{dx}, \qquad U - \rho u_2 = \frac{d \log z_2}{dx}, \qquad U - \rho u_3 = \frac{d \log (z_1 + z_2)}{dx}$$

e siccome dalle prime due fra queste ultime risulta:

$$\rho(u_1 - u_2) = \frac{d \log \frac{z_2}{z_1}}{dx}$$

si otterrà per le precedenti:

$$\frac{d \log \frac{z_2}{z_1}}{dx} = \rho z_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right).$$

Introducendo ora una funzione t della variabile x mediante la relazione:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{t}{1-t}$$

si hanno tosto le:

$$\rho z_1 = \frac{t'}{t}, \qquad \rho z_2 = \frac{t'}{1-t}, \qquad \rho(z_1 + z_2) = \frac{t'}{t(1-t)}$$

e quindi:

$$U - \rho u_1 = \frac{d \log t'}{dx} - \frac{d \log t}{dx}$$

$$U - \rho u_2 = \frac{d \log t'}{dx} - \frac{d \log (1-t)}{dx}$$

$$U - \rho u_3 = \frac{d \log t'}{dx} - \frac{d \log t}{dx} - \frac{d \log (1-t)}{dx}$$

dalle quali:

$$2U = (\rho + 2)\frac{d \log t'}{dx} - (\rho - \alpha_2 + 1)\frac{d \log t}{dx} - (\rho - \alpha_1 + 1)\frac{d \log (1-t)}{dx}.$$

Ponghansi:

$$\alpha_1 + 1 = \rho n, \qquad \alpha_2 + 1 = \rho l, \qquad \alpha_3 + 1 = \rho m$$

sarà:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}(l + m + n - 1)$$

e dalle equazioni superiori si dedurranno pei valori di u_1, u_2, u_3 le espressioni seguenti:

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{1-l}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{l+m}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{m+n}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{1-n}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\frac{d\log t'}{dx} - \frac{1-l}{2}\frac{d\log t}{dx} - \frac{1-n}{2}\frac{d\log(1-t)}{dx}.$$

Sostituendo questi valori delle u_1, u_2, u_3 in una qualsivoglia delle equazioni differenziali (1) dimostrasi che la funzione $t(x)$ deve soddisfare la seguente equazione differenziale:

$$[t]_x + \frac{Lt^2 + Mt + N}{2t^2(1-t)^2}t'^2 - 2\varphi(x) = 0$$

nella quale:

$$[t]_x = \frac{d^2\log t'}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\log t'}{dx}\right)^2$$

ed

$$L = 1 - m^2, \qquad M = l^2 + m^2 - n^2 - 1, \qquad N = 1 - l^2.$$

Se ora supponesi:

$$2\varphi(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2}$$

ed:

$$A = 1 - \mu^2, \qquad B = \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1, \qquad C = 1 - \lambda^2$$

si avrà per determinare $t(x)$ la equazione differenziale ipergeometrica:

$$[t]_x + \frac{Lt^2 + Mt + N}{2t^2(1-t)^2}t'^2 - \frac{Ax^2 + Bx + C}{2x^2(1-x)^2} = 0. \tag{2}$$

2.° Questa equazione è evidentemente soddisfatta se si suppongono:

$$l = \lambda, \qquad m = \mu, \qquad n = \nu; \qquad t = x$$

si avrà dunque che il sistema di equazioni differenziali (1) nelle quali $\varphi(x)$ abbia il valore superiore dà per u_1, u_2, u_3 i valori seguenti:

$$u_1 = \frac{(1+\mu)x - (1-\lambda)}{2x(1-x)}$$

$$u_2 = \frac{(1+\mu)x - (\mu+\nu)}{2x(1-x)}$$

$$u_3 = \frac{(2-\lambda-\nu)x - (1-\lambda)}{2x(1-x)}.$$

In secondo luogo, è noto (*), che se le costanti l, m, n hanno i valori seguenti:

$$l=\frac{1}{3}\cdot \qquad m=\frac{r}{6(r-2)}, \qquad n=\frac{1}{2} \qquad (r=4,\ 6,\ 12) \tag{3}$$

esiste una serie di valori per λ, μ, ν pei quali la funzione $t(x)$ è algebrica e razionale; e lo saranno in conseguenza le funzioni u_1, u_2, u_3.

Per esempio, supposto $r=12$ e:

$$\lambda=\frac{1}{3}, \qquad \mu=\frac{1}{3}, \qquad \nu=\frac{2}{5}$$

si ha:

$$t(x)=-\frac{4x}{(1-x)^2}$$

quindi se nelle equazioni differenziali (1) si pone:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}\,\frac{200x^2-211x+200}{x^2(1-x)^2}; \qquad \alpha_1=29, \qquad \alpha_2=19, \qquad \alpha_3=11$$

si hanno gli integrali:

$$u_1=\frac{10x^2+4x-5}{15x(1-x^2)}$$

$$u_2=\frac{13x^2+6x-7}{20x(1-x^2)}$$

$$u_3=\frac{2x^2+x-1}{3x(1-x^2)}.$$

3.° Sieno y_1, y_2 due integrali fondamentali dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y''+py'+qy=0$$

ed indichiamo con $f(y_1, y_2)$ una forma binaria dell'ordine r dei medesimi. Supponiamo che per la forma stessa il covariante $(ff)_4$ sia identicamente eguale a zero; se con h, θ si indicano i covarianti:

$$h=\frac{1}{2}(ff)_2, \qquad \theta=2(fh)$$

(*) Vedi la mia Nota: *La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre* nei Mathematische Annalen, Band. 11.

si ha, come è noto: 1.° che fra f, h, θ sussiste la relazione identica:

$$\theta^2 + 4h^3 + \alpha f^{\frac{1}{m}} = 0 \tag{4}$$

nella quale α è una costante funzione di invarianti della f ed m ha il valore superiore; 2.° che l'ordine r della funzione f ha i soli valori $r = 4,\ 6,\ 12$.

Si ha inoltre che posto:

$$4h^3 + \alpha t f^{\frac{1}{m}} = 0$$

la funzione $t(x)$ soddisfa l'equazione differenziale (2), quando le l, m, n abbiano i valori (3), e sia $\varphi(x) = q - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{4}p^2$.

Dalla:

$$t = -\frac{4h^3}{\alpha f^{\frac{1}{m}}} \tag{5}$$

si ha per la relazione (4) che:

$$1 - t = -\frac{\theta^2}{\alpha f^{\frac{1}{m}}}$$

e siccome indicando con y il rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ si ha pel valore di θ:

$$\frac{1}{m} h \frac{df}{dy} - 3f\frac{dh}{dy} = 3(r-2)\theta$$

si otterrà la:

$$t' = \frac{12(r-2)h^2\theta}{\alpha f^{\frac{1}{m}+1}} y'.$$

Sostituendo queste espressioni nei valori di u_1, u_2, u_3 si giunge ai seguenti:

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{3(r-2)}\frac{d\theta}{dy}\frac{y'}{\theta}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{2(r-2)}\frac{dh}{dy}\frac{y'}{h}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} - \frac{1}{r}\frac{df}{dy}\frac{y'}{f}$$

mentre le α_1, α_2, α_3 hanno in questo caso i valori:

$$\alpha_1 = 3r - 7, \qquad \alpha_2 = 2r - 5, \qquad \alpha_3 = r - 1$$

4.° È noto che dalla relazione (5) si ottiene la:

$$[y]_t = \frac{Lt^2 + Mt + N}{2t^2(1-t)^2}$$

nella quale le L, M, N hanno i valori superiori. Ora essendo identicamente:

$$[y]_x = [y]_t t'^2 + [t]_x$$

si avrà per l'equazione (2) che:

$$[y]_x = 2\varphi(x) = 2q - \frac{dp}{dx} - \frac{1}{2}p^2$$

come può ottenersi direttamente dalla $y = \frac{y_1}{y_2}$.

Ciò posto se si indicano con v_1, v_2, v_3 le espressioni:

$$v_1 = -\frac{1}{3(r-2)}\frac{d\log\theta}{dy}, \qquad v_2 = -\frac{1}{2(r-2)}\frac{d\log h}{dy}, \qquad v_3 = -\frac{1}{r}\frac{d\log f}{dy} \tag{6}$$

si hanno, per gli ultimi valori di u_1, u_2, u_3 le relazioni seguenti:

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} + v_1 y'; \qquad u_2 = \frac{1}{2}\frac{d\log y'}{dx} + v_2 y'; \qquad u_2 = \frac{d\log y'}{dx} + v_3 y',$$

che sostituite nelle tre equazioni differenziali (1) conducono alle:

$$\frac{dv_1}{dy} = v_1^2 + \alpha_1(v_1 - v_2)(v_1 - v_3)$$

$$\frac{dv_2}{dy} = v_2^2 + \alpha_2(v_2 - v_1)(v_2 - v_3)$$

$$\frac{dv_3}{dy} = v_3^2 + \alpha_3(v_3 - v_1)(v_3 - v_2)$$

gli integrali delle quali sono dati dalle (6) allorquando le α_1, α_2, α_3 abbiano i valori sopra indicati.

5.° Il nesso esistente fra il sistema di equazioni differenziali del primo ordine (1) e le equazioni differenziali lineari del secondo ordine, il quale risulta dalle ricerche superiori, può dimostrarsi direttamente nel seguente modo.

Consideriamo la equazione differenziale del secondo ordine:

$$y'' + p_1 y' + q_1 y = 0$$

nella quale $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, e p_1, q_1 sono due funzioni di x. Dimostrasi facilmente che ponendo $y = z\varphi(x)$, si ottiene una equazione differenziale lineare del secondo ordine in z:

$$z'' + p_2 z' + q_2 z = 0$$

nella quale:

$$p_2 = p_1 + 2\frac{\varphi'}{\varphi}, \qquad q_2 = q_1 + p_1\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi''}{\varphi}$$

ed analogamente posto $y = u\psi(x)$ si avrà una terza equazione differenziale:

$$u'' + p_3 u' + q_3 u = 0$$

essendo:

$$p_3 = p_1 + 2\frac{\psi'}{\psi}, \qquad q_3 = q_1 + p_1\frac{\psi'}{\psi} + \frac{\psi''}{\psi},$$

e le p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3 hanno la proprietà che posto:

$$P_r = \frac{1}{2}\frac{dp_r}{dx} + \frac{1}{4}p_r^2 - q_r$$

saranno:

$$P_1 = P_2 = P_3.$$

Supponendo ora:

$$q_1 = -\frac{1}{4}\alpha_1(p_1 - p_2)(p_1 - p_3) = -\alpha_1\frac{\varphi'\psi'}{\varphi\psi}$$

$$q_2 = -\frac{1}{4}\alpha_2(p_2 - p_1)(p_2 - p_3) = -\alpha_2\left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi}\right)\frac{\varphi'}{\varphi}$$

$$q_3 = -\frac{1}{4}\alpha_3(p_3 - p_1)(p_3 - p_2) = \alpha_3\left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi}\right)\frac{\psi'}{\psi}$$

sostituendo questi valori in quelli di q_2, q_3 si hanno le relazioni seguenti:

$$-\alpha_2\left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi}\right) = -\alpha_1\frac{\psi'}{\psi} + p_1 + \frac{\varphi''}{\varphi'}$$

$$\alpha_3\left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi}\right) = -\alpha_1\frac{\varphi'}{\varphi} + p_1 + \frac{\psi''}{\psi'}$$

dalle quali eliminando p_1, si otterrà fra le funzioni φ, ψ la relazione:

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\left(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi}\right) = \frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{\psi''}{\psi'}$$

a cui soddisfasi ponendo:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{t'}{\rho t(1-t)}, \qquad \frac{\psi'}{\psi} = \frac{t'}{\rho(1-t)}$$

e dove $\rho = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 1$ come sopra.

Si avranno così le:

$$p_1 = -\frac{t''}{t'} + (1-l)\frac{t'}{t} - (l+m)\frac{t'}{1-t}$$

$$p_2 = -\frac{t''}{t'} + (m+n)\frac{t'}{t} - (1-n)\frac{t'}{1-t}$$

$$p_3 = -\frac{t''}{t'} + (1-l)\frac{t'}{t} - (1-n)\frac{t'}{1-t}$$

e le:

$$q_1 = -\frac{1}{4}[n^2 - (l+m-1)^2]\frac{t'^2}{t(1-t)^2}; \qquad q_2 = -\frac{1}{4}[l^2 - (m+n-1)^2]\frac{t'^2}{t^2(1-t)};$$

$$q_3 = \frac{1}{4}[m^2 - (l+n-1)^2]\frac{t'^2}{t(1-t)}$$

per le quali:

$$P_1 = P_2 = P_3 = -\frac{1}{2}[t]_x - \frac{Lt^2 + Mt + N}{4t^2(1-t)^2}$$

ossia per la (2):

$$P_1 = P_2 = P_3 = -\varphi(x).$$

Sostituendo infine in queste ultime alle p_1, p_2, p_3 le:

$$u_1 = -\frac{1}{2}p_1; \qquad u_2 = -\frac{1}{2}p_2; \qquad u_3 = -\frac{1}{2}p_3$$

si ritrovano le equazioni differenziali (1) dalle quali siamo partiti.

Settembre 1881.

Sul potenziale magnetico.

(*Nota del prof.* E. Beltrami, *a Pavia.*)

Nel volume intitolato *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism* (London, 1872), contenente la collezione degli anteriori scritti di Sir William Thomson sull'elettrostatica e sul magnetismo, arricchiti di note e di addizioni inedite considerevoli, l'Autore ha introdotto alcune nuove definizioni per l'*asse* e per il *centro* d'un corpo magnetico. Queste definizioni, colle formole relative, fanno parte di un'Addizione (in data del settembre 1871) al Capitolo IV della *Teoria matematica del magnetismo*, Teoria che l'Autore aveva già pubblicato nelle *Philosophical Transactions* degli anni 1849 e 1850. Esse furono riportate da Maxwell nel *Treatise on Electricity and Magnetism* (Tomo II) e da Betti nella *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni* (Pisa, 1879).

Cercando di rendermi un conto esatto del vero significato di queste definizioni e della maggiore o minore opportunità loro, ho potuto convincermi che l'*asse magnetico* di Thomson merita indubbiamente questo nome, ad esclusione d'ogni altro asse parallelo, mentre lo stesso non potrebbe dirsi del *centro magnetico.* Infatti la posizione di quell'asse è indipendente dalla legge d'azione della forza magnetica, mentre quella del centro assegnato da Thomson è essenzialmente subordinata all'ordinaria legge newtoniana. La verità, universalmente ammessa, di questa legge può, sotto un certo aspetto, considerarsi come favorevole all'assunzione d'un tal punto come centro magnetico. Ma non è men vero che sull'asse magnetico esiste sempre un altro punto, il quale gode di proprietà notevolissime qualunque sia la legge d'attrazione ed il quale, quando pure questa legge sia la newtoniana, non coincide con quello di Thomson se non per sistemi magnetici particolari.

Parendomi che il procedimento da me seguito in questa ricerca sia molto semplice e generale, e getti qualche luce non solo sull'argomento ora accennato ma su altri ancora, mi permetto di comunicarlo ai lettori di questi Annali.

Abbiansi due sistemi, che diremo M ed M', di masse m ed m', concentrate in punti discreti. Designando con r la distanza delle due masse individuali m ed m', con W il potenziale mutuo dei due sistemi e lasciando indeterminata la legge d'attrazione, si ha

$$W = \sum\sum m m' \varphi(r), \tag{1}$$

formola in cui la doppia somma si estende a tutte le coppie formate con una massa m del sistema M e con una massa m' del sistema M'.

Quando la distanza dei due sistemi è molto grande in confronto delle distanze mutue fra le masse di ciascun sistema in particolare, si può, facendo alcune ipotesi abbastanza plausibili e ancora molto generali sulla natura della funzione $\varphi(r)$, assegnare un'espressione assai semplice al valore approssimato del potenziale W; e ciò nel modo seguente.

Riferiamo i punti dei due sistemi a due terne T e T' d'assi ortogonali, paralleli ciascuno a ciascuno, aventi l'origine la prima in un punto O, la seconda in un punto O'. Il punto O deve essere scelto in modo che le sue distanze dalle masse m del sistema M sieno dello stesso ordine delle distanze mutue di queste masse, in confronto della distanza dei due sistemi; lo stesso dicasi del punto O' rispetto alle masse m' del sistema M'. Del rimanente, le posizioni delle due origini sono, per ora, arbitrarie. Sieno a, b, c le coordinate della massa m rispetto alla terna T, a', b', c' quelle della massa m' rispetto alla terna T', e poniamo

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2, \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = d'^2.$$

Designiamo inoltre con ρ la distanza assoluta delle due origini O ed O' e con ξ, η, ζ i coseni degli angoli che la direzione OO' fa colle direzioni degli assi.

Per tali segnature si ha

$$r^2 = (\rho\xi + a' - a)^2 + (\rho\eta + b' - b)^2 + (\rho\zeta + c' - c)^2,$$

ovvero

$$r^2 = \rho^2 - 2P\rho + Q^2,$$

ponendo per brevità:

$$P = (a - a')\xi + (b - b')\eta + (c - c')\zeta,$$

$$Q^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2.$$

Ne risulta

$$r = \rho\left(1 - \frac{2P}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

epperò, supponendo ρ abbastanza grande perchè sia, per ogni coppia di punti (a, b, c), (a', b', c'),

$$\operatorname{mod}\left(\frac{2P}{\rho}-\frac{Q^2}{\rho^2}\right)<1,$$

si ha la serie convergente

$$r=\rho-P+\frac{Q^2-P^2}{2\rho}+\frac{P(Q^2-P^2)}{2\rho^2}+\cdots \tag{1$_a$}$$

che procede secondo le potenze negative di ρ.

Ciò posto, se si ammette che la funzione φ e le sue derivate φ', φ'', φ''' sieno continue e finite, per quei valori della variabile che quì occorre di considerare, si può porre, come è noto,

$$\varphi(r)=\varphi(\rho)+(r-\rho)\varphi'(\rho)+\frac{(r-\rho)^2}{2}\varphi''(\rho)+\frac{(r-\rho)^3}{2\cdot 3}\varphi'''[\rho+\theta(r-\rho)],$$

dove θ è una frazione propria. Supponiamo inoltre che la natura della funzione $\varphi(\rho)$ sia tale che le sue derivate successive $\varphi'(\rho)$, $\varphi''(\rho)$, $\varphi'''(\rho)$ sieno rispettivamente degli ordini di

$$\frac{\varphi(\rho)}{\rho},\qquad \frac{\varphi(\rho)}{\rho^2},\qquad \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}.$$

Per tali ipotesi, dando ad r il valore $(1)_a$ ed arrestandosi ai termini dell'ordine di

$$\frac{(r-\rho)^2\varphi(\rho)}{\rho^2},$$

si ha per $\varphi(r)$ il seguente valore approssimato:

$$\varphi(r)=\varphi(\rho)-P\varphi'(\rho)+\frac{Q^2\varphi'(\rho)}{2\rho}+\frac{P^2}{2}\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}.$$

Per dare a questo valore di $\varphi(r)$ una forma appropriata allo scopo nostro, poniamo

$$p=a\xi+b\eta+c\zeta,\qquad p'=a'\xi+b'\eta+c'\zeta,$$
$$q^2=d^2-p^2,\qquad q'^2=d'^2-p'^2,$$

vale a dire denotiamo con q e q' le distanze delle masse m ed m' dalla retta OO' e con p e p' le distanze delle stesse masse dai due piani condotti per i punti O ed O' perpendicolarmente alla retta medesima. Ne risulta

$$P=p-p',\qquad Q^2=d^2+d'^2-2(aa'+bb'+cc'),$$
$$P^2=p^2+p'^2-2pp'=d^2+d'^2-q^2-q'^2-2pp',$$

epperò il precedente valore di $\varphi(r)$ si può scrivere così

$$\left.\begin{aligned}\varphi(r)=\varphi(\rho)-(p-p')\varphi'(\rho)+\frac{d^2+d'^2}{2}\varphi''(\rho)-\frac{q^2+q'^2}{2}\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}\\ -(aa'+bb'+cc')\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}-pp'\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (1)_b$$

Introduciamo questo valore di $\varphi(r)$ nell'espressione (1) Eseguendo la doppia somma ivi indicata si presentano parecchie somme semplici, che sono specificate quì sotto insieme coi simboli che serviranno quind'innanzi a designarle:

$$\left.\begin{array}{lllll}\sum m=M, & \sum ma=\alpha, & \sum mb=\beta, & \sum mc=\gamma, & \sum mp=\varpi,\\ \sum m'=M', & \sum m'a'=\alpha', & \sum m'b'=\beta', & \sum m'c'=\gamma', & \sum m'p'=\varpi',\\ 2\sum md^2=D, & 2\sum m'd'^2=D', & \sum mq^2=I, & \sum m'q'^2=I', & \\ & \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=\varpi, & & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\delta^2, & \\ & \alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta=\varpi', & & \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=\delta'^2. & \end{array}\right\} \quad (2)$$

Tutte queste quantità hanno significati meccanici notissimi. Le quantità α, β, γ, ϖ sono i momenti lineari del sistema M rispetto ai quattro piani $a=0$, $b=0$, $c=0$, $p=0$, δ è il momento risultante; D è la somma dei momenti d'inerzia dello stesso sistema M rispetto ai tre assi della terna T, giacchè

$$2d^2=(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2),$$

anzi è evidente che questi momenti d'inerzia possono riferirsi a qualunque altra terna d'assi ortogonali coll'origine in O; finalmente I è il momento di inerzia del sistema M rispetto alla retta OO'. Se A, B, C sono i momenti principali d'inerzia del sistema M rispetto al punto O e se λ, μ, ν sono i coseni degli angoli che la retta OO' fa coi tre assi principali cui questi momenti d'inerzia si riferiscono, si ha quindi

$$A+B+C=D, \qquad A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2=I. \qquad (2)_a$$

Altrettanto dicasi delle analoghe quantità relative al sistema M'.

Tenendo conto delle segnature (2), la sostituzione del valore $(1)_b$ di $\varphi(r)$ nell'espressione (1) somministra il seguente valore di W, approssimato fino alle quantità dell'ordine già indicato:

$$\left.\begin{aligned}W=MM'\varphi(\rho)+(M\varpi'-M'\varpi)\varphi'(\rho)+\frac{MD'+M'D}{4}\varphi''(\rho)\\ -\frac{MI'+M'I}{2}\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}-\varpi\varpi'\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Di questa formola generale giova considerare distintamente i tre casi particolari più importanti, che sono i seguenti:

Supponiamo, in primo luogo, che amendue i sistemi di masse sieno dotati di baricentro, e sia O il baricentro del primo sistema, O' quello del secondo. In tal caso si ha

$$\alpha = \beta = \gamma = \varpi = 0, \qquad \alpha' = \beta' = \gamma' = \varpi' = 0,$$

e quindi

$$W = MM'\varphi(\rho) + \frac{MD' + M'D}{4}\varphi''(\rho) - \frac{MI' + M'I}{2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}. \qquad (3)_a$$

Supponiamo, in secondo luogo, che il primo sistema sia privo di baricentro e che il secondo abbia il baricentro nel punto O'; poniamo, cioè,

$$M = 0, \qquad \alpha' = \beta' = \gamma' = \varpi' = 0.$$

L'espressione del potenziale diventa

$$W = M'\left[-\varpi\varphi'(\rho) + \frac{D}{4}\varphi''(\rho) - \frac{I}{2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}\right]. \qquad (3)_b$$

Supponiamo finalmente che amendue i sistemi sieno privi di baricentro, cioè che si abbia

$$M = M' = 0.$$

L'espressione (3) diventa

$$W = -(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')\frac{\varphi'(\rho)}{\rho} - \varpi\varpi'\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\} \qquad (3)_c$$

e può scriversi anche così

$$W = -\delta\delta'\left[\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\cos(\delta, \delta') + \left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}\cos(\delta, \rho)\cos(\delta', \rho)\right]. \qquad (3)_{c'}$$

Nei primi due casi si può supporre, più in particolare, che il secondo sistema si riduca ad un solo punto materiale O', di massa unitaria. In tale ipotesi si ha

$$M' = 1, \qquad D' = I' = 0$$

e il potenziale W diventa la funzione potenziale V del primo sistema sul punto O'. Si ottiene così nel primo caso

$$V = M\varphi(\rho) + \frac{D}{4}\varphi''(\rho) - \frac{I}{2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\} \qquad (4)_a$$

e nel secondo

$$V = -\varpi\varphi'(\rho) + \frac{D}{4}\varphi''(\rho) - \frac{I}{2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}. \qquad (4)_b$$

Rispetto al primo di questi due casi osserveremo che, denotando con V' la funzione potenziale [analoga alla V dell'equazione $(4)_a$] del sistema M', supposto dotato di baricentro e col baricentro in O', sul sistema M ridotto ad una massa $M=1$ collocata in O, si può esprimere (sempre coll'indicata approssimazione) il potenziale mutuo $(3)_a$ di due sistemi dotati di baricentro nel modo seguente:

$$W = MV' + M'V - MM'\varphi(\rho),$$

cosicchè la determinazione di W, in questo caso, si riduce a quella di V e di V'.

Ponendo

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{\rho}$$

le espressioni $(3)_a$, $(3)_c$, $(4)_a$, $(4)_b$ ricevono significati ben noti nella teoria del potenziale newtoniano. La prima infatti è l'espressione approssimata del potenziale mutuo newtoniano di due corpi lontani l'uno dall'altro. La seconda rappresenta il potenziale mutuo di due elementi magnetici a distanza finita, o di due magneti lontani l'uno dall'altro. La terza è l'espressione approssimata della funzione potenziale d'un corpo sopra un punto lontano. La quarta è la funzione potenziale d'un magnete sopra un'unità magnetica posta in un punto pure lontano.

Un'opportuna orientazione delle due terne T, T', del cui parallelismo è sparita ogni traccia nelle formole $(3)_a$, $(3)_b$, $(4)_a$, $(4)_b$ permette d'introdurre ulteriori semplificazioni in queste formole. Così, se nella formola $(4)_a$ si suppone che la terna T sia quella degli assi naturali d'inerzia del corpo M e se si designano con x, y, z le coordinate del punto O' rispetto a questi assi, si ha, con riguardo alla relazione $(2)_a$,

$$V = M\varphi(\rho) + \frac{A+B+C}{4}\varphi''(\rho) - \frac{Ax^2+By^2+Cz^2}{2\rho^2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\},$$

donde si deduce subito, per $\varphi = \frac{1}{\rho}$, la notissima espressione di questa funzione potenziale.

L'espressione $(3)_c$, non contenendo più traccia d'alcuna terna d'assi, non è riducibile ad alcuna forma più semplice.

Resta a considerarsi l'espressione $(4)_b$ della funzione potenziale magnetica, che è quella della quale vogliamo più particolarmente occuparci.

Ricordando la condizione $M=\sum m=0$, si trova

$$\begin{aligned}&\sum m\{(a-a_0)^2+(b-b_0)^2+(c-c_0)^2\}\\ &=\sum m(a^2+b^2+c^2)-2(a_0\alpha+b_0\beta+c_0\gamma)\\ &=\frac{D}{2}-2(a_0\alpha+b_0\beta+c_0\gamma),\end{aligned}$$

epperò si vede che se l'origine O fosse in un punto qualunque (a_0, b_0, c_0) del piano la cui equazione rispetto alla terna T è

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\frac{1}{2}\sum m(a^2+b^2+c^2), \tag{5}$$

la quantità analoga a D, per questo punto, sarebbe nulla, qualunque fosse l'orientazione degli assi. Il piano (5), che diremo *piano centrale* del sistema, è normale alla direzione del momento principale δ di questo sistema.

Assumendo per piano ab questo piano centrale e per asse delle c una qualunque retta ad esso normale (per esempio la retta condotta dalla primitiva origine O nella direzione del momento principale δ), si ha

$$\alpha=0,\qquad \beta=0,\qquad \gamma=\delta,\qquad D=0$$

e la funzione $(4)_b$ diventa

$$V=-\delta\zeta\varphi'(\rho)-\frac{I}{2}\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}.$$

Ora osserviamo che, riferendo le coordinate a, b, c alla nuova terna, si ha

$$\begin{aligned}&\sum m(b-b_0)c=\sum mbc-\delta b_0,\\ &\sum mc(a-a_0)=\sum mca-\delta a_0,\\ &\sum m(a-a_0)(b-b_0)=\sum mab;\end{aligned}$$

quindi se, conservando il piano centrale come piano delle a, b, si trasporta l'origine nel punto di coordinate

$$a_0=\frac{\sum mac}{\delta},\qquad b_0=\frac{\sum mbc}{\delta}$$

e se poscia si dirigono, nello stesso piano, gli assi delle a e delle b in modo che risulti

$$\sum mab=0,$$

ciò che si può sempre fare (con un processo notissimo), i tre nuovi assi coordinati ottenuti dopo queste operazioni sono assi principali d'inerzia del sistema rispetto alla nuova origine. Avuto riguardo alle relazioni $(2)_a$ si ha dunque, rispetto alla terna così determinata, che diremo *terna centrale*,

$$V = -\delta\zeta\varphi'(\rho) - \frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}, \tag*{$(5)_a$}$$

dove A, B, C sono i momenti principali d'inerzia, soggetti alla relazione

$$A + B + C = 0. \tag*{$(5)_b$}$$

Questa è la forma più semplice cui può ridursi la funzione V, senza fare ipotesi più speciali sulla natura della funzione φ. I nuovi assi di riferimento sono totalmente individuati e tali che, per essi, hanno luogo le relazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum ma = 0, & \sum mb = 0, & \sum m(a^2+b^2+c^2) = 0, \\ \sum mbc = 0, & \sum mca = 0, & \sum mab = 0. \end{array}\right\} \tag*{$(5)_c$}$$

Il nuovo asse delle c è l'*asse magnetico* del sistema e coincide con quello di Thomson. La nuova origine è un *centro magnetico* indipendente, come l'asse, dalla legge d'attrazione: vedremo fra breve in quale relazione si trovi questo centro con quello di Thomson.

Per determinare la posizione dell'asse e del centro testè definiti rispetto alla primitiva terna T, che era scelta arbitrariamente, denotiamo con s la perpendicolare condotta dalla primitiva origine O al piano centrale (assunta come positiva quando è nella direzione δ), con λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2 i coseni degli angoli che due rette ortogonali s_1, s_2 condotte dal piede di questa perpendicolare nel detto piano fanno coi primitivi assi e con a_0, b_0, c_0 le coordinate del *centro* testè determinato rispetto a questi medesimi assi. Ricordando le costruzioni precedentemente eseguite, si vedrà facilmente essere

$$a_0 = \lambda_1 \frac{\sum ma'c'}{\delta} + \lambda_2 \frac{\sum mb'c'}{\delta} + \frac{\alpha s}{\delta},$$

ossia

$$\delta a_0 = \sum mc'(a'\lambda_1 + b'\lambda_2) + \alpha s,$$

con analoghe formole per b_0 e c_0; le lettere a', b', c' designano le coordinate della massa m rispetto alla terna (ss_1s_2). Ora le formole di relazione fra queste coordinate a', b', c' e le primitive a, b, c sono

$$a'\lambda_1 + b'\lambda_2 + (c'+s)\frac{\alpha}{\delta} = a, \ldots\ldots \text{ ecc.}$$

quindi si può scrivere

$$\delta a_0 = \sum m c' a - \frac{\alpha}{\delta} \sum m c'(c' + s) + \alpha s,$$

od anche

$$\delta a_0 = \sum m(c' + s) a - \frac{\alpha}{\delta} \sum m(c' + s)^2 + \alpha s,$$

perchè

$$\sum m c' a = \sum m(c' + s) a - \alpha s,$$
$$\sum m c'(c' + s) = \sum m(c' + s)^2 - \delta s.$$

Ma si ha

$$c' + s = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\delta}, \qquad s = \frac{\sum m(a^2 + b^2 + c^2)}{2\delta};$$

quindi

$$a_0 = \frac{\sum m a(a\alpha + b\beta + c\gamma)}{\delta^2} - \alpha \frac{\sum m(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2}{\delta^4} + \alpha \frac{\sum m(a^2 + b^2 + c^2)}{2\delta^2}.$$

Ponendo dunque

$$\Delta = \frac{\sum m(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \tag{6}$$

si può scrivere, più semplicemente,

$$\left.\begin{gathered} a_0 = \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} + \frac{\alpha s}{\delta}, \qquad b_0 = \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} + \frac{\beta s}{\delta}, \qquad c_0 = \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} + \frac{\gamma s}{\delta}, \\ s = \frac{\sum m(a^2 + b^2 + c^2)}{2\delta}; \end{gathered}\right\} \tag{6$_a$}$$

e queste sono le cercate espressioni delle coordinate del *centro*. Ne segue subito che l'*asse magnetico* è rappresentato dalle equazioni

$$\frac{x - \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}}{\alpha} = \frac{y - \frac{\partial \Delta}{\partial \beta}}{\beta} = \frac{z - \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma}}{\gamma}. \tag{7$_a$}$$

Il centro può anche essere considerato come l'intersezione di questa retta col piano centrale (5).

Torniamo ora all'espressione $(5)_a$ della funzione potenziale magnetica riferita alla terna centrale. Denotiamo con a', b', c' le coordinate della massa m rispetto a tre nuovi assi, dei quali quello delle c' sia l'asse magnetico e quelli delle a' e delle b' sieno le rette condotte da un punto qualunque, $c = c_0$, dell'asse magnetico parallelamente agli assi delle a e delle b nella terna centrale. Essendo per tal modo

$$a' = a, \qquad b' = b, \qquad c' = c - c_0,$$

si ha

$$\begin{aligned} A' &= \sum m(b'^2 + c'^2) = A - 2\delta c_0, \\ B' &= \sum m(c'^2 + a'^2) = B - 2\delta c_0, \\ C' &= \sum m(a'^2 + b'^2) = C, \\ \sum m b' c' &= \sum m b c = 0, \\ \sum m c' a' &= \sum m c a = 0, \\ \sum m a' b' &= \sum m a b = 0, \end{aligned}$$

epperò i nuovi assi sono ancora assi principali d'inerzia; se non che i tre momenti d'inerzia corrispondenti, anzichè alla relazione $(5)_b$, soddisfanno alla

$$A' + B' + C' = -4\delta c_0.$$

Per avere l'espressione di V relativa a questi nuovi assi bisogna ricorrere alla formola generale $(4)_b$ e porre in essa

$$\varpi = \delta\zeta, \qquad D = -4\delta c_0, \qquad I = A'\xi^2 + B'\eta^2 + C'\zeta^2$$

(intendendo, per comodo, designati sempre con ξ, η, ζ i coseni di direzione della retta ρ rispetto alla terna che si considera di volta in volta): si ottiene così

$$V = -\delta\zeta\varphi'(\rho) - \delta c_0\varphi''(\rho) - \frac{A'\xi^2 + B'\eta^2 + C'\zeta^2}{2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}$$

(dove ρ rappresenta la distanza del punto potenziato dalla nuova origine). Quest'espressione si può scrivere così

$$V = -\delta\zeta\varphi'(\rho) - \frac{(A' - C')\xi^2 + (B' - C')\eta^2}{2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}$$
$$- \left[\delta c_0\varphi''(\rho) + \frac{C}{2}\left\{\varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}\right].$$

La quantità racchiusa fra le parentesi quadre non può, in generale, essere annullata da un valore *costante* di c_0, qualunque sia la distanza ρ. Perchè ciò possa accadere, bisogna, come è facile riconoscere, che la funzione $\varphi'(\rho)$ si riduca ad una semplice potenza di ρ. Ammesso ciò e supposto quindi

$$\varphi'(\rho) = -\frac{1}{\rho^n}, \tag{7}$$

si trova che la detta quantità è resa nulla da

$$c_0 = -\frac{n+1}{2n}\frac{C}{\delta}. \tag{7$_a$}$$

E poichè in tal caso si ha

$$A' + B' + C' = -4\delta c_0 = \frac{2(n+1)}{n} C',$$

donde

$$C' = \frac{n(A' + B')}{n+2},$$

si trova pure

$$A' - C' = \frac{2A' - nB'}{n+2}, \qquad B' - C' = \frac{2B' - nA'}{n+2}.$$

Per questi valori l'ultima espressione di V diventa

$$V = \frac{\delta z}{\rho^{n+1}} - \frac{n+1}{2(n+2)} \frac{(2A' - nB')x^2 + (2B' - nA')y^2}{\rho^{n+3}}, \tag{7$_b$}$$

dove x, y, z sono le coordinate del punto potenziato. I tre momenti d'inerzia A', B', C' relativi agli assi principali cui è ora riferito il sistema e di cui quello delle z è l'asse magnetico, sono legati dalla relazione

$$n(A' + B') - (n+2)C' = 0$$

che equivale alla seguente

$$\sum m(a'^2 + b'^2 - nc'^2) = 0. \tag{7$_c$}$$

Quando la legge d'azione è la newtoniana, si ha $n = 2$, epperò

$$V = \frac{\delta z}{\rho^3} + \frac{3}{4}\frac{(B' - A')(x^2 - y^2)}{\rho^5}, \tag{8}$$

colle relazioni

$$\left.\begin{aligned} \sum m(a'^2 + b'^2 - 2c'^2) = 0, \\ B' - A' = \sum m(a'^2 - b'^2) = B - A. \end{aligned}\right\} \tag{8$_a$}$$

L'origine degli assi ai quali si riferiscono queste formole è definita, rispetto alla nostra terna centrale, da

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = 0, \qquad c_0 = -\frac{3}{4}\frac{C}{\delta}, \tag{8$_b$}$$

ed è il centro magnetico definito da Thomson. Si scorge di quì che questo centro non cade nel piano centrale se non quando il sistema soddisfa alla condizione particolare $C=0$, cioè quando è nullo il suo momento d'inerzia rispetto all'asse magnetico (e quindi rispetto ad ogni asse parallelo a questo, giacchè la quantità C è invariabile per tutti gli assi che hanno la direzione del momento principale).

È d'uopo far quì un'avvertenza, necessaria per chi voglia istituire un confronto fra le precedenti formole e quelle di Thomson, giacchè esse non sono direttamente comparabili fra loro.

Giusta l'ordinaria teoria di Poisson, seguita dall'illustre scozzese, la funzione potenziale d'un corpo magnetico si forma considerando questo corpo come l'aggregato d'un grandissimo numero di elementi magnetici, cioè di sistemi elementari privi di baricentro. Perciò nelle formole stabilite in base a questa teoria non compariscono direttamente le *masse* costituenti i singoli sistemi elementari, ma solo i *momenti* lineari di ciascuno di questi, talchè, per esempio, non vi rimane più traccia dei momenti d'inerzia di quelle masse. Ora si può dimostrare che, rispetto alle espressioni delle quali quì si tratta, questo secondo punto di vista è sostanzialmente identico a quello che ha servito finora di base alle nostre formole, vale a dire che le formole dedotte nell'ipotesi che la condizione $\sum m=0$ si verifichi in ogni sistema parziale rientrano esattamente in quelle stabilite senza questa ipotesi.

A tal fine osserviamo innanzi tutto che se il sistema cui si riferisce la funzione potenziale $(4)_b$ è di dimensioni estremamente piccole, quella funzione, che diremo ora v, si può ridurre al solo termine

$$v=-\varpi\varphi'(\rho),$$

dove la distanza ρ si può supporre semplicemente finita, ed anche piccola, purchè sia sempre estremamente grande rispetto alle dimensioni del sistema, od elemento magnetico. È questa infatti l'ordinaria espressione della funzione potenziale di un tale elemento. La formola precedente suppone che quest'elemento sia collocato nell'*intorno* del punto O, d'onde si spicca il raggio vettore ρ. Se quindi l'elemento fosse collocato invece nell'intorno di un altro punto (a_1, b_1, c_1), denotando con r la distanza di questo punto dal punto potenziato (x, y, z) e con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i momenti dell'elemento magnetico, si avrebbe

$$v=-\{\alpha_1(x-a_1)+\beta_1(y-b_1)+\gamma_1(z-c_1)\}\frac{\varphi'(r)}{r},$$

o meglio

$$v=(a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1)\frac{\varphi'(r)}{r}-(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z)\frac{\varphi'(r)}{r}.$$

Ora se l'elemento fa parte d'un corpo magnetico di dimensioni finite, ma molto piccole rispetto alla distanza dal punto potenziato, si può, denotando nuovamente con ρ la distanza di questo punto dall'origine e supponendo che questa sia situata entro il corpo, sviluppare la funzione $\frac{\varphi'(r)}{r}$ come s'è già fatto prima per la $\varphi(r)$, ed è chiaro che basterà porre

$$\frac{\varphi'(r)}{r}=\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}$$

nel primo termine di v e

$$\frac{\varphi'(r)}{r}=\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}-(a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta)\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}\frac{1}{\rho}$$

nel secondo. Si ottiene così

$$\begin{aligned}v=&(a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1)\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}-(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)\varphi'(\rho)\\&+(a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta)(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}.\end{aligned}$$

La somma dei valori che prende questa funzione per i singoli elementi del corpo magnetico, cioè l'espressione

$$\left.\begin{aligned}V=&-\varphi'(\rho)\sum(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)+\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\sum(a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1)\\&+\left\{\varphi''(\rho)-\frac{\varphi'(\rho)}{\rho}\right\}\sum(a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta)(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta),\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

non deve differire, dietro quanto abbiamo asserito, dalla funzione rappresentata dalla formola $(4)_b$, supponendo naturalmente che l'aggregato di tutti gli attuali elementi magnetici riproduca quello stesso sistema cui si riferiva quella formola.

Per dimostrare che così è veramente, basta osservare che denotando di nuovo con a, b, c le coordinate di una delle masse m che costituiscono l'elemento magnetico esistente nell'intorno del punto (a_1, b_1, c_1), e scrivendo

$$a=a_1+(a-a_1),$$

si ha

$$\begin{aligned}\sum ma^2&=\sum m\,a_1^2+2\sum m\,a_1(a-a_1)+\sum m(a-a_1)^2\\&=2\,a_1\alpha_1+\sum m(a-a_1)^2,\end{aligned}$$

dove la somma si riferisce al solo elemento magnetico anzidetto, cioè a quello i cui momenti sono α_1, β_1, γ_1. Ora la quantità $a - a_1$ è estremamente piccola di fronte ad a_1, epperò la quantità $\sum m(a-a_1)^2$ è d'ordine superiore a quelle delle quali si tiene conto. Ne risulta che, entro i limiti d'approssimazione ai quali le formole si arrestano, si può porre, per ciascun elemento magnetico,

$$\sum m a^2 = 2 a_1 \alpha_1, \qquad \sum m b^2 = 2 b_1 \beta_1, \qquad \sum m c^2 = 2 c_1 \gamma_1,$$

$$\sum m b c = \beta_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1, \qquad \sum m c a = c_1 \alpha_1 + a_1 \gamma_1, \qquad \sum m a b = a_1 \beta_1 + b_1 \alpha_1$$

e conseguentemente

$$a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma = \frac{\sum m(a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{\sum m\, d^2}{2},$$

$$(a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta)(\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta)$$
$$= \frac{1}{2} \sum m (a\xi + b\eta + c\zeta)^2 = \frac{\sum m\, d^2}{2} - \frac{\sum m\, q^2}{2}.$$

Facendo quindi le somme delle espressioni analoghe a queste per i singoli elementi magnetici costituenti il sistema già considerato precedentemente, si ha

$$\sum (a_1 \alpha_1 + b_1 \beta + c_1 \gamma_1) = \frac{D}{4},$$

$$\sum (a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta)(\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta) = \frac{D}{4} - \frac{I}{2},$$

dove D ed I hanno di nuovo il significato primitivamente attribuito a questi simboli. D'altronde è evidente che si ha pure

$$\sum \alpha_1 = \alpha, \qquad \sum \beta_1 = \beta, \qquad \sum \gamma_1 = \gamma;$$

dunque la formola (9) può scriversi

$$V = -\varpi \varphi'(\rho) + \frac{D}{4} \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} + \left(\frac{D}{4} - \frac{I}{2}\right) \left\{ \varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \right\}$$

ossia finalmente

$$V = -\varpi \varphi'(\rho) + \frac{D}{4} \varphi''(\rho) - \frac{I}{2} \left\{ \varphi''(\rho) - \frac{\varphi'(\rho)}{\rho} \right\},$$

donde risulta l'identità della funzione V calcolata in questo secondo modo con quella definita dall'equazione $(4)_b$.

Se nell'equazione (9) si pone $\varphi(\rho) = \frac{1}{\rho}$ si ottiene per V l'espressione dalla quale è partito Thomson per giungere, con successive trasformazioni, all'espressione semplificata (8) e quindi alla sua definizione dell'asse e del centro magnetico.

In ciò che precede abbiamo avuto più volte occasione di considerare i momenti d'inerzia d'un sistema di masse privo di baricentro. Non sarà inopportuno riassumere in brevi termini la teoria generale di tali momenti, per tali sistemi, teoria di cui Reye ha già dato qualche cenno nella sua ben nota Memoria intitolata: *Trägheits-und höhere Momente eines Massen-Systemes* (T. 72 del Giornale di Borchardt) (*). Il metodo tenuto in questo riassunto potrebbe applicarsi, senza alcun mutamento essenziale, anche agli ordinarî sistemi di masse (pei quali anzi le formole prendono aspetto più simmetrico) e fornirebbe, a nostro credere, il procedimento più naturale e più spedito per istabilire le proposizioni e le formole più necessarie in meccanica, sulla base degli eleganti e fecondi concetti di Reye e di Hesse.

Ci riferiremo in ciò che segue alla terna che abbiamo detta *centrale* (come nell'ordinaria teoria si assume quella degli assi principali del baricentro) e riterremo quindi soddisfatte le relazioni

$$\left.\begin{array}{llll} \sum m = 0, & \sum ma = 0, & \sum mb = 0, & \sum mc = \delta, \\ \sum ma^2 = -A, & \sum mb^2 = -B, & \sum mc^2 = -C, & \\ \sum mbc = 0, & \sum mca = 0, & \sum mab = 0 & \\ & A + B + C = 0. & & \end{array}\right\} \tag{10}$$

Sia

$$\lambda x + \mu y + \nu z - p = 0 \tag{11}$$

l'equazione normale di un piano, cioè sieno λ, μ, ν i coseni di direzione della perpendicolare p condotta dall'origine al piano. Ponendo

$$H = \sum m(a\lambda + b\mu + c\nu - p)^2$$

si trova (10)

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2\delta p\nu + H = 0. \tag*{$(11)_a$}$$

Se per il punto (x, y, z) del piano (11) si conduce un asse normale a questo piano, il momento d'inerzia I del sistema rispetto a quest'asse è dato da

$$I = \sum m\{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2\} - H,$$

epperò fra H ed I ha luogo la relazione

$$H + I + 2\delta z = 0. \tag*{$(11)_b$}$$

(*) Ricerche geometriche d'indole più generale sullo stesso argomento possono vedersi nella recente Memoria di Jung *Sui momenti obliqui d'un sistema di punti* (Collectanea mathematica, Milano, 1881.

Sia

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' z - p' = 0 \tag{12}$$

l'equazione normale di un secondo piano e sia H' il valore di H relativo ad esso, talchè si abbia $(11)_a$

$$A\lambda'^2 + B\mu'^2 + C\nu'^2 + 2\delta p'\nu' + H' = 0. \tag{12_a}$$

Essendo

$$\begin{aligned}&\sum m(a\lambda + b\mu + c\nu - p)(a\lambda' + b\mu' + c\nu' - p')\\ &= -\{A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + C\nu\nu' + \delta(p\nu' + p'\nu)\},\end{aligned}$$

è chiaro che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia nullo il momento complesso del sistema rispetto a due piani, (11) e (12), perpendicolari fra loro, sono

$$\left.\begin{aligned}A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + C\nu\nu' + \delta(p\nu' + p'\nu) = 0,\\ \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ora le due equazioni $(11)_a$, $(12)_a$, o meglio le seguenti, omogenee rispetto alle coordinate tangenziali λ, μ, ν, p,

$$\begin{aligned}A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2\delta p\nu + H\,(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0,\\ A\lambda'^2 + B\mu'^2 + C\nu'^2 + 2\delta p'\nu' + H'(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2) = 0,\end{aligned}$$

rappresentano, nell'ipotesi di H ed H' costanti e diseguali, due quadriche omofocali fra loro (ed a quella rappresentata dall'equazione

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2\delta p\nu = 0)$$

e le due equazioni (13) esprimono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè i due piani (11) e (12) sieno conjugati rispetto ad amendue le dette quadriche. Ma questi due piani, essendo rispettivamente tangenti a quelle due quadriche, non possono essere conjugati rispetto ad esse se la loro retta comune non passa pei due punti di contatto: possiamo dunque concludere che per ogni retta dello spazio passa una sola coppia di piani ortogonali di momento complesso nullo, ed è la coppia dei piani tangenti alle due quadriche omofocali toccate da quella retta (*). Segue di quì, come corollario, che due quadriche del sistema non possono intersecarsi che ortogonalmente.

(*) È noto (e risulta da quanto sopra) che due quadriche omofocali ortogonali sono vedute da ogni punto dello spazio come intersecantisi ad angolo retto. Si può dunque dire che ogni diedro di momento complesso nullo è un *diedro visuale* del sistema omofocale, e viceversa.

L'equazione della quadrica $(11)_a$, in coordinate locali x, y, z (facilmente deducibile colle regole note), è la seguente

$$\frac{x^2}{A+H}+\frac{y^2}{B+H}=\frac{C+H+2\delta z}{\delta^2}, \tag{14}$$

che rappresenta una famiglia di paraboloidi omofocali. Per ogni sistema di valori delle x, y, z quest'equazione ammette tre radici reali H_1, H_2, H_3 le quali, supponendo $A-B>0$, sono così distribuite:

$$H_1<-A<H_2<-B<H_3.$$

Le coordinate x, y, z si esprimono in funzione di queste radici mediante le formole

$$\left.\begin{aligned} x^2&=-\frac{(A+H_1)(A+H_2)(A+H_3)}{(A-B)\delta},\\ y^2&=+\frac{(B+H_1)(B+H_2)(B+H_3)}{(A-B)\delta},\\ z&=-\frac{H_1+H_2+H_3}{2\delta}.\end{aligned}\right\} \tag*{$(14)_a$}$$

Dalla relazione $(11)_b$ e dalla proposizione precedentemente dimostrata risulta che i tre momenti principali d'inerzia relativi ad un punto qualunque (x, y, z) dello spazio sono dati dall'equazione

$$\frac{x^2}{A-2\delta z-I}+\frac{y^2}{B-2\delta z-I}=\frac{C-I}{\delta^2}, \tag*{$(14)_b$}$$

e che i corrispondenti assi principali sono normali ai tre paraboloidi omofocali (14) che passano per quel punto e che sono individuati dai tre valori di H legati, mercè la relazione $(11)_b$, alle tre radici I dell'equazione $(14)_b$.

Vi sono piani pei quali è $H=0$, e sono i piani tangenti del paraboloide rappresentato dalle due equazioni reciproche

$$\left.\begin{aligned} A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2+2\delta p\nu&=0,\\ \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}&=\frac{C+2\delta z}{\delta^2}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Questo paraboloide (reale) è l'immagine geometrica del sistema, giusta i ricordati concetti di Reye e di Hesse.

Così vi sono rette per le quali è $I=0$, cioè per le quali il momento d'inerzia del sistema è nullo, e queste rette, designandone con (x, y, z) un punto qualunque e con λ, μ, ν i coseni di direzione, sono comprese nell'equazione

$$A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2+2\delta(\lambda x+\mu y+\nu z)\nu-2\delta z=0,$$

che rappresenta un complesso speciale di 2° grado.

L'equazione

$$A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2+2\delta(\lambda x+\mu y+\nu z)\nu=0$$

rappresenta il cono quadrico inviluppato dai piani che passano per il punto (x, y, z) e pei quali è $H=0$. Quando $z=0$ questo cono, in virtù della relazione $A+B+C=0$, possiede infinite terne ortogonali di piani tangenti. Vi è dunque una triplice infinità di terne ortogonali, coll'origine nel piano centrale, per le quali è

$$\sum m a^2=\sum m b^2=\sum m c^2=0$$

e per i di cui assi sono quindi nulli i momenti d'inerzia.

Senza insistere di più su queste proprietà, e senza citarne molte altre dello stesso genere che si potrebbero dedurre con eguale facilità, passiamo subito, per terminare, alle quaterne di masse che possono surrogare il sistema rispetto ai momenti lineari ed ai momenti d'inerzia.

Sieno m_i, a_i, b_i, c_i $(i=1, 2, 3, 4)$ le masse e le coordinate di quattro punti, e pongasi

$$\left.\begin{array}{llll}\sum m_i=0, & \sum m_i a_i=0, & \sum m_i b_i=0, & \sum m_i c_i=\delta,\\ \sum m_i a_i^2=A', & \sum m_i b_i^2=B', & \sum m_i c_i^2=A' & \\ \sum m_i b_i c_i=0, & \sum m_i c_i a_i=0, & \sum m_i a_i b_i=0 & \end{array}\right\} \qquad (16)$$

dove

$$A'=\sum m a^2=-\sum m(b^2+c^2)=-A, \text{ ecc.}$$

Soddisfatte le condizioni precedenti è soddisfatta anche la

$$\sum m_i(a_i^2+b_i^2+c_i^2)=0,$$

cosicchè le quattro masse m_i hanno egual asse, egual centro ed eguali momenti lineari e d'inerzia del sistema fin quì considerato, e la funzione potenziale (5) di queste masse riesce identica, per ogni punto potenziato (lontano), a quella del sistema suddetto.

Introducendo due quaterne di variabili

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \theta_4,$$
$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega_4,$$

legate dalle relazioni lineari

$$\theta_i=a_i\sqrt{\frac{m_i}{A'}}\,\omega_1+b_i\sqrt{\frac{m_i}{B'}}\,\omega_2+c_i\sqrt{\frac{m_i}{C'}}\,\omega_3+\sqrt{m_i}\,\omega_4, \qquad (i=1, 2, 3, 4) \quad (17)$$

è chiaro che, ammesse le equazioni (16), si ha

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+\theta_4^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2+\frac{2\delta}{\sqrt{C'}}\,\omega_3\omega_4, \tag{17$_a$}$$

e che, reciprocamente, ammessa quest'unica equazione come identicamente soddisfatta dalle sostituzioni lineari (17), seguono di necessità le relazioni (16) fra i coefficienti di queste sostituzioni. Ora dalle equazioni (17), in forza di queste stesse relazioni (16), risulta

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{A'}}\sum a_i\sqrt{m_i}\,\theta_i=\omega_1,\\
&\frac{1}{\sqrt{B'}}\sum b_i\sqrt{m_i}\,\theta_i=\omega_2,\\
&\frac{1}{\sqrt{C'}}\sum c_i\sqrt{m_i}\,\theta_i=\omega_3+\frac{\delta}{\sqrt{C'}}\,\omega_4,\\
&\frac{\sqrt{C'}}{\delta}\sum\sqrt{m_i}\,\theta_i=\omega_3.
\end{aligned}\right\} \tag{17$_b$}$$

Formando con questi valori l'espressione costituente il secondo membro della equazione (17), ovvero l'espressione equivalente

$$\omega_1^2+\omega_2^2+2\,\omega_3\left(\omega_3+\frac{\delta}{\sqrt{C'}}\,\omega_4\right)-\omega_3^2$$

si trova

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1^2+\omega_2^2+2\,\omega_3\left(\omega_3+\frac{\delta}{\sqrt{C'}}\,\omega_4\right)-\omega_3^2\\
&=\sum m_i\left(\frac{a_i^2}{A'}+\frac{b_i^2}{B'}-\frac{C'-2\delta c_i}{\delta^2}\right)\theta_i^2\\
&+2\sum\sqrt{m_im_j}\left(\frac{a_ia_j}{A'}+\frac{b_ib_j}{B'}-\frac{C'-\delta(c_i+c_j)}{\delta^2}\right)\theta_i\theta_j.
\end{aligned}\right\} \tag{17$_c$}$$

Dovendo questa espressione essere identicamente eguale, in virtù delle relazioni (16) fra i coefficienti delle sostituzioni (17), a

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+\theta_4^2,$$

fa d'uopo che fra i coefficienti stessi abbiano pur luogo le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a_i^2}{A}+\frac{b_i^2}{B}=\frac{C+2\delta c_i}{\delta^2}-\frac{1}{m_i},\\
&\frac{a_ia_j}{A}+\frac{b_ib_j}{B}=\frac{C+\delta(c_i+c_j)}{\delta^2},
\end{aligned}\right\} \tag{17$_d$}$$

nella prima delle quali l'indice i ha i quattro valori 1, 2, 3, 4, e nella seconda gli indici i, j rappresentano una qualunque delle sei combinazioni binarie che si possono formare coi medesimi numeri. E poichè le dieci equazioni $(17)_d$ traggono alla loro volta con sè l'identità $(17)_a$, è chiaro che le equazioni stesse sono equipollenti alle (16) donde siamo partiti.

Le sei equazioni del secondo gruppo $(17)_d$ esprimono che le quattro masse m_i sono collocate nei quattro vertici d'un tetraedro conjugato alla quadrica (15), in conformità all'elegante teorema di Reye. Le quattro equazioni del primo gruppo determinano le masse che si devono collocare in questi vertici.

Infiniti essendo i tetraedri conjugati al paraboloide (15), si potrebbe cercare se ne esista alcuno per il quale la riduzione del sistema a quattro masse presenti qualche carattere speciale. Un tale carattere sarebbe, per esempio, la decomposizione della quaterna di masse in due separati gruppi privi di baricentro, decomposizione che avverrebbe quando si avesse separatamente

$$m_1+m_2=0, \qquad m_3+m_4=0.$$

Ma non ci siamo inoltrati in questa ricerca per la seguente ragione: dalla combinazione delle equazioni $(17)_d$ risultano le equazioni del tipo

$$\frac{(a_i-a_j)^2}{A}+\frac{(b_i-b_j)^2}{B}=-\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right),$$

e quindi, nel caso che sia $m_i+m_j=0$,

$$\frac{(a_i-a_j)^2}{A}+\frac{(b_i-b_j)^2}{B}=0.$$

Ora una tal equazione non può essere soddisfatta da coordinate reali se non nel caso in cui A e B abbiano segno contrario. Quindi l'esistenza di quaterne così fatte, allo stato reale, non si può verificare in ogni caso.

Ammettendo certe simmetrie nel sistema, per le quali si annullano i termini del secondo gruppo nell'espressione (5), e protraendo l'approssimazione fino al gruppo successivo, il sistema può essere rappresentato da due soli punti, o *poli,* come ha mostrato Riecke (Annali di Poggendorff, 1872).

Pavia, 10 febbrajo 1882.

Aggiunte a recenti lavori dei sig.[i] Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa.

(*Di* F. Casorati, *a Pavia.*)

§ 1.

Il 20 dell'ora scorso febbrajo inviava al sig. Hermite un articolo sulle funzioni affette da una infinità di singolarità essenziali, con preghiera di comunicarlo, ove gli fosse parso opportuno, all'Accademia delle scienze di Parigi. L'illustre Matematico, con l'abituale sua cortesia ed affabilità, rispondevami subito, che, nell'estensione dell'idea del sig. Mittag-Leffler e del procedimento del sig. Weierstrass alla costruzione di funzioni uniformi affette da una infinità di punti singolari essenziali, era stato prevenuto dal sig. Mittag-Leffler medesimo, di cui avrei trovato la comunicazione all'Accademia suddetta nel Compte-rendu del 13 febbrajo.

Siccome però al principio dell'articolo ed anche in seguito faceva allusione ad un'estensione dell'idea e del procedimento su mentovati maggiore di quella che ora vedo esposta dal chiarissimo professore di Helsingfors (*), così stimo conveniente di pubblicare egualmente il mio articolo, prendendone occasione per svolgere un po' più le cose alle quali in esso aveva puramente alluso.

Ecco anzitutto l'articolo.

L'idée développée par M. Mittag-Leffler, de construire, par l'addition de fractions rationnelles convenablement modifiées, une fonction uniforme qui devienne infinie comme chacune de ces fractions (**), *peut être généralisée,* c'est-

(*) Nel detto Compte-rendu testè pervenutomi.

(**) La difficulté de la langue m'empêchant d'étudier directement les publications de M. Mittag-Leffler à ce propos, je dois avertir que je ne connais ces publications que par ce qu'en ont écrit MM. Weierstrass, Dini et Hermite dans les Notes suivantes:

à-dire, appliquée à la formation d'une grande variété de fonctions, uniformes ou non, qui dans le voisinage de points d'une suite donnée se comportent comme des fonctions (n'importe si transcendantes, uniformes ou non, etc.) données pour chacun de ces points.

En particulier, elle me paraît aussi immédiatement applicable à la construction de fonctions uniformes ayant un nombre infini de ces singularités essentielles, dont M. Weierstrass a considéré un nombre fini dans son Mémoire: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (*). C'est ce que je vous demande la permission d'expliquer plus particulièrement dans cette communication.

A fin que le nombre des points singuliers essentiels pour une fonction d'une variabile z soit infini, il faut que ces points se succedent à des distances qui décroissent indéfiniment lorsqu'on s'approche de certains lieux, ou plus particulièrement, de certains points sur la sphère z (**). Ces points limites pourront être dits essentiellement singuliers de *seconde espèce,* en appelant de *première espèce* ceux qui sont considérés dans les travaux cités ci-dessus.

Contentons nous, à présent, d'envisager le cas le plus simple, celui où la fonction a une seule singularité essentielle de seconde espèce. Par un changement de variable on peut faire tomber cette singularité où l'on veut sur la sphère de la variable; je la supposerai dans le point $z=\infty$. Alors on peut toujours concevoir les points

$$c_1, \qquad c_2, \qquad c_3, \dots , \tag{1}$$

où tombent les singularités de première espèce, rangés de manière à avoir (***)

$$|c_1| \leqq |c_2| \leqq |c_3| \leqq \dots , \qquad \lim_{n=\infty} |c_n| = \infty. \tag{2}$$

Maintenant je veux me limiter encore plus, en envisageant exclusivement

---

Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn Mittag-Leffler, dans le Monatsbericht de l'Acad. de Berlin, 5 Août 1880; *Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa,* dans l'ouvrage dédié à la memoire de D. Chelini; *Sur quelques points de la théorie des fonctions,* dans le tome XII des Acta Societatis scientiarum Fennicæ, et dans le tome XC du Journal de Borchardt.

(*) Paru dans les Abhandl. de l'Acad. de Berlin pour l'année 1876, et dont M. Picard a publié une traduction française dans le tome VIII (1879) des Annales de l'École Norm. Superieure.

(**) C'est-à-dire sur le lieu représentatif des valeurs de z, conçu, pour plus de clarté, dans ce moment, en forme de sphère de rayon fini.

(***) M. Weierstrass désigne par le signe $|a|$ le module de a.

les fonctions qui n'ont aucun infini (*). Une quelconque $F(z)$ de ces fonctions doit donc se comporter *régulièrement* (**) dans le voisinage de tout point déterminé qui n'appartient pas à la suite (1).

Dans le voisinage d'un point c_ν de cette suite, on sait, par le théorème de Laurent, que $F(z)$ pourra s'exprimer par une série de puissances entières positives et négatives de $z-c_\nu$. Mais la somme des puissances positives se comportant régulièrement, c'est la somme des puissances négatives qui exprime la manière dont la fonction se comporte lorsque la variable s'approche du point c_ν, et caractérise, pour ainsi dire, la singularité de la fonction en ce point (***). Cette somme serait, comme on sait, composée d'un nombre limité de termes, si $F(z)$ avait un infini dans le point; mais, si le point est essentiellement singulier, elle est une série, convergente pour toute valeur finie de $\frac{1}{z-c_\nu}$. Dans tous les cas, on peut l'exprimer par $G\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)$; en désignant systématiquement, comme fait M. Weierstrass, par $G(t)$ une fonction entière, rationnelle ou transcendante, de t.

Il existera donc pour chaque fonction $F(z)$, de la classe que nous voulons maintenant considérer, une suite de fonctions transcendantes G

$$G_1\left(\frac{1}{z-c_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{z-c_2}\right), \quad G_3\left(\frac{1}{z-c_3}\right), \ldots$$

ayant la propriété que la différence

$$F(z)-G_\nu\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)$$

restera régulière dans le voisinage de $z=c_\nu$ $(\nu=1,\ 2,\ 3,\ldots)$.

Ces choses rappelées, il se présente naturellement, pour cette classe de fonctions, la question analogue de celle resolue par M. Mittag-Leffler. C'est-à-dire la question suivante.

Etant données une suite infinie de quantités

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \ldots ,$$

(*) C'est-à-dire, qui n'ont aucun point singulier non essentiel, suivant la locution de M. Weierstrass.

(**) Mémoire cité de M. Weierstrass, pag. 111 de la traduction.

(***) Voir à ce propos le chap. III de la section IV de ma *Teorica delle funzioni di variabili complesse*. Pavia, 1868. J'y avais nommé une *discontinuité* ce que M. Weierstrass dit une *singularité essentielle*.

rangées d'après les conditions (2), *et une suite corréspondante de fonctions*

$$G_1\left(\frac{1}{z-c_1}\right),\qquad G_2\left(\frac{1}{z-c_2}\right),\qquad G_3\left(\frac{1}{z-c_3}\right),\cdots; \tag{3}$$

former une série absolument et uniformément convergente, dont les termes ne diffèrent de ceux de cette dernière suite que par des fonctions entières rationnelles de z.

Une telle série établira l'existence d'une fonction uniforme qui sera régulière pour toute valeur déterminée de z qui n'appartient pas à la suite (1), pendant que dans chacun des points de cette suite elle aura une singularité essentielle de première espèce, exprimée par la fonction G corréspondante, et qu'elle aura enfin une singularité essentielle de seconde espèce dans le point $z=\infty$.

Et ce qu'il m'importe aussi, maintenant, de faire remarquer c'est que la série me paraît pouvoir être formée tout simplement par le même procédé indiqué par M. Weierstrass dans sa Note sur le théorème de M. Mittag-Leffler; procédé qui me semble d'une portée très-étendue, si, comme j'ai déjà dit de l'idée fondamentale de M. Mittag-Leffler, *on conçoit de l'appliquer, non exclusivement à des suites de fonctions rationnelles, mais encore à des suites de fonctions d'autre nature.* Pour notre cas, c'est-à-dire pour former la série corréspondante à la suite (3), on n'aura qu'à appliquer, sans aucune autre considération, le procédé à cette suite comme M. Weierstrass l'a appliqué à la suite de M. Mittag-Leffler (*)

$$f_1(z),\qquad f_2(z),\qquad f_3(z),\dots . \tag{4}$$

Et, en effet, ce qui est nécessaire de supposer dans ces fonctions f_ν, pour en tirer avec ce procédé une série qui exprime une fonction uniforme se comportant comme f_ν dans le voisinage di a_ν, et se comportant régulièrement pour toute valeur de z qui n'appartient pas à la suite

$$a_1,\qquad a_2,\qquad a_3,\dots ,$$

c'est, si je ne me trompe, que f_ν ($\nu=1, 2, 3,\dots$) soit elle-même régulière pour toute valeur de z différente de a_ν, et que ces grandeurs a_ν puissent être rangées de manière à satisfaire les conditions

$$|a_1|\leqq|a_2|\leqq|a_3|\leqq\dots,\qquad \lim_{n=\infty}|a_n|=\infty.$$

Car, ces propriétés ayant lieu, les fonctions (4) admettraient toujours (quelque

(*) Weierstrass: Note citée, pag. 4.

fût, du reste, leur nature particulière, rationnelle ou non), chacune, un développement suivant les puissances entières positives de z; et pour f_ν ce développement serait convergent pour tout point à l'intérieur du cercle qui a 0 pour centre et $|a_\nu|$ pour rayon.

Or, nos fonctions (3) sont précisément régulières pour toute valeur de z, à l'exception des valeurs $c_1, c_2, \ldots$ respectivement pour $G_1, G_2, \ldots$; et ces valeurs singulières satisfont aux mêmes conditions (2) que les quantités $a_1, a_2, \ldots$. La fonction G_ν se développera en une série de la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)=\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} z^\mu \tag{5}$$

convergente à l'intérieur du cercle de rayon $|c_\nu|$.

Donc, ayant pris, comme fait M. Weierstrass, une série de quantités positives

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \ldots$$

dont la somme soit finie, et une autre quantité ε positive et plus petite que 1, on pourra former une série de la nature demandée

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[G_\nu\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)-P_\nu(z)\right], \tag{6}$$

en prenant pour P_ν la somme des m_ν premiers termes de la série (5), pourvu que m_ν soit assez grand pour que le module de la somme des termes restants de cette série soit plus petit que ε_ν pour toute valeur de z satisfaisant la condition $|z| \leqq \varepsilon |c_\nu|$.

Et maintenant je crois devoir terminer, me paraîssant avoir atteint suffisamment le but d'indiquer une manière d'établir pour les fonctions à un nombre infini de points singuliers essentiels plusieurs propositions fondamentales analogues de celles qu'on a établi pour le cas d'un nombre fini de ces points.

§ 2.

Il progresso compiutosi ultimamente nella teorica generale delle funzioni uniformi si fonda sui due teoremi seguenti:

1.° *Il teorema* del sig. Weierstrass, che afferma l'esistenza ed insegna un modo di costruire, in forma di prodotto infinito, una funzione intera che si annulli in una infinità di punti, soggetti alla sola limitazione che in ogni porzione finita del piano della variabile ne cada un numero finito.

2.° *Il teorema* del sig. Mittag-Leffler, che dimostra come si possa sempre formare, con una successione illimitata di funzioni razionali $f_1, f_2, f_3, \ldots$, una serie convergente

$$[f_1 - P_1] + [f_2 - P_2] + [f_3 - P_3] + \cdots,$$

sottraendo da ciascuna funzione f una conveniente funzione razionale intera P; la qual serie viene a stabilire l'esistenza di una funzione che diventa infinita dove e come ciascuna delle date funzioni f, che ha all'infinito una singolarità essenziale, e che dappertutto altrove si comporta regolarmente.

Ora, dunque, osservo, conformemente a ciò che scriveva nell'articolo precedente, che, se si generalizza l'idea del sig. Mittag-Leffler, vale a dire, *se si forma il pensiero* di costituire delle serie convergenti con successioni di funzioni *anche non razionali*, sottraendo da ciascuna di queste un'opportuna funzione che non ne alteri quel carattere che si vuol conservare nella somma della serie; si viene in possesso di un metodo di assai grande portata, sia per costruire effettivamente funzioni che abbiano a presentare un dato complesso di caratteri o singolarità, come per stabilire importanti proposizioni.

Ad esempio, stimo opportuno di notare, che, nel campo delle funzioni uniformi, esso ci darà subito anche il teorema del sig. Weierstrass; il quale, pertanto, si potrà d'ora innanzi riguardare come conseguenza del teorema del sig. Mittag-Leffler generalizzato.

Il procedimento semplicissimo, col quale il sig. Weierstrass, nella Nota del 5 agosto 1880, dimostra il teorema del sig. Mittag-Leffler, conduce assai facilmente alla generalizzazione in discorso. Basta farsi la domanda: quali proprietà è strettamente *necessario* di supporre nelle funzioni $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$ per poter loro applicare questo procedimento?

Ecco pertanto in quali termini presentavo la generalizzazione del teorema del sig. Mittag-Leffler nelle mie lezioni all'Università di Pavia (*).

Teorema **A.** *Si imagini data una serie di funzioni della variabile z. Ciascuna di esse potrà ammettere più valori, anche una infinità di valori, per ogni valore di z. Comunque sia, se ne scelga uno per ciascuna, corrispondente ad un valore iniziale di z; e, facendo partire z da questo punto-valor iniziale, si seguiti a prendere per ciascuna funzione quel nuovo valore che succede con continuità al già preso. Così facendo, dalla data serie di funzioni*

(*) Nel corrente semestre jemale di Analisi Superiore.

scaturirà una serie di rami delle medesime che significheremo con

$$f_1(z), \qquad f_2(z), \qquad f_3(z), \ldots .$$

Ciò premesso, supponiamo che le funzioni date e i valori iniziali presi sieno tali che questi rami si possano esprimere ciascuno con una serie di potenze intere e positive di z, rispettivamente entro cerchi i cui raggi

$$r_1, \qquad r_2, \qquad r_3, \ldots$$

soddisfacciano le condizioni (*)

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \ldots , \qquad \lim_{n=\infty} r_n = \infty.$$

Allora, sottraendo da ciascuna funzione f_ν la somma

$$P_\nu = \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} A_\mu^{(\nu)} z^\mu$$

composta di conveniente numero finito m_ν di primi termini dello sviluppo

$$f_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} z^\mu,$$

si potrà formare la serie

$$[f_1(z) - P_1(z)] + [f_2(z) - P_2(z)] + [f_3(z) - P_3(z)] + \cdots$$

convergente incondizionatamente ed in egual grado in ogni porzione finita del piano z, da cui sieno esclusi certi luoghi, singolari per le funzioni f_ν.

Per la dimostrazione basta ripetere rispetto a queste funzioni f_ν ciò che il sig. Weierstrass disse riguardo alle funzioni f_ν del sig. Mittag-Leffler.

Parendomi opportuno di dare almeno un esempio di applicazione dell'enunciato teorema, sceglierò l'esempio semplicissimo, dianzi citato, che si traduce

(*) Ben s'intende che per f_ν il raggio del cerchio sia r_ν, mentre il centro è sempre in $z=0$. Se le funzioni fossero, per es., le seguenti

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{a_\nu^2}\right)\left(1-k^2\frac{z^2}{a_\nu^2}\right)}}, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

allora f_ν sarebbe esprimibile con una serie di potenze intere e positive di z entro il cerchio avente per raggio il minore dei due moduli

$$|a_\nu|, \qquad \left|\frac{a_\nu}{k}\right|.$$

nel teorema del sig. WEIERSTRASS; esempio che ci dà anche occasione di osservare come la costruzione di funzioni in forma di prodotti infiniti venga a schierarsi tra le applicazioni di esso teorema **A**.

Pertanto, cominciamo a riflettere, che, posto

$$\Phi_m = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_m,$$

la somma

$$\log\varphi_1 + \log\varphi_2 + \cdots + \log\varphi_m$$

sarà sempre uno fra i logaritmi di Φ_m, comunque sieno stati scelti, fra tutti i possibili, i valori dei logaritmi che entrano in essa somma; e che, reciprocamente, comunque sieno stati presi i logaritmi di Φ_m e di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}$, si troverà sempre un logaritmo di φ_m pel quale sussista la eguaglianza

$$\log\Phi_m = \log\varphi_1 + \log\varphi_2 + \cdots + \log\varphi_m.$$

Da queste proprietà scende affatto chiaramente, che la convergenza di *una* serie di particolari logaritmi dei fattori φ, trae seco la convergenza di Φ_m; e che, reciprocamente, la convergenza di Φ_m trae seco quella di una serie di logaritmi dei suddetti fattori; logaritmi che si possono supporre scelti successivamente uno dopo l'altro come s'è detto di quello di φ_m, per modo che sussista la precedente eguaglianza per ogni valore di m, comunque s'intenda scelto il logaritmo di Φ_m (*).

Veniamo ormai all'esempio. La serie delle funzioni date sia la seguente

$$\log\left(1-\frac{z}{a_1}\right), \qquad \log\left(1-\frac{z}{a_2}\right), \qquad \log\left(1-\frac{z}{a_3}\right), \ldots$$

Come valori iniziali di questi logaritmi, corrispondenti al valor iniziale 0 di z, scegliamo per tutti il valor 0. Allora, i rami che ne scaturiscono saranno dapprima i logaritmi *principali* (**). Il ramo che scaturirà dalla funzione $\log\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)$ non potrà cessare di essere il logaritmo principale di $1-\frac{z}{a_\nu}$ finchè z non esca dal cerchio di raggio $|a_\nu|$, ed entro questo cerchio esso ramo sarà esprimibile

(*) Non credo affatto superflue queste osservazioni e quelle che sto per fare su $\log\left(1-\frac{z}{a}\right)$, sapendo, come, per non trovare sempre abbastanza precisato quale valore per ciascun logaritmo s'intenda preso in considerazione, molti si disgustino dell'uso dei logaritmi e li evitino nei loro procedimenti, con non lieve scapito, talvolta, della brevità e della spontaneità.

(**) Cfr. mia *Teorica* su citata, pag. 165.

colla serie (*)

$$-\frac{z}{a_\nu}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^3-\cdots$$

In questo caso adunque i raggi $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sono rispettivamente i moduli di $a_1, a_2, a_3, \ldots$, pei quali ammettiamo appunto le condizioni

$$|a_1| \leqq |a_2| \leqq |a_3| \leqq \cdots, \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

Epperò, prendendo

$$P_\nu(z)=\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\mu,$$

potremo formare la serie

$$F(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)+P_\nu(z)\right]$$

convergente incondizionatamente e in egual grado in ogni porzione finita del piano z, da cui sieno esclusi i punti a_ν. Questa serie esprimerà una funzione $F(z)$ non uniforme, potendo essa ricevere valori diversi al ritornare di z in uno stesso punto, se z abbia girato intorno a qualcuno dei punti a_ν (**). Questi valori però non potranno differire tra loro che per multipli interi di $2\pi i$; laonde

$$e^{F(z)}$$

cioè il prodotto infinito

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)e^{P_\nu(z)}$$

avrà un solo valore per ogni valore di z. La sua convergenza ha pure luogo, ben s'intende, incondizionatamente e in egual grado, come per F. Così resta dimostrato il teorema del sig. Weierstrass (***).

(*) Cfr. mia *Teorica* sudd., § 73.

(**) Comunque vogliasi imaginare foggiata la suddetta porzione di piano z, che chiamerò S, la serie si potrà sempre distinguere in una prima parte, composta di un numero finito de' suoi primi termini, ed in una seconda parte composta della infinità dei termini corrispondenti ai punti a_ν che distano dal punto 0 più di qualsiasi punto di S. Sarà la prima parte soltanto che potrà ricevere valori diversi al ritornare di z in uno stesso punto per cammini sempre contenuti in S.

(***) Anche il sig. Dini, nella sua Nota sopra citata, dimostra questo teorema, riducendo lo studio del prodotto infinito a quello della serie dei logaritmi dei fattori; riduzione di cui s'era già valso felicemente, per il caso di distribuzione degli zeri a distanze non mai minori di una quantità fissa d, il sig. Betti nella Introduzione della sua *Monografia delle funzioni elittiche* (Annali di Matematica, Tomo III, Roma, 1860), dove procede assai più oltre di Gauss nella via che mena al teorema del sig. Weierstrass.

Prendendo la serie delle derivate

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-a_\nu}+P'_\nu(z)\right]$$

ad esprimere la derivata di $F(z)$, la moltiplicazione di essa per $e^{F(z)}$ somministrerà la derivata del prodotto.

§ 3.

Relativamente alle funzioni affette da una infinità di singolarità essenziali, considererò adesso il caso in cui vi sieno anche infiniti.

Il sig. WEIERSTRASS esprimeva, nella sua Memoria sopra citata, una funzione affetta da un numero finito n di singolarità con la formola

$$\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right) \tag{7}$$

ed esprimeva con quest'altra formola

$$\sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda(z;\ c_\lambda),$$

nella Nota del 5 agosto 1880, una funzione affetta da un numero finito n di singolarità *essenziali;* dove $F(z;\ c)$ significa funzione uniforme avente una sola singolarità essenziale, nel punto c, ed un numero qualunque, finito o no, di infiniti. Una siffatta funzione $F(z;\ c)$ può esprimersi mediante il rapporto di due funzioni intere di $\frac{1}{z-c}$; così che la formola precedente equivale alla seguente

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{G_\lambda^{(1)}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)}{G_\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)}, \tag{8}$$

che è più direttamente significativa, siccome formata immediatamente coi simboli G.

L'articolo del sig. MITTAG-LEFFLER nel Compte-rendu del 13 febbrajo ed il mio § 1 si riferiscono (*) alla formola (7) per n infinito. Ora estenderò la formola (8) a comprendere anche il caso di una infinità di punti c_λ.

(*) Dico *si riferiscono* e non *stabiliscono* la formola (7) per ragioni che si leggono nella 1ª delle *Osservazioni* poste alla fine di questo paragrafo.

Data una serie di funzioni

$$\frac{G_1^{(1)}\left(\frac{1}{z-c_1}\right)}{G_1^{(2)}\left(\frac{1}{z-c_1}\right)},\qquad \frac{G_2^{(1)}\left(\frac{1}{z-c_2}\right)}{G_2^{(2)}\left(\frac{1}{z-c_2}\right)},\dots,$$

dove i punti c_λ soddisfacciano alle solite condizioni (2), e dove ciascun denominatore

$$G_\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)$$

non diventi zero che per valori di z i cui moduli crescano all'infinito con λ; il teorema **A** ci dice subito, anche quì, che si può sempre formare una serie convergente

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left[\frac{G_\lambda^{(1)}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)}{G_\lambda^{(2)}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)}-P_\lambda(z)\right]$$

prendendo per P_λ opportuno numero finito m_λ di primi termini dello sviluppo di

$$\frac{G_\lambda^{(1)}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)}{G_\lambda^{(2}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)}$$

secondo le potenze intere positive di z, sviluppo che sarà valido in un cerchio il cui raggio crescerà all'infinito con λ.

Osserviamo inoltre che la funzione

$$\frac{G^{(1)}\left(\frac{1}{z-c}\right)}{G^{(2}\left(\frac{1}{z-c}\right)}-P(z)$$

avendo un solo punto singolare essenziale, cioè c, può anche venire espressa col solo rapporto di due funzioni intere di $\frac{1}{z-c}\cdot$ Perciò, la serie precedente si può anche immaginare scritta nella forma

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{G_\lambda^{(3)}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)}{G_\lambda^{(4)}\left(\frac{1}{z-c_\lambda}\right)}.$$

Ma passiamo alla proposizione che dirò reciproca e che è veramente l'analoga della testè citata del sig. Weierstrass.

Sia dunque $F(z)$ una funzione uniforme, la quale, oltre di avere le singolarità essenziali nei punti

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \ldots$$

distribuiti secondo le solite condizioni (2), sia infinita in una infinità di posti le cui distanze diminuiscano indefinitamente coll'avvicinarsi ai punti c_λ (*). Se quei posti sieno distribuiti in serie

$$\begin{array}{lll} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & a_3^{(1)}, \ldots \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & a_3^{(2)}, \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

relative ciascuna ad uno dei punti c_λ, per modo che, non soltanto riesca

$$|a_1^{(\lambda)} - c_\lambda| \geqq |a_2^{(\lambda)} - c_\lambda| \geqq |a_3^{(\lambda)} - c_\lambda| \geqq \cdots, \qquad \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} |a_\nu^{(\lambda)} - c_\lambda| = 0,$$

ma riesca altresì, qualunque sia ν,

$$\operatorname*{Lim}_{\lambda=\infty} |a_\nu^{(\lambda)}| = \infty;$$

basterà seguire senz'altro il ragionamento della pag. 12 della suddetta Nota del sig. Weierstrass, per giungere al risultato voluto.

Infatti, si determini la funzione $F^{(\lambda)}(z)$, con l'unico punto singolare essenziale c_λ, per modo che diventi infinita come la $F(z)$, ma soltanto nei posti

$$a_1^{(\lambda)} \quad a_2^{(\lambda)} \quad a_3^{(\lambda)}, \ldots,$$

mantenendosi dappertutto altrove regolare. Questa funzione si potrà esprimere con una serie di potenze intere e positive di z entro un cerchio di centro $z=0$ e di raggio r_λ che soddisfaccia la condizione

$$r_\lambda \leqq |a_\nu^{(\lambda)}|$$

per tutti i valori di ν. Epperò, ritenendo i successivi raggi r_1, r_2, r_3,... presi

(*) Io suppongo, per semplicità di discorso, che ciò avvenga rispetto a tutti i punti c_λ. Sono subito viste le semplificazioni che hanno luogo quando una parte dei punti c_λ sieno affatto separati dai posti degli infiniti.

in modo da soddisfare la condizione

$$\lim_{\lambda=\infty} r_\lambda = \infty,$$

potremo formare, come insegna il teorema **A**, la serie convergente

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} [F^{(\lambda)}(z) - P_\lambda(z)],$$

avente la proprietà che la differenza

$$F(z) - \sum_{\lambda=1}^{\infty} [F^{(\lambda)}(z) - P_\lambda(z)]$$

rimanga finita in tutti i punti $a_r^{(s)}$, distinti dai c_λ. Questa differenza non avrà dunque altri punti singolari fuorchè i c_λ, e quindi si potrà esprimere colla formola (6). Cioè si potrà porre (*)

$$F(z) - \sum_{\lambda=1}^{\infty} [F^{(\lambda)}(z) - P_\lambda(z)] = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[G_\lambda\left(\frac{1}{z - c_\lambda}\right) - Q_\lambda(z) \right],$$

intendendo con $Q_\lambda(z)$ il solito polinomio che va sottratto da G_λ. Da quì segue

$$F(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[F^{(\lambda)}(z) + G_\lambda\left(\frac{1}{z - c_\lambda}\right) - P_\lambda(z) - Q_\lambda(z) \right].$$

Ma

$$F^{(\lambda)}(z) + G_\lambda\left(\frac{1}{z - c_\lambda}\right) - P_\lambda(z) - Q_\lambda(z)$$

è funzione uniforme avente un solo punto singolare essenziale, c_λ, e si può quindi rappresentare con

$$\frac{G_\lambda^{(1)}\left(\dfrac{1}{z - c_\lambda}\right)}{G_\lambda^{(2)}\left(\dfrac{1}{z - c_\lambda}\right)}.$$

La espressione di $F(z)$ si può dunque scrivere nella forma preannunziata

$$F(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{G_\lambda^{(1)}\left(\dfrac{1}{z - c_\lambda}\right)}{G_\lambda^{(2)}\left(\dfrac{1}{z - c_\lambda}\right)}. \tag{9}$$

(*) Cfr. la vegnente Osservazione 1ª.

Questa è proprio affatto simile alla (8); mentre nella serie (6) il termine

$$G_\nu\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)-P_\nu$$

non è come in (7) funzione intera di $\frac{1}{z-c_\nu}\cdot$ Esso è quoziente di due funzioni intere, per l'una delle quali si può prendere la potenza di $\frac{1}{z-c_\nu}$ d'esponente eguale al grado di P_ν.

Osservazione 1ª. Per verità, la proposizione esposta distesamente nel mio articolo al sig. HERMITE (§ 1) è quella che insegna a costruire una funzione, data che sia una serie di funzioni G

$$G_1\left(\frac{1}{z-c_1}\right),\quad G_2\left(\frac{1}{z-c_2}\right),\quad G_3\left(\frac{1}{z-c_3}\right),\ldots$$

esprimenti i modi secondo cui la funzione deve comportarsi intorno ai punti $c_1, c_2, c_3, \ldots$. Invece, la proposizione, che dianzi invocai, è la reciproca, cioè quella affermante, che, *qualsiasi funzione affetta da singolarità nei punti* c_1, c_2, $c_3, \ldots$, *e dappertutto altrove regolare, si può esprimere colla formola*

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left[G_\nu\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)-P_\nu(z)\right].$$

In esso articolo però accennavo a quanto occorre per dimostrare questa proposizione.

Ed invero, osservo che, una volta stabilito il teorema **A** (*), la sola difficoltà a superarsi per giungere e alla proposizione reciproca ora enunciata, e alle analoghe proposizioni relative ad altre specie di funzioni affette da maggior complicazione di singolarità, consiste nel dimostrare che nell'intorno delle sue singolarità la funzione proposta si comporta come quelle espressioni (G, o quozienti di G, od altro) per mezzo della cui somma si tratta di rappresentarla. Perocchè, dimostrato ciò, il teorema **A**, che suppongo applicabile alle dette espressioni, insegnerà a formare con le medesime una serie, dalla quale la funzione proposta non potrà differire che per un'altra funzione di natura più semplice, perchè regolare, dove la funzione proposta e la serie hanno singolarità identiche tra loro.

L'illustre Matematico di Berlino, nella Memoria più volte citata, s'è proposto

(*) Ossia concepita la generalizzazione dell'idea del sig. MITTAG-LEFFLER, alla quale alludevo nelle prime righe del mio articolo.

di vincere la detta difficoltà, pel caso di funzioni aventi numero finito di punti singolari essenziali $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, senza ricorrere al metodo generale offertoci dalla teorica delle funzioni di una variabile complessa. E vi è riuscito col lemma del § 4.

Ma per quando questi punti sieno in numero infinito, pure ristringendoci alle più semplici distribuzioni dei medesimi, non sono stati imaginati, ch'io sappia, altri modi particolari di superare la difficoltà, e bisogna ricorrere al detto metodo generale (*), basato sul celebre teorema che mi piace di qui ricordare (**).

Teorema **B**. *Il valore di una funzione uniforme $w(z)$ nel punto z, corrente in un campo S, si può esprimere coll'integrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{w(x)\,dx}{x-z}$$

preso lungo il contorno di S e lungo linee circondanti ogni singolarità o sistema di singolarità per essa funzione.

Nel caso particolare del § 1, prendendo per S una corona circolare di centro c_ν, nella quale non cadano altri punti singolari della F, se ne conchiuderà subito che la F si comporta intorno a c_ν come una $G\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)$. È questo appunto che intendevo significare nel detto paragrafo invocando il teorema di Laurent coi commenti che ebbi a farne nel Cap. III della Sez. IV della mia *Teorica delle funz. di var. complesse* (***). Dimostrato così, che per ogni data funzione F, della classe in parola, esiste una serie di funzioni G, tali che $F-G_\nu$ rimane regolare nell'intorno di c_ν; il teorema **A** somministra la serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[G_\nu\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)-P_\nu(z)\right]$$

dalla quale la F non può differire che per una funzione della natura $G(z)$. Epperò se ne conchiude la proposizione voluta, cioè

$$F(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[G_\nu\left(\frac{1}{z-c_\nu}\right)-Q_\nu(z)\right],$$

dove Q_ν significa funzione razionale intera, ossia la P_ν aumentata di qualche termine di $G(z)$.

(*) Il quale, del resto, mi sembra di una generalità e fecondità molto superiore al profitto che finora se n'è cavato.

(**) Cfr. il Cap. III della Sez. IV della mia *Teorica* su citata.

(***) Cfr., più particolarmente a questo proposito, il § 90 di essa *Teorica.*

Osservazione 2ª. Questa medesima formola (9) vale anche pel caso in cui il punto singolare di 2ª specie non sia all'infinito, ma nel finito. In altre parole, imaginando una funzione affetta da singolarità essenziali nei punti c_λ ordinati secondo le condizioni

$$|c_1 - c| \geqq |c_2 - c| \geqq \ldots, \qquad \lim_{\lambda=\infty} c_\lambda = c,$$

dove c significa una grandezza finita qualsivoglia, si potrà sempre assumere come espressione di essa funzione, qualunque sia il numero e la distribuzione de'suoi infiniti, la seguente

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{G_\lambda^{(1)}\left(\dfrac{1}{z-c_\lambda}\right)}{G_\lambda^{(2)}\left(\dfrac{1}{z-c_\lambda}\right)}.$$

§ 4.

Tutte le funzioni uniformi sinora considerate si possono esprimere colla formola (*)

$$\sum_\nu \frac{G_\nu^{(1)}\left(\dfrac{1}{z-c_\nu}\right)}{G_\nu^{(2)}\left(\dfrac{1}{z-c_\nu}\right)},$$

composta di tanti termini quanti sono i punti singolari essenziali della funzione (**). Si può dunque dire che i quozienti di due G

$$\frac{G^{(1)}\left(\dfrac{1}{z-c}\right)}{G^{(2)}\left(\dfrac{1}{z-c}\right)}$$

sono gli elementi costitutivi di tutte queste funzioni.

Ora aggiungo che questo loro carattere si conserva anche per distribuzioni di punti singolari di mano in mano più complicate.

(*) S'intende che le diverse G possano essere sì razionali (anche costanti) che trascendenti.

(**) Cfr. la prima nota della pag. 442 e le linee 17 a 22 della pag. 440 della mia *Teorica* suddetta.

A confermare almeno per un caso quest'asserzione, considererò funzioni che devano presentare una infinità di punti singolari di 2ª specie

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \dots, \tag{10}$$

dei quali sia limite il punto c, singolare di 3ª specie.

In tal caso, ogni punto c_λ va pensato come limite della serie di punti essenziali di 1ª specie

$$c_{\lambda,1}, \quad c_{\lambda,2}, \quad c_{\lambda,3}, \dots; \tag{11}$$

ciascuno dei quali potrà alla sua volta essere supposto limite di una serie di posti d'infiniti. Per esempio, $c_{\lambda,\mu}$ potrà supporsi limite della serie di punti

$$a_{\lambda,\mu,1}, \quad a_{\lambda,\mu,2}, \quad a_{\lambda,\mu,3}, \dots; \tag{12}$$

i quali potranno dunque ritenersi soddisfacenti le condizioni

$$|a_{\lambda,\mu,1} - c_{\lambda,\mu}| \geqq |a_{\lambda,\mu,2} - c_{\lambda,\mu}| \geqq \dots, \qquad \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty} |a_{\lambda,\mu,\nu} - c_{\lambda,\mu}| = 0.$$

Se vogliamo contentarci soltanto della *formazione* di funzioni di tal specie, non avremo che a fare un'ovvia applicazione ancora del teorema **A.**

Infatti, consideriamo la espressione generale

$$f_\lambda(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{G^{(1)}_{\lambda,\mu}\left(\dfrac{1}{z - c_{\lambda,\mu}}\right)}{G^{(2)}_{\lambda,\mu}\left(\dfrac{1}{z - c_{\lambda,\mu}}\right)}$$

di una funzione uniforme avente singolarità essenziali nei punti (11) ed infiniti in tutti i punti (12) corrispondenti a $\mu = 1, 2, 3, \dots$ Questa funzione ammetterà uno sviluppo secondo le potenze intere positive di z, se vi sarà un cerchio di centro $z = 0$ entro cui non cada veruno dei punti testè indicati. E se il raggio r_λ di questo cerchio potrà crescere all'infinito con λ, potremo applicare a queste funzioni $f_1, f_2, f_3, \dots$ il teorema **A.**

Perciò, imaginiamo che il punto singolare di 3ª specie sia all'infinito (*), e che tutti i punti (10), (11), (12) sieno così coordinati tra loro che riesca

$$\operatorname*{Lim}_{\lambda=\infty} a_{\lambda,\mu,\nu} = \infty$$

(*) **Come al solito, da questo caso si passa subito all'altro in cui il punto cada nel finito.**

per tutti i valori di μ e ν (*). Ciò essendo, il massimo cerchio di centro $z=0$, che non racchiude nè singolarità essenziali, nè infiniti di $f_\lambda(z)$, ingrandirà infatti illimitatamente con λ. Dunque, colle funzioni

$$f_1(z),\qquad f_2(z),\qquad f_3(z),\ldots$$

potremo imaginare formata la serie convergente

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}[f_\lambda(z)-P_\lambda(z)],$$

pigliando per P_λ la somma di opportuno numero m_λ di primi termini dello sviluppo di f_λ secondo le potenze intere e positive di z. Siccome poi $f_\lambda-P_\lambda$ è ancora una funzione della specie f_λ, la quale si può concepire espressa, come già f_λ, nella maniera seguente

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{G^{(3)}_{\lambda,\mu}\left(\dfrac{1}{z-c_{\lambda,\mu}}\right)}{G^{(4)}_{\lambda,\mu}\left(\dfrac{1}{z-c_{\lambda,\mu}}\right)},$$

così, sostituendo, otterremo la serie

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{G^{(3)}_{\lambda,\mu}\left(\dfrac{1}{z-c_{\lambda,\mu}}\right)}{G^{(4)}_{\lambda,\mu}\left(\dfrac{1}{z-c_{\lambda,\mu}}\right)},$$

che ci offre, espressa mediante quozienti di G, come volevamo, una funzione affetta da singolarità essenziali di 1ª, 2ª e 3ª specie.

Pavia, marzo 1882.

(*) Essendo A, B, C tre grandezze fissate comunque, se si prende

$$c_\lambda=\lambda A,\qquad c_{\lambda,\mu}=\lambda A+\frac{B}{\mu},\qquad a_{\lambda,\mu,\nu}=\lambda A+\frac{B}{\mu}+\frac{C}{\nu},$$

si avrà uno degli esempi più semplici di distribuzione di punti (10), (11), (12) e del loro coordinamento nel modo quì voluto.

Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti. (*)

(*Nota di* Paolo Cazzaniga, *a Pavia.*)

1.

Sapendosi costruire una funzione intera $w(z)$, la quale si annulli in posti dati arbitrariamente, ma tali però che in ogni porzione finita di piano z ne cada sempre un numero finito, è molto facile formare una funzione intera $f(z)$, che in un siffatto sistema di posti, che diremo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, prenda valori prestabiliti $f_1, f_2, f_3, \ldots$ Che una funzione come la $f(z)$ esista, che anzi ve ne sia una infinità, ciò risulta direttamente dal teorema generale del sig. Mittag-Leffler: *Sulla esistenza di infinite funzioni monodrome, finite e continue in tutto il piano, che ammettono soltanto infiniti di dati ordini in posti dati* (**). Ma noi quì vogliamo propriamente trovare l'effettiva espressione della $f(z)$, e costruirla con procedimento analogo a quello che si tiene per la formola di interpolazione di Lagrange, e che ci venne suggerito dalla analogia che le trascendenti intere presentano, come è noto, con le razionali intere. E perciò osserveremo che questa ricerca si può, e giova, enunciare proponendosi di costruire una funzione intera, la quale si annulli nei posti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu+1}, \ldots$, e nel posto α_ν diventi l'unità; perocchè si prevede subito che se δ_{z,α_ν} fosse una

(*) Per funzione intera intendo, seguendo i sigg. Betti e Weierstrass, una funzione monodroma finita e continua per tutti i valori della variabile indipendente, e quindi esprimibile per mezzo di una serie, costantemente convergente, di potenze intere e positive di essa variabile.

(**) Come fu dimostrato dal sig. Dini nella Memoria intitolata: *Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa*, e stampata nei Collectanea Mathematica in memoriam Dom. Chelini. Hoepli, 1881.

cosiffatta funzione di z, quella domandata non sarebbe altro che la somma:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \cdot \delta_{z,\alpha_\nu}$$

La formola che insegna a costruire una funzione intera $w(z)$, che divenga nulla, di primo ordine nel caso nostro, nei posti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ [i quali dunque, se in numero infinito saranno tali che sia: $\lim_{\nu=\infty} |\alpha_\nu| = \infty$ (*)], è la seguente:

$$w(z) = \varphi(z) \cdot e^{w_1(z)}, \text{ (**)}$$

in cui $w_1(z)$ significa una funzione intera affatto arbitraria; $\varphi(z)$ il prodotto di fattori della forma:

$$E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}, \text{ (***)}$$

e propriamente:

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right);$$

e dove $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sono numeri interi e positivi, scelti in modo, che la somma:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} \right|$$

risulti convergente per qualunque valore finito di z (****).

Osserviamo intanto che esistono infinite funzioni $w(z)$ che si annullano nei posti considerati; che l'espressione: $\dfrac{\varphi(z)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}$ rappresenta una funzione intera, la quale si annulla in tutti e soli posti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .., eccetto in α_ν.

(*) Dinoto qui con Weierstrass il valore assoluto, o modulo di α_ν, con $|\alpha_\nu|$.

(**) Cfr. Betti: *Teorica delle funzioni ellittiche.* Annali del Tortolini, vol. III, 1860.
» Weierstrass: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.* Abhandlungen der Berlin. Akad. der Wissenschaften, 1876, § 2.
» Dini: Memoria citata.

(***) In particolare intendasi: $E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, 0\right) = 1 - \frac{z}{\alpha_\nu}$.

(****) Ciò accade quando si ponga, per es., $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2, \ldots p_\nu = \nu - 1, \ldots$ In particolare poi, se le quantità α_ν siano tali, che si possa trovare un numero finito p, pel quale la somma: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^p$ riesca finita, ciò che in molti casi si verifica, si possono prendere: $p_1 = p_2 = \ldots = p_\nu = \ldots = p - 1$. Cfr. Weierstrass, Memoria citata.

2.

Ciò premesso, supponiamo che le quantità $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ siano tutte differenti fra loro, e per il momento supponiamo altresì che fra esse non sia lo zero; e disponiamo inoltre gli indici ν in maniera che si abbia:

$$|\alpha_\nu| \leq |\alpha_{\nu+1}|, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Allora, se per mezzo della:

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)$$

formiamo l'espressione seguente:

$$\psi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(z) \frac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)},$$

ove l'apice indica derivazione rispetto a z, possiamo facilmente riconoscere:

1.° Che questo secondo membro è una serie convergente incondizionatamente, e rappresenta una funzione intera $\psi(z)$ di z;

2.° Che $\psi(z)$ è la derivata di $\varphi(z)$ rapporto a z;

3.° Che $\psi(z)$ prende per $z = \alpha_\nu$ lo stesso valore che il termine:

$$\varphi(z) \frac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}.$$

Ed invero:

1.° Che $\psi(z)$ non divenga infinita nei posti α_ν, lo si scorge tosto, osservando che si ha:

$$\frac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)} = -\frac{1}{\alpha_\nu} \cdot \frac{\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu}}{1 - \frac{z}{\alpha_\nu}},$$

e che il fattore $\frac{1}{1 - \frac{z}{\alpha_\nu}}$ viene eliso dal fattore lineare $\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)$, che si trova in $\varphi(z)$. Che poi la serie converga incondizionatamente anche per ogni altro valore finito di z, ciò risulta da queste considerazioni. In primo luogo, essendo

$\varphi(z)$ funzione intera di z, si potrà sempre fissare una quantità finita L, tale che, per tutti i valori di z il cui modulo non superi una grandezza prefissata l, si abbia: $|\varphi(z)| < L$. E in secondo luogo, la somma:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{-\alpha_\nu} \frac{\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu}}{1-\frac{z}{\alpha_\nu}} \right|$$

col crescere di n ha per limite lo zero; perocchè, in causa della ammessa convergenza incondizionata della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} \right|, \text{ la somma } \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| -\frac{1}{\alpha_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} \right|$$

si riduce a zero coll'ingrandire di n. E noi possiamo far sempre in modo che, preso n abbastanza grande ma ancora finito, le quantità $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$ superino in valor assoluto quel qualsiasi modulo z che si vuol considerare; di guisa che, detto H il maggiore dei valori assoluti di:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha_{n+1}}}, \quad \frac{1}{1-\frac{z}{\alpha_{n+2}}}, \ldots,$$

si possa scrivere:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| -\frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu}}{1-\frac{z}{\alpha_\nu}} \right| < H \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| -\frac{1}{\alpha_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} \right|.$$

2.° Scriviamo adesso la $\psi(z)$ come segue:

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z) \frac{d}{dz} \log E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right),$$

e posto:

$$\chi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \log E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right),$$

osserviamo, che, mentre il punto z si muove lungo una linea che conduce da $z=0$ al punto qualunque z, senza mai passare per veruno dei posti α_ν, la serie $\chi(z)$ è convergente incondizionatamente e in egual grado; che ciascuno termine di essa è atto alla integrazione; che la serie:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^z \frac{d}{dz} \log E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)$$

lungo la linea sovraccennata è pure convergente, epperò sopra la $\chi(z)$ si potrà applicare la regola di integrazione termine per termine, e scrivere:

$$\int_0^z \chi(z)\,dz = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^z \frac{d}{dz} \log E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right).$$

e che in fine è:

$$\int_0^z \chi(z)\,dz = \log \varphi(z) + \text{costante},$$

da cui:

$$\chi(z) = \frac{d}{dz} \log \varphi(z),$$

e quindi:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \varphi(z).$$

3.° Quanto poi a riconoscere che $\psi(z)$, cioè dunque $\varphi'(z)$, acquista per $z = \alpha_\nu$ lo stesso valore che il termine: $\varphi(z)\dfrac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}$, cio è ovvio per sè.

Osserveremo però qui che l'espressione $\varphi'(\alpha_\nu)$ non è mai nulla, avendo già fin da principio supposto che le quantità $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ siano tutte differenti fra loro.

Concludendo, possiamo dire che la espressione:

$$\frac{\varphi(z)E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{\varphi'(\alpha_\nu)E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)} \text{ e quindi anche la seguente: } \frac{\varphi(z)E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)e^{w_1(z)}}{\varphi'(\alpha_\nu)E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)e^{w_1(\alpha_\nu)}}$$

è convergente, e per $z = \alpha_\nu$ si riduce all'unità, mentre in tutti i posti rimanenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu+1}, \ldots$ si annulla. E noi potremo prenderla come espressione di δ_{z,α_ν}.

Moltiplicandola allora per f_ν, indi sommando a tutti i valori di ν, otterremo per $f(z)$ la formola:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \delta_{z,\alpha_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_\nu \cdot \varphi(z)E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)e^{w_1(z)}}{\varphi'(\alpha_\nu)E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)e^{w_1(\alpha_\nu)}},$$

od anche, posto:

$$w(z) = \varphi(z)\, e^{w_1(z)}$$

la formola:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_\nu \cdot w(z)\, E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ p_\nu\right)}{w'(\alpha_\nu)\, E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ p_\nu\right)}, \tag{1}$$

la quale fra breve riconosceremo essere convergente per ogni valor finito di z.

3.

Vi sono dunque, come già dicevamo in principio, infinite funzioni che soddisfanno alle condizioni espresse nel problema da noi proposto: e ciò in causa e dell'anzidetta arbitrarietà della funzione intera $w_1(z)$, e della scelta altresì dei numeri p_ν. Volendosi però quella $f(z)$, che nella sua forma si presenta come la più semplice, ed esente dall'arbitrarietà di $w_1(z)$, si potrà prendere $w_1(z) = 0$; e si avrà allora la formola seguente:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_\nu \cdot \varphi(z)\, E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ p_\nu\right)}{\varphi'(\alpha_\nu)\, E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ p_\nu\right)}, \tag{2}$$

la quale è affatto analoga a quella di Lagrange per le razionali intere. Le funzioni $E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ p_\nu\right)$ sono quelle che in (2) tengono il posto, che i fattori lineari in quella di Lagrange.

E precisamente: se il numero dei posti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ sia finito, e si domandi la funzione razionale intera e di grado $m-1$ che in essi posti acquisti i valori $f_1, f_2, \ldots f_m$ si osserverà che la somma: $\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu}\right|$ rimane sempre finita qualunque siano i numeri p_ν, e quindi anche quando si prendano tutti eguali a zero; e in tal caso speciale si avrà:

$$E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ 0\right) = 1 - \frac{z}{\alpha_\nu}, \qquad \varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=m}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)$$

e la formola (2) si tradurrà nella:

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{f_\nu \prod\limits_{\nu=1}^{\nu=m}\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)\frac{d}{dz}\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)}{\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)\left\{\frac{d}{dz}\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=m}\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)\right\}_{z=\alpha_\nu}}, \tag{3}$$

cioè in quella di LAGRANGE.

4.

Per costruire le funzioni elementari $E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)$ da porre in (2) è necessario in prima determinare, come si disse, dei numeri p_ν, pei quali la somma: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\alpha_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu}\right|$ rimanga finita per ogni valor finito di z.

Ma òra dobbiamo anche aver riguardo a che riesca convergente la serie in (2). A tal uopo scriviamo questa formola come segue:

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{f_\nu\cdot\varphi(z)E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{\varphi'(\alpha_\nu)E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}+R_n, \text{ con } R_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{f_\nu\cdot\varphi(z)E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{\varphi'(\alpha_\nu)E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)};$$

ed osserviamo anzi tutto che, essendo $\frac{\varphi(z)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}$ funzione intera di z, si potrà sempre fissare una quantità finita L tale che, finchè $|z|$ rimane minore di una certa grandezza prefissata l si abbia:

$$\left|\frac{\varphi(z)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}\right|<L$$

In secondo luogo, siccome:

$$E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)=-\frac{1}{\alpha_\nu}e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\nu}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}+\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\nu}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}\left\{\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\alpha_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu-1}\right\}$$

$$=-\frac{1}{\alpha_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu}\cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\nu}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}$$

e d'altra parte, siccome:

$$\varphi'(\alpha_\nu) = -\frac{1}{\alpha_\nu} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}} \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}, p_\rho\right) \prod_{\sigma=1}^{\infty} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+\sigma}}, p_{\nu+\sigma}\right),$$

così sostituendo s'avrà:

$$|R_n| < L \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \frac{f_\nu \cdot \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}}{e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}} \cdot \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}, p_\rho\right) \prod_{\sigma=1}^{\infty} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+\sigma}}, p_{\nu+\sigma}\right)} \right|.$$

In terzo luogo osserviamo che, avuto riguardo alle condizioni: $\lim_{\nu=\infty} |\alpha_\nu| = \infty$, $|\alpha_{\nu-1}| \leqq |\alpha_\nu|$ si potrà sempre prendere, qualunque siano gli esponenti p_ν ed il valor finito di z che si considera, un valore di n finito abbastanza grande, perchè per $\nu > n$ sia sempre $|\alpha_\nu| > |z|$, e quindi:

$$\left| \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k} \right|$$

riesca minore di una quantità finita M.

Oltre a ciò si ha:

$$\prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} \left(1 - \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right) e^{\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right)^k} =$$

$$= \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} \left(1 - \frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}\right) e^{\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}\right)^k} \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} \left(-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right) \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} e^{\left[\sum_{k=1}^{p_\rho} \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right)^k - \sum_{k=1}^{p_\rho} \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}\right)^k\right]}.$$

E siccome il modulo del prodotto:

$$\prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} E\left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}, p_\rho\right) \prod_{\sigma=1}^{\infty} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+\sigma}}, p_{\nu+\sigma}\right)$$

non può essere inferiore ad una quantità $\frac{1}{N}$ finita e diversa dallo zero; e di più potendosi scrivere:

$$\left|\prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1}\left(-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right)\right|>\eta^{\nu-1},$$

dove η è il minimo dei moduli di: $\left(-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_1}\right), \left(-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_2}\right), \ldots \left(-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}\right)$, che son tutti maggiori dell'unità, così avremo a fortiori:

$$|R_n|<LMN\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left|\frac{f_\nu\cdot\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\nu-1}}{e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\nu}\frac{1}{k}}\cdot\prod\limits_{\rho=1}^{\rho=\nu-1}e^{\left[\sum\limits_{k=1}^{k=p_\rho}\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right)^k-\sum\limits_{k=1}^{k=p_\rho}\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}\right)^k\right]}}\right|.$$

Or finalmente disponiamo dei numeri $p_1, p_2, \ldots p_{\nu-1}$ in modo che il modulo del prodotto Π, ora scritto, risulti maggiore, od almeno eguale all'unità (*);

(*) Ciò si può fare, perchè se si pone:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}=R_\rho(\cos\omega_\rho+i\operatorname{sen}\omega_\rho)$$

si ha:

$$\left|\prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1}e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\rho}\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right)^k-\sum\limits_{k=1}^{k=p_\rho}\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}\right)^k}\right|=\prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1}e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\rho}\frac{1}{k}R_\rho^k\cos k\omega_\rho-\sum\limits_{k=1}^{k=p_\rho}\frac{1}{k}R_\rho^{-k}\cos k\omega_\rho}=$$

$$=\prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1}e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\rho}\frac{1}{k}\cos k\omega_\rho\left(R_\rho^k-R_\rho^{-k}\right)};$$

ed è chiaro che quand'anche il coefficiente dell'ultimo termine della somma:

$$\sum_{k=1}^{k=p_\rho}\frac{1}{k}\cos k\omega_\rho(R_\rho^k-R_\rho^{-k})$$

fosse negativo, cioè quando fosse, ad es., $2m\pi+\frac{\pi}{2}<p_\rho\omega_\rho<2m\pi+\frac{3\pi}{2}$ si potrà sempre aumentare p_ρ di una, due,... r_ρ unità, finchè $(p_\rho+r_\rho)\omega_\rho$ si sia trasportato nel quarto o nel primo quadrante, ossia finchè $\cos(p_\rho+r_\rho)\omega_\rho$ non riesca più negativo. Lo stesso può dirsi pel caso di $\omega_\rho=2\pi m+\frac{\pi}{2}$ oppure di $\omega_\rho=2\pi m+\frac{3\pi}{2}$. S'intende poi che, preso $|x_\nu|$ sufficientemente e dei numeri $p_\nu, p_{\nu+1},\ldots$ in modo che si abbia: $|f_\nu| \leq e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\nu}\frac{1}{k}}$ (*), e si concluderà allora che:

$$|R_n| < LMN \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\nu-1}, \text{ ossia: } |R_n| < LMN\left(\frac{1}{\eta}\right)^n \frac{1}{1-\frac{1}{\eta}},$$

con $\eta > 1$; e da ciò poi, facendo crescere n, che R_n si riduce a zero.

In modo affatto analogo ragionerebbesi per la convergenza della serie in (1).

Se pertanto diciamo adesso $q_1, q_2, q_3,\ldots$ i numeri così scelti in luogo dei corrispondenti $p_1, p_2, p_3,\ldots$, e costruiamo le funzioni $E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, q_\nu\right)$, noi potremo concludere che la serie seguente:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_\nu \varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, q_\nu\right)}{\varphi'(\alpha_\nu) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, q_\nu\right)}, \tag{4}$$

con

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, q_\nu\right),$$

sarà costantemente convergente; e rappresenterà perciò *una* funzione intera, la quale nei posti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots$ prende i valori $f_1, f_2, f_3,\ldots$ come si cercava.

Avevamo più sopra escluso il caso che qualcuna delle quantità α_ν fosse zero; ma è chiaro che le cose fin qui dette sussistono ancora, quando si consideri il prodotto $z\varphi(z)$ in luogo di $\varphi(z)$. Ed è facile riconoscere che una funzione la quale nei posti $0, \alpha_1, \alpha_2,\ldots$ prende i valori $f_0, f_1, f_2,\ldots$ vien data senz'altro

---

grande noi possiamo rendere i termini: $R_1, R_2,\ldots$ epperò anche i termini:

$$\left(R_1^{p_1+\nu_1} - R_1^{-(p_1+\nu_1)}\right), \quad \left(R_2^{p_2+\nu_2} - R_2^{-(p_2+\nu_2)}\right),\ldots$$

talmente grandi, che essi diano il proprio segno a ciascuna delle somme da prendersi rispetto a k, e quindi anche tali, che la somma totale da prendersi rispetto a ρ sia positiva.

(*) Ciò pure è sempre possibile; perocchè la somma $\sum\limits_{k=1}^{k=p_\nu}\frac{1}{k}$ col crescere di p_ν può rendersi maggiore di qualsiasi quantità grande quanto si voglia, e quindi anche di $|\log f_\nu|$, che noi supponiamo finito, finchè lo sia ancora ν.

dalla formola:

$$f(z)=f_0\cdot\varphi(z)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f_\nu\cdot z\,\varphi(z)\,E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ q_\nu\right)}{\alpha_\nu\varphi'(\alpha_\nu)\,E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ q_\nu\right)}.$$

5.

Poniamo:

$$\varphi(z)=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}a_\lambda z^\lambda$$

$$E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ q_\nu\right)=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}b_\lambda^{(\nu)}z^\lambda,\qquad E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ q_\nu\right)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+1)b_{\lambda+1}^{(\nu)}z^\lambda$$

ed infine:

$$\frac{\varphi(z)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ q_\nu\right)}=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}g_\lambda^{(\nu)}z^\lambda,\qquad \varphi(z)\frac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ q_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ q_\nu\right)}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda^{(\nu)}z^\lambda$$

ed avremo, grazie alle relazioni:

$$\left\{\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\\ a_1=b_1^{(\nu)}+g_1^{(\nu)}\\ a_2=b_2^{(\nu)}+g_1^{(\nu)}b_1^{(\nu)}+g_2^{(\nu)}\\ a_3=b_3^{(\nu)}+g_1^{(\nu)}b_2^{(\nu)}+g_2^{(\nu)}b_1^{(\nu)}+g_3^{(\nu)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l}c_0^{(\nu)}=b_1^{(\nu)}\\ c_1^{(\nu)}=2b_2^{(\nu)}+b_1^{(\nu)}g_1^{(\nu)}\\ c_2^{(\nu)}=3b_3^{(\nu)}+2b_2^{(\nu)}g_1^{(\nu)}+b_1^{(\nu)}g_2^{(\nu)}\\ c_3^{(\nu)}=4b_4^{(\nu)}+3b_3^{(\nu)}g_1^{(\nu)}+2b_2^{(\nu)}g_2^{(\nu)}+b_3^{(\nu)}g_3^{(\nu)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.$$

la $f(z)$ di (4) espressa in serie di potenze come segue:

$$f(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}A_\mu z^\mu,\ \text{con}\ A_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k^{(\nu)}f_\nu}{\varphi'(\alpha_\nu)}. \tag{5}$$

Come si vede, per lo sviluppo (5) non occorrono che gli sviluppi di $E\left(\frac{z}{\alpha_\nu},\ q_\nu\right)$, e di $\varphi(z)$ in serie di potenze; perocchè noti i coefficenti a_k e $b_k^{(\nu)}$ si potranno facilmente calcolare i coefficenti $c_k^{(\nu)}$ per mezzo delle due serie di relazioni scritte più sopra.

Per esempio, per $c_0^{(\nu)}$, $c_1^{(\nu)}$, $c_2^{(\nu)}$ avrebbesi:

$$c_0^{(\nu)} = b_1^{(\nu)}$$

$$c_1^{(\nu)} = 2b_2^{(\nu)} + b(a_1 - b_1^{(\nu)})$$

$$c_2^{(\nu)} = 3b_3^{(\nu)} + 2b_2^{(\nu)}(a_1 - b_1^{(\nu)}) + b_1^{(\nu)}\,[(a_2 - b_2^{(\nu)}) - b_1^{(\nu)}(a_1 - b_1^{(\nu)})]$$

. . . .

Sopra la funzione potenziale in uno spazio di *n* dimensioni.

(*Nota di* Alberto Tonelli, *a Roma.*)

Quantunque la funzione potenziale negli spazî a più dimensioni non sia stata studiata molto distesamente, pure gl'importanti lavori dei sig.[i] Kronecker (*), Schering (**) e Beltrami (***) hanno posto in luce molte sue proprietà analoghe a quelle delle funzioni potenziali logaritmiche e newtoniane. In una piccola Nota inserita nei resoconti dell'Accademia di Gottinga, partendo da una formula generale dovuta al sig. Beltrami, io determinai la funzione potenziale in un campo sferico di n dimensioni quando ne fossero dati i valori sul contorno; nella presente Nota, partendo ancora dalla medesima formula generale, stabilisco alcune proprietà della funzione potenziale negli spazî ad n dimensioni a curvatura qualunque prima, e a curvatura nulla poi. In ultimo, generalizzando un metodo adoperato dal sig. Dini, cerco di risolvere un problema speciale per le funzioni potenziali negli spazî piani, determinando la funzione in un campo sferico, quando al contorno sieno dati i valori della derivata di primo ordine, o di ordine superiore, presa lungo la normale al contorno.

Se U e V sono due funzioni delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in uno spazio di n dimensioni a curvatura qualunque, monodrome, finite e continue insieme colle loro derivate parziali del primo ordine nel campo S_n, e sul campo contorno S_{n-1} di $n-1$ dimensioni, e in quel campo esistono pure le derivate parziali del secondo ordine e sono atte all'integrazione definita, il sig. Beltrami ha

(*) Collectanea Mathematica, in memoriam Dominici Chelini, 1881.

(**) Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. W. zu Göttingen, 1873.

(***) *Sulla teorica dei parametri differenziali*, Memoria dell'Accademia di Scienze di Bologna, 1869.

dimostrato che per esse si ha (*)

$$\int_{S_n} (\Delta U V + V \Delta^2 U) d S_n + \int_{S_{n-1}} V \frac{d U}{d p} d S_{n-1} = 0 \tag{1}$$

da cui si deduce anche

$$\int_{S_n} (U \Delta^2 V - V \Delta^2 U) d S_n + \int_{S_{n-1}} \left(U \frac{d V}{d p} - V \frac{d U}{d p} \right) d S_{n-1} = 0. \tag{1'}$$

In queste formule il primo integrale è esteso allo spazio S_n di n dimensioni, il secondo al suo contorno S_{n-1} di $n-1$ dimensioni; $\Delta^2 V$ e $\Delta^2 U$ accennano il parametro differenziale del secondo ordine per le funzioni U e V, e

$$\Delta U V = \sum_r \sum_s A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s} \text{ (*)}$$

è il parametro *intermedio* o *misto*, che si converte nel parametro differenziale del primo ordine quando le funzioni U e V coincidano; e le A_{rs} sono i reciproci dei coefficienti a_{rs} dell'elemento lineare

$$d s^2 = \sum_r \sum_s a_{rs} d x_r d x_s$$

e, finalmente, le derivate rispetto a p delle funzioni U e V indicano le derivate prese nella direzione della normale al contorno S_{n-1}, rivolta verso l'interno del campo S_n.

Ponendo $V = C U$, dove C è una costante, la formula (1) sarà applicabile e darà

$$\int_{S_n} (\Delta U + U \Delta^2 U) d S_n + \int_{S_{n-1}} U \frac{d U}{d p} d S_{n-1} = 0$$

e quindi, se U, oltre alle condizioni già poste, soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$\Delta^2 U = 0$$

in tutto S_n, si avrà

$$\int_{S_n} \Delta U d S_n + \int_{S_{n-1}} U \frac{d U}{d p} d S_{n-1} = 0$$

ed anche, per essere

$$\Delta U = \frac{\delta U^2}{\delta s^2}$$

(*) Beltrami, Memoria citata.

dove δs accenna un elemento ortogonale al campo $U = \text{cost}$, e δU l'accrescimento di U lungo questo elemento (*),

$$\int_{S_n} \left(\frac{\delta U}{\delta s}\right)^2 d\,S_n + \int_{S_{n-1}} U \frac{dU}{dp} d\,S_{n-1} = 0.$$

Se la funzione U, o la derivata $\frac{dU}{dp}$, fosse sempre zero sul contorno S_{n-1} di S_n, o in una parte di S_{n-1} fosse $U = 0$ e nell'altra $\frac{dU}{dp} = 0$, avremmo necessariamente

$$\int_{S_n} \Delta U d\,S_n = \int_{S_n} \left(\frac{\delta U}{\delta s}\right)^2 d\,S_n = 0$$

e quindi in tutto S_n

$$\Delta U = 0 \qquad \frac{\delta U}{\delta s} = 0$$

ovvero

$$\delta U = 0.$$

Dunque l'accrescimento che subisce la funzione U nel campo S_n, lungo ogni elemento ortogonale ai campi nei quali $U = \text{cost}$, è nullo. Per gli ordinari spazî a due e a tre dimensioni ciò ci permetterebbe di concludere subito che U è costante in tutto il campo in cui ciò si verifica; ma per uno spazio di n dimensioni a curvatura qualunque, come quello che quì si considera, la cosa non sembra di assoluta evidenza, e sarà quindi utile di dimostrarla. Partendo dalla teoria delle forme, poichè ΔU non può divenire negativa e in tutto S_n deve aversi $\Delta U = 0$, si giungerebbe facilmente alla conclusione che le derivate parziali di U debbono annullarsi, e quindi che U deve essere una costante, ma, giacchè qui si porge l'occasione, preferiamo dimostrare direttamente il seguente teorema, che rappresenta una generalizzazione del teorema analogo negli spazî ordinari a due e tre dimensioni:

« Se in un campo S_n per la funzione U è soddisfatta la condizione che sieno » zero gli accrescimenti che essa subisce lungo gli elementi ortogonali ai campi » nei quali U è costante, essa non può essere che una costante in tutto S_n. »

Chiamiamo dx_1, $dx_2, \ldots$, dx_n gli accrescimenti che subiscono le variabili passando dal punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ad un punto qualunque infinitamente pros-

(*) Beltrami, Memoria citata.

simo nel campo $U=\text{cost}$; di quelli accrescimenti $n-1$ possono assumersi arbitrariamente, l'n^o sarà completamente determinato dall'equazione

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n=0$$

e qualunque altra relazione tra le quantità dx_1, $dx_2,\ldots$, dx_n non potrà essere che una conseguenza di questa. Ora se accenniamo con δx_1, $\delta x_2,\ldots$, δx_n, gli accrescimenti delle variabili lungo l'elemento ortogonale al campo $U=\text{cost}$, passante pel punto $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, per la definizione dell'ortogonalità, avremo

$$\sum_r\sum_s a_{rs}dx_r\delta x_s=0$$

ovvero

$$\sum_r dx_r(a_{r1}\delta x_1+a_{r2}\delta x_2+\cdots+a_{rn}\delta x_n)=0$$

e questa relazione, che lega tra loro i differenziali dx_1, $dx_2,\ldots$, dx_n, non potendo differire dall'altra sopra scritta, ci darà

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_1}&=\lambda\{a_{11}\delta x_1+a_{12}\delta x_2+\cdots+a_{1n}\delta x_n\}\\
\frac{\partial U}{\partial x_2}&=\lambda\{a_{21}\delta x_1+a_{22}\delta x_2+\cdots+a_{2n}\delta x_n\}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial U}{\partial x_n}&=\lambda\{a_{n1}\delta x_1+a_{n2}\delta x_2+\cdots+a_{nn}\delta x_n\}.
\end{aligned}$$

Moltiplicando queste uguaglianze rispettivamente per δx_1, $\delta x_2,\ldots$, δx_n e sommando, avremo

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}\delta x_2+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x_n}\delta x_n=\lambda\delta^2 s$$

dove

$$\delta^2 s=\sum_r\sum_s a_{rs}\delta x_r\delta x_s$$

e poichè, per ipotesi

$$\delta U=0$$

non potendo essere $\delta^2 s=0$, sarà $\lambda=0$ e quindi

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}=\frac{\partial U}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial U}{\partial x_n}=0$$

in ogni punto del campo S_n. In questo modo evidentemente è dimostrato il teorema.

Ritornando ora all' argomento primitivo, potremo asserire che se U soddisfa le condizioni accennate in principio nel campo S_n, e sul contorno S_{n-1}, non potrà essere che una costante in tutto S_n, per cui, supponendo la continuità anche al contorno, la funzione U sarà sempre nulla in S_n e sopra S_{n-1}, quando si sappia che è nulla in un punto qualunque di S_n o di S_{n-1}.

Da questo teorema si ricava subito, anche per le funzioni potenziali negli spazî di n dimensioni a curvatura qualunque, la proprietà che, quando esse esistono, sono completamente determinate dai valori al contorno, e sono determinate, a meno di una costante arbitraria, dai valori della derivata presa rispetto alla normale al contorno. È inutile ripetere qui la dimostrazione che è affatto simile a quella che serve per gli ordinari spazî a due e a tre dimensioni.

Dalla stessa formula (1), prendendo $V = C$, si ottiene la nota formula

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp}\, dS_{n-1} = 0 \tag{2}$$

e dalla (1'), quando le funzioni U e V soddisfanno alle equazioni $\Delta^2 U = 0$, $\Delta^2 V = 0$, si ricava l'altra

$$\int_{S_{n-1}} U \frac{dV}{dp}\, dS_{n-1} = \int_{S_{n-1}} V \frac{dU}{dp}\, dS_{n-1} \tag{2'}$$

che rappresentano una estensione ai potenziali negli spazî di n dimensioni delle proprietà conosciute per i potenziali logaritmico e newtoniano.

Se la funzione U divenisse infinita in un punto interno al campo S_n, supponendo esclusa dal campo stesso una porzione piccola a piacere, che comprenda nel suo interno quel punto, e chiamando S'_{n-1} il campo di $n-1$ dimensioni che limita questa parte esclusa, avremo

$$\int_{S_{n-1}+S'_{n-1}} \frac{dU}{dp}\, dS_{n-1} = 0$$

ovvero

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp}\, dS_{n-1} = \int_{S'_{n-1}} \frac{dU}{dp}\, dS_{n-1} \tag{3}$$

dove la derivata rispetto alla normale nel secondo integrale, deve intendersi presa nella direzione interna al campo che racchiude il punto in cui diviene infinita la U.

Se il punto, in cui U diviene infinita, è quello pel quale si ha $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, la porzione del campo S_n da escludersi può determinarsi colla disuguaglianza

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < K^2$$

essendo K una quantità finita, differente da zero e positiva, che può supporsi piccola a piacere; e allora il campo S'_{n-1} sarà quello pel quale si ha

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = K^2.$$

Le considerazioni fatte fin qui si riferiscono a spazî di n dimensioni a curvatura qualunque; per ottenere risultati più semplici e più completi, supponiamo che lo spazio sia piano, e che esista un sistema di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che riduca l'elemento lineare alla forma

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$

e introduciamo allora il sistema di coordinate ortogonali analoghe alle ordinarie coordinate polari, ponendo

$$\left.\begin{aligned} x_r - a_r &= \rho \operatorname{sen} z_1 \ldots \operatorname{sen} z_{r-2} \operatorname{sen} z_{r-1} \cos z_r \\ x_n - a_n &= \rho \operatorname{sen} z_1 \ldots \operatorname{sen} z_{n-2} \operatorname{sen} z_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

con

$$r = 1,\ 2, \ldots,\ n-1$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono le coordinate di un punto qualunque dello spazio che si considera.

In queste coordinate è noto che si ha pel campo S_n

$$ds^2 = d\rho^2 + K_1^2 dz_1^2 + K_2^2 dz_2^2 + \cdots + K_{n-1}^2 dz_{n-1}^2$$

con

$$K_r = \rho \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \ldots \operatorname{sen} z_{r-1}$$

e per l'elemento di volume

$$dS_n = \rho^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} z_1 \operatorname{sen}^{n-1} z_2 \ldots \operatorname{sen} z_{n-2}\, d\rho\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1}$$

mentre sul campo di $n-1$ dimensioni

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 = K^2$$

l'elemento lineare è dato da

$$ds^2 = K_1^2 dz_1^2 + K_2^2 dz_2^2 + \cdots + K_{n-1}^2 dz_{n-1}^2$$

e l'elemento di volume da

$$dS_{n-1} = K^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} z_1 \operatorname{sen}^{n-3} z_2 \ldots \operatorname{sen} z_{n-2}\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1}$$

quando nelle K_1, $K_2, \ldots, K_n$ alla coordinata ρ si assegni costantemente il valore K.

Introducendo queste coordinate nel secondo membro della (3), che abbiamo stabilita quando U diviene infinita nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, e ricordando che, per considerare tutti i punti dello spazio corrispondenti ai valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$ delle coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, basta far variare ρ da 0 a $+\infty$, le $z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}$ da 0 a π e la z_{n-1} da 0 a 2π, otterremo la formula

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp}\, dS_{n-1} = \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-2} z_1\, dz_1 \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-3} z_2\, dz_2 \ldots \int_0^\pi \operatorname{sen} z_{n-2}\, dz_{n-2} \int_0^{2\pi} K^{n-1} \frac{dU}{dp}\, dz_{n-1}.$$

La quantità K può prendersi piccola a piacere, per cui, se il prodotto

$$\rho^{n-1} \frac{dU}{dp}$$

col diminuire indefinitamente di ρ, converge verso una quantità determinata e finita L, potrà determinarsi un numero ρ' tale che, per tutti i valori di ρ inferiori a ρ', ponendo

$$\rho^{n-1} \frac{dU}{dp} = L + \eta$$

la quantità η si mantenga sempre numericamente inferiore a quella quantità che più ci piace σ.

Prendendo allora $K < \rho'$ avremo

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp}\, dS_{n-1} = 2L\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-2} z_1\, dz_1 \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-3} z_2\, dz_2 \ldots \int_0^\pi \operatorname{sen} z_{n-2}\, dz_{n-2} +$$

$$+ \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-2} z_1\, dz_1 \int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-3} z_2\, dz_2 \ldots \int_0^\pi \operatorname{sen} z_{n-2}\, dz_{n-2} \int_0^{2\pi} \eta\, dz_{n-1}$$

e poichè (*)

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{n-2} z_1\, dz_1 \ldots \int_0^{2\pi} dz_{n-1} = 2\pi \frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{2 \cdot 4 \cdots (n-2)} \tag{5}$$

(*) Beltrami, Memoria citata.

per n pari, e

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-2} z_1 \, dz_1 \ldots \int_0^{2\pi} dz_{n-1} = 2\pi \frac{2(2\pi)^{\frac{n-3}{2}}}{3\cdot 5\cdots(n-2)} \tag{5}$$

per n dispari; così, ponendo

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdots(n-2)} \text{ per } n \text{ pari} \\ &\text{e} \\ N &= \frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{3\cdot 5\cdots(n-2)} \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

e ricordando che η è sempre inferiore a σ in valore assoluto, avremo

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp} dS_{n-1} = N\cdot L + \theta\cdot\sigma\cdot N$$

dove θ è compreso tra -1 e $+1$. Ma σ può assumersi piccola a piacere, e quindi dovrà essere

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp} dS_{n-1} = N\cdot L. \tag{6}$$

Potremo dunque dire che se

$$\lim_{\rho=0} \rho^{n-1} \frac{dU}{dp}$$

è una quantità finita e determinata e differente da zero L, l'integrale (6) esteso al contorno S_{n-1} dello spazio S_n, in cui la funzione U diviene infinita in un punto, sarà finito e differente da zero: se quel limite è zero l'integrale (6) pure sarà zero e si avrà

$$\int \frac{dU}{dp} dS_{n-1} = 0$$

e finalmente, se quel limite è infinito o indeterminato, l'integrale (6) sarà pure in generale infinito o indeterminato.

Applichiamo ora questi risultati ad una funzione speciale

$$V = \frac{1}{\{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2\}^{\frac{n-2}{2}}} \tag{7}$$

per la quale, come è noto, è soddisfatta l'equazione $\Delta^2 V = 0$. Considerando un campo qualunque S_n, e accennando con S_{n-1} il suo contorno, se il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ non è compreso in quel campo, sarà

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dV}{dp} dS_{n-1} = 0$$

se invece quel punto è compreso in S_n applicheremo la formula (6). Intanto però, osservando che in coordinate polari (4) si ha

$$V = \frac{1}{\rho^{n-2}}$$

e che, per i punti situati sopra un campo sferico che ha il centro nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, la derivata lungo la normale al contorno coincide, all'infuori del segno, colla derivata presa rispetto alla coordinata ρ, si può scrivere

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{dV}{d\rho} = (n-2)\frac{1}{\rho^{n-1}}$$

da cui

$$\rho^{n-1}\frac{dV}{dp} = \lim_{\rho=0} \rho^{n-1}\frac{dV}{dp} = n-2.$$

Avremo dunque, in questo caso, $L = n-2$, e quindi

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dV}{dp} dS_{n-1} = (n-2)N \tag{8}$$

quando V è la funzione (7) e S_{n-1} è il contorno di un campo qualunque S_n, che contiene nel suo interno il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

La formula (8) può anche dedursi da un'altra che avremo occasione di ricordare, ma qui per ottenerla abbiamo seguito il metodo precedente onde applicare la (6) ad un caso particolare.

Partendo dalla (1') e sostituendo al posto della funzione V la (7), aumentata di una funzione φ monodroma, finita e continua insieme colle sue derivate prime, che ha le sue derivate seconde atte all'integrazione definita nel campo S_n, nel quale soddisfa pure alla equazione $\Delta^2\varphi = 0$, coll'esclusione di un campo piccolo a piacere che contiene il punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, si giunge alla formula

$$(n-2)NU' = \int_{S_{n-1}} \left\{ U\frac{d(V+\varphi)}{dp} - (V+\varphi)\frac{dU}{dp} \right\} dS_{n-1} - \int_{S'_n} (V+\varphi)\Delta^2 U dS'_n \tag{9}$$

dove V ora è la funzione (7), U' il valore di U nel punto $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e

S'_n ciò che diventa il campo S_n, dopo l'esclusione di una porzione arbitrariamente piccola, che comprende il punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Sarebbe però facile per vedere che, all'integrale esteso al campo S'_n, può nuovamente sostituirsi l'integrale esteso al campo S_n.

È chiaro che prendendo $U=1$, $\varphi=0$, la (9) si riduce alla (8).

Se supponiamo intanto che U, in tutto S_n, soddisfaccia all'equazione $\Delta^2 U=0$, e prendiamo $\varphi=0$, la (9), applicata ad un campo sferico interno ad S_n definito dalla disuguaglianza

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2<R^2$$

e limitato dal campo sferico S_{n-1} pel quale si ha

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2=R^2$$

ci darà

$$(n-2)NU'=\int\limits_{S_{n-1}}\left(U\frac{dV}{dp}-\frac{1}{R^{n-2}}\frac{dU}{dp}\right)dS_{n-1}$$

e ricordando che

$$\frac{dV}{dp}=-\frac{dV}{d\rho}=(n-2)\frac{1}{\rho^{n-1}}$$

e avendo riguardo alla (2), avremo in fine

$$U'=\frac{1}{R^{n-1}N}\int\limits_{S_{n-1}}UdS_{n-1}.$$

Ma se accenniamo con S_{n-1} il volume del campo sferico

$$(x_1-a_1)^2+(x_3-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2=R^2$$

o con σ_{n-1} il volume del campo sferico

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2=1$$

a causa delle (5) (5'), e per essere $dS_{n-1}=R^{n-1}d\sigma_{n-1}$, avremo pure

$$U'=\frac{1}{S_{n-1}}\int\limits_{S_{n-1}}UdS_{n-1}=\frac{1}{\sigma_{n-1}}\int\limits_{\sigma_{n-1}}Ud\sigma_{n-1} \tag{10}$$

e poichè $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ è un punto qualunque del campo S_n, così questa formula ci dà la estensione ai potenziali degli spazî piani a n dimensioni di un teorema noto e importante dei potenziali degli ordinari spazî a due e a tre dimensioni. Potremo dire infatti che il valore della funzione potenziale in un punto qualunque di uno spazio S_n, è la media dei valori che essa assume sui contorni sferici compresi in quel campo e che hanno il centro in quel punto.

Da questo teorema si deducono facilmente le conseguenze note che la funzione potenziale non può avere nè massimi nè minimi nell'interno del campo S_n, ma sopra il contorno; e quindi che se è costante sul contorno, lo sarà pure in tutto il campo S_n, assumendo in questo il medesimo valore che ha sul contorno, e, in particolare che, se è zero sul contorno, lo sarà anche in tutto S_n, sempre quando si ammetta la continuità di U anche al contorno. Come pure potrebbe di qui dedursi il teorema relativo alla unicità della funzione U, che assume dati valori al contorno, seguendo il processo tenuto dal sig. Dini nelle sue *Lezioni di Analisi.*

È noto che il teorema espresso dalla (10) vale anche pel caso del potenziale logaritmico, quantunque non potessimo dedurlo come caso particolare da quella formula perchè, nelle considerazioni fatte fin qui, è escluso il valore 2 di n; però si può fare una osservazione generale e cioè che tutte le proprietà relative al potenziale, che si deducono dalle formule fondamentali (1) e (1') quando V ha la forma (7), o dalla formula (9), trascurando i termini integrali nei quali comparisce $\frac{dU}{dp}$, valgono anche per $n=2$; perchè, mentre in questo caso si ha

$$V=-\log\rho, \qquad \frac{dV}{dp}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}$$

e negli altri

$$V=\frac{1}{\rho^{n-2}}, \qquad \frac{dV}{dp}=-\frac{(n-2)}{\rho^{n-1}}\frac{d\rho}{dp}$$

quando si prescinda dal fattore $(n-2)$, che viene a scomparire, come è chiaro dalla (9), e si osservi che

$$N=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdots(n-2)}=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\pi\left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

può definirsi anche per $n=2$ come uguale a 2π, ponendo $n=2$, dal caso generale si passa al caso del potenziale logaritmico. Questa osservazione vedremo che verrà confermata anche in seguito.

Riprendiamo ora la formula (9) e osserviamo che quando si riesca a determinare una funzione φ la quale, oltre le condizioni già poste, soddisfaccia anche l'altra di essere uguale a $-V$ sul contorno, essa diventa

$$U' = \frac{1}{(n-2)N}\int\limits_{S_{n-1}} U\frac{d(V+\varphi)}{dp}\,dS_{n-1} - \frac{1}{(n-2)N}\int\limits_{S_n}(V+\varphi)\Delta^2 U\,dS_n \tag{11}$$

che dà i valori della funzione U nei punti interni al campo S_n, per mezzo dei valori che assume al contorno, e per mezzo dell'ultimo integrale esteso al campo S_n, e che si riduce all'altra più semplice

$$U' = \frac{1}{(n-2)N}\int\limits_{S_{n-1}} U\frac{d(V+\varphi)}{dp}\,dS_{n-1}$$

quando $\Delta^2 U = 0$ in tutto S_n.

La determinazione della funzione φ nel modo ora accennato si effettua facilmente quando S_n è il campo pel quale

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < R^2 \tag{12}$$

limitato dal campo S_{n-1}, definito dalla equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2 \tag{12'}$$

e se $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ è il punto del campo S_n, in cui vuol determinarsi la funzione potenziale U, si trova

$$\varphi = \left(\frac{R}{\rho'\rho_1}\right)^{n-2}$$

con

$$\rho'^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + \cdots + x'^2_n$$

$$\rho_1^2 = \left(x_1 - \frac{R^2}{\rho'^2}x'_1\right)^2 + \left(x_2 - \frac{R^2}{\rho'^2}x'_2\right)^2 + \cdots + \left(x_n - \frac{R^2}{\rho'^2}x'_n\right)^2$$

e facendo i calcoli opportuni si giunge all'espressione (*)

$$U' = \frac{1}{nN}\int\limits_{S_{n-1}} \frac{(R^2 - \rho'^2)\,U}{R\{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2\}^{\frac{n}{2}}}\,dS_{n-1} \tag{13}$$

(*) Vedasi la mia Nota sopra accennata, inserita nei resoconti dell'Accad. delle scienze di Gottinga (1875). La funzione φ vale anche quando il punto $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, in cui si vuol determinare la U, coincide col centro del campo sferico (12), ovvero $x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = 0$, perchè, osservando che, collo sviluppare l'espressione di ρ_1, si ha

$$\rho'^2\rho_1^2 = \rho'^2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 2R^2(x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_n x'_n) + R^4$$

e quindi, al limite per $x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = \rho' = 0$

$$\rho'^2\rho_1^2 = R^4$$

Questa formola, come si sa, vale anche per $n=2$, e quindi ci dà una conferma dell'osservazione generale che si è fatto precedentemente. Per gli spazî sferici lo studio del potenziale, quando sia dato il valore al contorno, si può fare in modo affatto generale, senza limitazioni delle dimensioni dello spazio che si considera, e quindi fare ad un tempo la teoria del potenziale logaritmico e newtoniano. Siccome poi si può dimostrare che la funzione U definita dalla (13) soddisfa alle condizioni di continuità ad essa imposte e all'equazione $\Delta^2 U=0$, così non resterebbe altro che far vedere che essa assume al contorno effettivamente i valori dati, o almeno trovare le condizioni cui debbono soddisfare i valori dati al contorno perchè questa proprietà si verifichi.

---

se ne conclude

$$\varphi=\frac{1}{R^{n-2}}$$

come appunto deve essere. Ricorderemo anche quì, che la quantità γ rappresenta effettivamente un angolo che può facilmente determinarsi mediante una serie di operazioni da effettuarsi sopra la sfera ordinaria, e cioè colla successiva costruzione di triangoli dei quali sono dati sempre tre elementi che li individuano, perchè si ha

$$\cos\gamma=\sum_1^{n-1}\operatorname{sen}z_1\operatorname{sen}z'_1\operatorname{sen}z_2\operatorname{sen}z'_2\ldots\operatorname{sen}z_{\rho-1}\operatorname{sen}z'_{\rho-1}\cos z_\rho\cos z'_\rho$$
$$+\operatorname{sen}z_1\operatorname{sen}z'_1\operatorname{sen}z_2\operatorname{sen}z'_2\ldots\operatorname{sen}z_{n-2}\operatorname{sen}z'_{n-2}\operatorname{sen}z_{n-1}\operatorname{sen}z'_{n-1}$$

e quindi ponendo

$$\cos z_{n-1}\cos z'_{n-1}+\operatorname{sen}z_{n-1}\operatorname{sen}z'_{n-1}=\cos\varphi_{n-1}$$

avremo

$$\cos\gamma=\sum_1^{n-2}\operatorname{sen}z_1\operatorname{sen}z'_1\ldots\operatorname{sen}z_{\rho-1}\operatorname{sen}z'_{\rho-1}\cos z_\rho\cos z'_\rho+$$
$$+\operatorname{sen}z_1\operatorname{sen}z'_1\ldots\operatorname{sen}z_{n-2}\operatorname{sen}z'_{n-2}\cos\varphi_{n-1}$$

e determinando l'angolo φ_{n-2} colla relazione

$$\cos\varphi_{n-2}=\cos z_{n-2}\cos z'_{n-2}+\operatorname{sen}z_{n-2}\operatorname{sen}z'_{n-2}\cos\varphi_{n-1}$$

avremo

$$\cos\gamma=\sum_1^{n-3}\operatorname{sen}z_1\operatorname{sen}z'_1\ldots\operatorname{sen}z_{\rho-1}\operatorname{sen}z'_{\rho-1}\cos z_\rho\cos z'_\rho+$$
$$+\operatorname{sen}z_1\operatorname{sen}z'_1\ldots\operatorname{sen}z_{n-3}\operatorname{sen}z'_{n-3}\cos\varphi_{n-2}.$$

Proseguendo poi nello stesso modo otterremo

$$\cos\gamma=\cos z_1\cos z'_1+\operatorname{sen}z_1\operatorname{sen}z'_1\cos\varphi_2$$

e φ_{n-1}, φ_{n-2},..., φ_2, e quindi pure γ, vengono determinati risolvendo un triangolo sferico di cui sono dati due lati e l'angolo compreso.

Tralasciamo per ora questo studio, riservandoci a tornarci in seguito per completare anche altre osservazioni fatte più innanzi, e passeremo a trattare un altro problema, cioè quello della determinazione della funzione potenziale in un campo S_n, quando sul suo contorno S_{n-1} sieno dati i valori di $\frac{dU}{dp}$. In questo caso, se U esiste, è determinata a meno di una costante arbitraria, e per ottenere la sua espressione useremo un metodo che è stato dato dal sig. Dini per i potenziali ordinari, in una Memoria inserita negli atti della R. Accademia dei Lincei (1876).

L'espressione di U per mezzo dei valori di $\frac{dU}{dp}$ al contorno si potrebbe ottenere dalla solita formola (9), quando si riescisse a determinare φ in modo che oltre le solite condizioni, soddisfacesse l'altra di essere

$$\frac{d\varphi}{dp} = -\frac{dV}{dp}$$

al contorno. Ma questo non sarebbe possibile perchè condurrebbe alla relazione

$$\int_{S_{n-1}} \frac{d\varphi}{dp} dS_{n-1} = -\int_{S_{n-1}} \frac{dV}{dp} dS_{n-1}$$

mentre, per la (2), si sa che il primo membro è zero e il secondo, per la (8), è uguale ad $(n-2)N$. Questa contraddizione non si presenta più se si tratta di determinare una funzione ψ che abbia in S_n tutte le proprietà di φ e sul contorno soddisfaccia la condizione

$$\frac{d\psi}{dp} = -\frac{dV}{dp} + \frac{n-2}{S} N$$

dove con S si è accennata l'area, finita per ipotesi, del contorno S_{n-1} di S_n. Per questa funzione ψ sarà soddisfatta la condizione

$$\int_{S_{n-1}} \frac{d\psi}{dp} dS_{n-1} = 0$$

per cui, se accenniamo con χ una funzione monodroma finita e continua insieme colle sue derivate parziali del primo ordine, e che ha le derivate parziali del secondo ordine atte all'integrazione in S_n, e che soddisfa all'equazione $\Delta^2 U = 0$, essendo affatto indipendente dalle coordinate $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ del punto in cui vuol determinarsi la funzione potenziale, potremo prendere

$$\varphi = \psi + \chi$$

con che sarà anche per φ soddisfatta la condizione

$$\int\limits_{S_{n-1}} \frac{d\varphi}{dp}\, d S_{n-1} = 0$$

e si avrà

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{d\psi}{dp} + \frac{d\chi}{dp} = -\frac{dV}{dp} + \frac{n-2}{S} N + \frac{d\chi}{dp}.$$

Prendendo φ in questo modo, con che sarà determinata, se esiste in S_n, a meno di una costante arbitraria, e introducendone l'espressione nella (9), questa darà

$$U' = \frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_{n-1}} \left\{ U \frac{d(V+\psi+\chi)}{dp} - (V+\psi+\chi) \frac{dU}{dp} \right\} d S_{n-1} -$$
$$- \frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_n} (V+\psi+\chi) \Delta^2 U\, d S_n$$

ovvero anche, pel modo come abbiamo determinato la funzione ψ

$$U' = -\frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_{n-1}} (V+\psi+\chi) \frac{dU}{dp}\, d S_{n-1} + \frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_{n-1}} U \frac{d\chi}{dp}\, d S_{n-1}$$
$$+ \frac{1}{S} \int\limits_{S_{n-1}} U\, d S_{n-1} - \frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_n} (V+\psi+\chi) \Delta^2 U\, d S_n$$

e poichè il secondo e il terzo integrale sono indipendenti dal punto $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, così possono considerarsi come costanti e trascurarsi, perchè U viene determinata a meno di una costante dalle condizioni poste per essa, e allora avremo

$$U' = -\frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_{n-1}} (V+\psi+\chi) \frac{dU}{dp}\, d S_{n-1} - \frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_n} (V+\psi+\chi) \Delta^2 U\, d S_n + \text{cost}$$

ed anche, prendendo $\chi = 0$, come si può fare

$$U' = -\frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_{n-1}} (V+\psi) \frac{dU}{dp}\, d S_{n-1} - \frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_n} (V+\psi) \Delta^2 U\, d S_n + \text{cost}$$

e a queste due formole possono sostituirsi le altre più semplici

$$U' = -\frac{1}{(n-2)N} \int\limits_{S_{n-1}} (V+\psi+\chi) \frac{dU}{dp}\, d S_{n-1} + \text{cost}$$

$$U' = -\frac{1}{(n-1)N} \int\limits_{S_{n-1}} (V+\psi) \frac{dU}{dp}\, d S_{n-1} + \text{cost}$$

quando la U, in tutto S_n, soddisfaccia l'equazione a derivate parziali

$$\Delta^2 U = 0.$$

Le formule ora stabilite sono una generalizzazione di quelle date dal signor Dini nella Memoria sopra accennata.

Perchè la U sia completamente determinata, quando esiste, basterà che ne sia assegnato il valore in un punto di S_n.

Volendo applicare le formole ora trovate al caso in cui S_n sia lo spazio sferico (12) limitato dal campo S_{n-1} definito dalla (12'), ricordando che in questa ipotesi si ha

$$S = R^{n-1} \cdot N$$

bisognerebbe determinare la funzione ψ così che sul contorno si avesse

$$\frac{d\psi}{dp} = -\frac{dV}{dp} + \frac{n-2}{R^{n-1}}$$

ovvero anche, ricordando l'espressione di V,

$$\frac{d\psi}{dp} = (n-2)\left\{\frac{1}{R^{n-1}} - \frac{R - \rho' \cos\gamma}{\{\rho'^2 - 2\rho' R \cos\gamma + R^2\}^{\frac{n}{2}}}\right\}.$$

La determinazione però di questa funzione non sembra così semplice quando si voglia fare direttamente e forse, seguendo anche in questo un concetto del sig. Dini, si potrà giungere ad ottenerla studiando gli sviluppi in serie di funzioni sferiche più generali di quelle ordinariamente conosciute, e cioè di quelle funzioni che nascono dallo sviluppo di

$$\frac{1}{\{1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2\}^{\frac{n-2}{2}}}$$

e che godono di moltissime proprietà analoghe a quelle corrispondenti ad $n = 3$, come appunto ho mostrato nella Nota sopra ricordata.

Intanto però cercherò di determinare la funzione U in uno spazio sferico (9), quando sieno dati i valori della derivata $\frac{dU}{dp}$ al contorno, seguendo un altro processo che è una estensione di quello adoperato dal sig. Dini nella Memoria: *Sull'equazione* $\Delta^2 U = 0$, pubblicata in questo Giornale (tomo V, Serie II), e così mi si offrirà l'occasione di estendere e dimostrare alcuni teoremi sulla funzione potenziale enunciati in quella Memoria.

Abbiamo visto che si ha la formula

$$\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp} dS_{n-1} + \int_{S_n} \Delta^2 U dS_n = 0$$

quando U è finita continua insieme colle sue derivate parziali del primo ordine, ha le derivate parziali del secondo ordine atte all'integrazione definita nel campo S_n, e S_{n-1} è il contorno di S_n. Se prendiamo per S_n un elemento infinitesimo del campo in cui sono soddisfatte quelle condizioni per U, avremo pure, accennando con S'_{n-1} il suo contorno

$$\int_{S'_{n-1}} \frac{dU}{dp} dS'_{n-1} + \Delta^2 U dS_n = 0.$$

Ma nella Nota sopra ricordata ho dimostrato che se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono un sistema di coordinate ortogonali che riducono l'elemento lineare alla forma

$$ds^2 = Y_1^2 dy_1^2 + Y_2^2 dy_2^2 + \cdots + Y_n^2 dy_n^2$$

per un elemento di spazio e per la funzione U si ha pure

$$\int_{S'_{n-1}} \frac{dU}{dp} dS'_{n-1} + dy_1 dy_2 \ldots dy_n \sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_\sigma} \left\{ \frac{Y_1 Y_2 \ldots Y_n}{Y_\sigma^2} \frac{\partial U}{\partial y_\sigma} \right\} = 0$$

per cui sarà, come del resto è noto

$$\Delta^2 U = \frac{1}{Y_1 Y_2 \ldots Y_n} \sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_\sigma} \left\{ \frac{Y_1 Y_2 \ldots Y_n}{Y_\sigma^2} \frac{\partial U}{\partial y_\sigma} \right\}.$$

Prendiamo ora per le coordinate $y_1, y_2 \ldots y_n$ le solite coordinate polari (4) e allora sarà, quando si ponga

$$H = \rho^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} z_1 \operatorname{sen}^{n-3} z_2 \ldots \operatorname{sen} z_{n-2}$$

$$K_r = \rho \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \ldots \operatorname{sen} z_{r-1}$$

con $r = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\Delta^2 U = \frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-1} \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{H} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial z_\sigma} \left\{ \frac{H}{K_\sigma^2} \frac{\partial U}{\partial z_\sigma} \right\}$$

od anche, ponendo per semplicità,

$$\frac{H}{K_\sigma^2} = \rho^{n-3} Z_\sigma, \qquad H = \rho^{n-1} Z$$

con che Z_σ e Z saranno indipendenti da ρ,

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 Z}\sum_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial z_\sigma}\left\{Z_\sigma \frac{\partial U}{\partial z_\sigma}\right\}.$$

Ora è evidente che si ha

$$\frac{1}{Z}\sum_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial z_\sigma}\left\{Z_\sigma \frac{\partial}{\partial z_\sigma}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)\right\} = \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\left\{\frac{1}{Z}\sum_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial z_\sigma}\left(Z_\sigma\frac{\partial U}{\partial z_\sigma}\right)\right\}$$

per cui se poniamo

$$L = \frac{1}{Z}\sum_1^{n-1}\frac{\partial}{\partial z_\sigma}\left\{Z_\sigma\frac{\partial U}{\partial z_\sigma}\right\}$$

avremo anche

$$\Delta^2\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = \rho\frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} + (n+1)\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial L}{\partial \rho}$$

e poichè, come facilmente si verifica, si ha pure

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\Delta^2 U) = \rho^2\frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} + (n+1)\rho\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + (n-1)\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial L}{\partial \rho}$$

così ne concluderemo

$$\Delta^2\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\Delta^2 U). \tag{14}$$

Questa formula può generalizzarsi nel seguente modo: se poniamo

$$U_1 = \rho\frac{\partial U}{\partial \rho}$$

per la (14), applicata alla U_1, avremo

$$\Delta^2\left(\rho\frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right) = \Delta^2\left\{\rho^2\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right\} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\Delta^2 U_1) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left\{\rho\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\Delta^2 U)\right\} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\Delta^2 U) + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho^2\Delta^2 U)$$

e quindi

$$\Delta^2\left(\rho^2\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho^2\Delta^2 U)$$

e nel medesimo modo, applicando replicatamente la (14), otterremo

$$\Delta^2\left(\rho^3\frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3}\right) = \rho\frac{\partial^3}{\partial \rho^3}(\rho^2\Delta^2 U), \qquad \Delta^2\left(\rho^4\frac{\partial^4 U}{\partial \rho^4}\right) = \rho^2\frac{\partial^4}{\partial \rho^4}(\rho^2\Delta^2 U), \ldots$$

per cui sarà dimostrata in generale la formula

$$\Delta^2\left(\rho^m \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m}\right) = \rho^{m-2} \frac{\partial^m}{\partial \rho^m}(\rho^2 \Delta^2 U) \tag{15}$$

quando essa si deduca come conseguenza dell'altra

$$\Delta^2\left(\rho^\sigma \frac{\partial^\sigma U}{\partial \rho^\sigma}\right) = \rho^{\sigma-2} \frac{\partial^\sigma}{\partial \rho^\sigma}(\rho^2 \Delta^2 U)$$

supposta vera per $\sigma = 1, 2, \ldots, m-1$.

Infatti in questa ipotesi, posto

$$U_1 = \rho^{m-1} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \rho^{m-1}}$$

si ha

$$\Delta^2\left(\rho \frac{\partial U_1}{\partial \rho}\right) = \Delta^2\left(\rho^m \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m} + (m-1)\rho^{m-1} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \rho^{m-1}}\right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \Delta^2 U_1) =$$

$$= \rho^{m-2} \frac{\partial^m}{\partial \rho^m}(\rho^2 \Delta^2 U) + (m-1)\rho^{m-3} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \rho^{m-1}}(\rho^2 \Delta^2 U)$$

e quindi la (15). A causa delle formule ora dimostrate, potremo concludere che se U è una funzione che soddisfa all'equazione

$$\Delta^2 U = 0$$

in tutto un campo S_n di n dimensioni, e in questo campo ammette le sue derivate fino a quelle di ordine $m+2$ inclusive, anche la funzione

$$\rho^m \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m}$$

nel medesimo campo soddisferà all'equazione a derivate parziali

$$\Delta^2\left(\rho^m \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m}\right) = 0. \text{ (*)}$$

(*) Notiamo qui che quando si fosse fino da principio supposto che la U soddisfaceva all'equazione $\Delta^2 U = 0$ e dimostrato poi che si ha $\Delta^2\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) = 0$, si poteva molto facilmente concludere che anche $\Delta^2\left(\rho^m \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m}\right) = 0$ osservando che

$$\Delta^2\left(\rho^m \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m}\right) + (m-1)\Delta^2\left(\rho^{m-1} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \rho^{m-1}}\right) = \Delta^2\left\{\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^{m-1} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \rho^{m-1}}\right)\right\}$$

Accenneremo qui anche ad altre funzioni V dedotte dalla U e che insieme con questa soddisfanno all'equazione $\Delta^2 V = 0$, quando U ammetta le sue derivate parziali fino ad un certo ordine, e facciamo questo perchè in qualche caso può essere utile di conoscere delle funzioni per le quali quella equazione a derivate parziali è soddisfatta, specialmente quando debbano soddisfare altre condizioni. Se $0 < s \leq m$ la funzione

$$V = \rho^s \int_0^\rho \rho^{m-s} \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}} d\rho$$

soddisfa all'equazione $\Delta^2 V = 0$. Per dimostrarlo basterà integrare per parti, e allora avremo

$$V = \rho^s \left\{ \rho^{m-s} \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m} - (m-s)\rho^{m-s-1} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \rho^{m-1}} + (m-s)(m-s-1)\rho^{m-s-2} \frac{\partial^{m-2} U}{\partial \rho^{m-2}} - \right.$$
$$\left. \cdots \pm (m-s)(m-s-1)\cdots 3 \cdot 2 \rho \frac{\partial^{s+1} U}{\partial \rho^{s+1}} \pm (m-s)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \frac{\partial^s U}{\partial \rho^s} \right\}$$

e per la (15) risulta subito dimostrata la proprietà enunciata. La funzione V poi sarà anche finita monodroma e continua insieme colle sue derivate prime nel campo S_n quando ciò avvenga per le derivate di U fino all'ordine $m+1$, e quando, nel campo che si considera, ρ si mantenga finito. Per $s = 0$ sarà

$$V = \rho^m \frac{\partial^m U}{\partial \rho^m} - m\rho^{m-1} \frac{\partial^{m-1} U}{\partial \rho^{m-1}} + \cdots \pm m(m-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot U$$

e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \rho^m \frac{\partial^{m+1} U}{\partial \rho^{m+1}}$$

e se osserviamo che sopra un campo sferico S_{n-1} col centro nel punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ che è qualunque si ha

$$\rho = R \qquad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$$

---

e ora facendo successivamente $m = 2, 3, 4, \ldots$ si ottiene

$$\Delta^2 \left(\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right) = 0$$

$$\Delta^2 \left(\rho^3 \frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} \right) = 0.$$

. . . .

supponendo questo campo tutto compreso in S_n in cui V è finita continua monodroma, ecc., per la (2) si ha

$$-\int_{S_{n-1}} \frac{\partial V}{\partial \rho} d S_{n-1} = \int_{S_{n-1}} \frac{d V}{d p} d S_{n-1} = \pm R^m \int_{S_{n-1}} \frac{d^{m+1} U}{d p^{m+1}} d S_{n-1} = 0$$

e questa ci mostra che se U è una funzione potenziale che in tutto S_n è finita, continua insieme con tutte le sue derivate parziali fino all'ordine $m+2$ inclusive, per ogni spazio sferico S_{n-1} definito da

$$\rho = R$$

compreso in S_n, avremo (*)

$$\int_{S_{n-1}} \frac{d^\sigma U}{d p^\sigma} d S_{n-1} = 0 \qquad \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ m+1.$$

Ritorniamo ora al problema che abbiamo stabilito di risolvere. Per quello che si è detto sin qui, se U è una funzione finita e continua insieme colle sue derivate fino all'ordine $m+1$ inclusive ed ha le derivate di ordine $m+2$ atte all'integrazione definita nel campo S_n, anche le funzioni

$$U_s = \rho^s \frac{\partial^s U}{\partial \rho^s} \qquad s = 1,\ 2, \ldots,\ m$$

saranno pure funzioni potenziali nel medesimo campo per le quali saranno soddisfatte condizioni simili riguardo alle derivate parziali del 2°, 3°... $m+1$ ordine, secondo che s è uguale ad m, $m-1, \ldots, 2 \cdot 1$.

Ciò posto, e supponendo che S_n sia il campo (12) limitato dal campo (12'), cerchiamo di determinare la U_s in questo campo S_n, quando sieno dati i suoi valori sul contorno. Ricordando che quando l'origine delle coordinate polari sia trasportata nel centro del campo (12') si ha su questo

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -\frac{d U}{d p}$$

(*) Questa stessa proprietà poteva dimostrarsi anche in modo più semplice partendo dal teorema che il valore della funzione potenziale in un punto è la media dei valori che assume sopra i campi sferici che hanno per centro quel punto, ed applicandolo alla funzione

$$\rho^\sigma \frac{\partial^\sigma U}{\partial \rho^\sigma}, \qquad \sigma = 1,\ 2, \ldots,\ m+1$$

portando l'origine delle coordinate polari nel punto che è centro del campo sferico considerato.

e applicando la (13) si ottiene

$$\rho'^s \frac{\partial^s U}{\partial \rho'^s} = (-1)^s \frac{R^{s-1}}{N} \int_{S_{n-1}} \frac{d^s U}{d p^s} \frac{R^2 - \rho'^2}{\{\rho'^2 - 2\rho' R \cos\gamma + R^2\}^{\frac{n}{2}}} \, d S_{n-1}$$

dove il primo membro rappresenta il valore di U_s nel punto corrispondente a $\rho = \rho'$, $z_1 = z'_1, \ldots, z_{n-1} = z'_{n-1}$, la $\frac{d^s U}{d p^s}$ rappresenta i valori di questa derivata dati sul contorno, e

$$\cos\gamma = \sum_1^{n-1} \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z'_1 \operatorname{sen} z_2 \operatorname{sen} z'_2 \ldots \operatorname{sen} z_{\rho-1} \operatorname{sen} z'_{\rho-1} \cos z_\rho \cos z'_\rho +$$

$$+ \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z'_1 \operatorname{sen} z_2 \operatorname{sen} z'_2 + \cdots + \operatorname{sen} z_{n-2} \operatorname{sen} z'_{n-2} \operatorname{sen} z_{n-1} \operatorname{sen} z'_{n-1}$$

dipende e dal punto in cui si determina la U_s, e dal punto variabile durante l'integrazione estesa al contorno (12') del campo (12).

La formula precedente potremo anche scriverla nel seguente modo

$$\frac{\partial^s U}{\partial \rho'^s} = (-1)^s \frac{R^{s-1}}{N} \int_{S_{n-1}} \frac{d^s U}{d p^s} \frac{R^2 - \rho'^2}{\rho'^s \{\rho'^2 - 2\rho' R \cos\gamma + R^2\}^{\frac{n}{2}}} \, d S_{n-1} \tag{16}$$

e prima di ogni altro sarà necessario di vedere se e quando la derivata di ordine s della funzione U, data dall'espressione precedente in tutto il campo (12), si mantenga finita; e poichè la quantità sotto il segno integrale diventa infinita per $\rho' = 0$ sarà utile di studiare come possa eliminarsi la parte che influisce in questo. Poniamo per brevità

$$P = \frac{R^2 - \rho'^2}{\rho'^s \{\rho'^2 - 2\rho' R \cos\gamma + R^2\}^{\frac{n}{2}}}$$

e trasformiamo questa espressione.

Avremo intanto

$$P = \frac{1}{\rho'^s \{\rho'^2 + 2\rho' R \cos\gamma + R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{2\rho' - 2R\cos\gamma}{\rho'^{s-1} \{\rho'^2 - 2\rho' R \cos\gamma + R^2\}^{\frac{n}{2}}}$$

ed anche

$$P = \frac{1}{\rho'^s \{\rho'^2 - 2\rho' R \cos\gamma + R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{\rho'^{s-1}} \frac{2}{2-n} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left\{ \frac{1}{\rho'^2 - 2\rho' R \cos\gamma + R^2} \right\}^{\frac{n-2}{2}} =$$

$$=\frac{1}{\rho'^s\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}+\frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{1}{\rho'^{s-1}\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}+$$

$$+\frac{2(s-1)}{n-2}\frac{1}{\rho'^s\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}$$

e quindi finalmente

$$P=\frac{n+2s-4}{n-2}\frac{1}{\rho'^s\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}+\frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{1}{\rho'^{s-1}\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} \quad (17)$$

che per $n=3$ e $s=1$ si riduce, come del resto è naturale, all'espressione ottenuta dal sig. DINI nella Memoria citata.

Fatta questa prima trasformazione consideriamo l'espressione

$$Q=\frac{1}{\rho'^k\{\rho'^2-\rho' 2R\cos\gamma+R^2\}^\sigma}$$

dove k è intero e positivo, e σ è positivo, ma può essere anche frazionario. Si ha evidentemente

$$Q=\frac{1-\varphi(\rho')\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^\sigma}{\rho'^k\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^3\}^\sigma}+\frac{\varphi(\rho')}{\rho'^k}$$

e poichè $\varphi(\rho')$ è arbitraria, cercheremo se è possibile determinarla in modo che la prima parte di Q non divenga più infinita per $\rho'=0$.

Sappiamo che per $\rho'\leqq R$, come è appunto il nostro caso, si ha in serie convergente

$$\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^\sigma=R^{2\sigma}\left\{1-\frac{\rho'}{R}e^{i\gamma}\right\}^\sigma\left\{1-\frac{\rho'}{R}e^{-i\gamma}\right\}^\sigma=$$

$$=R^{2\sigma}\sum_0^\infty\sigma_\mu\left(\frac{\rho'}{R}\right)^\mu e^{i\mu\gamma}\cdot\sum_0^\infty\sigma_\mu\left(\frac{\rho'}{R}\right)^\mu e^{-i\mu\gamma}=R^{2\sigma}\sum_0^\infty S_\mu\left(\frac{\rho'}{R}\right)^\mu$$

dove le S_μ sono funzioni analoghe alle ordinarie funzioni sferiche, razionali e intere rispetto a $\cos\gamma$, e lineari rispetto ai coseni di γ e dei suoi multipli interi, e della forma

$$S_\mu=2\{\sigma_0\sigma_\mu\cos\mu\gamma+\sigma_1\sigma_{\mu-1}\cos(\mu-2)\gamma+\cdots+\sigma_r\sigma_{\mu-r}\cos(\mu-2r)+\cdots\} \quad (18)$$

con

$$S_0=1$$

e

$$S_{2\nu}=2\left\{\sigma_0\sigma_{2\nu}\cos 2\nu\gamma+\sigma_1\sigma_{2\nu-1}\cos 2(\nu-1)\gamma+\cdots+\sigma_{\nu-1}\sigma_{\nu+1}\cos 2\gamma+\frac{1}{2}\sigma_\nu^2\right\}$$

$$S_{2\nu+1}=2\left\{\sigma_0\sigma_{2\nu+1}\cos(2\nu+1)\gamma+\sigma_1\sigma_{2\nu}\cos(2\nu-1)+\cdots+\sigma_\nu\sigma_{\nu+1}\cos\gamma\right\}$$

per cui ogni funzione S_μ contiene il coseno di un multiplo di γ corrispondente al suo indice, e dei multipli inferiori di due in due.

Prendiamo ora per $\varphi(\rho')$ una funzione razionale e intera della forma

$$a_0+a_1\rho'+a_2\rho'^2+\cdots+a_\tau\rho'^\tau$$

che scriveremo, per simmetria, nel modo seguente

$$\sum_0^\infty a_\nu\rho'^\nu$$

supponendo uguali a zero le a i cui indici sono superiori a τ, e allora avremo

$$\varphi(\rho')\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^\sigma=R^{2\sigma}\sum_0^\infty a_\nu\rho'^\nu\cdot\sum_0^\infty S_\mu\left(\frac{\rho'}{R}\right)^\mu=R^{2\sigma}\sum_0^\infty N_\mu\rho'^\mu$$

con

$$N_\mu=a_0\frac{S_\mu}{R^\mu}+a_1\frac{S_{\mu-1}}{R^{\mu-1}}+\cdots+a_{\mu-1}\frac{S_1}{R}+a_\mu S_0 \tag{18'}$$

e quindi

$$Q=\frac{1-R^{2\sigma}\sum_0^\infty N_\mu\rho'^\mu}{\rho'^k\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^\sigma}+\frac{\varphi(\rho')}{\rho'^k}.$$

Ora perchè la prima parte di Q non divenga più infinita per $\rho'=0$, basterà che i coefficienti a_0, a_1, $a_2,\ldots$, a_τ sieno determinati in modo che si abbia

$$R^{2\sigma}N_0=1 \qquad N_\mu=0 \qquad \mu=1,\ 2,\ldots,\ k-1.$$

ovvero

$$\left.\begin{aligned}&R^{2\sigma}a_0=1\\&S_1a_0+Ra_1=0\\&S_2a_0+RS_1a_1+R^2a_2=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&S_{k-1}a_0+S_{k-2}Ra_1+\cdots+R^{k-1}a_{k-1}=0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

e si vede che potremo prendere

$$\tau=k-1$$

e le (19) ci daranno dei valori finiti e determinati per i coefficienti a_0, $a_1,\ldots$,

a_{k-1} perchè il determinante dei coefficienti essendo uguale ad

$$R^{2\sigma+1+2+\ldots+(k-1)} = R^{2\sigma+\frac{k(k-1)}{2}}$$

è differente da zero certamente.

Osserveremo anche che avendosi in generale dalle (19)

$$a_l = -\frac{1}{R^l}\{S_l a_0 + S_{l-1} R a_1 + \cdots + S_{l-h} R^h a_h + \cdots + S_1 R^{l-1} a_{l-1}\}$$

e la somma degli indici delle S e delle a essendo sempre uguale nel secondo membro all'indice del coefficiente a_l che si vuol determinare, sarà facile far vedere che questo conterrà linearmente i coseni dei multipli di γ fino ad $l\gamma$ al più, quando si supponga che $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ determinati dalle (19) contengano i coseni dei multipli di γ fino a γ, 2γ, $3\gamma \ldots (l-1)\gamma$ al più rispettivamente. Infatti per la (18) è noto che S_{l-h} contiene linearmente i coseni dei multipli di γ fino a $(l-h)\gamma$ al più, per cui, se a_h, con $h \leqq l-1$, non contiene che i coseni dei multipli di γ fino ad $h\gamma$ al più linearmente, il prodotto $a_h S_{l-h}$, per mezzo della formula

$$2\cos K\gamma \cos K'\gamma = \cos(K+K')\gamma + \cos(K-K')\gamma$$

si potrà sempre ridurre a contenere i coseni dei multipli di γ fino ad $l\gamma$ al più e linearmente. Ma pei primi coefficienti a_1, a_2, $a_3, \ldots$ la cosa si verifica facilmente considerando le prime delle (19) e ricordando la (18), per cui la proprietà sussisterà in generale.

Determinati dunque i coefficienti a mediante le (19), potremo scrivere

$$\varphi(\rho') = a_0 + a_1\rho' + a_2\rho'^2 + \cdots + a_{k-1}\rho'^{k-1} =$$
$$= g_0(\rho') + g_1(\rho')\cos\gamma + \cdots + g_{k-1}(\rho')\cos(k-1)\gamma$$

dove le $g(\rho')$ sono funzioni razionali e intere di ρ', di grado $k-1$ al più, e indipendenti da γ.

Premesso questo prendiamo prima $k = s$, $\sigma = \frac{n-2}{2}$ e poi $k = s-1$, $\sigma = \frac{n-2}{2}$ e avremo allora

$$\frac{1}{\rho'^s\{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{1 - \varphi_{s-1}(\rho')\{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}{\rho'^s\{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{\varphi_{s-1}(\rho')}{\rho'^s}$$

$$\frac{1}{\rho'^{s-1}\{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{1 - \varphi_{s-2}(\rho')\{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}{\rho'^{s-1}\{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{\varphi_{s-2}(\rho')}{\rho'^{s-1}}$$

e le prime parti dei due secondi membri resteranno finite per $\rho'=0$, quando i coefficienti delle due funzioni razionali e intere $\varphi_{s-1}(\rho')$, $\varphi_{s-2}(\rho')$, di grado $s-1$ e $s-2$ rispettivamente, sieno determinati colle equazioni (19), facendovi nel primo caso $k=s$ $\sigma=\frac{n-2}{2}$, nel secondo $k=s-1$, $\sigma=\frac{n-2}{2}$.

Chiamando dunque N'_μ e N''_μ i coefficienti (18') in questi due casi, e ponendo per semplicità

$$\frac{1-\varphi_{s-1}(\rho')\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}{\rho'^s\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}=\frac{\sum_0^\infty N'_{s+r}\rho'^r}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}=F(\rho',\gamma)$$

$$\frac{1-\varphi_{s-2}(\rho')\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}{\rho'^{s-1}\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}=\frac{\sum_0^\infty N''_{s+r-1}\rho'^r}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}=F_1(\rho',\gamma)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{\varphi_{s-2}(\rho')}{\rho'^{s-1}}=\frac{\rho'\varphi'_{s-2}(\rho')-(s-1)\varphi_{s-2}(\rho')}{\rho'^s}=\frac{\psi_{s-1}(\rho')}{\rho'^s}$$

avremo

$$P=\frac{n+2s-4}{n-2}F(\rho',\gamma)+\frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial\rho'}F_1(\rho',\gamma)+\frac{\varphi_{s-1}(\rho')+\psi_{s-1}(\rho')}{\rho'^s}$$

e tanto il primo quanto il secondo termine del secondo membro non divengono infiniti per nessun valore di $\rho'<R$ non escluso $\rho'=0$ (*). Riguardo al terzo

(*) Per giustificare questa asserzione basterà osservare, che alle serie ordinate per le potenze delle variabili, e che sono convergenti in ugual grado, può applicarsi la derivazione. Però anche prescindendo da questo si può dimostrare un teorema, che non mi pare sia stato fin qui dimostrato e che ci conduce subito alla conclusione, che alla serie $\sum_0^\infty N''_{s+r-1}\rho'^r$ può applicarsi la derivazione. Lo accenneremo qui perchè può essere utile in molti casi. Se si hanno due serie

$$\varphi(x)=\Sigma u_n(x) \qquad \psi(x)=\Sigma v_n(x) \tag{a}$$

alle quali è applicabile la derivazione termine a termine, in un certo intervallo, in modo da avere

$$\varphi'(x)=\Sigma u'_n(x), \qquad \psi'(x)=\Sigma v'_n(x) \tag{b}$$

e tanto le (*a*) che le (*b*) sono convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini per i valori di x che si considerano, anche alla serie prodotto delle (*a*)

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x)=\Sigma w_n(x)$$

termine se si osserva che è della forma

$$\frac{G_0(\rho') + G_1(\rho')\cos\gamma + \cdots + G_{s-1}(\rho')\cos(s-1)\gamma}{\rho'^s}$$

dove le $G(\rho')$ sono razionali e intere di grado $s-1$ al più e indipendenti da γ, è chiaro che potrà trascurarsi nel sostituire il valore di P nella (16), quando al contorno i valori di $\frac{d^s U}{dp^s}$ dati sieno tali che, oltre la condizione

$$\int_{S_{n-1}} \frac{d^s U}{dp^s} dS_{n-1} = 0$$

soddisfacciano pure le altre

$$\int_{S_{n-1}} \cos l\gamma \cdot \frac{d^s U}{dp^s} dS_{n-1} = 0$$

per $l = 1, 2, \ldots, s-1$.

Supposte dunque soddisfatte queste condizioni avremo finalmente, sostituendo l'espressione di P nella (16)

$$\frac{\partial^s U}{\partial \rho'^s} = (-1)^s \frac{R^{s-1}}{N} \int_{S_{n-1}} \left\{ \frac{n+2s-4}{n-2} F(\rho', \gamma) + \frac{2}{n-2} \frac{\partial}{\partial \rho'} F_1(\rho', \gamma) \right\} \frac{d^s U}{dp^s} dS_{n-1}$$

---

con

$$w_n(x) = u_0(x)v_n(x) + u_1(x)v_{n-1}(x) + \ldots + u_n(x)v_0(x)$$

sarà applicabile la derivazione termine a termine.

Infatti, per le ipotesi ammesse, si avrà in serie convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini

$$\varphi(x)\psi'(x) = \Sigma\{u_n(x)v'_0(x) + u_{n-1}(x)v'_1(x) + \ldots + u_0(x)v'_n(x)\}$$
$$\psi(x)\varphi'(x) = \Sigma\{u'_n(x)v_0(x) + u'_{n-1}(x)v_1(x) + \ldots + u'_0(x)v_n(x)\}$$

e facendo la somma

$$\varphi(x)\psi'(x) + \psi(x)\varphi'(x) = f'(x) = \Sigma w'_n(x)$$

ciò che dimostra il teorema enunciato.

Ma alla serie binomiale è noto che è applicabile la derivazione, per cui alla serie che rappresenta il prodotto

$$\left\{1 - \frac{\rho'}{R} e^{i\gamma}\right\}^{\frac{n-2}{2}} \left\{1 - \frac{\rho'}{R} e^{-i\gamma}\right\}^{\frac{n-2}{2}} = \sum_0^\infty \binom{n-2}{2}_\mu \left(\frac{\rho'}{R}\right)^\mu e^{i\mu\gamma} \sum_0^\infty \binom{n-2}{2}_\mu \left(\frac{\rho'}{R}\right)^\mu e^{-i\mu\gamma}$$

lo sarà applicabile, e quindi anche alla serie $\sum_0^\infty N''_\mu \rho'^\mu$, che è il prodotto della precedente per l'altra $\sum_0^\infty a_\nu \rho'^\nu$ con le a nulle quando l'indice ν supera $s-2$, e per conseguenza anche all'altra $\sum_0^\infty N''_{s+r-1} \rho'^r$.

e così il valore di $\frac{\partial^s U}{\partial \rho^s}$ sarà finito in tutto il campo (12) che si considera.

Con s quadrature successive rispetto a ρ', potremo da questa ottenere il valore di U, che conterrà una funzione razionale e intera di grado $s-1$ in ρ', i cui coefficienti dovranno essere convenientemente determinati.

Ci fermeremo qui a considerare il caso più importante di $s=1$, e faremo alcune considerazioni sulla espressione di U. La (16) si riduce a

$$\frac{\partial U}{\partial \rho'} = -\frac{1}{N}\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp} \frac{R^2-\rho'^2}{\rho'\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} d S_{n-1} \tag{20}$$

e

$$P = \frac{1}{\rho'\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{1}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}$$

per cui sarà

$$\varphi_{s-1}(\rho') = a_0 = \frac{1}{R^{n-2}} \qquad \varphi_{s-2}(\rho') = 0$$

e quindi

$$P = \frac{1-R^{-(n-2)}\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}{\rho'\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial\rho'}\frac{1}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{R^{n-2}\rho'}.$$

Sostituendo questo valore nella (20) e integrando rispetto a ρ', tra zero e ρ', prendendo il valore di $U=0$ per $\rho'=0$, avremo, tenendo conto della (2)

$$U' = -\frac{2}{(n-2)N}\int_{S_{n-1}} \frac{dU}{dp}\frac{d S_{n-1}}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{1}{N}\int_{S_{n-1}}\frac{dU}{dp_1} f(\rho', \gamma) d S_{n-1} \tag{21}$$

dove si è posto

$$f(\rho', \gamma) = \int_0^{\rho'} \frac{1-R^{-(n-2)}\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}}{\rho'\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{\frac{n-2}{2}}} d\rho' \tag{22}$$

con che il problema è ridotto ad una sola quadratura. Questa quadratura poi non offre nessuna difficoltà teorica, e si riduce sempre all'integrazione di funzioni razionali che possono integrarsi immediatamente, o svolgendole in frazioni semplici, senza incontrare difficoltà relative alla ricerca di radici. Nel caso di n pari si vede subito che abbiamo degli integrali della forma

$$\int_0^{\rho'} \frac{\rho'^s d\rho'}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^p} \qquad s=1,\ 2,\ldots,\ 2p-1$$

avendo posto $n=2p+2$, e per mezzo della formula di riduzione

$$\int_0^{\rho'} \frac{\rho'^s d\rho'}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^p} = \int_0^{\rho'} \frac{\rho'^{s-2} d\rho'}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^{p-1}} - R^2 \int_0^{\rho'} \frac{\rho'^{s-2} d\rho'}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^p} +$$

$$+2R\cos\gamma \int_0^{\rho'} \frac{\rho'^{s-1} d\rho'}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^p}$$

si vede subito che si riconducono ad integrali noti

$$\int_0^{\rho'} \rho'^{\sigma} d\rho', \qquad \int_0^{\rho'} \frac{\rho' d\rho'}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^k}, \qquad \int_0^{\rho'} \frac{d\rho'}{\{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2\}^k}.$$

con k e σ numeri interi e positivi.

Per applicare le formule generali ad un caso speciale, suppongasi $n=4$ ovvero $p=1$, allora avremo

$$f(\rho'\ \gamma) = \frac{1}{R^2}\int_0^{\rho'} \frac{2R\cos\gamma-\rho'}{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2} d\rho' = -\frac{1}{R^2}\int_0^{\rho'} d\log\sqrt{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2} +$$

$$+\frac{\cos\gamma}{R}\int_0^{\rho'} \frac{d\rho'}{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2} =$$

$$= -\frac{1}{R^2}\{\log\sqrt{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2}-\log R\} + \frac{\cot\gamma}{R^2}\left\{\mathrm{ar\,tg}\left(\frac{R\,\mathrm{sen}\,\gamma}{\rho'-R\cos\gamma}\right)\right\}_0^{\rho'}$$

$$= -\frac{1}{R^2}\left\{\log\sqrt{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2} - \cot\gamma\cdot\mathrm{ar\,tg}\left(\frac{\rho'\,\mathrm{sen}\,\gamma}{R-\rho'\cos\gamma}\right) - \log R\right\}$$

e la espressione così ottenuta resta sempre finita per tutti i valori di $\rho'<R$ e per tutti i valori di γ, non esclusi 0 e π.

Introducendo questa espressione di $f(\rho',\gamma)$ nella (21) e ricordando che per $n=4$ si ha

$$N=2\pi^2, \qquad dS_{n-1}=dS_3=R^2\,\mathrm{sen}\,z_1^2\,\mathrm{sen}\,z_2\,dz_1\,dz_2\,dz_3$$

otterremo

$$U'=-\frac{1}{2\pi^2R^2}\int_{S_3}\frac{dU}{dp}\left\{\frac{R^2}{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2}-\log\sqrt{\rho'^2-2\rho' R\cos\gamma+R^2}-\right.$$

$$\left.+\cot\gamma\,\mathrm{ar\,tg}\left(\frac{R\,\mathrm{sen}\,\gamma}{R-\rho'\cos\gamma}\right)\right\}dS_3=$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 z_1 dz_1 \int_0^\pi \operatorname{sen} z_2 dz_2 \int_0^{2\pi} \frac{dU}{dp}\left\{\frac{R^2}{\rho' - 2\rho' R\cos\gamma + R^2} - \right.$$

$$\left. -\log\sqrt{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2} + \cot\gamma \cdot \operatorname{ar\,tg}\frac{R\operatorname{sen}\gamma}{R - \rho'\cos\gamma}\right\} dz_3$$

con

$$\cos\gamma = \cos z_1 \cos z'_1 + \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z'_1 \cos z_2 \cos z'_2 +$$

$$+ \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z'_1 \operatorname{sen} z_2 \operatorname{sen} z'_2 \cos(z_3 - z'_3) = \cos z_1 \cos z'_1 + \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z'_1 \cos\varphi$$

avendo posto

$$\cos\varphi = \cos z_2 \cos z'_2 + \operatorname{sen} z_2 \operatorname{sen} z'_2 \cos(z_3 - z'_3).$$

Se n è dispari ponendo

$$\sqrt{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2} = \rho' t - R$$

ovvero

$$\rho' = 2R\frac{\cos\gamma - t}{1 - t^2}, \qquad d\rho' = 2R\frac{2t\cos\gamma - t^2 - 1}{(1 - t^2)^2} dt, \qquad \rho' t - R = R\frac{2t\cos\gamma - t^2 - 1}{1 - t^2} \quad (23)$$

si ottiene

$$f(\rho', \gamma) = \frac{1}{R^{n-2}}\int_\infty^{t'} \frac{(1 - t^2)^{n-2} - (2t\cos\gamma - t^2 - 1)^{n-2}}{(\cos\gamma - t)(1 - t^2)(2t\cos\gamma - t^2 - 1)^{n-3}} dt$$

e l'integrale del secondo membro sarà finito perchè il numeratore è di grado $2n - 5$ al più e il denominatore di grado $2n - 3$ certamente: l'espressione precedente potrebbe anche scriversi, volendo, nel seguente modo

$$f(\rho', \gamma) = -\frac{1}{R^{n-2}}\sum_1^{n-2}(n-2)_s 2^s \int_\infty^{t'} \frac{(t\cos\gamma - 1)^s (1 - t^2)^{n-2-s}}{(\cos\gamma - t)(1 - t^2)(2t\cos\gamma - t^2 - 1)^{n-3}} dt$$

e si vede che essendo n ed s numeri interi l'integrale può ottenersi senza difficoltà teoriche.

Supponendo $n = 3$ avremo

$$f(\rho', \gamma) = \frac{1}{R}\int_\infty^{t'}\left\{\frac{2}{\cos\gamma - t} - \frac{2t}{1 - t^2}\right\} dt = -\frac{1}{R}\int_\infty^{t'} \frac{d}{dt}\log\frac{(\cos\gamma - t)^2}{1 - t^2} dt$$

e tornando a sostituire la variabile ρ' mediante le (23) otterremo anche

$$f(\rho', \gamma) = -\frac{1}{R}\int_0^{\rho'} d\log\left\{\frac{\rho'}{2R}\frac{(R - \rho'\cos\gamma + \sqrt{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2})}{\rho'}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{R}\log\{R - \rho'\cos\gamma + \sqrt{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2}\} + \text{cost}$$

e quindi, per la (21), e ricordando che in questo caso,

$$N = 4\pi, \qquad dS_{n-1} = dS_2 = R \operatorname{sen} z_1 \, dz_1 \, dz_2$$

otterremo la formula data dal sig. Dini

$$U' = -\frac{1}{2\pi R}\int_{S_2} \frac{dU}{dp}\left\{\frac{R}{\{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\log\{R - \rho'\cos\gamma + \sqrt{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2}\}\right\} dS_2 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} z_1 \, dz_1 \int_0^{2\pi} \frac{dU}{dp}\left\{\frac{2R}{(\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2)^{\frac{1}{2}}} - \log\{R - \rho'\cos\gamma + \sqrt{\rho'^2 - 2\rho' R\cos\gamma + R^2}\}\right\} dz_2$$

con

$$\cos\gamma = \cos z_1 \cos z'_1 + \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z'_1 \cos\varphi$$

avendo posto

$$\cos\varphi = \cos z_2 \cos z'_2 + \operatorname{sen} z_2 \operatorname{sen} z'_2 = \cos(z_2 - z'_2).$$

Non faremo altre applicazioni della formula generale, perchè è chiaro che non si hanno da superare difficoltà teoriche, ma solo difficoltà pratiche di calcolo, relative alla esecuzione di quadrature di funzioni razionali.

Fine del Tomo X.° (Serie II.ª)