

NOTIONS FONDAMENTALES

# d'Electricité Industrielle

PREMIÈRE PARTIE

★★



NOTIONS FONDAMENTALES  
d'Électricité  
Industrielle

LEÇONS

*PROFESSÉES*

à l'Institut Électrotechnique de l'Université de Grenoble

PAR

**J. PIONCHON**

*Directeur de l'Institut*

*Professeur à l'Université*

★★

PREMIÈRE PARTIE

Éléments d'Électricité et de Magnétisme  
applicables à l'Électrotechnique

GRENOBLE

ALEXANDRE GRATIER & C<sup>IE</sup>

Éditeurs



## VINGT-QUATRIÈME LEÇON



# INDUCTION MAGNÉTIQUE

\*

## FLUX D'INDUCTION MAGNÉTIQUE MÉTHODE BALISTIQUE D'EXPLORATION DES CHAMPS MAGNÉTIQUES



### I

#### Flux d'induction magnétique.

Considérons, dans un champ magnétique, les lignes de force correspondant aux différents points d'un contour fermé quelconque  $\mathbf{C}$  (*fig.* 150, I). L'espace  $\mathbf{T}$  compris à l'intérieur de la surface qu'elles délimitent est ce qu'on est convenu d'appeler un **tube de force magnétique**.

Dans un champ uniforme, où les lignes de force sont rectilignes et parallèles, un tube de force est nécessairement délimité par une surface cylindrique ou prismatique, suivant la forme du contour  $\mathbf{C}$  (*fig.* 150, II).

Dans un champ quelconque, où les lignes de force sont des

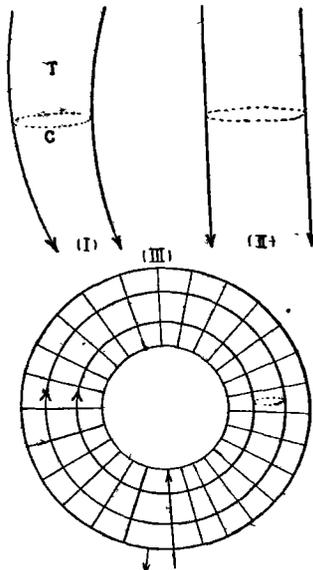


Fig. 150.

lignes courbes, un tube de force est de forme plus ou moins compliquée. En particulier, il est en forme de tore dans le cas où le champ considéré est situé à l'intérieur d'un solénoïde enroulé suivant un tore (fig. 150, III), les lignes de force étant alors des circonférences ayant toutes leurs centres sur une même droite, l'axe du tore.



Etant donné un tube de force, imaginons qu'on l'entoure, comme ceinture, d'une boucle conductrice et qu'on mette cette boucle en relation avec un galvanomètre

balistique. Si ensuite on fait en sorte que cette boucle ne soit plus traversée par aucune ligne de force, soit en l'orientant de manière que son plan devienne parallèle aux lignes de force, soit en la transportant en un lieu soustrait à toute action magnétique, soit enfin, en supprimant la cause productrice du tube de force considéré (ce qui est facile lorsque cette cause est un courant); bref, si l'on effectue en un temps très court l'une ou l'autre de ces manœuvres, on obtient, dans le circuit dont la boucle fait partie, une décharge électrique accusée et mesurée par le galvanomètre balistique.

On donne à une telle décharge le nom de **décharge d'induction** ou de **décharge induite**.

Pour un même tube de force et un même circuit d'épreuve, la quantité d'électricité mise en jeu est la

même, quelle que soit celle des sections du tube embrassée par la boucle. On exprime ce résultat en disant que le **flux d'induction** dû à un tube de force est le même à travers toutes les sections  $S, S', S'', \dots$  (fig. 151).

La décharge d'induction obtenue à l'aide d'un tube de force donné dépend de la résistance du circuit d'épreuve employé (boucle, galvanomètre balistique et fils de jonction), car si l'on modifie ce circuit de façon à changer sa résistance, on observe, pour le même tube, une décharge différente.

Mais la décharge dépend aussi du tube de force considéré, car si l'on étudie, avec le même circuit d'épreuve, un autre tube, on trouve une quantité d'électricité induite différente.

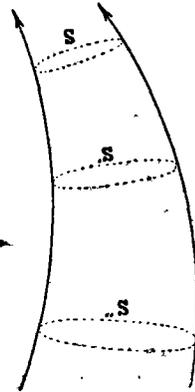


FIG. 151.



Le rapport des quantités d'électricité induites obtenues avec un même appareil d'épreuve pour deux tubes de force différents est indépendant de cet appareil d'épreuve. Il caractérise ce qu'on appelle le rapport des **flux d'induction** correspondant à ces deux tubes. Ce rapport donne la mesure de l'un des flux si l'autre est pris pour unité.

Tout tube de force peut être ainsi caractérisé quantitativement par la valeur numérique d'un certain para-

mètre, son *flux d'induction*, qu'on représente habituellement par la lettre  $\Phi$ .

Le rapport des quantités d'électricité induites obtenues dans deux circuits d'épreuve différents avec un même tube de force est égal au rapport inverse des résistances électriques de ces deux circuits.

Il résulte de ces deux observations que la quantité d'électricité  $Q$  mise en jeu dans une décharge induite est proportionnelle au flux d'induction  $\Phi$  du tube de force considéré et à l'inverse  $\frac{1}{R}$  de la résistance totale du circuit d'épreuve employé. Elle est, par suite, proportionnelle au produit  $\Phi \times \frac{1}{R}$  ; on a donc :

$$Q = a \frac{\Phi}{R}$$

Si l'on mesure  $Q$  en coulombs et  $R$  en ohms, le coefficient  $a$  de cette relation dépendra en outre du choix qu'on aura fait pour le flux unité. Inversement, si l'on assigne à ce coefficient  $a$  une valeur déterminée, le choix de l'unité de flux se trouvera par là même fixé et la valeur numérique du flux d'un tube de force donné se déduira des mesures de  $Q$  et de  $R$  par la relation :

$$\Phi = \frac{1}{a} QR.$$

—⊗—

Évalué ainsi, le flux d'un tube de force *uniforme* (c'est-à-dire appartenant à un champ uniforme) se montre *proportionnel au produit HS* de l'intensité  $H$  du champ en un point d'une *section droite* par l'étendue  $S$  de cette section.

On conçoit que cette proportionnalité puisse devenir

une simple égalité par une valeur convenable donnée au paramètre  $a$  dans la formule servant à calculer  $\Phi$  à l'aide des valeurs trouvées pour  $Q$  et  $R$ . Quand on adopte comme unités pour évaluer  $Q$ ,  $R$ ,  $H$ ,  $S$  respectivement le coulomb, l'ohm, le gauss et le centimètre carré, la valeur à attribuer à  $\frac{1}{a}$  pour avoir la relation simple :

$$\Phi = HS$$

est  $10^8$ . Nous écrirons donc :

$$\Phi = 10^8 QR.$$

L'unité de flux qui se trouve ainsi implicitement adoptée est le flux correspondant à un tube de force qui, dans un circuit de résistance totale égale à 1 ohm, donnerait lieu, par sa disparition, à une décharge induite mettant en jeu une fraction de coulomb égale à  $\frac{1}{10^8}$ . Le nom actuellement adopté pour cette unité est celui de **maxwell** (1).



*Toute variation  $\Delta\Phi$  du flux embrassée par un circuit, quelle qu'en soit la cause, déplacement ou modification du champ en totalité ou en partie, déplacement ou déformation du circuit en totalité ou en partie, donne lieu, dans ce circuit, à une décharge induite liée à la variation du flux, quand on adopte les unités ci-dessus spécifiées, par la formule :*

---

1. En l'honneur de l'éminent physicien-mathématicien anglais Maxwell dont les travaux ont popularisé dans la science la notion du flux d'induction.

$$Q = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{R}$$

La variation  $\Delta\Phi$  étant numériquement égale à l'excès du flux initial  $\Phi_1$  sur le flux final  $\Phi_2$ , ou inversement, sa mesure conduira à la connaissance de l'un de ces flux si l'autre est connu.

La mesure du flux  $\Phi$  correspondant à un tube de force donné, faite comme il a été dit ci-dessus, n'est qu'une application particulière de cette formule générale dans laquelle on avait  $\Phi_1 = \Phi$ ,  $\Phi_2 = 0$  et, par suite,  $\Delta\Phi = \Phi$ .

On peut, inversement, opérer en plaçant d'abord la boucle dans des conditions correspondant à  $\Phi_1 = 0$  et ensuite dans des conditions correspondant à  $\Phi_2 = \Phi$ . La décharge obtenue alors est de même grandeur que la précédente, mais de sens inverse.



Le *sens* de la décharge produite dans un circuit donné par une variation de flux donnée peut être prévu par la règle suivante :

*Si la variation du flux est une diminution, la face d'entrée de ce flux dans la boucle est une face droite par rapport à la flèche marquant le sens de la décharge. Inversement, si la variation du flux est une augmentation, la face d'entrée du flux est une face gauche*(1).

On peut comprendre tous les cas possibles dans une seule formule générale, à condition de considérer les flux comme des grandeurs algébriques, c'est-à-dire d'affecter leurs valeurs numériques du signe + ou du signe — suivant leur sens. A cet effet, il convient de

---

1. La seconde partie de la règle étant l'inverse de la première, il suffit évidemment de retenir celle-ci, ce qui est facile en remarquant que les mots *diminution* et *droite* qui s'y rencontrent ont la même initiale : d.

marquer sur le circuit d'épreuve une flèche définissant un sens de décharge qu'on appellera sens positif. Par rapport à cette flèche, les deux faces du circuit se distinguent en droite et gauche. Convenons alors de considérer comme *positifs*, c'est-à-dire d'affecter du signe + les flux entrant par la face *droite*, et comme *négatifs*, c'est-à-dire d'affecter du signe — les flux entrant par la face *gauche*. Dans ces conditions, une variation de flux  $\Delta\Phi$  est une grandeur algébrique (positive ou négative), qui s'obtient en calculant la différence algébrique  $\Phi_2 - \Phi_1$  entre la valeur finale  $\Phi_2$  et la valeur initiale  $\Phi_1$  d'un flux, prises en grandeurs et en signes. Ceci posé, la quantité d'électricité  $Q$  mise en jeu dans un circuit qui est le siège d'une variation (algébrique) de flux  $\Delta\Phi$  est donnée, en grandeur et en signe, dans tous les cas, par la formule :

$$Q = - \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{R}.$$

Si le nombre ainsi calculé est précédé du signe +, cela signifie que la décharge qu'il représente est dirigée dans le sens de la flèche marquée sur le circuit comme sens des décharges positives. Si, au contraire, le nombre trouvé est précédé du signe —, cela veut dire que la décharge correspondante est dirigée en sens contraire.



Lorsqu'un même circuit comprend plusieurs boucles en série  $B_1, B_2, B_3, \dots$  traversées par des flux  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$  le flux  $\Psi$ , qui doit être considéré comme traver-

sant le circuit, est la somme *algébrique* des flux  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ , ... chacun d'eux étant compté positivement ou négativement, suivant qu'il entre par la face droite ou par la face gauche de la boucle correspondante, la qualité droite ou gauche d'une face étant déterminée relativement à un sens de parcours du circuit assigné à l'avance.

En particulier, lorsqu'un circuit renferme une bobine **B** comprenant  $n$  spires entourant un même tube de force, les flux  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ , ... correspondant aux diverses spires sont égaux entre eux et au flux  $\Phi$  caractérisant le tube de force considéré, l'expression du flux total  $\Psi$  traversant le circuit est alors :

$$\Psi = n\Phi$$

de telle sorte que pour avoir  $\Phi$  il faudra diviser par  $n$  le résultat déduit de la mesure de la décharge correspondant à la disparition du flux, puisque ce résultat ne sera autre que la valeur même du flux total  $\Psi$



## II

### Méthode balistique d'exploration des champs magnétiques.

Etant donné un champ magnétique uniforme, ou pouvant pratiquement être considéré comme tel dans une région plus ou moins restreinte, imaginons qu'on y dispose une bobine, formée de  $n$  spires identiques, de façon que celles-ci soient normales à la direction

des lignes de force. Le flux traversant *chacune d'elles* dans ces conditions, sera égal au produit  $\mathbf{H.S}$  de l'intensité  $\mathbf{H}$  du champ par la surface  $\mathbf{S}$  enclose dans une spire. Par suite, le flux à travers la bobine sera :

$$\Psi_1 = nHS.$$

Supposons maintenant qu'on retourne la bobine face pour face en lui faisant accomplir une demi-révolution autour d'un axe  $\mathbf{AA}$  perpendiculaire à la direction du champ (*fig. 152*). Le flux  $\Psi_2$  correspondant à la nouvelle position aura même valeur absolue que le précédent, mais un signe contraire,

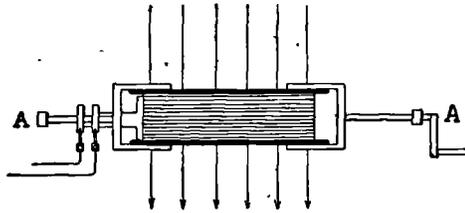


FIG. 152.

puisqu'il entrera alors par la face gauche s'il entraît auparavant par la face droite, ou inversement. On aura donc :

$$\Psi_2 = -nHS$$

et, par suite, pour la variation de flux due au retournement :

$$\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 = -2nHS.$$

Si donc la bobine est reliée à un galvanomètre balistique, celui-ci accusera une décharge induite dont la valeur  $\mathbf{Q}$  satisfera à la relation :

$$Q = -\frac{1}{10^8} \frac{\Delta\Psi}{R} = \frac{1}{10^8} \frac{2nHS}{R}$$

En vertu de cette relation, la mesure de  $\mathbf{Q}$  conduira à

la connaissance de l'intensité  $H$  du champ magnétique considéré.

Le point délicat de cette méthode d'étude des champs magnétiques, qu'on appelle *méthode balistique* ou *d'induction*, est la détermination de la surface totale  $nS$  des spires de la bobine d'épreuve. Si l'on ne connaît pas très exactement, d'après la construction même de la bobine, la surface moyenne  $S$  et le nombre  $n$  des spires, il est préférable de déterminer la surface totale  $nS$  d'un seul coup par une expérience spéciale consistant à mesurer la décharge donnée par la bobine dans un champ connu. On tire alors  $nS$  de la formule

$$Q = \frac{1}{10^8} \frac{2nHS}{R}, \text{ où l'on connaît } R, H \text{ et } Q.$$

Une des premières applications de cette méthode a été faite par Weber à l'étude du champ terrestre. Ce champ, étant faible, il convient, si l'on veut avoir des décharges  $Q$  un peu notables, de faire usage d'une bobine de plusieurs décimètres carrés de surface, ce qui ne présente aucune difficulté, le champ terrestre étant parfaitement uniforme dans une étendue bien supérieure. Si l'on dispose le plan des spires horizontalement et qu'on retourne rapidement la bobine face pour face, on déduit de la décharge obtenue la composante verticale  $Z$  du champ terrestre. En opérant ensuite de même pour une orientation du plan des spires perpendiculaires à la méridienne magnétique, on détermine la composante horizontale  $H$ . Le rapport

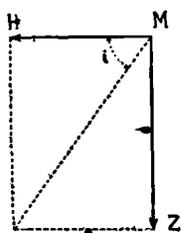


FIG. 153.

$\frac{Z}{H}$  fait connaître l'inclinaison magnétique  $i$ , puisqu'on a (fig. 153)

$$\frac{Z}{H} = \operatorname{tgi}.$$

En raison de cette dernière détermination, l'appareil est désigné souvent sous le nom d'*inclinomètre de Weber*. Sa disposition est celle qui est représentée schématiquement fig. 152.



Si le champ à étudier se présente dans un espace étroit ne permettant pas le retournement de la bobine exploratrice, ce qui est le cas, par exemple, du champ compris entre un noyau d'électro-aimant **N** et une armature **A** très voisine (fig. 154), on donne à la bobine **B** une forme très plate, de façon qu'elle puisse aisément pénétrer dans l'espace à explorer (1), et, au lieu de la retourner, ce qui n'est pas possible, on la retire vivement pour la porter à une distance où

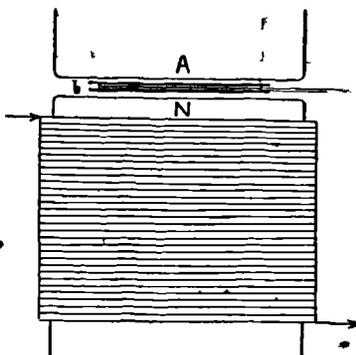


FIG. 154.

l'action de l'électro-aimant est insensible. La variation de flux ainsi provoquée est égale au flux reçu par la bobine dans sa position primitive, c'est-à-dire à  $nHS$ . La position primitive doit évidemment être perpendiculaire aux lignes de force; pour toute autre position, la décharge obtenue serait moindre. On cherchera donc par tâtonnement la position donnant l'effet maximum.



1. Une manière simple et pratique de constituer une bobine d'épreuve convenant à ce cas spécial consiste, ainsi que le recommande M. Armagnat : « à découper un rectangle de carton épais de 1 à 2 millimètres; on mesure exactement la surface de ce rectangle, puis on colle, sur chaque face, une feuille de carton plus mince, débordante de chaque côté, destinée à servir de joue à la bobine. Dans la gorge ainsi formée, on enroule du fil de cuivre, bien isolé, de diamètre approprié au nombre de tours nécessaire; un calcul préliminaire a fait connaître ce nombre d'après la valeur présumée de  $H$ . Le nombre de tours doit, évidemment, être soigneusement noté. L'enroulement terminé, on mesure ses dimensions extérieures et on prend pour  $s$ , la moyenne entre la première surface et celle-ci. » (*Instruments et méthodes de mesures électriques industrielles*, Paris. G. Carré et C. Naud, édit.)

Lorsqu'un galvanomètre balistique est relié à une bobine, il n'est pas dans les mêmes conditions que lorsqu'il est relié à un condensateur. En effet, tandis que dans le cas du condensateur il

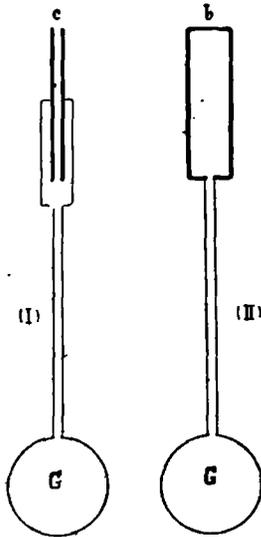


FIG. 155.

fonctionne à circuit ouvert (fig. 155, I), dans le cas de la bobine (fig. 155, II) il fonctionne à circuit fermé. L'induction qui se produit dans ce circuit, par suite du déplacement de l'équipage mobile, apporte au mouvement de ce dernier, comme nous le verrons plus tard, une gêne qui n'existe pas à circuit ouvert, en l'absence de cette induction. Il suit de là que le coefficient de proportionnalité entre la première élongation et la vitesse initiale, et par conséquent entre la première élongation et la quantité d'électricité reçue par le galvanomètre, n'est pas le même qu'à circuit ouvert. Il convient donc, pour appliquer un galvanomètre balistique à la mesure des décharges induites, d'en effectuer l'étalonnage à circuit fermé,

en opérant avec le circuit même formé par la bobine d'épreuve et ses fils d'attache au galvanomètre.

Un premier moyen d'envoyer dans le galvanomètre ainsi équipé une quantité d'électricité connue consiste à mettre ses bornes en relation avec un condensateur de capacité connue  $C$  chargé à une différence de potentiel connue  $V$ . La décharge de ce condensateur ne se fait pas entièrement par le galvanomètre ; une partie s'effectue par la dérivation que constitue la bobine. Si  $g$  est la résistance du galvanomètre et  $b$  celle de la partie extérieure du circuit contenant la bobine, la fraction de la charge du condensateur reçue par le galvanomètre est  $\frac{b}{g+b}$  (1). La quantité d'électricité  $Q$ , correspondant à l'élongation observée  $\beta_0$ , est donc  $\frac{b}{g+b} CV$ . La quantité  $Q$  mise en jeu ultérieurement

1. La formule du partage d'une décharge entre les branches d'une dérivation est, en effet, la même que celle du partage d'un courant.

par une décharge induite donnant lieu à une élongation  $\beta$  s'obtiendra par la proportion :

$$\frac{Q}{\beta} = \frac{Q_0}{\beta_0}$$

Au lieu de demander à un condensateur la quantité d'électricité nécessaire à cet étalonnage, on peut la demander à une bobine  $b'$  faisant partie du circuit du galvanomètre et traversée par un flux connu, tel, par exemple, que le flux engendré par un solénoïde  $\Sigma$  de section  $S$ , portant  $n$  spires par centimètre et

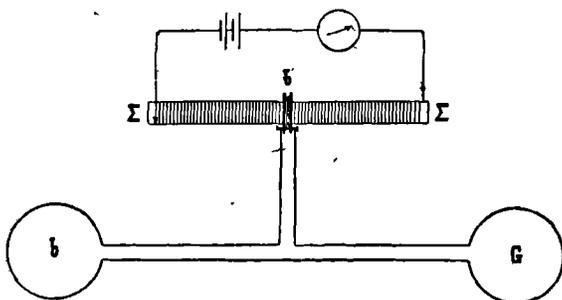


FIG. 156.

parcouru par un courant  $I$  (fig. 156). La variation de flux éprouvée par la bobine  $b'$  pour un renversement de sens du courant  $I$  est  $\Delta\Phi = 2n \cdot \frac{4}{10} \pi n_1 IS$  (1), ce qui donne, pour la quantité d'électricité correspondante :

$$Q_0 = \frac{1}{10^8} \frac{2n \cdot \frac{4}{10} \pi n_1 IS}{b + g}$$

1. On a vu, en effet, t. I, page 120, que le champ à l'intérieur du solénoïde est égal à  $\frac{4}{10} \pi n_1 I$ . Le flux à travers une section est  $\frac{4}{10} \pi n_1 I \cdot S$ . En le multipliant par  $n$  on a le flux à travers la bobine qu'il suffit enfin de doubler pour avoir la variation résultant de son renversement.



## VINGT-CINQUIÈME LEÇON



# INDUCTION MAGNÉTIQUE

\*\*

## INDUCTION ET PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUES HYSTÉRÉSIS HYSTÉRÉSIMÈTRES

—

### 1

#### Induction et perméabilité magnétiques.

La façon la plus simple, et en même temps la plus intéressante pour la pratique, de faire l'étude d'une substance au point de vue magnétique consiste à rechercher comment elle se comporte quand elle constitue le noyau d'un solénoïde, par comparaison avec le cas où ce même solénoïde est pourvu d'un noyau d'air ou, ce qui revient pratiquement au même, d'un noyau non magnétique quelconque.

Soit un solénoïde cylindrique à noyau d'air de longueur assez grande pour que, dans sa partie

moyenne, le champ soit, sans erreur sensible, donné par l'expression :

$$H = \frac{4}{10} \pi n_1 I$$

et par conséquent le flux  $\Phi$  à travers une section par l'expression :

$$\Phi = HS$$

Si l'on remplace le noyau d'air par un noyau de fer ou de tout autre métal magnétique (fonte, acier, etc.), on constate que le flux, pour la même valeur  $I$  du courant exciteur, présente une valeur  $\Phi_m$  plus grande que  $\Phi$ . En d'autres termes, le facteur par lequel il faudrait, dans ce cas, multiplier la section  $S$  pour avoir le flux présente une valeur  $\mathcal{B}$  plus grande que  $H$  :

On donne à ce paramètre  $\mathcal{B}$ , défini par la relation :

$$\Phi_m = \mathcal{B}S$$

le nom d'**induction magnétique** moyenne dans la section  $S$  de la substance magnétique considérée, prise en l'état d'aimantation où elle se trouve par l'effet du courant magnétisant  $I$ .

Ce paramètre est de *même espèce* que le champ  $H$ . Ce dernier, en effet, en vertu de la relation  $\Phi = HS$ , n'est autre que l'induction magnétique moyenne dans la section  $S$  pour l'air.

Si l'on donne au courant exciteur  $I$  différentes valeurs, on trouve que le rapport de  $\mathcal{B}$  à  $H$  présente, pour chacune d'elles, une valeur particulière.

Ce rapport

$$\mu = \frac{\mathcal{B}}{H}$$

est désigné sous le nom de **perméabilité magnétique** de la substance considérée, prise dans l'état d'aimantation où son induction magnétique est  $\mathcal{B}$ .



Etant une fonction de  $\mathbf{I}$ , le rapport  $\mu$  est, par suite, une fonction de  $\mathbf{H}$ . Tel est le cas aussi de  $\mathcal{B}$ , puisqu'on a, d'après la définition même de  $\mu$  :

$$\mathcal{B}\mathbf{H} = \mu$$

Faisons donc successivement l'étude de  $\mathcal{B}$  en fonction de  $\mathbf{H}$ , de  $\mu$  en fonction de  $\mathbf{H}$  et de  $\mu$  en fonction de  $\mathcal{B}$ , en nous bornant aux substances magnétiques les plus usuelles telles que le fer doux et la fonte grise.

#### A. Etude de $\mathcal{B}$ en fonction de $\mathbf{H}$ .

La détermination de  $\mathcal{B}$  en fonction de  $\mathbf{H}$  par la mesure balistique du flux traversant une section d'un solénoïde rectiligne ayant pour noyau la substance à étudier exige, pour l'exactitude de la formule  $\mathbf{H} = \frac{4}{10} \pi n_1 \mathbf{I}$ , l'emploi de tiges dont la longueur soit supérieure à 100 fois le diamètre, condition parfois difficile à réaliser. Suivant Fleming, on peut se contenter de tiges de longueur égale à 10 fois seulement le diamètre, à condition de placer la bobine d'épreuve à une distance de l'extrémité égale à la fraction 0,22 de la longueur.

Un autre moyen d'éliminer l'influence perturbatrice des extrémités consiste à supprimer celles-ci en donnant à l'échantillon à étudier la forme d'un anneau

recouvert complètement d'une bobine magnétisante. Si l'épaisseur de l'anneau est faible par rapport au diamètre, la formule  $H = \frac{4}{10} \pi n_1 I$  est applicable. A l'aide d'une bobine d'épreuve  $b$  on mesure, pour chaque valeur de  $I$ , le flux  $\Phi$  à travers une section  $S$  et l'on a ainsi, pour une série de valeurs de  $H$  connues, la série des valeurs de  $\mathcal{B} = \frac{\Phi}{S}$ .

Lorsqu'une barre de fer formée de deux tronçons placés bout à bout est aimantée, ces deux tronçons sont unis l'un à l'autre par une force attractive dont la grandeur  $F$  dépend de la valeur  $\mathcal{B}$  de l'induction magnétique dans la section de jonction  $S$ , suivant la formule :

$$F = \frac{S\mathcal{B}^2}{8\pi}$$

qui donne  $F$  en *dynes* si l'on exprime  $S$  en *centimètres carrés* et  $\mathcal{B}$  en *gauss*. Si l'on veut exprimer  $F$  en grammes, il faut diviser l'expression précédente par 981, et l'on a, tous calculs faits :

$$F = \frac{4,06}{10^5} S\mathcal{B}^2 \text{ grammes.}$$

Cette relation peut servir de base à une méthode de détermination de  $\mathcal{B}$  qui consiste à donner à un solénoïde un noyau formé de deux tronçons contigus de la substance à étudier et à mesurer, au moyen d'un dynamomètre (balance ou peson), l'effort nécessaire et suffisant pour les séparer. On a ainsi la valeur de la force d'adhésion  $F$ . Connaissant, d'autre part, la section  $S$  des barreaux, on calcule  $\mathcal{B}$  par la formule :

$$\beta = \sqrt{\frac{10^5 F}{4,06 S}} = 157 \sqrt{\frac{F}{S}}$$

( $F$  étant exprimée en grammes et  $S$  en centimètres carrés). La valeur correspondante de  $H$  se calcule d'après le nombre  $n$  de spires du solénoïde, sa longueur  $l$  et l'intensité  $I$  du courant par la formule  $H = \frac{4}{10} \pi \frac{n}{l} I$ .

On peut employer, à l'exemple de S. Thompson, un solénoïde et un barreau courts, à condition de mettre les extrémités de ce dernier en relation avec une large masse de fer, grâce à laquelle l'aimantation du noyau présente pratiquement la même uniformité que si sa longueur était très grande relativement à son diamètre. Le barreau à essayer est alors d'une seule pièce et l'on détermine la force avec laquelle il adhère par l'une de ses extrémités ( $a$ ) à la masse de fer contre laquelle il est appuyé, l'autre

extrémité passant à frottement doux dans la partie opposée de cette masse pour recevoir du dynamomètre l'effort d'arrachement  $F$  (fig. 157, I). Pour opérer sans secousse, il convient de donner au dynamomètre une tension déterminée et de provoquer l'arrachement par une diminution graduelle de l'intensité du courant magnétisant, ce qui revient, au lieu de déterminer  $F$  pour  $I$  donné, à déterminer, inversement,  $I$  pour  $F$  donné. De notables erreurs sont à craindre si l'on n'apporte pas le plus grand soin au travail des surfaces de contact du barreau et de l'armature, afin que l'adhérence ait bien lieu sur toute la surface terminale du barreau. Habituellement, la masse de fer servant à l'armature offre la disposition symétrique représentée fig. 157 II, plus efficace encore que la première pour assurer l'uniformité d'aimantation du barreau d'épreuve.

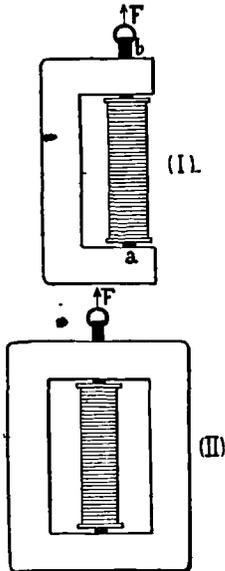


Fig. 157.



Pour les métaux magnétiques usuels, à des valeurs de  $H$  de quelques unités correspondent des valeurs de  $\mathcal{B}$  de plusieurs milliers d'unités ; aussi, si l'on veut les représenter graphiquement, convient-il,

afin d'éviter des courbes d'une étendue exagérée en hauteur, d'adopter pour  $\mathcal{B}$  une échelle beaucoup moindre que pour  $H$ . On choisit habituellement une échelle 100 fois moindre. C'est ainsi qu'ont été tracées les courbes (I) et (II) de la fig. 158, relatives respectivement à des échantillons de fer forgé et de fonte grise.

On voit que, pour ces substances,  $\mathcal{B}$  augmente avec  $H$ , d'abord assez rapidement, puis d'une façon de plus en plus lente.

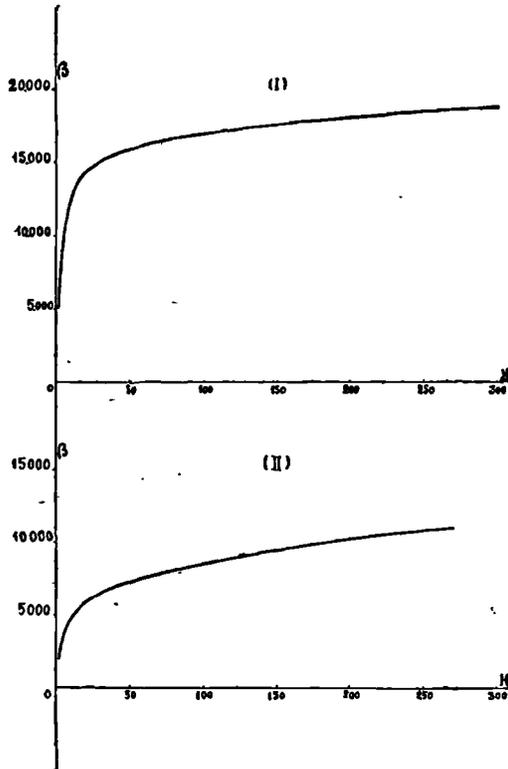


FIG. 158.

La comparaison de ces courbes met bien en évidence l'influence de la nature de la substance sur la grandeur des effets obtenus. Ainsi, pour une même valeur de  $H$ , la valeur de  $\mathcal{B}$  dans le fer est environ deux fois plus grande que dans la fonte grise.

### B. *Etude de $\mu$ en fonction de $H$ .*

L'étude de la perméabilité d'une substance magnétique se déduit immédiatement de celle de l'induction puisqu'on a :

$$\mu = \frac{\mathcal{B}}{H}$$

En divisant chaque valeur de  $\mathcal{B}$  par la valeur de  $H$  correspondante on aura la valeur corrélative de  $\mu$ . Ce quotient serait donné, sur la représentation graphique de  $\mathcal{B}$  en fonction de  $H$ , par le coefficient angulaire du rayon vecteur de chaque point de la courbe,

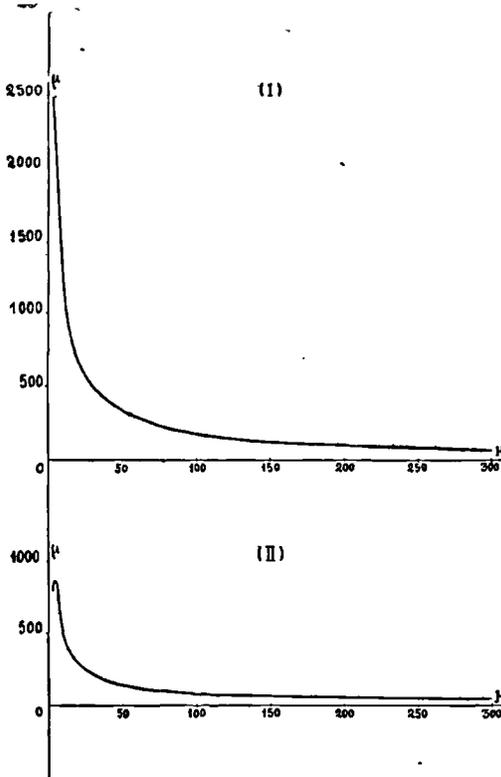


FIG. 159.

les substances magnétiques usuelles, la perméabilité va en diminuant à mesure que  $H$  augmente. En d'autres termes, à mesure que  $H$  augmente, il y a de moins en moins de différence entre  $\mathcal{B}$  et  $H$ , et, par suite, l'avantage de la substitution d'un noyau magnétique à un noyau d'air dans un solénoïde est de moins en moins prononcé.

si l'échelle des ordonnées était la même que celle des abscisses. Mais si les échelles sont différentes, il faut, pour avoir la valeur de  $\mu$  relative à une valeur de  $H$  donnée, multiplier le coefficient angulaire du rayon vecteur du point correspondant par le rapport de l'échelle des abscisses à celle des ordonnées.

Les deux courbes de la fig. 159 représentent les résultats ainsi trouvés en partant des données fournies par celles de la fig. 158.

On voit que, pour

C. Etude de  $\mu$  en fonction de  $\mathcal{B}$ .

En relevant sur les courbes donnant  $\mu$  et  $\mathcal{B}$  en fonction de  $H$  les valeurs correspondant à une même abscisse, on obtient les valeurs de  $\mu$  et de  $\mathcal{B}$  relatives à un même état magnétique de la substance considérée. On peut ainsi obtenir la courbe représentative de  $\mu$  en fonction de  $\mathcal{B}$  dont nous verrons prochainement la grande utilité. Les courbes (I) et (II) de la fig. 160 proviennent ainsi des données fournies par les courbes des fig. 158 et 159, pour le fer doux et la fonte grise. On voit qu'à partir d'une certaine valeur de l'induction la perméabilité, pour des valeurs croissantes de l'induction, diminue, et qu'à induction égale la perméabilité est beaucoup moindre pour la fonte que pour le fer.

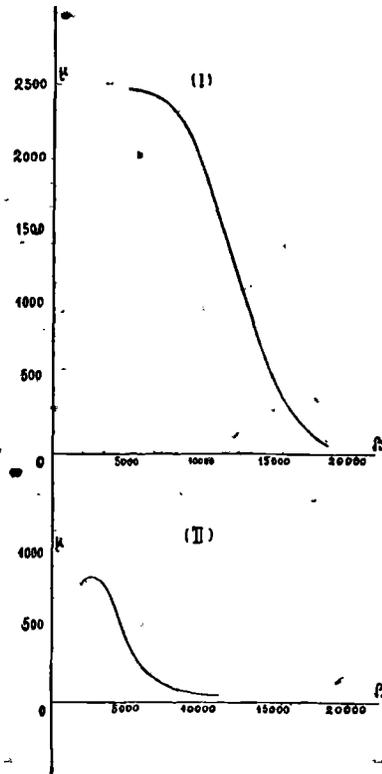


FIG. 160.

## II

## Hystérésis.

Considérons un échantillon de fer dans lequel toute trace d'aimantation a disparu par l'effet d'un échauffement à une température suffisamment élevée (800° environ). Quand il est revenu à la température ordinaire, un tel échantillon peut être considéré comme absolument *vierge* au point de vue magnétique. Si on le soumet à des actions magnétisantes graduellement croissantes à partir de zéro, on trouve que les valeurs correspondantes de son induction magnétique sont

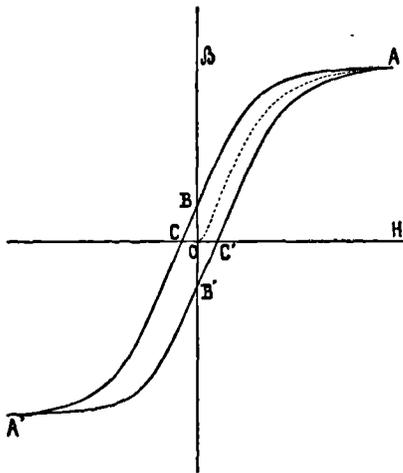


FIG. 161.

graduellement croissantes, elles aussi, à partir de zéro, et représentées graphiquement par une courbe telle que  $OA$  (fig. 161), issue de l'origine des coordonnées, d'abord à peu près rectiligne, puis rapidement ascendante, ensuite s'élevant de moins en moins et enfin tendant à devenir parallèle à l'axe des abscisses. Soit  $A$

le point représentatif de l'induction ( $\beta_m$ ) obtenue pour la valeur maxima  $H_m$  donnée au champ magnétisant.

Imaginons qu'ensuite on fasse décroître ce dernier progressivement depuis cette valeur  $H_m$  jusqu'à zéro. On observe alors ce fait très remarquable, découvert par Ewing, que les valeurs de  $\mathcal{B}$  relatives à ces aimantations décroissantes ne sont pas les mêmes que celles trouvées précédemment dans le cours des aimantations croissantes. Pour une valeur donnée de  $H$ , l'induction trouvée en redescendant est *supérieure* à celle qui avait été trouvée en montant. En particulier, pour  $H = 0$  on a, non pas comme la première fois  $\mathcal{B} = 0$ , mais  $\mathcal{B} = \mathbf{oB}$ . La série *décroissante* des valeurs de  $\mathcal{B}$  est, en un mot, représentée par une courbe telle que  $\mathbf{AB}$  située constamment *au-dessus* de  $\mathbf{oA}$ .

Il suit de là qu'*au retour* une valeur de  $\mathcal{B}$  se trouve pour une valeur de  $H$  inférieure à celle qui l'avait donnée la première fois. En d'autres termes,  $\mathcal{B}$  diminue moins vite que ne l'eût exigé la première courbe, ou, si l'on veut, l'induction semble être en arrière sur le champ magnétisant. Aussi Ewing a-t-il donné à ce fait le nom d'**hystérésis** (d'un mot grec qui signifie *retard*). Il ne s'agit pas là, d'ailleurs, d'un retard dans le temps. On aurait beau attendre indéfiniment avec une valeur donnée de  $H$ , on ne verrait pas  $\mathcal{B}$  revenir à la même valeur que dans la période ascendante. Il faut donc prendre le mot hystérésis dans le sens de *désaccord*, abstraction faite de toute idée de temps.



Lorsqu'un échantillon de fer est dans l'état représenté par le point  $\mathbf{B}$ , il présente une certaine aimanta-

tion, bien que soustraît alors à toute action magnétisante ( $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ ). On désigne cette aimantation sous le nom d'**aimantation résiduelle** ou **rémanente**.

Cette aimantation rémanente, toutes choses égales d'ailleurs, est considérablement plus grande pour l'acier trempé que pour le fer doux. Aussi l'acier convient-il tout particulièrement à la confection des *aimants permanents*.

Cette aimantation rémanente demeurerait constante si l'état physique du métal auquel elle a été communiquée demeurerait absolument invariable. En pratique, il n'en est jamais ainsi. Les variations continues du champ terrestre et de la température ambiante, les trépidations, les chocs, etc., déterminent un affaiblissement progressif de l'aimant. A ce point de vue, des différences assez notables s'observent entre les divers aciers, suivant leur teneur en carbone. D'après les recherches de M<sup>me</sup> Curie, la meilleure proportion de carbone serait 1,2 p. 100. Certains métaux étrangers, tels que le chrome, le tungstène et le molybdène communiquent aux aimants d'acier des qualités de constance remarquables, qui sont mises à profit pour la construction de tous les appareils comportant des aimants dont l'action doit rester pratiquement invariable.



Un échantillon de fer ayant été amené de l'état **A** à l'état **B** (*fig. 161*), imaginons qu'on le soumette à des actions magnétisantes graduellement croissantes à partir de zéro, mais dirigées en sens inverse des pré-

céder (et représentées en conséquence sur la fig. 161 par des abscisses négatives). On observe alors que l'induction diminue à partir de la valeur  $\mathbf{oB}$  et que, pour une certaine valeur  $\mathbf{oC}$  de l'action magnétisante, elle s'annule. Cette valeur  $\mathbf{oC}$  de  $\mathbf{H}$  caractérise ce qu'on appelle la **force coercitive** de l'échantillon considéré.

Si  $\mathbf{H}$  continue à croître à partir de cette valeur, l'aimantation présente des valeurs croissantes mais dirigées en sens inverse des précédentes (par suite représentées sur la fig. 161 par des ordonnées négatives). Si le champ atteint une valeur  $-\mathbf{H}_m$  égale et contraire à la valeur maxima  $\mathbf{H}_m$  qui avait amené l'échantillon à l'état  $\mathbf{A}$ , l'induction prend une valeur  $-\mathcal{B}_m$  égale et contraire à  $\mathcal{B}_m$  et représentée en conséquence par le point  $\mathbf{A}'$  symétrique de  $\mathbf{A}$  relativement à l'origine.

Concevons alors qu'on fasse repasser le champ magnétisant par toutes les valeurs comprises entre  $-\mathbf{H}_m$  et  $+\mathbf{H}_m$ ; l'expérience montre que l'échantillon présente une série de valeurs de  $\mathcal{B}$  représentées par les ordonnées d'une courbe  $\mathbf{A'B'CA}$  *symétrique* de  $\mathbf{ABCA}'$  par rapport à l'origine.

Une fois l'échantillon ramené à l'état  $\mathbf{A}$ , si l'on donne de nouveau à  $\mathbf{H}$  successivement les valeurs comprises entre  $+\mathbf{H}_m$  et  $-\mathbf{H}_m$ , on retrouve les valeurs de  $\mathcal{B}$  représentées par la courbe  $\mathbf{ABCA}'$  et si l'on fait ensuite revenir  $\mathbf{H}$  de  $-\mathbf{H}_m$  à  $+\mathbf{H}_m$ , on obtient les valeurs de  $\mathcal{B}$  représentées par  $\mathbf{A'B'CA}$ . Bref, si l'on fait osciller l'action magnétisante entre  $+\mathbf{H}_m$  et  $-\mathbf{H}_m$  et inversement, l'échantillon présente une série d'états

magnétiques formant ce qu'on appelle un **cycle d'aimantation**. Les valeurs de  $\beta$  réalisées dans ce cycle sont représentées par la boucle  $ABCA'B'CA$ , dont la partie  $ABCA'$  est relative aux champs magnétisants *décroissants* (les champs étant envisagés comme des grandeurs *algébriques*); et la partie  $A'B'CA$  aux champs magnétisants *croissants*.

Il est facile de concevoir des circonstances où une masse de métal magnétique est exposée à parcourir des cycles d'aimantation.

Tel est le cas, par exemple, d'une masse magnétique  $M$  assujettie à tourner autour d'un axe dans un champ magnétique  $NS$  bi-polaire, perpendiculaire à cet axe (*fig. 162*). Chaque élément de cette masse, tel que  $pq$  est soumis à une action magnétisante maxima de direction  $pq$  quand il est en face de  $N$ ; puis à une action égale et contraire (direction  $qp$ ) quand il est en face de  $S$ , puis de nouveau à la première action quand il repasse en  $N$ , et ainsi de suite. L'aimantation de chaque élément, dans ces conditions, est *périodique* et par conséquent *cyclique*, la durée d'une période ou d'un cycle étant ici la durée même d'un tour.

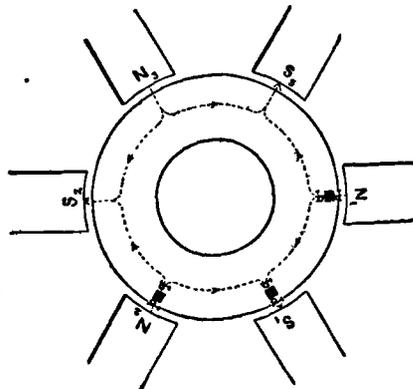


FIG. 163.

Plus généralement, si le champ était multipolaire (*fig. 163*) il y aurait par tour autant de cycles d'aimantation que de périodes dans le champ, c'est-à-dire

un nombre égal à celui des *paires* de pôles magnétiques (trois, dans le cas de la figure).

Une masse de métal magnétique est soumise encore à des cycles d'aimantation lorsqu'elle subit l'action magnétisante d'un courant périodiquement inversé. Si cette masse est immobile, ainsi que les conducteurs qui sont le siège du courant variable agissant sur elle, l'action magnétisante que subit chacun de ses éléments n'éprouve, en fait de changement de direction, que des inversions suivant une ligne fixe, tandis que dans une masse animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe dans un champ magnétique, l'action magnétisante prend, pour chaque élément, une série d'orientations différentes autour de son point moyen. L'aimantation est dite alors *tournante*, tandis que, dans l'autre cas, elle est simplement *alternative*.



On peut faire parcourir à une masse de métal magnétique un cycle d'aimantation à partir d'un état quelconque et sans que les valeurs extrêmes du champ magnétisant soient égales et contraires. Si l'on fait osciller la valeur du champ un nombre suffisant de fois entre deux valeurs quelconques  $H_1$  et  $H_2$ , le point figuratif des valeurs de  $\mathcal{B}$  finit par décrire une boucle (fig. 164) caractérisant, pour le corps considéré, un cycle d'aimantation. A chaque couple de valeurs de  $H_1$  et de  $H_2$  correspond un cycle particulier. Les valeurs  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de

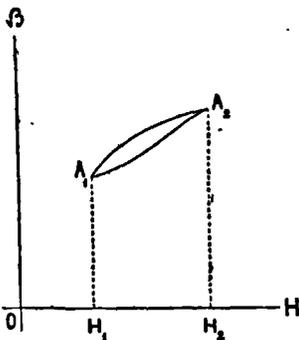


FIG. 164.

$\mathcal{B}$  représentées par les points  $A_1$ ,  $A_2$  de la boucle ayant pour abscisses  $H_1$  et  $H_2$  constituent ce qu'on appelle les *valeurs extrêmes de l'induction* dans le cycle considéré.

Lorsque  $H_1$  et  $H_2$  (valeurs extrêmes de  $H$ ) sont égales et contraires, les valeurs correspondantes de  $\beta$  sont aussi égales et contraires. Chacune d'elle est égale, en valeur absolue, au maximum  $\beta_{\max}$  obtenu pour  $\beta$  dans le cours du cycle.



Considérons, dans un champ magnétique, une ligne de force  $KL$  (*fig. 165*) le long de laquelle l'intensité  $H$  du champ aille en



FIG. 165.

augmentant dans le sens de  $K$  à  $L$ . Soient  $H_1$  et  $H_2$  les valeurs de  $H$  respectivement en  $K$  et en  $L$ . Si un élément  $pq$  de substance magnétique est déplacé de façon que son point moyen aille alternativement de  $K$  en  $L$  et de  $L$  en  $K$ , il sera soumis à une action magnétisante périodique et subira un cycle d'aimantation tel que celui représenté par la figure 164.

Pour déplacer l'élément dans le sens de  $L$  à  $K$ , il faut lutter contre la tendance qu'il a à se porter de lui-même en sens contraire. Dans la partie du cycle correspondant aux valeurs décroissantes de  $H$ , l'élément *consomme* donc du travail puisqu'il oppose alors à l'agent extérieur une action *résistante*. Au contraire, dans la partie du cycle correspondant aux valeurs croissantes de  $H$  l'élément soumis à l'action du champ *produit* du travail puisqu'il se déplace alors dans le sens de l'action magnétique qui le sollicite. Si, pour chaque position de l'élément, l'action magnétique qui le sollicite était la même au retour qu'à l'aller, le tra-

vail produit à l'aller, c'est-à-dire dans la partie du cycle où  $H$  va en croissant, serait juste égal au travail consommé au retour, c'est-à-dire dans la partie du cycle où  $H$  va en décroissant, absolument comme le travail produit par la chute d'une pierre est juste égal au travail dépensé pour l'élever à la hauteur d'où elle est tombée. Or, si l'élément magnétique considéré est affecté d'hystérésis, cette réciprocité d'action n'a pas lieu. Ainsi que nous l'avons vu, l'induction pendant la phase décroissante de  $H$  est plus grande qu'aux points correspondants de la phase croissante. Il suit de là que le travail résistant de l'élément considéré (pendant le parcours  $LK$ ) est supérieur au travail moteur (correspondant au parcours  $KL$ ). Après l'accomplissement d'un cycle, par conséquent, il y a, en définitive, une dépense de travail, faite par l'agent extérieur. *Si donc on impose à un élément magnétique affecté d'hystérésis un cycle d'aimantation, ce ne peut être qu'au prix d'une dépense d'énergie.*

L'expérience montre, en effet, qu'une masse magnétique douée d'hystérésis, pour être mise en mouvement dans un champ magnétique de façon à parcourir des cycles d'aimantation, nécessite une dépense de travail, l'agent moteur éprouvant, toutes choses égales d'ailleurs, plus de résistance à produire le mouvement quand le champ est excité que quand il ne l'est pas. Dans ces conditions, on observe que cette masse s'échauffe. La chaleur qu'elle dégage est la forme sous laquelle se retrouve l'énergie dépensée.

Nous verrons ultérieurement que les cycles d'aiman-

tation dus aux courants variables donnent lieu aux mêmes effets que ceux qui résultent de déplacements relatifs des masses aimantées et des champs magnétiques.

On peut donc dire, en toute généralité, que *toutes les fois que, pour une raison quelconque, une pièce magnétique douée d'hystérésis est amenée à parcourir des cycles d'aimantation, elle donne lieu à une dissipation d'énergie se révélant par un dégagement de chaleur au sein même de sa masse.*



### III

#### Hystérésimètres.

L'étude de l'énergie dissipée, pour cause d'hystérésis, par un échantillon donné de substance magnétique, peut se faire très simplement en donnant à cet échantillon un mouvement de rotation uniforme dans un champ magnétique et déterminant le couple moteur  $C$  mis en jeu à cet effet. Si  $\omega$  est la vitesse angulaire, l'énergie dépensée par seconde est  $C\omega$ . D'ailleurs, si  $F$  est la fréquence des cycles, c'est-à-dire leur nombre par seconde, et si  $\mathcal{E}_1$  est l'énergie dissipée par cycle, l'énergie dissipée par seconde sera  $F\mathcal{E}_1$ ; d'où, en égalant cette expression à celle de l'énergie dépensée dans le même temps :

$$F\mathcal{E}_1 = C\omega$$

et, par suite, en remarquant que  $\omega = 2\pi F$ ,

$$\mathcal{E}_1 = 2\pi C$$

On trouve aisément le couple  $C$  en remarquant qu'il est égal à celui que l'échantillon tournant exerce par réaction sur le système magnétique (aimant ou électro-aimant) agissant sur lui. Que ce système soit rendu libre d'osciller autour d'un axe parallèle à celui du mouvement de l'échantillon étudié, et la mesure du couple cherché sera ramenée à celle du couple antagoniste qu'un contre-poids devra exercer pour empêcher toute déviation du système magnétique. On pourrait tout aussi bien, inversement, faire tourner ce dernier et observer la déviation qui en résulterait pour l'échantillon soumis à son action.

Les appareils imaginés pour la mise en pratique de cette méthode sont désignés sous le nom d'**hystérésimètres**.

La fig. 166 représente l'hystérésimètre d'Ewing, dans lequel le système magnétique producteur du champ magnétisant est un aimant en forme de  $C$  pouvant osciller comme un fléau de balance autour de l'arête d'un couteau de suspension  $cc$ . L'échantillon à essayer (paquet de tôles de fer  $tt$  en forme de parallépipède rectangulaire) est disposé entre les branches de l'aimant et animé au moyen d'un système de roues à friction et

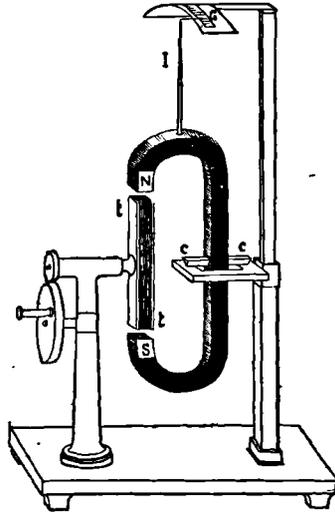


FIG. 166.

d'une manivelle d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à la ligne des pôles NS. Le couple de réaction du paquet de tôles sur l'aimant détermine une déviation de ce dernier et est équilibré par un couple antagoniste dû à la pesanteur. Un tarage préalable le fait connaître, d'après l'angle d'écart que mesure le déplacement d'un index I sur une échelle graduée G.

L'aimantation périodique qu'éprouve le paquet de tôles mis en jeu dans cet appareil est très sensiblement *alternative* et dans le sens de la longueur de l'échantillon. C'est donc, pratiquement, l'effet d'hystérésis correspondant à ce mode d'aimantation que mesure l'appareil d'Ewing.

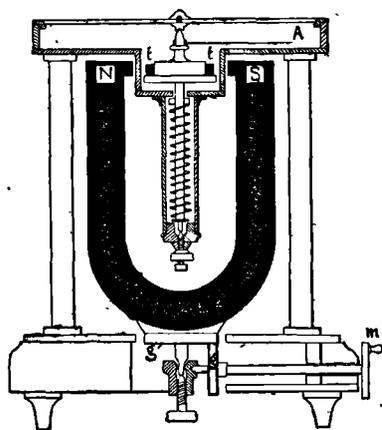


FIG. 167.

Dans l'hystérésimètre de Blondel Carpentier représenté fig. 167, l'échantillon à étudier a la forme d'un tore circulaire plat de faible largeur  $tt$  et il est porté par un support horizontal pouvant osciller autour d'un pivot vertical et sollicité par un ressort en hélice. Ici, c'est l'aimant qui est animé d'un mouvement de rotation à l'aide des galets  $gg'$  commandés par la manivelle M. Le couple à mesurer est équilibré sur l'échantillon par une

action antagoniste du ressort qui se déduit de la déviation du support marquée par une aiguille A sur un cadran. Pour plus de précision, on prend la demi-somme des déviations  $\alpha$  et  $\alpha'$  observées en faisant tourner l'aimant dans les deux sens. Si  $\theta$  est le coefficient de torsion du ressort pour l'unité d'angle, on a pour l'expression du couple cherché

$$C = \theta \frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

En employant, dans l'un ou l'autre des deux appareils précédents, au lieu d'un aimant, un électro-aimant, on peut faire varier à volonté les limites du cycle d'aimantation et par conséquent les valeurs extrêmes de l'induction magnétique.

Dans l'hystérésimètre Blondel-Carpentier, l'aimantation va-

riable de l'échantillon n'est pas alternative mais *tournante*. Cet appareil est donc propre à l'étude des effets d'hystérésis qu'éprouvent les substances magnétiques soumises à des aimantations de ce genre, comme il s'en présente dans les appareils comprenant des armatures ou des champs magnétiques animés de mouvements de rotation.



Dans tous les appareils électriques autres que ceux où le résultat cherché est un dégagement de chaleur, l'énergie mise en jeu par effet d'hystérésis est dépensée en pure perte. On doit donc, si faire se peut, chercher à la rendre aussi minime que possible, et c'est à quoi l'on peut arriver par un choix convenable des matériaux magnétiques employés. Toutes choses égales d'ailleurs, il existe, en effet, entre les diverses qualités de fer ou d'acier de très grandes différences au point de vue de la valeur numérique des effets d'hystérésis. Le constructeur a donc le plus grand intérêt à faire, entre ces diverses variétés de matières premières, un choix judicieux basé sur des essais préalables.

La composition chimique des échantillons à examiner, non plus que leurs qualités mécaniques où leur perméabilité magnétique, ne peuvent donner, au point de vue de l'hystérésis, aucune indication utile.

On a vu souvent des appareils construits avec des matériaux excellents au point de vue de la perméabilité magnétique, se montrer, à l'usage, tout à fait défectueux et devoir être mis en réforme, par suite d'une valeur exagérée de la perte d'énergie due à leur hystérésis.

Seuls des essais effectués à l'hystérésimètre peuvent

déterminer la préférence à accorder à tel ou tel échantillon. Aussi cet appareil est-il maintenant d'un usage courant dans les ateliers de construction d'appareils électriques dont le fonctionnement implique des effets d'hystérésis.



Pour estimer à l'avance la dissipation-d'énergie dont une pièce magnétique d'un appareil sera le siège pendant un temps donné, il faut évidemment connaître le nombre de cycles magnétiques qu'elle parcourra pendant ce temps et l'énergie dépensée pour chacun d'eux. Quant à cette dernière, elle sera naturellement proportionnelle au volume (ou au poids) de la pièce considérée si elle est homogène et si tous ses éléments sont traités magnétiquement de la même façon. Dans les problèmes de ce genre qui se présentent aux ingénieurs chargés de l'établissement des projets de construction d'appareils électriques, il importe donc, comme base du calcul, de connaître l'énergie dissipée *par cycle* et *par centimètre cube*, ou *par cycle* et *par kilogramme*.

D'après les expériences de Steinmetz, confirmées par de nombreux observateurs, cette énergie unitaire (relative à un cycle et à un centimètre cube) dépend uniquement des valeurs extrêmes de l'induction  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  réalisées dans le cycle et de la nature de la substance, suivant la formule :

$$\epsilon_1 = \eta \left( \frac{\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2}{2} \right)^{1,6}$$

$\eta$  étant un coefficient caractéristique de la substance

considérée et désigné pour ce motif sous le nom de **coefficient d'hystérésis (1)**.

Lorsque, ce qui arrive très souvent, l'aimantation est *alternative* et *symétrique*, l'induction  $\mathcal{B}_2$  est égale à  $\mathcal{B}_1$  en valeur absolue et de signe contraire; par suite,  $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2 = 2\mathcal{B}_{\max}$  et la formule devient tout simplement

$$\varepsilon_1 = \eta(\mathcal{B}_{\max})^{1,6}$$

Si l'on prend les logarithmes des deux membres, on obtient entre les logarithmes des quantités  $\varepsilon_1$  et  $\mathcal{B}_{\max}$  la relation

$$\log \varepsilon_1 = \log \eta + 1,6 \log \mathcal{B}_{\max}$$

qui, si l'on porte en abscises  $\log \mathcal{B}_{\max}$  et en ordonnées  $\log \varepsilon_1$ , est représentée graphiquement par une simple ligne droite (d'ordonnée à l'origine  $\log \eta$  et de coefficient angulaire 1,6). En passant d'une substance à une autre, on obtient une droite parallèle à la première et n'en différant que par l'ordonnée à l'origine qui est le  $\log$ . du nouveau coefficient d'hystérésis.

En définitive, l'énergie  $\mathcal{E}_1$  dissipée en 1 seconde pour cause d'hystérésis dans une pièce magnétique de volume  $U$  soumise à une aimantation variable de fréquence  $F$  sera donnée par l'expression :

$$\mathcal{E} = \eta \left( \frac{\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2}{2} \right)^{1,6} UF$$

ou, si l'aimantation est alternative et symétrique :

$$\mathcal{E} = \eta(\mathcal{B}_{\max})^{1,6} UF$$



Les quantités  $\mathcal{B}_{\max}$ ,  $U$ ,  $F$  sont des données du projet. Seul, le coefficient  $\eta$ , caractéristique de la matière à employer, doit être demandé à l'expérience.

---

1. On le désigne aussi quelquefois sous le nom de **Coefficient de Steinmetz**.

On détermine ce coefficient, pour un échantillon donné, en comparant, à l'aide d'un hystérésimètre, l'effet de cet échantillon à celui d'un échantillon étalon pour lequel le coefficient d'hystérésis est connu :  $\eta_0$ . On a, une part, pour l'échantillon à étudier :

$$C = \frac{1}{2\pi F} \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \eta (\mathcal{B}_{\max})^{1,6} U$$

et, d'autre part, pour l'échantillon étalon :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi F_0} \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2\pi} \eta_0 (\mathcal{B}_{\max})^{1,6} U$$

d'où, en divisant :

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{C}{C_0}$$

et enfin

$$\eta = \eta_0 \frac{C}{C_0}$$

Voici, à titre d'exemple, les valeurs numériques du coefficient  $\eta$  déduites des expériences de Steinmetz pour différentes substances, en prenant pour unité d'induction le *gauss*, pour unité de volume le *centimètre cube* et pour unité d'énergie le *joule* :

SUBSTANCES	$\eta$ (1)
Fer doux .....	0,002 $\times 10^{-7}$
Tôle de fer ordinaire.....	0,003 —
Acier doux fondu recuit.....	0,005 —
Acier fondu.....	0,012 —
Fonte.....	0,016 —
Acier trempé .....	0,025 —
Acier au manganèse trempé..	0,082 —

1. En omettant le facteur  $10^{-7}$  on obtient dans les calculs l'expression de l'énergie en *ergs*. Il faut donc, si on la désire en joules, prendre un nombre  $10^7$  fois plus faible, car le joule vaut  $10^7$  ergs.

Comme exemple d'application, soit à calculer l'énergie dissipée par seconde dans un centimètre cube de fer doux soumis à une aimantation alternative de fréquence 50 faisant osciller  $\mathcal{B}$  de + 10000 à - 10000 gauss. On aura

$$\varepsilon_1 = 0,002 \times 10^{-7} \times (10.000)^{1,6} \times 1 \times 50 = 0,04365 \text{ joule}$$

Soit, pour une pièce de 10 décimètres cubes ou 10000 centimètres cubes :  $\varepsilon = 436,5$  joules. Pour l'acier fondu du tableau précédent, on aurait, dans les mêmes conditions, un nombre 6 fois plus grand : 2619 joules. On voit quelles grandes différences d'énergie perdue peuvent provenir d'un mauvais choix de matière.

Il est commode, dans les calculs pratiques, de faire usage de la perte par kilogramme. On l'obtient en comptant 128 centimètres cubes pour un kilogramme. Le poids spécifique du fer étant, en effet, en moyenne, 7,8, on a  $U = \frac{1000}{7,8} = 128$ . Dans un 1 kil. du fer considéré tout à l'heure, la perte par seconde serait donc :  $0,04365 \times 128 = 5,59$  joules.



Lorsqu'une matière magnétique devra servir à constituer des noyaux d'inducteurs appelés à fournir des flux magnétiques *fixes*, on devra la choisir de grande *perméabilité*, sans se préoccuper de son hystérésis et on pourra prendre comme relation entre  $\mathcal{B}$  et  $\mathbf{H}$  pour cette substance celle définie par la courbe des *moyennes* des valeurs de  $\mathcal{B}$  trouvées pour des valeurs de  $\mathbf{H}$  croissantes et pour des valeurs décroissantes.

Pour constituer, au contraire, les parties d'appareils sujettes à des aimantations variables, on s'attachera surtout à choisir des matériaux pour lesquels le coefficient  $\eta$  sera aussi minime que possible.

On trouve maintenant couramment dans le commerce des tôles en acier Martin pour lesquelles  $\eta$  est notablement inférieur à  $0,002 \times 10^{-7}$ .



## VINGT-SIXIÈME LEÇON



# INDUCTION MAGNÉTIQUE

\*\*\*

### CIRCUITS MAGNÉTIQUES FORMULES D'HOPKINSON APPLICATIONS A DIVERS PERMÉAMÈTRES



#### I

#### Notion de circuit magnétique.

Considérons un solénoïde en forme de tore circulaire à noyau de fer. Il se comporte exactement, à l'intensité près, comme un solénoïde de même forme et de mêmes dimensions à noyau d'air. La seule différence est que l'intérieur de ce dernier est accessible à nos investigations tandis que le premier ne l'est pas. Mais, en raison de l'identité qualitative des effets des deux appareils, toute notion applicable à l'un peut légitimement être étendue à l'autre. C'est ainsi que les notions de champ magnétique, de lignes de force, de tubes de force, peuvent, d'une façon plausible, être transportées du noyau d'air au noyau de fer.

Nous concevons donc un milieu magnétique soumis à une action magnétisante, comme un champ magnétique dans lequel pourront être imaginés des lignes et des tubes de force tels que ceux que saisit l'expérience dans les champs magnétiques créés dans l'air.

Dans le cas d'un solénoïde à noyau de fer, l'un des tubes de force est d'ailleurs accessible à l'expérience, c'est celui qui est délimité par la surface même du noyau. Le flux de force correspondant est celui que l'on peut déduire expérimentalement de la décharge induite provoquée, dans une bobine d'épreuve entourant le noyau, par la suppression ou le renversement de l'action magnétisante.



Soit, maintenant, dans un solénoïde en forme de tore, un noyau de fer qui, au lieu d'être complet présente une coupure (*fig. 168, I*). Si cette coupure est formée par de l'air, elle présente des lignes de force qu'on doit, suivant la manière de voir assimilant entre eux tous les milieux magnétiques, regarder comme la suite de lignes de force appartenant à la portion du noyau formée de fer.

Plus généralement, si le noyau d'un solénoïde en forme de tore est composé de divers tronçons de natures différentes  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , tels que fer, fonte, air, etc. (*fig. 168, II*), il doit être regardé comme un tube de

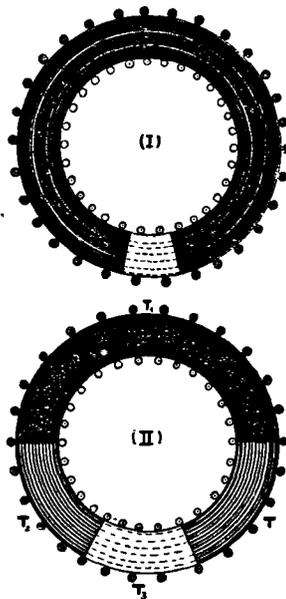


FIG. 168.

force fermé sur lui-même dont les lignes de force traversent successivement différents milieux magnétiques.



Non seulement dans le cas particulier que nous venons d'examiner, mais dans tous les cas possibles, on doit considérer une ligne de force comme se fermant sur elle-même, soit à travers un même milieu, soit à travers plusieurs milieux différents.

Ainsi les lignes de force du champ aérien d'un aimant droit

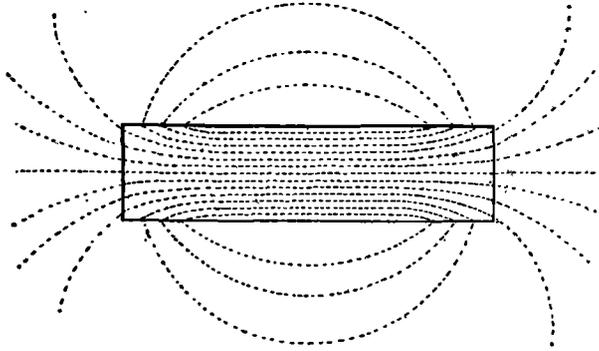


FIG. 169.

doivent être conçues comme se fermant sur elles-mêmes à l'intérieur de l'aimant (fig. 169). Les lignes de force du système formé par un aimant en fer à cheval et son armature (fig. 170) doivent être conçues comme des lignes fermées situées les unes partie dans l'aimant partie dans l'air, et les autres partie dans l'aimant, partie dans l'armature.

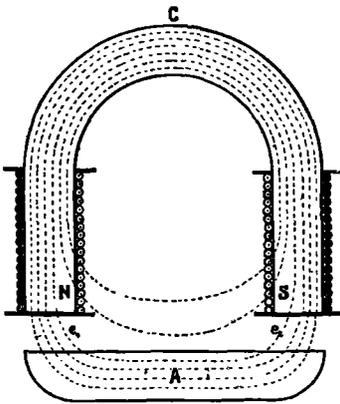


FIG. 170.



Tout tube de force *complet* et, par conséquent,

d'après ce qui précède, fermé sur lui-même, constitue ce qu'on appelle, en général, un **circuit magnétique**.

Le flux d'induction correspondant est ce qu'on appelle le flux magnétique *propagé* par ce circuit. Sa valeur est la même à travers toutes les sections du circuit.

Un circuit magnétique de section infiniment petite constitue ce qu'on appelle un **circuit filiforme**. Le quotient de son flux  $d\Phi$ , par l'étendue d'une section droite  $ds$ , est la valeur  $\mathcal{B}$  de l'induction magnétique au point moyen de cette section :

$$\mathcal{B} = \frac{d\Phi}{ds}$$

La longueur d'un tronçon de circuit magnétique filiforme est la longueur de la portion de ligne de force moyenne comprise entre les sections origine et extrémité de ce tronçon.



Tout tube de force  $T$  pouvant être décomposé en tubes  $t'$ ,  $t''$  de sections moindres correspondant aux subdivisions d'une section du premier (*fig. 171*), tout circuit magnétique pourra de même être conçu comme un faisceau de circuits magnétiques divisionnaires.

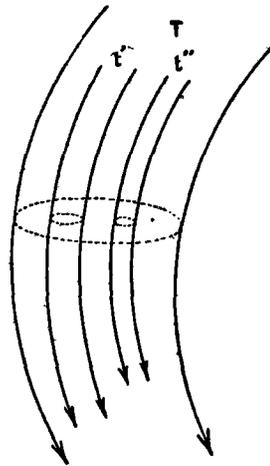


FIG. 171.



## II

**Formules d'Hopkinson.**

Considérons le circuit magnétique simple et uniforme constitué par le noyau d'un solénoïde en forme de tore circulaire, d'épaisseur faible relativement à son diamètre, présentant  $n$  spires magnétisantes régulièrement espacées sur toute la longueur  $l$  de la ligne moyenne. Pour une valeur  $I$  de l'intensité du courant, le champ moyen dans une section est  $H = \frac{4}{10} \pi \frac{n}{l} I$  et l'induction moyenne :

$$\mathcal{B} = \mu \frac{4}{10} \pi \frac{n}{l} I,$$

par suite, le flux ( $\mathcal{B}S$ ) propagé par le circuit a pour valeur :

$$\Phi = \mu \frac{4}{10} \pi \frac{n}{l} IS.$$

En écrivant cette relation sous forme de fraction ayant pour numérateur le produit des ampèretours magnétisants par le facteur numérique  $\frac{4}{10} \pi$  :

$$\Phi = \frac{\frac{4}{10} \pi n I}{\frac{l}{\mu S}}$$

on peut faire la remarque que le dénominateur est une

expression de même forme que celle qui représenterait la résistance électrique  $R$  du noyau considéré, en fonction de sa longueur  $l$ , de la section  $S$  et de sa conductibilité électrique  $c = \frac{1}{\rho}$ . En effet, on a :

$$R = \frac{l}{cS}$$

En raison de cette analogie d'expressions, on appelle **réductance magnétique** et on représente par le symbole  $\mathcal{R}$  la quantité

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

Si, en outre, on appelle **force magnétomotrice** agissant sur le circuit considéré la quantité :

$$\mathcal{F} = \frac{4}{10} \pi nI$$

l'expression du flux prend la forme simple

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$$

tout à fait analogue à la formule d'Ohm :

$$I = \frac{E}{R}$$

donnant l'intensité  $I$  du flux électrique dans un circuit en fonction de la force électromotrice  $E$  appliquée à ce circuit et de la résistance électrique  $R$  :



Quand  $l$  et  $S$  sont exprimées respectivement en centimètres et en centimètres carrés, et que les perméabilités sont rapportées à celle du vide (ou pratique-

ment de l'air) prise comme unité, l'unité à l'aide de laquelle les réluctances sont exprimées par la formule :

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$$

a reçu le nom d'**œrstedt** (1).

L'unité à laquelle les forces magnétomotrices sont rapportées quand on les calcule par l'expression :

$$\mathcal{F} = \frac{4}{10} \pi nI$$

dans laquelle **n** est le nombre des spires magnétisantes et **I** l'intensité du courant en ampères a reçu le nom de **gilbert** (2).

La force magnétomotrice correspondant à l'action d'un ampère-tour ( $nI = 1$ ) est égale à  $\frac{4}{10} \pi$ . On a donc :

$$1 \text{ ampère-tour} = \frac{4}{10} \pi \text{ gilberts}$$

Par conséquent

$$1 \text{ gilbert} = \frac{10}{4\pi} \text{ ampère-tour}$$

Le quotient  $\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$  ou  $\frac{\frac{4}{10} \pi nI}{\frac{l}{\mu S}}$  d'une force magnéto-

trix en *gilberts* par une réluctance en *œrstedts* donne le flux correspondant en *maxwells*.

On peut donc dire que le *gilbert* est la force magnétomotrice

1. En mémoire d'œrstedt, physicien danois (1774-1851), auquel est due la découverte de l'action magnétique des courants.

2. En mémoire de Gilbert, physicien anglais (1540-1603), auquel sont dues les premières observations systématiques sur le magnétisme.

qui doit agir sur un circuit magnétique de réluctance égale à un *ærstedt* pour donner lieu à un flux d'un *maxwell*.



Au lieu d'une réluctance, il est quelquefois commode de considérer son *inverse* qu'on nomme **perméance**. La *perméance* est à la *réluctance* ce que la *conductance* est à la *résistance*. La *perméance* se calcule avec la *perméabilité* ( $\mu$ ), comme la *conductance* avec la *conductibilité* ( $c$ ) ; et la *réluctance* avec la *réductivité*  $\left(\frac{1}{\mu}\right)$  comme la *résistance* avec la *résistivité*  $\left(\frac{1}{c}\right)$ .



L'analogie (de pure forme) entre l'expression du flux dans un circuit magnétique simple et celle de l'intensité du courant dans un circuit électrique, découverte par Rowland (1), est devenue d'une application courante, surtout à la suite d'importants travaux d'Hopkinson (2). Aussi donne-t-on le nom de *formule d'Hopkinson* à l'expression :

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$$

L'intérêt de cette formule tient à la possibilité de son extension aux circuits magnétiques filiformes quelconques, et aux facilités qu'elle offre, ainsi généralisée, pour les calculs d'établissement des systèmes producteurs de flux magnétiques.

Soit (*fig. 172*) un circuit magnétique filiforme propageant un flux  $\varphi$ . On peut le concevoir décomposé en tronçons de longueurs assez petites pour que, dans cha-

1. Physicien américain (1848-1901).

2. Célèbre ingénieur électricien anglais (1849-1898).

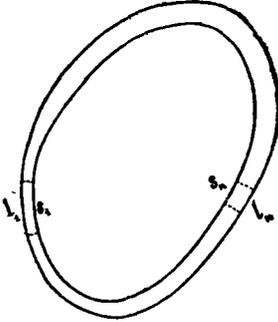


FIG. 172.

cun d'eux, la section puisse être considérée comme uniforme. Soit  $\mu_1$  la perméabilité correspondant à la valeur  $\mathcal{B}_1 = \frac{\Phi}{s_1}$  de l'induction dans un de ces tronçons, de longueur  $l_1$ . La formule de la réluctance appliquée à ce tronçon donne

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 s_1}$$

De même pour un deuxième tronçon de section  $s_2$  et de longueur  $l_2$ , on aurait :

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_2 s_2}$$

et ainsi de suite. On appelle **réluctance du circuit** la *somme* de toutes les expressions analogues relatives à ses divers tronçons :

$$\mathcal{R} = \frac{l_1}{\mu_1 s_1} + \frac{l_2}{\mu_2 s_2} + \frac{l_3}{\mu_3 s_3} + \dots + \frac{l_n}{\mu_n s_n}$$

Entre cette quantité, la force magnétomotrice  $\mathcal{F} = \frac{4}{10} \pi n \mathbf{I}$  correspondant aux ampère-tours  $n \mathbf{I}$  agissant sur le circuit et le flux  $\Phi$  propagé par ce dernier existe la relation :

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$$

Il y a là une généralisation du même ordre que celle de la formule d'Ohm étendue à un circuit filiforme quelconque.



Lorsqu'un tronçon de circuit est constitué par de l'air ou une substance non magnétique, sa perméabilité est égale à 1 ; sa *réductance* est donnée simplement par le quotient de sa longueur par sa section, ou, inversement, sa *perméance* par le rapport de sa section à sa longueur.

Par exemple, une soudure de deux tronçons magnétiques par un métal non magnétique (étain, brasure, etc.) équivaut à une coupure ou intervalle d'air d'égale épaisseur.

Lorsque la continuité d'un circuit est rompue par un *joint*, c'est-à-dire par la simple mise en contact des sections terminales de deux tronçons magnétiques consécutifs, la réductance du groupe de ces deux tronçons surpasse la somme de leurs réductances individuelles d'une certaine quantité représentant ce qu'on appelle la **réductance du joint**. Suivant Ewing, la réductance d'un joint est pratiquement, pour les inductions moyennes, celle d'une lame d'air de 0,003 centimètre d'épaisseur. La réductance d'un joint est d'ailleurs d'autant plus faible que le joint est plus parfait et que son serrage est plus énergique. Dans les appareils industriels, elle est souvent négligeable vis-à-vis de la réductance des autres parties des circuits.



On peut être amené à envisager des circuits matériels dont les divers tronçons n'appartiennent pas à un même circuit magnétique et présentent, par suite, des flux magnétiques inégaux. Tel est, par exemple, le circuit constitué (*fig. 173, I*) par un anneau de fer soumis à des spires magnétisantes recouvrant une partie

seulement de sa surface. Certains tubes de force sont alors en partie dans la portion d'anneau recouverte par les spires magnétisantes et en partie dans l'air, en sorte

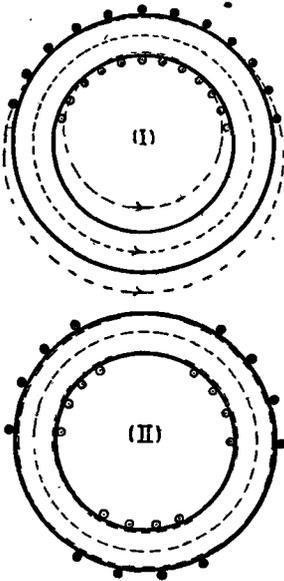


FIG. 173.

tubes de force, dans l'air. La fraction du flux total qui est ainsi perdue pour l'anneau dépend de la répartition des spires magnétisantes. Elle est plus grande si les spires sont réunies en un seul groupe compact (*fig. 173, I*) que si (toutes choses égales d'ailleurs quant à leur nombre et à l'intensité du courant) elles sont réparties en plusieurs groupes symétriquement distribués autour de l'axe (*fig. 173, II*).

Un cas typique de système présentant à la fois des circuits magnétiques hétérogènes et des dispersions de flux est celui que forme un électro-aimant et son armature (*fig. 170, p. 44*). La culasse **c**, les noyaux **N**, **S** des

que le flux traversant une section de l'anneau non recouverte est moindre que celui qui traverse une section de la partie recouverte. En d'autres termes, une partie du flux engendré dans la bobine magnétisante échappe au reste de l'anneau, ce qu'on exprime en disant qu'il y a alors, pour cette dernière partie de l'anneau, un certain *flux perdu*, en raison de la *dispersion* de certaines lignes, et par conséquent de certains

bobines, l'armature **A**, les intervalles d'air ou *entrefers*  $e_1$ ,  $e_2$  qui se trouvent entre l'armature et les surfaces terminales des noyaux, constituent les divers tronçons d'un circuit matériel mixte avec lequel les tubes de force créés par les bobines ont des parties communes. Certains tubes de force qui existent dans les noyaux échappent à l'armature, de sorte que le flux  $\Phi_a$  dans celle-ci, ainsi que dans les entrefers, est moindre que le flux  $\Phi_n$  dans les noyaux. Il est moindre aussi que le flux  $\Phi_c$  dans la culasse. En effet, le tube de force dont l'armature est un tronçon ne comprend qu'une partie  $\left(\frac{S_n}{\nu}\right)$  de la section  $S_n$  de chaque noyau et, de même, une partie  $\left(\frac{S_c}{\chi}\right)$  de la section  $S_c$  de la culasse. Il présente une constitution résumée dans le tableau suivant :

Nature des tronçons	Longueurs	Sections	Flux	Inductions	Perméabilités	Ré reluctances
Armature <b>A</b> (fer)	$l_a$	$S_a$	$\Phi_a$	$\mathcal{B}_a = \frac{\Phi_a}{S_a}$	$\mu_a$	$\frac{l_a}{\mu_a S_a} = \mathcal{R}$
Entrefes $e_1$ (air)	$l_e$	$S_e$	$\Phi_a$	$\mathcal{B}_e = \frac{\Phi_a}{S_e}$	1	$\frac{l_e}{S_e} = \mathcal{R}$
Noyau $N_1$ (fer)	$l_n$	$\frac{S_n}{\nu}$	$\Phi_a$	$\mathcal{B}_n = \frac{\Phi}{\frac{S_n}{\nu}}$	$\mu_n$	$\frac{l_n}{\mu_n \frac{S_n}{\nu}} = \nu \mathcal{R}_n$
Culasse <b>C</b> (fer ou fonte)	$l_c$	$\frac{S_c}{\chi}$	$\Phi_a$	$\mathcal{B}_c = \frac{\Phi_a}{\frac{S_c}{\chi}}$	$\mu_c$	$\frac{l_c}{\mu_c \frac{S_c}{\chi}} = \chi \mathcal{R}_c$
Noyau $N_2$ (fer)	$l_n$	$\frac{S_n}{\nu}$	$\Phi_a$	$\mathcal{B}_n = \frac{\Phi_a}{\frac{S_n}{\nu}}$	$\mu_n$	$\frac{l_n}{\mu_n \frac{S_n}{\nu}} = \nu \mathcal{R}_n$
Entrefes $e_2$ (air)	$l_e$	$S_e$	$\Phi_a$	$\mathcal{B}_e = \frac{\Phi_a}{S_e}$	1	$\frac{l_e}{S_e} = \mathcal{R}_e$

Appliquons à ce tube la formule d'Hopkinson ; nous aurons :

$$\Phi_a [\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b + \nu \mathcal{R}_n + \chi \mathcal{R}_c + \nu \mathcal{R}_n + \mathcal{R}_e] = \frac{4}{10} \pi n I$$

ou

$$\Phi_a \mathcal{R}_a + \Phi_a \mathcal{R}_b + \nu \Phi_a \mathcal{R}_n + \chi \Phi_a \mathcal{R}_c + \nu \Phi_a \mathcal{R}_n + \Phi_a \mathcal{R}_e = \frac{4}{10} \pi n I$$

Si l'on remarque que  $\frac{1}{\nu}$  étant le rapport de la section du tube dans le noyau à la section  $S_n$  du noyau, est aussi le rapport du flux du tube au flux du noyau et que par conséquent on a

$$\nu \Phi_a = \Phi_n$$

que, de même

$$\chi \Phi_a = \Phi_c$$

la relation précédente peut s'écrire :

$$\Phi_a \mathcal{R}_a + \Phi_a \mathcal{R}_b + \Phi_n \mathcal{R}_n + \Phi_c \mathcal{R}_c + \Phi_n \mathcal{R}_n + \Phi_a \mathcal{R}_e = \frac{4}{10} \pi n I ;$$

d'où la conclusion suivante :

*Etant donné un circuit matériel dont les divers tronçons n'appartiennent pas à un même tube de force, la somme des forces magnétomotrices correspondant aux ampères-tours portés par ces divers tronçons est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la réluctance de chaque tronçon par le flux total dont ce tronçon est le siège, ce qu'on peut résumer par le symbole suivant :*

$$\Sigma \mathcal{R} \Phi = \Sigma \mathcal{F}$$

Pour donner à cette formule toute sa généralité, il faut entendre le mot *somme* au sens *algébrique*, et pour cela affecter les valeurs numériques des forces magnétomotrices et des flux dont il est question du signe +

ou du signe — suivant leur sens par rapport au circuit considéré. Bref, la relation à laquelle nous venons d'arriver est calquée sur celle qui, en électrocinétique, convient au cas où une chaîne conductrice fermée est formée de tronçons appartenant à divers circuits électriques. On sait, en effet, qu'alors la somme *algébrique* des produits  $\mathbf{RI}$  relatifs aux différents tronçons est égale à la somme *algébrique* des forces électromotrices portées par ces divers tronçons.



Etant donné un tronçon de circuit magnétique, de réluctance  $\mathcal{R}$ , soumis à une force magnétomotrice  $\mathcal{F}$  et propageant un flux  $\Phi$ , l'expression

$$(\mathcal{R}\Phi) - (\mathcal{F})$$

calculée avec les valeurs *algébriques* de  $\Phi$  et de  $\mathcal{F}$ , est l'analogie de l'expression

$$(\mathbf{RI}) - (\mathbf{E})$$

relative à une portion de circuit électrique; et, de même que celle-ci représente la différence de potentiel électrique  $\mathbf{V}$  entre les deux extrémités de cette portion de circuit, nous considérerons celle-là comme représentant une **différence de potentiel magnétique**  $\mathcal{U}$  entre les deux extrémités du tronçon considéré.

Toutes les questions relatives à des assemblages quelconques de tronçons magnétiques se traiteront par application de la relation

$$(\mathcal{U}) = (\mathcal{R}\Phi) - (\mathcal{F})$$

de la même façon que celles relatives aux assemblages de conducteurs électriques à l'aide de la formule

$$(V) = (RI) - (E)$$

Lorsque  $\mathcal{R}$  sera très faible, de façon que  $\mathcal{R}\Phi$  soit négligeable, on aura sensiblement  $\mathcal{U} = -\mathcal{F}$ .

Lorsque  $\mathcal{F}$  sera nulle, on aura simplement  $\mathcal{U} = \mathcal{R}\Phi$ .



### III

#### Applications à divers Perméamètres.

##### A. Correction aux observations faites avec les perméamètres d'Hopkinson et de S. Thompson.

Les perméamètres d'Hopkinson et de S. Thompson ne sont, au fond, que des circuits magnétiques dont une partie est constituée par le barreau à étudier (longueur  $l$ , section  $S$ ), la partie complémentaire étant formée par l'armature massive reliant les deux extrémités qui, si elle est symétrique, doit être envisagée comme un faisceau de deux tronçons identiques (longueur  $l'$ , section  $S'$ ) assemblés en parallèle (*fig. 174*). La formule générale  $\Sigma \mathcal{R}\Phi = \Sigma \mathcal{F}$  appliquée à ce circuit donne :

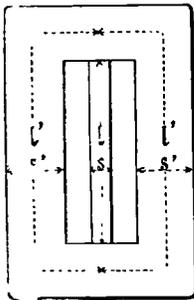


FIG. 174.

$$\Phi \frac{l}{\mu s} + \frac{\Phi'}{2} \frac{l'}{\mu' s'} = \frac{4}{10} \pi n l,$$

ou, en remarquant que  $\frac{\Phi}{S} = \mathcal{B}$  et  $\frac{\mathcal{B}}{\mu} = H$  :

$$Hl + H'l' = \frac{4}{10} \pi n l.$$

Si la section  $S'$  était infiniment grande, on aurait  $H' = 0$  et, par suite,  $H = \frac{4}{10} \pi n_1 I$ . Lors donc qu'on calcule  $H$  par cette der-

nière formule, on ne fait qu'une approximation. Mais il est facile d'effectuer un calcul plus exact. Il suffit, ce qui est permis en raison de la faiblesse des fuites, de prendre pour  $\Phi'$  la demi-valeur de  $\Phi$  donnée par l'expérience (induction ou arrachement), d'en déduire la valeur de l'induction dans l'armature ( $\beta' = \frac{\Phi'}{S'}$ ) de demander ensuite aux courbes caractéristiques de la substance de cette armature la valeur correspondante de  $\mu'$  et de calculer enfin le rapport  $\frac{\beta'}{\mu'}$  qui n'est autre que  $H'$ . Portant alors cette valeur de  $H'$  dans la formule  $Hl + H'l' = \frac{4}{10} \pi nI$  on obtient une valeur correcte de  $H$ .

Si on ne connaît pas le métal constituant l'armature, on peut tarer, en quelque sorte, l'appareil à l'aide d'un barreau préalablement connu. En portant dans la formule les valeurs de  $H$  correspondant pour ce barreau à diverses valeurs de  $\Phi$ , on en déduit les valeurs de  $H'l'$  pour toutes les valeurs usuelles de  $\Phi'$ . La table, ainsi dressée, fournit les valeurs de  $H'l'$  dont on a besoin ensuite dans l'étude d'échantillons inconnus.

### B. Perméamètres à entrefer.

Considérons un circuit magnétique formé d'un barreau (longueur  $l$  section  $S$ ), d'une armature en forme de  $C$  (longueur  $l'$  section  $S'$ ) présentant un étroit entrefer (épaisseur  $e'$  section  $S'$ ). Si ce circuit est soumis à l'action d'une bobine magnétisante (nombres de spires  $n$ , courant  $I$ ) on aura

$$\Phi \frac{l}{\mu S} + \Phi \frac{l'}{\mu' l'} + \Phi \frac{e'}{S'} = \frac{4}{10} \pi nI.$$

Pour déduire de cette relation la perméabilité  $\mu$  du barreau, il suffira de déterminer  $\Phi$ , ce qu'on fera aisément en mesurant le champ magnétique  $H_e$  dans l'entrefer et le multipliant par  $S'$ .

Tel est le principe des perméamètres de *Bruger* et de *Kapsel et Kennely*. Dans le premier, la mesure du champ dans l'entrefer se déduit de la variation de résistance qu'y éprouve une spirale de bismuth (voir tome I, page 150). Dans le second, l'entrefer est de forme cylindrique (*fig. 175*) et le champ  $y$  est mesuré par le couple électromagnétique qu'y subit une bobine  $bb$  analogue à celle d'un galvanomètre Desprez d'Arsonval parcourue par un courant déterminé (de quelques milliampères). Cette bobine est

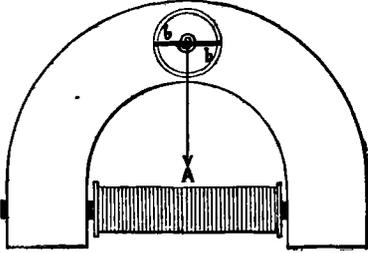


FIG. 175.

dirigée par un ressort spiral et ses déviations sont indiquées par une aiguille A sur un cadran. Dans les ateliers, ces appareils sont surtout employés à des mesures relatives permettant de classer des échantillons de fers suivant leur plus ou moins grande perméabilité. Si, en effet, on substitue un barreau à un autre, en laissant au courant magnétisant une valeur constante, on reconnaît à la simple inspection de l'appareil d'épreuve si le nouveau champ dans l'entrefer est supérieur, égal ou inférieur au premier, d'où l'on conclut que la perméabilité du second barreau est supérieure, égale ou inférieure à celle du premier.

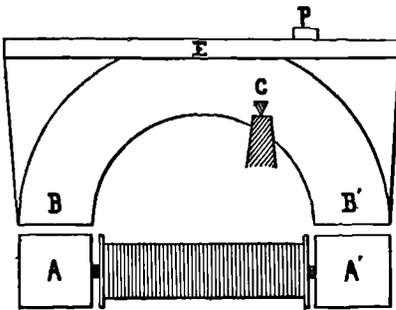


FIG. 176.

A la même catégorie appartient la balance magnétique de Du Bois (*fig. 176*), dans laquelle l'armature présente une partie mobile  $BB'$  mobile autour de l'arête d'un couteau  $c$  placé d'une façon dissymétrique, en sorte que l'action attractive de la partie fixe  $A$  l'emporte sur celle de  $A'$ . Pour maintenir cette sorte de fléau dans sa position normale, il faut faire agir un couple antagoniste dû à un poids  $P$  dont on règle à volonté la position sur une échelle divisée  $E$ . La position de ce poids est fonction de l'action attractive, par conséquent de la valeur du champ dans les entrefers et enfin de l'induction dans le barreau à étudier, qui est intercalé entre  $A$  et  $A'$ . L'échelle est graduée empiriquement de façon à faire connaître, pour chaque position du poids, la valeur de l'induction dans le barreau.

### C. Perméamètre d'Ewing.

Considérons un circuit magnétique *sans fuites*, c'est-à-dire propageant un flux constant. Entre les extrémités

d'un tronçon quelconque, la différence de potentiel magnétique  $\mathcal{U}_n$  est nulle, sans quoi le circuit présenterait des dérivations. On a donc, pour un tronçon quelconque

$$\mathcal{U}_n = (\mathcal{R}_n \Phi) - (\mathcal{F}_n) = 0$$

d'où

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{F}_n} = \frac{1}{\Phi}$$

Ainsi: *Dans un circuit magnétique sans fuites, les réluctances des divers tronçons sont proportionnelles aux forces magnétomotrices correspondantes.*

Soit, en particulier, un circuit magnétique formé de deux tronçons de réluctances  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  soumis à des forces magnétomotrices  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . S'il est sans fuite, on aura

$$\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1} = \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1}$$

C'est là le principe d'une méthode de comparaison de deux réluctances appliquées par *Ewing* à l'aide de l'appareil représenté schématiquement par la fig. 177. Le circuit est formé des deux barreaux à comparer AB et CD réunis par des culasses épaisses BC et DA et entourées de bobines magnétisantes parcourues par le même courant. Tout en maintenant constante, à l'aide d'un rhéostat, l'intensité de ce courant, on fait varier le nombre des spires de l'une des bobines et par suite la force magnétomotrice correspondante jusqu'à ce qu'une aiguille d'épreuve A indique, par sa position symétrique, l'absence de toute dérivation entre E et F. Le rapport des réluctances des deux barreaux est alors donné par celui des deux forces magnétomotrices, ou, puisque le courant dans les deux bobines est le même, par le rapport des nombres de spires mis en jeu.

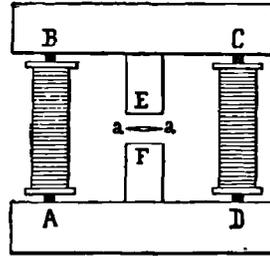


FIG. 177.

Cette méthode est pour les réluctances des deux parties d'un

circuit magnétique l'analogie de la méthode de Lacoine (voir tome I, page 222) pour les résistances des deux parties d'un circuit électrique, avec cette différence que l'équilibre de l'appareil d'épreuve, qui était obtenu dans le circuit électrique par une modification de l'une des résistances à comparer, est obtenu dans le circuit magnétique par une modification de l'une des forces magnétomotrices.

On peut aussi considérer les deux parties **FABE** et **FDCE** du circuit (*fig. 177*) comme deux électro-aimants comparés l'un à l'autre de la même façon que les deux aimants en fer à cheval expérimentés (tome I, *fig. 40*, page 76).



## VINGT-SEPTIÈME LEÇON



# INDUCTION MAGNÉTIQUE

\*\*\*\*

### CALCULS USUELS RELATIFS AUX ÉLECTRO-AIMANTS



#### I

#### Étude des fuites d'un circuit magnétique

Considérons un circuit magnétique présentant, en dehors d'une partie soumise à une force magnétomotrice, une dérivation (fig. 177) donnant lieu à la division d'un flux  $\Phi$  en deux autres  $\Phi'$  et  $\Phi''$ . Soient  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  les réluctances des deux branches de la dérivation et  $\mathcal{U}$  la différence de potentiel magnétique entre leurs points de jonction. On a, en vertu d'une formule de la leçon précédente (voir page 56) :

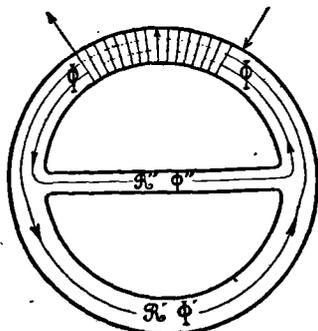


FIG. 177.

$$\mathcal{U} = \mathcal{R}'\Phi'$$

et aussi

$$\mathcal{U} = \mathcal{R}''\Phi''$$

d'où  $\mathcal{R}'\Phi' = \mathcal{R}''\Phi''$ , et, par conséquent :

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} = \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}''}$$

Comme on a d'ailleurs :

$$\Phi' + \Phi'' = \Phi$$

on voit que la connaissance de deux des trois flux  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Phi''$ , permettra de calculer le troisième ainsi que le rapport  $\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}''}$ ; ou, inversement, que, ce rapport et l'un des flux étant connus, on pourra en déduire les deux autres.

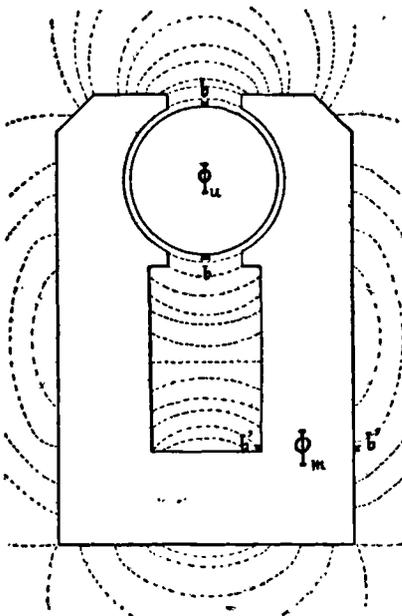


FIG. 178.

Ces formules trouvent leur application dans l'étude des *fuites magnétiques* d'un circuit comprenant, tel que celui représenté par la fig. 178, une culasse, des noyaux de bobines magnétisantes, des entrefers et une armature. Dans un tel circuit, en effet, le flux  $\Phi_m$  créé par les bobines magnétisantes échappe en partie à l'armature. La portion

du flux total reçue par cette dernière est aussi celle qui traverse les entrefers ; elle forme ce qu'on appelle le *flux utile*  $\Phi_u$ . Le reste constitue ce qu'on appelle le *flux perdu* :  $\Phi_p = \Phi_m - \Phi_u$ .

On peut calculer ce flux de perte  $\Phi_p$  en fonction du flux utile par la relation :

$$\Phi_p \mathcal{R}_p = \Phi_u \mathcal{R}_u$$

à condition de connaître la réluctance  $\mathcal{R}_p$  de son trajet, en même temps que la réluctance  $\mathcal{R}_u$  de celui du flux utile.

La branche relative au flux utile est formée évidemment par les entrefers et l'armature. On a donc, en appelant respectivement  $l_e$  et  $l_a$  les longueurs de ces deux parties et  $s_e$  et  $s_a$  leurs sections :

$$\mathcal{R}_u = 2 \frac{l_e}{s_e} + \frac{l_a}{\mu_a s_a}$$

Par  $\mu_a$  (perméabilité de la substance formant l'armature) cette réluctance dépend de l'induction  $\mathcal{B}_a$  dans l'armature et, par suite, de  $\Phi_u$ , puisque  $\mathcal{B}_a = \frac{\Phi_u}{s_a}$ . Le

premier terme  $2 \frac{l_e}{s_e}$  dépend uniquement de la dimension des entrefers, puisque la perméabilité de l'air, qui les forme, est constante et égale à 1. Lorsqu'il s'agit, comme le représente la fig. 179, d'un entrefer compris entre deux surfaces cylindriques, on prend

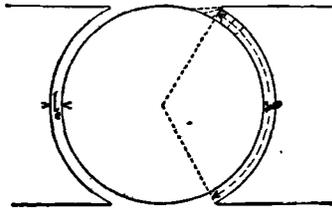


FIG. 179.

pour  $s_0$  une surface un peu supérieure à celle qui aurait pour section l'arc moyen  $\lambda$  limité aux rayons passant par les cornes polaires. En effet, sur les bords des pièces polaires les lignes de force cessent d'être radiales. Pour tenir compte de ce fait, on prend pratiquement comme *largeur* de l'entrefer l'arc moyen  $\lambda$  augmenté de l'*épaisseur*  $l_0$  de cet entrefer. La surface  $S_0$  sera donc celle d'un rectangle de largeur  $\lambda + l_0$  et de longueur égale à la dimension que présentent l'armature ou les pièces polaires perpendiculairement au plan de la figure

La réluctance  $\mathcal{R}_p$  correspondant au flux de perte peut être considérée comme celle d'un faisceau de tubes de flux situés dans l'air. La perméabilité de ces tubes étant constante ( $\mu = 1$ ), la réluctance de leur faisceau peut être déterminée une fois pour toutes par expérience. L'opération consiste à donner au circuit une *excitation* quelconque (1) et à mesurer, par la méthode balistique, 1° le flux  $\Psi_u$  dans l'armature (à l'aide de la bobine d'épreuve **b b**) (fig. 178) ; 2° le flux total  $\Psi_m$  (à l'aide de la bobine d'épreuve **b' b'**). Si  $r_u$  est la réluctance que présente pour le flux  $\Psi_u$  la branche comprenant les entrefers et l'armature, on a, en remarquant que  $\Psi_p = \Psi_m - \Psi_u$  :

$$\mathcal{R}_p (\Psi_m - \Psi_u) = r_u \Psi_u$$

d'où

$$\mathcal{R}_p = r_u \frac{\Psi_u}{\Psi_m - \Psi_u}$$

---

1. On appelle *excitation* d'un circuit magnétique la mise en jeu d'une force magnétomotrice dans ce circuit par l'établissement d'un courant dans des spires magnétisantes.

Lorsque les tubes élémentaires de flux de perte ne sont pas de formes trop compliquées, on peut approximativement calculer  $\Phi_p$  en faisant la somme des flux des tubes élémentaires, c'est-à-dire la somme des quotients obtenus en divisant la différence de potentiel magnétique aux extrémités de chaque tube par la *réductance*  $(\frac{l}{s})$  de ce tube ou, ce qui revient au même, la somme des produits obtenus en multipliant la différence de potentiel magnétique aux extrémités de chaque tube par la *perméance*  $(\frac{s}{l})$  correspondante.

Considérons, comme exemple de ce genre de calculs, le cas d'une série de noyaux d'électro-aimants rectangulaires, identiques entre eux et équidistants (*fig. 180*), cas auquel se ramène pratiquement celui d'un système de pôles magnétisants *symétriquement* distribués autour d'un axe et assez nombreux pour qu'on puisse négliger la légère inclinaison que présentent leurs faces en regard, et prendre pour distance de ces faces la moyenne  $l$  des distances extrêmes (*fig. 181*).

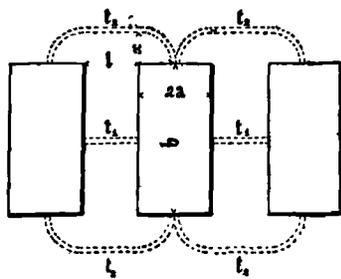


FIG. 180

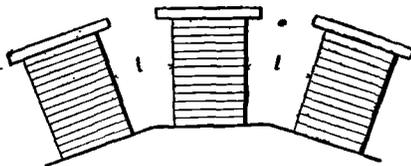


FIG. 181

Les tubes de fuites qu'on a alors à envisager sont de deux catégories: les uns ( $t_1$ ) réunissent les éléments correspondants des faces parallèles en regard de deux noyaux voisins, les autres ( $t_2$ ) réunissent les éléments des faces latérales de deux noyaux consécutifs situées dans le prolongement l'une de l'autre. Nous

supposerons que tout tube de cette seconde catégorie se compose ainsi que le représente la *fig. 180* d'une partie rectiligne, de longueur  $l$ , et de deux parties en quart de cercle, de rayon  $x$  égal à la distance de la partie rectiligne au plan des faces latérales sur lesquelles se trouvent les extrémités du tube considéré.

La perméance du groupe des tubes  $t_1$  qui réunit les éléments de deux bandes, de surface  $b \, dy$ , situées à une distance  $y$  de la base des noyaux considérés est  $\frac{b \, dy}{l}$ . La différence de poten-

tiel magnétique entre les extrémités de ces tubes est pratiquement égale à la fraction  $\frac{y}{c}$  de celle qui existe entre les extrémités des noyaux; or celle-ci peut être prise égale à la force magnétomotrice  $\frac{4}{10} \pi A$  agissant sur le circuit magnétique que

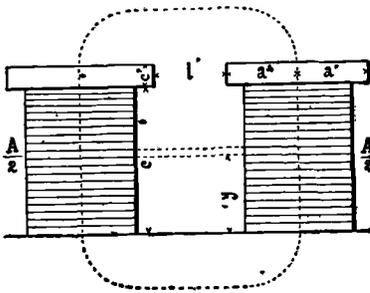


FIG. 182

forment les lignes de force unissant ces deux noyaux (1) (*fig. 182*),  $A$  désignant le nombre total d'ampères-portés par ces derniers. La portion du flux de perte correspondant au groupe de tubes  $t_1$  en question est donc

$$\frac{y}{c} \left( \frac{4}{10} \pi A \right) \frac{b \, dy}{l}$$

La somme des flux de ce genre correspondant aux deux faces internes d'un noyau est, en conséquence :

$$\Phi'_p = 2 \int_{y=0}^{y=c} \frac{4}{10} \pi \frac{A b y \, dy}{c l} = \frac{4}{10} \pi \frac{A b c}{l}$$

La perméance d'un tube  $t_2$  (de section  $dy \, dx$  et de longueur  $l + \pi x$  est  $\frac{dy \, dx}{l + \pi x}$ ; le flux de perte qui lui correspond est donc

1. Une moitié des lignes de force de chaque noyau l'unit au noyau précédent et l'autre moitié au noyau suivant. Chaque circuit magnétique comprend donc un flux utile égal à la moitié de celui qui correspond à une pièce polaire entière.

$\frac{y}{c} \left( \frac{4}{10} \pi A \right) \frac{dy dx}{l + \pi x}$ , ce qui donne pour l'ensemble des tubes  $t_2$  relatifs aux deux faces externes d'un noyau :

$$\Phi''_p = 4 \sum_{y=0, x=0}^{y=c, x=a} \frac{4}{10} \pi \frac{A}{c} \frac{y dy dx}{l + \pi x} = \frac{8}{10} Ac \text{Log}_e \frac{l + \pi a}{l}$$

ou, en passant aux logarithmes vulgaires (module : 2, 3)

$$\Phi''_p = 2,3 \times \frac{8}{10} Ac \log \frac{l + \pi a}{l} = 1,84 Ac \log \frac{l + \pi a}{l}$$

En réalité, les tubes de fuite sont un peu plus courts que ne le voudrait la forme géométrique simple que nous leur avons attribuée et, par conséquent, leur perméance est un peu plus grande que celle admise dans le calcul. Pour faire compensation, on arrondit le coefficient numérique qui figure dans l'expression  $\Phi''_p$  et l'on adopte finalement, en pratique, la formule (1) :

$$\Phi''_p = 2Ac \log \frac{l + \pi a}{l}$$

S'il existe, comme le représente la fig. 182, des épanouissements polaires (longueur  $b$ , épaisseur  $c'$ , distance interne  $l'$ , largeur  $2a'$ ) les flux de perte qui en émanent sont respectivement, pour les côtés internes :

$$\Psi''_p = 2 \sum_{y=c}^{y=c+c'} \left( \frac{4}{10} \pi A \right) \frac{b dy}{l'} = 2,5 \frac{Abc'}{l'}$$

et pour les côtés latéraux :

$$\Psi''_p = 4 \sum_{y=c, x=0}^{y=c+c', x=a'} \left( \frac{4}{10} \pi A \right) \frac{dy dx}{l' + \pi x} = 1,6 Ac' \text{Log}_e \frac{l' + \pi a'}{l'}$$

ou pratiquement, en introduisant le logarithme vulgaire et arrondissant le coefficient numérique :

2. Kapp, *Machines dynamo-électriques* (Trad. P. Lecler), p. 204 et suiv.

$$\Psi''_p = 4 A c' \log \frac{l' + \pi a'}{l'}$$

Le flux global de perte est alors :

$$\Phi_p = \Phi'_p + \Phi''_p + \Psi'_p + \Psi''_p$$

En l'ajoutant au flux utile  $\Phi_u$  et divisant la somme par le flux utile on aura le rapport  $v$  du flux total au flux utile ou *rapport d'Hopkinson*.

$$v = \frac{\Phi_u + \Phi_p}{\Phi_u}$$



## II

### Détermination de l'excitation d'un circuit magnétique donné pour un flux utile donné.

Un des problèmes qui, en matière de circuits magnétiques, se présentent le plus fréquemment à l'Ingénieur constructeur d'appareils électriques est celui qui consiste à déterminer les ampères-tours  $A$  nécessaires pour obtenir, dans un circuit magnétique de nature et de dimensions données, un flux utile de grandeur demandée :  $\Phi_u$ .

La question se résout au moyen de la formule :

$$\frac{4}{10} \pi A = \mathcal{R}_c \Phi_m + \mathcal{R}_n \Phi_m + \mathcal{R}_e \Phi_u + \mathcal{R}_a \Phi_u$$

dans laquelle  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}_n$ ,  $\mathcal{R}_e$ ,  $\mathcal{R}_a$  désignent respectivement les réluctances des diverses parties du circuit : culasse, noyaux, entrefers, armature. Mais le flux total  $\Phi_m$  n'étant pas tout d'abord connu, il faut procéder par

approximations successives, en suivant la marche ci-après :

1° *Calcul de l'ordre de grandeur (A') de A*, en négligeant tout d'abord les fuites, c'est-à-dire en posant

$$\Phi_m = \Phi_u :$$

$$\frac{4}{10} \pi A' = \mathcal{R}'_c \Phi_u + \mathcal{R}'_n \Phi_u + \mathcal{R}'_e \Phi_u + \mathcal{R}'_a \Phi_u$$

d'où :

$$A' = \frac{I_c \beta'_c}{\frac{4}{10} \pi \mu'_c} + \frac{I_n \beta'_n}{\frac{4}{10} \pi \mu'_n} + \frac{I_e \beta'_e}{\frac{4}{10} \pi} + \frac{I_a \beta'_a}{\frac{4}{10} \pi \mu'_a}$$

2° *Calcul du flux de perte  $\Phi_p$* , en employant A' pour A dans l'estimation des différences de potentiel magnétique (Voir ci-dessus, pages 65 et suiv.)

3° *Calcul de  $\Phi_m$* , en ajoutant  $\Phi_p$  à  $\Phi_u$ . Si la forme du circuit magnétique est telle que les tubes de perte ne présentent pas des formes simples accessibles au calcul, on peut déterminer expérimentalement  $\mathcal{R}_p$ , ainsi qu'on l'a vu page 63 et calculer  $\Phi_p$  à l'aide de la formule :  $\Phi_p = \Phi_u \frac{\mathcal{R}_u}{\mathcal{R}_p}$ ; ou bien adopter, d'après des essais antérieurs sur des circuits analogues, une valeur vraisemblable du coefficient  $\nu$  et prendre  $\Phi_m = \nu \Phi_u$ .

4° *Calcul des inductions magnétiques :*

$$\beta_c = \frac{\Phi_m}{S_c}, \beta_n = \frac{\Phi_m}{S_n}, \beta_e = \frac{\Phi_u}{S_e}, \beta_a = \frac{\Phi_u}{S_a}$$

5° *Détermination, d'après l'étude magnétique des substances constituant les diverses parties du circuit,*

des valeurs de  $\frac{\beta}{\mu} = H$  correspondant aux inductions trouvées.

6° Calcul de  $A$ , par la formule :

$$\frac{4}{10} \pi A = I_c H_c + I_n H_n + I_e H_e + I_a H_a$$



Chacun des termes de l'expression précédente fait connaître, dans la force magnétomotrice totale, la part exigée par la partie correspondante du circuit ; on peut ainsi apprécier l'influence de chacune de ces parties sur le résultat final.

Le terme prépondérant est celui qui correspond aux entrefers ; il peut s'élever jusqu'à 95 % du total. Les autres termes sont d'autant plus faibles qu'ils correspondent à des parties du circuit plus courtes et plus perméables. Ils sont d'autant moindres que les inductions correspondantes sont plus faibles.

Aux faibles inductions, l'influence de la qualité du métal sur la valeur de l'excitation correspondante est souvent minime, vis-à-vis de l'excitation totale. Aussi, à moins de rechercher une extrême précision, rarement exigée, peut-on se dispenser de faire une étude minutieuse de la qualité des fers destinés aux parties de circuit qui travaillent à faible induction et se contenter de faire usage, pour les calculs, des courbes moyennes établies avec des fers de bonne qualité courante. Mais, comme nous l'avons vu, il n'en est pas de même en ce qui concerne l'hystérésis.

Pour un flux donné, on sera maître de la valeur de l'induction si l'on est maître du choix de la section, puisque  $\mathcal{B} = \frac{\Phi}{S}$ . Toutes choses égales, d'ailleurs, la section devra être plus grande pour la fonte que pour le fer. On a vu, en effet (page 23), que pour une même valeur de  $H$  la valeur de  $\mathcal{B}$  est beaucoup moindre dans le cas de la fonte que dans celui du fer. On ne doit donc pas employer de la fonte pour les parties d'un circuit qui sont destinées à être entourées de spires magnétisantes, car on augmenterait ainsi la longueur et partant le prix de ces dernières ; or, il vaut mieux, étant donnés les prix respectifs des métaux, économiser du cuivre que du fer. On réserve donc la fonte pour les parties non destinées aux enroulements, comme la culasse et les épanouissements polaires.



Une fois connu le nombre d'ampères-tours, pour pouvoir procéder à la confection des bobines magnétisantes chargées de l'excitation du circuit, il faut déterminer : 1° le calibre du fil à employer ; 2° le nombre des spires.

La première étape de cette recherche est la fixation de l'espace destiné à recevoir l'enroulement. Si l'on fixe d'autorité la longueur et l'épaisseur de ce dernier, on se donne par là même son volume, dont un certain tant pour cent sera le volume  $U_0$  du cuivre. D'ailleurs, de l'épaisseur adoptée et des dimensions des noyaux, on déduit la longueur moyenne  $l_m$  d'une spire. Dès

lors, le quotient de  $U_c$  par  $I_m$  donne la somme  $S$  des sections de cuivre des spires, d'où la relation :

$$S = \frac{U_c}{I_m} = ns$$

$s$  étant la section du fil. Mais alors la densité du courant magnétisant est déterminée. En effet, les relations  $nI=A$  et  $ns=S$  donnent, par division :

$$\frac{I}{s} = \delta = \frac{A}{S}$$

Cette détermination de  $\delta$  entraîne, d'ailleurs, celle de l'énergie qui sera dissipée, par seconde, dans l'enroulement, car on a (Voir t. I, page 249) (1) :

$$j_1 = \rho U_c \delta^2$$

On voit par là que l'espace assigné à l'enroulement ne devra pas être choisi au hasard, puisque  $\delta$  et  $j_1$  en dépendent. Dans ce choix se trouvent engagées une question de sécurité (par  $\delta$ ) et une question d'économie (par  $j_1$ ). On devra donc le faire en sorte que l'échauffement des enroulements et le coût de leur excitation soient compris dans des limites admissibles. En particulier, la surface de refroidissement de l'enroulement devra satisfaire à la condition définie t. I, page 248.

Si la valeur de  $j_1$  est imposée à l'avance, elle entraînera celle de  $\delta$ , cette dernière celle de  $S$  et celle-ci enfin celle de  $I_m$ , pour  $U_c$  donné. Mais il est plus rationnel, étant donné  $j_1$ , de choisir a priori  $\delta$ , d'en déduire  $S$

---

(1) La formule de la page 249 renferme le volume de cuivre  $U_c$  de l'enroulement sous la forme  $\frac{U}{K}$ .

par la relation  $\delta = \frac{A}{S}$  et ensuite  $I_m$  à l'aide de  $j_l = \rho S I_m \delta$ .

La connaissance de  $I_m$  fixe l'épaisseur de l'enroulement et celle-ci, jointe à  $S$ , détermine la longueur des bobines.

Quand, d'une façon ou d'une autre, les quantités  $U_e$ ,  $I_m$ ,  $S$ ,  $\delta$ ,  $j_l$  sont fixées, la question du calibre du fil et du nombre des spires n'est pas encore résolue. Il faut pour cela un nouvel élément qui, le plus souvent, est soit la *section* du fil, soit la *tension* sous laquelle sera faite l'excitation.

Le premier cas ( $s$  donnée) se présente lorsqu'on veut utiliser, pour confectionner l'enroulement, un fil que l'on possède déjà. Alors on connaît  $s$ ; on en déduit le nombre de spires par la relation  $n = \frac{S}{s}$ . L'intensité du courant s'ensuit puisque  $nI = A$  et aussi le voltage correspondant car  $V = rI = \frac{n\rho l_m I}{s} = n\rho l_m \delta$ . Tous les paramètres intéressant l'excitation sont alors déterminés.

On se trouve en présence du second cas ( $V$  donnée) lorsqu'on veut pouvoir utiliser pour obtenir le courant d'excitation une différence de potentiel dont on a la disposition. Alors on calcule  $n$  par la relation  $n = \frac{V}{\rho l_m \delta}$ , d'où ensuite  $s = \frac{S}{n}$  et  $I = \frac{A}{n}$ .



• Pour connaître complètement un circuit magnétique, il faut non seulement connaître les ampères-tours

capables de produire un flux utile donné, mais encore pouvoir apprécier à l'avance les changements auxquels est exposé le flux utile par les variations possibles des ampères-tours magnétisants.

Ces indications seront données par une courbe, appelée **caractéristique d'excitation** du circuit, dont les points seront obtenus en portant en abscisses des longueurs numériquement égales à  $A$  et en ordonnées des longueurs numériquement égales aux valeurs de  $\Phi_u$  correspondantes. Pour trouver les éléments de construction de cette courbe, étant donnée chaque valeur de  $\Phi_u$ , on calculera la valeur correspondante de  $A$  par la formule :

$$A = l_c \frac{\nu \Phi_u}{\frac{4}{10} \pi \mu_c S_c} + l_n \frac{\nu \Phi_u}{\frac{4}{10} \pi \mu_n S_n} + l_e \frac{\Phi_u}{\frac{4}{10} \pi S_e} + l_a \frac{\Phi_u}{\frac{4}{10} \pi \mu_a S_a}$$

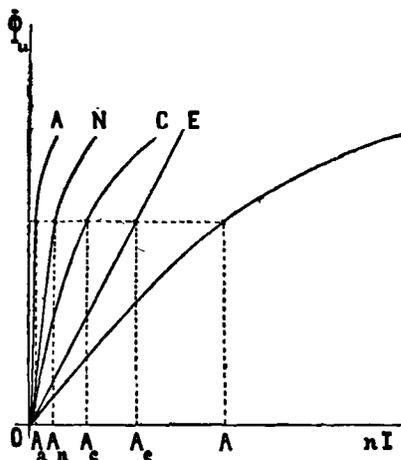


FIG. 183

de même section que la culasse du circuit qui nous occupe. Supposons-la calculée et tracée (*fig. 183*) (C),

Considérons la courbe dont les points auraient pour coordonnées

$$y = \Phi_u \text{ et } x = \frac{l_c \nu \Phi_u}{\frac{4}{10} \pi \mu_c S_c}$$

=  $A_c$ . Elle ne serait autre que la caractéristique d'excitation d'un circuit magnétique de même métal, de même longueur et

ainsi que les caractéristiques analogues (**N**), (**E**), (**A**), des noyaux, des entrefers et de l'armature. L'abscisse **A** du point de la caractéristique du circuit répondant à une valeur donnée  $\Phi_u$  du flux utile, sera la somme des abscisses **A<sub>o</sub>**, **A<sub>n</sub>**, **A<sub>e</sub>** et **A<sub>a</sub>** de ces différentes caractéristiques partielles pour la même ordonnée  $\Phi_u$ .

Ce graphique, employé pour la première fois par Hopkinson, fait voir nettement comment chaque partie du circuit influe sur la caractéristique totale.

D'une manière générale, cette caractéristique totale présente un *coude* plus ou moins prononcé, c'est-à-dire qu'après s'être élevée assez rapidement depuis l'origine **O** jusqu'au voisinage d'un certain point, elle s'élève ensuite plus lentement et de moins en moins. En d'autres termes, le flux utile est d'abord assez rapidement croissant avec l'excitation et ensuite de moins en moins. Au delà d'une certaine valeur, on ne gagne plus que très peu à réaliser des accroissements, même notables, d'excitation. On dit alors que le circuit tend vers un état de saturation magnétique. Les additions faites au flux deviennent alors de plus en plus coûteuses. Au point de vue économique, on n'a donc pas intérêt à aller beaucoup au-delà du coude de la courbe d'excitation. On le fait néanmoins lorsqu'on désire que le flux utile présente une certaine stabilité, c'est-à-dire n'éprouve que de faibles variations pour des variations même notables du courant d'excitation.

On devra, au contraire, rester en deçà du coude lorsqu'on se proposera d'avoir un flux épousant d'une

façon aussi accusée que possible les variations de l'excitation.

Dans la conception d'un projet de circuit magnétique on peut accentuer ou, au contraire, atténuer à volonté le coude de la caractéristique, suivant l'importance relative qu'on donnera aux parties fer ou aux parties fonte et air. Le coude sera très prononcé si l'influence des caractéristiques partielles très coudées, c'est-à-dire celle des parties fer, est notable et si, par contre, celle des caractéristiques peu ou point coudées, qui correspondent à la fonte et aux entrefers, est faible. Le coude sera, au contraire, très adouci si la fonte et les entrefers dominant.



### III

#### Calcul d'un électro-aimant exerçant sur son armature une attraction donnée.

D'assez nombreux appareils utilisent l'adhérence magnétique qui s'exerce entre deux parties contiguës d'un circuit magnétique. Dans l'établissement des projets de construction de ces appareils se présente naturellement le problème suivant:

*Calculer les dimensions d'un circuit magnétique de forme donnée, composé de deux parties, de façon que s'exerce entre ces deux parties une force d'adhérence de grandeur donnée:  $F$ .*

Ce problème peut se résoudre en procédant de la façon suivante :

1° *Choix d'une valeur pour l'induction magnétique  $\mathcal{B}$  en un point de la surface de contact des deux parties adhérentes.*

Il convient de prendre pour  $\mathcal{B}$  une valeur assez grande, mais pas très supérieure néanmoins à celle qui correspond au coude de la courbe en  $(\mathbf{H}, \mathcal{B})$  pour le fer, car la réalisation d'inductions notablement supérieures serait peu économique. La valeur  $\mathcal{B} = 15700$  est très admissible, tant à cause de sa réalisation facile qu'en raison de la valeur très convenable (10 kg. environ par centimètre carré) qu'elle assure à la pression d'adhérence  $\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}}$  (1).

2° *Calcul de la section d'adhérence.*

Puisqu'avec la valeur de  $\mathcal{B}$  admise on a  $\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}} = 10 \frac{\mathbf{K}}{\text{cm}^2}$ , il en résulte :

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{F}}{10} \text{ cm}^2$$

On pourra alors faire du circuit projeté un dessin à l'échelle et en connaître la longueur  $\mathbf{l}$ .

3° *Détermination, pour chaque tronçon, de la*

(1) On a, en effet (voir page 22),  $\sqrt{\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}}} = \frac{\mathcal{B}}{157}$ , formule qui pour  $\mathcal{B} = 15700$  donne  $\sqrt{\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}}} = 100$ ; d'où  $\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}} = 10000 \frac{\text{gramme}}{\text{cm}^2} = 10 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ .

valeur de  $\mathbf{H}$ , d'après l'étude magnétique du métal destiné à la confection de l'appareil ( $\mathbf{H} = \frac{\mathcal{B}}{\mu}$ ).

4° *Calcul des ampères-tours d'excitation* par la formule (Voir ci-dessus, page 70) :

$$\frac{4}{10} \pi \mathbf{A} = \sum I \mathbf{H}$$

5° *Détermination des spires magnétisantes* d'après les indications données à l'article précédent.



## VINGT-HUITIÈME LEÇON



# INDUCTION

### FORCES ÉLECTROMOTRICES D'INDUCTION

(LOIS ÉLÉMENTAIRES)



Un conducteur homogène, un simple fil de cuivre par exemple, peut, dans des conditions convenables, devenir le siège d'une force électromotrice.

C'est sur ce fait, mis en évidence par Faraday en 1832, qu'est basée la constitution des puissants générateurs dont dispose actuellement l'industrie électrique et auxquels elle doit le merveilleux développement qu'elle nous présente aujourd'hui.



*Pour engendrer dans un conducteur une force électromotrice, il suffit de donner à ce conducteur un déplacement convenable dans un champ magnétique.*

Tel est, en deux mots, au point de vue pratique, l'énoncé de la découverte de Faraday.

Les forces électromotrices ainsi engendrées sont dites produites par **induction** ; on les désigne, en con-

séquence, sous le nom de forces électromotrices **induites**.

Comme il ne s'agit, dans cette question, que de déplacements *relatifs*, tous les cas peuvent se ramener, dans les énoncés, à celui d'un conducteur en mouvement dans un champ magnétique fixe. Aussi, pour simplifier le langage, est-ce à ce point de vue, qui correspond d'ailleurs aux circonstances les plus usuelles, que nous nous placerons dans l'exposé des lois régissant les forces électromotrices d'induction.



## I .

### Induction dans un élément de conducteur filiforme.

Etant donné un élément de conducteur filiforme et un champ magnétique, tout mouvement de ce conducteur dans ce champ ne sera pas également efficace pour engendrer une force électromotrice induite.

Pour juger de la convenance d'un mouvement, à ce point de vue, il faut considérer la surface décrite ou *balayée* par l'élément conducteur dans son déplacement et faire application de la loi suivante :

*Il y a force électromotrice induite, toutes les fois que la surface balayée par l'élément conducteur est traversée par des lignes de force du champ, ou, en d'autres termes, toutes les fois que le conducteur, dans son déplacement, coupe des lignes de force.*

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour un élément de conducteur  $AB$ , décrivant autour d'un axe, soit (*fig.* 184, I) une surface plane, soit (*fig.* 184, II) une surface cylindrique normale aux lignes de force d'un champ magnétique, dirigé à cet effet, dans le premier cas, parallèlement et, dans le second, perpendiculairement à l'axe.

Mais si, dans le premier cas, les lignes de force magnétiques étaient perpendiculaires à l'axe ou si, dans le second, elles lui étaient parallèles, elles ne traverseraient point la surface décrite par le conducteur et celui-ci ne présenterait aucune force électromotrice induite.

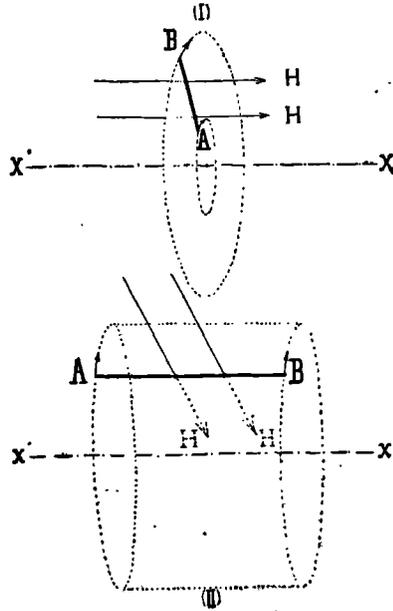


FIG. 184

Si un champ magnétique est la résultante de deux autres et si l'un de ceux-ci se déplace avec le conducteur considéré de telle façon que sa disposition relativement à ce dernier ne soit point modifiée, on peut en faire abstraction et considérer, au point de vue de l'induction, le conducteur comme soumis uniquement à l'action de l'autre champ c'est-à-dire, de celui par rapport auquel il se déplace.

Soit, par exemple (*fig.* 185), un tube de fer cylindrique placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à son axe et portant deux fils conducteurs disposés, l'un ( $IJ$ ) suivant une génératrice intérieure, l'autre ( $KL$ ) suivant une génératrice extérieure.

Supposons, en premier lieu, que ce tube soit animé d'un mouvement de *translation* perpendiculaire à son axe. L'expérience

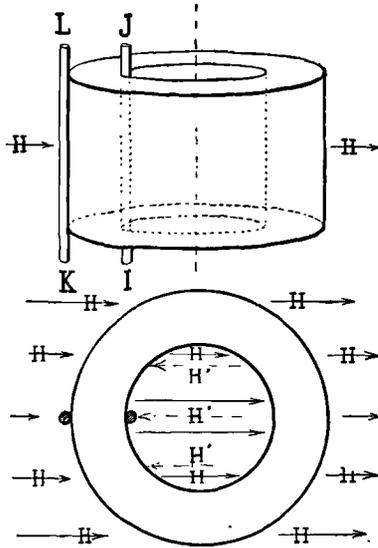


FIG. 185

montre qu'alors le fil intérieur est le siège d'une force électromotrice identique à celle du conducteur extérieur; et cependant le champ magnétique *résultant* à l'intérieur du cylindre est bien moindre qu'à l'extérieur, ainsi qu'on peut s'en assurer en y introduisant une aiguille aimantée ou de la limaille de fer. Ce champ intérieur est, en effet, la résultante de deux autres, l'un  $H$  attribuable au système magnétique extérieur, l'autre  $H'$  attribuable au tube, opposé au premier, et sensiblement de même

intensité si l'épaisseur des parois du tube est tant soit peu notable.

Mais dans le mouvement considéré, il n'y a aucun déplacement relatif des fils par rapport à la composante  $H'$  qui est en effet emportée avec eux par le tube dans une même translation. L'expérience donnant la même force électromotrice pour les deux fils, montre qu'il n'y a alors en jeu, au point de vue de l'induction, que la composante  $H$ , vis-à-vis de laquelle les deux fils se déplacent de la même manière. Dans ces conditions, le tube de fer, qui forme en quelque sorte écran pour l'action statique du système magnétique extérieur, ne modifie par contre en rien son action inductrice.

Supposons maintenant que le tube, au lieu de recevoir un mouvement de translation, éprouve une rotation autour de son axe. Il ne sera plus permis, dans ce cas, de faire abstraction du champ  $H'$ , car ce dernier alors est fixe, et le fil  $IJ$ , se déplaçant par rapport à lui aussi bien que par rapport à  $H$ , est soumis à une induction *résultante* qui est celle de  $H$  diminuée de celle opposée de  $H'$ . Dans ces conditions, l'induction est beaucoup plus

faible pour le conducteur intérieur, sur lequel l'action de  $H'$  s'oppose à celle de  $H$ , que pour le conducteur extérieur, sur lequel pareille opposition n'a pas lieu.

Si, dans le cas qui nous occupe en ce moment, on munit le conducteur extérieur  $KL$  d'une gaine de fer (fig. 186), chacun de ses déplacements infiniment petits dans le champ  $H$  sera assimilable pratiquement à une translation et l'on peut prévoir, comme l'indique, en effet, l'expérience, que l'induction obtenue sera la même que pour le même fil nu.

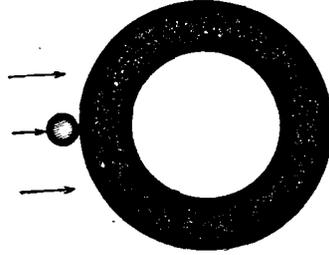


FIG. 186



Comme application de cette importante remarque, nous verrons que dans les machines où des forces électromotrices induites sont développées dans des fils de cuivre en mouvement par rapport à des champs magnétiques, on loge ces fils dans des rainures dont sont munis, parallèlement à l'axe, les cylindres de fer qu'on leur donne comme supports. Ces fils sont ainsi dans une situation comparable à celle du fil gainé de fer que nous venons de considérer.

On supprime, par cette disposition, toute saillie du fil sur la surface du cylindre qui le porte et l'on peut, par conséquent, placer à plus petite distance de cette surface les électro-aimants producteurs du champ extérieur actif.

Par cette disposition, toutes choses égales d'ailleurs, la réluctance des entrefers est notablement diminuée.

Que l'on compare, en effet, la disposition (I) (fig. 187) où les fils induits font saillie à l'extérieur du cylindre de fer qui les supporte, à la disposition (II) où ces fils, en même nombre, sont logés dans des rainures en forme d'encoches pratiquées dans ce cylindre: on aura, pour une section  $S_e$  d'entrefer, dans le premier cas, une réluctance :

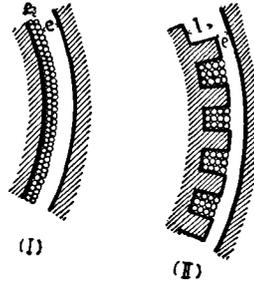


FIG. 187

$$\mathcal{R}'_e = \frac{e_c}{S_e} + \frac{e}{S_e}$$

et, dans le second cas :

$$\mathcal{R}''_e = \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{R}_d} + \frac{1}{\mathcal{R}_c}} + \frac{e}{S_e}$$

en appelant  $\mathcal{R}_d$  la réluctance du groupe de dents et  $\mathcal{R}_c$  celle du groupe d'encoches correspondant à la portion  $S_e$  de surface d'entrefers considérée. Or, on a, d'une part :  $\mathcal{R}_d = \frac{l}{\mu \frac{S_e}{2}}$ ,

$l$  étant la longueur d'une dent,  $\mu$  sa perméabilité et  $\frac{S_e}{2}$  la section du groupe de dents considéré (dans l'hypothèse d'une largeur égale des dents et des encoches). D'autre part,  $\mathcal{R}_c = \frac{l}{\frac{S_e}{2}}$ , donc :

$$\mathcal{R}_c'' = \frac{l}{\mu \frac{S_c}{2} + \frac{S_e}{2}} + \frac{e}{S_e}$$

Mais puisque la couche de fil recouvre en (II) une surface moitié moindre qu'en (I), elle doit avoir, à volume de cuivre égal, une épaisseur double. Posons donc  $l = 2 e_c$  et nous aurons finalement :

$$\mathcal{R}''_e = \frac{4 e_c}{(\mu + 1) S_e} + \frac{e}{S_e}$$

expression visiblement moindre que celle de  $\mathcal{R}'_e$ , la fraction  $\frac{4}{\mu + 1}$  étant moindre que 1.

D'un autre côté, si un fil gainé de fer est le siège d'un courant, il se trouve, par l'effet de son enveloppe, soustrait aux efforts mécaniques que le champ exercerait sur lui, s'il était nu. Il est facile de voir, en effet, que lorsqu'un fil parcouru par un courant est revêtu d'un tube de fer et placé dans un champ magnétique dû à un système extérieur  $M$  (*fig.* 188) l'ensemble formé par le fil et son tube est soumis à une action égale à celle qu'é-

prouverait le fil nu, mais *appliquée au tube*. En effet, le système  $M$  exerce sur le fil une action  $F$  et le système  $M'$  (constitué par le tube) une action contraire  $F'$ . Or, la réaction du fil sur le tube est une force  $F''$  égale et contraire à  $F'$  et appliquée au tube. En raison de l'égalité de  $F''$  et de  $F'$ , les trois forces  $F$ ,  $F'$ ,  $F''$ , sont égales et leur système, vu l'opposition de  $F'$  et de  $F$ , se réduit à la dernière  $F''$ . On a donc affaire, en somme, à une action électromagnétique qui est la même en grandeur que si le fil était nu; mais elle est appliquée au fer. Tout effort de pression du fil contre ses appuis est ainsi évité et une cause sérieuse de détérioration de l'isolant du fil, par suite, écartée. En outre, les fils logés ainsi dans des rainures sont bien mieux fixés à leur support qu'ils ne le seraient à l'aide de chevilles, de cales, de frettes, etc.

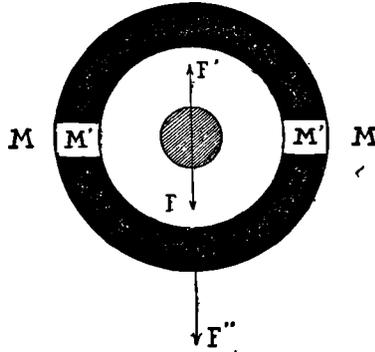


FIG. 188



Après ces considérations, relatives aux *conditions de production* des forces électromotrices d'induction, voyons maintenant celles qui ont trait à leur *sens*.

Pour trouver la flèche représentant, à un moment donné, sur un élément de conducteur filiforme, le *sens* de la force électromotrice induite, il faut envisager la *face d'entrée* du flux à travers la surface  $ds$  décrite par l'élément, à partir de la position considérée, pendant le laps de temps infiniment petit  $dt$  venant après l'instant  $t$ .

Sur l'élément  $AB$ , pris à cet instant, c'est-à-dire au moment où il *va décrire* la surface  $ds$ , la flèche représentant le sens de la force électromotrice est telle que

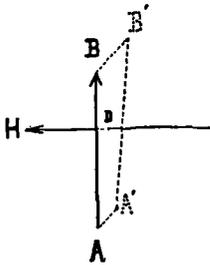


FIG. 189

relativement à un observateur ayant la tête du côté de sa pointe et regardant la surface  $ds$ , la face d'entrée du flux dans cette surface soit une face *droite* (fig. 189).

Comme exercice d'application de cette règle, cherchons, par exemple, le sens des forces électromotrices induites dans les cas particuliers envisagés ci-dessus (page 81).

Soit  $AB$  (fig. 190) un élément de conducteur décrivant un plan (celui de la figure) perpendiculaire à un champ magnétique dirigé d'avant en arrière ( $\bullet$ ). Dans ce cas, la face d'entrée

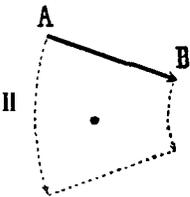
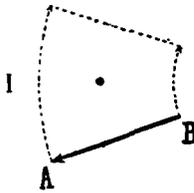


FIG. 190

du flux dans la surface décrite par le conducteur est la face supérieure du plan de la figure. Dès lors, si le mouvement de  $AB$  a lieu, relativement à l'observateur, dans le sens des aiguilles d'une montre (fig. 190 I), la flèche définie par la règle précédente a sa pointe en  $A$ . Par contre, si, dans le même champ, le mouvement de  $AB$  était de direction opposée (fig. 190 II), la flèche aurait sa pointe en  $B$ .

Les résultats seraient, d'ailleurs, respectivement inverses si les lignes de force du champ étaient dirigées d'arrière en avant ( $\odot$ ).

Soit, en second lieu,  $AB$  un élément de conducteur décrivant autour d'un axe un cylindre de révolution (fig. 191). Si le champ (perpendiculaire à cet axe) est centrifuge (fig. 191 I), la face d'entrée du

du flux dans la surface décrite par le conducteur est la face supérieure du plan de la figure. Dès lors, si le mouvement de  $AB$  a lieu, relativement à l'observateur, dans le sens des aiguilles d'une montre (fig. 190 I), la flèche définie par la règle précédente a sa pointe en  $A$ . Par contre, si, dans le même champ, le mouvement de  $AB$  était de direction opposée (fig. 190 II), la flèche aurait sa pointe en  $B$ .

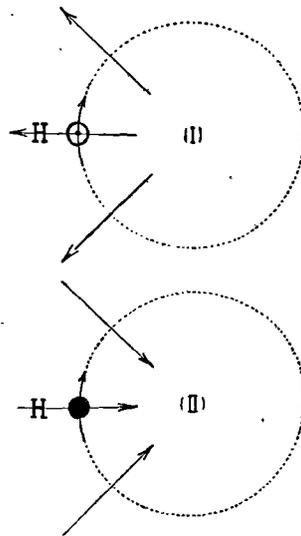


FIG. 191

flux sur la surface décrite sera la face interne. Si, au contraire, le champ est centripète (*fig. 191 II*), la face d'entrée du flux sera la face externe. Les forces électromotrices correspondant à un même sens de mouvement dans les deux cas seront donc inverses l'une de l'autre. Ainsi, pour un mouvement dans le sens des aiguilles d'une montre, la flèche, comme le montre la figure, tournerait vers l'observateur, dans le premier cas, sa pointe (⊙), et, dans le second cas, ses penes (●).

Ainsi qu'on vient de le voir, le sens d'une force électromotrice d'induction s'inverse si, toutes choses égales d'ailleurs, on inverse soit le sens du mouvement du conducteur, soit la direction des lignes de force du champ ; mais il demeure le même lorsque les deux changements se font à la fois.



Au point de vue *quantitatif*, l'induction est régie par la loi suivante :

*La valeur numérique de la force électromotrice induite dans un élément de conducteur filiforme en mouvement, par rapport à un champ magnétique, est proportionnelle à chaque instant au taux de variation avec le temps du flux de force coupé par l'élément.*

Si  $d\varphi$  est le flux coupé pendant le temps  $dt$ , la valeur à l'instant  $t$  du taux de variation de  $\varphi$  est  $\frac{d\varphi}{dt}$ , et si cette quantité est exprimée en maxwells par seconde, la force électromotrice induite dont l'élément est le siège à cet instant est donnée, en volts, par l'expression :

$$e = \frac{1}{10^8} \frac{d\varphi}{dt}$$

Soient  $dl$  la longueur de l'élément considéré,  $v$  la composante

de sa vitesse perpendiculaire à  $d\mathbf{l}$  dans le plan ( $\mathbf{v}$ ,  $d\mathbf{l}$ ) et  $H$  la composante du champ normale à ce plan. L'élément de surface  $d\mathbf{s}$  décrit par  $d\mathbf{l}$  dans le temps  $d\mathbf{t}$  étant  $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{t}$ , et le flux  $d\phi$  qui le traverse étant, par suite,  $H \cdot d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{t}$ , on a, pour  $e$ , l'expression :

$$e = \frac{1}{10^8} H \cdot d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}$$

Exemple : Pour  $H = 5.000$  gauss,  $d\mathbf{l} = 1$  cm,  $\mathbf{v} = 2.000 \frac{\text{cm}}{\text{seconde}}$ , cette formule donne ;

$$e = \frac{5.000 \times 1 \times 2.000}{10^8} = \frac{1}{10} \text{ volt.}$$

Dans le cas d'un élément décrivant une surface plane, par suite d'un mouvement de rotation, autour d'un axe perpendiculaire à sa direction, en appelant  $\omega$  la vitesse angulaire et  $r$  le rayon de la circonférence décrite par le point moyen, on a  $\mathbf{v} = r\omega$  et, par suite :

$$e = \frac{r}{10^8} H \cdot d\mathbf{l} \cdot r\omega.$$

Cette formule convient aussi au cas d'un élément  $d\mathbf{l}$  décrivant avec une vitesse angulaire  $\omega$ , une surface cylindrique de rayon  $r$  autour d'un axe qui lui est parallèle.



## II

### Induction dans un segment fini de conducteur filiforme.

Un segment de conducteur filiforme de longueur finie doit être envisagé comme un assemblage d'éléments associés en série et la force électromotrice induite dans l'ensemble est la somme algébrique de celles des divers éléments. Elle est donnée, en volts, par la formule :

$$E = \frac{1}{10^8} \Sigma \frac{d\varphi}{dt}$$

qui peut s'écrire :

$$E = \frac{1}{10^8} \frac{\Sigma d\varphi}{dt}$$

Soit, par exemple, un segment de conducteur filiforme rectiligne tournant, avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ , autour d'un axe perpendiculaire à sa direction, dans un champ magnétique uniforme (*fig. 192*) ayant, parallèlement à l'axe, une intensité  $H$ .

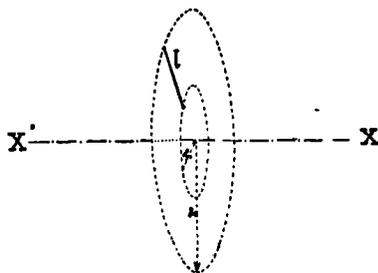


FIG. 192

On a ici :  $\Sigma d\varphi = H \Sigma ds$  et, par suite :  $E = \frac{1}{10^8} H \frac{\Sigma ds}{dt} = \frac{1}{10^8} H \frac{s}{t}$ , en désignant par  $s$  la surface décrite par le conducteur en un temps  $t$ , et, en conséquence, par  $\frac{s}{t}$  la surface décrite dans l'unité de temps. Or, dans l'unité de temps, le conducteur accomplit  $\frac{\omega}{2\pi}$  révolutions autour de l'axe et décrit, par conséquent,  $\frac{\omega}{2\pi}$  fois la surface de la couronne circulaire comprise entre les circonférences de rayons  $r_0$  et  $r$  décrites par ses points extrêmes. On a donc  $\frac{s}{t} = \frac{\omega}{2\pi} \pi (r^2 - r_0^2)$  et finalement (1) :

(1) Le lecteur familier avec le calcul intégral obtiendra immédiatement cette expression en écrivant :  $\Sigma ds = \int_{r_0}^r dl \cdot r \cdot \omega dt$  et remarquant que  $dl = dr$ , d'où  $\Sigma ds = \omega dt \int_{r_0}^r r dr = \frac{\omega dt (r^2 - r_0^2)}{2}$  et enfin  $\frac{\Sigma ds}{dt} = \frac{\omega (r^2 - r_0^2)}{2}$ .

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{H\omega (r^2 - r_0^2)}{2}$$

Dans le cas d'un segment  $l$  parallèle à l'axe dans un champ  $H$  perpendiculaire à la surface cylindrique décrite, de rayon  $r$ , on aurait  $\frac{s}{t} = \frac{\omega}{2\pi} 2\pi r l = \omega r l$  et par suite (1) :

$$E = \frac{1}{10^8} H\omega r l$$



Le cas d'un conducteur replié en forme de *boucle* se présentant très fréquemment en pratique, il convient d'en faire l'objet d'une étude particulière.

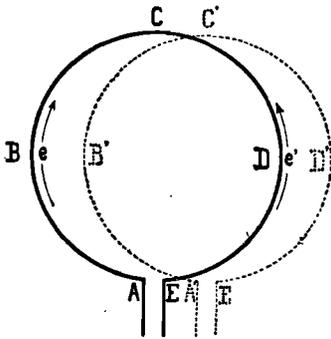


FIG. 193

Il est visible qu'alors (*fig. 193*) les flux coupés par certains éléments passent de l'intérieur à l'extérieur de la boucle, tandis que ceux qui sont coupés par certains autres passent, au contraire, de l'extérieur à l'intérieur. Par exemple, si la boucle va de la position

**ABCDE** à la position **A'B'C'D'E'**, dans un champ dont les lignes de force traversent le plan de la figure, les flux  $d\phi$  coupés par les éléments de la portion **ABC** deviennent extérieurs à la boucle, tandis que les flux  $d\phi'$  coupés par les éléments de la portion **CDE** lui deviennent intérieurs. Les forces électromotrices  $e$  induites dans les premiers éléments se présentent

(1) Dans ce cas,  $r$  est une constante et  $\Sigma ds = r\omega dt \int_0^1 dl$ .

toutes dans le même sens (1), tandis que celles  $e'$  induites dans les éléments du second groupe se présentent dans un sens qui, relativement à la boucle, est opposé au premier. La force électromotrice totale  $E$  a donc le sens de celle des deux sommes  $\Sigma e$  et  $\Sigma e'$  qui l'emporte sur l'autre, et une valeur numérique égale à l'excès de la plus grande de ces deux sommes sur la plus petite.

Or, on a :

$$\Sigma e = \frac{1}{10^8} \frac{\Sigma d\varphi}{dt}$$

$$\Sigma e' = \frac{1}{10^8} \frac{\Sigma d\varphi'}{dt}$$

par conséquent, la force électromotrice totale  $E$  aura le sens de  $\Sigma e$  si le flux sortant  $\Sigma d\varphi$  l'emporte sur le flux entrant  $\Sigma d\varphi'$ . Elle aura, au contraire, le sens de  $\Sigma e'$  si le flux entrant l'emporte sur le flux sortant. Bref, on devra, pour déterminer le sens cherché, examiner si le flux total embrassé par la boucle diminue ou augmente.

La règle est la suivante :

*Si le flux total diminue ( $\Sigma e > \Sigma e'$ ), le sens de  $E$  est celui de  $\Sigma e$ ; il est représenté par une flèche relativement à laquelle la face d'entrée du flux englobé par la boucle est une face droite.*

*Si le flux total augmente ( $\Sigma e < \Sigma e'$ ), le sens de  $E$  est celui de  $\Sigma e'$ ; il est représenté par une flèche relati-*

---

1. Le sens ABC, par exemple, si les lignes de force traversent le plan d la figure d'avant en arrière.

vement à laquelle la face d'entrée du flux est une face gauche (1).

On peut comprendre tous les cas dans un seul énoncé, en remarquant que si un courant avait, dans la boucle, le sens de la force électromotrice d'induction résultante  $\mathbf{E}$ , son flux propre tendrait à compenser la variation de flux donnant lieu à l'induction (2).



En grandeur, la force électromotrice  $\mathbf{E}$  est donnée par l'expression :

$$\mathbf{E} = \pm \frac{1}{10^8} \frac{\Sigma d\varphi - \Sigma d\varphi'}{dt}$$

ou

$$\mathbf{E} = \pm \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$$

si l'on représente par  $d\Phi$  la variation éprouvée pendant le temps  $dt$  par le flux total  $\Phi$ .

Cette formule signifie que  $\mathbf{E}$  est proportionnelle à la vitesse de variation  $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$  du flux  $\Phi$ .



Si l'on convient de tracer sur le contour de la boucle une flèche représentant un sens qui sera re-

(1) Pour éviter toute confusion, il convient de ne retenir qu'un de ces deux énoncés, l'autre s'en déduisant aisément par inversion.

On retiendra facilement le premier en remarquant que les mots *diminue* et *droite* qui y figurent ont la même initiale : *d*.

(2) En effet, il s'ajouterait au flux qui décroît et s'opposerait au flux qui augmente.

gardé comme positif et si l'on distingue, en conséquence, relativement à cette flèche personnifiée les faces de cette boucle en droite et gauche, la force électromotrice induite par une variation du flux total embrasé, sera donnée, *en grandeur et en signe*, par l'expression tout à fait générale :

$$E = - \frac{l}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$$

à condition qu'il soit entendu que les flux seront comptés positivement ou négativement suivant qu'ils entrent par la face droite ou par la face gauche, et que le signe + ou le signe — trouvés au devant du résultat du calcul signifieront respectivement que la force électromotrice trouvée a un sens conforme, ou contraire, à celui qui a été marqué, *a priori*, comme référence.

La même formule, avec les mêmes conventions de signes, est applicable à l'ensemble d'un circuit quelconque.



Le flux magnétique reçu par une face donnée d'une boucle conductrice ne saurait, en pratique, augmenter sans cesse ni diminuer sans cesse. Inévitablement, après avoir augmenté jusqu'à un certain point, il doit diminuer, et, inversement. La force électromotrice induite correspondant à de telles variations sera donc forcément dirigée tantôt dans un sens et tantôt en sens contraire, puisque sa direction, quand le flux diminue, doit être inverse de celle qu'elle présente quand il augmente.

Si la face d'entrée du flux change, on est conduit à la même conclusion, car, avant de s'inverser, le flux devient nécessairement nul et, par conséquent, doit diminuer après avoir augmenté.

Un flux qui augmente et diminue alternativement sans changer de face d'entrée et qui, par conséquent,

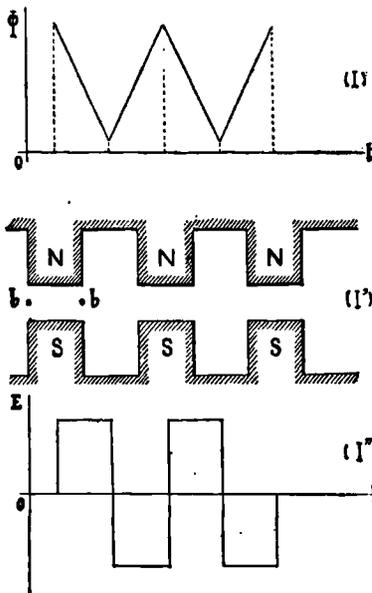


FIG. 194

est représenté graphiquement par une ligne sinueuse à ordonnées constamment de même signe, telle que celle de la fig. 194 (I), constitue ce qu'on appelle un **flux ondulé**.

Tel serait le flux reçu par une boucle **bb** se déplaçant entre les deux rangées de pôles magnétiques représentées par la fig. 194 (I'), l'une des rangées étant formée exclusivement de pôles N et l'autre exclusivement de pôles S situés respectivement vis-à-vis des premiers (1)

Un flux qui change alternativement de face d'entrée et qui, par conséquent, est représenté par une ligne sinueuse à ordonnées alternativement positives et négatives (fig. 195 I) constitue ce qu'on appelle un **flux alterné**.

Tel serait le flux *total* reçu par une boucle **bb** se déplaçant

1. La fig. suppose égaux les pôles, les intervalles qui les séparent, et la largeur **bb** de la boucle.

entre deux rangées de pôles magnétiques alternés, comme celles représentées par la fig. 195 (I').

Tel serait aussi, dans un champ bipolaire tel que celui de la fig. 196, le flux reçu par une boucle tournant autour d'un axe perpendiculaire à la ligne des pôles et ayant son plan dirigé suivant cet axe de rotation. Pendant le demi-tour NPS, le flux entre par la face AR; pendant le demi-tour SQN, il entre au contraire par la face AV (1).



La force électromotrice induite dans une boucle étant, à chaque instant, en grandeur et en signe, proportionnelle à l'inclinaison  $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$  sur l'axe des temps de la ligne représentative de  $\Phi$ , sera dans le cas d'un flux ondulé, et aussi dans celui d'un flux alterné, alternativement positive et négative.

C'est ce que représentent les lignes (I'') des fig. 194-et 195. On

1. Les faces de la boucle sont ici dénotées AV et AR, en ayant égard au sens du mouvement.

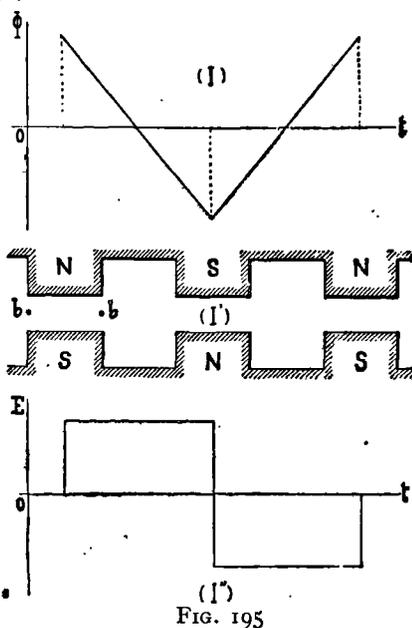


FIG. 195

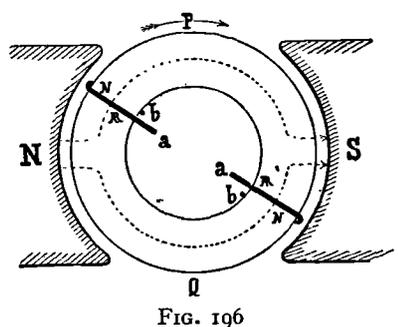


FIG. 196

voit que les valeurs *nulles* de  $E$  correspondent aux valeurs nulles de  $\frac{d\Phi}{dt}$  et, par suite, aux valeurs *maxima* de  $\Phi$ , ce qu'on exprime en disant que  $E$  et  $\Phi$  sont **en quadrature**.



Le déplacement relatif d'une boucle ou d'une bobine et d'un champ magnétique, n'est pas le seul moyen qui permette de produire dans cette boucle ou dans cette bobine des variations de flux et, par suite, des forces électromotrices d'induction.

On peut encore obtenir le même résultat par deux autres procédés qui sont fondés sur l'emploi d'électro-aimants inducteurs laissés fixes, aussi bien que les boucles ou les bobines induites.

L'un de ces procédés consiste à appliquer aux électro-aimants inducteurs une excitation constante et à modifier simplement le flux par le déplacement d'une armature entraînant des variations de réluctance dans les circuits magnétiques entourés par les boucles induites.

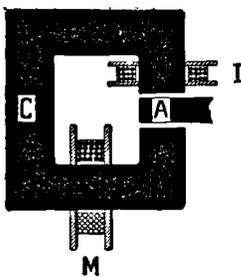


FIG. 197

Cette disposition est représentée schématiquement par la fig. 197, dans laquelle  $M$  est une bobine magnétisante,  $I$  une bobine induite et  $A$  une armature se mouvant dans une coupure d'un circuit magnétique  $C$ .

L'autre procédé consiste à alimenter le circuit d'excitation  $B_1$  des inducteurs par un courant d'intensité variable. Le champ correspondant ayant à chaque instant une intensité en rapport avec celle

du courant, sera, par là même, variable, et variable aussi sera le flux émis à travers le système induit  $B_2$  (fig. 198).

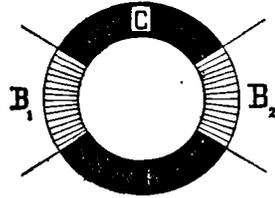
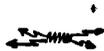


FIG. 198

En définitive, quel que soit le procédé employé pour l'obtenir, une variation de flux donnée à travers un circuit, produira toujours dans ce circuit une force électromotrice d'induction, liée en grandeur et en signe à la *vitesse* de cette variation par la formule :

$$E = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$$



## VINGT-NEUVIÈME LEÇON



# INDUCTION

\*\*

FORCES ÉLECTROMOTRICES ET DIFFÉRENCES  
DE POTENTIEL VARIABLES.

FORCES ÉLECTROMOTRICES ET DIFFÉRENCES  
DE POTENTIEL ALTERNATIVES USUELLES.  
ALTERNOVOLTMÈTRES.



### I

#### **Forces électromotrices et différences de potentiel variables.**

Les générateurs électriques qui jouent en électrotechnique le rôle le plus important, en tant que seuls capables de se plier, dans des conditions avantageuses, à toutes les exigences de la pratique industrielle, ne sont autre chose que des assemblages de tronçons de conducteurs filiformes (barres ou boucles) doués, par induction, de forces électromotrices.

De même que des éléments de pile, des segments de conducteurs doués de forces électromotrices induites peuvent être connectés entre eux de façon que leurs forces électromotrices soient associées ou en série ou en parallèle ou d'une façon mixte, ce qui permet de réaliser tel ou tel rapport voulu entre la force électro-

motrice ou la résistance de l'ensemble et celles d'un des éléments.

Suivant des dispositifs dont le détail fera l'objet d'une autre partie de ce cours (1), on peut constituer ces assemblages de façon que leur force électromotrice soit pratiquement constante et s'applique à un circuit extérieur dans un sens invariable, comme le ferait une pile en relation fixe avec ce circuit.

Mais on peut aussi faire en sorte que ces assemblages présentent des forces électromotrices variables en grandeur et en direction (2).

Les générateurs d'induction qui satisfont à la première condition donnent lieu à des effets du même genre que ceux des piles, effets observables et mesurables à l'aide des mêmes méthodes et des mêmes appareils. On désigne ces générateurs sous le nom de **dynamos**.

Ceux, au contraire, qui présentent des forces électromotrices *alternatives* et qu'on désigne, pour ce motif, sous le nom d'**alternateurs**, donnent lieu à des effets dont l'étude exige des méthodes et des appareils spéciaux qui vont maintenant appeler notre attention.



Celui de ces effets qui doit nous occuper en premier lieu est la production de *différences de potentiel alternatives*.

Il se produit de telles différences de potentiel entre

1. Deuxième partie (t. III. de l'ouvrage).

2. Ces dispositifs correspondants seront étudiés dans la troisième partie (t. V de l'ouvrage).

les bornes d'un alternateur et, d'une manière générale, entre deux points quelconques de tout circuit auquel est appliquée une force électromotrice alternative.

Aux bornes d'un alternateur fonctionnant à circuit ouvert, la différence de potentiel est égale et opposée à chaque instant à la force électromotrice, et, par conséquent, l'étude de celle-ci peut se ramener à l'étude de la première (1).



Si l'on considère, au point de vue de leurs potentiels, les différents points d'un corps, trois cas peuvent se présenter :

1° Le potentiel peut être invariable en chaque point et identique en tous les points ;

2° Le potentiel peut être invariable en chaque point et différent d'un point à un autre ;

3° Le potentiel peut être variable en chaque point et différent à chaque instant d'un point à un autre.

Dans le premier cas, le corps est en état d'*équilibre électrique*.

Dans le second cas, il est regardé (2) comme le siège d'un *flux électrique* offrant un *régime permanent*.

Dans le troisième cas, il doit être envisagé comme le siège d'un flux électrique présentant un *régime variable*.

Pour reconnaître lequel de ces trois états est celui

---

1. L'étude d'une force électromotrice variable induite peut aussi se déduire, comme on l'a vu dans la leçon précédente (pages 95 et 96), de l'examen de la ligne représentative du flux variable qui lui donne naissance.

2. Voir tome I, page 140.

d'un conducteur donné, il faut évidemment être en mesure de déterminer, à différentes reprises, l'état des potentiels en deux points **M** et **N** de ce conducteur et, chaque fois, durant un laps de temps assez court pour que cet état, dans le cas où il ne serait pas constant, n'éprouve, pendant l'essai, que des variations insensibles.

On peut, à cet effet, prendre pour appareil d'épreuve un condensateur dont les armatures sont mises simultanément en relation de très courte durée, l'une avec **M**, l'autre avec **N**, par le jeu d'un conjoncteur mobile animé d'un mouvement rapide et établissant les communications voulues lors de son passage dans une position déterminée. Une communication d'une durée de l'ordre du millième de seconde avec deux points présentant, par l'effet d'une source d'électricité, une différence de potentiel, suffit, en général, pour faire acquérir à un conducteur la charge **Q** correspondant à cette différence. Celle-ci se déduit alors de **Q** par la formule  $V_A - V_B = \frac{Q}{C}$ , **C** étant la capacité du condensateur.

Si l'on soumet à cette épreuve les deux pôles d'un alternateur ou deux points **M** et **N** d'un conducteur faisant partie d'un circuit soumis à l'action d'une force électromotrice alternative, on trouve que la charge acquise par le condensateur est variable avec l'instant de la cessation du contact. Or la charge serait évidemment nulle à tout instant si le conducteur examiné avait tous ses points au même potentiel; elle serait

différente de zéro, mais indépendante de l'instant de la rupture du contact si le conducteur était le siège d'un courant constant. Puisqu'on la trouve variable, il faut en conclure que le conducteur considéré présente une distribution de potentiels *variable avec le temps*.



La diversité des régimes variables possibles est infinie. Il importe donc, étant donné un conducteur offrant un tel régime, de pouvoir mettre en évidence la *loi* particulière des variations de la différence de potentiel entre deux de ses points **M** et **N**.

La solution directe de cette question consiste dans l'emploi de voltmètres enregistreurs à indications extra-rapides, dont les équipages mobiles sont assez légers et se trouvent soumis à une action directrice assez énergique pour qu'ils puissent suivre sans retard appréciable les variations des différences de potentiel alternatives usitées en pratique (dont la période est de l'ordre de  $\frac{1}{50}$  de seconde).

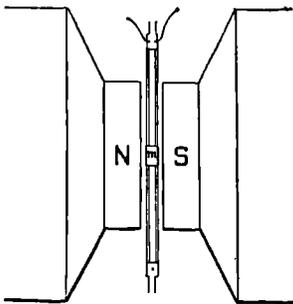


FIG. 199

Ces voltmètres spéciaux sont désignés sous le nom d'**oscillographes**.

L'un des plus parfaits de ces appareils est dû à M. A. Blondel. Il consiste essentiellement (*fig. 199*) en un très mince fil plat d'aluminium replié en une seule boucle longue et étroite entre deux biseaux très rapprochés, portés par les pièces polaires **N**, **S**, d'un

puissant électro-aimant. Les oscillations éprouvées par cette boucle, en raison des actions que subit, de la part du champ magnétique, le courant variable dont elle est le siège par l'effet de la différence du potentiel variable appliquée à ses extrémités, sont accusées par un petit miroir  $m$  collé aux fils, sur lequel tombe un pinceau lumineux provenant d'une lampe électrique. Le faisceau réfléchi tombe ensuite sur un second miroir qui oscille perpendiculairement au premier avec une fréquence égale à celle de la différence de potentiel étudiée, en sorte qu'on obtient finalement sur un écran le tracé même de la courbe représentative de cette différence de potentiel, puisque le point lumineux se déplaçant, d'une part, en abscisses, proportionnellement au temps, se déplace, d'autre part, en ordonnées, proportionnellement aux valeurs successives de la différence de potentiel mise en jeu.



Lorsqu'un générateur de courants alternatifs est à marche uniforme, les courbes de différences de potentiel variables relevées à l'oscillographe entre deux points quelconques de son circuit indiquent que ces différences sont *périodiques*. En effet, ces courbes sont divisibles en segments identiques entre eux par les points d'intersection *homologues* qu'elles présentent avec une parallèle quelconque à l'axe des temps.

On peut, par suite, appliquer à l'étude de ces différences de potentiel, indépendamment de l'oscillographe, la méthode générale d'examen des phénomènes périodiques, c'est-à-dire la méthode *stroboscopique*.

Cette méthode consiste à mettre le système à étudier en relation avec l'appareil d'observation à des intervalles réguliers séparés par un laps de temps  $T$ , de sorte que si  $T$  est la durée de la période du phénomène, un état du système réalisé, par exemple, à un instant  $t$  réapparaîtra aux instants  $t + T, t + 2T, t + 3T, \dots$

et si la durée  $T'$  des intermittences d'observation est juste égale à  $T$ , l'appareil d'épreuve trouvera chaque fois le système dans le même état et tout se passera comme si cet état était permanent. L'appareil d'épreuve pourra alors, sans inconvénient, être un de ceux, à indications lentes, applicables à l'étude des états permanents; il aura tout le loisir nécessaire pour recevoir la modification par laquelle il devra accuser la phase du phénomène à l'étude de laquelle il sera affecté.

La première application de cette méthode à l'étude des différences de potentiel variables est due à M. Joubert, auteur des premières études systématiques entreprises sur les alternateurs.

L'appareil de mesure employé par M. Joubert était un électromètre électrostatique. La communication des bornes de cet appareil avec les deux points  $M$  et  $N$  entre lesquels se présentait la différence de potentiel périodique à étudier était établie par intermittences, durant un temps très court, à une phase déterminée de chaque période. L'organe producteur des contacts se composait de deux petites roues en cuivre fixées par un même manchon à l'arbre de l'alternateur employé. Ces roues, parfaitement isolées l'une de l'autre au point de vue électrique, portaient chacune un petit couteau venant, à chaque tour, buter contre un couteau semblable placé à l'extrémité d'un ressort isolé. On réglait les ressorts de manière que les deux contacts eussent lieu exactement au même instant. On reconnaissait, d'ailleurs, que l'appareil était bien réglé lorsqu'en mettant l'électromètre en relation avec les deux pôles d'une pile, d'abord d'une façon directe, et ensuite par l'intermédiaire du joncteur tournant, on obtenait, dans les deux cas, la même indication.

Ce double contact exige un appareil très bien construit et un réglage délicat. Aussi, la plupart des expérimentateurs qui ont repris ces études ont-ils évité cette difficulté, comme l'avait fait d'ailleurs, M. Joubert, dans quelques-unes de ses mesures, en mettant l'une des bornes de l'électromètre en communication permanente avec l'un des points  $M$  ou  $N$  et en chargeant un joncteur tournant à une seule roue de mettre la seconde

borne en communication avec le second point une fois par période, à chaque retour d'une phase déterminée.

Si l'isolement est imparfait, comme cela a lieu pour les électromètres industriels, il faut placer en dérivation aux bornes de l'instrument un condensateur ayant pour effet d'en accroître la capacité, de façon à rendre la déperdition négligeable vis-à-vis de la charge. Mais alors il faut s'assurer que la capacité du condensateur n'a point d'influence perturbatrice sensible, ce dont on sera certain si on peut la modifier notablement, la doubler, par exemple, sans changer le résultat observé.

Lorsque les deux points *M* et *N* dont on veut étudier la différence de potentiel appartiennent à un conducteur rectiligne de faible longueur (*r*), on peut, au lieu de la méthode de l'électromètre, employer, comme l'a fait également M. Joubert, une méthode d'opposition consistant à établir entre *M* et *N* une dérivation *M C N* de résistance connue et graduée, et à chercher quelle est, sur cette dérivation, le point *C* présentant, à telle ou telle phase de la période, un potentiel différent de celui de *M* d'une quantité égale à la force électromotrice *e* d'une pile *P* (fig. 200). Pour effectuer cette recherche, on fait communiquer en permanence l'un des pôles de la pile avec le point *M*, par l'intermédiaire d'un galvanoscope *G*, l'autre avec le point *C*, par l'intermédiaire d'un conjoncteur tournant *J*, et l'on cherche, par tâtonnements, quel doit

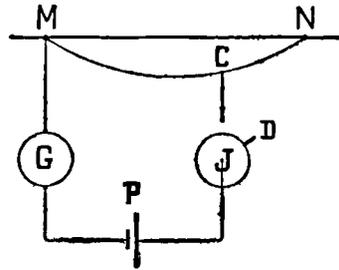


FIG. 200

être le point *C* pour que le galvanoscope reste au zéro, la pile agissant en opposition avec la différence de potentiel  $V_M - V_C$  à l'instant du contact. On a alors, en désignant par *R* et *r* les résistances de la dérivation entière *M C N* et de sa partie *M C*:

$$V_M - V_N = \frac{R}{r} e$$

—⊗—→

Si, avec un système qui est le siège d'un phénomène

1. On verra, dans la leçon sur la self-induction, la raison de cette restriction.

périodique de période  $T$ , un appareil d'épreuve est mis en relation, d'une façon pratiquement instantanée, à des intervalles réguliers dont la période a une valeur  $T'$  différente de  $T$ , l'état dans lequel il trouvera le système sera, à chaque épreuve, différent du précédent, et ainsi seront passées en revue toutes les phases d'une période.

Il est facile d'appliquer à l'étude des différences de potentiel périodiques cette forme particulière de la méthode stroboscopique : il suffit, pour cela, de régler la période d'un conjoncteur tournant de façon qu'elle soit légèrement supérieure à celle de la différence de potentiel à examiner. La déviation de l'appareil d'épreuve passera alors lentement par toutes les valeurs caractéristiques des diverses phases de cette différence de potentiel, et, si l'appareil les inscrit sur une surface se déplaçant proportionnellement au temps, la courbe obtenue en fournira la représentation graphique.

On peut, à l'exemple de M. A. Blondel, prendre comme appareil d'épreuve (*fig. 201*) un condensateur  $C$  qu'un contact tournant  $D$  met successivement en relation, une fois par tour, avec les points  $M$  et  $N$  et avec un galvanomètre  $G$  de shunt  $S$ . Le premier contact donne au condensateur une charge  $C (V_M - V_N)$  et le second fait passer cette quantité d'électricité dans le galvanomètre. S'il se produit, par seconde,  $n$  charges et, par conséquent,  $n$  décharges, le galvanomètre est le siège d'un débit  $nC (V_M - V_N)$  et accuse une déviation identique à celle que lui communiquerait un courant

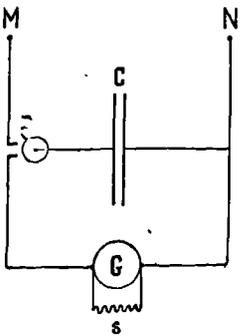


FIG. 201

continu d'intensité  $I = nC (V_M - V_N)$ . La déviation de l'équipage mobile est donc proportionnelle à  $V_M - V_N$ .

Ce principe vient d'être appliqué, d'une façon très pratique, par M. Hospitalier, dans un appareil désigné sous le nom d'**ondographe**, dont l'appareil d'épreuve commande une plume inscrivante directement à l'encre, sur une feuille de papier portée par un cylindre tournant, la courbe représentative de la différence de potentiel variable étudiée.



## II

### Forces électromotrices et différences de potentiel alternatives usuelles.

Les champs magnétiques à l'action desquels sont soumis les segments de conducteurs (barres ou boucles) qui constituent les éléments induits des alternateurs usuels sont, comme nous le verrons, symétriques autour d'un axe, et l'action inductrice résulte d'un mouvement de rotation uniforme autour de cet axe, soit des éléments induits, soit du système magnétique inducteur, soit d'une armature faisant varier la réluctance de l'espace compris entre les induits et les inducteurs. Il suit de là que les forces électromotrices ainsi obtenues sont *périodiques*, en raison même de la périodicité que présentent les variations de flux qui leur donnent naissance. En outre, elles changent alternativement de sens, puisqu'elles proviennent de flux alternativement croissants et décroissants (1), et la frac-

1. Voir ci-dessus, page 93.

tion de période pendant laquelle elles offrent un certain sens est la répétition exacte, au sens près, de celle pendant laquelle elles se manifestent en sens inverse. Bref, la période de ces forces électromotrices alternatives usuelles est divisible en deux demi-périodes identiques entre elles, au sens près.

Si l'on faisait abstraction des changements de sens, la courbe représentative d'une pareille force électromotrice se composerait (*fig. 202*) (I) d'une série de festons identiques entre eux, chacun d'eux correspondant à une demi-période  $\left(\frac{T}{2}\right)$ .

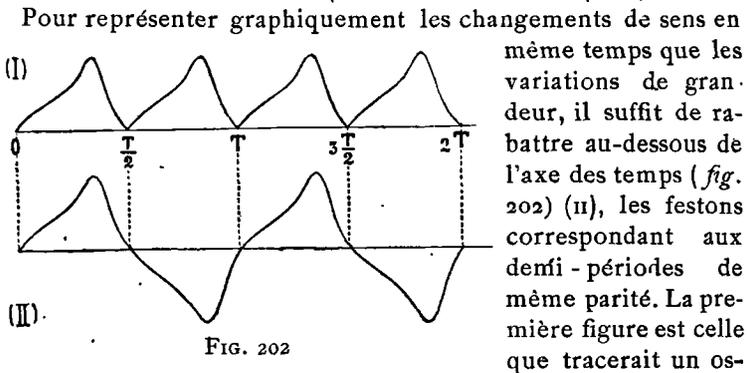


FIG. 202

Les différences de potentiel résultant des forces électromotrices alternatives usuelles présentent ces mêmes caractères de périodicité, d'alternativité et de divisibilité en deux demi-périodes identiques. Elles donnent lieu aux remarques suivantes :

*La période d'une différence de potentiel alternative*

à la même durée que celle de la force électromotrice qui lui donne naissance.

Les zéros d'une différence de potentiel  $V$  alternative observée entre deux points d'un circuit actionné par un alternateur et ceux de la force électromotrice  $E$  de ce dernier ne sont pas concomitants. En d'autres termes, il existe entre l'une et l'autre de ces grandeurs une **différence de phase** se traduisant graphiquement par un déplacement des zéros de l'une des courbes par rapport à l'autre (fig. 203).

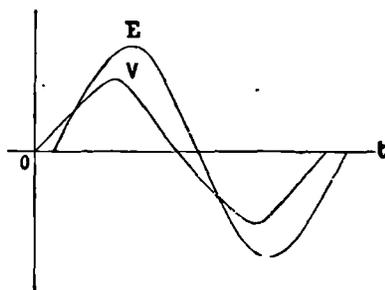


FIG. 203

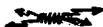


La comparaison des différences de potentiel  $V, V'$  en deux couples de points  $(M, N), (M', N')$  appartenant à un même circuit soumis à l'action d'un alternateur usuel donne lieu aux remarques suivantes :

*Les périodes de  $V$  et de  $V'$  sont égales entre elles et à la période  $T$  de la force électromotrice agissant sur le circuit.*

*Les zéros de  $V$  et de  $V'$  ne sont pas, en général, concomitants.*

*Les valeurs maxima de  $V$  et de  $V'$  ne sont, en général, ni égales, ni concomitantes.*



## III

## Alternovoltmètres

L'effet produit sur un voltmètre par une différence de potentiel alternative usuelle dépend essentiellement de la loi à laquelle obéit l'action subie par l'équipage mobile de cet appareil.

Il convient, à ce point de vue, de diviser les voltmètres ordinaires en deux catégories :

Sur les uns, une différence de potentiel donnée produit un effet proportionnel à sa valeur, tandis que, sur les autres, elle produit un effet proportionnel au *carré* de sa valeur. Le premier cas est, par exemple, celui des voltmètres électromagnétiques (1) et le second celui des voltmètres thermiques (2). Nous désignerons les uns sous le nom de *voltmètres du 1<sup>er</sup> degré* et les autres sous le nom de *voltmètres du 2<sup>me</sup> degré*.

Lorsqu'on met un voltmètre en relation *permanente* avec deux points entre lesquels se produit une différence de potentiel alternative périodique usuelle, l'effet obtenu est tout différent suivant qu'il s'agit d'un voltmètre de la première ou de la seconde catégorie.

A. *Effet d'une différence de potentiel alternative périodique sur un voltmètre du 1<sup>er</sup> degré.*

Un voltmètre du 1<sup>er</sup> degré à indications lentes, c'est-à-dire non oscillographique, peut, en termes géné-

---

1. Voir t. I, p. 208 et suiv.

2. Voir t. I, p. 252 et suiv.

raux, être défini un appareil dans lequel un équipage mobile, possédant une période d'oscillation propre relativement grande, est soumis, par l'effet d'une différence de potentiel donnée, à une action (force ou couple) proportionnelle à cette différence, en sorte que si l'on désigne par  $V$  la différence de potentiel agissante et par  $F$  l'action qui en résulte, on a

$$F = k V$$

Pour mesurer  $F$  et, par suite, connaître  $V$ , on peut soit déterminer la force antagoniste capable de maintenir l'équipage mobile dans sa position normale, soit, ce qui rend les observations plus faciles, disposer l'équipage de façon que son déplacement développe une force antagoniste croissant avec l'écart. Alors l'équipage atteint une position d'équilibre particulière, caractérisée par une déviation  $\delta$  qui, moyennant une graduation préalable, permet de connaître  $V$ .

Etant donnée (*fig. 204*) la courbe représentative d'une action variable (force ou couple), on sait que l'aire  $M_0 t_0 t M$ , comprise entre l'axe des temps, un

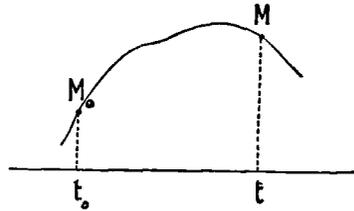


FIG. 204

segment  $M_0 M$  de la courbe et les ordonnées  $M_0 t_0 M t$ , correspondant aux extrémités de ce segment, représente numériquement la quantité de mouvement (linéaire ou angulaire) communiquée, pendant le temps  $t - t_0$ , par l'action variable, au corps sur lequel elle agit. Le quotient de cette aire par le paramètre d'inertie du corps (masse au moment d'inertie) fait

donc connaître l'excès de la vitesse (rectiligne ou angulaire) possédée par le corps à l'instant  $t$  sur sa vitesse à l'instant  $t_0$ . Si la courbe présente des parties situées au-dessus et d'autres au-dessous de l'axe des temps, ce qui arrive lorsque l'action considérée agit tantôt dans un sens et tantôt en sens contraire, il faut, pour appliquer ce théorème, compter positivement les aires situées d'un côté et négativement celles situées du côté opposé.

Dans le cas d'une différence de potentiel alternative périodique et symétrique  $V$  agissant sur l'équipage mobile d'un voltmètre du 1<sup>er</sup> degré, la ligne représentative de l'action  $T$  est, comme celle de  $V$ , dont ses ordonnées se déduisent par simple proportionnalité, formée de sinuosités qui, dans l'intervalle d'une période, délimitent, de part et d'autre de l'axe des temps, des aires respectivement égales entre elles et dont la somme algébrique est, par conséquent, nulle. Si donc on applique, dans ce cas, à l'intervalle d'une période, le théorème rappelé tout-à-l'heure, on voit que la différence des vitesses possédées par l'équipage mobile à la fin et au commencement d'une période est nulle. La vitesse étant nulle au début de la première période, le sera aussi à la fin de chacune des suivantes. Le voltmètre, dans ces conditions, demeurera pratiquement au zéro, comme s'il n'existait entre ses bornes aucune différence de potentiel.

Il n'en serait plus ainsi si l'on mettait le voltmètre en relation avec les deux points  $M$  et  $N$ , par l'intermédiaire d'un commutateur renversant l'ordre des

connexions au moment même où la différence de potentiel changerait de sens, c'est-à-dire toutes les demi-périodes. Toutes les sollicitations reçues par l'équipage mobile seraient alors concordantes et pour le maintenir en équilibre, il faudrait faire agir une action antagoniste  $G$  produisant en sens inverse une quantité de mouvement égale à celle due à l'action électrique et donnant, par exemple, pour une demi-période (*fig. 205*), l'égalité

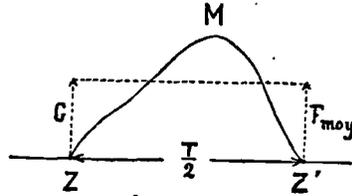


FIG. 205

$$G \frac{T}{2} = \text{aire } ZMZ' = F_{\text{moy}} \times \frac{T}{2}$$

Cette action antagoniste représenterait la *valeur moyenne* de l'action résultant de la différence de potentiel variable mise en jeu. La valeur de la différence de potentiel continue qui produirait le même effet serait ce qu'on est convenu d'appeler la **valeur moyenne** de la différence de potentiel variable considérée, pendant une demi-période.

Sur la courbe figurative de cette dernière (*fig. 205*), cette valeur moyenne serait représentée par l'ordonnée qui, prise comme hauteur d'un rectangle de base  $\frac{T}{2}$ , donnerait une aire équivalente à celle comprise entre la courbe et sa base  $\frac{T}{2}$ .

B. *Effet d'une différence de potentiel alternative*

*périodique sur un voltmètre du 2<sup>m</sup>e degré, non oscillographique.*

Un voltmètre du 2<sup>m</sup>e degré à indications lentes peut être défini, en général : un appareil dans lequel un équipage mobile possédant une période d'oscillation propre relativement grande est soumis, par l'effet d'une différence de potentiel donnée, à une action  $\mathbf{F}$  (force ou couple) proportionnelle au carré de cette différence :

$$\mathbf{F} = k \mathbf{V}^2$$

La courbe représentative de  $\mathbf{F}$  a ici ses ordonnées toutes situées du même côté de l'axe des temps, car l'action  $\mathbf{F}$  ne change pas de sens avec  $\mathbf{V}$ . Il s'ensuit que l'aire intervenant dans le calcul de la différence des vitesses de l'équipage mobile à deux instants  $t_1$  et  $t_2$  ne peut, en aucun cas, être nulle.

La quantité de mouvement reçue par cet équipage allant continuellement en croissant, ce dernier ne pourra être maintenu en équilibre que si l'on oppose à  $\mathbf{F}$  une action  $\mathbf{G}$  telle que, sous l'influence de la résultante  $\mathbf{F} - \mathbf{G}$ , l'équipage ne prenne que des vitesses insensibles.

Soit  $\mathbf{F}_{\text{moy}} = k (\mathbf{V}^2)_{\text{moy}}$  la moyenne des ordonnées que présente la courbe  $\mathbf{F}$  dans l'intervalle d'une période  $\mathbf{T}$ . Une action continue  $\mathbf{G}$ , égale à  $\mathbf{F}_{\text{moy}}$ , opposée, pendant la durée de cette période, à l'action variable  $\mathbf{F}$ , neutraliserait exactement l'effet de cette dernière. Si donc à l'action variable  $\mathbf{F}$  on oppose une action antagoniste permanente et de grandeur égale à  $\mathbf{F}_{\text{moy}}$ , la vitesse de l'équipage mobile, nulle au début, sera

nulle aussi à la fin de chacune des périodes successives et l'équipage de l'appareil restera pratiquement en repos.

Si l'appareil est disposé de façon qu'une action antagoniste naisse d'une déviation de l'équipage mobile, ce dernier éprouvera un écart tel que l'action antagoniste qui en résulte soit égale à  $F_{\text{moy}}$ .

En résumé, un voltmètre du 2<sup>me</sup> degré soumis à une différence de potentiel alternative périodique se comporte comme s'il était soumis à une différence de potentiel continue.

Si  $V_c$  est la valeur d'une différence de potentiel continue équivalente, au point de vue de l'effet produit sur le voltmètre à une différence de potentiel alternative donnée, on a, entre le moyen carré de cette dernière et le carré de  $V_c$ , la relation

$$V_c^2 = (V^2)_{\text{moy}}$$

puisqu, les deux effets étant équilibrés par la même

force antagoniste  $G$ , on a :  $G = \frac{1}{k} V_c^2 = \frac{1}{k} (V^2)_{\text{moy}}$ .

La valeur numérique de  $V_c$ , indiquée par la lecture du voltmètre interprétée comme s'il s'agissait d'un courant continu, est désignée sous le nom de **valeur efficace** de la différence de potentiel variable considérée.

La valeur efficace d'une différence de potentiel alternative est représentée ordinairement par le symbole

$$V_{\text{eff}}$$

ou, lorsqu'il ne peut y avoir confusion, tout simplement par la lettre  $V$ .

Pour représenter les valeurs moyenne et maxima,  
on emploie les symboles

 $V_{\text{moy}}$  $V_{\text{max}}$ 

# TRENTIÈME LEÇON



## INDUCTION

\*\*\*

### COURANTS INDUITS. LOI DE LENZ COURANTS DE FOUCAULT



#### I

#### Courants induits. Loi de Lenz

De même que les forces électromotrices voltaïques et thermoélectriques, les forces électromotrices d'induction, lorsqu'elles agissent sur des circuits fermés, donnent lieu à des courants.

Ces courants sont naturellement désignés sous le nom de **courants d'induction** ou de **courants induits**.

Les courants induits sont constants, en grandeur et en direction, si les forces électromotrices qui les engendrent sont elles-mêmes constantes. Leur sens est celui-même de la force électromotrice résultante et leur intensité  $I$  est liée à la valeur  $E$  de cette dernière ainsi qu'à la résistance totale du circuit par la simple loi

$$\text{d'Ohm : } I = \frac{E}{R}.$$

Au contraire, à des forces électromotrices induites variables correspondent des courants induits variables.

Ce dernier cas se présente, en particulier, lorsque, pour une raison quelconque, le flux magnétique total embrassé par un circuit éprouve une variation.

Par *flux total* il faut entendre non seulement le flux dû aux systèmes magnétiques ou électromagnétiques étrangers au circuit, mais aussi le flux dû au champ magnétique propre au circuit, c'est-à-dire créé par le courant même dont ce circuit est le siège.

Si  $\Phi$  désigne en grandeur et en signe (1) le flux total, la somme algébrique de toutes les forces électromotrices d'induction du circuit est donnée, à chaque instant, en volts, par l'expression :

$$E = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$$

et l'intensité du courant induit est égale, au même instant, au quotient de cette force électromotrice par la résistance totale  $R$  du circuit :

$$I = - \frac{1}{10^8} \frac{\frac{d\Phi}{dt}}{R}$$

La quantité d'électricité  $dQ$  mise en jeu pendant le temps  $dt$  est donc :

$$dQ = I dt = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{R}$$

d'où, pour la quantité  $Q$  mise en jeu entre deux ins-

---

1. On affectera  $\Phi$  d'un signe en appliquant au circuit tout entier la convention énoncée ci-dessus, (page 93) pour une boucle.

tants tels que de l'un à l'autre le flux total passe d'une valeur  $\Phi_1$  à une autre valeur  $\Phi_2$ , l'expression :

$$Q = - \frac{1}{10^8} \frac{\Sigma d\Phi}{R} = - \frac{1}{10^8} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}$$

Supposons, en particulier, que l'état variable du circuit soit dû uniquement à une variation  $\Delta\Phi_e$  du flux provenant d'un système magnétique extérieur. On a alors  $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi_e$ , car avant et après cette variation le circuit n'est le siège d'aucun courant et, par conséquent, d'aucun flux propre. La décharge d'induction  $Q$  dont le circuit est le siège, dans ces circonstances, est donc liée à la variation de flux qui la provoque par la relation :

$$Q = - \frac{1}{10^8} \frac{\Delta\Phi_e}{R}$$

Ainsi se trouve justifiée la règle énoncée précédemment (pages 8 et 9) au sujet des décharges d'induction.



De même que les courants dus aux forces électromotrices voltaïques ou thermoélectriques, les courants d'induction donnent lieu, entre les conducteurs qui en sont le siège et des systèmes magnétiques extérieurs, à des actions électromagnétiques.

Ces actions sont de sens tels qu'elles tendent à s'opposer aux changements de situation relative du circuit induit et des systèmes magnétiques agissant sur lui, ce qu'on exprime habituellement d'une façon plus concise en disant que *l'induction gêne le mouvement qui la produit* (Loi de Lenz).

On fait, en pratique, une application continue de cette loi pour amortir les oscillations des équipages mobiles des galvanomètres électromagnétiques. Il suffit, pour cela, de fermer les circuits de ces appareils. Ces circuits sont alors le siège de courants induits dus aux variations de flux provoquées par le mouvement des parties mobiles, et l'action mutuelle de ces courants et des systèmes magnétiques extérieurs gêne le mouvement, au point d'amener rapidement la partie mobile au repos.

Telle est la raison, par exemple, pour laquelle un galvanomètre Deprez d'Arsonval shunté est d'autant plus près de l'apériodicité que la résistance du shunt est plus faible. La grande aptitude de cet appareil à l'apériodicité et son indifférence aux perturbations magnétiques extérieures constituent deux qualités précieuses justifiant la grande faveur dont il jouit dans les installations de mesures industrielles.

C'est aussi en vertu des courants d'induction dont elle est le siège qu'une masse métallique mobile effectue des oscillations rapidement décroissantes lorsqu'on place dans son voisinage un aimant un peu énergique ; et que, réciproquement, les oscillations d'un aimant mobile prennent fin plus rapidement lorsqu'elles ont lieu au voisinage d'une masse métallique, surtout d'une masse de cuivre (1), plus efficace en cela que toute autre, en raison de sa plus grande conductibilité électrique et de la plus grande intensité qu'y prennent, par suite, les courants induits.

Ainsi s'explique le rôle amortisseur de l'aimant *M*, entre les

---

1. Cet effet, remarqué par le constructeur *Gambey* à la vue d'une aiguille de boussole oscillant au voisinage d'une plaque de cuivre, ne fut expliqué qu'après la découverte par *Faraday* des courants d'induction.

mâchoires duquel se meut le disque d'aluminium dont est muni l'équipage mobile des voltmètres et ampéremètres thermiques *Hartmann et Brann* (tome I page 254 fig. 132 et 133).

C'est également dans un but d'amortissement que l'équipage mobile de l'électromètre *Carpentier* (t. I page 105 fig. 64) se meut, dans le champ d'un aimant et aussi que les barreaux aimantés mobiles des galvanomètres électromagnétiques sont placés dans des enceintes de cuivre à parois aussi rapprochées que possible.

Dans tous les appareils dont l'amortissement est dû ainsi à des courants induits, l'action amortissante s'anule en même temps que la vitesse, de sorte que la position d'équilibre n'en est aucunement modifiée, ce qui n'est pas le cas, lorsque l'action amortissante est demandée à un frottement mécanique comme celui que rencontre, par exemple, une palette immergée dans un liquide.



## II

### Courants de Foucault

Toute masse métallique animée d'un mouvement de rotation dans un champ magnétique non uniforme, un peu intense, rencontre une résistance et éprouve un échauffement exactement comme si elle était serrée par les mâchoires d'un frein.

On met ce fait en évidence d'une façon très nette, comme le faisait *Foucault*, en disposant entre les épanouissements polaires *NS* d'un électroaimant (fig. 206) un disque de cuivre *C* recevant, à l'aide d'un pignon *P* commandé par une série d'engrenages, un mouvement rapide de rotation autour de son axe. Dès que l'électro-aimant est excité, le disque, préalablement

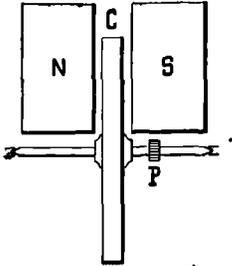


FIG. 206

lancé à toute vitesse, s'arrête, et, si l'on veut continuer à le mouvoir, on est obligé d'appliquer à la manivelle un effort considérable, comme si le disque avait à vaincre un frottement énergique. D'ailleurs, la conséquence du mouvement obtenu dans ces conditions est, tout comme si l'on avait affaire à un frottement mécanique, un échauffement du disque très nettement perceptible au toucher.

Résistance au mouvement et échauffement sont des effets dus à des courants induits dont le disque est le siège.

En raison du caractère classique et tout particulièrement démonstratif de cette expérience, on a coutume de désigner ces courants induits et tous ceux qui prennent naissance au sein de masses métalliques dans des circonstances analogues, sous le nom de **courants de Foucault**.

Si le disque était soumis à l'action d'un champ uniforme, tous ses rayons seraient le siège de forces électromotrices de même valeur :  $E = \frac{1}{10^8} \frac{H\omega r^2}{2}$  (1). En raison de la complète symé-

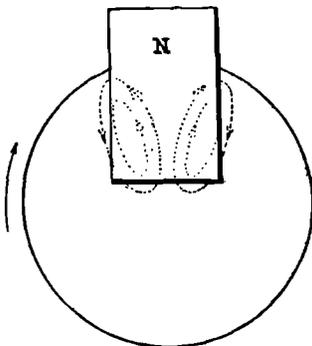


FIG. 207

trie, il n'y aurait alors, dans le disque, aucun courant; on observerait simplement entre le bord et le centre une différence de potentiel  $V$  égale et opposée à  $E$ .

Mais si le champ, au lieu d'être uniforme, est plus intense dans une région que dans les autres, les rayons du disque qui sont dans cette région sont le siège de forces électromotrices supérieures à celles des rayons

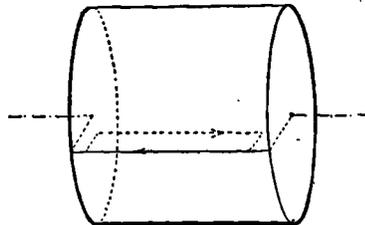
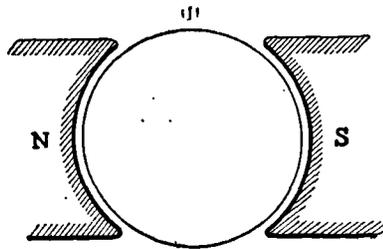
1. Valeur obtenue en faisant  $r_0 = 0$  dans la formule établie ci-dessus page 90.

situés de part et d'autre et il se produit alors des courants suivant des circuits tels que ceux représentés par la *fig.* 207, et ayant, dans la région la plus intense du champ, une direction centrifuge ou centripète suivant le sens du mouvement et suivant la face d'entrée du flux.

Ces lignes de courants sont fixes dans l'espace et correspondent aux trajectoires orthogonales de lignes équipotentielles qu'on peut repérer en appuyant sur le disque mobile deux frotteurs reliés respectivement aux bornes d'un électromètre sensible. L'un des frotteurs étant fixe, si l'on cherche les diverses positions de l'autre pour lesquelles l'électromètre reste au zéro, on a autant de points de la ligne équipotentielle passant par le premier.



On peut observer les mêmes effets avec un cylindre métallique tournant entre les épanouissements polaires convenablement alésés d'un électro-aimant (*fig.* 208 I). Les forces électromotrices dominantes sont alors suivant les génératrices extérieures du cylindre et les courants de Foucault suivent, parallèlement à la surface latérale de celui-ci, des trajectoires telles que celles représentées en (II) (*fig.* 208).



(II)

FIG. 208

C'est sous cette forme que M. *Marcel Deprez* a proposé de faire servir l'expérience de Foucault à la constitution d'un frein exempt de frottements mécaniques et réglable d'une façon absolument continue par variation du courant

d'excitation de l'électro-aimant. Pour mesurer le couple dû à l'action mutuelle du cylindre et de l'électro-aimant inducteur, il suffirait de rendre l'un d'eux libre d'osciller autour de l'axe et de le maintenir en équilibre par un couple antagoniste dû à un contrepois convenablement ajusté.

Un tel couple est proportionnel à l'intensité des courants induits, par suite aux forces électromotrices qui les produisent et, en définitive, à la vitesse de rotation, à laquelle ces forces électromotrices sont elles-mêmes proportionnelles. On peut donc aussi faire jouer à l'appareil le rôle de **Cinémomètre**.

La *fig. 209* représente le dispositif indiqué à cet effet par M. Marcel Deprez sous le nom d'*indicateur magnétique de vitesse*. Un aimant NS reçoit par une poulie p communication du mouvement de rotation qu'il s'agit d'étudier. Un cylindre de cuivre C placé entre ses pièces polaires est monté sur des couteaux cc, et l'on fait équilibre au couple électromagnétique qui s'exerce sur lui par un couple antagoniste dû à l'action de la pesanteur sur un poids Q porté par une tige t.

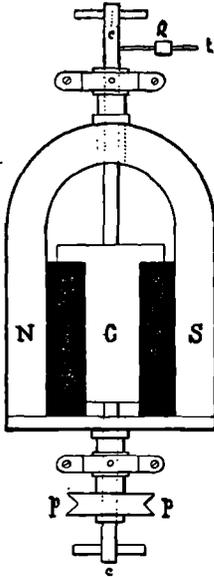


FIG. 209

Un grand nombre d'appareils employés dans l'industrie électrique comportent des masses métalliques soumises à l'action de flux magnétiques variables dans des conditions telles qu'elles seraient, si l'on n'y portait remède, le siège

de courants induits intenses occasionnant des échauffements nuisibles et correspondant en tous cas à un surcroît de dépense d'énergie, puisque la chaleur développée aurait nécessairement sa source dans un surcroît de travail de l'agent moteur. La crainte d'échauffements anormaux et la préoccupation de contenir dans de justes limites les dépenses d'énergie font donc au praticien une obligation de réduire au minimum les courants de Foucault qui sont qualifiés, à ce point de vue, de **courants parasites**.

L'artifice employé pour les atténuer consiste à substituer à toutes les pièces métalliques massives, dans les appareils où de tels effets sont à craindre, des assemblages de plaques minces séparées par des lames d'air ou de matière isolante (papier, oxydes, vernis, etc.), de telle sorte que les circuits suivis par les courants parasites soient coupés par ces lames mauvaises conductrices. Ces circuits présentent alors des résistances suffisantes pour que les intensités soient réduites, sinon à zéro, au moins à des valeurs minimales pratiquement admissibles. Des masses métalliques ainsi constituées sont dites *feuilletées*.

Pour éviter, ou au moins atténuer notablement, les courants de Foucault dans une masse métallique, il ne suffit pas de la feuilletter ; il est essentiel que les intervalles isolants entre les feuillets conducteurs présentent une orientation convenable. afin qu'ils coupent, ainsi qu'il vient d'être dit, les circuits des courants parasites. Cette orientation doit être déterminée, dans chaque cas, en tenant compte de la forme et du mode de mouvement de la masse métallique, ainsi que de la répartition des forces électromotrices à son intérieur.

Par exemple, pour le disque de Foucault, des coupures parallèles à son plan seraient inefficaces, puisqu'elles seraient parallèles aux cou-

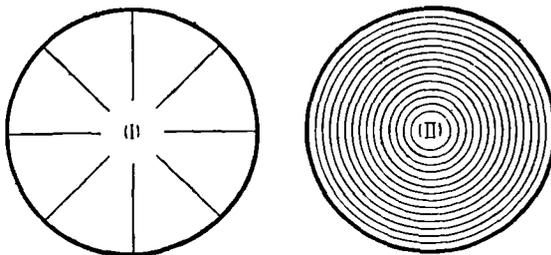


FIG. 210

rants induits. Au contraire, ces courants seront considérablement affaiblis par des coupures perpendiculaires au plan du disque.

Pour satisfaire à cette condition, on pourra, soit entailler le disque suivant des rayons (*fig. 210 I*), soit le constituer à l'aide de bandes minces concentriques, ou, ce qui revient pratiquement au même, à l'aide d'une lame mince enroulée de champ (*fig. 210 II*).

Il n'est pas nécessaire, pour juger de l'efficacité de ces coupures, de faire appel à l'appareil même de Foucault. Qu'au dessous

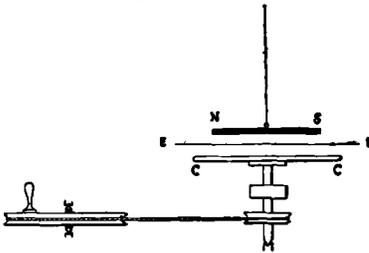


FIG. 211

d'un barreau aimanté horizontal NS, suspendu à un fil (*fig. 211*) on fasse tourner un disque de cuivre C plein, et l'on verra ce barreau entraîné dans le même sens que le disque, par l'action des courants induit dans ce dernier. Ce même barreau, par contre, demeurera immobile si les disque tournant employé est coupé de traits de scie suivant quelques-uns de ses rayons (1).

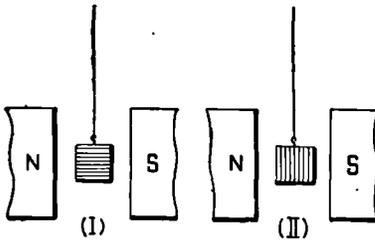


FIG. 212

Une forme d'expérience encore plus simple consiste à suspendre à un fil entre les pôles NS d'un électroaimant donnant un champ horizontal (*fig. 212*) un petit cube C formé de feuilles minces de cuivre juxtaposées. Si l'on tord le fil de suspension et qu'on abandonne ensuite le cube à lui-même, il tourne librement avec une assez grande vitesse pourvu que les feuilles de cuivre dont il est formé aient leurs plans dirigés horizontalement c'est-à-dire parallèlement au champ (I). Mais le mouvement du cube est, par contre, empêché

1. Dans ces expériences, on prend soin, naturellement, d'éviter l'agitation de l'air autour du barreau en interposant entre celui-ci et le disque tournant un écran en carton E.

par une action antagoniste due à des courants induits, si les feuilles ont leurs faces parallèles à ces courants, c'est-à-dire verticales (II).

D'après ces faits, si une masse métallique cylindrique est appelée à tourner dans un champ magnétique à lignes de forces perpendiculaires à l'axe (*fig. 213 I*), comme, dans ce cas les courants de Foucault sont parallèles à ce dernier, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus on devra, pour les atténuer, feuilletter cette masse, en la constituant par une série de disques de tôle perpendiculaires à l'axe (*fig. 213 II*).

Dans le travail de façonnage de la surface latérale d'une telle pile de disques, il faut éviter avec grand soin les bavures qui feraient communiquer entre eux les bords des différentes tôles, car alors le système

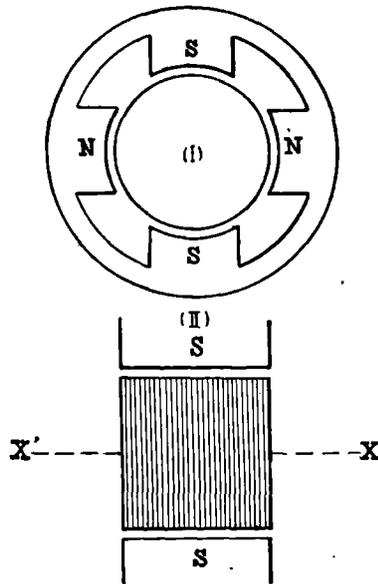


FIG. 213

serait entouré d'une gaine métallique continue dans laquelle se développeraient des courants de Foucault.

Lorsqu'une masse de fer servant, comme l'indique la *fig. 213 (I)* d'armature à une couronne d'électro-aimants est à surface *lisse*, le flux magnétique demeure invariable en chaque point des épanouissements polaires de

ces électroaimants ; aussi ces derniers peuvent-ils, sans inconvénient, être constitués par des masses de fer pleines. Il devient, au contraire, nécessaire de les feuilletter lorsque l'armature, au lieu d'être lisse, est pourvue de cannelures longitudinales et présente par suite (*fig.*

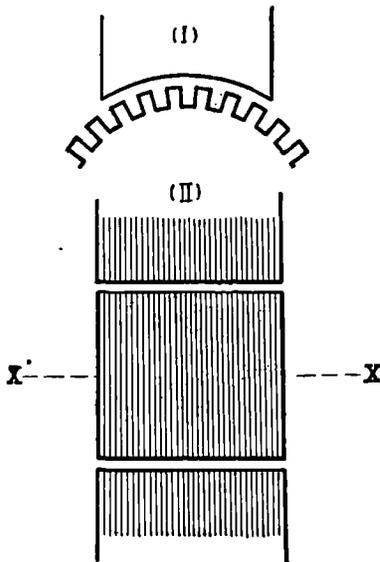


FIG. 214

214 I) une série de saillies ou de dents qui, en tournant, font varier périodiquement l'épaisseur de l'entrefer et par suite l'induction magnétique en regard de chaque point des épanouissements polaires. Ces variations exposent les masses polaires à des courants de Foucault qu'on atténue par un feuilletage de même sens que celui de l'armature (*fig.* 214 II).

A ce point de vue, il y a intérêt à préférer aux rainures larges et complètement ouvertes (*fig.* 215 I) des rainures plus étroites (*fig.* 215 II) et même à demi fermées (*fig.* 215 III), les variations magnétiques étant, dans ce dernier cas, bien moindres que dans le premier. Il est bon notamment que l'entrefer soit plus grand que la largeur des entailles.

Mais, entre toutes, les encoches complètement fermées (*fig.* 215 IV) seront évidemment les plus avanta-

geuses comme apportant le moins de perturbation à la répartition latérale des flux magnétiques. Des cylindres à encoches fermées permettent, en effet, sans crainte des courants de Foucault, l'emploi de pôles inducteurs non feuilletés, aussi bien que les cylindres lisses.

Pour faciliter la mise en place des fils induits, on peut employer des rainures ouvertes qu'on ferme ensuite par une couche de fils de fer (*fig. 215 V*).

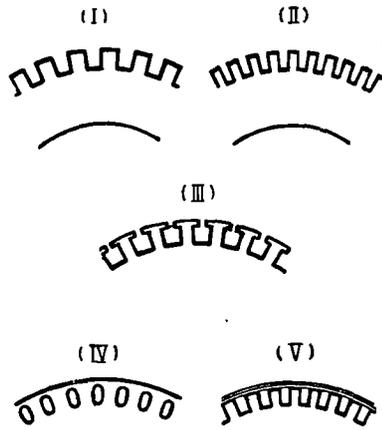


FIG. 215

On donne également une constitution feuilletée aux noyaux de fer des bobines destinées à être parcourues par des courants alternatifs ; car les variations de flux dues à de tels courants donneraient lieu sans cela à des courants de Foucault occasionnant des échauffements des noyaux et par conséquent des pertes d'énergie inadmissibles.

Il y a deux façons d'obtenir des noyaux convenablement divisés : l'une qui consiste à les composer de faisceaux de fils de fer ; l'autre qui consiste à les former d'un empilement de minces plaques de tôles isolées par de légères couches d'oxyde, de vernis ou de papier. Les axes des fils de fer, dans le premier cas ; les faces des plaques de tôle, dans le second, doivent

être parallèles aux lignes de force de la bobine (fig. 216 I et II).

Avec ces deux espèces de noyaux divisés, il y a de la place perdue, en ce sens que la section du noyau n'est plus entièrement en fer, une partie étant formée par

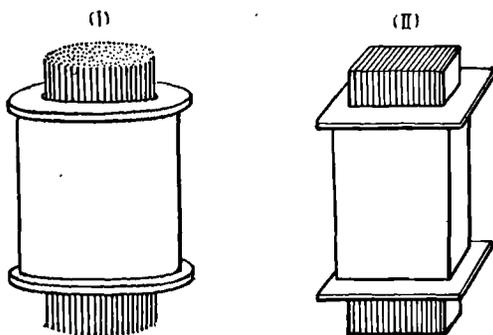


FIG. 216

l'air, le vernis ou le papier qui séparent les fils ou les plaques. En d'autres termes, la section de fer offerte au flux magnétique est inférieure à la

section totale du noyau. Dans les noyaux formés de faisceaux de fils, la partie fer ne forme que 78 p. 100 au plus de la section totale (1); tandis que dans les paquets de tôles, elle peut atteindre facilement 89 p. 100 (2). Pour ce motif, et aussi en raison d'une plus grande facilité de construction, on n'emploie à peu près exclusivement que des tôles pour la confection des noyaux magnétiques divisés. Les fils de fer ne sont usités que dans les appareils ne comportant que de petites bobines ou des noyaux cylindriques.



1. Ce chiffre se rapporte au cas d'un paquet rectangulaire et est donné par le rapport  $\left(\frac{\pi}{4}\right)$  de la surface de la section d'un fil  $\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)$  à celle du carré circonscrit ( $d^2$ ).

2. En effet, avec des tôles d'épaisseur  $e = 0,5^{\text{mm}}$  séparées par des intervalles isolants d'épaisseur  $\epsilon = 0,06^{\text{mm}}$  on a  $\frac{\text{section fer}}{\text{section totale}} = \frac{0,50}{0,56} = 0,89$ .

Dans les masses de fer feuilletées, les pertes de puissance par courants de Foucault sont d'autant moindres, à volume égal, que les tôles sont plus minces.

Considérons, en effet, une tôle de largeur fixe  $a$  et d'épaisseur  $e$ . Le flux qu'elle reçoit est proportionnel à  $e$  et il en est de même de la force électromotrice qui y est induite. La puissance calorifique dissipée par le courant correspondant est proportionnelle au produit du carré de cette force électromotrice par l'inverse de la résistance de son circuit. Or le premier facteur est proportionnel au carré de l'épaisseur  $e$  et le second à cette épaisseur elle-même : en définitive, la puissance mise en jeu par courants de Foucault dans la tôle considérée est proportionnelle à  $e^3$ . D'ailleurs, pour une largeur et une hauteur données le volume de cette tôle est proportionnel à  $e$ . Donc la puissance dissipée par unité de volume est proportionnelle à  $e^2$ . Elle dépend d'ailleurs aussi de la fréquence  $F$  du flux variable et de la valeur maxima  $\mathcal{B}$  de l'induction magnétique. Elle est donc proportionnelle à  $e^2 F \mathcal{B}$ .

Si l'on exprime l'épaisseur  $e$  en dixièmes de millimètres, on peut calculer pratiquement l'énergie dissipée par courants de Foucault dans une masse de fer feuilleté, à raison de

$$(j_1)_1 = \frac{16}{10^{10}} e^2 F^2 \mathcal{B}^2 \text{ joules par cm}^3 \text{ et par seconde}$$

On voit par là combien est grande l'influence de l'épaisseur des tôles employées, puisqu'en diminuant, par exemple, l'épaisseur de moitié, on réduit au quart de sa valeur primitive la perte due aux courants parasites.

En pratique, on admet comme très convenables des épaisseurs comprises entre 3 et 5 *dixièmes de millimètres*.

Par exemple, pour  $\mathcal{B} = 5.000$ ,  $F = 50$  et  $e = 5$ , on aurait  $(H)_1 = 0,0025$  joules par  $\text{cm}^3$  et par seconde.

On réserve, naturellement, les tôles les plus minces pour les inductions et les fréquences les plus élevées.



En divisant les noyaux, il y a une perte qu'on n'évite pas, c'est celle qui est due à l'hystérésis. Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, on ne peut l'atténuer que par un choix convenable de la qualité des tôles, suivant les indications d'un hystérésimètre.

Remarquons, à propos de ce dernier appareil, qu'en toute rigueur, le couple qu'on y observe comme effet d'un déplacement relatif d'un paquet de tôles et d'un aimant est dû principalement, il est vrai, à l'hystérésis, mais aussi un peu à des courants de Foucault, et qu'il importe, pour atténuer l'erreur commise en interprétant l'essai comme si ces courants n'intervenaient pas, de n'opérer qu'avec des vitesses de rotation médiocres, pour lesquelles ces courants sont, en effet, négligeables.



Si le cadre sur lequel est enroulé le fil d'une bobine parcourue par des courants alternatifs est constitué par une matière conductrice (cuivre, laiton, etc.), la valeur moyenne du champ magnétique à l'intérieur de cette bobine est moindre, toutes choses égales, d'ail-

leurs, que si ce cadre est constitué par une matière isolante. Cet effet s'explique par les courants de Foucault dont la matière conductrice du cadre est le siège dans le premier cas et qui ont, pendant la majeure partie de la période, une action magnétique opposée à celle des spires de la bobine.

Pour éviter cet affaiblissement du champ dans les appareils comportant des bobines à courants alternatifs, il faut avoir soin de constituer les cadres de ces bobines en matières non conductrices, ou, s'ils sont métalliques, de les munir de fentes parallèles à l'axe.



Les champs magnétiques inducteurs appelés à agir sur les conducteurs induits des dynamos et alternateurs présentent dans le voisinage des cornes des pièces polaires (*fig. 217*), des régions non uniformes dans lesquelles les conducteurs induits, lorsque leur section est un peu grande, sont le

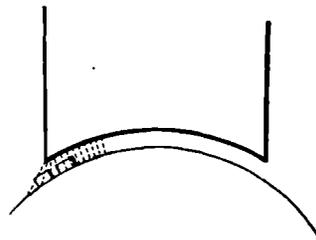


FIG. 217

siège de courants de Foucault, en raison de l'inégalité notable qui se présente alors entre les forces électromotrices développées en leurs différents points. Il est avantageux, en conséquence, de constituer ces conducteurs par des *câbles* et non par des barres pleines, les médiocres contacts des brins du câble entre eux opposant aux courants de Foucault une résistance opportune.

Les induits à encoches sont préférables encore, à ce point de vue, aux induits lisses, parce que les inégalités du champ magnétique inducteur sont moins brusques dans les encoches que dans l'entrefer. Un arrondissement de l'angle des cornes polaires est également d'un bon effet, en donnant plus d'étendue à la région de passage de la zone neutre à la partie uniforme du champ. Il y a évidemment alors moins d'inégalité entre les forces électromotrices induites, au même instant, dans les divers filets d'un même conducteur.



# TRENTE-UNIÈME LEÇON



## INDUCTION

\*\*\*\*

### COURANTS VARIABLES. COURANTS ALTERNATIFS AMPÈREMÈTRES POUR COURANTS ALTERNATIFS



#### I

#### Courants variables. Courants alternatifs

Lorsqu'un conducteur fait partie d'un circuit auquel est appliqué une force électromotrice constante, il l'indique par certains effets (électriques, magnétiques, mécaniques, calorifiques ou chimiques), qui offrent un degré constant, caractérisant ce qu'on est convenu d'appeler l'*intensité* du courant dont ce circuit est regardé comme le siège.

Si ce même conducteur vient à faire partie d'un circuit, auquel est appliquée une force électromotrice variable, il manifeste des propriétés du même genre, mais à des degrés variables d'un instant à l'autre.

Ainsi deux points **M** et **N** de ce conducteur étant mis en relation avec un condensateur, on constate que la charge acquise par ce dernier, dépend en grandeur ou même en signe du

moment ou cesse le contact. Ainsi encore le champ magnétique, que crée autour de lui le conducteur considéré produit sur tout conducteur qui lui est présenté, des effets d'induction prouvant que son intensité ne demeure point constante ; ou bien si le conducteur examiné est un mince filament rendu incandescent par effet Joule, on constate que son éclat est variable, etc.

Un circuit qui manifeste de telles variations est regardé comme le siège d'un **courant variable** et l'on attribue à ce dernier une *intensité variable*, égale à chaque instant à celle qui, dans un circuit à courant continu, répondrait à la valeur présentée, à cet instant, par l'effet rhéoscopique considéré.

Celui de tous les phénomènes rhéoscopiques, dont la variabilité peut le mieux être mise en évidence et le plus exactement mesurée est l'action électromagnétique éprouvée dans un champ magnétique fixe par un conducteur filiforme, réduit à une simple boucle étroite et légère, suivant la disposition offerte par l'oscillographe Blondel (*fig.* 199, page 102). La courbe représentative des élongations de cet appareil donne directement la loi des fluctuations du courant variable dont il est le siège.



Lorsque la force électromotrice appliquée à un circuit est alternative, un oscillographe inséré dans ce circuit, montre que le courant correspondant est variable lui aussi en grandeur et en direction et mérite, par conséquent, la qualification de **courant alternatif**.

Une force électromotrice alternative *périodique* (produite, par exemple, par un alternateur à marche

uniforme), donne lieu à un courant alternatif périodique de période égale à la sienne.

Toutes les méthodes propres à l'étude des différences de potentiel périodiques (1) peuvent être mises à profit pour l'étude des courants périodiques. Il suffit de les appliquer à l'examen de la différence de potentiel qui s'offre aux extrémités d'un conducteur *de faible longueur, soustrait à l'action de tout système magnétique étranger* (1) et faisant partie du circuit considéré.

En effet, la différence de potentiel  $V_A - V_B$ , aux extrémités d'un tel conducteur est liée à chaque instant à sa résistance  $R$  et à l'intensité  $I$  du courant par la relation simple :  $V_A - V_B = RI$ , en sorte qu'il suffit de multiplier par le facteur  $\frac{1}{R}$  les valeurs de  $V_A - V_B$  pour avoir par là-même celle de  $I$ .



L'étude comparative d'un courant alternatif périodique et de la force électromotrice qui l'engendre conduit aux remarques générales suivantes :

*La durée de la période du courant est égale à celle de la force électromotrice.*

Par conséquent, la force électromotrice d'un alterateur, la différence de potentiel entre deux points quelconques du circuit et l'intensité du courant dans ce circuit, sont trois grandeurs périodiques offrant le

1. Voir ci-dessus, pages 101 et suiv.

2. On verra, dans une leçon ultérieure le motif de ces restrictions.

même nombre de périodes par seconde, c'est-à-dire la même **fréquence**.

Les zéros de la courbe représentative d'une force électromotrice alternative périodique et ceux de la courbe du courant qui en résulte ne sont pas, en général, concomitants.

En d'autres termes, il existe, le plus souvent, entre un

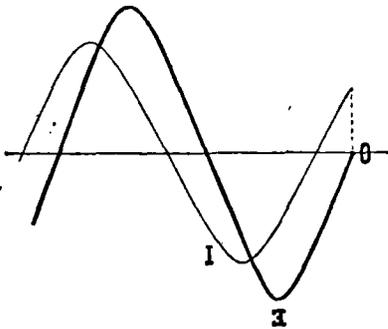


FIG. 218

courant alternatif et la force électromotrice qui l'engendre, une

**différence de phase**

(fig. 218), ce qu'on

exprime, dans le lan-

gage technique, en di-

sant que le courant est

**décalé** par rapport à

la force électromo-

trice.

Lorsque ce décalage atteint un quart de période,

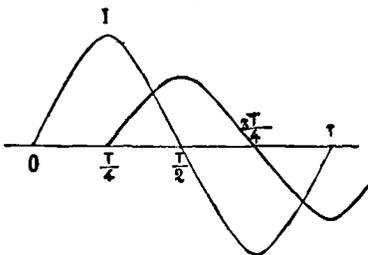
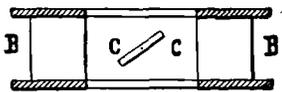


FIG. 219

c'est-à-dire quand les zé-

ros du courant corres-

pondent aux maxima de

la force électromotrice,

on dit que le courant et

la force électromotrice

sont **en quadrature**.

Considérons, en particulier,

le courant  $i$  induit dans un

disque de cuivre  $C$  (fig. 219),

par le flux magnétique varia-

ble dû à un courant alter-

natif  $I$  établi dans les spires d'une bobine  $B$ . Si ce courant induit ( $i$ ) était en phase avec sa force électromotrice ( $e$ ) il serait comme celle-ci (*fig.* 219), **en quadrature** avec le flux inducteur  $\Phi$  (voir ci-dessus, page 96). Mais alors l'action mécanique moyenne du champ  $H$  de la bobine sur le disque de cuivre serait nulle, car l'action instantanée (proportionnelle au produit  $il$ ) serait dirigée dans un sens pendant un quart de période et en sens contraire pendant le quart de période suivant, la situation respective des courbes représentatives du courant inducteur  $I$  et du courant induit  $i$  montrant ces courants concordants pendant un quart de période et discordants pendant le quart de période suivant. Or, l'expérience indique que l'action moyenne de la bobine  $B$  sur le disque de cuivre  $c$  n'est pas nulle. Si l'on place, en effet, le disque de façon que son plan soit à  $45^\circ$  de l'axe de la bobine, il tend à se mettre parallèlement à ce dernier. Pourqu'il en soit ainsi il faut nécessairement que les laps de temps pendant lesquels le courant induit et le courant inducteur sont de même sens ne soient pas de même durée que ceux pendant lesquels ils sont de sens contraires. Les zéros du courant induit sont par conséquent décalés, relativement aux maxima du courant inducteur et par suite, relativement aux zéros de la force électromotrice induite.



## II

### Ampèremètres pour courants alternatifs

La question de savoir comment se comporte un ampèremètre ordinaire, c'est-à-dire non oscillographique, lorsqu'on l'intercale dans un circuit parcouru par un courant alternatif, comporte une solution tout à fait analogue à celle de la question correspondante relative aux différences de potentiel alternatives.

Deux catégories d'ampèremètres à indications lentes doivent être pris en considération, savoir :

1° Ceux sur lesquels un courant produit un effet proportionnel à son intensité et que nous appellerons **ampèremètres du premier degré** ;

2° Ceux sur lesquels l'effet d'un courant est proportionnel au carré de son intensité, et que nous désignerons sous le nom **d'ampèremètres du deuxième degré**.

A la première catégorie appartiennent, tous les ampèremètres fondés sur des actions entre courants et aimants ; à la seconde, tous les ampèremètres fondés sur des actions entre courants et fer doux, tous les électrodynamomètres ainsi que les ampèremètres thermiques.

Des raisonnements calqués sur ceux qui ont été faits dans la leçon précédente à propos des voltmètres (voir ci-dessus pages 110 à 116) conduisent aux conclusions suivantes :

*Soumis à l'action d'un courant alternatif périodique, un ampèremètre du premier degré, à indications lentes, ne donne aucune indication sensible et demeure pratiquement au zéro comme s'il n'existait dans son circuit aucun courant.*

Par contre, un ampèremètre du deuxième degré est sollicité à abandonner sa position d'équilibre ; mais on peut l'y maintenir en lui appliquant une action antagoniste convenable. C'est ce qu'on fait, en particulier, dans l'électrodynamomètre, en im-

primant une torsion au fil ou au ressort de suspension de la bobine mobile.

*Bref, soumis à l'action d'un courant alternatif périodique, un ampèremètre du deuxième degré à indications lentes se comporte comme s'il était soumis à l'action d'un courant constant d'intensité convenable.*

A tout courant alternatif agissant sur un ampèremètre à indications lentes du deuxième degré, on peut donc faire correspondre un courant continu capable de donner exactement lieu à la même lecture.

L'intensité de ce courant équivalent est ce qu'on est convenu d'appeler **l'intensité efficace** du courant alternatif considéré.

Elle est égale à la racine carrée de la moyenne des carrés de l'intensité dans le cours d'une période, et s'obtient en traduisant l'indication donnée par l'ampèremètre du deuxième degré employé, de la même façon que s'il s'agissait d'un courant continu.



Les ampèremètres propres à la mesure des courants alternatifs sont ou bien des appareils *électrodynamiques* (mettant en jeu l'action mutuelle de deux circuits) ; ou bien des appareils *électromagnétiques* (mettant en jeu l'action mutuelle d'un circuit et d'une masse de fer doux) ; ou bien des appareils *thermiques* mettant en jeu l'échauffement dû à un courant) ; ou enfin des appareils *inductifs* (mettant en jeu des effets d'induction dus au courant à mesure).

Les appareils des trois premières catégories conviennent également aux courants continus. Aussi, en a-t-on vu des exemples dans la partie de ce cours, relative à la mesure de ce genre de courants (tome I, pages 125 et suiv.).

Les appareils de la quatrième catégorie sont spéciaux aux courants alternatifs.

Dans les appareils à *fer doux*, l'aimantation de ce dernier n'est proportionnelle au courant et, par conséquent, l'action déviante n'est proportionnelle au carré de l'intensité du courant que lorsque cette intensité est assez faible pour que le point représentatif de l'aimantation n'atteigne pas le coude de la caractéristique magnétique. Au delà, l'aimantation tendant à devenir pratiquement constante, l'action tend à être proportionnelle à la première puissance de l'intensité. Les appareils à fer doux doivent donc être gradués empiriquement, avec des courants alternatifs, et comparativement avec des électrodynamomètres faisant connaître les valeurs efficaces de ces courants.

Cette graduation empirique tient compte de l'influence de l'hystérésis de la masse du fer, qui a pour effet de rendre les indications un peu moindres qu'elles ne le seraient avec du fer parfaitement doux, car, du fait de l'hystérésis, l'inversion de l'aimantation ne coïncide pas avec l'inversion du courant et, par suite, l'action du champ sur la masse du fer ne garde pas un sens constant.

L'influence de l'hystérésis est d'autant plus mar-

quée que la masse de fer est plus grande. Aussi convient-il que dans les ampèremètres de cette espèce, pour courants alternatifs, la masse de fer soit faible, et doit-on réserver pour les courants continus ceux où elle a des dimensions notables,

Enfin la masse de fer doit être convenablement feuilletée pour éviter l'intervention de courants induits parasites, dont la part dans l'effet total serait trop variable avec la fréquence.

Toutes ces conditions sont réunies dans le galvanomètre à fer doux dû à Bellati-Giltay qui consiste (*fig. 220*) en une bobine **B** à l'intérieur de laquelle un petit faisceau de fils de fer doux de quelques millimètres de longueur est soutenu, par un fil métallique très fin, de façon que son axe soit à la fois perpendiculaire au méridien magnétique et à  $45^\circ$  de l'axe de la bobine. Les moindres déviations qu'éprouve ce faisceau sont mises en évidence par un miroir **m** et l'on peut mesurer, à l'aide de la torsion du fil de suspension, le couple nécessaire pour maintenir, malgré l'action déviante, le faisceau dans sa position normale.

Cet appareil est d'une sensibilité assez grande pour permettre la mesure des courants téléphoniques.

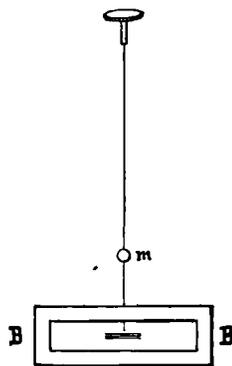


FIG. 220



Si l'on soumet le bord **B** d'un disque conducteur **D** (*fig. 221 I*), mobile autour d'un axe **O**, à l'action d'un champ alternatif perpendiculaire à son plan, on y développe des courants induits qui, en raison de leur disposition symétrique, sont soumis de la part du champ à des actions dont le couple résultant, par

rapport à l'axe, est nul et laisse, par conséquent, le disque en repos. Mais, si l'on vient à intercaler dans

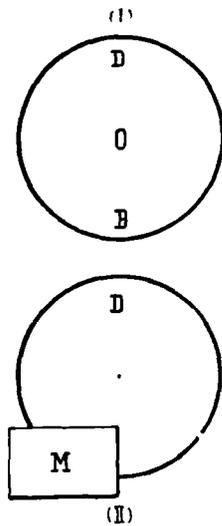


FIG. 221

une partie du champ une plaque métallique **M** parallèle au disque (*fig. 221 II*), on constate que le disque est soumis à un couple qui le sollicite à tourner autour de son axe et auquel, si l'on veut empêcher le mouvement, on doit opposer un couple antagoniste, tel que celui provenant de la déformation d'un ressort.

Cet effet est dû à la dissymétrie occasionnée par la présence de la lame **M** et à l'action des courants induits dont cette lame est le siège, sur ceux de la partie du disque non masquée par elle.

C'est suivant ce principe que sont établis les ampèremètres à induction construits pour les courants alternatifs par l'*Allgemeine Electricitäts Gesellschaft*.

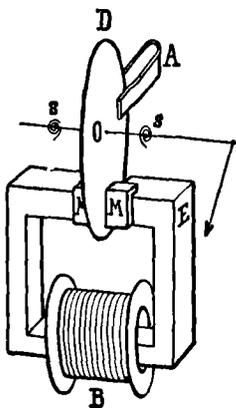


FIG. 222

Ainsi que le représente schématiquement la *fig. 222*, ces appareils consistent essentiellement en un disque **D** (d'aluminium), sur le bord duquel agit le champ alternatif d'un électro-aimant feuilleté **E**, dont la bobine **B** est parcourue par le courant alternatif à étudier. La dissymétrie est produite par des plaques de laiton **M, M**, recouvrant une partie seulement des pôles de l'électro. Par suite de l'action antagoniste d'un ressort spiral **S**, le disque, au lieu de tourner d'une manière continue éprouve, par rapport à sa position normale, de simples dévia-

tions qui sont marquées par une aiguille sur un cadran. L'apériodicité est obtenue par le passage du disque entre les mâchoires très rapprochées d'un aimant permanent A.

Les appareils à induction de la maison *Siemens et Halske* présentent la disposition représentée schématiquement par la fig. 223. Leur équipement mobile consiste en un tambour T d'aluminium sur lequel agit un inducteur (enfer feuilleté) à 4 pôles radiants. Deux de ces pôles II diamétralement opposés sont entourés de bobines parcourues par le courant à mesurer.

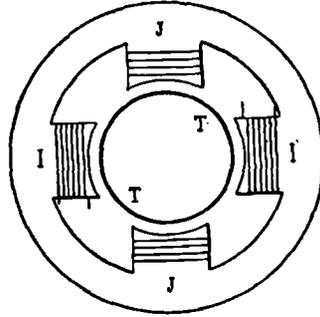


FIG. 223

Les deux autres, j, j, sont entourés de bobines fermées sur elles-mêmes, dont les courants induits réagissent sur ceux du tambour d'aluminium. Un cylindre de fer (fixe) est placé à l'intérieur du tambour, pour diminuer la réluctance des circuits magnétiques et accroître par conséquent les effets d'induction. Un disque d'aluminium, calé sur le même arbre que le tambour et passant entre des pôles d'aimants joue le rôle d'amortisseur et donne à l'équipage une apériodicité convenable.



A ces mêmes types d'appareils, appartiennent des voltmètres qui ne diffèrent des ampèremètres correspondants, que par la résistance des enroulements, laquelle est proportionnée aux tensions qui doivent agir entre leurs extrémités.



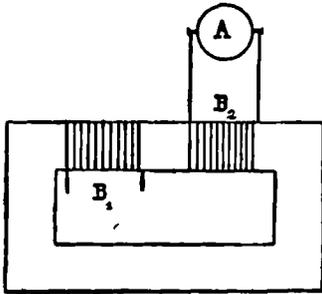
Les instruments à induction ne doivent être employés que pour des courants de même fréquence que ceux qui ont servi à les étalonner, car les forces électromotrices induites, et par suite les courants induits, dont ils sont le siège, dépendent en grandeur

de la fréquence des courants inducteurs reçus dans leurs enroulements.



La possibilité de produire avec un courant alternatif un courant induit dans un circuit entièrement séparé du premier (voir ci-dessus, page 97, *fig.* 198) offre pour la mesure des courants alternatifs, des ressources variées présentant, dans certains cas, de précieux avantages.

Soient, enroulées sur un même circuit magnétique,



deux bobines  $B_1$  et  $B_2$ , (*fig.* 224) dont l'une  $B_1$ , soit le siège d'un courant à mesurer  $I$ , et l'autre ait ses bornes réunies à celles d'un ampèremètre  $A$ . L'Intensité  $I_2$  du courant induit par  $B_1$ , dans  $B_2$  a une valeur spéciale pour chaque valeur

FIG. 224

de l'intensité  $I_1$ , établie en  $B_1$ . On peut donc inscrire en regard des diverses positions de l'aiguille de l'appareil  $A$  les valeurs de  $I_1$ , qui les déterminent.

Le courant  $I_2$  qui existe dans l'appareil d'épreuve peut être, à volonté, inférieur, égal au supérieur au courant  $I_1$ , à étudier, suivant le rapport établi, par construction, entre les nombres de spires des bobines et suivant la valeur de la résistance totale du second circuit. Aussi l'appareil est-il désigné sous le nom de **transformateur**.

Par cet artifice, on est dispensé d'insérer l'ampèremètre  $A_2$  dans le circuit  $C_1$ , où règne l'intensité à

mesurer et l'opérateur peut mettre à sa portée et manier cet ampèremètre sans toucher au circuit  $C_1$ , avantage précieux, au point de vue de la sécurité, dans les installations à hautes tensions.

Dans les installations à basses tensions et à grandes intensités, l'artifice du transformateur sera avantageux également en dispensant d'opérer directement sur les grandes intensités, ce qui nécessiterait des ampèremètres de grand calibre et des conducteurs de jonction à grandes sections, coûteux et encombrants.

Enfin, avec un seul appareil d'épreuve, on peut procéder à l'examen de plusieurs circuits différents sans les interrompre, en mettant simplement, à l'aide d'un commutateur (*fig. 225*), l'appareil d'épreuve successivement en relation avec les bobines secondaires  $B_2, B'_2$  de transformateurs dont les bobines primaires  $B_1, B'_1$ , se trouveront

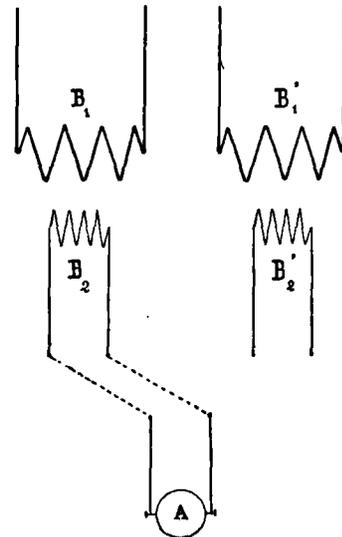


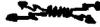
FIG. 225

établies en permanence dans les circuits à étudier.

Les indications des ampèremètres à transformateur dépendent de la fréquence ; aussi leur étalonnage doit il être fait avec des courants de même fréquence que ceux auxquels ils sont destinés.



L'artifice du transformateur est applicable aussi, évidemment, aux mesures de différences de potentiel, car à chaque valeur d'une tension  $V_1$ , établie aux extrémités de la bobine  $B_1$ , correspond une position particulière de l'index d'un appareil d'épreuve (électromètre ou voltmètre), relié aux bornes de  $B_2$ . La bobine  $B_1$ , doit alors être enroulée de fil fin et placée en dérivation entre les points dont on veut estimer la différence de potentiel.



# TRENTE-DEUXIÈME LEÇON



## INDUCTION

\*\*\*\*\*

### FORCES ÉLECTROMOTRICES DE SELF-INDUCTION ET D'INDUCTION MUTUELLE COEFFICIENTS D'INDUCTION



#### I

#### Forces électromotrices de self-induction

Lorsqu'une portion de circuit filiforme **AB** est le siège d'un courant variable, il existe, à chaque instant, entre la valeur algébrique  $(V) = (V_A - V_B)$  de la différence de potentiel que présentent ses extrémités et le produit  $R(I)$  de sa résistance **R** par la valeur algébrique  $(I)$  de l'intensité du courant une relation :

$$(V) = R(I) - (E)$$

de même forme que celle trouvée par les courants constants (1).

Mais ici  $(E)$  n'est pas simplement la somme algébrique  $(E_v) + (E_\theta) + (E_i)$  des forces électromotrices voltaïques, thermoélectriques ou induites que cette

---

1. Voir t. 1, pages 169 et suiv.

portion de circuit peut présenter. Pour obtenir  $(E)$ , il faut, à cette somme, ajouter un terme nouveau :  $(E_s)$  représentant une force électromotrice particulière aux conducteurs parcourus par des courants variables.

Bref, au lieu de la relation  $(V_A - V_B) = R(I) - (E_v + E_\theta + E_i)$  qui convient aux conducteurs parcourus par des courants constants, il faut, dans le cas des courants variables, écrire :

$$(V_A - V_B) = R(I) - (E_v + E_\theta + E_i + E_s)$$

S'il s'agit d'un circuit fermé on a  $V_B = V_A$  et par suite :

$$0 = R(I) - (E_v + E_\theta + E_i + E_s)$$

Bien entendu, les termes  $E_v$ ,  $E_\theta$ ,  $E_i$ , sont nuls, lorsque le circuit considéré ne renferme ni chaîne voltaïque, ni chaîne thermo-électrique, ni force électromotrice d'induction due à un système magnétique extérieur.



Soit, en particulier, une portion de circuit ne comprenant aucune pile et soustraite à l'action de tout champ magnétique autre que celui qu'elle crée elle-même par l'effet d'un courant  $I$ . Supposons qu'à un moment donné on provoque une augmentation de ce courant ; on constate alors, qu'au lieu de passer de sa valeur initiale  $R I_0$  à sa valeur finale  $R I$ , suivant la loi linéaire, représentée par les différents points de la droite  $V_0 V$ , de coefficient angulaire  $R$  (*fig. 226*), la différence de potentiel  $V = V_A - V_B$  suit une loi de variation toute différente représentée par les points d'une courbe  $(V_0 C V)$  située au-dessus de la droite.

En d'autres termes, pendant cette augmentation du courant, on a  $V_A - V_B > RI$ .

Inversement, lors d'une *diminution* du courant,  $V_A - V_B$  est *inférieure* à  $RI$ .

On a donc, d'une manière générale, dans le cas qui nous occupe :

$$(V_A - V_B) = R(I) - (E_s)$$

la quantité  $E_s$  étant négative lorsque  $I$  augmente et positive lorsque  $I$  diminue.

Toutes choses égales d'ailleurs, la grandeur de  $E_s$  dépend de la disposition de la portion de circuit considérée. Elle est tout particulièrement marquée pour les portions de circuits en forme de bobines à spires nombreuses, surtout si ces bobines sont munies de noyaux de fer.

Soit, par exemple,  $AB$  (*fig. 227*) une bobine d'électro-aimant. Pour constater que, pendant une augmentation brusque du courant, la différence de potentiel  $V_A - V_B$  devient notablement supérieure à  $RI$ , il suffit de prendre pour témoin une lampe à incandescence  $L$ , reliée aux points  $A$  et  $B$ . On règle la valeur finale du courant, de façon que la valeur correspondante de  $V_A - V_B$  rende le filament à peine rouge sombre et l'on constate que si l'on fait passer brusquement le courant de zéro à cette valeur finale la lampe jette, dans l'intervalle, un éclair et accuse, par conséquent, le passage momentané de  $V_A - V_B$  par une valeur très notablement supé-

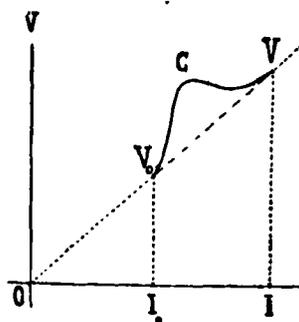


FIG. 226

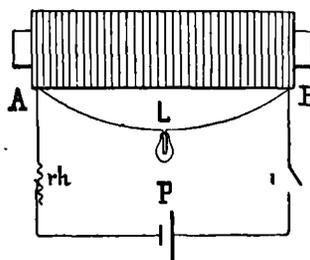


FIG. 227

rieure à la valeur finale, ce qui n'aurait évidemment pas lieu si  $V_A - V_B$  restait égal à  $RI$  (Expérience de Fleming).



Les quantités  $E_s$  sont des forces électromotrices d'induction dues aux variations que les flux magnétiques propres des circuits éprouvent, par suite des variations des courants. Aussi les désigne-t-on, depuis Faraday, qui en fit la découverte, sous le nom de forces électromotrices de **self-induction** (1).



## II

### Coefficients de self-induction

Les courants alternatifs étant des courants variables, nous devons nous attendre à voir se manifester dans les conducteurs qui en sont le siège, des forces électromotrices de self-induction. Aussi la connaissance de ces forces électromotrices est-elle un des éléments essentiels de l'étude des courants alternatifs (2).

Voici, à cet égard, les principales indications fournies par l'expérience :

*Avec des courants de fréquences modérées (3), pour*

1. C'est-à-dire d'*induction propre*, ou d'*auto-induction*.

2. Dans les études relatives aux effets des forces électromotrices continues, on n'a affaire à des forces électro-motrices de self-induction que pendant les états variables, ordinairement très courts, qui se présentent à la fermeture ou à l'ouverture des circuits (Voir plus loin 33<sup>e</sup> leçon).

3. De l'ordre de quelques dizaines de périodes par seconde.

*des conducteurs homogènes, filiformes, de capacité négligeable, de longueur médiocre, éloignés de tout milieu de perméabilité magnétique variable, soustraits à toute action magnétique autre que celle de leur propre courant, la valeur de  $E_s$  est négligeable.*

On a alors, pratiquement, à chaque instant :

$$(V_A - V_B) = R (I)$$

Par suite, l'intensité  $I$  est liée pratiquement, à chaque instant, à la différence de potentiel  $V_A - V_B$  par la

relation simple:  $I = \frac{V_A - V_B}{R} (1).$

Tout conducteur satisfaisant à ces conditions, constitue ce qu'on appelle une **résistance non inductive**.

C'est le cas, par exemple, des baguettes de charbon des lampes à arc ou des filaments des lampes à incandescence.



Si un conducteur, tout en satisfaisant aux autres conditions énumérées ci-dessus, présente une *longueur notable*, il existe alors entre  $R (I)$  et  $(V_A - V_B)$  une différence notable. Un tel conducteur offre, par suite, une force électromotrice de self-induction qui n'est pas négligeable.

A chaque instant, cette force électromotrice  $E_s$ , possède une valeur particulière. L'ensemble des valeurs de  $E_s$  dans le cours d'une période peut être représenté par une courbe obtenue en portant en abscisses des longueurs numériquement égales aux temps et en

---

1. On a vu ci-dessus (page 137) une application de cette formule à l'étude des courants variables.

ordonnées des longueurs numériquement égales aux valeurs de  $E_s$  correspondantes.

En rapprochant cette courbe de celle qui représente

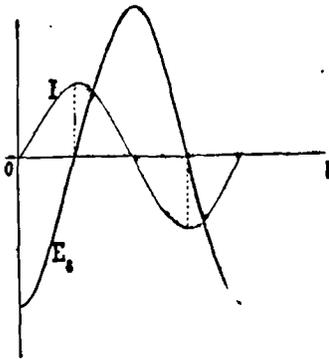


FIG. 228

les diverses valeurs du courant (*fig. 228*), on peut faire les remarques suivantes :

1° La valeur de  $E_s$  est nulle à tous les instants où l'intensité du courant passe par un maximum ou par un minimum;

2° Aux instants de *croissance algébrique* de l'intensité du courant, les valeurs de  $E_s$  sont négatives.

3° Aux instants de *décroissance algébrique* de l'intensité du courant, les valeurs de  $E_s$  sont positives.

Il suit de là que, dans tous les cas, la force électromotrice  $E_s$  tend à *s'opposer* aux variations du courant :

4° Les valeurs absolues de  $E_s$  sont d'autant plus grandes que les variations de l'intensité sont plus rapides.



La quantité qui mesure à chaque instant la vitesse de variation du courant est le coefficient angulaire

$\frac{dI}{dt}$ , de la tangente, au point correspondant de la courbe représentative de l'intensité. Or, si l'on compare, pour les conducteurs qui nous occupent en ce

moment, les valeurs de  $E_s$  à celles de  $\frac{dI}{dt}$ , on trouve entre elles une relation très simple de proportionnalité. Pour de tels conducteurs, on a, en grandeur et en signe :

$$E_s = - L \frac{dI}{dt}.$$



Si la portion de circuit considérée forme une boucle et si  $\Psi$  désigne le flux magnétique émis à travers cette boucle, par le courant lui-même on a :

$$E_s = - \frac{1}{10^9} \frac{d\Psi}{dt}$$

et par conséquent :

$$d\Psi = 10^9 L dI$$

ou encore :

$$\Psi = 10^9 LI$$



Lorsqu'on veut atténuer la self-induction d'un conducteur filiforme **a b**, de longueur notable, il faut avoir soin de le replier sur lui-même, comme l'indique la *fig. 229* (I), de telle sorte que le flux embrassé par la boucle très étroite formée par ce conducteur soit très faible.

Quand un conducteur est ainsi replié, on peut, si on le désire, ne pas le laisser sous la forme rectiligne, mais, si on

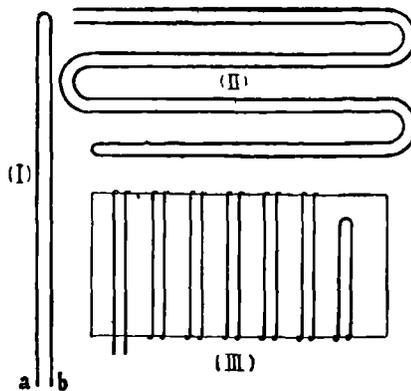


FIG. 229

le trouve trop encombrant, le disposer en zigzags ou en hélice (fig. 229 (II) et (III)), pour pouvoir le loger dans un petit espace (1).

C'est ainsi qu'on procède, notamment, quand on veut installer dans une cuve traversée par un courant d'eau, une bande métallique destinée à jouer le rôle de rhéostat sans self pour des courants alternatifs de grande intensité (fig. 230).

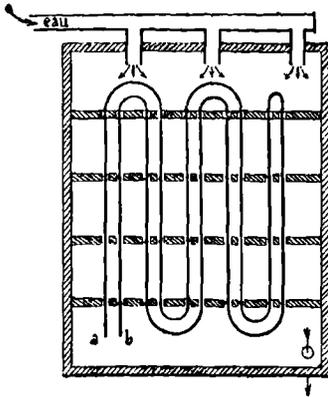


FIG. 230

Relativement aux conducteurs situés au voisinage de masses de fer, l'expérience conduit aux conclusions suivantes :

1° Entre  $E_s$  et  $\frac{dI}{dt}$  il n'y a pas proportionnalité. En d'autres termes le quotient

$$L_1 = - \frac{E_s}{\frac{dI}{dt}}$$

n'est pas une constante, mais, au contraire, présente à chaque instant, une valeur particulière.

On donne à ce quotient le nom de **paramètre de réaction propre** du conducteur, dans les conditions où il se trouve ;

2° Le flux  $\Psi$  embrassé par une boucle n'est pas proportionnel à  $I$ . En d'autres termes le quotient

1. On obtient ainsi des bobines dites à *fil double*. Les bobines à couches inverses dont il sera question plus loin (page 169) sont préférables quand on cherche à éliminer autant que possible les effets de self-induction.

$$L_2 = \frac{1}{10^8} \frac{\Psi}{I}$$

n'est pas une constante. De plus, sa valeur, à chaque instant, est différente de  $L_1$ .

D'après les relations :

$$E_s = -L_1 \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{10^8} \frac{d\Psi}{dt}$$

on a :

$$d\Psi = 10^8 L_1 dI$$

et comme

$$\Psi = 10^8 L_2 I$$

on a finalement :

$$L_1 = L_2 + I \frac{dL_2}{dI}$$



En résumé, les quantités  $\frac{d\Psi}{dI}$  et  $\frac{\Psi}{I}$  qui sont égales et constantes dans le cas des circuits sans fer, sont, pour les circuits avoisinant des milieux magnétiques, inégales et variables.

C'est ce que fait ressortir clairement la courbe qui représente alors  $\Psi$  en fonction de  $I$  (fig. 231). Pour une valeur donnée de  $I$  le paramètre  $L_1$  est la fraction  $\frac{1}{10^8}$  du coefficient angulaire de la tangente  $MT$  à la courbe au point correspondant  $M$ , tandis que le paramètre  $L_2$  est la fraction  $\frac{1}{10^8}$  du coefficient angulaire de la droite  $oM$ .

Dans le cas des circuits sans fer,

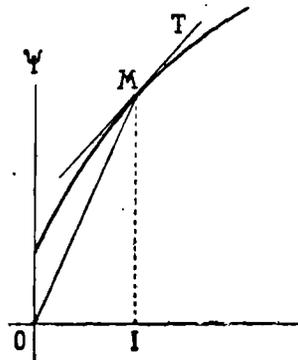


FIG. 231

ces deux paramètres sont égaux et constants, parce que la ligne représentative de  $\Psi$  est une droite passant par le point o.

Souvent néanmoins, en pratique, on considère, comme première approximation, le flux  $\Psi$  engendré par un courant à travers un circuit ou une portion de circuit comme proportionnel à  $I$  et l'on applique les relations

$$L_1 = L_2 = L = \frac{1}{10^8} \frac{\Psi}{I} = \frac{1}{10^8} \frac{d\Psi}{dI}$$

qui ne sont rigoureuses qu'en l'absence de tout milieu à perméabilité magnétique variable.



D'après la formule :

$$E_s = - L \frac{dI}{dt}$$

l'évaluation numérique du coefficient de self-induction d'un circuit est subordonnée à l'évaluation numérique d'une force électromotrice ( $E_s$ ) et à celle d'une vitesse de variation de courant  $\left(\frac{dI}{dt}\right)$ .

L'unité de coefficient de self-induction sera donc le coefficient de self d'un circuit, dans lequel un courant variant au taux de l'unité de courant dans l'unité de temps, donnerait lieu à une force électromotrice de self-induction égale à l'unité de force électromotrice.

Puisqu'en pratique on a adopté comme unité d'intensité de courant *l'ampère*, comme unité de temps la *seconde*, et comme unité de force électromotrice le *volt*, *l'unité pratique de coefficient de self-induction sera le coefficient de self d'un circuit dans lequel une*

*variation de courant du taux d'un ampère par seconde engendrerait une force électromotrice de self-induction d'un volt.*

*On a donné à cette unité le nom d'henry (1).*

La formule :

$$\Psi = 10^8 LI$$

signifie que pour avoir en *maxwells* le flux propre d'un circuit, il faut multiplier par  $10^8$  le produit de  $LI$  du coefficient de self de ce circuit, estimé en henrys par l'intensité du courant estimé en ampères.



### III

#### Induction mutuelle de deux circuits

Soient  $C_1$  et  $C_2$  (*fig. 232*) deux circuits situés dans un milieu de perméabilité magnétique constante, ce qui est pratiquement le cas de deux circuits à proximité desquels n'existent ni fer, ni autre substance magnétique. Si l'un d'eux,  $C_1$ , par exemple, est le siège d'un courant, l'autre embrasse un certain flux:  $\Phi_{2,1}$  qui constitue ce qu'on ap-

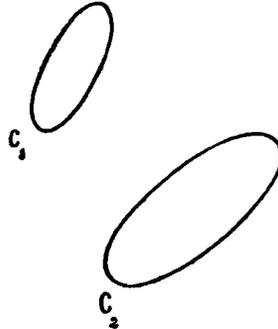


FIG. 232

1. En l'honneur du physicien américain *Henry* auteur de recherches importantes sur l'induction.

Antérieurement au congrès international des électriciens de Chicago (1893) qui a proposé la dénomination actuelle, l'unité pratique de coefficient de self-induction était désignée sous le nom de *quadrant*.

pelle le flux envoyé dans le second circuit par le premier.

Si, inversement, un courant est établi en  $C_2$ , il en résulte pour le premier circuit un certain flux :  $\Phi_{1,2}$  :

A intensité de courant égale, l'expérience montre que l'on a, entre ces flux, la relation remarquable :

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{2,1}$$

On s'en assure expérimentalement en mesurant au balistique la décharge induite dans l'un des circuits par la brusque suppression d'un courant  $I$  dans l'autre.

La valeur commune de ces flux dépend de la forme, de la grandeur et de la situation respective des deux circuits, ainsi que de l'intensité du courant mis en jeu.

Pour deux circuits de formes, de grandeurs et de position données, la valeur du flux en question, qu'on nomme **flux d'induction mutuelle** des deux circuits, est proportionnelle à l'intensité  $I$  du courant. On peut la représenter par l'expression

$$\Phi_{1,2} = 10^8 MI$$

dans laquelle le coefficient  $M$ , appelé **coefficient d'induction mutuelle** des deux circuits, ne dépend que des paramètres géométriques définissant la forme, la grandeur et la situation relative de ces deux circuits.

Nous verrons dans une leçon ultérieure comment se fait la détermination de la valeur numérique de ces coefficients, ainsi que de ceux de self-induction.



Si deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  présentent des courants ayant respectivement des intensités  $I_1$  et  $I_2$  (*fig. 233*),

le flux total embrassé par le premier, se composera d'un flux de self-induction  $\Psi_1$  et d'un flux d'induction mutuelle  $\Phi_{1,2}$ . On a donc :

$$\Phi_1 = \Psi_1 + \Phi_{1,2}$$

De même pour le second circuit :

$$\Phi_2 = \Psi_2 + \Phi_{2,1}$$

Si les courants  $I_1$  et  $I_2$  varient, les circuits seront,

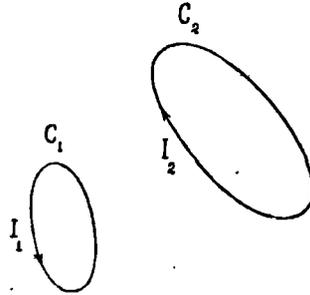


FIG. 233

de ce chef, le siège de forces électromotrices d'induction données par les expressions :

$$(E_i)_1 = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi_1}{dt} = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Psi_1}{dt} - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi_{1,2}}{dt}$$

$$(E_i)_2 = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi_2}{dt} = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Psi_2}{dt} - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi_{2,1}}{dt}$$

le premier terme de chaque expression représentant une force électromotrice de self-induction et le second une force électromotrice d'induction mutuelle.

S'il n'y a, au voisinage des circuits, aucune masse de fer ou autre métal magnétique, on aura :

$$\Psi_1 = 10^8 L_1 I_1$$

$$\Psi_2 = 10^8 L_2 I_2$$

$$\Phi_{1,2} = 10^8 M I_2$$

$$\Phi_{2,1} = 10^8 M I_1$$

et par conséquent :

$$(E_i)_1 = - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt},$$

$$(E_i)_2 = - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}.$$

Si les circuits considérés renferment en outre des forces électromotrices ( $E_1$ ), ( $E_2$ ), et ont des résistances totales  $R_1$ ,  $R_2$ , on aura, en leur appliquant la formule générale  $0 = R(I) - (E)$ , les relations :

$$0 = R_1 I_1 - (E_1) + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

$$0 = R_2 I_2 - (E_2) + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$



La formule :

$$\Phi_{1,2} = 10^9 MI$$

montre que les coefficients d'induction mutuelle  $M$ , jouent, dans les calculs de flux mutuels, un rôle identique à celui que jouent, dans les calculs de flux propres, les coefficients de self-induction. Ils représentent des grandeurs de même espèce, rapportées à la même unité.

Les évaluations pratiques de coefficients d'induction mutuelle se feront donc en henrys comme celles des coefficients de self-induction,



Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux portions d'un même circuit ayant respectivement des coefficients de self-induction  $L_1$  et  $L_2$  et un coefficient d'induction mutuelle  $M$ . Lorsque ce circuit est le siège d'un courant variable  $I$ , la force électromotrice d'induction due à la variation du flux à travers la première portion est  $L_1 \frac{dI}{dt} +$

$M \frac{dI}{dt}$  et celle relative à la seconde portion du circuit :  $L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$ . Pour l'ensemble de ces deux portions de circuit la force électromotrice due à la variation du courant est, en conséquence  $(L_1 + 2M + L_2) \frac{dI}{dt}$ , ce qui donne pour le coefficient de self-induction du groupe, l'expression :

$$L = L_1 + 2M + L_2.$$

Suivant le signe et la grandeur de  $M$ , cette expression différera plus ou moins, dans un sens ou dans l'autre, de la somme  $L_1 + L_2$ .

En associant en série deux bobines plates concentriques dont les plans (*fig. 234*) peuvent faire un angle variable à volonté, on obtient un étalon variable de self-induction (*Ayrton et Perry*), dont la valeur est minima lorsque les bobines sont parallèles et parcourues par le courant en sens opposés,

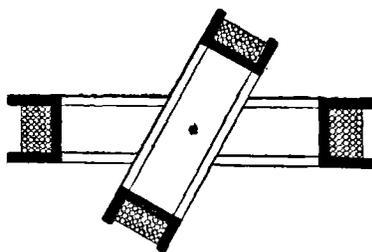


FIG. 234

et maxima lorsque les bobines sont parallèles et parcourues par le courant dans le même sens. Dans le cours du demi-tour qui sépare ces deux positions extrêmes de la bobine mobile, le coefficient de self présente une série continue de valeurs intermédiaires.



Si sur une bobine inductrice on enroule un toron formé de  $n$  fils induits isolés, ces derniers, étant tous à la même distance moyenne du fil inducteur, auront, par rapport à lui, le même coefficient d'induction mutuelle  $M_1$ . En associant en série  $p$  de ces fils on aura un assemblage présentant par rapport à la bobine inductrice, un coefficient d'induction mutuelle  $p M_1$ . On aura ainsi aisément une série de coefficients d'induction mutuelle de rapports connus (*Brillouin*).



La difficulté d'avoir des étalons de self-induction et d'induction mutuelle tient à la question de la carcasse des bobines.

Cette carcasse ne saurait être en métal, en raison de l'effet perturbateur qui résulterait des courants de Foucault dont elle serait le siège. On est donc obligé de la faire en bois ; mais alors de minutieuses précautions doivent être prises pour éviter les changements de dimensions, toujours à craindre par le fait du jeu de cette matière. On n'est à l'abri de cette cause d'erreur qu'en employant des cadres en acajou bien sec, imprégnés de paraffine, et provenant d'un bloc formé par l'assemblage d'un grand nombre de morceaux collés ensemble et diversement orientés par rapport aux fibres.



La formule :

$$L = L_1 + 2M + L_2$$

montre que le coefficient de self-induction d'un

assemblage de deux bobines en série n'est égal à la somme  $L_1 + L_2$  de leurs coefficients de self individuels que si la situation relative de ces bobines est telle que leur coefficient d'induction mutuel soit nul.

Si les deux bobines ont leurs plans passant par une même droite, comme les deux bobines d'un électrodynamomètre Siemens, cette condition sera satisfaite lorsque leurs axes seront à angle droit.

C'est cette influence mutuelle qui empêche de réunir dans une même boîte diverses bobines de self et de les grouper comme on le fait si commodément pour les bobines de résistances.



#### IV .

### Expressions théoriques de quelques coefficients d'induction.

L'évaluation par le calcul du coefficient de self-induction d'une portion de circuit, ou du coefficient d'induction mutuelle de deux portions de circuit n'est possible pratiquement, que dans un petit nombre de cas particuliers, dont nous n'envisagerons que les plus simples, qui sont d'ailleurs les plus usuels.

#### A. Coefficient de self-induction d'une bobine cylindrique

longue, à noyau non magnétique, revêtue d'une seule couche de spires (fig. 235).



FIG. 235

Considérons, dans la région moyenne de la bobine, les  $n_1$  spires comprises entre deux sections distantes d'un centimètre. Le flux qui les traverse est :

$$\Psi_1 = n_1 SH = n_1 S \times \frac{4}{10} \pi n_1 I = \frac{4}{10} \pi n_1^2 SI$$

$S$  représentant la valeur (en centimètres carrés) de la surface embrassée par une spire et  $I$  la valeur (en ampères) de l'intensité du courant. D'après la formule générale :  $L = \frac{1}{10^8} \frac{d\Psi}{dI}$  (voir page 158), la portion de bobine correspondante a pour coefficient de self induction (en henrys).

$$L_1 = \frac{4\pi}{10^9} n_1^2 S$$

Si le champ avait, dans toute l'étendue de la bobine, la même valeur  $H = \frac{4}{10} \pi n_1 I$  que dans la région médiane, il suffirait, pour obtenir la coefficient de self induction  $L$  de la bobine entière, de multiplier  $L_1$  par la longueur  $l$  de la bobine estimée en centimètres. Mais quand on écrit ainsi simplement :

$$L = l L_1 = \frac{4\pi}{10^9} n_1^2 S l$$

on commet une erreur, due au défaut d'uniformité du champ ; toutefois la valeur relative de cette erreur est d'autant moindre qu'on a affaire à une bobine plus longue.



La même formule :

$$L = \frac{4\pi}{10^9} n_1^2 S l$$

donne la valeur approchée du coefficient de self-induction d'une bobine en forme de *tore circulaire* (fig. 236), et l'approximation obtenue est d'autant plus grande que le diamètre de la

section  $S$  de la bobine est plus petit, relativement à la longueur  $l$  de sa circonférence moyenne.

La même formule enfin serait tout à fait rigoureuse pour une

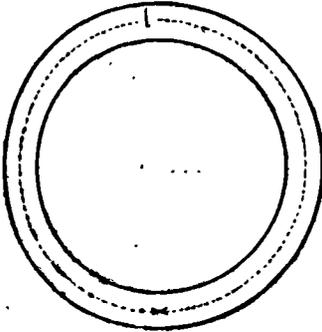


FIG. 236

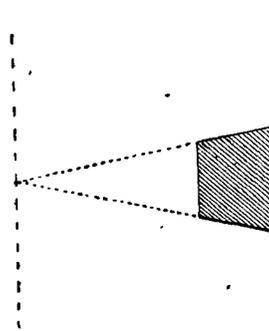


FIG. 237

bobine toroïdale dont la section méridienne offrirait (*fig. 237*) la forme d'un trapèze isocèle ayant ses côtés non parallèles concourants sur l'axe (1).



Si une bobine cylindrique longue présente deux couches de fil superposées, comprenant chacune  $n_1$  spires par centimètre, on a pour le flux qui traverse deux spires superposées (embrassant des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ ) l'expression :  $[S_1 H'] + [S_1 H' + (S_2 - S_1) H''] = 2 S_1 H' + (S_2 - S_1) H''$ , en appelant  $H'$  la valeur du champ à l'intérieur de  $S_1$  et  $H''$  sa valeur dans l'intervalle entre  $S_1$  et  $S_2$ . Or  $H'$  est la somme des champs dus à chacune des deux couches de fil, soit :  $2 \times \frac{4}{10} \pi n_1 I$ , tandis que  $H''$

est le champ dû à la deuxième couche seulement, soit :  $\frac{4}{10} \pi n_1 I$ .

Le flux traversant le système des deux spires vaut, par suite :  $(4 S_1 + S_2 - S_1) \frac{4}{10} \pi n_1 I = \frac{4}{10} \pi n_1 I (3 S_1 + S_2)$ . Or un tronçon de bobine de longueur égale à l'unité, comprend  $n_1$  groupes de deux spires tel que celui que nous venons d'envisager ; il présente donc un flux propre  $n_1$  fois plus grand, soit :

i. V. Marcel Deprez, *Electricité industrielle*, t. II, p. 439.

$\Psi_1 = \frac{4}{10} \pi n^2_1 l (3 S_1 + S_2)$  et, par suite, un coefficient de self-induction :

$$L_1 = \frac{4 \pi}{10^9} n^2_1 (3 S_1 + S_2)$$

D'une manière générale, pour  $p$  couches de fil, l'expression de  $L_1$  est :

$$L_1 = \frac{4 \pi}{10^9} n^2_1 [(2p - 1) S_1 + (2p - 3) S_2 + \dots + 3 S_{p-1} + S_p]$$

$S_1, S_2, S_3, \dots, S_p$  étant les surfaces embrassées par une spire des couches d'ordres 1, 2, 3, ...,  $p$  comptés à partir de l'intérieur.

Pour une bobine de longueur  $l$ , on prendra, comme précédemment,

$$L = l L_1$$



Pour constituer une bobine à plusieurs couches de fil entre deux joues A et B, on peut, tout en disposant le fil en hélices concordantes entre elles, procéder de deux façons, savoir :

1° Par *enroulement bilatéral*, c'est-à-dire en formant la première couche de A à B, la deuxième, au contraire, de B à A, la troisième de nouveau de A à B, la quatrième de B à A, et ainsi de suite, ce qui donne pour les spires successives une disposition telle que celle-ci :

.....  
 4<sup>e</sup> couche : 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31  
 3<sup>e</sup> couche : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30  
 2<sup>e</sup> couche : 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11  
 1<sup>er</sup> couche : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

dans laquelle le numéro d'ordre d'une spire est la moyenne des numéros de ses voisins de droite et de gauche, mais non des voisins supérieure et inférieure.

2° Par *enroulement unilatéral*, c'est-à-dire en formant chaque couche de A vers B, après avoir, à la fin de la précédente, ramené en ligne droite le fil de B à A, ce qui donne pour les spires successives une disposition telle que la suivante :

4<sup>e</sup> couche : 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40

3<sup>e</sup> couche : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

2<sup>e</sup> couche : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

1<sup>re</sup> couche : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

dans laquelle le numéro d'ordre d'une spire est la moyenne des numéros d'ordre de ses voisines supérieure et inférieure aussi bien que de ses voisines de droite et de gauche.

Ces deux modes d'enroulement donnent à la bobine, toutes choses égales d'ailleurs, un même coefficient de self-induction ; mais le second a l'avantage de donner des effets de capacité moindres que le premier.

On peut rendre la self-induction minima en changeant, à chaque couche, le sens de rotation autour de l'axe. Si, en même temps, on a soin de commencer toutes les couches du côté de la même joue, A par exemple, on aura une bobine présentant, toutes choses égales d'ailleurs, une self et une capacité minima.

**B. Coefficient de self-induction d'un câble à deux conducteurs formé d'un fil cylindrique situé à l'intérieur d'un tube de même axe (fig. 238).**

Lorsqu'un tel câble est le siège d'un courant  $I$ , uniformément réparti, suivant, dans un sens, le conducteur intérieur et, en sens contraire, le conducteur extérieur, il n'y a d'action magnétique qu'aux points situés dans les conducteurs et dans l'isolant interposé, car, pour les points extérieurs, tels que P, les

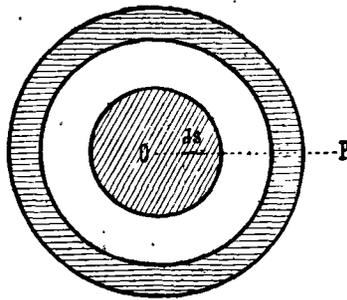


FIG. 238<sup>a</sup>

actions des deux conducteurs sont égales et contraires.

La valeur de  $H$  en un point ne dépend que de la distance  $x$  de ce point à l'axe et de la somme algébrique  $i$  des filets de courant situés à l'intérieur du cylindre d'axe  $O$  et de rayon  $x$ .

On a, en effet,  $H = \frac{1}{10} \frac{2i}{x}$ . Pour  $x$  inférieur au rayon  $a$

du conducteur central, on a :  $i = I \frac{x^2}{a^2}$  ; pour  $x$  compris entre

$a$  et le rayon interne  $b$  du conducteur tubulaire,  $i = I$ ; enfin, pour  $x$  compris entre les deux rayons  $b$  et  $c$  du conducteur tubulaire,  $i = I - I \frac{x^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I \frac{c^2 - x^2}{c^2 - b^2}$ .

Le flux d'induction traversant un élément  $d\sigma$  de la section faite dans le câble par un demi-plan  $oP$  mené suivant l'axe est  $d\varphi = \mu H d\sigma = \mu \frac{1}{10} \frac{2i}{x} d\sigma$ ,  $\mu$  désignant la perméabilité magnétique au point moyen de cet élément.

Pour tous les éléments d'une bande rectangulaire, parallèle à l'axe, de largeur  $dx$  et de longueur  $l$  égale à celle du câble, la valeur de  $\mu H$  est la même, puisqu'elle ne dépend que de  $x$  dont la valeur est la même pour tous les points moyens de la bande. Le flux d'induction à travers celle-ci a donc pour valeur:

$$d\Psi = \mu \frac{1}{10} \frac{2i}{x} \times l dx$$

Le flux  $\Psi$  traversant l'ensemble des bandes  $dx$ , c'est-à-dire le flux propre du câble est par conséquent:  $\Psi = \frac{2}{10} l \sum_{x=0}^{x=c} \mu \frac{idx}{x}$  ou, plus explicitement, en séparant les trois parties de la somme, fournies respectivement par le conducteur intérieur, l'isolant et le conducteur extérieur:

$$\Psi = \frac{2}{10} l \left[ \sum_{x=0}^{x=a} I \mu \frac{xdx}{a^2} + \sum_{x=a}^{x=b} I \frac{dx}{x} + \sum_{x=b}^{x=c} I \mu \frac{c^2 - x^2}{c^2 - b^2} \frac{dx}{x} \right]$$

expression qui, tous calculs faits, donne finalement:

$$\Psi = \frac{2}{10} l I \left[ \log_e \frac{b}{a} + \mu \frac{c^2}{c^2 - b^2} \log_e \frac{c}{b} \right]$$

Si, au lieu de supposer le courant  $I$  uniformément réparti, on l'imagine confiné dans une mince couche périphérique de rayon  $a$  pour le premier conducteur et de rayon  $b$  pour le second, on trouve simplement

$$\Psi = \frac{2}{10} l I \log_e \frac{b}{a}$$

Dans ce premier cas, le coefficient de self-induction serait

$$L' = \frac{2}{10^9} l \left[ \log_e \frac{b}{a} + \mu \frac{c^2}{c^2 - b^2} \log_e \frac{c}{b} \right]$$

et, dans le second :

$$L'' = \frac{2l}{10^9} \log_e \frac{b}{a}$$

La répartition d'un courant variable étant intermédiaire entre ces deux extrêmes, on peut, en pratique, adopter pour expression du coefficient de self-induction d'une portion  $l$  de câble concentrique la moyenne des deux expressions précédentes, soit :

$$L = \frac{2}{10^9} l \left[ \log_e \frac{b}{a} \times \frac{\mu}{2} \frac{c^2}{c^2 - b^2} \log_e \frac{c}{b} \right]$$

Exemple : Pour 1 km de câble de cuivre ( $l=10^5$ ,  $\mu=1$ ) et pour les valeurs  $a=1$  cm,  $b=1,5$  cm,  $c=1,8$  cm, cette formule donne  $L=0,000676$  henry.



Pour un câble formé de deux conducteurs tubulaires coaxiaux (rayons  $a_0$ ,  $a$  et  $b$ ,  $c$ ), un calcul analogue au précédent donne :

$$L = \frac{2}{10^9} l \left[ \log_e \frac{b}{a} + \frac{\mu}{2} \left( \frac{c^2}{c^2 - b^2} \log_e \frac{c}{b} - \frac{a_0^2}{a^2 - a_0^2} \log_e \frac{a}{a_0} \right) \right]$$

**C. Coefficient de self-induction d'une ligne formée de deux conducteurs parallèles (fig. 239).**

Pour évaluer le flux d'induction magnétique  $\Psi$  traversant la partie du plan des axes située entre ces derniers, nous remarquerons que le

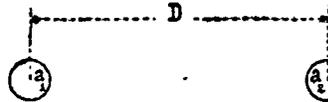


FIG. 239

champ  $H$  en chaque point peut être conçu comme la somme des champs concordants  $H_1$  et  $H_2$  dus à chacun des fils, ces champs étant liés aux distances  $x_1$  et  $x_2$  du point considéré aux deux axes et aux intensités  $i_1$  et  $i_2$  des courants compris dans les espaces cylindriques ayant respectivement pour rayons ces distances, par les expressions :  $H_1 = \frac{2i_1}{10x_1}$ ,  $H_2 = \frac{2i_2}{10x_2}$ .

Dans l'hypothèse de courants uniformément répartis, on a, pour  $x_1$  inférieur à  $a_1$ ,  $i_1 = I \frac{x_1^2}{a_1^2}$  ; et, pour  $x_1$  compris entre  $a_1$  et  $D$ ,  $i_1 = I$ . De même, pour  $x_2$  compris entre  $D$  et  $a_2$ ,  $i_2 = I$  et pour  $x_2$  inférieur à  $a_2$ ,  $i_2 = I \frac{x_2^2}{a_2^2}$ .

On a donc :

$$\Psi = \sum_{x=0}^{x=D} H l dx = l \left[ \sum_{x_1=0}^{x_1=D} H_1 dx_1 + \sum_{x_2=0}^{x_2=D} H_2 dx_2 \right] =$$

$$2l \left[ \sum_{x_1=0}^{x_1=a_1} \frac{x_1}{a_1^2} dx_1 + \sum_{x_1=a_1}^{x_1=D} \frac{dx_1}{x_1} + \sum_{x_2=0}^{x_2=a_2} \frac{x_2}{a_2^2} dx_2 + \sum_{x_2=a_2}^{x_2=D} \frac{dx_2}{x_2} \right]$$

et, tous calculs faits :

$$\Psi = \frac{2}{10} l l \left[ 1 + \log_e \frac{D^2}{a_1 a_2} \right]$$

Dans l'hypothèse de courants localisés à la périphérie des conducteurs, on aurait :

$$\Psi = \frac{2}{10} l l \log_e \frac{D^2}{a_1 a_2}$$

En prenant pour  $L$  la moyenne des deux valeurs auxquelles conduisent les deux hypothèses extrêmes sur la répartition des courants on obtient finalement :

$$L = \frac{2}{10^9} l \left[ \frac{1}{2} + \log_e \frac{D^2}{a_1 a_2} \right]$$

Exemple: Pour 1 km de ligne et fils de cuivre de 5 mm de diamètre distants de 50 cm d'axe en axe, c'est-à-dire pour  $l=10^5$ ,  $a_1=a_2=0,25$ ,  $D=50$ , cette formule donne  $L=0,002220$  henry.

En introduisant dans la formule le diamètre  $d$  des fils estimé en millimètres, y laissant la distance  $D$  exprimée en centimètres et faisant apparaître les logarithmes vulgaires, on obtient, pour le calcul usuel du coefficient de self-induction d'un kilomètre de ligne en fils de cuivre identiques entre eux, la formule:

$$L_1 = \frac{1298,3 + 920,8 \log \frac{D}{d}}{10^6} \frac{\text{henry}}{\text{kilom.}}$$

**D. — Coefficient d'induction mutuelle de deux bobines cylindriques l'une longue, l'autre courte située à l'intérieur de la première (fig. 240).**

Si une bobine cylindrique longue  $B$ , à l'intérieur de laquelle le champ dû à un courant  $I$  est  $H = \frac{4\pi}{10} n_1 I$ , renferme une bobine courte  $b$  de section  $S'$  comprenant  $n'$  spires et dont l'axe fait

avec le champ un angle  $\theta$ ,  
le flux d'induction reçu  
par cette dernière étant :

$$\begin{aligned} \Phi_{2,1} &= n'S'H \cos \theta \\ &= \frac{4\pi}{10} nn'S'I \cos \theta, \end{aligned}$$

le coefficient d'induction  
mutuelle  $\frac{1}{10^8} \left( \frac{\Phi_{2,1}}{I} \right)$  sera :

$$M = \frac{4\pi}{10^9} nn'S' \cos \theta,$$

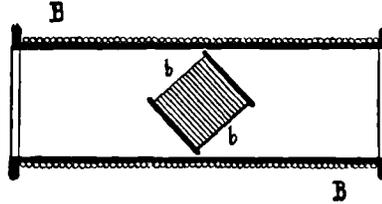


FIG. 240

Ainsi que l'a proposé M. Brillouin, cette appareil peut servir d'étalon d'induction mutuelle, de valeur variable à volonté avec angle  $\theta$ .

Si la bobine fixe n'est pas assez longue pour qu'on puisse considérer le champ à son intérieur comme exprimé par la formule simple  $\frac{4\pi}{10} n_1 I$ , mais si le champ peut être considéré comme uni-

forme dans l'espace occupé par la bobine  $b$ , les valeurs de  $M$  correspondant à diverses positions de cette dernière n'en seront pas moins entre elles comme les cosinus des angles  $\theta$ , car on aura  $\Phi_{2,1} = n'S'H \cos \theta$ , et  $M = \frac{1}{10^8} \frac{\Phi_{2,1}}{I} = \frac{1}{10^8} n'S' \frac{H}{I} \cos \theta$ ,

la quantité  $n'S' \frac{H}{I}$  étant une constante, à déterminer expérimentalement, représentant la valeur maxima de  $M$ , obtenue pour  $\theta = 0$ .

**E. Coefficient d'induction mutuelle de deux bobines enroulées sur un circuit magnétique parfait.**

Si une bobine  $B'$  est formée de  $n'$  spires uniformément enroulées sur un tore de perméabilité  $\mu$  constante et de réluctance  $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$ , le flux auquel elle donne naissance dans une section du tore, pour un courant d'intensité  $I$ , est (1)

$$\Phi' = \frac{\frac{4}{10}\pi n' I}{\mathcal{R}}$$

1. Voir page 46.

Les  $n'$  spires de la bobine sont donc traversées par un flux

$$\Psi' = \frac{\frac{4}{10} \pi n' I}{\mathcal{R}}$$

qui, dans l'hypothèse faite de  $\mathcal{R}$  constante, est proportionnel à  $I$ . Le coefficient de proportionnalité divisé par  $10^8$

$$L' = \frac{4}{10^9} \pi \frac{n'^2}{\mathcal{R}}$$

n'est autre que le coefficient de self-induction de la bobine considérée.

Si ce même tore porte une seconde bobine  $B''$  comprenant un nombre de spires  $n''$ , le coefficient de self-induction de cette seconde bobine sera de même :

$$L'' = \frac{4}{10^9} \pi \frac{n''^2}{\mathcal{R}}$$

On voit ainsi que *les coefficients de self-induction de deux bobines enroulées sur un circuit magnétique parfait sont proportionnels aux carrés des nombres de spires de ces bobines.*

Le flux traversant la seconde bobine quand la première est le siège d'un courant  $I$  est :

$$\Phi_{2,1} = n'' \frac{4}{10} \pi \frac{n' I}{\mathcal{R}}$$

Il est égal au flux

$$\Phi_{1,2} = n' \frac{4}{10} \pi \frac{n'' I}{\mathcal{R}}$$

traversant la première quand le courant  $I$  est établi dans la seconde :

La fraction  $\frac{1}{10^8}$  du coefficient de  $I$  dans ces deux expressions, savoir :

$$M = \frac{4}{10^9} \pi \frac{n' n''}{\mathcal{R}}$$

est le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines. On voit qu'il est égal à la moyenne géométrique des coefficients de self-induction  $L'$  et  $L''$

$$M = \sqrt{L' L''}$$

Cette formule est approximativement applicable au cas de deux bobines cylindriques longues, superposées.

**F. Coefficient d'induction mutuelle de deux bobines enroulées sur un circuit magnétique imparfait.**

Si le circuit magnétique n'est pas parfait, c'est-à-dire si chaque bobine ne reçoit qu'une fraction du flux de l'autre, la relation  $M^2 = L' L''$  n'a plus lieu.

On a alors, en considérant le flux envoyé par la première bobine dans la seconde :

$$10^8 MI = n'' \frac{\Phi'}{v'}$$

ou le flux envoyé (pour le même courant I) par la seconde dans la première :

$$10^8 MI = n' \frac{\Phi''}{v''}$$

d'où

$$10^{16} M^2 I^2 = \frac{n' n'' \Phi' \Phi''}{v' v''}$$

or  $n' \Phi' = 10^8 L' I$  et  $n'' \Phi'' = 10^8 L'' I$ ; donc :

$$M^2 = \frac{1}{v' v''} L' L''$$

et, par suite :

$$M^2 < L' L'',$$

puisque  $\frac{1}{v' v''}$  est le produit des fractions  $\frac{1}{v'}$ ,  $\frac{1}{v''}$  inférieures à l'unité, marquant respectivement, pour chaque bobine, le rapport du flux reçu par elle au flux créé par l'autre.



Lorsqu'il y a ainsi des fuites magnétiques, c'est-à-dire lorsque chaque bobine ne reçoit qu'une partie du flux de l'autre, on peut considérer le flux embrassé par chaque bobine comme la somme de deux autres, l'un traversant uniquement la bobine considérée, l'autre traversant les deux bobines et écrire, par exemple :

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi'_{1,1} + \Phi'_{2,1} \\ \Phi'' &= \Phi''_{2,2} + \Phi''_{1,2} \end{aligned}$$

d'où

$$10^8 L'I = n' \Phi' = n' \Phi'_1 + n' \Phi'_{2,1} = 10^8 l'I + n' \Phi'_{2,1}$$

$$10^8 L''I = n'' \Phi'' = n'' \Phi''_2 + n'' \Phi''_{1,2} = 10^8 l''I + n'' \Phi''_{1,2}$$

Les quantités :

$$l' = \frac{1}{10^8} \frac{n' \Phi'_1}{I}$$

$$l'' = \frac{1}{10^8} \frac{n'' \Phi''_2}{I}$$

définies au moyen des flux non communs ou flux perdus  $\Phi'_1$  et  $\Phi''_2$ , comme les coefficients  $L'$   $L''$  le sont au moyen des flux totaux, sont désignées quelquefois sous le nom de *coefficients de self-induction partiels*.

On a, avec ces notations.

$$10^8 MI = n'' \Phi'_{2,1} = n' \Phi''_{1,2}$$

d'où

$$M^2 = \frac{1}{10^{16}} \frac{n' n'' \Phi'_{2,1} \Phi''_{1,2}}{I^2} = (L' - l') (L'' - l'')$$



# TRENTE-TROISIÈME LEÇON



## INDUCTION

\*\*\*\*\*

### COURANTS VARIABLES PROBLÈMES USUELS



#### I

**Influence de la self-induction d'un circuit sur le régime d'établissement ou de disparition d'un courant dû à un générateur de force électromotrice constante.**

Supposons qu'on ferme, à un instant donné, que nous prendrons pour origine du temps, un circuit de résistance  $R$  et de coefficient de self-induction  $L$ , comprenant un générateur de force électromotrice constante  $E$ . L'intensité  $i$  du courant dans ce circuit, sera une fonction du temps satisfaisant à l'équation :

$$0 = Ri - E + L \frac{di}{dt}$$

En écrivant cette relation :

$$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

on voit que l'intensité  $i$  est, à chaque instant, infé-

rieure à la valeur  $\frac{E}{R} = I$  du courant que donnerait, en régime permanent, la force électromotrice,  $E$ , dans le même circuit.

L'écart  $j = \frac{E}{R} - i$ , étant exprimé par  $\frac{L}{R} \frac{di}{dt}$ , est proportionnel au taux  $\left(\frac{di}{dt}\right)$  de variation de  $i$ . On peut d'ailleurs aisément l'exprimer aussi à l'aide du taux de variation de  $j$ , car de  $j = \frac{E}{R} - i$  on tire :  $\frac{dj}{dt} = -\frac{di}{dt}$  en sorte que

$$j = -\frac{L}{R} \frac{dj}{dt}$$

En écrivant cette relation :

$$\frac{dj}{j} = -\frac{R}{L} dt$$

ou

$$d. \text{Log}_e j = -\frac{R}{L} dt$$

ou  $\text{Log}_e \frac{j}{J} = -\frac{R}{L} t$ , on voit qu'en définitive on peut écrire ( $e$  désignant la base des logarithmes népériens et  $J$  une constante) :

$$j = J e^{-\frac{R}{L} t}$$

d'où, puisque  $i = \frac{E}{R} - j$  :

$$i = \frac{E}{R} - J e^{-\frac{R}{L}t}$$

Comme pour  $t = 0$ , on doit avoir  $i = 0$ , il faut que la constante  $J$  ait la valeur  $\frac{E}{R}$ , ce qui donne finalement pour  $i$  l'expression :

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

D'après cette formule, le courant  $i$  part de zéro et s'élève progressivement vers la valeur  $\frac{E}{R}$  pour ne l'atteindre jamais rigoureusement, puisque  $e^{-\frac{R}{L}t}$  ne s'annule que pour  $t = \infty$ .

En pratique, à un moment donné  $t$ , la différence entre  $i$  et sa limite  $\frac{E}{R}$  est d'autant moindre que la quantité  $\frac{R}{L}t$  est plus grande, ou, ce qui revient au même, que son inverse  $\frac{L}{R}$  est plus petit.

Le temps  $\theta$  au bout duquel l'intensité  $i$  du courant, diffère de sa limite d'une fraction donnée  $\left(\frac{1}{n}\right)$  de la valeur de cette dernière est d'autant plus court que la quantité  $\frac{L}{R}$  est plus petite.

En effet, on trouvera ce temps en posant :

$$\frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}\theta} = \frac{1}{n} \frac{E}{R}$$

d'où

$$e^{-\frac{R}{L}\theta} = \frac{1}{n}$$

ou

$$\frac{R}{L}\theta = \log. n$$

et enfin

$$\theta = \frac{L}{R} \log. n$$

La quantité

$$\frac{L}{R}$$

à laquelle est ainsi proportionnel le temps  $\theta$ , pour une valeur donnée de  $\frac{1}{n}$ , constitue ce qu'on appelle la **constante de temps** du circuit considéré.

Elle est d'autant plus petite, et la période variable permettant au courant d'atteindre une valeur donnée est d'autant plus courte, que le coefficient de self-induction du circuit a une valeur plus faible, comparativement à sa résistance. Si, pour une self donnée, on veut diminuer cette constante de temps, on le pourra en augmentant la résistance.

Exemple:

Pour  $L = 10$  et  $R = 1.000$  on aurait:  $I - i = \frac{1}{1.000} I$  ou  $i = \frac{999}{1.000} I$

au bout d'un temps  $\theta = \frac{10}{1.000} \text{Log}_e 1.000 = 0^s,069$ ; tandis qu'avec  $R = 100.000$  on aurait  $\theta = 0^s,00069$ .



La fig. 241 indique l'allure de la courbe représentative de l'accroissement de  $i$  avec le temps.

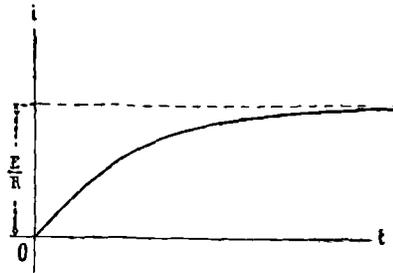


FIG. 241

Cette courbe est naturellement asymptotique à la droite repré-

sentant l'intensité  $I = \frac{E}{R}$  du courant dans l'état permanent.

Le coefficient angulaire  $a$  pour expression :

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Il a, à l'origine (pour  $t = 0$ ), la valeur

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L}$$

indépendante de la résistance  $R$  du circuit.

C'est donc la self-induction  $L$  qui règle seule, pratiquement, les toutes premières valeurs de l'intensité du courant.

Pour  $t = \tau$  très voisin de zéro, on a, approximativement :

$$i = \frac{E}{L} \tau$$



Si, conservant les valeurs de  $E$  et de  $L$ , on accroît la résistance d'une quantité  $r$ , la courbe qui représente alors la variation de  $i$  a même tangente à

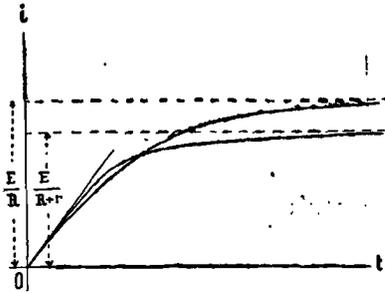


FIG. 242

l'origine que la précédente, mais elle passe ensuite au-dessus de celle-ci (1), pour lui devenir toutefois finalement inférieure, (fig. 242), puisque son asymptote est à une distance  $\left(\frac{E}{R+r}\right)$  de l'axe du temps moindre que la précédente  $\left(\frac{E}{R}\right)$

La formule  $i = \frac{E}{L} \tau$  montre qu'en télégraphie, pour de très brève émissions de courants, le groupement d'un nombre donné d'éléments de piles n'est pas, comme en régime permanent, celui qui rend la résistance de la pile égale à celle de la partie extérieure du circuit, mais bien celui qui donne à  $E$  la plus grande valeur, c'est-à-dire le groupement en tension (2).



Si, à un instant où le régime permanent  $I = \frac{E}{R}$  peut être considéré comme pratiquement établi, on supprime la force électromotrice  $E$  tout en maintenant au circuit la même résistance totale  $R$ , et la

1. En effet, pour  $t$  donné voisin de 0,  $\frac{di}{dR}$  est positif.

2. *Vaschy et de la Touanne.* « Bull. de la doct. int. des Electriciens », 7 juillet 1886.

même self-induction  $L$  (1), le courant décroît en satisfaisant à la relation :

$$0 = Ri + L \frac{di}{dt}$$

ou

$$i = - \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

identique à celle qui régit tout à l'heure la variation de  $j$ , en sorte que l'on a :

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

La courbe (*fig. 243*) représentative de cette loi de décroissance du courant :

n'est autre que celle de la *fig. 241*, retournée et déplacée de façon que son point origine se trouve sur l'axe des  $i$  à une distance  $\frac{E}{R}$  du point  $o$ .

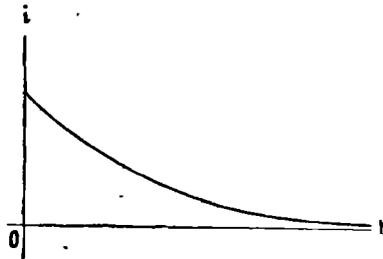


FIG. 243

Le coefficient angulaire  $\left(\frac{di}{dt}\right)$  de cette courbe, c'est-à-dire le taux de décroissance de  $i$ , est exprimé par la formule :

$$\frac{di}{dt} = - \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Sa valeur absolue initiale  $\left(\frac{E}{L}\right)$  est d'autant plus

1. Il suffit pour cela, de substituer à la pile, par la manœuvre d'un commutateur, une résistance non inductive équivalente.

grande et par conséquent la chute de l'intensité est d'autant plus rapide que la self-induction  $L$  du circuit est plus faible,

Au bout d'un temps  $t = \frac{L}{R}$  après la suppression de

$E$ , l'intensité du courant est  $i = \frac{E}{R} e^{-\frac{L}{R}t} = \frac{1}{e} \frac{E}{R}$ .

De là le théorème suivant :

La constante de temps  $\left(\frac{L}{R}\right)$  d'un circuit est égale au temps que met le courant, à partir de la suppression de la force électromotrice, pour se réduire à la fraction  $\frac{1}{e}$  de sa valeur initiale.

La quantité d'électricité mise en jeu par un courant qui décroît suivant la loi en question est

$$Q = \sum_{t=0}^{t=\infty} \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} dt = \frac{LE}{R^2}$$

En l'écrivant sous la forme :

$$Q = \frac{L}{R} \frac{E}{R}$$

on voit qu'elle est égale à celle qu'eût mise en jeu le courant constant  $I = \frac{E}{R}$  pendant un temps égal à la constante de temps  $\left(\frac{L}{R}\right)$  du circuit considéré.



Si, à un moment où un circuit peut être considéré comme présentant un régime permanent, on augmente

brusquement sa résistance  $R$  d'une quantité additionnelle  $r$ , le courant varie suivant la loi impliquée par la relation.

$$0 = (R + r) i + L \frac{di}{dt} - E$$

ne différant de celle de la page 177, que par la substitution de  $R + r$  à  $R$  et par la condition que pour  $t = 0$ ,  $i = \frac{E}{R}$ . Il en résulte pour  $i$  l'expression :

$$i = \frac{E}{R + r} \left( 1 + \frac{r}{R} e^{-\frac{R + r}{L} t} \right)$$

Au lieu de prendre instantanément la valeur  $i = \frac{E}{R + r}$  correspondant, en régime permanent, à la nouvelle résistance ( $R + r$ ), le courant s'en approche asymptotiquement, comme le représente la *fig. 244*.

Ce cas d'augmentation brusque de la résistance d'un circuit est très usuel, car il se présente inévitablement lors de la manœuvre de tout inter-

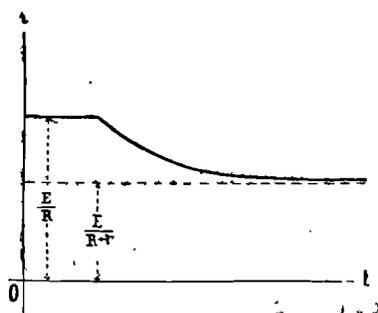


FIG. 244

rupteur procédant à la rupture d'un courant. La résistance au contact des deux pièces de l'interrupteur entre lesquelles se fait la rupture, prend rapidement une valeur très grande. Toutefois, à la cessation du contact entre ces pièces, la résistance dans leur inter-

valle ne devient pas immédiatement infinie, en raison du pont conducteur de gaz chauds jeté entre elles par l'étincelle qui accompagne inévitablement leur séparation et qui ne cesse que pour un éloignement des pièces métalliques plus ou moins considérable, suivant que la self induction du circuit est plus ou moins grande.

La rupture d'un circuit par un interrupteur doit donc être envisagée comme correspondant à l'introduction d'une résistance additionnelle croissante de 0 à  $\infty$  suivant une loi compliquée et d'ailleurs inconnue. Elle constitue un problème beaucoup moins simple que celui de l'introduction brusque d'une résistance constante  $r$ .



En valeur absolue, le taux initial de l'augmentation d'intensité d'un courant lors de la fermeture du circuit est en général notablement moindre que celui de la chute de l'intensité lors de la rupture du circuit par l'ouverture d'un interrupteur.

Le premier, en effet, est donné par l'expression

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L}$$

et le second

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{r}{R} \frac{E}{L}$$

Or le rapport  $\frac{r}{R}$  de cette seconde expression à la première est en général un nombre supérieur à l'unité; d'autant plus grand que la résistance additionnelle

initiale  $r$  est plus grande relativement à la résistance normale du circuit.



## II

### Fonctionnement, en régime variable, d'une self shuntée par un rhéostat.

Si un faisceau formé (*fig. 245*) d'un appareil **A B** de résistance  $R_1$  et de self  $L_1$ , shunté par un rhéostat  $R_2$  de self  $L_2$ , fait partie d'un circuit dans lequel, pour une cause quelconque (ouverture ou fermeture d'un interrupteur, etc.), un courant a une intensité  $i$  variable, cet appareil et son shunt

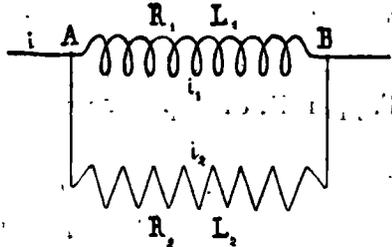


FIG. 245

seront aussi le siège de courants variables  $i_1$  et  $i_2$ , satisfaisant à chaque instant aux conditions :

$$i_1 + i_2 = i$$

$$V = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$V = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

d'où l'on déduit, en multipliant la deuxième équation par  $L_2$  et la troisième par  $L_1$ , puis ajoutant :

$$V = \frac{R_2 L_1}{L_1 + L_2} i + \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{di}{dt} - \frac{R_2 L_1 - R_1 L_2}{L_1 + L_2} i_1$$

Le faisceau se comporte donc, dans le circuit où il est inséré, comme le ferait un conducteur de résistance  $r$ , de self  $l$  et de force électromotrice  $e$  définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} r &= \frac{R_2 L_1}{L_1 + L_2} \\ l &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \\ e &= \frac{R_2 L_1 - R_1 L_2}{L_1 + L_2} i_1 \end{aligned}$$

Si la résistance  $R_1$  de l'appareil **A B** est faible vis-à-vis de celle  $R_2$  du rhéostat qui le shunte, et si la self  $L_2$  de celui-ci est négligeable vis-à-vis de celle  $L_1$  de l'appareil, on a pratiquement :

$$\begin{aligned} r &= R_2 \\ l &= L_2 \\ e &= R_2 i_1 \end{aligned}$$

Ces formules rendent compte de l'efficacité d'un rhéostat-shunt pour atténuer les étincelles à la rupture du circuit d'un appareil à forte self, tel qu'un électro-aimant. L'extra-courant de rupture est faible, dans ces conditions, car le groupe électro-aimant, rhéostat, se comporte comme une self très faible  $l$  pratiquement égale à celle  $L_2$  du rhéostat.



## III

**Fonctionnement, en régime variable, d'une résistance ohmique shuntée par un condensateur.**

Si un faisceau (*fig. 246*), formé d'une résistance  $R_1$  sans self shuntée par un condensateur de capacité  $C_*$  fait partie d'un

circuit à courant variable  $i$ , on a, à chaque instant, en appelant  $i_1$  et  $i_2$

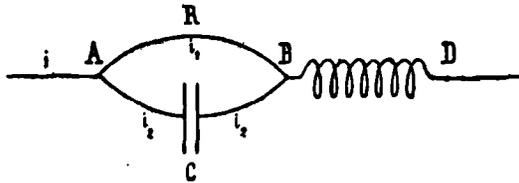


FIG. 246

les courants dans les deux branches, et  $V$  la différence de potentiel  $V_A - V_B$  :

$$\begin{aligned} V &= R i_1 \\ i_1 &= i - i_2 \\ i_2 &= \frac{C dV}{dt} \end{aligned}$$

et, par suite, en remplaçant, dans la première relation,  $i_1$  par sa valeur :

$$V = Ri - CR \frac{dV}{dt}$$

En considérant cette relation comme étant du type  $V = Ri - E$ , on peut envisager le faisceau en question comme équivalent à un conducteur de résistance  $R$  qui serait doué d'une force électromotrice variable  $E = CR \frac{dv}{dt}$ .

L'intégrale  $\sum E dt$  de cette force électromotrice entre deux instants où les valeurs de  $V$  sont respectivement  $V_1$  et  $V_2$  est  $CR(V_2 - V_1)$ .

Si le régime variable du circuit dont fait partie ce faisceau est dû à une modification faisant passer l'intensité du courant d'une première valeur constante  $I_1$  à une seconde valeur constante  $I_2$ , on aura  $V_1 = RI_1$ ,  $V_2 = RI_2$  et, par suite,

$$\sum E dt = CR(RI_2 - RI_1) = CR^2(I_2 - I_1)$$

Soit  $BD$ , une portion du circuit considéré, contiguë à  $AB$  et ayant un coefficient de self-induction  $L$ . La force électromotrice variable dont elle sera le siège aura pour expression  $E_s = -L \frac{di}{dt}$  et pour intégrale :

$$\sum E_s dt = -L(I_2 - I_1).$$

Pour l'ensemble  $(AD)$  de  $AB$  et de  $BD$ , on aura donc

$$\sum E dt = -(L - CR^2)(I_2 - I_1)$$

Si l'appareil associé en série avec la self  $L$  était une autre self  $L'$ , on aurait pour l'ensemble :

$$\sum E dt = -(L + L')(I_2 - I_1)$$

*Le faisceau formé d'une résistance ohmique  $R$  shuntée par un condensateur  $C$  se comporte donc, au point de vue du calcul de la force électromotrice intégrale  $\sum E dt$ , comme une self négative de valeur  $CR^2$ .*

En particulier, on aura  $\sum E dt = 0$  si  $L$ ,  $R$  et  $C$  satisfont à la condition :

$$L = CR^2$$



## IV

### Partage d'une décharge d'induction entre les deux branches d'une dérivation.

Soient  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $R_2$ ,  $L_2$ , les résistances et coefficients de self-induction des deux branches d'un faisceau  $AB$  faisant partie (*fig. 247*) d'un circuit soumis à une décharge d'induction.

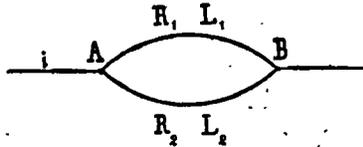


FIG. 247

Pendant le régime variable dû à cette décharge, on a, en appelant  $i_1$  et  $i_2$  les valeurs instantanées des courants dans les deux branches, et  $V$  la différence de potentiel  $V_A - V_B$  entre leurs extrémités :

$$V = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$V = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

d'où, en retranchant membre à membre :

$$0 = R_1 i_1 - R_2 i_2 + L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Intégrons entre deux instants  $t$  et  $t'$  et nous aurons, en appelant  $q_1$  et  $q_2$  les quantités d'électricité mises en jeu et  $(i'_1 - i_1)$ ,  $(i'_2 - i_2)$  les différences entre les intensités des courants à ces deux instants :

$$0 = R_1 q_1 - R_2 q_2 + L_1 (i'_1 - i_1) - L_2 (i'_2 - i_2)$$

Si le calcul s'étend à toute la durée d'une décharge, les différences  $i'_1 - i_1$  et  $i'_2 - i_2$  sont nulles, les courants ayant après la décharge les mêmes valeurs qu'avant.

On a donc, entre les quantités totales  $Q_1$  et  $Q_2$  d'électricité mises en jeu par une décharge dans les deux branches d'une dérivation, la relation :

$$R_1 Q_1 = R_2 Q_2$$

analogue à celle ( $R_1 I_1 = R_2 I_2$ ) qui régirait, dans l'état permanent, le partage d'un courant  $I$  entre ces deux branches.

L'existence d'un coefficient d'induction mutuelle entre les deux branches ne change rien au résultat, car elle introduit simplement dans les équations primitives des termes  $M \frac{di_2}{dt}$ ,  $M \frac{di_1}{dt}$  donnant lieu dans l'intégration à des différences  $M (i'_2 - i_2)$  et  $M (i'_1 - i_1)$  qui, relatives à deux instants, l'un antérieur, l'autre postérieur à la décharge, sont nulles.

Cette loi simple du partage de la quantité totale d'électricité en raison inverse des résistances des deux branches de la dérivation, n'a plus lieu si, pendant la décharge, ces branches, sont le siège de forces électromotrices d'induction autres que celles de self-induction

et d'induction mutuelle, si, par exemple, leur situation par rapport à un système magnétique extérieur venait à être modifié, comme il arriverait dans le cas où l'une des branches renfermerait un galvanomètre à équipage mobile recevant une déviation avant la fin de la décharge.

L'emploi d'un galvanomètre balistique shunté ne sera donc correct que si l'équipage de cet instrument possède une inertie assez grande pour que la décharge soit complète avant qu'il ait éprouvé le moindre déplacement.



V.

### Charge d'un condensateur

Si un condensateur **C**, d'armatures **A** et **B** (*fig. 248*) est mis, par des fils de self négligeable, en relation avec deux points **M** et **N**, entre lesquels est maintenue une différence de potentiel fixe  $V_M - V_N = V$ , la différence de potentiel  $V_A - V_B = v$  entre les armatures, s'élève de zéro à  $V$  suivant une loi de variation déterminée par la relation

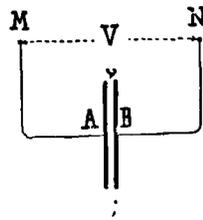


FIG. 248

$$V - v = Ri$$

qu'on obtient en additionnant les relations :

r. 2

13

$$V_M - V_A = R_{MA} i$$

$$V_B - V_N = R_{BN} i$$

dans lesquelles  $i$  désigne l'intensité du courant de charge à l'instant considéré et  $R_{MA}$ ,  $R_{BN}$  les résistances des fils de jonction, ayant une somme  $R$ .

D'ailleurs  $i = \frac{dq}{dt} = \frac{C dv}{dt}$ , en sorte que l'équation à laquelle satisfait la différence de potentiel variable  $v$  entre les armatures du condensateur est

$$V - v = CR \frac{dv}{dt}$$

La différence de potentiel  $v$  approche donc de sa limite  $V$ , suivant une loi de même forme que celle suivant laquelle le courant de fermeture d'un circuit approche de sa limite  $I$ . On a par conséquent :

$$v = V \left( 1 - e^{-\frac{1}{CR} t} \right)$$

La *constante de temps* a ici la valeur :

$$CR$$

La charge du condensateur sera, par suite, d'autant plus rapide que ce produit  $CR$  sera plus faible.

Elle sera réalisée à  $\frac{1}{n}$  près, en un temps  $\theta$ , donné par l'expression

$$\theta = CR \operatorname{Log}_e n$$

Exemple : pour  $C = 10^{-6}$  (soit 1 microfarad) et  $R = 1$  ohm, la charge est réalisée à  $\frac{1}{10000}$  près au bout de  $0^s, 0000092$ .

La même charge demanderait environ 1 seconde si  $R$  était de l'ordre de 100.000 ohms.



La formule relative à la charge d'un condensateur au moyen d'une pile de force électromotrice  $E$  se déduit de la précédente en remplaçant  $V$  par  $E$  et en comprenant dans  $R$  la résistance intérieure de la pile en même temps que celle des fils de connexion.



La décharge, à travers un circuit sans self, d'un condensateur préalablement porté à une différence de potentiel  $V$ , s'effectue de telle façon que la différence de potentiel  $v$  entre les armatures, décroît de  $v$  à zéro suivant la loi exprimée par la formule :

$$v = V e^{-\frac{t}{CR}}$$



Connaissant, par les formules précédentes, les valeurs de  $v$  à la charge ou à la décharge à chaque instant, on aura aisément, en les multipliant par  $C$ , les valeurs correspondantes de la quantité d'électricité  $q$  du condensateur.

Si, pour acquérir une charge  $Cv$  égale à une fraction  $\frac{1}{n}$  de sa charge complète  $CV$ , un condensateur exige un temps  $\theta$ , quand la résistance du circuit de charge est  $R$ , et un temps  $\theta'$  quand la résistance du circuit est  $R'$ , on a, en vertu de la relation  $\theta = CR \log_e n$  :

$$\frac{\theta}{R} = \frac{\theta'}{R'}$$

d'où

$$\frac{R'}{R} = \frac{\theta'}{\theta}$$

Tel est le principe de la méthode de comparaison des résistances, dite du condensateur, et dont on a vu un cas particulier, t. I, page 191.



## VI

## Décharge oscillante d'un condensateur

Si les deux armatures d'un condensateur (*fig. 249*),

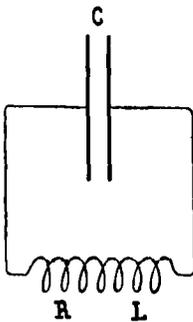


FIG. 249

après avoir été portées à des potentiels différents, sont reliées l'une à l'autre par une chaîne de corps conducteurs présentant, outre une résistance ohmique  $R$ , un coefficient de self-induction  $L$ , on a, à chaque instant, durant l'état variable qui constitue la décharge, les relations :

$$v = R i + L \frac{di}{dt}$$

et

$$i = - \frac{C dv}{dt}$$

d'où pour  $v$  la condition :

$$CL \frac{d^2v}{dt^2} + CR \frac{dv}{dt} + v = 0$$

L'expression générale de  $v$  qui satisfait à cette équation est :

$$v = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les deux racines de l'équation

$$CLx^2 + CRx + 1 = 0$$

Si  $CR^2 - 4L$  est une quantité *positive*, ce qui a lieu pour

$$R^2 > \frac{4L}{C},$$

les racines  $\alpha$  et  $\beta$  sont réelles et négatives et, en appelant  $a$  et  $b$  leurs valeurs absolues, on a :

$$v = Ae^{-at} + Be^{-bt}$$

de sorte qu'alors  $v$  tend vers  $0$ , sans changer de signe, suivant une loi exponentielle.

Si, au contraire,  $CR^2 - 4L$  est une quantité *négative* ce qui a lieu pour

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

les racines  $\alpha$  et  $\beta$  sont imaginaires et de la forme

$$\alpha = -\mu + \nu\sqrt{-1}; \beta = -\mu - \nu\sqrt{-1}, \text{ avec :}$$

$$\mu = \frac{R}{2L}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

On a alors, en appelant  $V_0$  la différence de potentiel initiale :

$$v = \frac{V_0}{\nu} e^{-\mu t} (\nu \cos \nu t + \mu \sin \nu t)$$

La décharge, dans ce cas, est *oscillatoire*, les valeurs de  $v$  étant alternativement positives et négatives (*fig. 250*).

Les zéros de  $v$  étant ceux du facteur  $(\nu \cos \nu t + \mu \sin \nu t)$  sont *équidistants*, et l'intervalle  $z$  de chacun d'eux au suivant, satisfait à la condition  $\nu z = \pi$ , ce qui

donne pour l'intervalle  $\tau = 2z$  de deux zéros homologues :

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Lorsque  $R$  et  $C$  sont très petits, le terme  $\frac{R^2}{4L^2}$  est négligeable devant  $\frac{1}{CL}$  et l'expression de la

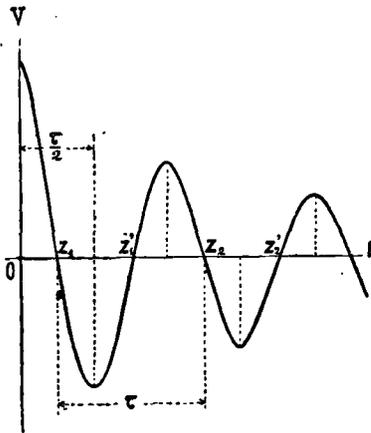


FIG. 250.

période  $\tau$  devient pratiquement :

$$\tau = 2\pi \sqrt{CL}$$

Les instants où  $v$  est maximum en valeur absolue sont (1) :

1. Ils sont donnés par la condition  $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$ .

$$0, \frac{\tau}{2}, 2 \frac{\tau}{2}, 3 \frac{\tau}{2}, \dots, n \frac{\tau}{2}, \dots$$

Deux maxima de même signe consécutifs sont donc séparés par un intervalle de temps égal à  $\tau$ .

L'amplitude du  $p^e$  maximum (obtenue en faisant  $t = p \frac{\tau}{2} = \frac{p\pi}{\nu}$  dans l'expression de  $v$ ) est :

$$v_p = V_0 e^{-\mu p \frac{\tau}{2}}$$

Elle se réduit à  $\frac{1}{n} V_0$  si  $e^{-\mu p \frac{\tau}{2}} = \frac{1}{n}$  ou si  $\mu p \frac{\tau}{2} =$

$$\text{Log}_e n, \text{ ou enfin pour } p = \frac{2 \text{Log}_e n}{\mu \tau} = \frac{2 \text{Log}_e n}{2\pi \frac{\mu}{\nu}}$$

En d'autres termes, le nombre  $\left(\frac{p}{2}\right)$  de périodes nécessaire pour abaisser le maximum de  $v$  à la fraction  $\frac{1}{n}$  de la valeur initiale est donné par l'expression :

$$\frac{\nu}{2\pi\mu} \text{Log}_e n$$



## TRENTE-QUATRIÈME LEÇON



# INDUCTION

\*\*\*\*\*

COURANTS VARIABLES (*suite*).  
THÉORIES DU GALVANOMÈTRE BALISTIQUE,  
DES OSCILLOGRAPHERS ET DU RHÉOGRAPHE.



### I

#### Théorie du galvanomètre balistique

L'équipage mobile d'un galvanomètre électromagnétique est, au point de vue mécanique, un corps tournant que sollicitent à la fois plusieurs couples, savoir :

1° Un couple *moteur* :  $C_m$ , dû au champ magnétique à l'action duquel il est soumis.

Ce couple, dit *déviateur*, est proportionnel au courant  $i$  mis en jeu :

$$C_m = Gi ;$$

2° Un premier couple *résistant* :  $C_1$ , dû à l'action antagoniste de la torsion du fil de suspension.

Ce couple, dit *élastique*, est proportionnel à la dévia-

tion angulaire  $\delta$  que présente l'équipage par rapport à sa position normale :

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}\delta ;$$

3° Un second couple *résistant* :  $\mathbf{C}_2$ , dû à la gêne qu'éprouve le mouvement de l'équipage mobile par suite, soit de la résistance de l'air, soit des courants induits, soit de ces deux causes à la fois.

Ce couple, dit *amortisseur*, est proportionnel à la vitesse angulaire  $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$  de l'équipage :

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{A} \frac{d\delta}{dt}.$$

A chaque instant, l'accélération angulaire  $\left(\frac{d^2\delta}{dt^2}\right)$  de l'équipage mobile est proportionnelle au couple résultant, c'est-à-dire à  $\mathbf{C}_m - \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$ , et, en appelant  $\mathbf{K}$  le moment d'inertie, on a :

$$\mathbf{K} \frac{d^2\delta}{dt^2} = \mathbf{C}_m - \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$$

ou, en tenant compte des expressions des divers couples :

$$\mathbf{K} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \mathbf{A} \frac{d\delta}{dt} + \mathbf{C}\delta = \mathbf{G}i$$

Telle est l'équation générale du mouvement angulaire de l'équipage de tout galvanomètre électromagnétique.



Dans le cas d'un *galvanomètre balistique*, pendant le mouvement, le couple  $\mathbf{G}i$  n'existe pas, puisque la

décharge s'accomplit avant que l'équipage ait abandonné sensiblement sa position de repos. L'équation du mouvement qui succède à l'impulsion initiale est donc alors :

$$K \frac{d^2\delta}{dt^2} + A \frac{d\delta}{dt} + C\delta = 0$$

avec les conditions :  $(\delta)_0 = 0$

$$\text{et } \left( \frac{d\delta}{dt} \right)_0 = \omega_0$$

La vitesse angulaire initiale  $\omega_0$ , due à la décharge, est d'ailleurs liée à celle-ci par la relation :

$$\int_0^\theta K \frac{d^2\delta}{dt^2} = \int_0^\theta G i dt$$

ou

$$K\omega_0 = Gq$$

$\theta$  étant la durée de la décharge et  $q$  la quantité d'électricité mise en jeu.



L'équation :

$$K \frac{d^2\delta}{dt^2} + A \frac{d\delta}{dt} + C\delta = 0$$

qui régit la déviation de l'équipage mobile après l'impulsion donnée par la décharge, est analogue à celle qui définit (page 196) la variation de  $V$  dans la décharge d'un condensateur.

Par analogie avec ce qu'on a vu plus haut à propos de ce dernier problème, on a donc, en prenant des notations similaires

$$\delta = A'e^{\alpha't} + B'e^{\beta't}$$

$\alpha'$  et  $\beta'$  étant les racines de l'équation

$$K x'^2 + A x' + C = 0$$

L'allure de la fonction  $\delta$  dépendra du signe de la quantité

$$A^2 - 4CK,$$

signe suivant lequel les racines de l'équation en  $x'$  seront réelles ou imaginaires.

Pour

$$A^2 > 4CK$$

les racines étant réelles, l'expression de  $\delta$  sera, en tenant compte des conditions initiales :

$$\delta = \frac{\omega_0 [e^{\beta't} - e^{\alpha't}]}{\beta' - \alpha'}$$

c'est-à-dire que le mouvement de l'équipage consistera alors en une excursion à une certaine distance angulaire  $\Delta$  de sa position initiale, suivie d'un retour plus ou moins lent, vers cette dernière, sans passage de l'autre côté.

On dit, dans ces conditions, que le mouvement de l'équipage est *apériodique*.

Dans ce mouvement, le retour est d'autant plus lent que l'amortissement est plus grand.

Pour

$$A^2 < 4CK$$

les racines de l'équation en  $x'$  étant imaginaires, l'expression de  $\delta$  renfermera un terme périodique (en  $\sin \nu t$ ) et le mouvement de l'équipage consistera en une série d'oscillations isochrones, d'amplitudes décroissantes, de part et d'autre de la position d'équilibre.

On dit alors que le mouvement est *oscillatoire*.

L'expression de  $\delta$  est, dans ce cas

$$\delta = \frac{\omega_0}{\nu} e^{-\mu t} \sin \nu t$$

avec

$$\mu = \frac{A}{2K}$$

et

$$\nu = \frac{\sqrt{4CK - A^2}}{2K}$$

La période  $\tau$  des retours au zéro dans le même sens est définie par la relation  $\nu\tau = 2\pi$ ; donc

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{4\pi K}{\sqrt{4CK - A^2}}$$

Cet intervalle de temps est le même que celui qui sépare deux maxima consécutifs de même signe. Si donc

$\Delta_1 = \frac{\omega_0}{\nu} e^{-\mu t_1} \sin \nu t_1$  est l'expression de l'un de ces ma-

xima, celle de l'autre sera  $\Delta_2 = \frac{\omega_0}{\nu} e^{-\mu(t_1 + \tau)} \sin \nu(t_1 + \tau)$ ,

en sorte que le rapport  $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{e^{-\mu t_1}}{e^{-\mu(t_1 + \tau)}}$  d'un ma-

ximum au suivant (de même signe) est :

$$e^{\mu\tau}$$

L'expression de la vitesse angulaire de l'équipage dans le mouvement oscillatoire défini par

$$\delta = \frac{\omega_0}{\nu} e^{-\mu t} \sin \nu t$$

étant

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_0}{\nu} e^{-\mu t} [\nu \cos \nu t - \mu \sin \nu t]$$

l'époque  $t_1$  de la première élongation (premier maximum de  $\delta$ ) sera donnée par la condition  $\frac{d\delta}{dt} = 0$  ou

$$\nu \cos \nu t_1 - \mu \sin \nu t_1 = 0 \text{ ou } \operatorname{tg} \nu t_1 = \frac{\nu}{\mu}, \text{ soit :}$$

$$t_1 = \frac{1}{\nu} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\nu}{\mu}$$

La valeur de cette élongation, obtenue par l'introduction de cette valeur de  $t$  dans l'expression de  $\delta$  est

$$\Delta_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} e^{-\frac{\mu}{\nu} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\nu}{\mu}}$$

La détermination expérimentale de  $\Delta_1$ , fera, par suite, connaître  $\omega_0$ , si l'on possède, d'ailleurs, les valeurs de  $\mu$  et de  $\nu$ .

Or celles-ci sont faciles à obtenir à l'aide de la période  $\tau$  des oscillations et du rapport  $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$  de deux élongations consécutives (de même signe).  $\nu$  se déduit de la mesure de  $\tau$ , puisque  $\tau = \frac{2\pi}{\nu}$  et  $\mu$  de celle de

$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ , puisque  $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = e^{\mu\tau}$ , d'où  $\mu\tau = \text{Log}_e \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ .

Cette quantité  $\mu\tau = \lambda$  se nomme le **décroissement logarithmique** des oscillations.

→⊙←

Lorsque le coefficient **A** est tel que

$$A^2 = 4CK$$

les deux racines  $\alpha'$  et  $\beta'$  de l'équation en  $x'$  sont égales et l'expression de  $\delta$  est (1) :

$$\delta = \omega_0 t e^{-\mu t}$$

L'époque  $t_1$  du maximum  $\Delta_1$  de  $\delta$  est alors  $t_1 = \frac{1}{\mu}$

et la valeur de ce maximum est

$$\Delta_1 = \frac{\omega_0}{\mu} e^{-1}$$

La valeur de **A** qui réduit les formules à ces expressions simples se nomme *coefficient d'amortissement critique*, le mouvement correspondant étant la limite

(1). Cette expression résulte soit de l'hypothèse  $\beta' = \alpha'$  faite dans l'expression

$$\delta = \frac{\omega_0 [e^{\beta't} - e^{\alpha't}]}{\beta' - \alpha'}$$

qui représente  $\delta$  pour  $A^2 > 4CK$  ; soit de l'hypothèse  $v = 0$  faite dans l'expression

$$\delta = \frac{\omega_0}{v} e^{-\mu t} \sin vt$$

qui représente  $\delta$  pour  $A^2 < 4CK$ .

Le cas de  $A^2 = 4CK$  est, en effet, la limite commune des deux précédents.

commune de la série des mouvements apériodiques correspondant aux valeurs de  $\mathbf{A}$  supérieures et de la série des mouvements périodiques correspondant aux valeurs de  $\mathbf{A}$  inférieures à  $\sqrt{4\mathbf{CK}}$ .

A l'autre extrémité de cette dernière série se trouve le mouvement sinusoïdal :

$$\delta = \frac{\omega_0}{\nu} \sin \nu t$$

correspondant à  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$

Dans ce cas,  $\mu = \mathbf{0}$  et  $\nu = \sqrt{\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{K}}}$  et la période ( $\tau_0$ ) des oscillations est

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{C}}}$$

Cette période est liée à la pseudo-période  $\tau = \frac{2\pi}{\nu} = 2\pi \frac{2\mathbf{K}}{\sqrt{4\mathbf{CK} - \mathbf{A}^2}}$  de l'instrument amorti par la relation simple

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

dans laquelle  $\alpha$  désigne la quantité  $\frac{\mathbf{A}^2}{4\mathbf{CK}}$  appelée **degré d'amortissement**.



En résumé, quel que soit le degré d'amortissement d'un galvanomètre électro-magnétique, l'élongation  $\Delta$  (c'est-à-dire la déviation maxima) de l'équipage mobile qui résulte d'une décharge effectuée en un temps assez

court pour que l'appareil fonctionne comme balistique, est exactement *proportionnelle* à la vitesse angulaire initiale  $\omega_0$ , avec laquelle l'équipage abandonne sa position d'équilibre.

D'ailleurs  $\omega_0$  est proportionnelle à la quantité  $q$  d'électricité mise en jeu par la décharge.

Il y a donc en définitive proportionnalité entre  $\Delta$  et  $q$ .

Le coefficient de proportionnalité est fonction des divers paramètres  $K$ ,  $A$ ,  $C$ ,  $G$ , et c'est parce qu'il est notamment fonction de  $A$  qu'on doit, lorsqu'on le détermine expérimentalement, réaliser l'expérience de comparaison dans les conditions mêmes d'amortissement où l'appareil est appelé à être ensuite utilisé (voir ci-dessus page 16).



Les seuls cas où il soit utile d'envisager l'expression théorique du coefficient de proportionnalité entre  $\Delta$  et  $q$  sont ceux où le coefficient d'amortissement  $A$  est inférieur ou égal à  $\sqrt{4CK}$ .

Dans le premier cas (mouvement oscillatoire) les

$$\text{relations } \Delta = \frac{\omega_0}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} e^{-\frac{\mu}{\nu} \text{ arc tg } \frac{\nu}{\mu}} \text{ et } q = \frac{K}{G} \omega_0$$

donnent :

$$q = \Delta \frac{K \sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{G} e^{\frac{\mu}{\nu} \text{ arc tg } \frac{\nu}{\mu}}$$

Pour  $A = 0$  (d'où :  $\mu = 0$ ) cette formule se réduit à

$\mathbf{q} = \Delta \frac{\mathbf{K}_v}{\mathbf{G}}$  ou, en tenant compte de la valeur  $\sqrt{\mathbf{CK}}$  à laquelle  $\mathbf{K}_v$  se réduit alors,  $\mathbf{q} = \Delta \frac{\sqrt{\mathbf{CK}}}{\mathbf{G}}$ .

Or, si  $\alpha$  est la déviation permanente observée au galvanomètre pour un courant constant  $\mathbf{I}$  on a  $\mathbf{GI} = \mathbf{C}\alpha$ , d'où  $\mathbf{G} = \frac{\mathbf{C}\alpha}{\mathbf{I}}$ . En portant cette valeur de  $\mathbf{G}$  dans

l'expression de  $\mathbf{q}$  on obtient  $\mathbf{q} = \Delta \frac{\mathbf{I}}{\alpha} \sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{C}}}$ . Mais

$\sqrt{\frac{\mathbf{K}}{\mathbf{C}}}$  n'est autre que  $\frac{\tau_0}{2\pi}$ ,  $\tau_0$ , étant la période des oscillations de l'équipage. On a donc finalement, à l'aide de quantités  $\mathbf{I}$ ,  $\alpha$ ,  $\tau_0$ , d'une détermination expérimentale très simple, comme expression de  $\mathbf{q}$  pour le cas où  $\mathbf{A} = \mathbf{o}$  (1):

$$\mathbf{q} = \Delta \times \frac{\mathbf{I}}{\alpha} \times \frac{\tau_0}{2\pi}$$

Lorsque les oscillations sont amorties ( $\mathbf{o} < \mathbf{A} < \sqrt{4\mathbf{CK}}$ ), on a :  $\mathbf{K}\sqrt{\mu^2 + \nu^2} = \sqrt{\mathbf{CK}}$ . D'ailleurs  $\tau$  étant la période des oscillations et  $\lambda$  leur décrément logarithmique, les relations  $\nu = \frac{2\pi}{\tau}$  et  $\mu = \frac{\lambda}{\tau}$  donnent  $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\lambda}{2\pi}$  et  $\frac{\nu}{\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Enfin en déduisant  $\mathbf{G}$  de l'observation de la déviation  $\alpha$  correspondant à un courant constant  $\mathbf{I}$ , on aura comme expression canonique de  $\mathbf{q}$  :

1. Ce qui a lieu, par exemple, à circuit ouvert, c'est-à-dire lors de la décharge d'un condensateur et en l'absence de tout shunt.

$$\mathbf{q} = \Delta \times \frac{\mathbf{I}}{\alpha} \frac{\tau_0}{2\pi} e^{\frac{\lambda}{2\pi} \arctg \frac{2\pi}{\lambda}}$$

relation comprenant la précédente comme cas particulier (pour  $\lambda = 0$ ).

Dans le cas de l'*apériodicité critique* ( $\mathbf{A} = \sqrt{4\mathbf{CK}}$ ,  $\nu = 0$ ,  $\lambda = \infty$ ,  $\frac{2\pi}{\lambda} = 0$ ) la formule devient :

$$\mathbf{q} = \Delta \times \frac{\mathbf{I}}{\alpha} \times \frac{\tau_0}{2\pi} \times e^{-1}$$



## II

### Théorie des oscillographes

Lorsqu'un galvanomètre électromagnétique, au lieu de recevoir un courant quasi instantané, comme celui qui correspond à une simple décharge, reçoit un courant  $\mathbf{i}$  persistant, l'équation qui définit la loi de variation de la déviation  $\delta$  de l'équipage mobile est :

$$\mathbf{K} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \mathbf{A} \frac{d\delta}{dt} + \mathbf{C}\delta = \mathbf{G}\mathbf{i}$$

Son premier membre est formé des mêmes termes que lors du fonctionnement en balistique ; mais le second membre, au lieu d'être nul, consiste en un terme proportionnel à la fonction de  $\mathbf{t}$  suivant laquelle varie l'intensité  $\mathbf{i}$  du courant.

Considérons le cas où  $i$  est une fonction périodique de la forme la plus simple, c'est-à-dire sinusoïdale :

$$I = I_{\max} \sin \omega t$$

On obtient alors une solution particulière de l'équation en posant :

$$\delta = \Delta \sin(\omega t - \varphi)$$

avec

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A\omega}{C - K\omega^2}$$

et

$$\Delta = \frac{GI_{\max}}{\sqrt{A^2\omega^2 + (C - K\omega^2)^2}}$$

La solution générale s'en déduit en ajoutant à la précédente une expression  $A'e^{\alpha't} + B'e^{\beta't}$  vérifiant l'équation sans second membre.

Si l'amortissement n'est pas nul, ces termes exponentiels tendent vers zéro et l'expression de  $\delta$  se réduit bientôt pratiquement à la solution particulière.

$$\delta = \Delta \sin(\omega t - \varphi)$$

L'équipage mobile d'un galvanomètre électromagnétique amorti qui reçoit un courant sinusoïdal effective des oscillations pratiquement sinusoïdales de même période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  que celles du courant, mais avec une différence de phase définie par un angle  $\varphi$  de tangente égale à  $\frac{A\omega}{\sqrt{C - K\omega^2}}$

L'amplitude  $\Delta$  de ces oscillations dépend du degré

d'amortissement et du rapport de la période  $\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{C}}$  de l'équipage à la période  $\frac{2\pi}{\omega}$  du courant.

En effet son expression peut s'écrire :

$$\Delta = \frac{\frac{GI_{\max}}{C}}{\sqrt{\left(\frac{A}{C} \omega\right)^2 + \left(1 - \frac{K}{C} \omega^2\right)^2}}$$

or de  $\alpha = \frac{A}{\sqrt{4CK}}$  (degré d'amortissement), de  $\omega =$

$\frac{2\pi}{T}$  et de  $\sqrt{\frac{K}{C}} = \frac{\tau_0}{2\pi}$ , on déduit  $\frac{A}{C} \omega = 2\alpha \frac{\tau_0}{T}$ , et  $\frac{K}{C} \omega^2 = \frac{\tau_0^2}{T^2}$ . On a donc :

$$\Delta = \frac{GI_0}{C} \frac{1}{\sqrt{\left(2\alpha \frac{\tau_0}{T}\right)^2 + \left(1 - \frac{\tau_0^2}{T^2}\right)^2}}$$

Si le degré d'amortissement  $\alpha$  est considérable et si la période propre  $\tau_0$  de l'équipage est très grande relativement à celle de  $T$  du courant, l'amplitude  $\Delta$  des oscillations de l'équipage est une très petite fraction de la déviation  $\frac{GI_{\max}}{C}$  qu'il recevrait d'un courant constant égal à l'amplitude  $I_{\max}$  du courant sinusoïdal mis en jeu. Aussi, ces oscillations peuvent-elles alors être pratiquement insensibles. C'est ce qui arrive lorsqu'on reçoit un courant alternatif industriel dont la période  $T$  est de l'ordre  $\frac{1}{50}$  dans un galvanomètre usuel pour courants continus.

Pour mettre un galvanomètre en état d'accuser un courant sinusoïdal par des oscillations notables de son équipage mobile, il faut donc que la période propre  $\tau_0$  de ce dernier soit très petite vis-à-vis de celle  $T$  du courant. Plus, en outre, le degré d'amortissement  $\alpha$  sera petit, plus la phase des oscillations de l'équipage sera près de coïncider avec celle du courant, puisque

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha \frac{\tau_0}{T}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{T}\right)^2}}$$

Ce sont là des conditions auxquelles doivent satisfaire les *oscillographes*.

Il importe toutefois que l'amortissement ne soit pas nul, sinon les termes exponentiels de l'expression générale de  $\delta$  ne tendraient pas vers zéro.

Les conditions reconnues par M. Blondel comme les plus convenables pour les oscillographes destinés à l'étude des courants alternatifs industriels sont :

$\frac{\tau_0}{T}$  au moins égal à  $\frac{1}{50}$  et  $\alpha$  voisin de 1 (par défaut) (1).

---

1. C.-F. Blondel. 1. C. R. de l'Ac. des Sc., 6 mars 1893. 2. *Sur l'inscription directe des courants variables*, (Rapports présentés au Congrès international de physique, en 1900, t. III, p. 264 et suiv., 3. *Sur les oscillographes*, Soc. de Phys., séance du 20 déc. 1901).



## III

Théorie de l'oscillographe  
d'Abraham-Carpentier

Supposons que le courant  $i$  admis dans un galvanomètre soit lié à un courant variable  $I$  par la relation.

$$h i = C I + A \frac{dI}{dt} + K \frac{d^2 I}{dt^2}$$

la déviation  $\delta$  de l'équipage du galvanomètre satisfera alors à l'équation

$$K \frac{d^2 \delta}{dt^2} + A \frac{d\delta}{dt} + C \delta = \frac{G}{h} \left[ C I + A \frac{dI}{dt} + K \frac{d^2 I}{dt^2} \right]$$

laquelle admettra évidemment pour solution

$$\delta = \frac{G}{h} I$$

Les déviations  $\delta$  du galvanomètre seront, dans ces conditions, proportionnelles au courant variable  $I$  et l'enregistrement des déviations fournira une courbe représentative de la loi même des variations de  $I$ .

Tel est le principe de la méthode ingénieuse d'étude des courants variables, imaginée par M. Abraham (1).

L'appareil permettant de la mettre en pratique a reçu le nom de **rhéographe**.

Le galvanomètre est constitué par un petit cadre de fils de cuivre, suspendu par un fil de torsion dans le

---

1. H. Abraham. Sur le rhéographe à induction Abraham-Carpentier. Soc. fr. de physique, 2 avril 1897.

champ d'un fort électro-aimant, la sensibilité étant en raison de l'intensité du champ magnétique employé.

Le courant  $i$  est formé par la superposition de trois courants, savoir :

1° Un courant proportionnel à  $I$ , obtenu en dérivant le galvanomètre  $G$  (fig. 251), aux bornes d'une résistance  $r$  faisant partie du circuit  $P$  de  $I$ ;

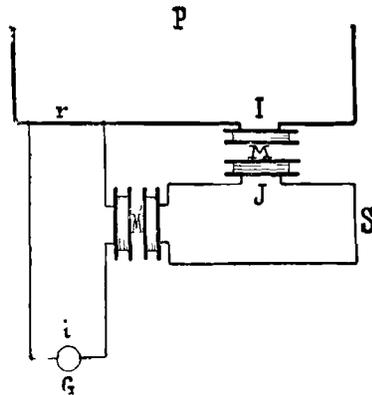


FIG. 251

2° Un courant proportionnel à  $\frac{dI}{dt}$  obtenu en ménageant une induction mutuelle  $M'$  entre le circuit de  $I$  et celui  $G$  du galvanomètre. Si ce dernier est sans self appréciable, la force électromotrice d'induction  $M' \frac{dI}{dt}$  dont il est le siège engendre, en effet, un courant qui lui est proportionnel;

3° Un courant proportionnel à  $\frac{d^2I}{dt^2}$  obtenu en ménageant une induction mutuelle  $M''$  entre le circuit du galvanomètre et un circuit auxiliaire  $S$ , pratiquant sans self, dans lequel le courant  $I$  développe par induction (en  $M$ ), un courant  $J$  proportionnel à  $\frac{dI}{dt}$

On effectue le réglage de la relation entre  $i$  et  $I$  en ajustant, par tâtonnements, la résistance  $r$  ainsi que

les coefficients d'induction mutuelle  $M'$  et  $M''$ , et l'on reconnaît que le réglage est bon lorsque les courbes données par le galvanomètre pour un brusque établissement ou une brusque suppression d'un courant  $I$  dans le circuit d'une pile, ont bien les formes théoriques (*fig.* 252 (I) et (II)).

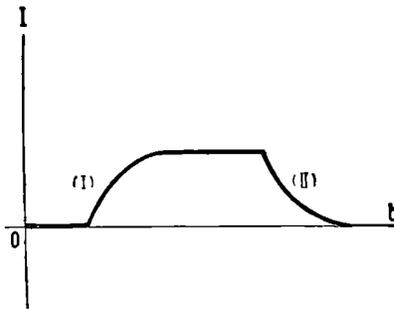
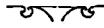


FIG. 252.



# TRENTE-CINQUIÈME LEÇON



## INDUCTION

\*\*\*\*\*

### BOBINES D'INDUCTION DESCRIPTION



Deux circuits (*fig. 253*), enroulés sur un même noyau de fils de fer **F**, l'un **P** formé d'un petit nombre de spires de gros fil, l'autre **S** formé d'un grand nombre de spires de fil fin, constituent, sous le nom de **bobine d'induction** ou **bobine de Ruhmkorf** (1), un appareil susceptible de fournir, à l'aide de quelques éléments de pile, des forces électromotrices élevées, capables de donner lieu à de fortes étincelles entre deux conduc-

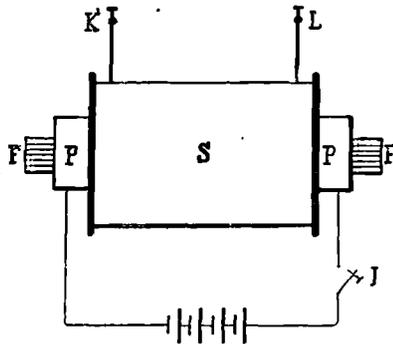


FIG. 253

1. Ce nom est celui du constructeur parisien qui, en 1851, a donné aux bobines d'induction, en s'inspirant des recherches de Masson et Bréguet (1842), la disposition classique sous laquelle elles ont été employées jusqu'à ce jour.

teurs reliés respectivement aux extrémités **K**, **L**, du circuit **S**.

L'enroulement **P** ou *primaire* joue le rôle d'*inducteur* et l'enroulement **S** ou *secondaire* le rôle d'*induit*. A cet effet, le circuit **P** comprend une pile et se trouve soumis, par le jeu d'un interrupteur **I** à une série de fermetures et d'ouvertures successives. Le flux magnétique reçu par le secondaire éprouvant, en conséquence, une série de variations en sens contraires, donne lieu, dans ce circuit, à des forces électromotrices induites, suivant la loi fondamentale exprimée par la formule :

$$(\mathbf{E}_i)_2 = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$$

ou, en appelant **M** le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits et **i**<sub>1</sub> l'intensité du courant primaire :

$$(\mathbf{E}_i)_2 = - \frac{1}{10^8} \frac{dM i_1}{dt}$$

A la *fermeture* du circuit primaire, a lieu une augmentation du flux inducteur, et se produit en **S** une force électromotrice d'induction par rapport à laquelle la face d'entrée du flux dans chaque spire est une face *gauche*. Si le circuit **S** était fermé, cette force électromotrice donnerait lieu à un courant dont le flux serait *opposé* à celui du courant inducteur (1). Aussi dit-on que la force électromotrice induite alors est *inverse*.

A la *rupture* du circuit primaire a lieu une diminu-

---

1. En effet, le flux dû au courant inducteur traverse les spires inductrices en entrant par leurs faces *droites*.

tion du flux inducteur, et se produit en  $S$  une force électromotrice d'induction par rapport à laquelle la face d'entrée du flux dans chaque spire est une face *droite*. Si le circuit  $S$  était fermé, cette force électromotrice donnerait lieu à un courant dont le flux serait *concordant* avec celui du courant inducteur. Aussi dit-on qu'alors la force électromotrice est de sens *direct*.



La différence de potentiel maxima qui se présente, pendant le fonctionnement de l'appareil, entre deux points appartenant au fil secondaire est d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que la longueur de fil comprise entre eux est plus grande. Si l'on considère (*fig. 254, (I)*) un point d'une spire et un point de sa voisine de droite ou de gauche, la longueur de fil qui les sépare n'est autre que la longueur d'une spire. Mais si l'on envisage (*fig. 254, (II)*) un point d'une spire et un point de sa voisine supérieure ou inférieure, la longueur de fil qui les sépare est égale à un multiple de la longueur d'une spire dont l'ordre est marqué par le nombre de spires d'une couche, les deux spires *contiguës* n'étant plus alors *consécutives* dans l'enroulement, puisqu'elles appartiennent à deux couches différentes. L'isolement relatif de deux spires superposées sera donc plus précaire que celui de deux spires consécutives, à moins que la bobine ne soit

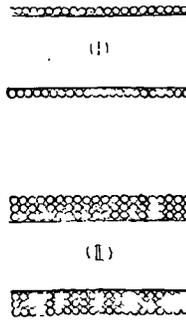


FIG. 254



FIG. 255

d'assez faible longueur (*fig. 255*) pour que le nombre des spires d'une couche se réduise à quelques unités.

On désigne sous le nom de **galettes** les bobines plates satisfaisant à cette dernière condition et offrant, par conséquent, des garanties d'isolement plus grandes que les bobines longues.

Pour constituer des enroulements secondaires offrant un très grand nombre de spires, tout en présentant un excellent isolement, on les forme, suivant le conseil qu'en a donné *Poggendorff* (1) d'un certain nombre de *galettes* (*fig. 256*) isolées placées côte à côte et associées en série.

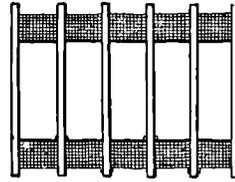


FIG. 256

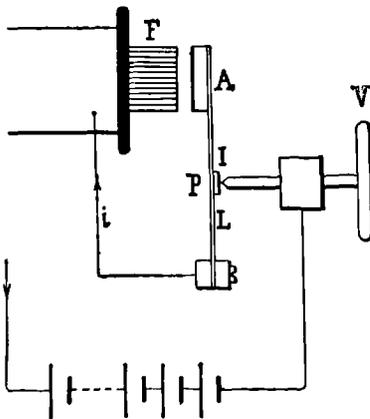


FIG. 257

Les appareils dits **interrupteurs** imaginés pour produire les fermetures et ruptures périodiques du courant primaire offrent des dispositions extrêmement variées.

Pour nous borner aux principaux types, nous mentionnerons simplement :

a. — L'*interrupteur à trembleur*, genre de *Neef* (*fig. 257*)

1. Poggend. Ann., t. xciv, p. 289 — 1850.

dans lequel l'interruption se fait automatiquement par l'attraction qu'exerce le noyau de fer *F* de la bobine sur une petite armature *A* fixée à l'extrémité d'une lame élastique *L*. Le circuit est rompu en *I* entre la pointe d'un vis *V* et une pastille *P* portée par la lame. Pointe et pastille sont en platine, parce que ce métal, en raison de son point de fusion élevé et son inoxydabilité, résiste mieux que tout autre à l'action détériorante de l'étincelle de rupture. Malgré cette précaution, c'est là le point faible de l'appareil et celui auquel il faut apporter une surveillance continuelle pour remédier à l'altération des surfaces et aux collages intempêtes.

b. — *L'interrupteur Marcel Deprez* (fig. 258) dans lequel la tension du ressort *R* qui applique contre la vis *V* l'armature mobile *A* est réglable à volonté (à l'aide de la vis *U*), ce qui permet de provoquer la rupture pour une valeur plus ou moins élevée de l'intensité du courant, et, par conséquent, à un instant plus ou moins éloigné de celui de la fermeture. L'armature est constituée par une pièce courte

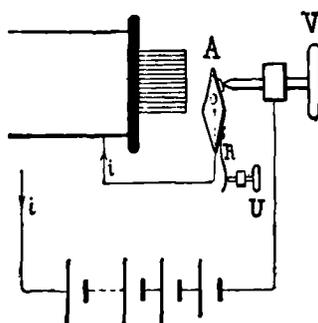


FIG. 258

oscillant autour d'un axe *O*, avec une fréquence plus grande que les lames de trembleurs ordinaires.

c. — *Le vibrateur Lacoste* (fig. 259) dans lequel la lame élastique comprend deux feuillets superposés dont le second ne quitte la pointe de la vis que lorsque le premier est en pleine vitesse dans sa marche vers le noyau qui l'attire, ce qui assure à la rupture une soudaineté très grande.

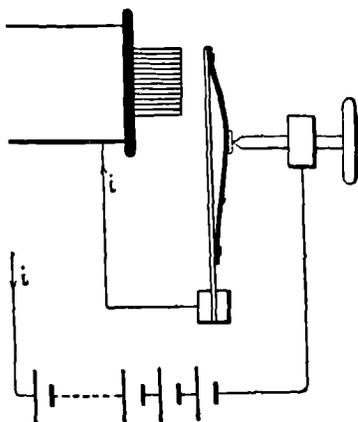


FIG. 259

d. — L'*interrupteur de Foucault* (1) (fig. 260), dans lequel la rupture du courant a lieu entre une pointe de platine et un

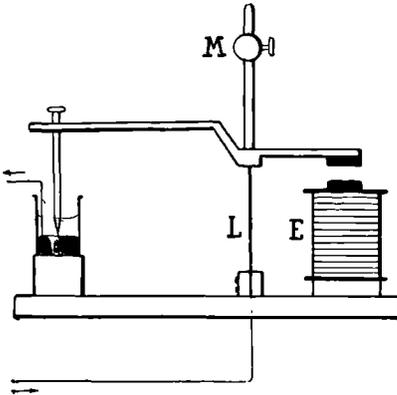


FIG 260

bain de mercure, en raison des oscillations qu'un électroaimant auxiliaire E imprime à une lame élastique L servant de support à la barrette qui porte cette pointe. Par le déplacement d'une masse M sur une tige fixée à l'extrémité de la lame on peut modifier la période des oscillations et, par suite, la fréquence des interruptions, dans

les limites de 1 à 30 environ (2),

L'étincelle de rupture est atténuée par la présence d'une couche d'alcool au-dessus du mercure.

L'interrupteur Foucault se prête à l'emploi de courants primaires beaucoup plus intenses que les interrupteurs à contacts solides (15 à 20 amp. au lieu de 1 à 5); aussi en a-t-on fait de très nombreuses variantes, en s'attachant à atténuer l'échauffement des liquides ainsi qu'à donner à la pointe de platine un mouvement mieux réglé, de plus grande amplitude, etc.

Dans la variante présentée par l'*interrupteur Villard* (fig. 261) la lame

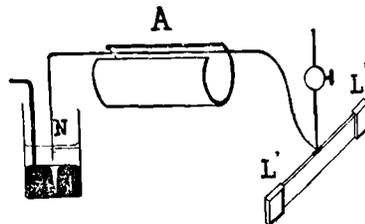


FIG. 261

1. Comptes-rendus de l'Acad. des Sciences, t. XLII, p. 215 — 1856.
2. Au-delà de 30, l'inertie des pièces mobiles devient gênante.

élastique est encastrée à ses deux extrémités  $L'$ ,  $L''$ , et vibre par torsion (fréquence 20 à 30). Elle porte une tige  $T$  terminée par une pointe de nickel  $N$  qui plonge, à chaque oscillation, dans un bain de mercure. L'entretien des vibrations est dû à l'action que, lors du passage du courant, la portion horizontale de la tige  $T$  éprouve de la part d'un fort aimant permanent  $A$  entre les pôles duquel elle est engagée. On évite ainsi l'emploi d'une pile auxiliaire. Pour obtenir des fréquences de l'ordre de 50, il convient de remplacer la lame vibrante par un diapason.

Dans la variante constituée par l'*interrupteur Margot* (fig. 262) les oscillations de la tige qui plonge dans le mercure sont entretenues par l'attraction mutuelle des spires que forme le fil adducteur du courant.

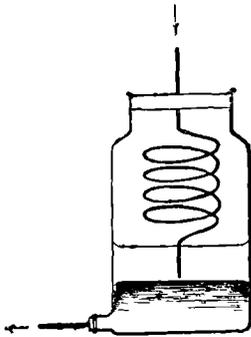


FIG. 262

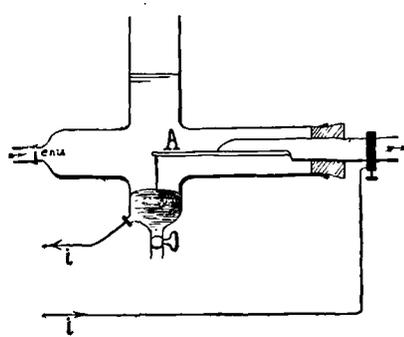


FIG. 263

Dans la variante *Grimsehl* (fig. 263) la pointe interruptrice est fixée à la lame d'une ancre  $A$  entretenue en vibration par un courant d'eau, lequel, par son plus ou moins de pression, règle la fréquence, tout en assurant le refroidissement et le nettoyage de la surface du mercure.

Ce dispositif permet d'obtenir aisément une centaine d'interruptions par seconde.

Diverses autres variantes régularisent le mouvement de va-et-vient de la pointe interruptrice à l'aide du mouvement de rotation d'un petit moteur électrique (*Interrupteur rotatif Ducretet*), ce qui permet, grâce à un bon guidage, d'interdire à la tige tout déplacement oblique et d'éviter, par suite, toute projection de mercure.

Enfin, pour éviter la production de la couche boueuse noi-

râtre de mercure émulsionné et oxydé, qui ne tarde pas à souiller le liquide de tous les interrupteurs à bain de mercure, quelques expérimentateurs ont imaginé de faire couler ce métal sous forme de jet, lequel est périodiquement rencontré et évité par des pièces métalliques tournantes. L'alimentation de l'appareil d'écoulement ayant lieu avec du mercure puisé dans le fond du récipient qui reçoit le jet, les surfaces contres lesquelles se produit la rupture sont continuellement en état de netteté parfaite.

Mais le plus original, le plus simple, le plus rapide, le plus commode de tous les interrupteurs, celui, par conséquent, qu'on sera dans bien des cas, amené à choisir de préférence est *l'interrupteur électrolytique* imaginé récemment par le D<sup>r</sup> *Wehnelt* (1), à la faveur de de l'observation suivante :

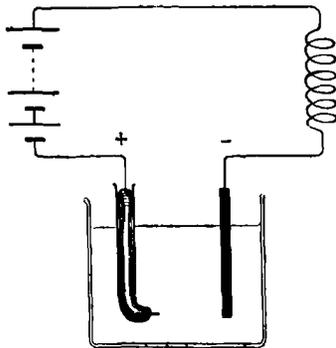


FIG. 264

Si l'on introduit (fig. 264) dans un circuit possédant une self-induction notable et soumis à l'action d'une force électromotrice suffisamment élevée (2), une cuve à eau acidulée sulfurique (densité 1,16 à 1,20), dont l'électrode positive soit constituée par un fil de platine fin (1 mm. de diamètre environ), et l'électrode négative par une lame métallique (de préférence en plomb) de grande surface, on voit le fil de platine, pourvu que sa longueur n'excède pas quelques millimètres, s'entourer d'une gaine gazeuse intermittente et

1. Wiedemann. *Annal.* t. LVIII. p. 233. — 1899.

2. 50 à 200 volts environ pour l'eau acidulée sulfurique à la température ambiante.

donner lieu à une série rapide d'arrêts et de rétablissements du courant, réalisant ainsi un interrupteur automatique d'une idéale simplicité.

Quand, par un réglage convenable de la densité moyenne du courant (1) à la surface du fil (0,4 amp. par mm<sup>2</sup> environ), ce phénomène est obtenu, les bulles de gaz qui se dégagent sont formées d'un mélange d'oxygène et d'hydrogène. Si le courant est trop faible il y a simplement électrolyse, le fil dégage uniquement de l'oxygène et les interruptions n'ont pas lieu. Si le courant devient trop intense, l'appareil cesse également de fonctionner comme interrupteur, le fil devient incandescent et l'établissement, entre le liquide et lui, d'une gaîne gazeuse persistante (caléfaction) fait aussitôt tomber l'intensité à une valeur minime, sur laquelle des variations de résistance du reste du circuit n'ont presque aucune influence, la résistance de la gaîne gazeuse étant la partie prépondérante de la résistance totale. Il convient donc, pour obtenir le phénomène de Wehnelt, d'effectuer la mise en marche de l'appareil avec une force électromotrice ni trop petite ni trop grande. L'écart entre les forces motrices admissibles est d'autant plus grand que la self-induction du circuit est plus grande. Aucune force électromotrice ne donne lieu au phénomène de Wehnelt lorsque la self-induction est nulle. C'est par une étincelle de rupture, due à une force électromotrice de self-induction notable,

---

1. Par densité moyenne il faut entendre le quotient de l'intensité moyenne du courant par la surface du fil. L'intensité moyenne est celle donnée par un ampèremètre du premier degré, et non celle donnée par un ampèremètre du deuxième degré qui est l'intensité efficace.

que la gaine gazeuse tout d'abord formée est chassée, de façon à permettre au liquide de revenir en contact avec le fil de platine, après quoi le cycle recommence (1).

La fréquence des interruptions est d'autant plus grande que le fil est plus court. Au lieu d'ajuster, par coupure, le fil à sa longueur optima, il est préférable, comme le permettent certains dispositifs d'appareils, de le faire saillir plus ou moins, par le jeu d'une vis, à l'extrémité du tube de verre qui le porte.

Lorsque le liquide est chaud, on peut réduire la tension de la source d'électricité employée. Ainsi à 90° un Wehnelt fonctionne à partir de 15 ou 20 volts. Mais la limite supérieure de la tension admissible s'abaisse aussi (vers 50 volts), en sorte que si l'on opère avec une source de tension élevée et invariable, il faut, pour éviter le phénomène de la caléfaction, empêcher, par un refroidissement approprié, l'élévation de température que la chaleur dégagée par le jeu même de l'appareil ne manquerait pas d'occasionner, et l'arrêt de l'interrupteur qui s'en suivrait lorsque le voltage limite s'abaisserait à la valeur de la force électromotrice de la source employée.

Lorsque le fil de platine est cathode, l'appareil fonctionne mal, probablement en raison de l'action absor-

---

1. On a la preuve de l'intervention de cette force électromotrice de self-induction dans le fait que la différence de potentiel efficace aux bornes de l'interrupteur est très notablement supérieure à la force électromotrice de la pile employée : ainsi avec une pile de 20 volts on peut allumer aux bornes de l'interrupteur une lampe de 110 volts si la self contenue dans le circuit est celle d'une grande bobine.

C'est à l'étincelle de rupture dont la gaine gazeuse est le siège qu'est due la lueur rosée qu'on y observe.

bante du platine sur l'hydrogène qui est alors le gaz mis en jeu. Aussi quand on alimente le circuit avec un courant alternatif, la phase pendant laquelle le courant entre dans la cuve par le fil de platine est-elle privilégiée.

La variante la plus pratique de l'interrupteur Wehnelt est celle que présente l'*interrupteur à orifices*, dans lequel le siège des interruptions est tout simplement un étranglement de la masse liquide formé (fig. 265) par un ou plusieurs petits orifices *o*, de 1 millimètre environ de diamètre, mettant en communication le liquide (eau acidulée) d'un vase *A* où se trouve une anode avec celui d'un vase *B* où se trouve une cathode, anode et cathode constituées simplement par des lames métalliques (en plomb si le liquide est de l'eau acidulée sulfurique).

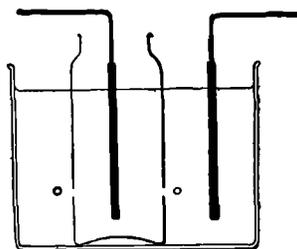


FIG. 265

La présence d'une self-induction dans le circuit est encore nécessaire au fonctionnement de l'appareil pour fournir l'étincelle de rupture capable de chasser la bulle de vapeur formée dans l'orifice par l'échauffement qu'y éprouve le liquide. La réunion subséquente des deux faces du liquide séparées par la bulle est favorisée par l'attraction qu'elles éprouvent en raison de la différence de potentiel qu'elles présentent.

Ces interrupteurs fonctionnent également bien quel que soit le sens du courant, preuve que dans le Wehnelt l'électrolyse n'a pas un rôle essentiel.

Les trous s'agrandissant à l'usage, il y a avantage à les faire étroits, quitte à en augmenter le nombre suivant l'intensité de courant qu'on désire.

On peut aussi employer comme liquide une dissolution de sulfate de cuivre acidulée et constituer alors des électrodes par des lames de cuivre.

Les fig. 266 et 267 représentent les modèles imaginés par *Simon* (1) et *Caldwel* (2), les inventeurs de cet ingénieux procédé.

1. Wiedem. Ann. t. LXVIII p. 860. — 1899.

2. The Electrical Rew. t. XLIV p. 837. — 1899.

Le dernier, par un réglage du niveau du liquide, permet de faire varier le nombre des orifices actifs et, par suite, l'intensité du courant.

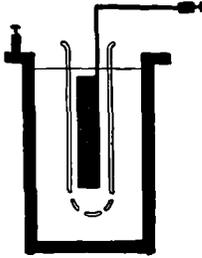


FIG. 266

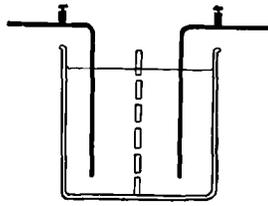


FIG. 267

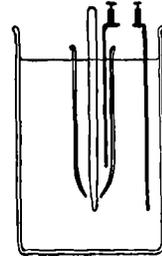


FIG. 268

Dans le modèle *Campbell Swinton* (3) (fig. 268), le réglage s'effectue par le déplacement d'une tige conique relativement au fond percé d'une éprouvette dans laquelle elle s'engage.

3. Electrician, t. LXIII, p. 332 — 1899.



# TRENTE-SIXIÈME LEÇON



## INDUCTION

\*\*\*\*\*

### BOBINES D'INDUCTION

#### FONCTIONNEMENT (1)



Les schémas (I), (II), (III), de la fig. 269 représentent les trois conditions dans lesquelles peut se trouver le primaire d'une bobine d'induction.

En (I) et en (II) l'interrupteur appartient à la catégorie des interrupteurs métalliques, mais en (II) il est shunté par un condensateur. En (III) il est du genre Wehnelt ou Caldwell et sans condensateur.

1. S'il est possible de faire aujourd'hui avec quelque détail et quelque clarté un exposé systématique du fonctionnement de la bobine d'induction, c'est surtout grâce aux études publiées sur cet appareil en ces dernières années par M. Armagnat.

Voir notamment : *Industrie électrique* 1894, p. 174.

*Eclairage électrique*, t. xv, p. 52 — 1898; t. xix p. 41  
et 134 — 1899; t. xxii, p. 121 — 1900; t. xxxiii,  
p. 217 — 1902.

*Archives d'Electricité médicale de Bergonié.*

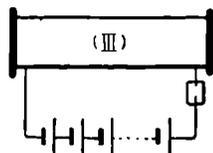
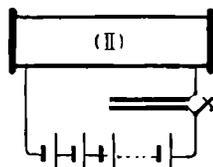
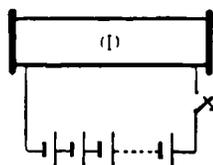


FIG. 269

L'allure du courant primaire est différente suivant le mode d'interruption adopté.

**A. — Variation du courant primaire produite par le jeu d'un interrupteur métallique sans condensateur.**

A la *fermeture* du circuit, le courant primaire  $i_1$  croît, à partir de zéro, suivant la loi exprimée par la formule :

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L_1} t} \right)$$

et représentée par la *fig. 270*.

Au moment de la *rupture*, l'intensité présente une valeur  $I_1$  d'autant plus approchant de la limite  $\frac{E_1}{R_1}$

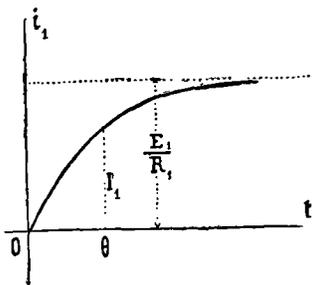


FIG. 270

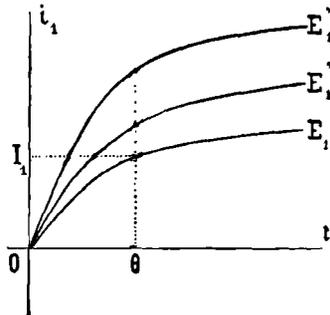


FIG. 271

que la durée  $\theta$  de la fermeture a été plus longue. C'est donc par le réglage de l'interrupteur, ainsi que par le choix de  $E_1$  et de  $R_1$ , qu'on pourra influencer sur la grandeur de la valeur finale  $I_1$  du courant primaire. Il suffit de jeter les yeux sur la *fig. 271*, représentant diverses courbes  $(i_1, t)$  relatives à différentes valeurs de  $E_1$ ,

pour voir que, si la durée  $\theta$  de la fermeture est donnée, la valeur de  $I_1$  obtenue croît avec  $E_1$ , tandis que si l'interrupteur est disposé pour rompre le circuit lorsqu'une valeur déterminée de  $I_1$  est réalisée, la durée de la fermeture est d'autant plus courte que la valeur de  $E_1$  est plus grande. L'emploi de sources à tensions élevées est donc tout indiqué dans le cas des interrupteurs rapides (1). D'ailleurs, plus la durée  $\theta$  sera courte pour une même valeur de  $I_1$ , plus la chaleur dépensée dans le circuit, par effet Joule, sera faible, considération qui a son intérêt au point de vue économique.

Dès que la résistance de l'interrupteur, aux points où va se produire la rupture, augmente, par suite de la diminution de l'étendue du contact, le courant  $i_1$  diminue et cette diminution engendre dans le circuit primaire une force électromotrice de self-induction  $(E_1)_i = - L_1 \frac{di_1}{dt}$  qui permet au courant de franchir par une étincelle l'intervalle des points de rupture, en sorte que tout se passe comme si la variation du courant était due à une augmentation continue de la résistance du circuit. La loi de cette variation ne saurait être exprimée d'une façon explicite. Elle dépend de l'écartement plus ou moins rapide des surfaces en contact, de leur nature, de la nature et de l'état physique du milieu ambiant. Suivant ces diverses

---

1. Lorsqu'on emploie, pour actionner le primaire d'une bobine, une source d'un voltage élevé, en vue d'abrèger la durée de fermeture nécessaire pour obtenir une intensité finale  $I_1$  demandée, il convient de munir l'appareil d'un coupe-circuit propre à éviter l'établissement d'une intensité dangereuse, qui serait à craindre en cas de prolongation accidentelle du courant par collage de l'interrupteur.

circonstances, la courbe représentative du courant  $i_1$  décroissant sera plus ou moins plongeante (*fig.* 272 (I) et (II)).

En somme, la variation du courant primaire correspondant à une période d'un interrupteur simple métal-

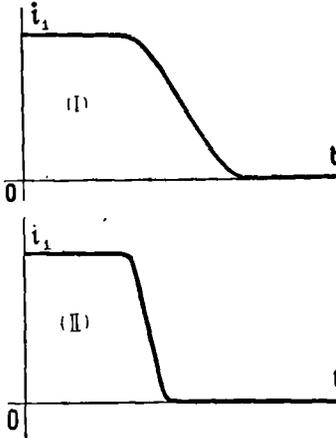


FIG. 272

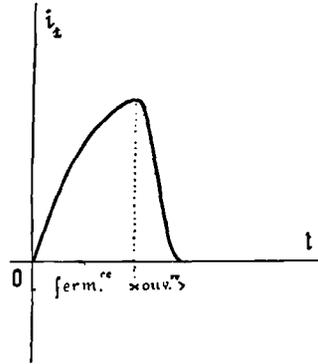


FIG. 273

lique (la période comprenant une phase de fermeture et une phase d'ouverture) est représentée par une courbe telle que celle de la *fig.* 273.

**B. — Variation du courant primaire produite par le jeu d'un interrupteur métallique muni d'un condensateur.**

Quand un interrupteur est shunté par un condensateur, la phase d'établissement du courant  $i_1$  est la même que si le condensateur n'existait pas puisque, pendant la fermeture, ce dernier est en court circuit.

Considérons donc ce qui se passe à l'ouverture.

Si cette ouverture se faisait sans étincelle à l'interrupteur, le circuit primaire serait mis aussitôt dans

l'état représenté par le schéma de la *fig. 274*, c'est-à-dire qu'il acquerrait les propriétés d'un circuit comprenant, en série, une force électromotrice  $E_1$ , une capacité  $C_1$ , une résistance  $R_1$  et une self-induction  $L_1$  l'intensité initiale du courant et la charge initiale du condensateur ayant respectivement les valeurs  $(i)_0 = I_1$  et  $(Q)_0 = 0$ .

L'état ultérieur de ce circuit serait régi par l'équation :

$$v = -R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} + E_1$$

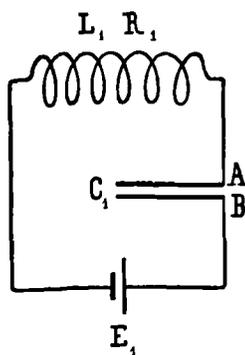


FIG. 274

$v$  désignant la différence de potentiel  $V_A - V_B$  entre les armatures du condensateur.

Si l'on remplace  $v$  par  $\frac{Q}{C_1}$  et si l'on dérive par rapport à  $t$ . en remarquant que  $\frac{dQ}{dt} = i_1$ , on obtient, comme définissant le courant variable  $i_1$ , dans les conditions supposées, l'équation :

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C_1} = 0$$

du même type que celle trouvée, dans une leçon précédente (page 196), pour la différence de potentiel  $v$  aux bornes d'un condensateur en voie de décharge dans un circuit présentant une self-induction.

Pour les bobines d'induction usuelles on a toujours :

$$R_1^2 < \frac{4L_1}{C_1}$$

en sorte que le courant  $i_1$  défini par cette équation est oscillatoire et amorti, c'est-à-dire du type représenté par la *fig. 275*.

En fait, telle est bien l'allure indiquée par un rhéographe ou une oscillographe, pour le courant d'ouver-

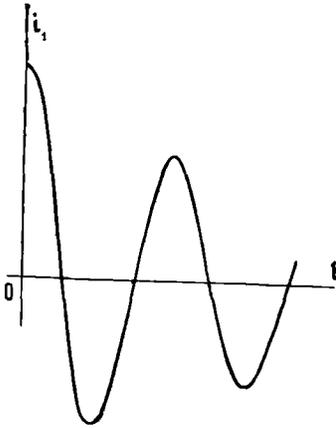


FIG. 275

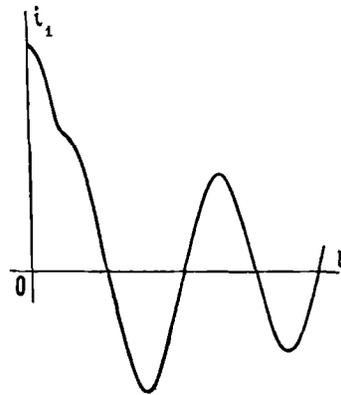


FIG. 276

ture, mais seulement dans le cas où la capacité  $C_1$  du condensateur adjoint à l'interrupteur est assez grande pour rendre insignifiante l'étincelle consécutive à la rupture.

Si la capacité a une valeur telle que l'étincelle de rupture ait une intensité notable, ce qui est le cas habituel, le courant  $i_1$  présente l'allure indiquée par la *fig. 276*.

L'étincelle n'est pas contemporaine du début de la décroissance du courant ; elle vient un peu après et, en déchargeant le condensateur de la quantité d'électri-

cité que celui-ci avait pu acquérir dans les premiers instants, elle occasionne un léger temps d'arrêt dans la diminution de l'intensité, après quoi l'intensité se remet à varier suivant une ligne sinueuse plus fortement amortie qu'elle ne le serait sans cet incident, ce qui se conçoit, puisqu'une partie de l'énergie initiale s'est dissipée dans l'étincelle. L'étincelle éclate quand la différence de potentiel entre les parties séparées de l'interrupteur a juste la valeur exigée par la distance que ces parties offrent entre elles à ce moment. En d'autres termes, si l'on trace (*fig. 277*) la courbe des différences de potentiel  $u$  qui seraient nécessaires, aux différents instants de la course de l'interrupteur, pour donner lieu à une étincelle, et, en même temps, la courbe des différences de po-

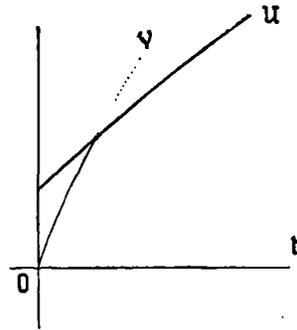


FIG. 277

tential  $v$  réalisées à l'interrupteur, l'instant de production de l'étincelle sera celui du point d'intersection des deux courbes. Ce point d'intersection n'est pas à l'origine parce que la courbe  $u$  n'y passe pas.

La courbe ( $v$ ) s'élève d'autant moins rapidement que la période du courant  $i_1$  est plus longue, c'est-à-dire que la capacité  $C_1$  du condensateur est plus grande (1). Pour une certaine valeur de  $C_1$  elle est tangente à la

1. En effet, cette période est donnée approximativement par la formule  $\tau = 2\pi\sqrt{C_1 L_1}$ .

ligne ( $u$ ) et pour toutes les valeurs de  $C_1$  supérieures elle n'a aucun point de rencontre avec cette dernière, et il n'y a pas d'étincelle de rupture.

**C. — Variation du courant primaire produite par le jeu d'un interrupteur Wehnelt ou Caldwell.**

Les interrupteurs du genre Wehnelt donnent lieu à une variation du courant primaire dont l'allure est re-

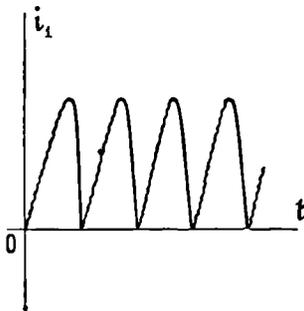


Fig. 278

présentée par la *fig. 278*. Chaque période comprend une phase de croissance pendant laquelle la courbe présente de fines dentelures, dues aux petites variations qu'occasionne le dégagement de bulles sur l'anode, et une phase de décroissance, très brusque, après laquelle vient immédia-

tement, sans temps perdu sensible, une nouvelle phase de croissance, et ainsi de suite.

La rapidité de la croissance, tenant à la valeur élevée de la force électromotrice employée (sauf dans le fonctionnement à chaud), la brusquerie de la décroissance du courant et l'absence du temps perdu, expliquent la petitesse de la période et, par suite, la valeur élevée de la fréquence de ce genre d'interrupteurs. Si la période est d'autant plus courte que la force électromotrice employée est plus élevée et que la surface de l'anode est plus petite, c'est que ces circonstances

abrègent la phase de croissance en hâtant la formation de la gaine gazeuse isolante.



Il y a, en somme, deux types seulement d'interruptions du courant primaire, qui sont réalisés l'un (courant d'ouverture unilatéral) par les interrupteurs métalliques sans condensateurs et par les interrupteurs électrolytiques, l'autre (courant d'ouverture alternatif) par les interrupteurs métalliques avec condensateurs.

Il y a, en conséquence, deux types de variations pour  $\frac{di_1}{dt}$  et par suite pour la force électromotrice de self-induction :

$$(E_s)_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

engendrée dans le circuit primaire, ainsi que pour la différence de potentiel  $v$  à l'interrupteur qui diffère peu de  $(E_s)_1$ .

Si le courant d'ouverture est unilatéral, la force électromotrice de self-induction primaire présentera l'allure indiquée par la courbe en traits fins de la fig. 279 avec un maximum d'autant plus élevé que la chute du courant  $i_1$  sera plus rapide.

Si le courant d'ouverture est oscillatoire, elle

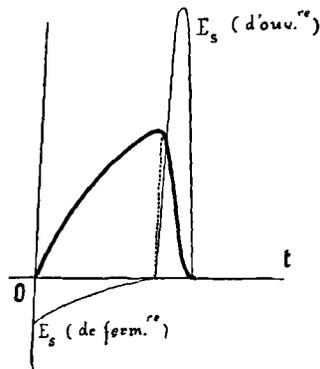


FIG. 279

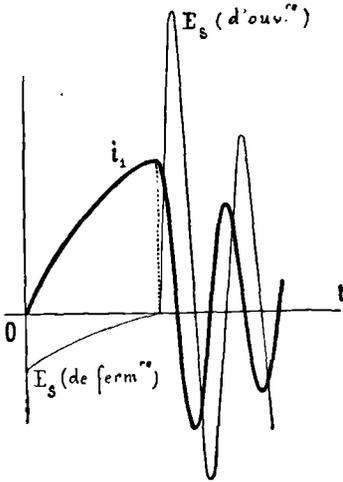


FIG. 280

présentera l'allure indiquée par la *fig. 280*, avec un maximum d'autant plus élevé que la période du courant d'ouverture sera plus courte.

Lorsque l'étincelle de rupture n'est pas supprimée, ce qui a lieu quand la courbe  $v$  rencontre la courbe  $u$ , le courant  $i_1$  éprouve, ainsi qu'on l'a vu plus haut, dans le cours de sa première chute, un léger arrêt de décroissance, en sorte que  $\frac{di_1}{dt}$  et par suite  $E_s$ , après avoir d'abord augmenté, décroît, s'annule, pour varier ensuite comme dans le cas précédent, mais avec une période plus longue, en sorte que le maximum atteint par  $E_s$  est moindre qu'il ne l'eût été sans cet incident (*fig. 281*).

Si la seconde branche ascendante de la courbe  $v$  rencontre encore la courbe  $u$ , il y a une seconde étincelle de rupture. Il peut y en avoir une troisième et ainsi de

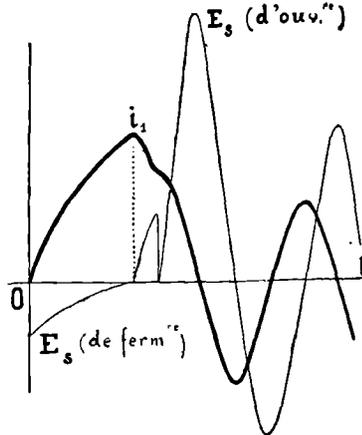


FIG. 281

suite. Pour cela, il faut que l'ascension initiale de  $\mathbf{v}$  soit très rapide, ce qui aura lieu pour les faibles valeurs de la capacité  $\mathbf{C}_1$ , car la période  $\tau$  du courant  $\mathbf{i}_1$  décroît avec  $\mathbf{C}_1$ , suivant l'expression :  $\tau = 2\pi \sqrt{\mathbf{C}_1 \mathbf{L}_1}$ . Dans ce cas, le maximum de  $\mathbf{E}_s$  qui vient après la dernière étincelle; peut être très faible et peu différent de l'ordonné de la ligne  $\mathbf{u}$  correspondant à son dernier point d'intersection avec  $\mathbf{v}$ .

Pour les très grandes valeurs de  $\mathbf{C}_1$ , il n'y a plus d'étincelles de rupture ; mais, néanmoins, le maximum de  $\mathbf{E}_1$  est encore très faible, en raison de l'allure peu rapide que l'accroissement de la période  $\tau$  donne alors à la variation de  $\mathbf{i}_1$ .

Il doit donc y avoir, comme le montre l'expérience, une valeur intermédiaire de la capacité  $\mathbf{C}_1$  donnant à  $(\mathbf{E}_s)_1$  un maximum plus élevé que ne le font des capacités plus grandes ou plus petites.

Cette capacité optima peut-être moindre que celle qui serait juste suffisante pour donner une rupture sans étincelle.

Toutes choses égales, d'ailleurs, le maximum de  $(\mathbf{E}_s)_1$  réalisable s'élève si l'on accroît la vitesse de l'interrupteur, car alors la ligne  $\mathbf{u}$  se relève et la capacité optima diminue.



Tout ce que nous venons de dire de  $(\mathbf{E}_s)_1$  s'applique à la force électromotrice  $(\mathbf{E}_i)_2 = \mathbf{E}_2$  induite dans le secondaire, qui lui est proportionnelle, d'après les relations :

$$(\mathbf{E}_i)_2 = -M \frac{di_1}{dt} = \frac{M}{L_1} (\mathbf{E}_s)_1$$

Le coefficient de proportionnalité est pratiquement égal au rapport  $\frac{n''}{n'}$  du nombre  $n''$  des spires secondaires au nombre  $n'$  des spires primaires (1), rapport qui est habituellement compris, suivant les bobines, entre 100 et 300.

La période  $\tau = 2\pi \sqrt{C_1 L_1}$  du courant primaire est, pour les bobines usuelles, de l'ordre du dix-millième de seconde. Le temps  $\left(\text{voisin de } \frac{\tau}{4}\right)$  que met, dans ces conditions, le courant  $i_1$  d'ouverture à passer de sa valeur initiale  $I_1$  à zéro est donc beaucoup plus court que celui  $\theta$  qu'il met, pendant la fermeture, à passer de zéro à  $I_1$ , car  $\theta$  est simplement de l'ordre du dixième ou du centième de seconde. Aussi, la vitesse de variation de  $i_1$  et, partant, la force électromotrice induite secondaire  $\mathbf{E}_2$ , qui lui est proportionnelle, atteint-elle, après l'ouverture du circuit primaire, des valeurs bien plus grandes que pendant la fermeture.

Par exemple, pour  $M$  de l'ordre de 0,25 henry,  $L_1$  de l'ordre 10 amp. et  $\tau$  de l'ordre de  $\frac{1}{10000}$  sec.,  $\frac{di_1}{dt}$  atteindrait des valeurs de l'ordre de  $\frac{10}{1} \frac{\text{amp}}{\text{sec.}}$  et  $M \frac{di_1}{dt}$  des valeurs de l'ordre de 10000 volts.

La bobine de Ruhmkorf engendre donc des forces

---

<sup>1</sup>, Si l'on admet (voir page 174) que  $L_1$  est proportionnel à  $n'^2$  et  $M$  à  $n'n''$ .

électromotrices dont la grandeur est comparable à celles que donnent les machines électrostatiques.



Si l'on ferme le secondaire sur une résistance extérieure, comme on le fait, par exemple, dans les applications médicales, la force électromotrice  $E_2$  donne lieu à un courant qui est inverse pendant la fermeture et direct pendant la phase de décroissance *algébrique* de  $i_1$  qui suit immédiatement l'ouverture.

L'intensité maxima du courant direct est plus grande que celle du courant inverse ; mais les quantités d'électricité qu'ils mettent en jeu l'un et l'autre sont égales, ayant toutes les deux comme expression :  $\frac{MI_1}{R_2}$

valeur obtenue en faisant dans l'expression générale de  $Q$  indiquée à la page 119 :  $\Delta\Phi_e = 10^8 MI_1$  et  $R = R_1$ .

L'emploi d'un condensateur au primaire donne des courants plus réguliers et l'on peut régler le maximum de  $E_2$ , pour une pile d'alimentation donnée, en faisant varier  $M$  par un déplacement du secondaire relativement au primaire.



Si, par un rapprochement convenable des extrémités  $K, L$ , du secondaire, dans l'air, ou, par leur mise en relation avec les électrodes d'une ampoule contenant un gaz plus ou moins raréfié, on permet entre elles la production d'étincelles disruptives, le phénomène obtenu est plus complexe, car il dépend de la distance des électrodes, de leur forme, de leur nature, de la

pression et de la température du gaz interposé, etc.

Le cas le plus simple est celui d'une décharge entre deux boules. La **distance explosive**, c'est-à-dire la distance à laquelle éclate l'étincelle, croît d'abord proportionnellement à la différence de potentiel nécessaire pour la décharge, puis de plus en plus vite, ou, en d'autres termes, la différence de potentiel nécessaire pour la production d'une étincelle est d'abord proportionnelle à la distance des boules quand cette dernière est faible et croît ensuite moins rapidement que cette distance.

La force électromotrice secondaire inverse ne donne lieu à des étincelles que pour de très petites distances des boules, car elle est peu élevée. Au-delà d'une certaine distance, les étincelles obtenues correspondent uniquement aux forces électromotrices directes (d'ouverture) et la décharge de la bobine présente alors un sens unilatéral par rapport auquel l'une des bornes mérite le nom de pôle positif et l'autre celui de pôle négatif.

Si l'on donne aux boules de l'excitateur une distance trop grande, aucune étincelle, pas plus directe qu'inverse, ne se produit. Le secondaire présente simplement un état électrique variable qui se traduit par l'apparition entre ses extrémités d'une différence de potentiel alternative. Dans cet état, le secondaire réagit néanmoins sur le primaire, car l'étincelle de rupture à l'interrupteur est moins forte quand le secondaire est présent que lorsqu'il est absent. En éloignant le secondaire, on s'expose à voir se produire au primaire des

détériorations d'isolant dues à une force électromotrice de self-induction plus élevée qu'en présence du secondaire.

Lorsque, partant d'une distance d'abord trop grande, on rapproche progressivement les boules de l'excitateur, on voit, à un certain moment, des aigrettes se produire, surtout à la boule positive ; puis de franches étincelles, blanches, bruyantes ; puis, pour des distances de moins en moins grandes, des étincelles plus grosses, moins bruyantes, et enfin une sorte de grosse chenille de feu jaune clair très sensible aux courants d'air, formant une espèce d'arc voltaïque n'offrant au passage de la décharge qu'une résistance assez faible, car deux fils reliés à ses extrémités doivent être très rapprochés l'un de l'autre pour fournir une étincelle.

On se rend compte de ces divers effets, en comparant à la force électromotrice  $E_2$  d'ouverture la différence de potentiel explosive  $V_e$  nécessaire pour chaque valeur de la distance des boules.

Si  $V_e$  est supérieure au maximum de  $E_2$ , la décharge ne peut se produire.

Si  $V_e$  n'est inférieure que de très peu au maximum de  $E_2$ , une disruption se produira au voisinage de ce dernier et correspondra simplement à la décharge de la capacité du fil secondaire et des bornes, donnant une ou plusieurs étincelles blanches. La capacité mise en jeu dans cette décharge étant celle de l'excitateur et par conséquent très faible, cette décharge aura un caractère oscillatoire. Toutefois, les étincelles paraissent

être de même sens que l'onde de force électromotrice  $E_2$  qui leur donne naissance.

Si  $V_e$  est notablement moindre que le maximum de  $E_2$ , les étincelles commencent à éclater plus tôt, sont plus nombreuses, échauffent l'air sur leur passage, si bien que finalement cet air chaud livre passage comme un conducteur ohmique à une partie du courant secondaire ; de là, une étincelle chaude encore mélangée de quelques étincelles blanches du début de la phase.

Si enfin  $V_e$  est très faible, les étincelles blanches disparaissent et la décharge passe directement sous forme d'arc.

Des variétés analogues de décharges se retrouvent dans les ampoules à gaz raréfiés.



# TRENTE-SEPTIÈME LEÇON



## INDUCTION

\*\*\*\*\*

### BOBINES D'INDUCTION APPLICATIONS

ÉTINCELLES D'INDUCTION. RADIOSCOPIE ET RADIOGRAPHIE  
TÉLÉGRAPHIE SANS FILS  
(PRINCIPES)



Les trois principales applications de la source électrique constituée par une bobine de Ruhmkorf en activité se rapportent :

1° A la production d'étincelles propres à l'allumage électrique des moteurs à gaz et à pétrole et au tirage des mines ;

2° A la production, dans des tubes à gaz raréfiés, de décharges aptes à engendrer des rayons de Röntgen,

3° A l'alimentation des appareils producteurs des ondes électriques utilisées pour la télégraphie sans fils.



## I

## Étincelles d'induction

## A. — Allumage des mélanges gazeux combustibles par des étincelles d'induction.

Lorsqu'un gaz combustible est additionné d'air, et par suite d'oxygène, en proportion convenable, on peut en déterminer la combustion par une élévation de température suffisante, produite en un point du mélange.

Parmi les nombreux procédés d'échauffement local susceptibles d'être employés à cet effet, l'un des plus usités consiste à faire éclater, au point voulu, une étincelle électrique, ou mieux une série d'étincelles, qui donne plus de chance d'éviter les *ratés*.

Ces étincelles peuvent, très facilement, être demandées à une bobine d'induction. Il suffit, pour cela, de réunir les deux pièces métalliques entre lesquelles on veut les faire jaillir aux deux extrémités du secondaire.

Tel est le principe de l'application de la bobine d'induction à l'inflammation des mélanges gazeux, et dont la mise en pratique remonte à la réalisation par *Lenoir* (en 1860) des premiers moteurs à gaz industriels.



Dans les moteurs à gaz et à pétrole actuels, l'organe siège des étincelles d'allumage et appelé communément **bougie d'allumage**, consiste essentiellement en un cylindre de porcelaine muni, suivant son axe,

d'une tige ou mèche conductrice (**M**), et fixé, par une douille métallique (**D**), à la culasse du cylindre. Les étincelles se produisent en  $\epsilon$ , entre cette douille et la tige centrale.

Les principaux modèles actuels de bougies d'allumage sont (1):  
 La bougie de *Dion-Bouton* (fig. 282) dans laquelle les étincelles jaillissent entre deux fils métalliques ;  
 La bougie *Bassée et Michel* (fig. 283) dans laquelle les étin-

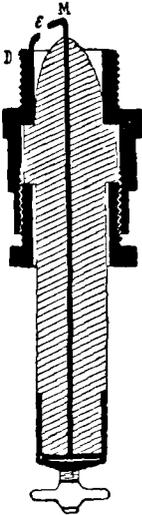


FIG. 282

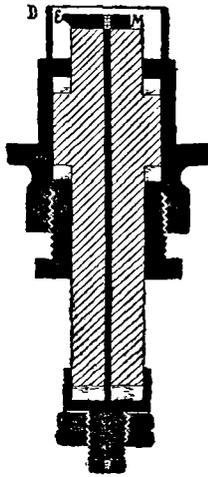


FIG. 283



FIG. 284

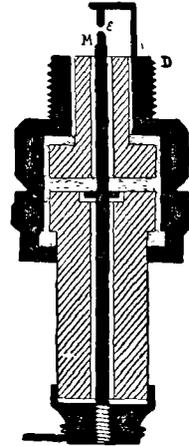


FIG. 285

nelles jaillissent entre une pastille métallique **M** et une douille annulaire **D**, ce qui leur assure un plus grand volume ;

La bougie *Reclus* (fig. 284) dans laquelle la tige centrale se termine non pas en pointe, mais par une pièce massive en forme d'obus, qui permet à l'étincelle d'éclater en un point quelconque de sa surface, d'où suppression des ratés auxquels donnent lieu, dans les autres types, les changements d'écart des pointes occasionnés par la dilatation du métal qui les constitue.

La bougie *Bisson et Berger* (fig. 285), dans laquelle les rup-

1. Worby-Beaumont. *Motor Vehicles and Motors*, cité par Marchis, *Leçons sur les moteurs d'automobiles*, Paris, Vve Dunod, édit., 1903.

tures de la porcelaine sont évitées par une division de celle-ci en deux parties séparées par une rondelle calorifuge (en amiante).



Les pièces métalliques entre lesquelles doivent se produire normalement les étincelles peuvent accidentellement se trouver réunies par un pont conducteur résultant de la carbonisation de gouttes d'huile ayant pénétré dans la chambre de combustion, La bougie est dite alors *encrassée* et ne fait plus son office.

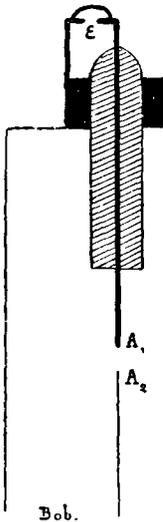


FIG. 286

Pour parer à cet inconvénient, on a imaginé un artifice très simple consistant à ménager (*fig. 286*) une coupure  $A_1 A_2$ , de 1 à 2 millimètres, sur le fil joignant la tige centrale de la bougie à l'un des pôles de la bobine, Lorsque cette dernière est mise en activité, il se produit des étincelles en  $\epsilon$  en même temps qu'en  $A_1 A_2$  et, par conséquent, la bougie opère malgré son encrassement. Cet effet est dû aux décharges de haute fréquence dont le circuit est le siège et à la valeur élevée que présentent les forces électromotrices de self-induction correspondantes, même pour de faibles longueurs de conducteurs. Les conditions sont analogues à celles de la figure 287 représentant une expérience célèbre de Lodge, dans laquelle on voit une étincelle jaillir en  $\epsilon$  entre deux points du fil **FF** par lequel deux conducteurs  $A_1$  et  $A_2$ , d'abord char-

gés en sens contraires, reviennent à l'état d'équilibre électrique (1).



Les minutieuses précautions d'installation, d'isolement, de préservation contre les chocs, la chaleur et l'humidité, qu'exige la bobine d'induction la font exclure, par certains constructeurs, de l'équipement des automobiles, et les étincelles d'allumage des moteurs sont, alors, demandées simplement à la rupture brusque d'un courant, dans un circuit pourvu d'une notable self-induction.

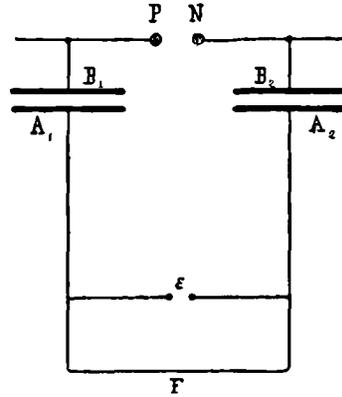


FIG. 287

La *fig. 288* représente schématiquement le principe

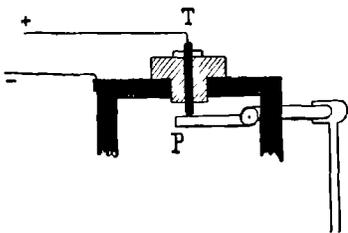


FIG. 288

des nombreux dispositifs imaginés (2) pour réaliser ce mode d'allumage dit : **par extra-courant de rupture.**

L'un des pôles de la source productive du courant est relié à une tige métallique isolée **T** pénétrant dans la culasse du moteur. L'autre pôle est relié à

1. L'établissement préalable de charges électriques contraires sur **A<sub>1</sub>** et **A<sub>2</sub>** se fait par l'influence des conducteurs **B<sub>1</sub>** et **B<sub>2</sub>** reliés respectivement aux pôles **P** et **N** d'une source électrique. La décharge a lieu lorsqu'une étincelle jaillit entre **P** et **N**.

2. V. Marchis loc. cit. p. 376 et suiv.

cette culasse et le circuit est fermé lorsqu'une palette **P** s'applique sur l'extrémité de la tige **T**. Il s'ouvre, au contraire, et une étincelle jaillit entre la tige et la palette, lorsque cette dernière est écartée par l'action d'une tige **t** qu'une came soulève au moment voulu.

Les sujétions qu'imposent les piles ou les accumulateurs sont évitées par l'emploi, comme source d'électricité, d'une simple machine d'induction magnéto-électrique.

#### B. — Tirage des mines par des étincelles d'induction.

Les charges de poudre, de dynamite, etc., employées dans les mines industrielles ou militaires exigent, pour faire explosion, un échauffement local qui peut être demandé à une étincelle électrique. Pour plus de sûreté, on fait agir l'étincelle, non pas directement sur la matière explosive, mais sur une matière intermédiaire, plus facile à enflammer, constituant ce qu'on appelle une *amorce*. Au moment voulu, les deux fils métalliques isolés dont est munie cette amorce sont soumis à l'action d'une source électrique de tension suffisante pour faire jaillir entre eux l'étincelle destinée à provoquer la détonation.

La bobine d'induction est très propre à cet usage en raison de la facilité avec laquelle elle donne les hautes tensions nécessaires pour la mise à feu simultanée de plusieurs amorces associées en série.

La *fig.* ci-contre (289) indique, par exemple, la disposition de l'amorce *Abegg* modifiée par le major *von Kocziczka*.

**b** est un bloc de soufre et de verre pilé dans lequel les fils ont été emprisonnés à chaud ; **c** est une cartouche de papier verni à la gomme laque, maintenant autour des pointes des fils (distances de  $\frac{1}{10}$  mm) une composition d'amorce **a** faite de 1 partie de chlorate de potasse, 1 partie d'antimoine gris et  $\frac{1}{7}$  de partie partie de graphite porphyrisé, cette composition étant surmontée d'une capsule **f** contenant 5 décigrammes de fulminate de mercure ; **g** est un bouchon de cire ou de gomme laque (1).

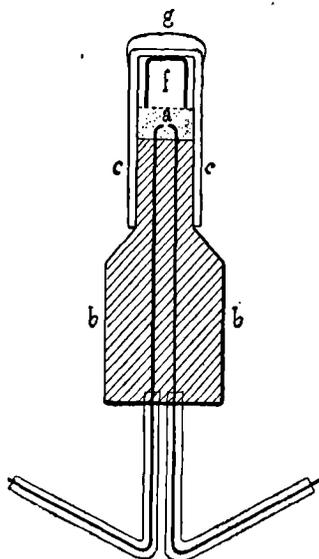


FIG. 289

Ce qui fait l'intérêt de la possibilité de la mise à feu simultanée de plusieurs mines, c'est la supériorité des effets obtenus par un groupe de charges agissant simultanément sur ceux des mêmes charges agissant successivement.



La mise à feu d'amorces peu nombreuses de faible puissance peut se faire sans bobine de Ruhmkorf et sans l'embaras et les frais que nécessite l'intervention d'une pile, à l'aide de l'appareil d'induction magnéto-électrique très simple appelé **coup de poing de Breguet**.

Cet appareil (*fig.* 290) consiste en un groupe de deux bobines entourant les extrémités d'un aimant en

1. Mémorial de l'officier du Génie, n° 23 (1894) p. 339.

fer à cheval dont l'armature peut être brusquement

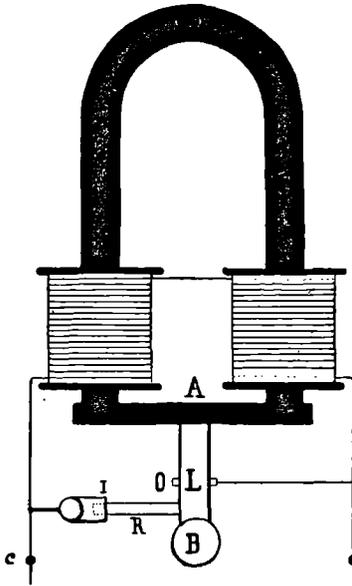


FIG. 290

arrachée par un coup de poing donné sur le bouton **B** et faisant basculer, autour d'une axe **O**, le levier **L** auquel elle est fixée. Cette manœuvre fait varier le flux magnétique embrassé par les bobines et donne lieu, par conséquent, à une force électromotrice d'induction qui, au moment même où elle est maxima, est amenée à agir sur le circuit **cd** comprenant l'amorce, par suite de

la rupture en **I**, à ce moment même, du court circuit par lequel le ressort **R** réunissait auparavant les extrémités des bobines.



## II

### Production des rayons de Röntgen.

Considérons (*fig. 291*) une ampoule de verre, remplie d'air ou d'un gaz quelconque, à une pression de l'ordre de la pression atmosphérique, et renfermant deux élec-

trodes métalliques portées, par une source d'électricité, à une différence de potentiel un peu inférieure à celle qu'exigerait la production entre elles d'une étincelle disruptive. L'intérieur de l'ampoule est alors un simple champ électrostatique.

Si, reliant, par un tube **T**, l'ampoule à une pompe à mercure, on raréfie progressivement le gaz à son intérieur, on observe successivement les phénomènes suivants :

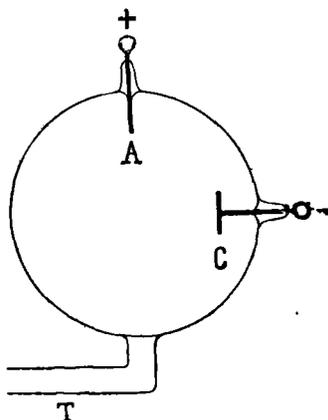


FIG. 291

Étincelles grès fréquentes ;

Aigrettes ;

Aigrettes d'apparence continue ;

Lueurs entourant les électrodes ;

Colonne lumineuse rouge violacé s'étendant de l'anode **A** (électrode positive) jusqu'à une petite distance de la catode **C** (électrode négative) ;

Gaine lumineuse entourant une partie de plus en plus grande de la catode et séparée de celle-ci par un espace relativement obscur, couche lumineuse rosée au contact même de la catode ;

Extension de l'espace obscur et augmentation de la gaine négative (à mesure que la raréfaction augmente et atteint des pressions de l'ordre du  $\frac{1}{100}$  de millimètre) ;

Emission, par la cathode, de rayons rectilignes excitant sur leur trajet la fluorescence du gaz résiduel et celle du verre de l'ampoule aux points opposés à la

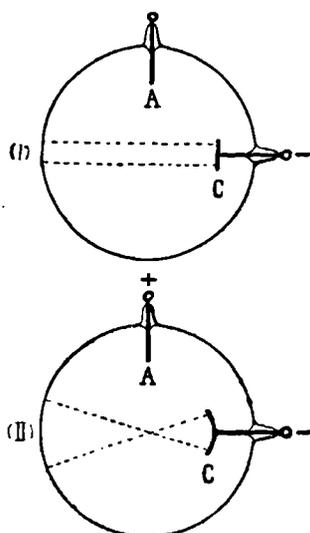


FIG. 292

catode où ils viennent le rencontrer. Ces rayons émanent normalement de la surface de la cathode et forment un faisceau dont la forme dépend de celle de cette dernière. Cette

forme est cylindrique si la cathode est plane (*fig. 292* (I)), conique si la cathode est en forme de calotte sphérique concave (*fig. 292* (II)).

On donne à ces rayons le nom de **rayons catodiques** (1), et au faisceau qui

les comprend, le nom de **faisceau cathodique**.



Toute substance frappée par des rayons catodiques devient une source d'émission de **rayons de Röntgen** ou **rayons X**.

L'appareil spécialement employé pour mettre ce fait à profit consiste (*fig. 293*) en une ampoule à gaz convenablement raréfié, dont l'anode est constituée par une lame de platine **A** ayant son centre au sommet du cône de rayons catodiques fourni par une cathode con-

1. Voir pour les propriétés de ces rayons l'opuscule **P. Villard** : *Les rayons catodiques*, de la collection « Scientia », Paris, Carré et Naud, 1900.

cave **C**. Cette lame est orientée à  $45^\circ$  par rapport à l'axe du faisceau catodique, de façon à rejeter laté-

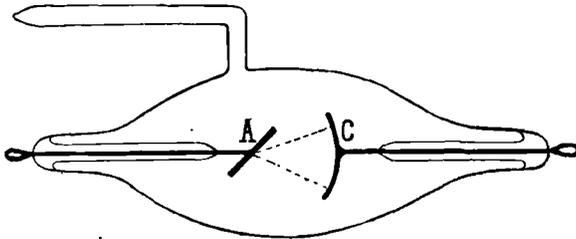


FIG. 293

ralement les rayons X dont elle est le foyer d'émission.

Les tubes ainsi disposés sont désignés sous le nom de **tubes focus**.



Si, entre un foyer d'émission de rayons X et un écran recouvert de platinocyanure de baryum, est interposé un corps non susceptible d'être traversé par les rayons, ceux-ci n'illuminent l'écran, par la fluorescence qu'ils excitent dans le platinocyanure, qu'en dehors de la région cachée par le corps, de sorte que la silhouette de celui-ci se dessine alors en noir sur un fond lumineux, avec une netteté d'autant plus grande que la source d'émission des rayons actifs est d'étendue plus restreinte.

De nombreux corps, opaques pour la lumière, sont transparents pour les rayons X. Tels sont, par exemple, le bois, le papier, le carton, les tissus vivants. Leur présence autour des corps non pénétrables aux rayons X n'est donc point un obstacle à l'obtention de si-

houettes de ces derniers sur l'écran au platinocyanure. Ainsi on obtient la silhouette d'un objet métallique enfermé dans une boîte en bois, celle du squelette d'un animal revêtu de ses muscles et de sa peau, etc., tout aussi bien que si ces objets étaient nus. Ce mode d'observation de certain corps dans des circonstances qui les dérobent à la vue ordinaire a reçu de nombreuses et importantes applications. Il est désigné sous le nom de **radioscopie**.



Les rayons X impressionnent les plaques photographiques. Si donc, dans une installation radioscopique, on substitue à l'écran une plaque photographique, d'ailleurs préservée de l'action de la lumière ordinaire par une enveloppe hermétique de papier noir, on obtiendra un cliché qui, par développement, fixation et tirage ultérieur en positif sur papier, fournira une silhouette du corps interposé.

Ce mode de fixation des silhouettes de la radioscopie, non moins fertile en application que la radioscopie elle-même, a reçu le nom de **radiographie**.



La bobine d'induction fait partie essentielle du matériel de tout laboratoire de radioscopie et de radiographie, en tant que constituant la source d'électricité la plus commode et la plus puissante pour la mise en activité des tubes producteurs de rayons de Röntgen.

Pour mettre un tube en service, il suffit de faire fonctionner la bobine après avoir réuni les électrodes

du tube aux bornes du secondaire, en ayant soin de faire correspondre à l'électrode destinée à fonctionner comme cathode celui des pôles de la bobine qui devient négatif lors de la décharge directe (correspondant comme on l'a vu plus haut, à l'ouverture du circuit primaire). Si, par mégarde, on a réalisé les connexions inverses, on s'en aperçoit aussitôt à la présence du faisceau cathodique sur l'autre électrode et il suffit, pour rétablir les conditions normales, d'inverser le sens du courant primaire.

La force électromotrice de fermeture étant trop faible pour donner lieu à une décharge, un tube à rayons X actionné par une bobine de Ruhmkorf n'est traversé que par des décharges directes, donnant aux électrodes une polarité bien déterminée.

L'intensité des effets radioscopiques et radiographiques d'une ampoule donnée est réglable par un choix convenable de l'intensité du courant primaire et de la fréquence des interruptions. Il y a, pour chaque tube et pour chaque expérience, des conditions optima de fonctionnement à déterminer expérimentalement. Les interrupteurs électrolytiques, en raison de leur grande fréquence, conviennent tout particulièrement bien pour la radioscopie, l'illumination des écrans étant alors quasi continue, tandis qu'elle est papillottante et fatigante avec les interrupteurs à basse fréquence.

Un tube est dit d'autant plus *dur* que la tension qu'il exige pour fonctionner normalement est plus élevée. Au fur et à mesure qu'il fonctionne, un tube d'abord *doux* devient de plus en plus dur, par suite de

la vacuité de plus en plus grande qui s'y produit, en raison de l'absorption progressive du gaz résiduel par les parois du verre. Pour permettre de remédier à cet inconvénient certains tubes, dits *régénérables*, renferment une lame de palladium qui, étant chauffée, fournit au tube des traces d'hydrogène grâce auxquelles il se trouve replacé dans des conditions normales de fonctionnement.



### III

#### Production des ondes électriques usitées dans la télégraphie sans fil.

Envoyer électriquement un signal télégraphique d'une station **A** à une autre **B**, est au sens le plus général, une opération qui consiste, pour l'interlocuteur situé en **A**, à mettre momentanément une pile en circuit avec un appareil spécial, situé en **B**, dans lequel un électroaimant, sous l'action du courant de la pile, produit un effet constituant le signal voulu.

Il existe actuellement deux façons bien différentes d'obtenir ce résultat :

L'une consiste à installer la pile au poste expéditeur (**A**) et à la mettre aux prises avec l'appareil récepteur **R** par la manœuvre d'un interrupteur **I**, et à l'aide d'un circuit comprenant, comme conducteur d'aller, un fil isolé, établi entre les deux stations, et, comme

conducteur de retour, le sol, suivant le schéma représenté par la *fig.* 294.

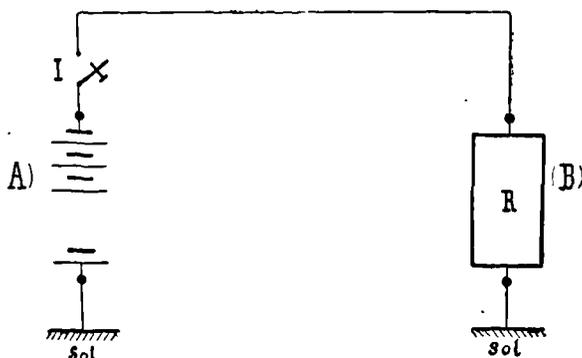


FIG. 294.

L'autre consiste à installer la pile au poste (B), en relation permanente avec l'appareil récepteur par l'intermédiaire d'un *radioconducteur* (1) *r*, et à rendre cet organe, qui dans son état naturel est isolant, momentanément conducteur, en lui envoyant de A des ondes électriques convenables. Ce radioconducteur équivaut ainsi à un interrupteur alternativement ouvert et fermé et sa commande par l'opérateur situé en A se fait *sans fil* interposé entre les deux stations, simplement par l'émission en A de perturbations électriques se propageant librement dans l'espace jusqu'en B (*fig.* 295).

Le premier mode opératoire constitue le système ordinaire de télégraphie électrique le plus anciennement et le plus généralement usité.

Le second constitue le système, d'invention toute récente, désigné sous le nom de **télégraphie sans fil**.

1. Voir tome I, page 151.

L'organe producteur des perturbations électriques propres à agir ainsi à distance sur les radioconducteurs est constitué simplement par un condensateur de faible capacité en état de décharge oscillante provoquée par l'établissement d'une étincelle disruptive  $\epsilon$  entre deux tiges courtes portées par les armatures **M** et **N** (fig. 295). Une bobine d'induction ayant ses bor-

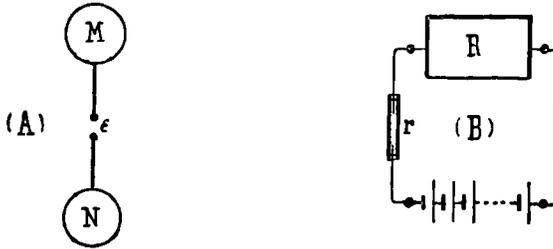


FIG. 295

nes secondaires reliées à ces armatures renouvelle constamment leurs charges et entretient, tant que son circuit primaire est fermé, un feu roulant de décharges en  $\epsilon$ . Par le jeu d'un interrupteur commandant le circuit primaire, on peut donc envoyer dans l'espace des *trains d'ondes électriques* plus ou moins longs qui donnent aux récepteurs des signaux de longueurs différentes, dont la combinaison permet de former un alphabet (1).

1. Voir, pour les détails, le volume de la *Bibliothèque de l'Élève-Ingénieur*, consacré à la *Télégraphie*. (Grenoble, A. Gratier et J. Rey édit.)



## TRENTE-HUITIÈME LEÇON



# INDUCTION

\*\*\*\*\*

### PRINCIPALES MÉTHODES DE MESURE DES COEFFICIENTS D'INDUCTION



La théorie de la plupart des méthodes de détermination expérimentale des coefficients d'induction est dominée par le théorème suivant :

*Les fractions —  $\frac{1}{10^8}$  des variations de flux  $\Delta\Psi$  imposées à des conducteurs d'un réseau sont liées aux décharges électriques  $Q$  correspondantes dans ces conducteurs identiquement de la même façon que des forces électromotrices  $E$  qui leur seraient substituées seraient liées aux intensités de courants  $I$  qui en résulteraient.*

En effet, si l'on multiplie par  $dt$  les équations (déduites des formules de Kirchoff) liant les valeurs instantanées  $i$  des courants à celles  $e$  des forces électromotrices, et si l'on intègre entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , pour lesquels  $i = 0$ , on obtient des équations identiques à celles qui lient les  $I$  aux  $E$ , dans lesquelles les  $I$  sont remplacés par des  $\int_{t_1}^{t_2} i dt = Q$  et les  $E$  par des

$$\int_{t_1}^{t_2} e dt = - \frac{1}{10^8} \Delta\Psi.$$



Toute relation connue entre une variation de flux de self-induction ou de mutuelle induction et une décharge électrique  $Q$  correspondante donnera lieu à des méthodes de mesure des coefficients d'induction :

En effet, si l'on écrit :

$$L \cdot \Delta I \text{ ou } M \cdot \Delta I = f(Q)$$

on en déduira :

$$L \text{ ou } M = \frac{f(Q)}{\Delta I}$$

et si, au lieu d'utiliser cette relation directement, on veut l'appliquer à la recherche du rapport de deux coefficients d'induction on tirera d'une première expérience :

$$L \text{ ou } M = \frac{f(Q)}{\Delta I}$$

et d'une seconde :

$$L' \text{ ou } M' = \frac{f(Q')}{\Delta I'}$$

d'où

$$\frac{L'}{L} \text{ ou } \frac{M'}{M} \text{ ou } \frac{L'}{M'} = \frac{f(Q')}{f(Q)} \frac{\Delta I}{\Delta I'}$$

Bref, on peut suivre, pour la détermination expérimentale des coefficients d'induction, une marche calquée sur celle relative à la mesure des forces électromotrices (1), et établir pour les méthodes de mesures une classification analogue.

Les méthodes fondées sur la résolution par rapport à

---

1. Voir t. I p. 206 et suiv.

$L$  ou  $M$  d'une équation telle que  $L$  ou  $M = \frac{f(Q)}{\Delta I}$  pourront être qualifiées de *méthodes galvanométriques* et celles fondées sur la détermination du rapport de la grandeur cherchée à une grandeur de même espèce, supposée préalablement connue, seront dites *méthodes de comparaison*.



## I

## Méthodes galvanométriques

Supposons relié aux bornes d'un galvanomètre balistique  $G$  l'appareil  $X$  qu'il s'agit d'étudier (fig. 296). Si le coefficient à déterminer est celui d'induction mutuelle  $M$  de  $X$  et d'un autre appareil  $Y$ , ce simple montage est suffisant.

En effet, qu'on vienne à faire varier de  $\Delta I$  un courant préalablement établi en  $Y$ , et la variation de flux  $\Delta \Psi = 10^8 M \cdot \Delta I$ , subie par  $X$ , donnera lieu, en  $G$ , à une décharge  $Q$ , exprimée par la relation simple :

$$Q = \frac{M \cdot \Delta I}{R_c}$$

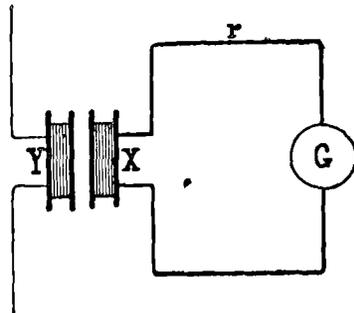


FIG. 296

d'où

$$M = \frac{Q \cdot R_g}{\Delta I}$$

$R_g$  étant la résistance totale ( $r_x + r + g$ ) du circuit du galvanomètre, et  $Q$  la quantité d'électricité mise en jeu par la décharge, calculée en multipliant l'élongation observée  $\beta$  par la constante  $B$  du galvanomètre relative à la valeur  $R_g$  de la résistance totale du circuit ( $r$ ).

Pour déterminer  $B$ , on peut décharger aux bornes du galvanomètre un condensateur  $C$  préalablement chargé à la différence de potentiel  $RI$  existant aux extrémités d'une résistance connue  $R$  faisant partie du circuit de  $Y$ . Le galvanomètre accuse alors, par une élongation  $\beta_1$ , une quantité d'électricité  $Q_1$  égale à la fraction  $\frac{r_x + r}{R_g}$  de la charge  $CRI$  du condensateur.

On a donc

$$Q_1 = \frac{r_x + r}{R_g} CRI = B\beta_1$$

avec

$$Q = \frac{M \cdot \Delta I}{R_g} = B\beta$$

d'où :

$$\frac{M\Delta I}{(r_x + r) CRI} = \frac{\beta}{\beta_1}$$

Si, dans la première expérience, on a fait subir au courant la variation  $\Delta I = 2I$ , consistant à renverser son sens, l'intensité  $I$  s'élimine du rapport précédent et l'on a simplement :

$$M = \frac{\beta}{\beta_1} CR (r_x + r).$$




---

1. On a vu, en effet (pages 16 et 209), que la constante dépend de cette résistance.

Dans un dispositif imaginé par *Vaschy* (1) et représenté schématiquement (*fig. 297*) le galvanomètre, à l'ouverture de la clef de pile, reçoit simultanément les décharges (contraires) de l'appareil **X** et d'un condensateur **C**. La décharge de l'appareil est exprimée par

$$\frac{MI}{r + r_x + r_g}$$

et celle du condensateur par

$$CRI \times \frac{r}{r + r_x + r_g}.$$

L'impulsion  $\beta$  obtenue au galvanomètre est donc proportionnelle à  $M - CRr$ . Si l'on donne ensuite au condensateur une nouvelle capacité  $C'$ , on obtient une nouvelle impulsion  $\beta'$  et l'on a  $M$  par la relation :

$$\frac{M - CRr}{\beta} = \frac{M - C'Rr}{\beta'}$$



Au lieu d'envoyer dans le galvanomètre une seule décharge, on peut, au moyen d'un commutateur tournant chargé d'opérer les fermetures et ouvertures de circuits convenables, réaliser une *série de décharges* donnant lieu, si la fréquence **F** est convenable, à une

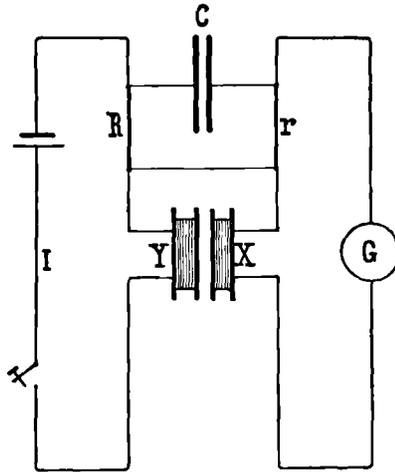


FIG. 297

1. Bulletin de la Soc. intern. des électriciens, 1886, p. 242 et suiv.

déviations permanentes identiques à celle que produirait un courant continu  $i$  d'un débit égal à celui  $\frac{FMI}{R_e}$  de cette série de décharges. On a ainsi, en désignant par  $E$  la force électromotrice de la pile actionnant le circuit inducteur et par  $R$  la résistance totale de ce circuit

$$i = \frac{FME}{R_e R}$$

Qu'on mette ensuite la pile en dérivation (fig. 298) aux bornes de la portion  $r$  du circuit du galvanomètre, et l'on aura dans, ce dernier, un courant :

$$i' = \frac{Er}{Rr + (R_e - r)(R + r)}$$

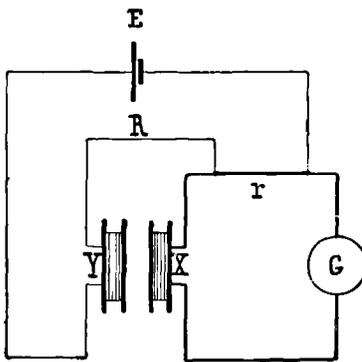


FIG. 298

qui, comparé au précédent, donnera une expression de  $M$  indépendante de  $E$ .

Suivant une remarque de M. Abraham (1), il y a avantage à éviter la mesure des intensités  $i$  et  $i'$ , en prenant pour galvanomètre  $G$  l'une des moitiés d'un galvano-

mètre différentiel et équilibrant chaque fois l'effet obtenu à l'aide d'un courant compensateur passant dans l'autre moitié du galvanomètre et ajusté au moyen d'un

1. Journal de physique, 3<sup>e</sup> s. t. III ; avril 1894.

rhéostat. Les courants  $i$  et  $i'$  sont entre eux comme les courants compensateurs et le rapport de ceux-ci peut être calculé à l'aide des résistances qui en déterminent les intensités.

Si l'on choisit la résistance  $R$  du circuit inducteur de façon que la déviation correspondante à  $i$  soit de l'ordre de 500 divisions de l'échelle, comme la compensation peut être obtenue au dixième de division près, l'incertitude d'une lecture isolée est largement inférieure au millième, et l'on peut obtenir finalement des mesures de  $M$  avec une précision approchant du millième.



Toutes les méthodes de mesures de coefficients d'induction mettant en jeu des décharges induites sont ainsi susceptibles d'une variante consistant à substituer des séries de décharges à des décharges isolées et à observer, par conséquent, au lieu de simples impulsions, des déviations permanentes qui peuvent être comparées entre elles soit par substitution soit par opposition.

Il faut toutefois donner à la résistance  $R$  du circuit induit une valeur assez grande pour que la constante de temps  $\frac{L}{R}$  de ce circuit soit bien inférieure à la période du commutateur : sans cela la durée du courant induit serait supérieure à celle des contacts et l'on ne recueillerait pas la totalité du courant induit ce qui donnerait des résultats trop faibles.



Si le coefficient à étudier est celui de self-induction  $L$  de  $X$ , le courant à faire varier devra être établi dans

cet appareil ; mais alors le galvanomètre n'y devra pas participer, car la variation de flux  $10^8 L \cdot \Delta I$  ne serait pas la seule cause de la décharge observée : il faudrait aussi faire entrer en ligne de compte la variation de flux éprouvée par le galvanomètre lui-même.

On peut établir un courant en **X**, tout en laissant le galvanomètre au zéro, en introduisant **X** dans une des branches et **G** dans une des diagonales d'un pont de

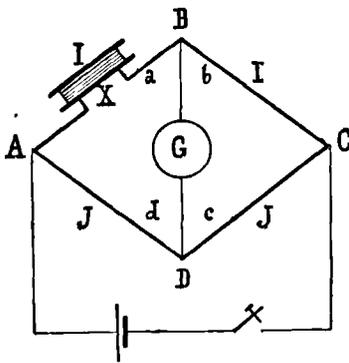


Fig. 299

*Wheatstone* (fig. 299) les résistances **a**, **b**, **c**, **d**, étant réglées de façon à réaliser la condition  $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ .

Qu'on ouvre alors la clef de pile, et l'on n'aura plus qu'un circuit **DAB** formé par l'appareil **X** et le galvanomètre **G** shunté par

**DCB**. Les résistances **a**, **b**, **c**, **d** étant sans self appréciable, le circuit **DAB** sera dans ces conditions le siège d'une décharge

$$\mathcal{Q} = \frac{LI}{a + d + \frac{g(b+c)}{g+b+c}}$$

dont le galvanomètre recevra une fraction

$$Q = \frac{b+c}{g+b+c} \mathcal{Q}$$

Si l'on pouvait ensuite introduire en **AB**, sans changer la résistance **a**, une force électromotrice continue **e**, on aurait en **BD** une intensité **i** liée à **e** exactement

de la même façon que  $Q$  l'est à  $LI$  et l'on pourrait déduire  $L$  de la proportion :

$$\frac{LI}{e} = \frac{Q}{i}$$

Un artifice, pratiquement équivalent, dû à *Rayleigh*, consiste à introduire en  $AB$  une petite résistance additionnelle  $r_a$ , dont l'effet est sensiblement le même que celui d'une force électromotrice  $e = r_a I$ . On a alors

$$\frac{LI}{r_a I} = \frac{Q}{i}, \text{ d'où}$$

$$L = r_a \frac{Q}{i}$$

L'expérience peut être utilisée pour trouver la constante d'un galvanomètre balistique. En effet, elle peut être appliquée à la mesure de  $Q$  si la self induction employée  $L$  est connue (1).



## II

### Méthodes de comparaison

La comparaison de deux coefficients d'induction se ramène en pratique à celle de deux flux d'induction.

Soient  $\Psi = 10^8 X I$  et  $\Psi' = 10^8 X' I'$  deux flux d'induction respectivement proportionnels aux coefficients  $X$  et  $X'$  dont on cherche le rapport. On aura :

---

1. *Wien. Wiedem. Ann.* t. LXII, p. 702, 1897.

$$\frac{X'I}{XI} = \frac{\Psi'}{\Psi}$$

et par suite :

$$\frac{X'}{X} = \frac{I}{I'} \times \frac{\Psi'}{\Psi}$$

Si l'on peut régler le rapport des courants  $I$  et  $I'$  de façon à rendre égaux entre eux les flux  $\Psi$  et  $\Psi'$ , on aura plus simplement :

$$\frac{X'}{X} = \frac{I}{I'}$$

Voici, d'une façon un peu plus explicite, comment cette idée générale est mise en pratique dans divers cas particuliers.

#### 1. — Comparaison de deux coefficients de self-induction.

(Maxwell)

Les appareils présentant les coefficients  $L$  et  $L'$  à comparer sont introduits (*fig. 300*) dans deux branches

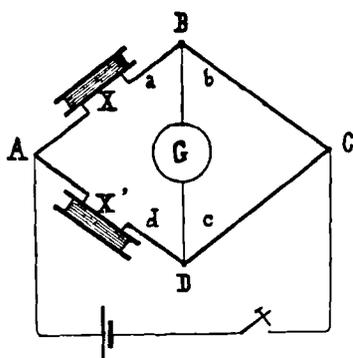


FIG. 300

contiguës (a) et (d) d'un pont de Wheatstone, constitué par des résistances sans self appréciable, et qu'on règle (après introduction des appareils  $X$  et  $X'$ ) de façon qu'en régime permanent le galvanomètre ne soit le siège d'aucun courant et qu'en outre, lors de l'ouverture de la clef de pile, il ne reçoive aucune

impulsion. La première condition se traduit par les relations :

$$\frac{i_a}{i_d} = \frac{d + c}{a + b} = \frac{d}{a} = \frac{c}{b}$$

et la seconde implique l'égalité des flux  $10^8 L i_a$  et  $10^8 L' i_d$ , d'où l'on déduit :

$$\frac{L'}{L} = \frac{i_a}{i_d} = \frac{c}{b}$$

2. -- **Comparaison d'un coefficient de self-induction  $L$  à un coefficient d'induction mutuelle  $M$  (Maxwell).**

La méthode suppose que l'on ait  $M < L$ .

L'appareil  $X$  de self  $L$  est introduit dans une branche (a) d'un pont de Wheatstone (fig. 301) pendant que la diagonale de pile reçoit l'appareil  $Y$  relativement auquel  $X$  présente le coefficient d'induction mutuelle  $M$ . Un shunt  $s$  est établi entre les extrémités (A et C) de la diagonale de pile et le pont (formé de résistances sans self) est réglé de façon que le galvanomètre soit au zéro. En réglant, d'autre, part la résistance  $s$  on peut faire en sorte que, lors de l'ouverture de la clef de pile, aucune décharge ne se manifeste au galvanomètre.

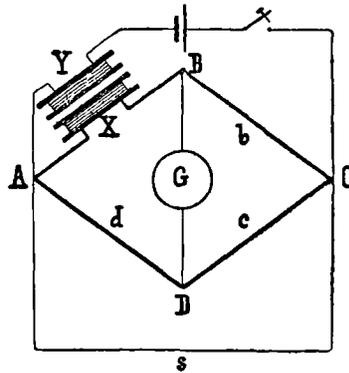


FIG. 301

L'équilibre en régime permanent se traduit par les relations

$$\frac{i_a}{a+b} = \frac{i_d}{d+c} = \frac{i_s}{s} = \frac{i_p}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{d+c} + \frac{1}{s}}$$

et l'équilibre en régime variable par la condition :

$$Mi_p - Li_a = 0$$

(relation qui ne peut être obtenue que si  $M < L$  puisque  $i_p > i_a$ ). On a alors

$$\frac{L}{M} = \frac{i_p}{i_a}$$

et, d'après les relations précédentes

$$\frac{i_p}{i_a} = \frac{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{d+c} + \frac{1}{s}}{\frac{1}{a+b}} = 1 + \frac{a}{d} + \frac{a+b}{s}$$

La comparaison de  $L$  à  $M$  n'exige ainsi que la connaissance des résistances  $a, b, d, s$ .

### 3. — Comparaison de deux coefficients d'induction mutuelle (Maxwell).

Avec les appareils  $X, X'$  auxquels on adjoint des rhéostats  $(r), (r')$ , on forme un circuit relativement auquel il y ait concordance des flux dus à  $Y$  et  $Y'$  (*fig. 302*), ces derniers appareils faisant partie du circuit d'une pile  $P$ . Un galvanomètre  $G$  est établi en  $AB$  de façon à shunter à la fois  $X + r$  et  $X' + r'$ . En d'autres termes, les flux  $10^8MI$  et  $10^8M'I$  reçus par  $X$  et  $X'$  sont traités

comme le sont dans la méthode de Lacoine (voir t. I, page 222) les deux forces électromotrices  $E$  et  $E'$  à comparer.

En réglant les résistances  $r$  et  $r'$  on peut faire en sorte que lors de l'ouverture

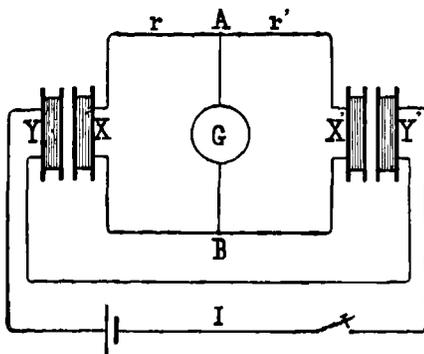


FIG. 302

de la clef de pile, le galvanomètre ne reçoive aucune impulsion. Par analogie avec la méthode de Lacoine, qui correspond au même montage, cet équilibre exige la relation

$$\frac{MI}{R+r} = \frac{M'I}{R'+r'}$$

d'où

$$\frac{M'}{M} = \frac{R'+r}{R+r}$$

De même que dans la méthode de Lacoine, si l'on ne connaît pas les résistances  $R$  et  $R'$ , on recommence l'opération en donnant à  $r$  et  $r'$  d'autres valeurs  $r_1$  et  $r'_1$  et l'on a finalement

$$\frac{M'}{M} = \frac{r'_1 - r'}{r_1 - r}$$

### 3 (bis) Comparaison de deux coefficients d'induction mutuelle (Maxwell).

On peut aussi combiner les deux flux d'induction  $10^8 MI$  et  $10^8 M'I$  comme le sont dans la méthode du po-

tentiomètre (voir t. I page 223) les deux forces électromotrices dont on cherche le rapport. Pour cela, ces flux

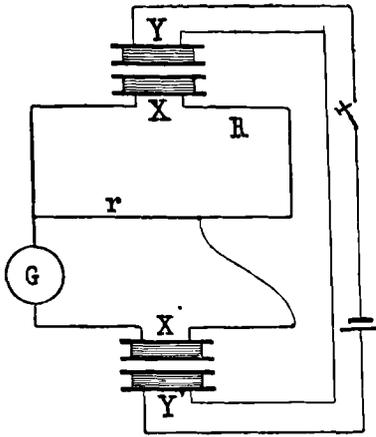


FIG. 303

sont appliqués (fig. 303) à des dérivations prises aux bornes d'un rhéostat  $r$  et dont l'une renferme un galvanoscope  $G$ . En donnant à  $r$  une valeur convenable on peut faire en sorte qu'à l'ouverture de la clef de pile le galvanoscope n'accuse aucune impulsion. Par analogie

avec l'équation d'équilibre du potentiomètre (analogie fondée sur le théorème énoncé au début de cette leçon page 261) on a

$$\frac{MI}{MI} = \frac{r}{R + r}$$

Si l'on ne connaît pas  $R$ , on peut faire un deuxième réglage après avoir donné à  $R$  un accroissement connu  $\Delta R$ , ce qui nécessite pour  $r$  un accroissement  $\Delta r$ , et des relations

$$\frac{MI}{MI} = \frac{r}{R + r} = \frac{r + \Delta r}{R + \Delta R + r + \Delta r}$$

on déduit :

$$\frac{M'}{M} = \frac{\Delta r}{\Delta R + \Delta r}$$

Les sens des flux  $10^8MI$  et  $10^8MI'$  doivent évidemment être tels que les décharges de  $X$  et de  $X'$  en  $G$  soient opposées l'une à l'autre.



Tout dispositif capable d'indiquer si une portion de circuit qui en fait partie a ou n'a pas de self-induction peut être utilisé pour la recherche des coefficients de self-induction, par une méthode d'opposition qui consiste à mettre en série

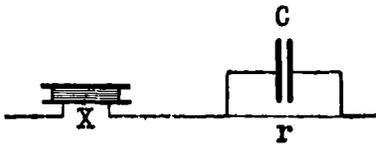


FIG. 304

avec l'appareil  $X$  à étudier une résistance variable  $r$  (sans self) shuntée par un condensateur  $C$  (fig. 304).

On sait que ce faisceau  $(r, C)$  équivaut, au point de vue des décharges d'induction à une self négative de valeur numérique  $Cr^2$ . L'ensemble  $X + (r, C)$  se comporte, par suite, comme une self  $L - Cr^2$ . Si donc on règle  $r$ , suivant les indications d'un appareil d'épreuve, de façon que cette self totale soit nulle on aura une relation  $L - Cr^2 = 0$  qui fera connaître la valeur de  $L$ .

Comme appareil d'épreuve, on peut prendre soit un gal-

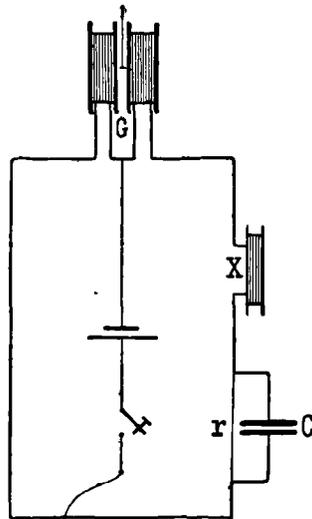


FIG. 305

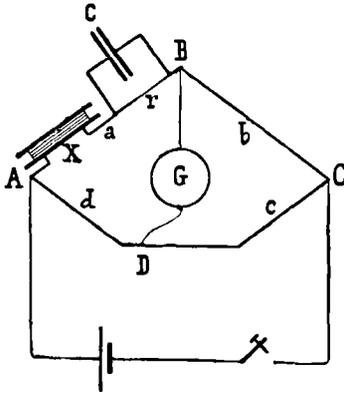


FIG. 306

vanomètre différentiel (fig. 305) soit un pont de Wheatstone (fig. 306).

Au lieu de chercher à obtenir  $L - Cr^2 = 0$  on peut aussi, lorsqu'on dispose d'un galvanomètre gradué et d'une pile bien constante : 1° noter l'élongation  $\beta$  obtenue au galvanomètre lors de la suppression du courant ; 2° remplacer la capacité  $C$  par une autre  $C'$  et noter l'élongation  $\beta'$  obtenue de même avec cette nouvelle capacité. On a alors

$$\frac{L - Cr^2}{\beta} = \frac{L - C'r^2}{\beta'}$$

d'où

$$L = \frac{C\beta - C'\beta'}{\beta - \beta'} r^2$$

Lorsqu'on supprime le courant après avoir enlevé le condensateur et remplacé l'appareil  $X$  par une résistance égale sans self, il peut arriver qu'on observe néanmoins une petite impulsion  $\beta_0$  qui est attribuable à une légère self-induction du circuit. Il convient alors de défalquer cet effet de ceux  $\beta$  et  $\beta'$  observés dans les opérations relatives à  $X$ .

Ce mode opératoire a été imaginé par *Vaschy* (1). Il pourrait tout aussi bien servir à trouver  $C$  si  $L$  était connu.



1. Loc. cit.

Soient deux enroulements susceptibles d'être groupés en série successivement dans deux sens opposés. Si  $L_1$  et  $L_2$  sont leurs coefficients respectifs de self-induction et  $M$  leur coefficient d'induction mutuelle, on a pour l'ensemble, par le premier groupement, un coefficient d'induction

$$L' = L_1 + 2M + L_2$$

et par le second groupement :

$$L'' = L_1 - 2M + L_2$$

En déterminant, par une méthode de comparaison, les rapports de  $L'$  et de  $L''$  à une même self  $L$  (qui n'a pas besoin d'être connue) on pourra en calculer le quotient  $\frac{L'}{L''}$ .

Si, d'autre part, on détermine, par une méthode galvanométrique, le coefficient d'induction mutuelle  $M$ , on en déduira  $L' - L'' = 4M$ .

Connaissant ainsi le quotient  $q$  et la différence  $d$  de  $L'$  et de  $L''$ , on calculera ces coefficients à l'aide des formules :

$$L' = \frac{d}{1 - \frac{1}{q}}$$

$$L'' = \frac{d}{q - 1}$$

Si les deux enroulements appartiennent à une même bobine, on aura ainsi le coefficient de self-induction de cette bobine.

Si les deux enroulements considérés appartiennent

à deux bobines indépendantes on déduira de l'étude de leur ensemble, faite comme il vient d'être dit, la somme  $L_1 + L_2$  de leurs coefficients de self, puisque

$$L_1 + L_2 = L' - 2M$$

En joignant à ce résultat la connaissance du rapport  $\frac{L_1}{L_2}$ , fournie par une méthode de comparaison, on obtiendra finalement  $L_1$  et  $L_2$ .

Ces méthodes de mesure des coefficients de self-induction sans étalon d'inductance ou de capacité ont été indiquées par le professeur *W. Duane* (1).

---

1. *Physical Review*, 1901.



## TRENTE-NEUVIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE

INDUCTANCE. CAPACITANCE. RÉACTANCE  
IMPÉDANCE.



### I

#### Inductance.

L'expression générale de la différence de potentiel  $V_A - V_B$  entre les extrémités d'une portion **AB** d'un circuit parcouru par un courant variable est, dans le cas où cette portion de circuit est de capacité négligeable :

$$V_A - V_B = RI - (E + E_s)$$

$I$  étant l'expression *algébrique* de l'intensité du courant,  $E_s$  celle de la force électromotrice de self-induction et  $E$  la somme algébrique des autres forces électromotrices.

Supposons que cette portion de circuit admette un coefficient de self-induction  $L$  ; on aura alors

$$E_s = -L \frac{dI}{dt} \text{ et, par suite :}$$

$$V_A - V_B = RI - \left( E - L \frac{dI}{dt} \right)$$

ou, en représentant par  $\mathbf{V}$  la différence  $\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B$ , et en ne laissant dans le second membre que les termes  $\mathbf{RI}$  et  $\mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}}{dt}$  :

$$\mathbf{V} + \mathbf{E} = \mathbf{RI} + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}}{dt}.$$



Considérons, en particulier, le cas où les grandeurs variables intervenant dans cette relation sont *sinusoïdales* (1).

La portion de circuit considérée étant définie par ses paramètres  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{L}$ , on peut avoir à résoudre l'une ou l'autre des deux questions suivantes :

*Etant donné  $\mathbf{I}$ , trouver  $\mathbf{V} + \mathbf{E}$ ; ou, inversement, étant donné  $\mathbf{V} + \mathbf{E}$ , trouver  $\mathbf{I}$ .*

Examinons tout d'abord la première de ces deux questions.

Si

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\max} \sin(\omega \mathbf{t} + \chi)$$

est l'expression du courant, on a

$$\mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}}{dt} = \mathbf{L}\omega \mathbf{I}_{\max} \sin\left(\omega \mathbf{t} + \chi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Par conséquent, alors,  $\mathbf{V} + \mathbf{E}$  est la somme de deux expressions sinusoïdales de même période et est elle-même, en vertu d'un théorème connu, une expression

1. Pour l'intelligence de cette leçon et des suivantes, le lecteur doit avoir bien présentes à l'esprit les principales propriétés des fonctions sinusoïdales. qu'il trouvera exposées dans les volumes suivants de la Bibliothèque de l'Élève Ingénieur (Grenoble, A. Gratier, éditeur) :

*Principes de Trigonométrie et Éléments de Géométrie vectorielle.*

sinusoïdale de même période, dont on obtiendra la représentation graphique (1) en prenant (*fig. 307*) la résultante du vecteur  $\overline{OU} = RI_{\max}$  représentant la grandeur sinusoïdale  $RI$  (chute de potentiel ohmique) et du vecteur  $\overline{UV} = L\omega I_{\max}$  représentant la grandeur  $L \times \frac{dI}{dt}$  (égale et contraire à la force électromotrice de self-induction).

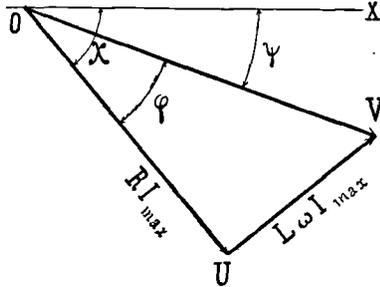


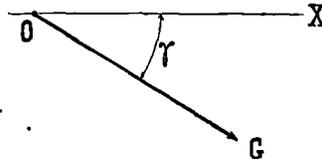
FIG. 307

Ces vecteurs  $\overline{OU}$  et  $\overline{UV}$  sont placés l'un par rapport à l'autre comme les vecteurs  $\bar{I}$  et  $\frac{d\bar{I}}{dt}$  auxquels ils sont proportionnels, c'est-à-dire que le dernier est en *avance* d'un angle droit sur le premier,

Il suit de là que l'amplitude de la quantité  $(V + E)$  est

$$OV = I_{\max} \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

1. Les paramètres caractéristiques d'une sinusoïde  $G = G_{\max} \sin(\omega t + \gamma)$  : étant la période  $T$ , l'amplitude  $G_{\max}$  et l'angle initial  $\gamma$ , la représentation graphique d'une grandeur sinusoïdale de période connue se réduit à celle des paramètres  $G_{\max}$  et  $\gamma$ , et s'obtient en traçant (*fig. ci-contre*) un vecteur  $OG$  égal à  $G_{\max}$ , faisant avec un axe  $OX$  un angle  $XOG$ , égal à  $\gamma$  (valeur algébrique).



Si  $\gamma$  est positif, l'angle est porté dans le sens adopté pour les angles positifs. S'il est négatif (cas de la figure), l'angle est porté en sens contraire. Si  $\gamma$  est donné par la somme algébrique de plusieurs angles, le vecteur  $OG$  est placé de façon à faire avec  $OX$  un angle égal à la résultante de ces angles.

et que cette quantité est en *avance* sur  $\mathbf{I}$  d'une fraction de période égale à la fraction de tour que représente l'angle  $\widehat{\mathbf{UOV}}$  compris entre les vecteurs  $\overline{\mathbf{OU}}$  et  $\overline{\mathbf{OV}}$ . L'angle  $\widehat{\mathbf{VOU}} = -\widehat{\mathbf{UOV}}$ , caractérisant ce qu'on appelle le *décalage* du courant par rapport à  $(\mathbf{V} + \mathbf{E})$ , est défini, en grandeur et en signe, par la relation :

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\mathbf{L}\omega}{\mathbf{R}}$$

En résumé, lorsqu'une portion de circuit, de résistance  $\mathbf{R}$  et de coefficient de self-inducton  $\mathbf{L}$ , est le siège d'un courant alternatif sinusoïdal, la quantité  $(\mathbf{V} + \mathbf{E})$  est également sinusoïdale. Sa période est la même que celle du courant ; son amplitude vaut  $\sqrt{\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2\omega^2}$  fois celle de ce dernier et elle est en **avance** sur lui d'un angle dont la tangente est  $\frac{\mathbf{L}\omega}{\mathbf{R}}$ .



Considérons maintenant le problème inverse, c'est-à-dire supposons connue la quantité  $(\mathbf{V} + \mathbf{E})$  et cherchons le courant correspondant.

Graphiquement, ce problème consiste, étant donné le vecteur  $\overline{\mathbf{OV}}$  (fig. 307), à trouver le vecteur  $\overline{\mathbf{OU}} = \mathbf{RI}_{\max}$ .

Remarquons que, par les données  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\omega$ , l'angle  $\varphi$  est déterminé, puisque  $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\mathbf{L}\omega}{\mathbf{R}}$ . On aura donc  $\overline{\mathbf{OU}}$  en projetant  $\overline{\mathbf{OV}}$  sur une direction faisant avec  $\overline{\mathbf{OV}}$

(dans le sens négatif) un angle de tangente  $\frac{L\omega}{R}$  (1).

Les vecteurs  $\overline{OU}$  et  $\overline{UV}$  ainsi déterminés sont respectivement égaux à  $R\mathbf{I}_{\max}$  et  $L\omega\mathbf{I}_{\max}$  et l'on a

$$\mathbf{I}_{\max} = \frac{(\mathbf{V} + \mathbf{E})_{\max}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$



Donc, étant donnée une portion de circuit de résistance  $R$ , de self-induction  $L$ , pour laquelle la quantité  $(\mathbf{V} + \mathbf{E})$  est sinusoïdale, le courant correspondant est sinusoïdal, de même période, et d'amplitude  $\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$  fois plus petite. Il est décalé en arrière d'un angle dont la tangente est  $\frac{L\omega}{R}$ . Cet angle ne peut être compris qu'entre  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$ , puisque sa tangente  $\frac{L\omega}{R}$  est nécessairement comprise entre  $0$  et  $\infty$ .

Si l'on divise par  $\sqrt{2}$  les amplitudes  $\mathbf{G}_{\max}$  des diverses grandeurs sinusoïdales qui viennent d'être envisagées, on obtient leurs valeurs efficaces :  $\mathbf{G}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{G}_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

Cette opération réduit, dans le même rapport, tous les côtés du triangle  $OUV$ , qui demeure, en conséquence, semblable à lui-même. On peut donc, pour résoudre les problèmes qui viennent d'être envisagés, opérer sur les valeurs efficaces de la même façon que

1. On obtiendra cet angle très simplement en construisant un triangle rectangle de côtés  $R$  et  $L\omega$ .

sur les valeurs maxima. C'est ce qu'on fait habituellement dans la pratique, car les valeurs efficaces sont celles que fournissent directement les appareils de mesure des intensités et différences de potentiel. Le même graphique peut d'ailleurs être utilisé aux deux points de vue : il suffit de le lire avec des échelles présentant entre elles le rapport :  $\sqrt{2} : 1$ .



La quantité  $L\omega$ , dont on vient de voir le rôle important dans les problèmes précédents, et qui est fonction de la self-induction  $L$  de la portion de circuit considérée, en même temps que de la fréquence  $F$  du courant, puisque  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F$ , est désignée sous le nom d'**inductance** de cette portion de circuit.

Représentons - la par  $Y$  et appelons  $Z$  la quantité  $\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \sqrt{R^2 + Y^2}$  figurée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés  $R$  et  $Y$  (*fig. 308*). On peut dire que l'effet d'une inductance est de substituer à  $R$ , dans la formule  $V_{\text{eff}} = RI_{\text{eff}}$  une quantité plus grande

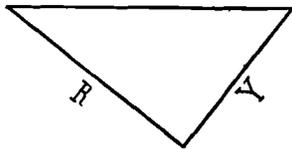


FIG. 308

$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ , en sorte que la formule applicable à un conducteur présentant un inductance est

$$(V + E)_{\text{eff}} = ZI_{\text{eff}}$$

En outre, l'effet de l'inductance est de décaler le courant par rapport à  $(V + E)$  d'un angle dont la valeur absolue  $\varphi_a$  est définie par

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \frac{Y}{R}$$

et dont la valeur algébrique  $\varphi$  est définie par

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

et

$$\sin \varphi = \frac{-Y}{Z}$$

en sorte que le décalage en question est dans le sens négatif ou *arrière*.



## II

### Capacitance

L'intercalation d'un condensateur dans un circuit empêche l'établissement, dans ce circuit, d'un courant continu, mais ne s'oppose nullement à l'établissement d'un courant alternatif.

Soit, en conséquence, **AB** (fig. 309) une portion de circuit comprenant un condensateur de capacité **C**. Entre les résistances  $r_a$ ,  $r_b$  des parties **Aa**, **bB**, l'intensité **I** du courant à un instant donné, les potentiels  $V_A$ ,  $V_a$ ,  $V_b$ ,  $V_B$ , des points **A**, **a**, **b**, **B**, à cet instant, et les forces électromotrices  $E_{Aa}$ ,  $E_{bB}$  dont les deux parties **Aa**, **bB** du circuit peu-

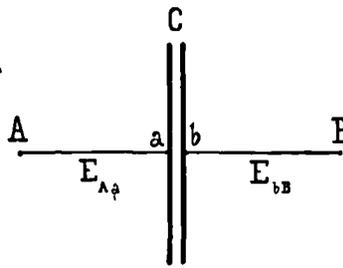


FIG. 309

vent en outre être le siège au même instant, existent les relations :

$$\begin{aligned} V_A - V_a &= r_a I - E_{Aa} \\ V_b - V_b &= r_b I - E_{bb} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par addition, en appelant  $R$  la somme des résistances  $r_a$ ,  $r_b$  et  $(\sum E)$  la somme algébrique des forces électromotrices :

$$(V_A - V_b) - (V_a - V_b) = (RI) - (\sum E)$$

ou

$$(V_A - V_b) = (RI) - (\sum E) + (V_a - V_b)$$

ou enfin, en mettant en évidence la force électromotrice de self induction impliquée dans  $(\sum E)$  et appelant  $E$  la somme algébrique des autres forces électromotrices :

$$(V_A - V_b + E) = RI + L \frac{dI}{dt} + (V_a - V_b)$$

On voit qu'ici  $(V + E)$  est la somme de trois quantités dont les deux premières nous sont déjà connues.

Pour arriver à la connaissance de la troisième,  $V_a - V_b$ , nous remarquerons que cette quantité est liée à la charge  $Q$ , possédée par le condensateur, à l'instant considéré, par la relation :  $Q = C(V_a - V_b)$ . D'autre part, on a  $I = \frac{dQ}{dt}$  et, par suite,  $I = C \frac{d(V_a - V_b)}{dt}$ ; d'où enfin :

$$\frac{d(V_a - V_b)}{dt} = \frac{I}{C}$$

Si  $(V_a - V_b)$  est une quantité sinusoïdale, sa dérivée  $\frac{d(V_a - V_b)}{dt}$  l'est aussi et  $\frac{I}{C}$  se trouve représenté en conséquence, par un vecteur valant  $\omega$  fois  $(V_a - V_b)_{\max}$  et présentant *en avant*, un décalage de  $\frac{\pi}{2}$ . Inversement, le vecteur représentant  $(V_a - V_b)$  vaut  $\frac{1}{\omega}$  fois  $\frac{I}{C}$  et présente, *en arrière* de  $I$ , un décalage  $\frac{\pi}{2}$ .

En définitive, *lorsqu'une portion de circuit parcourue par un courant alternatif sinusoïdal comprend un condensateur, la quantité  $(V + E)$  qui lui correspond est également sinusoïdale et représentée par la résultante de trois vecteurs savoir : un vecteur  $\overline{OU} = RI$ , en phase avec celui du courant, un vecteur  $\overline{UU'} = L\omega I_{\max}$  en avance de  $\frac{\pi}{2}$  sur le premier, enfin un vecteur  $\overline{UV} = \frac{I_{\max}}{C\omega}$  exactement opposé au précédent, comme décalé de  $\frac{\pi}{2}$  en arrière du courant.*

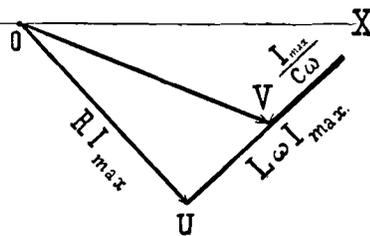


FIG. 310

D'après cela, (fig. 310) le vecteur résultant  $\overline{OV}$  c'est-à-dire  $(V + E)_{\max}$  est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit  $RI_{\max}$  et  $(L\omega - \frac{1}{C\omega}) I_{\max}$  on a donc :

$$(V + E)_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Quant au décalage  $\widehat{UOV}$  de ce vecteur résultant, par rapport à  $\widehat{OU}$ , son sens et sa valeur dépendent de la valeur relative de  $L\omega$  et de  $\frac{1}{C\omega}$ . Il représente une avance si (comme dans la fig. 310)  $L\omega$  surpasse  $\frac{1}{C\omega}$ ; il est nul si  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ ; enfin, il correspond à un retard si  $L\omega$  est inférieur à  $\frac{1}{C\omega}$ .

On a, dans tous les cas, en grandeur et en signe :

$$\widehat{tg\ UOV} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

La quantité  $\frac{1}{C\omega}$  dont on vient de voir le rôle et qui est fonction de la capacité  $C$  du condensateur en même temps que de la pulsation  $\omega$  et par suite de la fréquence du courant, a reçu le nom de **capacitance**.



### III

#### Réactance. Impédance

La quantité

$$K = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

différence algébrique entre l'inductance  $L\omega$  et la capacitance  $\frac{1}{C\omega}$  a reçu le nom de **réactance**.

Elle est positive si l'inductance l'emporte sur la capacitance ; elle est nulle si l'inductance est égale à la capacitance ; enfin elle est négative si l'inductance est inférieure à la capacitance.

Dans le second cas,  $\overline{OU}$  est en phase avec  $\overline{OV}$ , tandis que, dans le premier cas, il est en retard et, dans le troisième cas, en avance.



La quantité

$$Z = \sqrt{R^2 + K^2}$$

égale (fig. 311) à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant ses côtés de l'angle droit numériquement égaux à la *résistance*  $R$  et à la *réactance*  $K$  d'une portion de circuit a reçu le nom d'**impédance**.

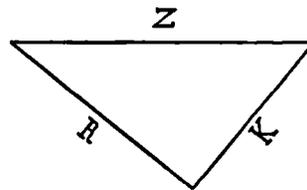


FIG. 311

Elle se confond avec la résistance si la réactance est nulle, et, au contraire, avec la réactance si la résistance est nulle. Dans ce dernier cas, elle se réduit à l'inductance s'il n'y a pas de capacitance ou à la capacitance s'il n'y a pas d'inductance.



Avec cette terminologie, l'énoncé des résultats qui précèdent devient très simple et se résume dans les propositions suivantes :

*Pour un courant alternatif sinusoïdal, la façon dont se comporte une portion de circuit donnée ne*

dépend point simplement de sa résistance  $R$ , comme lorsqu'il s'agit d'un courant continu, mais aussi de sa réactance  $K$ .

La quantité  $(V + E)_{\text{eff.}}$  et l'intensité efficace ( $I_{\text{eff}}$ ) du courant sont liées par une formule analogue à celle qui convient au cas des courants continus, mais dans laquelle figure, à la place de la résistance  $R$ , l'impédance  $Z$ :

$$(V + E)_{\text{eff.}} = Z I_{\text{eff.}}$$

La même formule s'applique aussi aux valeurs maxima :

$$(V + E)_{\text{max}} = Z I_{\text{max}}$$

La résistance  $R$  et la réactance  $K$  d'une portion de circuit n'influent pas seulement (par  $Z$ ) sur la grandeur relative des quantités  $(V + E)_{\text{eff.}}$  et  $I_{\text{eff.}}$ ; elles déterminent aussi le décalage relatif de ces deux quantités.

Le décalage  $\varphi$  de  $I$  par rapport à  $(V + E)$  est défini par

$$\text{tg } \varphi = -\frac{K}{R}$$

Le courant est en **retard** si la réactance est **positive**, c'est-à-dire si l'inductance l'emporte sur la capacitance. Il est en **avance**, dans le cas contraire. Enfin il est en **phase** avec  $(V + E)$  lorsque la réactance est **nulle**.

Ce dernier cas se présente, soit pour une portion de circuit ne présentant ni inductance, ni capacitance, soit pour une portion de circuit ayant une capacitance et une inductance qui se compensent, c'est-à-dire pour

une portion de circuit dont la capacité  $C$  et le self-induction  $L$  satisfont à la condition :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

ou

$$CL\omega^2 = 1$$

Pour une capacité et une self-induction données cette relation n'est réalisée que si la fréquence du courant satisfait à la condition.

$$\omega^2 = 4\pi^2 F^2 = \frac{1}{CL}$$

Pour une fréquence et une self-induction données, la capacité qui satisfait à la condition précédente est

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 F^2 L}$$

La différence de potentiel maxima qu'un condensateur de cette capacité aurait à supporter serait (1) :

$$(V_a - V_b)_{\max} = \frac{I_{\max}}{C\omega}$$

ou, en vertu de la relation :  $\frac{1}{C\omega} = L\omega$  :

$$(V_a - V_b)_{\max} = L\omega I_{\max}$$

Pour pouvoir être employé à neutraliser l'effet d'une self induction donnée, il ne suffira pas qu'un condensateur présente la capacité voulue  $C = \frac{1}{L\omega^2}$  ; il faudra, en outre, qu'il soit construit de façon à supporter, sans risque de rupture de son diélectrique, la différence de potentiel maxima :  $L\omega I_{\max}$ . Si, par suite d'une valeur un peu grande de  $L$ , cette différence de potentiel paraît dangereuse pour un seul condensateur, on pourra la répartir entre plusieurs condensateurs  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$ , ..

---

1. En effet, on a vu ci-dessus (page 287) que  $\frac{I_{\max}}{C} = \omega (V_a - V_b)_{\max}$ .

groupés en *cascade* (1), qui produiront l'effet désiré à condition que leurs capacités soient telles que

$$\frac{1}{C'_\omega} + \frac{1}{C''_\omega} + \frac{1}{C'''_\omega} + \dots = L\omega$$

Si l'on prend des condensateurs identiques entre eux au nombre de  $n$ , la capacité  $C'$  de chacun d'eux sera définie par la condition :

$$\frac{n}{C'_\omega} = L\omega$$

d'où

$$C' = \frac{n}{L\omega^2}$$

Dans ce cas, chacun des condensateurs n'aura à supporter qu'une différence de potentiel maxima égale à la fraction  $\frac{1}{n}$  de  $L\omega I_{\max}$ .

On prendra  $n$  assez grand pour que les condensateurs fonctionnent en toute sécurité.



Ainsi qu'on la vu, l'inductance, la capacitance et, partant, la réactance et l'impédance d'une portion de circuit donnée ne dépendent pas seulement de la constitution de cette dernière, mais aussi de la fréquence  $F$  du courant, puisque leurs expressions renferment  $\omega$ , c'est-à-dire  $2\pi F$ .

Voici, pour faciliter le calcul de ces quantités, les valeurs de  $\omega$  et leurs logarithmes pour diverses fréquences usuelles :

F	$\omega$	log $\omega$
<b>30</b>	188,4955	<b>2,275 3011</b>
<b>35</b>	219,9114	<b>2,242 2479</b>
<b>40</b>	251,3274	<b>2,400 2398</b>
<b>45</b>	282,7433	<b>2,451 3924</b>
<b>50</b>	314,1592	<b>2,497 4499</b>
<b>55</b>	345,5751	<b>2,538 5425</b>
<b>60</b>	376,9911	<b>2,576 3311</b>
<b>65</b>	408,4070	<b>2,611 0932</b>
<b>70</b>	439,8229	<b>2,643 2779</b>
<b>75</b>	471,2388	<b>2,673 2411</b>
<b>80</b>	502,6548	<b>2,704 2698</b>



1. Voir tome I, page 107.

La résistance elle-même, mais seulement dans le cas de gros conducteurs, et de fréquences un peu grandes est fonction de la fréquence.

En toute rigueur, quand il s'agit de courants alternatifs, on doit, à la place de la résistance ohmique  $R_c$  qui se présente en courants continus, introduire une résistance  $R_A$  un peu plus grande, obtenue en multipliant  $R_c$  par un coefficient  $a$  convenable, supérieur à l'unité.

$$R_A = a R_c$$

Pour les conducteurs cylindriques, ce coefficient  $a$  dépend de la valeur que présente la quantité :  $\frac{1,597}{10^8} \frac{Fd^2}{\rho}$ ,  $F$  étant la fréquence du courant,  $d$  le diamètre du conducteur (en millimètres),  $\rho$  la résistivité (en ohms-centimètres) de la substance qui le constitue.

Voici, pour diverses valeurs de cette quantité, les valeurs correspondantes du coefficient  $a$  :

Valeurs de $\frac{1,597}{10^8} \frac{Fd^2}{\rho}$	Valeurs de $a$
0	1
20	1
80	1,0001
180	1,0258
320	1,0805
500	1,1747
720	1,3180
980	1,4920
1280	1,6778
1620	1,8628
2000	2,0430
2420	2,2190
2880	2,3937
5120	3,0956
8000	3,7940
18000	5,5732
32000	7,3250

Lorsqu'il s'agit de conducteurs en cuivre, ce qui est le cas ordinaire de la pratique, la valeur de  $\rho$  est sensiblement  $\frac{1,597}{10^6}$

et alors l'expression dont dépend la valeur de  $a$  est pratiquement  $\frac{Fd^2}{100}$ .

Si cette expression dépasse la valeur 32000 à laquelle s'arrête le tableau précédent, on peut calculer la résistance  $R_A$  comme étant celle d'un tube de même diamètre extérieur que le conducteur et d'épaisseur égale à  $\frac{6,38}{\sqrt{F}}$  centimètres.

Souvent, dans la pratique industrielle, on néglige le coefficient  $a$  et on se borne à prendre pour résistance d'un conducteur, vis-à-vis des courants alternatifs usuels, sa résistance ohmique  $R$ .

Ainsi, pour un fil de cuivre de 10 mm de diamètre et une fréquence de 50 périodes, on a  $\frac{Fd^2}{100} = \frac{50 \times 100}{100} = 50$  et, pour cette valeur le tableau précédent donne  $a = 1$ .



Si un appareil  $X$  de coefficient de self-induction  $L$  et de résistance  $R$  fait partie d'un circuit dans lequel une force électromotrice convenablement choisie donne lieu à un courant alternatif sinusoïdal de fréquence  $F$  et, par suite de pulsation  $\omega = 2\pi F$ , on vient de voir que cet appareil présente une réactance

$$K = L\omega$$

et une impédance

$$Z = \sqrt{R^2 + K^2} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

en sorte que l'intensité efficace  $I$  du courant est liée à la différence de potentiel efficace  $V$  aux bornes de l'appareil par la relation

$$V = ZI.$$

La mesure de  $V$  et de  $I$  donnera donc

$$Z = \frac{V}{I}$$

par suite,

$$L\omega = K = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 - R^2}$$

d'où

$$L = \frac{1}{2\pi F} \sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 - R^2}$$

Cette méthode de détermination de  $L$ , imaginée par M. Joubert, est très employée dans la pratique industrielle, pour les grosses bobines, car elle ne nécessite, outre la connaissance de  $F$  et celle de  $R$ , que des mesures d'intensités efficaces et de tensions efficaces, faciles à faire avec des appareils usuels. Mais pour être tout à fait rigoureuse, elle exige que l'on ait à sa disposition un courant sinusoïdal, ce qui n'est pas facile.

Bonne pour les fortes inductions, la méthode de Joubert est, par contre, en défaut pour les petites bobines, car il n'existe pas d'appareils donnant avec précision les valeurs de petites intensités de courants  $I$  et des petites différences de potentiel  $V$  qui sont alors mises en jeu. De plus, pour de telles bobines, le rapport de  $L\omega$  à  $R$  étant faible,  $V$  ne diffère pas assez de  $RI$  pour que  $L$  soit déterminé avec précision par l'expression :

$$L = \frac{\sqrt{V^2 - R^2 I^2}}{\omega I}$$

dont le numérateur est trop voisin de zéro.

Si l'appareil  $X$  à étudier comprend une capacité  $C$  en série avec la self  $L$ , la connaissance de cette capacité est nécessaire, car on a

$$K = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

et, par suite :

$$L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 - R^2}$$

—⊙→

On sait qu'on appelle **expression imaginaire d'un vecteur** tracé à partir de l'origine dans le plan d'un système d'axes rectangulaires,  $OX$ ,  $OY$ , le binôme obtenu en réunissant par le signe  $+$  l'expression algébrique de la projection de ce vecteur sur l'axe  $OX$  et le produit par  $j = \sqrt{-1}$  de l'expression algébrique de la projection de ce vecteur sur l'axe  $OY$ . D'après cette

convention, on aura pour expressions imaginaires:  $\underline{V+E}$ ,  $\underline{RI}$  ( $r$ ), des vecteurs  $\overline{OV}$  et  $\overline{OU}$  représentés graphiquement par la *fig.* 312 :

$$\underline{V+E} = (V+E)_{\max} \cos \psi + \mathbf{j} (V+E)_{\max} \sin \psi$$

et

$$\underline{RI} = RI_{\max} \cos \chi + \mathbf{j} RI_{\max} \sin \chi$$

ou, en mettant  $(V+E)_{\max}$  et  $RI_{\max}$  en facteurs :

$$\frac{\underline{V+E}}{\underline{RI}} = \frac{(V+E)_{\max}}{RI_{\max}} (\cos \psi + \mathbf{j} \sin \psi)$$

$$\underline{I} = I_{\max} (\cos \chi + \mathbf{j} \sin \chi)$$

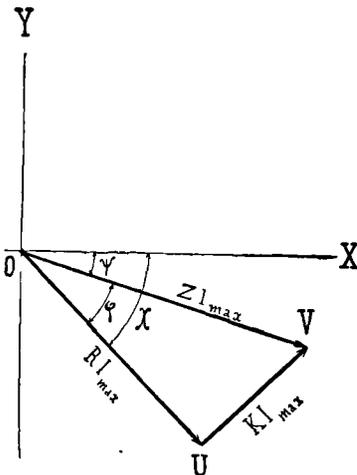


FIG. 312

De cette dernière expression, on déduit, en divisant par  $R$ , l'expression imaginaire  $\underline{I}$  du vecteur représentatif du courant  $I$  :

$$\underline{I} = I_{\max} (\cos \chi + \mathbf{j} \sin \chi).$$

Or,  $\chi$  étant égal (algébriquement) à  $(\psi + \varphi)$ , on a identiquement  $\cos \chi + \mathbf{j} \sin \chi = (\cos \psi + \mathbf{j} \sin \psi) (\cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi)$  et, par suite :

$$\underline{I} = I_{\max} (\cos \psi + \mathbf{j} \sin \psi) (\cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi)$$

1. L'emploi systématique de ces expressions dans les calculs relatifs aux courants alternatifs et leur notation expéditive au moyen de lettres affectées d'un point en bas :  $\underline{V}$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{I}$ , sont dus à Steinmetz (*Alternating current Phenomena*).

Mais, puisque  $I_{\max} = \frac{(V + E)_{\max}}{Z}$ , cette expression peut s'écrire :

$$I = (V + E)_{\max} (\cos \psi + j \sin \psi) \frac{\cos \varphi + j \sin \varphi}{Z}$$

ou

$$I = \frac{V + E}{Z} \frac{\cos \varphi + j \sin \varphi}{Z}$$

ou encore, en remarquant que l'on a (algébriquement) :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \varphi = \frac{-K}{Z}, \quad \text{et } Z^2 = R^2 + K^2 :$$

$$I = \frac{V + E}{Z} \frac{R - jK}{R^2 + K^2},$$

ou enfin, puisque  $R^2 + K^2 = (R - jK)(R + jK)$  :

$$I = \frac{V + E}{R + jK}$$

Si l'on désigne sous le nom d'**impédance imaginaire** de la portion de circuit considérée l'expression :

$$Z = R + jK,$$

le résultat du calcul qui précède prend la forme remarquablement élégante :

$$I = \frac{V + E}{Z}$$

et s'énonce très simplement en disant :

*L'expression imaginaire de l'intensité d'un courant sinusoïdal dont une portion de circuit donnée est le siège est égale au quotient des expressions imaginaires*

*de la quantité  $V + E$ ) et de l'impédance de cette portion de circuit.)*

Cette formule se réduit à la loi d'ohm lorsque l'impédance se réduit à la résistance, c'est-à-dire lorsque la réactance est nulle.



## QUARANTIÈME LEÇON



# ALTERNO - ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*

### FORMULES FONDAMENTALES RELATIVES AUX ASSEMBLAGES DE CONDUCTEURS



I

#### Assemblages de conducteurs en serie

Soient (1), (2), (3), ... (p), divers conducteurs assemblés *en série*, c'est-à-dire faisant partie d'un même circuit **OABC...P** (fig. 313). Supposons-les parcourus par un même courant alternatif sinusoïdal

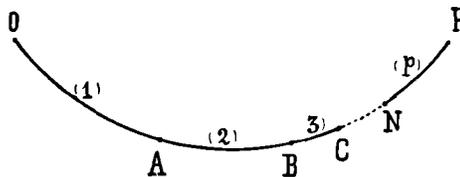


FIG. 313

$I = I_{\max} \sin \omega t$  et faisons à chacun d'eux, à *un même instant t*, application de la formule générale :  $(V) = (I) - R(E)$  nous aurons :

$$V_1 = R_1 I_{\max} \sin \omega t + K_1 I_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) - (E_1)$$

$$V_2 = R_2 I_{\max} \sin \omega t + K_2 I_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) - (E_2)$$

.....

$$V_p = R_p I_{\max} \sin \omega t + K_p I_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) - (E_p)$$

La différence de potentiel  $V$  entre les extrémités de l'assemblage étant évidemment, à l'instant considéré, la somme des différences partielles  $V_1, V_2, \dots, V_p$ , on aura, en ajoutant les expressions précédentes :

$$\begin{aligned} V &= (R_1 + R_2 + \dots + R_p) I_{\max} \sin \omega t \\ &+ (K_1 + K_2 + \dots + K_p) I_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &- (E_1 + E_2 + \dots + E_p). \end{aligned}$$

La formule :

$$V = R I_{\max} \sin \omega t + K I_{\max} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) - (E)$$

est donc applicable à un assemblage de conducteurs en série, si l'on attribue à cet assemblage :

*Une résistance ohmique  $R$  égale à la somme de celles de ses parties (1) ;*

*Une réactance  $K$  égale à la somme algébrique de celles de ses parties ;*

*Une force électromotrice ( $E$ ) égale à la somme algébrique de celles de ces parties.*

*La réunion de plusieurs conducteurs en série additionne donc les résistances.*

*Elle additionne aussi les réactances, mais non les impédances, car la quantité :*

---

1. Il faut entendre par là : les parties conductrices, car les diélectriques des condensateurs, s'il en est d'insérés dans l'assemblage, n'ont pas à intervenir dans le calcul de  $R$ . (Voir ci-dessus page 103).

$$Z = \sqrt{R^2 + K^2}$$

$$= \sqrt{(R_1 + R_2 + \dots + R_p)^2 + (K_1 + K_2 + \dots + K_p)^2}$$

est différente de  $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_p = \sqrt{R_1^2 + K_1^2} + \sqrt{R_2^2 + K_2^2} + \dots + \sqrt{R_p^2 + K_p^2}$ .

Mais l'expression imaginaire de l'impédance d'un groupe de conducteurs en série est égale à la somme des expressions imaginaires des impédances de ces conducteurs :

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots + \dot{Z}_p$$

NOTA. — La réactance de chaque partie de l'assemblage doit être prise en égard à la condition actuelle dans laquelle se trouve cette partie, c'est-à-dire qu'elle doit comprendre la part d'influence exercée sur cette partie par le reste du circuit si toute induction mutuelle entre elles n'est pas évitée (1).



S'il n'y a pas de forces électromotrices  $E_1, E_2, \dots, E_p$ , ou si ces forces électromotrices sont sinusoïdales et de même période que le courant  $I$ , la différence de potentiel  $V$ , elle aussi, est une grandeur sinusoïdale de même période.

Le vecteur qui la représente est la résultante des vecteurs  $\overline{R_n I}$ ,  $\overline{K_n I}$  et  $\overline{E_n}$ . D'ailleurs, tous les vecteurs

1. C'est ainsi qu'on a vu ci-dessus (page 103) le coefficient de self induction d'une bobine dépendre non seulement des coefficients de self induction des deux parties dont elle est regardée comme la réunion, mais aussi du coefficient d'induction mutuelle de ces parties.

$\overline{R_n I}$  sont parallèles entre eux et au vecteur  $\overline{I}$  représentatif du courant; d'autre part, tous les vecteurs  $\overline{K_n I}$ , parallèles aussi entr'eux (directement ou inversement, suivant leurs signes), sont perpendiculaires au vecteur  $\overline{I}$ . Quant aux vecteurs  $\overline{E_n}$ , ils ont chacun une direction spéciale dépendant de la différence de phase de la force électromotrice correspondante par rapport au courant  $I$ .

On peut, indifféremment, donner à ces vecteurs des longueurs représentant les valeurs maxima ou les valeurs efficaces des grandeurs correspondantes. On choisit habituellement les valeurs efficaces par la raison que ces dernières sont données directement par les appareils de mesures de  $V$  et de  $I$ .

La résultante d'une série de vecteurs étant indépendante, en grandeur et en direction, de l'ordre dans lequel sont pris les vecteurs composants, on pourra, dans le tracé des diagrammes donnant  $V$ , ou bien faire intervenir les vecteurs constituants, suivant l'ordre même où se succèdent, dans le circuit, les parties auxquelles ils correspondent, ou bien adopter tel ou tel autre ordre qu'on voudra et, en particulier, ranger d'abord bout à bout tous les vecteurs  $\overline{R_n I}$ , dont l'ensemble formera le vecteur  $\overline{RI}$ , et, ensuite, tous les vecteurs  $\overline{K_n I}$ , ce qui donnera le vecteur  $\overline{KI}$ , après lequel viendront enfin les vecteurs  $\overline{E}$ .

On pourra aussi, dans ces diagrammes, remplacer un groupe de vecteurs par leur résultante effectuée.

Ainsi, au point de vue du résultat, si l'on veut simplement connaître le vecteur  $V$ , les diagrammes (I) et (II) (*fig. 314*) sont équivalents.

Le premier est obtenu en traçant successivement tous les vecteurs  $(\overline{R_1I}, \overline{K_1I}, \overline{E_1})$  fournis par le conducteur (1) de l'assemblage considéré; puis tous les vecteurs fournis par le conducteur (2), et ainsi de suite.

Le second diagramme présente d'abord tous les vecteurs  $\overline{R_nI}$  réunis pour former  $\overline{RI}$ , puis tous les vecteurs  $\overline{K_nI}$  dont l'ensemble forme  $\overline{KI}$  et enfin tous les vecteurs  $\overline{E_n}$ .

Le premier diagramme est d'aspect moins simple que le second, mais il a l'avantage de donner immédiatement les vecteurs représentatifs des différen-

ces de potentiel aux extrémités des diverses parties de l'assemblage. Pour avoir ces vecteurs, il suffit en effet de joindre, sur le diagramme, les points représentés par les mêmes lettres les extrémités de la partie de l'assemblage à laquelle on a affaire.

Par exemple :

la différence de potentiel  $V_A - V_0$  sera représentée par  $OA$

— — —  $V_A - V_B$  — — —  $AB$   
 — — —  $V_A - V_C$  — — —  $AC$

etc.

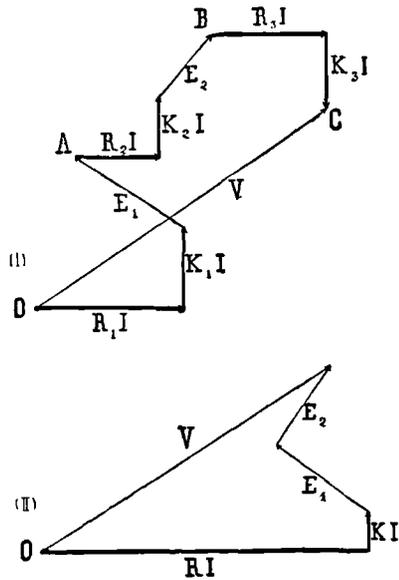


FIG. 314



Pour une valeur constante de  $\omega$ , c'est-à-dire pour une valeur constante de la fréquence  $F$  du courant, puisque  $\omega = 2\pi F$ , tous les côtés  $\overline{R_nI}$  et  $\overline{K_nI}$  du dia-

gramme correspondant à un assemblage de conducteurs donné sont proportionnels à  $I_{\text{eff}}$ . Pour une même valeur de  $\omega$ , les figures formées par ces côtés et correspondant à différentes valeurs de  $I_{\text{eff}}$  sont donc semblables entre elles puisque les côtés changent proportionnellement tandis que les angles sont conservés. On peut donc se borner à en construire une seule, par exemple celle correspondant à  $I_{\text{eff}} = 1$ , et s'en servir en cherchant, pour chaque cas, dans quelle proportion elle devrait être amplifiée ou réduite pour fournir la figure convenant aux données.

Si ce diagramme type relatif aux résistances et réactances de l'assemblage de conducteurs donné est tracé, sous la seconde forme envisagée tout à l'heure, pour  $I_{\text{eff}} = 1$ , il se réduit à un angle droit ayant pour côtés respectivement  $R_1 + R_2 + \dots + R_p = R$  et  $K_1 + K_2 + \dots + K^p = K$ , et pour hypoténuse :  $\sqrt{R^2 + K^2} = Z$ . Il permettra de résoudre aisément les deux questions suivantes :

1° *Quelle est, pour une valeur donnée de  $I_{\text{eff}}$ , la résultante des vecteurs  $\bar{V}$  et  $\bar{E}$  ?*

2° *Quelle est, pour une valeur donnée de la résultante des vecteurs  $\bar{V}$  et  $\bar{E}$ , la valeur correspondante  $I_{\text{eff}}$  de l'intensité du courant ?*

Dans le premier cas, le vecteur cherché sera égal à  $I_{\text{eff}}$  fois  $Z$ .

Dans le second cas, l'intensité cherchée sera donnée par le rapport de la longueur du vecteur  $(\bar{V} + \bar{E})$  à celle du vecteur  $\bar{Z}$ .

Dans les deux cas, le décalage entre  $(\bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{E}})$  et  $\bar{\mathbf{I}}$  se lira directement sur le diagramme, comme étant l'angle compris entre  $\bar{\mathbf{Z}}$  et  $\bar{\mathbf{R}}$ .

La connaissance séparée des vecteurs  $\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\mathbf{E}}$  ne sera possible que si à celle de leur résultante on joint celle de l'un d'eux.



II

Assemblages de conducteurs en parallèle

Soient (1), (2), (3), ... (p), divers conducteurs dénués de forces électromotrices assemblés *en parallèle*, c'est-à-dire formant un faisceau obtenu en réunissant, d'une part, leurs origines en un même point **A**, et, d'autre part, leurs extrémités en un second point **B** (fig. 315).

Si ce faisceau fait partie d'un circuit où existe un courant alternatif **I**, ses diffé-

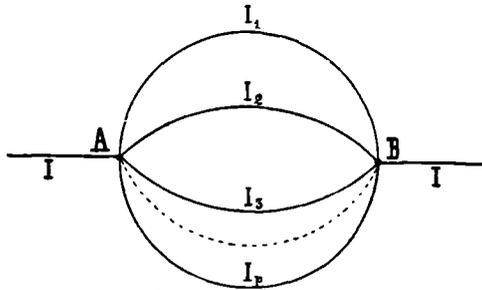


FIG. 315

rentes branches sont le siège de courants  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \dots \mathbf{I}_p$  dont les valeurs instantanées ont, à chaque instant, une somme algébrique qui, ajoutée à la

valeur algébrique du courant  $I$  au même instant, donne une somme totale nulle (1).

Si ces courants sont des courants alternatifs sinusoïdaux de même période, le vecteur représentatif du

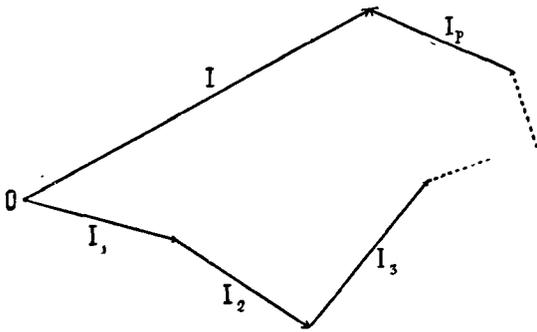


FIG. 316

courant  $I$  est la ligne fermant le polygone des vecteurs représentatifs des courants  $I_1, I_2, I_3 \dots I_p$  (fig. 316).

Il est donc

égal et contraire à la résultante (fig. 317) des vecteurs  $\overline{I_1}, \overline{I_2}, \overline{I_3}, \dots \overline{I_p}$ . La valeur efficace du courant  $I$  est inférieure à la somme arithmétique de celles des courants des diverses branches ;

en d'autres termes, la

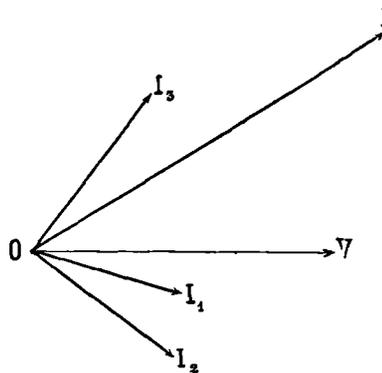


FIG. 317

lecture faite sur un ampèremètre à courants alternatifs placé avant une bifurcation d'un circuit est inférieure à la somme des indications données par des ampèremètres placés sur les branches de cette dernière.

1. Voir t. I, page 121.

Si les conducteurs du faisceau considéré sont dénués de forces électromotrices autres que celles de réactance, les vecteurs  $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3, \dots, \bar{I}_p$  font avec le vecteur  $\bar{V}$ , représentant la différence de potentiel sinusoïdale existant entre les points **A** et **B**, des angles  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_p$  définis par

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-K_1}{R_1}, \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-K_2}{R_2}, \dots, \operatorname{tg} \varphi_p = \frac{-K_p}{R_p}$$

$R_1, R_2, R_3, \dots, R_p, K_1, K_2, K_3, \dots, K_p$  étant respectivement les résistances et les réactances des différentes branches du faisceau.

On a aussi, en considérant les impédances de ces branches :

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1}, \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2}, \dots, \cos \varphi_p = \frac{R_p}{Z_p}$$

et

$$\sin \varphi_1 = \frac{-K_1}{Z_1}, \sin \varphi_2 = \frac{-K_2}{Z_2}, \dots, \sin \varphi_p = \frac{-K_p}{Z_p}$$

D'ailleurs, le vecteur  $\bar{V}$  est l'hypoténuse commune de triangles rectangles ayant pour côtés respectivement :

$$R_1 I_1 \text{ et } K_1 I_1, R_2 I_2 \text{ et } K_2 I_2, \dots, R_p I_p \text{ et } K_p I_p.$$

On a donc les relations :

$$V = Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = \dots = Z_p I_p$$



Imaginons un conducteur unique qui, mis à la place du faisceau, présenterait entre ses extrémités **A** et **B**, toutes choses égales d'ailleurs, la même différence de

potentiel  $V$  pour le même courant  $I$ . Nous attribuerons au faisceau une résistance  $R$  une réactance  $K$  et une impédance  $Z$  égales respectivement à celles de ce conducteur équivalent, et définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} RI &= V \cos \varphi \\ -KI &= V \sin \varphi \\ ZI &= V \end{aligned}$$

Entre ces paramètres et ceux qui correspondent aux diverses branches du faisceau existent des relations très simples déduites des équations suivantes :

$$I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 + \dots + I_p \cos \varphi_p$$

$$I \sin \varphi = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2 + \dots + I_p \sin \varphi_p$$

qui donnent, avec les valeurs des cosinus et sinus écrites ci-dessus :

$$I \frac{R}{Z} = I_1 \frac{R_1}{Z_1} + I_2 \frac{R_2}{Z_2} + \dots + I_p \frac{R_p}{Z_p}$$

$$I \frac{K}{Z} = I_1 \frac{K_1}{Z_1} + I_2 \frac{K_2}{Z_2} + \dots + I_p \frac{K_p}{Z_p}$$

et, en remplaçant les intensités par leurs expressions :

$$\frac{V}{Z}, \frac{V}{Z_1}, \frac{V}{Z_2}, \text{ etc.}$$

$$\frac{R}{Z^2} = \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2} + \dots + \frac{R_p}{Z_p^2} = \sum \frac{R_n}{Z_n^2} = A$$

$$\frac{K}{Z^2} = \frac{K_1}{Z_1^2} + \frac{K_2}{Z_2^2} + \dots + \frac{K_p}{Z_p^2} = \sum \frac{K_n}{Z_n^2} = B$$

ou :

$$R = AZ^2$$

$$K = BZ^2$$

En élevant au carré ces deux égalités et ajoutant, on obtient :

$$\frac{1}{Z^2} = A^2 + B^2$$

En définitive, *pour obtenir la résistance R et la réactance K d'un conducteur unique équivalent à un faisceau de conducteurs en dérivation (ne renfermant aucune force électromotrice autre que celles de réactance), on formera avec les résistances, réactances et impédances des diverses branches les expressions :*

$$A = \sum \frac{R_n}{Z_n^2}$$

$$B = \sum \frac{K_n}{Z_n^2}$$

*et on les introduira dans les formules :*

$$R = \frac{A}{A^2 + B^2}$$

$$K = \frac{B}{A^2 + B^2}$$

Le décalage entre le courant total et la tension aux bornes du faisceau sera donné en grandeur et en signe par la relation :

$$\text{tg } \varphi = \frac{-K}{R} = \frac{-B}{A}$$



Si, en particulier, les diverses branches du faisceau sont identiques entre elles, on trouve, en appliquant les formules générales qui précèdent :

$$R = \frac{R_1}{p}$$

$$K = \frac{K_1}{p}$$

$$Z = \frac{Z_1}{p}$$

La résistance, la réactance et l'impédance du faisceau sont respectivement  $p$  fois moindres que celles  $R_1$ ,  $K_1$ ,  $Z_1$  de chacune des branches.

On a alors :

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 = \dots = \operatorname{tg}\varphi_p = \frac{-K_1}{R_1}.$$

Par conséquent, les courants sont égaux et en phase, et leur intensité commune  $I_1$  est la  $p^{\text{e}}$  partie de l'intensité du courant  $I$ .

Ce cas se présente, par exemple, pour un groupe de  $p$  lampes à incandescence en dérivation. La réactance du faisceau, mieux encore que celle de chacune des lampes, dont elle est la  $p^{\text{e}}$  partie, est pratiquement négligeable.



Etant donné un ensemble de branches conductrices assemblées en parallèles entre deux points **A** et **B**, on n'y pourra avoir des courants que si une au moins de ces branches renferme une force électromotrice génératrice.

Lorsqu'une seule branche **X** est électromotrice, le système peut être envisagé comme un circuit formé partie par cette branche et partie par le faisceau des  $(p - 1)$  autres branches en dérivation entre deux de ses points **A** et **B** (*fig. 318*).

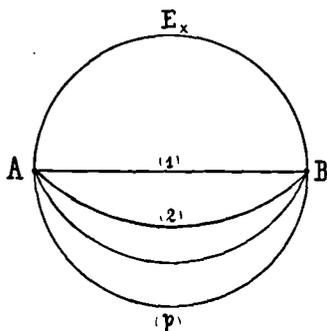


FIG. 318

Supposons que la force électromotrice donnée soit alternative et sinusoïdale ;

on pourra déterminer le fonctionnement d'un tel système si l'on connaît, outre les résistances et réactances de toutes les branches, soit la force électromotrice  $E_x$ , soit la différence de potentiel  $V$  entre les points  $A$  et  $B$ , soit l'intensité  $I$  du courant dans la branche électromotrice.

A cet effet, on établira d'abord un diagramme-type correspondant à une valeur particulière de  $V$  arbitrairement choisie. Soit  $v$  cette valeur; soient  $i_1, i_2, \dots, i_p, i, e_x$  les valeurs des intensités de courants et de la force électromotrice  $E$  qui lui correspondent.

S'il s'agit de connaître les effets d'une valeur donnée  $E_x$  de la force électromotrice  $E$ , on n'aura qu'à multiplier par le rapport  $\frac{E_x}{e_x}$  les valeurs  $v, i_1, i_2, \dots, i_p$  correspondant au diagramme-type.

De même pour  $V$  donné, on multipliera par le facteur  $\frac{V}{v}$ , et, pour  $I$  donné, par le facteur  $\frac{I}{i}$ .

Tout revient donc à l'établissement du diagramme-type, qui comprendra la série d'opérations suivante :

1° Sur  $OV = v$  comme diamètre, tracé d'une circonférence ;

2° Par  $O$  tracé de cordes  $OC_1, OC_2, \dots, OC_p$  faisant avec  $OV$  des angles  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  ayant respectivement pour tangentes  $\frac{K_1}{R_1}, \frac{K_2}{R_2}, \dots, \frac{K_p}{R_p}$  ;

3° Multiplication des longueurs de ces cordes par  $\frac{I}{R_1}$ ,  
 $\frac{I}{R_2}, \dots, \frac{I}{R_p}$  ;

4° Tracé d'un vecteur  $\mathbf{i}_x$  égal et contraire à la résultante des vecteurs  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_p$  ainsi obtenus ;

5° Construction de l'hypoténuse  $\mathbf{Z}_x \mathbf{i}$  du triangle rectangle de côtés  $\mathbf{R}_x \mathbf{i}$  et  $\mathbf{K}_x \mathbf{i}$  ;

6° Construction du vecteur  $\mathbf{e}$  par la différence géométrique  $\mathbf{Z}_x \mathbf{i} - \mathbf{v}$  des vecteurs  $\mathbf{Z}_x \mathbf{i}$  et  $\mathbf{v}$ . (On sait, en effet, que  $\overline{\mathbf{Z}_x \mathbf{i}} = \overline{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{e}}$ ).

Lorsque plusieurs branches  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ , etc., seront électromotrices, la solution du problème concernant la recherche de l'état du système sera donnée par la résultante des états correspondant aux actions de  $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$ , etc., envisagées séparément.



### III

#### Admittance. Conductance. Susceptance.

Considérons l'inverse de l'expression imaginaire de l'impédance d'une portion de circuit donnée, soit

$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\mathbf{R} + \mathbf{jK}}$$

Elle est désignée sous le nom d'**admittance**. On peut la mettre sous la forme canonique

$$\mathbf{c} + \mathbf{jS}$$

en multipliant haut et bas par l'expression  $\mathbf{R} - \mathbf{jK}$  conjuguée du dénominateur. On obtient ainsi

$$\frac{1}{Z} = \frac{R - jK}{R^2 + K^2} = \frac{R - jK}{Z^2}.$$

La partie

$$C = \frac{R}{Z^2}$$

de cette expression porte le nom de **conductance**, et le coefficient de **j** :

$$S = \frac{-K}{Z^2}$$

celui de **susceptance**.

On peut donc dire que l'*admittance*  $\alpha$  d'une portion de circuit dépend de sa *conductance* et de sa *susceptance* de la même façon que son impédance dépend de sa résistance et de sa réactance. Elle peut être représentée (fig. 319) par l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés  $C$  et  $S$ , comme l'impédance l'est par celle d'un triangle rectangle ayant pour côtés  $R$  et  $K$  (fig. 311).

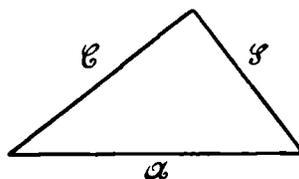


FIG. 319

Avec cette terminologie, les relations trouvées ci-dessus (page 308), pour un assemblage de conducteurs en parallèle peuvent s'énoncer de la manière suivante :

La conductance  $C = \frac{R}{Z^2}$  d'un faisceau est égale à la

somme des conductances  $C_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}$ ,  $C_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}$ , ...,

$C_p = \frac{R_p}{Z_p^2}$  de ses branches.

La susceptance  $\mathcal{S} = \frac{-\mathbf{K}}{\mathbf{Z}^2}$  d'un faisceau est égale à la somme des susceptances  $\mathcal{S}_1 = \frac{-\mathbf{K}_1}{\mathbf{Z}_1^2}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \frac{-\mathbf{K}_2}{\mathbf{Z}_2^2}$ , ...  $\mathcal{S}_p = \frac{-\mathbf{K}_p}{\mathbf{Z}_p^2}$  de ses branches.

Par suite :

L'admittance d'un assemblage de conducteurs en faisceau ou en parallèle, soit  $\alpha = \mathcal{C} + \mathbf{j}\mathcal{S}$  est égale à la somme algébrique des admittances  $\alpha_1 = \mathcal{C}_1 + \mathbf{j}\mathcal{S}_1$ ,  $\alpha_2 = \mathcal{C}_2 + \mathbf{j}\mathcal{S}_2$ , ...,  $\alpha_p = \mathcal{C}_p + \mathbf{j}\mathcal{S}_p$  de ces conducteurs.

En un mot, les propriétés d'un assemblage de conducteurs en faisceau s'énoncent, aux points de vue de la conductance, de la susceptance et de l'admittance, comme celles d'un assemblage de conducteurs en série aux points de vue de la résistance, de la réactance et de l'impédance.

Puisqu'on a :

$$\mathbf{R} + \mathbf{j}\mathbf{K} = \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{1}}{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\mathcal{C} + \mathbf{j}\mathcal{S}} = \frac{\mathcal{C} - \mathbf{j}\mathcal{S}}{\alpha^2},$$

on voit que la résistance  $\mathbf{R}$  et la réactance  $\mathbf{K}$  d'un conducteur peuvent s'exprimer en fonction de la conductance  $\mathcal{C}$  et de sa susceptance  $\mathcal{S}$  de la même façon que celles-ci en fonction des premières, soit :

$$\mathbf{R} = \frac{\mathcal{C}}{\alpha^2},$$

et

$$\mathbf{K} = \frac{-\mathcal{S}}{\alpha^2}.$$

Entre les amplitudes de ces diverses quantités existent les relations

$$\alpha^2 = \mathcal{C}^2 + \mathcal{S}^2 = \frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2 + K^2}$$

ou

$$Z^2 = R^2 + K^2 = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\mathcal{C}^2 + \mathcal{S}^2}.$$

La conductance  $\mathcal{C} = \frac{R}{Z^2}$  d'un conducteur n'est égale à l'inverse de sa résistance que lorsque  $Z^2 = R^2$ , c'est-à-dire lorsque la réactance est nulle, ou lorsqu'il s'agit de courants continus (1). En général, elle dépend de  $R$  et de  $K$ , puisque son expression est

$$\mathcal{C} = \frac{R}{R^2 + K^2}.$$

Lorsque la résistance d'un conducteur est nulle, sa susceptance  $\mathcal{S} = \frac{-K}{Z^2}$  est numériquement égale à l'inverse de sa réactance, car alors  $Z^2$  se réduit à  $K^2$ . Dans le cas général, elle dépend de  $K$  et de  $R$ , puisque son expression est  $\mathcal{S} = \frac{-K}{R^2 + K^2}$ .



Dans le cas très fréquent d'un faisceau composé de deux branches seulement (*fig.*

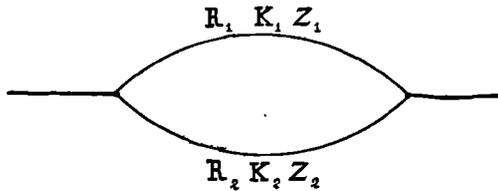


FIG. 320

1. Voir t. 1, page 163.

$$320), \text{ on a } \mathcal{C} = \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2}; \mathcal{S} = \frac{-K_1}{Z_1^2} + \frac{-K_2}{Z_2^2}$$

$$\text{et } \frac{1}{Z^2} = \mathcal{C}^2 + \mathcal{S}^2 = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + 2R_1R_2 + 2K_1K_2}{Z_1^2 Z_2^2} =$$

$$\frac{(R_1 + R_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}{Z_1^2 Z_2^2} \text{ ou, en appelant } Z_{(1+2)} \text{ l'impé-}$$

dance de la boucle comprenant en série les deux conducteurs

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{Z_{(1+2)}^2}{Z_1^2 Z_2^2},$$

ou enfin

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{(1+2)}}.$$

Donc :

*L'impédance d'un faisceau de deux conducteurs est égale au produit des impédances de ces conducteurs divisé par l'impédance de la boucle qu'ils constituent.*

Cette formule est la généralisation de celle bien connue concernant les résistances

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_{(1+2)}},$$

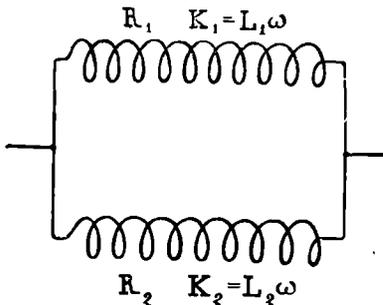


FIG. 321

à laquelle elle se réduit d'ailleurs quand il n'y pas de réactance ou quand il s'agit de courants continus.

Exemples :

1° *Les réactances des deux branches sont positives.*

Ce cas est celui en particulier où les deux branches (*fig. 321*) ne présentent comme réactances que des inductances.

Le diagramme correspondant est du type représenté par la *fig. 322*.

Les décalages  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des courants  $I_1$  et  $I_2$  par rapport à la tension  $V$  entre les extrémités  $A$  et  $B$  du faisceau, sont l'un et l'autre inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ .

Le décalage mutuel  $\varphi_2 - \varphi_1$  de ces deux courants est a fortiori inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ . Il est nul lorsqu'est remplie la condition  $\frac{K_1}{R_1} = \frac{K_2}{R_2}$ . Il est voi-

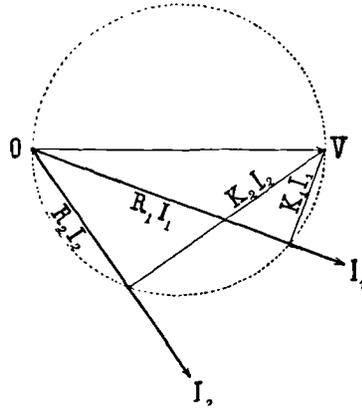


FIG. 322

sin de  $\frac{\pi}{2}$  lorsque  $\varphi_1$  est voisin de zéro et  $\varphi_2$  voisin de  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui a lieu lorsque la première branche présente une grande résistance et une faible réactance, tandis que la seconde présente au contraire une très faible résistance et une très grande réactance.

Le vecteur du courant  $I$  est situé entre les vecteurs  $I_1$  et  $I_2$ , puisqu'il est la diagonale du parallélogramme construit sur eux. Le décalage  $\varphi$  de  $I$  par rapport à  $V$  est donc intermédiaire entre  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et nécessairement compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

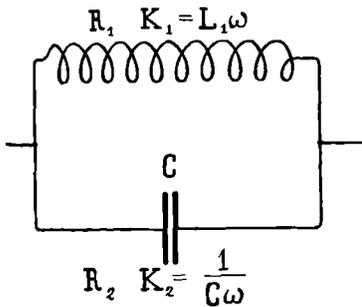


FIG. 323

2° L'une des réactances est positive et l'autre négative.

Ce cas est celui, en particulier, où l'une des branches ne présente comme réactance qu'une inductance tandis que l'autre ne présente qu'une capacitance (*fig. 323*).

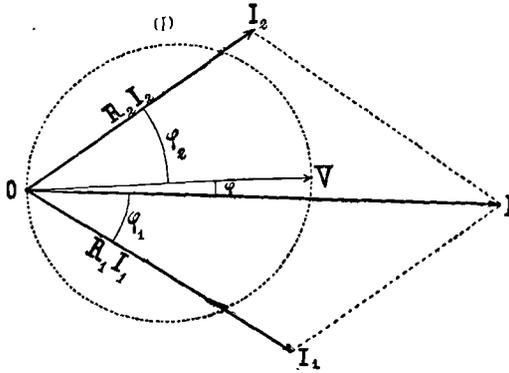


FIG. 324.

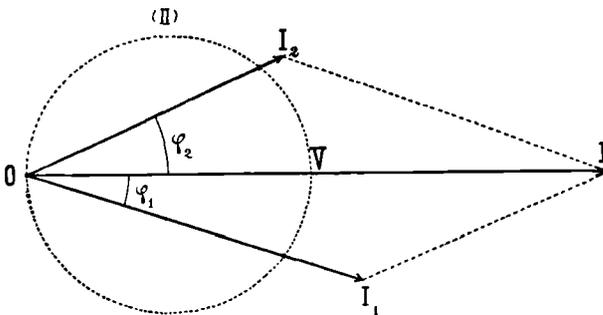


FIG. 325

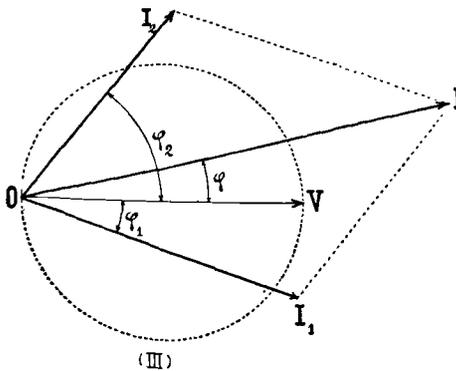


FIG. 326.

Le diagramme correspondant est du type représenté par les fig. 324 à 326.

Les décalages φ<sub>1</sub>, et φ<sub>2</sub> des courants I<sub>1</sub> et I<sub>2</sub> sont alors l'un en arrière, l'autre en avance par rapport à V, et le décalage mutuel, marqué par la somme des valeurs absolues de φ<sub>1</sub> et de φ<sub>2</sub>, peut alors atteindre et même dépasser

$$\frac{\pi}{2}$$

Le vecteur I, toujours situé entre les vecteurs I<sub>1</sub> et I<sub>2</sub>, peut alors avoir par rapport à V, un décalage en arrière (fig. 324) ou nul (fig. 325) ou en avant (fig. 326).

La condition pour que l'on ait φ = 0 est

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{K}{R} = \frac{B}{A^2 + B^2}$$

$$= 0 \text{ ou } B = \frac{K_1}{Z_1^2} +$$

$\frac{K_2}{Z_2^2} = 0$ . Cette condition, dans le cas de  $K_1 = L_1\omega$  et  $K_2 = \frac{1}{C_2\omega}$ , devient  $C = \frac{L}{R_1^2 + L_1^2 \omega^2}$ .

La capacité du condensateur nécessaire pour la réaliser dépend de  $\omega$  et par conséquent de la fréquence du courant.

Si, en particulier  $R_2 = 0$ , le vecteur  $I_2$  est normal à  $oV$  (fig. 327) et a la valeur  $I_2 = \frac{V}{K_2} = \frac{V}{\frac{1}{C_2\omega}} = C_2 \omega V$  car c'est

alors ce que devient l'expression générale  $\frac{V}{Z_2}$ .

Si l'on fait croître  $C_2$  à partir d'une valeur très petite, on voit que l'extrémité du vecteur  $I$  se déplace en s'éloignant de  $I_1$ , sur la perpendiculaire menée de  $I_1$  à  $V$ , et que par conséquent  $I$  va d'abord en décroissant, puis passe par un minimum puis va ensuite en croissant. Le minimum correspond à  $I_2 = C_2\omega V =$

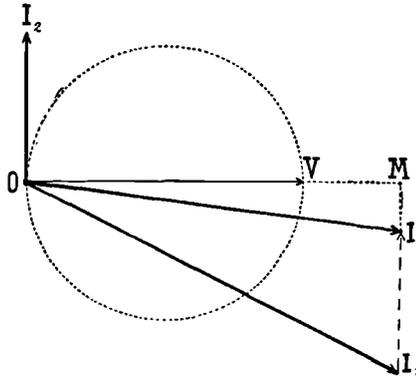


FIG. 327

$$I_1 M = I_1 \sin \varphi_1 = \frac{V}{Z_1} \frac{K_1}{Z_1} \text{ ou } C_2 \omega = \frac{K_1}{Z_1^2}.$$

Le courant  $I$  est alors en phase avec  $V$ , et le rapport  $\frac{I}{I_1}$  est égal à  $\cos \varphi_1$ , d'où  $I = \frac{V}{Z_1} \frac{R_1}{Z_1}$ .

Avec un condensateur  $C_2$  dérivé aux bornes d'un appareil (1) (fig. 323) on peut donc réduire au minimum le courant extérieur  $I$  assurant à l'appareil un régime donné ( $V, I_1$ ).

Ce minimum de  $I$  est d'autant moindre, pour  $V$  donné, que  $R_1$  est plus petit. Pour  $R_1 = 0$  on aurait  $I = 0$  et  $I_1 = -I_2$ , avec la condition  $C_2 \omega = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{L_1 \omega}$  ou

$$C_2 L_1 \omega^2 = 1$$

Quand cette condition, dite **condition de résonance**, est près d'être réalisée, on a dans les branches du faisceau des courants  $I_1$  et  $I_2$  très notables alors que le courant extérieur  $I$  est voisin de de zéro.

L'impédance d'un faisceau dont les branches satisfont à cette condition est infinie. En effet, l'impédance d'un faisceau est donnée en général par la formule  $Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{(1+2)}}$ . Or dans le cas considéré  $Z_{(1+2)} = L_1 \omega - \frac{1}{C_2 \omega} = 0$ .

3° *Impédance ( $Z_{cs}$ ) d'un condensateur shunté par une résistance non inductive.*

Le cas d'un condensateur shunté par une résistance non inductive correspond à  $R_2 = 0$ ,  $(K_2) = \frac{-1}{C \omega}$ ,  $K_1 = 0$ .

$$\text{On a alors } Z_1 = R_1, Z_2 = K_2 = \frac{1}{C \omega}, Z_{(1+2)} = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$$

et la formule  $Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_{(1+2)}}$  donne

$$Z_{cs} = \frac{-\frac{R_1}{C \omega}}{\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} = \frac{R_1}{\sqrt{1 + C^2 R_1^2 \omega^2}}$$

4° *Résistance ( $R_{cs}$ ) et réactance ( $K_{cs}$ ) équivalentes à un condensateur shunté par une résistance non inductive.*

On a pour ce faisceau :

$$C_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2} = \frac{1}{R_1}$$

$$S_1 = \frac{-K_1}{Z_1^2} = 0$$

$$C_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = 0$$

$$S_2 = \frac{-K_2}{Z_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{C \omega}} = C \omega$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{1}{R_1}$$

$$S = S_1 + S_2 = C\omega$$

$$Q^2 = C^2 + S^2 = \frac{1}{R_1^2} + C^2\omega^2$$

Par suite :

$$R_{cs} = \frac{C}{Q^2} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1^2} + C^2\omega^2} = \frac{R_1}{1 + C^2 R_1^2 \omega^2}$$

$$K_{cs} = \frac{-S}{Q^2} = \frac{-C\omega}{\frac{1}{R_1^2} + C^2\omega^2} = \frac{-C R_1^2 \omega}{1 + C^2 R_1^2 \omega^2}$$

Si un tel système est mis en série avec un appareil de résistance  $R$  et de réactance  $K$ , l'assemblage présentera une résistance

$$R_a = R + R_{cs} = R + \frac{R_1}{1 + C^2 R_1^2 \omega^2}$$

et une réactance

$$K_a = K + K_{cs} = K - \frac{C R_1^2 \omega}{1 + C^2 R_1^2 \omega^2}$$

Pour que cet assemblage ait une réactance nulle, c'est-à-dire se comporte vis-à-vis d'un courant alternatif de pulsation  $\omega$  comme une pure résistance ohmique de valeur  $R_a = R + \frac{R_1}{1 + C^2 R_1^2 \omega^2}$ , il faut que l'on ait

$$K - \frac{C R_1^2 \omega}{1 + C^2 R_1^2 \omega^2} = 0$$

On pourra réaliser cette condition par un ajustement de la résistance  $R_1$  et l'équation précédente fournira alors le moyen de déterminer  $K$ .

5° Susceptance d'un condensateur  $C$  shunté par un appareil présentant résistance ( $R'_1$ ) et réactance ( $K'_1$ ).

On a alors

$$S'_1 = \frac{-K'_1}{Z'^2_1} = \frac{-K'_1}{R'^2_1 + K'^2_1}$$

$$\mathfrak{S}_2 = C\omega$$

$$\mathfrak{S} = \frac{-K'_1}{R_1'^2 + K_1'^2} + C\omega$$

La réactance  $K_{cs}$  de cet assemblage sera nulle lorsque sa susceptance  $\mathfrak{S}$  le sera, puisque  $K_{cs} = \frac{-\mathfrak{S}}{\alpha^2}$ . La valeur de  $K'_1$  conduisant à ce résultat est définie par la condition  $K'_1 = C\omega (R_1'^2 + K_1'^2)$ .



Lorsque plusieurs branches,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , etc., d'un faisceau (*fig. 318*) seront électromotrices, la solution du problème concernant la recherche de l'état du système sera donnée par la résultante des états correspondants aux actions de  $\mathbf{E}_x$ ,  $\mathbf{E}_y$ , etc., envisagées séparément.



#### IV

### Généralisation des Formules d'Ohm et de Kirchoff.

Etant donné un réseau ou assemblage quelconque de conducteurs, on sait qu'en courants continus on a, entre les valeurs algébriques des courants et des forces électromotrices :

Pour chaque branche ( $\mathbf{p}$ ), une relation de la forme :

$$(1) \quad \mathbf{V}_p = \mathbf{R}_p(\mathbf{I}_p) - (\mathbf{E}_p)$$

Pour chaque sommet :

$$(2) \quad \sum_s (\mathbf{I}) = \mathbf{o}$$

Pour chaque circuit fermé faisant partie du réseau :

$$(3) \quad \sum_{\mathbf{c}} \mathbf{R}(\mathbf{I}) = \sum_{\mathbf{c}} (\mathbf{E})$$

Le signe  $\sum_{\mathbf{s}}$  marquant la somme algébrique des intensités des courants dans les branches du réseau passant par le sommet  $\mathbf{S}$  considéré, et  $\sum_{\mathbf{c}}$  marquant une somme dont les éléments sont fournis par les côtés du circuit  $\mathbf{C}$  considéré.

La relation (1) exprime la loi d'Ohm ; les relations (2) et (3) constituent ce qu'on appelle les **formules de Kirchoff**.

Si les forces électromotrices continues agissant sur ce réseau sont remplacées par des forces électromotrices variables, les courants continus font place à des courants variables et l'on ne peut plus écrire les relations précédentes qu'entre les valeurs instantanées des intensités et des forces électromotrices, et à condition de comprendre au nombre de ces dernières les forces électromotrices de self-induction et d'induction mutuelle.

Lorsque les grandeurs variables que l'on a à considérer sont sinusoïdales, leurs valeurs efficaces ont entre elles des relations qu'on peut trouver en écrivant des équations calquées sur les précédentes, mais en y remplaçant les symboles  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{R}$ , par les *expressions imaginaires*  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{Z}$ , des intensités, des forces électromotrices et des impédances.

Pour des courants alternatifs sinusoïdaux, les pro-

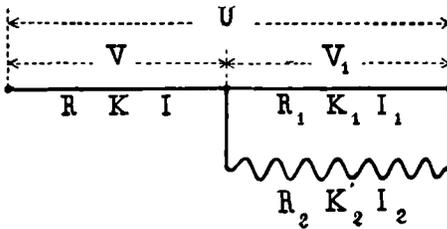
blèmes relatifs à des assemblages quelconques de conducteurs se résoudre donc par des formules calquées sur celles relatives aux mêmes assemblages en courants continus, avec la transposition de symboles qui vient d'être définie.

Exemples :

A. **Problème du Shunt** (*fig.* 328).

On a, en courants continus :

$$\frac{I_1}{R_1} = \frac{I_2}{R_2} = \frac{I}{R_1 + R_2}$$



$$I = \frac{U}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$V = RI$$

$$V_1 = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

On aura, en courants alternatifs :

FIG. 328.

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{Z}_1} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{I}}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z} + \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}}$$

$$\dot{V} = \dot{Z} \dot{I}$$

$$\dot{V}_1 = \dot{Z}_1 \dot{I}_1 = \dot{Z}_2 \dot{I}_2$$

*Remarques :* 1. Si les décalages sont estimés relativement au vecteur  $\overline{U}$ , l'expression imaginaire de ce dernier se réduit à sa partie réelle, qui se confond alors avec sa valeur efficace :  $U$ .

2. Lorsqu'on a une équation entre deux expressions imaginai-

res, elle se résout en deux autres obtenues en égalant, d'une part, les parties réelles, d'autre part, les coefficients de  $\mathbf{j}$ .

Ainsi l'équation

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

développée deviendra

$$(\mathbf{v}' + \mathbf{j}\mathbf{v}'') = (\mathbf{r} + \mathbf{j}\mathbf{k})(\mathbf{i}' + \mathbf{j}\mathbf{i}'')$$

ou

$$\mathbf{v}' + \mathbf{j}\mathbf{v}'' = (\mathbf{r}\mathbf{i}' - \mathbf{k}\mathbf{i}'') + \mathbf{j}(\mathbf{k}\mathbf{i}' + \mathbf{r}\mathbf{i}'')$$

et donnera

$$\mathbf{v}' = \mathbf{r}\mathbf{i}' - \mathbf{k}\mathbf{i}''$$

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{k}\mathbf{i}' + \mathbf{r}\mathbf{i}''$$

En élevant au carré ces dernières égalités et ajoutant, on obtient :

$$\mathbf{v}'^2 + \mathbf{v}''^2 = (\mathbf{r}^2 + \mathbf{k}^2)(\mathbf{i}'^2 + \mathbf{i}''^2)$$

ou

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{Z}^2\mathbf{I}^2$$

ou enfin

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

Lors donc qu'on a entre les expressions imaginaires  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ , de trois grandeurs sinusoïdales, la relation :

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_3$$

On peut en déduire aussitôt entre leurs valeurs efficaces  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2,$

$\mathbf{G}_3$ , la relation analogue

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2\mathbf{G}_3$$

**B. Problème du Pont de Wheatstone (fig. 329).**

Si la branche BD n'existe pas, on a, en courants continus, en appelant  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  les intensités en ABC et ADC :

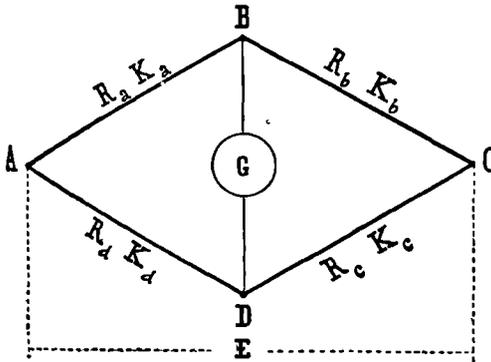


FIG. 329.

$$I_1 = \frac{V_{A,B}}{R_a} = \frac{V_{B,C}}{R_b} = \frac{V_{A,C}}{R_a + R_b}$$

d'où

$$V_{A,B} = \frac{R_a}{R_a + R_b} V_{A,C}$$

De même

$$V_{A,D} = \frac{R_d}{R_d + R_c} V_{A,C}$$

Pour que le pont soit équilibré, c'est-à-dire pour que la branche **BD** puisse exister sans courant, il faut que la différence de potentiel  $V_{B,D}$  soit nulle ou que les différences  $V_{A,B}$  et  $V_{A,D}$ , dont elle est la différence, soient égales.

La condition d'équilibre est donc :

$$\frac{R_a}{R_a + R_b} = \frac{R_d}{R_d + R_c}$$

ou plus simplement :

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{R_d}{R_c}$$

qu'on peut écrire

$$R_a R_c = R_b R_d$$

En courants alternatifs, on aura d'une façon analogue :

$$I_1 = \frac{V_{A,B}}{Z_a} = \frac{V_{B,C}}{Z_b} = \frac{V_{A,C}}{Z_a + Z_b}$$

d'où

$$V_{A,B} = \frac{Z_a}{Z_a + Z_b} V_{A,C}$$

et de même

$$V_{A,D} = \frac{Z_d}{Z_d + Z_c} V_{A,C}$$

L'équilibre aura lieu si  $V_{A,B} = V_{A,D}$ , c'est-à-dire si

$$\frac{Z_a}{Z_a + Z_b} = \frac{Z_d}{Z_d + Z_c}$$

ou, plus simplement :

$$\frac{Z_a}{Z_b} = \frac{Z_d}{Z_c}$$

En remplaçant dans cette relation les impédances imaginaires par leurs expressions en fonction des résistances et réactances correspondantes, on obtient comme condition d'équilibre :

$$\frac{R_a + jK_a}{R_b + jK_b} = \frac{R_d + jK_d}{R_c + jK_c}$$

Pour que le réglage du Pont ait lieu pour les courants continus en même temps que pour les courants alternatifs, il faut qu'en même temps que la relation précédente ait lieu la suivante

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{R_d}{R_c}$$

Ces deux relations simultanées entraînent la condition :

$$\frac{1 + j \frac{K_a}{R_a}}{1 + j \frac{K_b}{R_b}} = \frac{1 + j \frac{K_d}{R_d}}{1 + j \frac{K_c}{R_c}}$$

qui peut être satisfaite ou bien par les égalités

$$\frac{K_a}{R_a} = \frac{K_b}{R_b}$$

et

$$\frac{K_d}{R_d} = \frac{K_c}{R_c}$$

ou bien par les égalités :

$$\frac{K_a}{R_a} = \frac{K_d}{R_d}$$

et

$$\frac{K_b}{R_b} = \frac{K_c}{R_c}$$

En tenant compte de  $R_a R_c = R_b R_d$ , on a, dans le premier cas :

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{K_a}{K_b} = \frac{R_d}{R_c} = \frac{K_d}{K_c}$$

et, dans le second :

$$\frac{R_a}{R_d} = \frac{K_a}{K_d} = \frac{R_b}{R_c} = \frac{K_b}{K_c}$$



Si les réactances de trois des côtés du pont sont nulles, les égalités précédentes exigent, pour que l'équilibre réalisé en courants continus se maintienne en courants alternatifs, que la quatrième réactance soit nulle.

De là une méthode pour guider le réglage de la résistance shunt  $R_1$  permettant à un condensateur  $C$  de former avec un appareil  $X$  mis en série avec lui un assemblage de réactance nulle. Quand ce résultat est obtenu, la réactance de l'appareil  $X$  satisfait ainsi qu'on l'a vu ci-dessus (page 321), à la condition :

$$K = \frac{CR_1^2\omega}{1 + C^2R_1^2\omega^2}$$

et, si la réactance en question est une inductance :  $L\omega$ , le coefficient de self-induction  $L$  sera déterminé par la formule :

$$L = \frac{CR_1^2}{1 + C^2R_1^2\omega^2}$$

On peut fonder sur cette remarque une méthode de détermination des coefficients de self-induction (1).

Si, au lieu de mettre l'appareil  $X$  dont on cherche la self-induction  $L$ , en série avec le condensateur shunté, on le met en dérivation sur ce dernier en ajustant sa résistance  $R'_1$  de façon que l'assemblage présente une réactance nulle, on aura, d'après la formule trouvée ci-dessus (page 322) :  $K'_1 = L\omega = C\omega(R_1'^2 + L^2\omega^2)$ , d'où

$$L = C(R_1'^2 + L^2\omega^2)$$

En éliminant  $\omega$  entre cette formule et la précédente :

$$L = \frac{CR_1^2}{1 + C^2R_1^2\omega^2}$$

on trouve la relation très simple :

$$L = CR_1R'_1$$

qui permettra de calculer  $L$ , à l'aide de  $C$ ,  $R_1$  et  $R'_1$ , sans faire intervenir la pulsation  $\omega$  de la force électromotrice mise en jeu dans les deux expériences (2).

1. *Dongier*. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (13 juillet 1903).

2. *Dongier*. Loc. cit.



## ·QUARANTE-UNIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*\*

### PROBLÈMES USUELS (CONDUCTEURS EN SÉRIE)



#### A. — Changements occasionnés dans un circuit à courants alternatifs par l'introduction d'un appareil donné.

Pour pouvoir déterminer les changements occasionnés dans un circuit par l'insertion d'un appareil donné, il est nécessaire de connaître la résistance  $r$ , la réactance  $k$  et la force électromotrice  $e$  relatives à cet appareil, cette dernière étant définie non seulement en grandeur, mais aussi en phase relativement à la force électromotrice  $E$  préexistante dans le circuit. En effet, le tracé du nouveau diagramme du circuit exige la prise en considération de tous ces éléments.

Si l'appareil additionnel considéré est dénué de force électromotrice, la nouvelle impédance  $Z'$  du circuit est la *résultante* de l'ancienne  $Z$  et de celle  $z$  de l'appareil en question, ainsi que le démontre le diagramme (fig. 330).

On a donc :

$$Z'^2 = (R + r)^2 + (K + k)^2$$

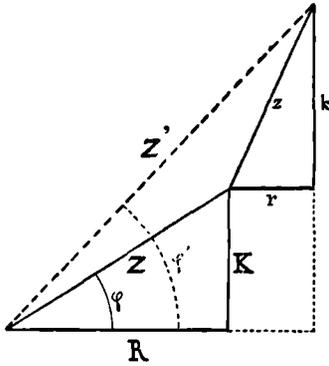


FIG. 330.

ou

$$Z'^2 = Z^2 + z^2 + 2Rr + 2Kk.$$

On voit que la connaissance de la valeur numérique  $z$  de l'indépendance de l'appareil inséré ne suffirait pas pour conduire à celle de la nouvelle impédance du circuit, et qu'il est indispensable de connaître

separément la résistance  $r$  et la réactance  $k$  de l'appareil additionnel, ou, ce qui revient au même, l'expression imaginaire  $z = r + jk$  correspondante.

D'ailleurs, si la connaissance de la valeur numérique  $Z'$  de la nouvelle impédance du circuit suffit pour le calcul de la valeur efficace du nouveau courant, puisque

$$I' = \frac{E}{Z'}$$

elle ne suffit pas pour le calcul du nouveau décalage  $\varphi'$  entre la force électro-motrice et le courant. Pour effectuer ce dernier calcul, il faut connaître la nouvelle résistance  $R + r$  et la nouvelle réactance  $K + k$ , puisque

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{-(K + k)}{R + r}$$

Pour des valeurs données de  $R$ ,  $K$  et  $z$ , le maximum de  $Z'$  (qui est  $Z + z$ ) a lieu lorsque  $z$  est dans le prolongement de  $Z$ , c'est-à-dire lorsque  $\frac{k}{r} = \frac{K}{R}$ .

Divers cas particuliers méritent une mention spéciale :

**1. L'appareil additionnel est une simple résistance  $r$  non inductive.**

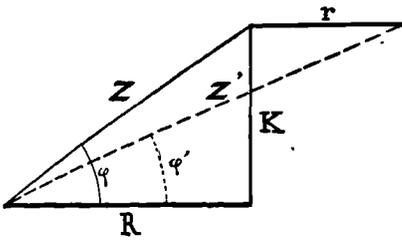


FIG. 331.

Le diagramme des impédances relatif à ce cas est donné par la fig. 331.

On a alors

$$Z' > Z$$

et, par conséquent, l'effet de l'introduction de  $r$  dans le circuit est de

diminuer l'intensité du courant, mais cet effet est d'autant moins marqué, pour  $Z$  et  $r$  donnés, que  $K$  est plus grand.

Le maximum possible pour  $Z' - Z$  est  $r$ , et il est réalisé lorsque  $K$  est nul.

D'une manière générale, l'effet de  $r$  est d'autant plus marqué que  $\frac{K}{R}$  est plus petit.

Deux circuits ayant même  $R$ , même  $Z$ , mais des réactances  $K$  égales et de signes contraires acquièrent même  $Z'$  par l'insertion d'une même résistance additionnelle  $r$ . La fig. 332 montre, en effet, que leurs diagrammes sont symétriques.

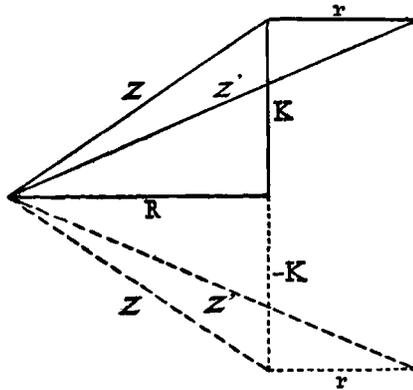


FIG. 332.

Si l'appareil  $Z$  est mis en relation avec deux points entre lesquels est maintenue une différence de potentiel sinusoïdale de valeur efficace  $V$ , il est le siège d'un courant de valeur efficace.

$$I = \frac{V}{Z}$$

Lorsqu'on met en série avec lui une résistance  $r$ , le courant devient

$$I' = \frac{V}{Z'} = I \frac{Z}{Z'}$$

et la différence de potentiel aux bornes de  $Z$  :

$$V' = ZI' = V \frac{Z}{Z'}$$

Toutes choses égales d'ailleurs,  $I'$  et  $V'$  diffèrent d'autant plus de  $I$  et de  $V$  que  $r$  est plus grand.

La formule :

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{- (K)}{R + r}$$

montre que l'addition d'une résistance non inductive  $r$  a pour effet de diminuer le décalage entre la différence de potentiel aux bornes et le courant.

**2. L'appareil additionnel est une simple réactance sans résistance ohmique sensible.**

Une réactance de valeur numérique donnée  $k$  pouvant être concordante ou non en signe avec celle  $K$  à laquelle elle est adjointe en série, il y a lieu naturellement de distinguer deux cas :

a. *La réactance additionnelle  $k$  est de même signe que  $K$ .*

Le diagramme correspondant est donné par la *fig. 333*.

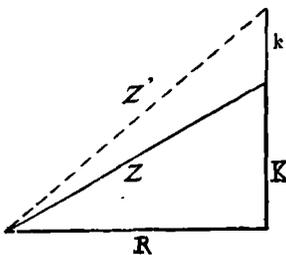


FIG. 333.

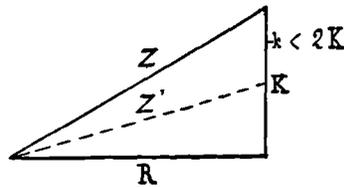


FIG. 334.

Dans ce cas, on a :

$$Z' > Z$$

et la différence  $Z' - Z$ , toutes choses égales d'ailleurs, est d'autant plus grande que  $K$  est plus grand.

b. La réactance  $k$  est de signe contraire à  $K$ .

Le diagramme correspondant est donné par les *fig. 334, 335 et 336* suivant la grandeur relative des valeurs numériques de  $k$  et de  $K$ .

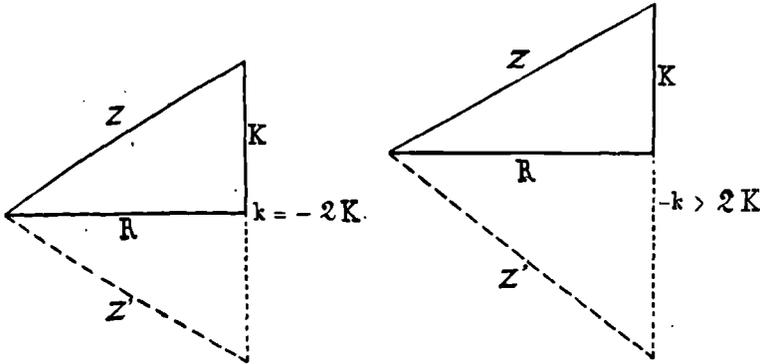


FIG. 335.

FIG. 336.

On voit que si, en valeur absolue, on a

$$k < 2K$$

il en résulte :

$$Z' < Z$$

et, par conséquent, une augmentation du courant, pour une différence de potentiel donnée aux bornes de l'assemblage.

Si

$$k = 2K$$

il en résulte (*fig. 335*)

$$Z' = Z$$

et, par suite, le maintien de la valeur efficace du courant (mais un changement de signe du décalage).

Si enfin

$$k > 2K$$

il en résulte (*fig. 336*)

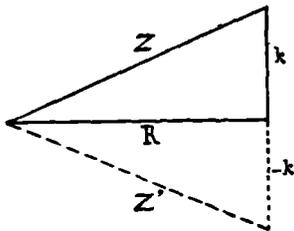
$$Z' > Z$$

et, par conséquent, un affaiblissement du courant.

*Lorsque  $K = 0$ , le changement apporté par une réactance additionnelle  $k$  à la valeur de l'impédance et, par suite, à celle de l'intensité du courant, pour une différence de potentiel donnée, est indépendant du signe de cette réactance.*

Les diagrammes, correspondant alors à deux valeurs égales et contraires de  $k$ , sont, en effet, symétriques (*fig. 337*).  
et l'on a :

$$I' = \frac{V}{Z'} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + k^2}} = \frac{I}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{R}\right)^2}}$$



ou, pour de faibles valeurs de  $\frac{k}{R}$  :

$$I' = I \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{k}{R} \right)^2 \right]$$

et

$$\frac{I - I'}{I} = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{R} \right)^2$$

**FIG. 337.** *La diminution relative du courant (et aussi celle de la différence de potentiel aux bornes de R) est, pour de petites valeurs de la réactance additionnelle, indépendante du signe de cette dernière et proportionnelle au carré du rapport  $\frac{k}{R}$ .*

### 3. Remarque relative à l'emploi des électrodynamomètres.

Lorsqu'on introduit un électro-dynamomètre dont les bobines sont reliées en série, dans un circuit qui est le siège d'un courant alternatif, l'intensité  $I'$  qu'indique l'instrument est différente de celle  $I$  que présentait le courant avant l'insertion de l'appareil, et cela parce que l'appareil a introduit dans le circuit une résistance additionnelle  $r$  et une réactance additionnelle  $k = I \omega$  (en appelant  $I$  son coefficient de self-induction).

Puisqu'on a

$$\frac{I}{I'} = \frac{Z'}{Z} = \frac{\sqrt{(R+r)^2 + (K+k)^2}}{\sqrt{R^2 + K^2}}$$

on obtiendra  $I$  en multipliant  $I'$  par le facteur

$\sqrt{\frac{(R+r)^2 + (K+k)^2}{R^2 + K^2}}$ , qui dépend non seulement des constantes du circuit et de l'instrument, mais aussi (par  $\omega$ ) de la fréquence du courant.

Tant que la perturbation apportée par l'électro-dynamomètre

sera inférieure à  $\frac{1}{100}$  de l'intensité à mesurer, il sera inutile d'en tenir compte dans la pratique industrielle, car la vitesse de rotation des machines industrielles n'est pas assez régulière pour que la fréquence d'un courant alternatif soit maintenue invariable à  $\frac{1}{100}$  près.



**B. — Régulation de l'intensité des courants alternatifs. — Bobines de Self.**

Comme les courants continus, les courants alternatifs peuvent être réglés par des modifications apportées soit aux forces électromotrices qui les produisent, soit aux résistances des circuits où ils sont mis en jeu. Mais, tandis que ces deux méthodes sont les seules applicables aux courants continus, il en existe, pour les courants alternatifs, une troisième, spéciale à ce genre de courants, qui consiste à imposer aux circuits des modifications de *réactance*.

Il existe une infinité de variations simultanées  $\Delta R$  et  $\Delta K$  de la résistance  $R$  et de la réactance  $K$  d'un circuit propres à faire passer le courant de sa valeur primitive  $I$  une valeur nouvelle demandée  $I'$ . En effet, la condition :

$$I' = \frac{E}{\sqrt{(R + \Delta R)^2 + (K + \Delta K)^2}}$$

ne suffit pas pour déterminer  $\Delta R$  et  $\Delta K$ . Mais, une fois  $\Delta R$  choisi,  $\Delta K$  s'en déduit, ou inversement.

De toutes les solutions possibles du problème, les meilleures seront évidemment celles qui accroîtront le

moins la résistance du circuit et par suite la dissipation d'énergie résultant de l'effet Joule.

Aux rhéostats, qui agissent surtout par variations de résistances, on substituera donc avec avantage, au point de vue de l'économie, des appareils très peu résistants mais propres à recevoir de notables variations de self-induction et partant de réactance.

Ces régulateurs à réactance pourront être très simplement constitués par des solénoïdes à gros fils et à noyaux de fer, dont on fera varier soit le nombre de spires, soit le degré d'enfoncement des noyaux.

On les désigne sous les noms de **bobines de réaction** ou de **bobines de self**.



*Construction d'une bobine de self satisfaisant à des conditions données : perte par effet Joule (par seconde) :  $j_1$ , réactance  $k$ , intensité efficace du courant en service :  $I'$ .*

La résistance ohmique de la bobine devra avoir une valeur  $r$  telle que  $rI'^2 = j_1$ .

Il est évident qu'on pourra construire cette bobine si l'on détermine :

- le diamètre  $d = 2a$  du fil à employer ;
- le diamètre  $D$  du tambour propre à le recevoir ;
- le nombre  $n$  de spires à enrouler.

Pour les calculs, il est plus commode de prendre comme inconnues du problème :

- la section  $s$  du fil ;
- la longueur moyenne  $l_1$  d'une spire ;
- le nombre  $n$  de spires.

On a d'abord, en appelant  $\rho$  la résistivité du cuivre à une température usuelle :

$$r = \rho \frac{nl_1}{s}$$

La valeur moyenne de la force électro-motrice de self-induc-

tion dont cette bobine sera le siège est exprimé par  $k I'_{\text{moy}}$  et elle est facile à calculer puisqu'on a (1)  $I_{\text{moy}} = 0,9 I_{\text{eff}}$ .

D'ailleurs, cette force électromotrice moyenne est aussi exprimée par  $\frac{n}{10^8} \frac{\Phi_{\text{max}}}{T}$ ,  $\Phi_{\text{max}}$  étant la valeur maxima du flux

d'induction magnétique à travers une spire et  $T$  la durée de la période. En posant  $\Phi_{\text{max}} = S \mathcal{B}_{\text{max}}$ , on aura donc la relation :

$$0,9kI' = \frac{4n}{10^8} \frac{S \mathcal{B}_{\text{max}}}{T}$$

qui fera connaître le produit  $nS$ , après choix fait d'une induction maxima  $\mathcal{B}_{\text{max}}$ .

D'autre part, la relation :

$$\mathcal{B}_{\text{max}} = \frac{4}{10} \pi \frac{n}{h} I_{\text{max}}$$

ou (puisque  $I_{\text{max}} = 1,1 I_{\text{eff}}$ )

$$\mathcal{B}_{\text{max}} = \frac{4,4}{10} \pi \frac{n}{h} I'$$

fera connaître le rapport de la hauteur  $h$  de l'enroulement au nombre  $n$  des spires, c'est-à-dire le diamètre du fil isolé, d'où l'on déduira la section  $s$  du conducteur.

On pourra alors calculer le produit  $nl_1$  par la relation  $r = \rho \frac{nl_1}{s}$ . Ayant dès lors  $nS$  et  $nl_1$  on aura par division :

$\frac{S}{l_1}$ , c'est-à-dire le rapport de la surface  $S$  embrassée par une spire à la longueur  $l_1$  d'une spire, rapport qui n'est autre que le demi rayon  $\frac{a}{2}$  de cette spire. En retranchant de ce rayon celui du fil on aura le rayon du noyau et, par suite, la longueur  $l_1$  d'une spire d'où l'on déduira enfin  $S = \frac{a}{2} l_1$  et  $n = \frac{nl_1}{l_1}$ .



(1) Dans l'hypothèse d'un courant sinusoïdal.

**C. — Mesures réalisables à la faveur d'une résistance non inductive.**

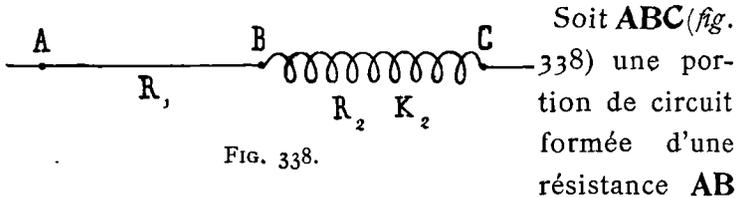


FIG. 338.

non inductive ( $R_1$ ) suivie d'un appareil **BC** de résistance  $R_2$  et de réactance  $K_2$  ne présentant d'ailleurs aucune force électromotrice autre que celle de self-induction.

Sur le diagramme correspondant (fig. 339),

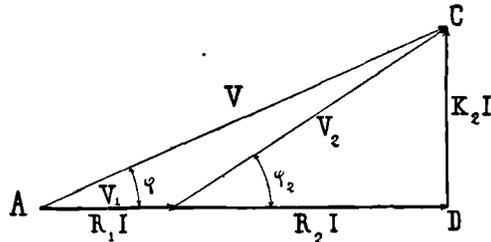


FIG. 339.

$\overline{AB} = \overline{R_1 I}$  est le vecteur représentatif de la différence de potentiel  $V_1$  entre **A** et **B**;  $\overline{BC}$  est celui de la différence  $V_2$  entre **B** et **C**;  $\overline{AC}$ , celui de la différence  $V$  entre **A** et **C**.

Si l'on détermine expérimentalement les valeurs (efficaces) de ces trois différences de potentiel, on peut construire (ou calculer) le triangle **ABC** et, par suite, tout le diagramme, le point **D** étant le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet **C** sur le côté **AB**.

Des trois mesures  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V$  jointes à la connaissance de la résistance non inductive  $R_1$ , on pourra donc déduire (graphiquement ou analytiquement):

1° L'intensité **I** du courant :

$$I = \frac{V_1}{R_1}$$

2° Le décalage  $\varphi$  entre  $I$  et  $V$ , d'après la relation :

$$V_2^2 = V_1^2 + V^2 - 2V_1V \cos \varphi$$

3° Le décalage  $\varphi_2$  entre  $I$  et  $V_2$ , d'après la relation :

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos \varphi_2$$

4° La résistance  $R_2$  de l'appareil  $BC$  :

$$R_2 = \frac{BD}{I} = \frac{V_2 \cos \varphi_2}{I}$$

5° La réactance  $K_2$  de cet appareil :

$$K_2 = R_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

Cette méthode de détermination des grandeurs considérées se nomme : **méthode des trois voltmètres.**



**D. — Etude d'une portion de circuit comprenant une ligne simple à courants alternatifs.**

On nomme ligne simple à courants alternatifs un système de deux fils conducteurs de même longueur, de même section, disposés parallèlement l'un à l'autre pour réunir les bornes **A** et **B** d'une station génératrice  $\mathcal{G}$  d'énergie électrique à celles **a** et **b** d'une station réceptrice  $\mathcal{R}$  (fig. 340).

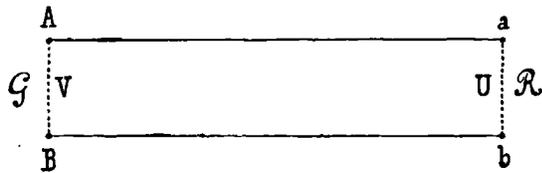


FIG. 340.

Ainsi est constitué un circuit dans lequel les fils de

de ligne **Aa** et **Bb** interviennent par leur résistance **r** et leur réactance **k**.

Considérons le diagramme de la portion de ce circuit comprenant la ligne et la station réceptrice (portion **A a R b B**).

Si nous réduisons la partie concernant **R** au vecteur **ab** représentant la tension aux bornes de cette station,

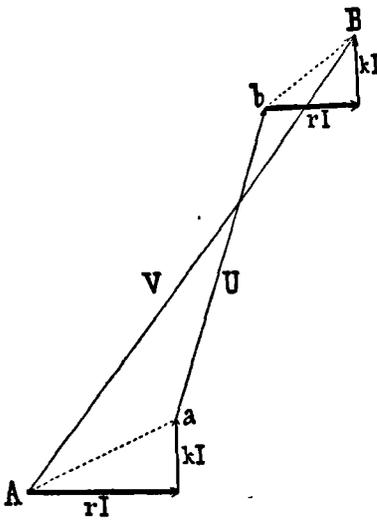


FIG. 341.

le diagramme se présentera comme l'indique la fig. 341, la partie **Aa**, correspondant au fil de ligne **Aa**, la partie **ab** à la station réceptrice et la partie **bB** au second fil de ligne **bB**. Le vecteur **AB** joignant les points extrêmes représente la tension **V** aux bornes de la station génératrice.

On rend ce diagramme plus clair, et on facilite, par suite, l'étude des relations des diverses grandeurs qui y sont représentées, en groupant ensemble les vecteurs concernant les fils de ligne, ce qui donne la forme plus simple représentée par la fig. 342.

De ce diagramme on déduit :

1° Que pour  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  : on a

$$U < V$$

c'est-à-dire que la tension à la station réceptrice est moindre qu'à la station génératrice ou qu'il y a entre les deux une **chute de tension** :  $V - U$ .

2° Que pour  $\varphi \lesssim \gamma$ , on a :

$$ZI > V - U$$

c'est-à-dire que, généralement, la chute de tension  $V - U$  est (en valeur efficace) inférieure au produit  $ZI$  de l'impédance de la ligne par l'intensité efficace du courant. Elle n'atteint la valeur  $ZI$  que dans le cas particulier où  $U$  est en phase avec  $ZI$ , ce qui n'a lieu que pour

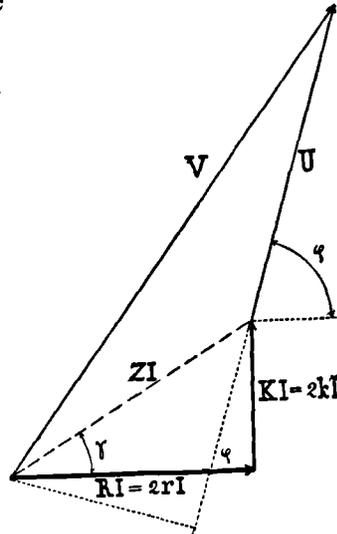


FIG. 342.

$$\varphi = \gamma = \text{angle } \text{tg} \frac{K}{R}.$$

3° Que dans les limites où l'on peut confondre  $V$  avec sa projection sur  $U$  on a, approximativement :

$$V - U = \text{projection de } ZI \text{ sur } U = RI \cos \varphi + KI \sin \varphi$$

ou, en posant :

$$R \cos \varphi + K \sin \varphi = H$$

$$V - U = HI \text{ (par défaut)}$$

Cette chute de tension est supérieure à celle ( $RI$ ) qui correspondrait à un courant continu de même va-

leur efficace, car  $\mathbf{RI} = \mathbf{ZI} \cos \gamma$  tandis que  $\mathbf{HI} = \mathbf{Z} \cos (\varphi - \gamma)$ .

La relation exacte entre  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{I}$  est :

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{U}^2 + \mathbf{Z}^2 \mathbf{I}^2 + 2\mathbf{U} \text{ proj. de } \mathbf{ZI} \text{ sur } \mathbf{U}$$

ou

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{U}^2 + \mathbf{Z}^2 \mathbf{I}^2 + 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{H}$$



## QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON



# ALTERNO - ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*\*\*

### PROBLÈMES USUELS (CONDUCTEURS EN DÉRIVATION)



#### A. Facteur de correction d'un électrodynamomètre dont la bobine mobile est en dérivation sur la bobine fixe.

Les électrodynamomètres destinés à la mesure des courants d'intensité un peu grande ont leur bobine mobile  $B_1$  enroulée de fil fin et placée en dérivation sur la bobine fixe  $B_2$ . On évite ainsi les difficultés que présenterait l'amenée de forts courants à la bobine mobile. Mais alors les deux bobines sont en dérivation relativement au courant à mesurer (*fig. 343*), et la valeur efficace  $I$  de ce courant n'est pas égale à celle  $I_c$  du courant continu qui, admis de même dans l'appareil, donnerait lieu au même couple électrodynamique moyen.

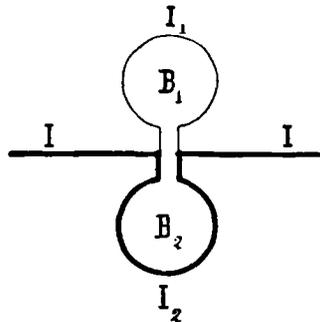


FIG. 343

Il est facile d'établir le facteur par lequel doit, dans ces conditions, être multipliée l'indication  $I_c$  de

l'appareil pour fournir l'intensité  $I$  du courant alternatif mis en jeu.

Le couple moyen  $C$  d'action mutuelle des bobines est lié aux valeurs efficaces  $I_1$ ,  $I_2$  des courants dans ces bobines et à leur décalage mutuel  $\varphi_1 - \varphi_2$  par la relation (1)

$$C = h I_1 I_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Mais, d'après les relations  $Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = Z I = V$ ,

on a :  $I_1 = \frac{Z I}{Z_1}$  et  $I_2 = \frac{Z I}{Z_2}$ , d'où :

$$I_1 I_2 = \frac{Z^2 I^2}{Z_1 Z_2} \text{ et, en vertu de la relation } Z^2 = \frac{Z_1^2 Z_2^2}{Z^2 (1+\varrho)},$$

$$I_1 I_2 = \frac{Z_1 Z_2 I^2}{Z^2 (1+\varrho)}, \text{ d'où}$$

$$C = h \frac{Z_1 Z_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot I^2}{Z^2 (1+\varrho)}$$

Or  $\cos (\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{R_1}{Z_1} \cdot \frac{R_2}{Z_2} + \frac{K_1}{Z_1} \frac{K_2}{Z_2}$  et, par suite,  $Z_1 Z_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) = R_1 R_2 + K_1 K_2$ ; donc

$$C = h I^2 \frac{R_1 R_2 + K_1 K_2}{Z^2 (1+\varrho)} = h I^2 \frac{R_1 R_2 + K_1 K_2}{(R_1 + R_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}$$

et finalement :

$$I = \sqrt{\frac{C}{h}} \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2 + (K_1 + K_2)^2}{R_1 R_2 + K_1 K_2}}$$

L'intensité  $I_c$  du courant continu qui donnerait lieu au même couple serait :

---

1. En effet, la valeur moyenne du produit de deux grandeurs sinusoïdales de même période est égale au produit de leurs valeurs efficaces par le cosinus de leur décalage mutuel. Voir dans la *Bibliothèque de l'Élève-Ingénieur*, (A. Gratier, édit.), le volume relatif à la *Trigonométrie*.

$$I_c = \sqrt{\frac{C}{h}} \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1 R_2}}$$

On a donc

$$I = I_c \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{K_1 + K_2}{R_1 + R_2}\right)^2}{1 + \frac{K_1 K_2}{R_1 R_2}}}$$

C'est-à-dire que pour avoir  $I$ , on doit multiplier l'indication  $I_c$  de l'appareil (déduite de sa graduation préalable en courants continus) par le facteur :

$$\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{K_1 + K_2}{R_1 + R_2}\right)^2}{1 + \frac{K_1 K_2}{R_1 R_2}}}$$

Ce facteur de correction n'est égal à 1 que si les bobines de l'électrodynamomètre satisfont à la condition :

$$\frac{K_1}{R_1} = \frac{K_2}{R_2}$$

car alors  $\left(\frac{K_1 + K_2}{R_1 + R_2}\right)^2 = \frac{K_1 K_2}{R_1 R_2}$  (1).



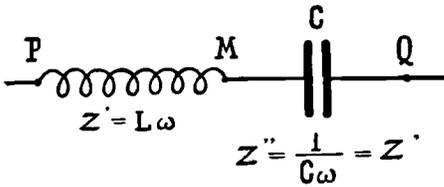
**B. Systèmes de distribution à intensité constante de M. Boucherot.**

Supposons qu'on associe en série, entre deux points P et Q présentant une différence de potentiel sinusoïdale de valeur efficace  $V$  maintenue constante, une

---

1. Les courants  $I_1$  et  $I_2$  sont, dans ce cas, en phase entre eux et avec le courant  $I$ .

inductance  $L\omega = Z'$  et une capacitance  $\frac{1}{C\omega} = Z''$  nu-



mériquement égales entre elles et pratiquement sans résistances (fig. 344).

FIG. 344

M. Boucherot

a reconnu à un tel assemblage cette propriété curieuse que, dans une dérivation d'impédance quelconque, faite, soit aux bornes de la self, soit aux bornes du condensateur, le courant obtenu présente une intensité efficace indépendante de cette impédance.

Soit, en effet, une dérivation N faite, par exemple, aux bornes

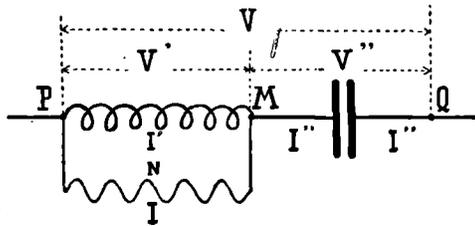


FIG. 345

de la self PM (fig. 345).

Le diagramme des courants  $I, I', I''$  et des tensions  $V, V', V''$  est représenté par la fig. 346.

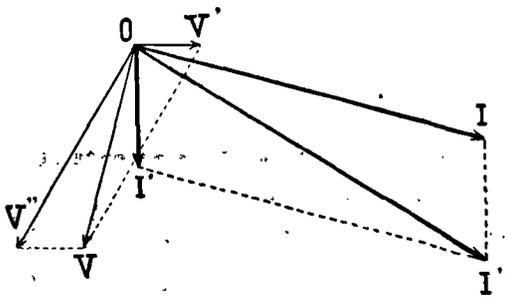


FIG. 346

Le vecteur  $\bar{I}'$  est décalé de  $\frac{\pi}{2}$  en arrière sur  $\bar{V}'$

(car  $\mathbf{R}' = \mathbf{o}$  et  $\mathbf{K}' = \mathbf{L}\omega$ ) ;  $\bar{\mathbf{I}}''$  est la résultante de  $\bar{\mathbf{I}}$  et de  $\bar{\mathbf{I}}'$  et présente sur  $\bar{\mathbf{V}}''$  un décalage de  $\frac{\pi}{2}$  en avant

$$\left( \text{car } \mathbf{R}'' = \mathbf{o} \text{ et } \mathbf{K}'' = -\frac{1}{\mathbf{C}\omega} \right)$$

D'ailleurs, la tension  $\mathbf{V}$  entre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  étant la résultante de  $\mathbf{V}'$  et de  $\mathbf{V}''$ , on a

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}'^2 + \mathbf{V}''^2 + 2\mathbf{V}'\mathbf{V}'' \cos(\mathbf{V}', \mathbf{V}'')$$

Mais  $\mathbf{V}' = \mathbf{G}\mathbf{I}'$ , en appelant  $\mathbf{G}$  la commune valeur absolue de  $\mathbf{Z}'$  et de  $\mathbf{Z}''$ . D'autre part, l'angle  $(\bar{\mathbf{V}}', \bar{\mathbf{V}}'')$  est égal au supplément de l'angle  $(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{I}}')$ .

On peut donc écrire :

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{G}^2[\mathbf{I}'^2 + \mathbf{I}''^2 - 2\mathbf{I}'\mathbf{I}'' \cos(\mathbf{I}', \mathbf{I}'')]$$

Or, la parenthèse de cette expression n'est autre que la valeur de  $\mathbf{I}^2$ . On a donc :

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{G}}$$

Par suite, la valeur du courant  $\mathbf{I}$  est proportionnelle à  $\mathbf{V}$ , à  $\frac{1}{\mathbf{G}}$  et complètement indépendante de la résistance et de la

réactance de la dérivation  $\mathbf{N}$  qui en est le siège.

Le résultat est exactement le même si cette

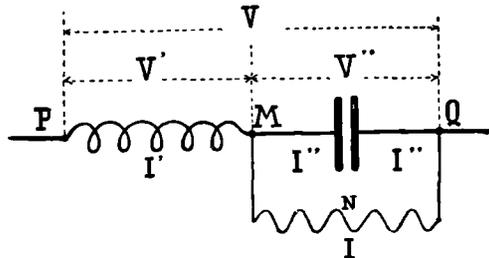


FIG. 347

dérivation est établie (*fig. 347*) aux bornes **M** et **Q** du condensateur.

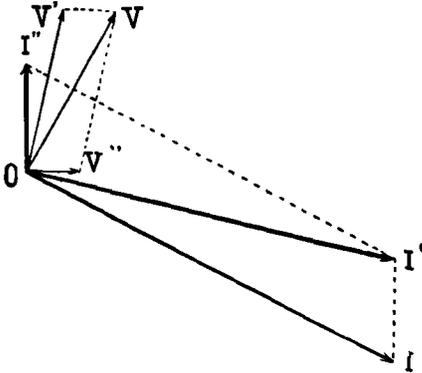


FIG. 348

Le diagramme est alors celui que représente la *fig. 348* et donne lieu à un calcul identique au précédent.



L'emploi des formules de Kirchoff généralisées fournit des problèmes de M. Bouche-rot une solution également très expéditive.

On a, dans le premier cas (*fig. 345*)

$$\frac{\dot{I}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{I}'}{\dot{Z}'} = \frac{\dot{I}''}{\dot{Z} + \dot{Z}'} = \frac{\dot{I}'' \dot{Z} \dot{Z}'}{\dot{Z} + \dot{Z}'}$$

et

$$\dot{I}'' = \frac{V}{\frac{\dot{Z} \dot{Z}'}{\dot{Z} + \dot{Z}'} + \dot{Z}'}$$

d'où

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}'' \dot{Z}'}{\dot{Z} + \dot{Z}'} = \frac{V \dot{Z}'}{\dot{Z} \dot{Z}' + \dot{Z}'(\dot{Z} + \dot{Z}')}$$

Mais, par hypothèse,  $\dot{Z}' = jL\omega$  et  $\dot{Z}'' = -\frac{j}{C\omega} = -\dot{Z}'$ .

Donc, en divisant haut et bas par  $\dot{Z}'$  :

$$\dot{I} = \frac{V}{\dot{Z} - (\dot{Z} + \dot{Z}')} = \frac{V}{-\dot{Z}'} = \frac{V}{-jL\omega} = \frac{jV}{L\omega}$$

d'où, enfin, en posant comme tout à l'heure,  $L\omega = G$

$$I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{G}$$

On voit ici, de plus, par la formule  $I = \frac{jV}{L\omega}$ , que le vecteur  $I$  est en quadrature avec  $\bar{V}$  et en avance (puisque son expression imaginaire est proportionnelle au produit de celle de  $\bar{V}$  par  $j$ ).

Dans le cas où la dérivation est faite aux bornes du condensateur (fig. 347), on a

$$\frac{\dot{I}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{I}''}{\dot{Z}''} = \frac{\dot{I}'}{\dot{Z} + \dot{Z}''} = \frac{\dot{I}' Z Z''}{\dot{Z} + \dot{Z}''}$$

et

$$\dot{I}' = \frac{V}{\dot{Z}' + \frac{Z Z''}{\dot{Z} + \dot{Z}''}}$$

d'où

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}' Z''}{\dot{Z} + \dot{Z}''} = \frac{V Z''}{\dot{Z}' (\dot{Z} + \dot{Z}'') + Z Z''}$$

et, en divisant haut et bas par  $\dot{Z}'' = -\dot{Z}'$ ,

$$\dot{I} = \frac{V}{-(\dot{Z} + \dot{Z}'') + \dot{Z}} = \frac{V}{-\dot{Z}''} = \frac{V}{\frac{j}{C\omega}} = -jC\omega V$$

d'où, enfin, en posant  $\frac{1}{C\omega} = G$  :

$$I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{G}$$

Ici le vecteur  $\bar{I}$  est encore décalé de  $\frac{\pi}{2}$  sur le vecteur  $\bar{V}$  mais en arrière (puisque son expression imaginaire  $\dot{I}$  est proportionnelle au produit de celle de  $\bar{V}$  par  $-j$ ).



Cette méthode des imaginaires est tout particulièrement avantageuse quand les assemblages deviennent plus complexes, com-

me, par exemple, dans la disposition suivante (fig. 349), due également à M. Boucherol, et qui consiste en un pont de

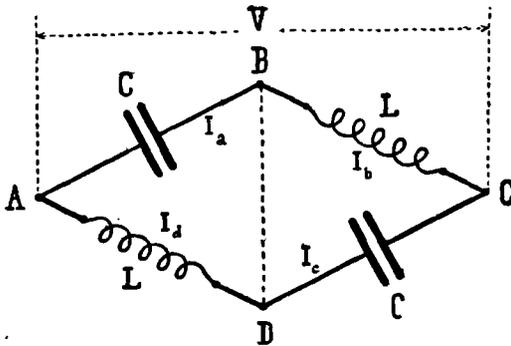


FIG. 349

Wheatstone dont deux branches opposées, de résistances négligeables, présentent des inductances égales et les deux autres, également sans résistances, des capacités égales entre elles et aux inductances des premières ( $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ ).

Si une tension  $V$  constante est établie aux extrémités  $AC$  d'une des diagonales, l'autre diagonale  $BC$  quelle que soit son impédance est le siège d'un courant d'intensité constante.

En effet, on a

$$V_{A,C} = V_{A,B} + V_{B,C} = Z_a I_a + Z_b I_b$$

$$\text{Or } Z_a = -\frac{j}{C\omega} \text{ et } Z_b = jL\omega = -Z_a,$$

par suite :

$$V = Z_a(I_a - I_b)$$

mais

$$I_a - I_b = I$$

donc

$$V = Z_a I$$

d'où enfin :

$$I = \frac{V}{Z_a} = \frac{V}{-\frac{j}{C\omega}} = j \frac{V}{G}$$

• ⊙ →

**C. — Capacité des lignes en câbles armés et en câbles concentriques.**

On a vu (t. 1 p. 28) que les câbles destinés à être enfouis dans le sol sont munis d'une enveloppe métallique. L'âme du câble et cette enveloppe constituent les deux armatures d'un condensateur dont l'isolant interposé est le diélectrique (1).

Un tronçon de câble armé a donc une capacité notable dont on tient compte approximativement en pratique en assimilant ce tronçon à un conducteur ordinaire dont un point serait relié à l'une des armatures d'un condensateur ayant son autre armature en communication avec le sol (fig. 350).

Suivant cette manière de voir, une ligne en câbles armés posée dans le sol est assimilable à une ligne ordinaire entre des tronçons de laquelle

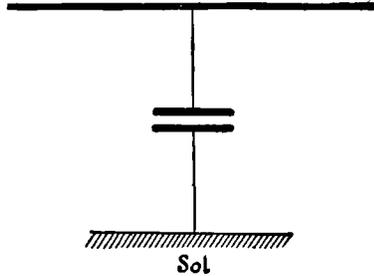


FIG. 350

1. Si  $k$  est le pouvoir inducteur spécifique de ce diélectrique, la capacité d'un tronçon de câble armé de  $l$  kilomètres est donnée en farads par la formule :

$$C = \frac{24k}{10^9} \frac{l}{\log \frac{D''}{D'}}$$

$\frac{D''}{D'}$  étant le rapport du diamètre intérieur de l'enveloppe métallique au diamètre extérieur de l'âme du câble, et le symbole  $\log$  désignant le logarithme vulgaire.

Pour  $l = 1$  (un km) avec  $k = 3$  et  $\frac{D''}{D'} = 3$ , on aurait :  $C = \frac{150}{10^9}$  farad  
 $= \frac{150}{1000}$  microfarad.

seraient dérivés des condensateurs  $C'$ ,  $C''$ , reliés entre

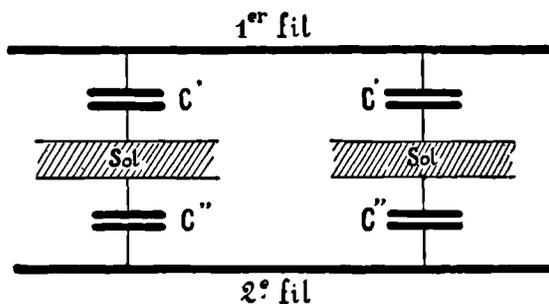


FIG. 351

eux en cascade par l'intermédiaire du sol (fig. 351).

Ce schéma s'approche d'autant plus de la réalité

qu'on pousse plus loin la subdivision des câbles en tronçons ainsi représentés.

Chaque groupe de condensateurs en cascade équivaut à un condensateur unique de capacité  $C$  définie par la relation

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} = \frac{2}{C'}$$

ou

$$C = \frac{C'}{2}$$

Si  $C_1$  est la capacité d'un des fils de la ligne et si l'on prend pour image de cette ligne une ligne ordinaire de même longueur, shuntée par  $n$  condensateurs  $C$ , en des points équidistants correspondant aux milieux de  $n$  tronçons égaux, on devra attribuer à  $C'$  la valeur  $\frac{C_1}{n}$  et, par suite, à  $C$  la valeur  $\frac{C_1}{2n}$ .



Les lignes en câbles simples donnent lieu à des actions magnétiques extérieures susceptibles de troubler

les circuits téléphoniques situés à proximité. D'autre part, les armures de ces câbles sont le siège de courants de Foucault donnant lieu à une perte d'énergie sous forme de chaleur à laquelle s'ajoute, si ces armures sont en fer, une autre perte due à l'hystérésis. Enfin, à ces inconvénients, de telles lignes joignent encore celui de présenter, toutes choses égales d'ailleurs, de plus grandes impédances.

Pour tous ces motifs on leur préfère les lignes en câbles concentriques, dans lesquelles le second conducteur est en forme de cylindre creux enveloppant le premier, l'ensemble étant protégé par une armure de plomb (voir tome I, page 28).

Ces câbles concentriques mettent en jeu deux capacités, l'une  $C$  ayant pour armatures les deux conducteurs  $Aa$ ,  $Bb$  et pour diélectrique l'isolant qui les sépare ; l'autre  $C_e$  ayant pour armatures le conducteur  $Bb$  et l'enveloppe métallique protectrice (1).

Le schéma d'une ligne à câbles concentriques réunissant une station génératrice  $\mathcal{G}$  à une station réceptrice  $\mathcal{R}$  est donc celui que représente la fig. 352.

L'effet de la capacité  $C$  est de rendre l'intensité  $I$  du courant dans le câble moindre que celle  $I_1$ , à la sta-

---

1. Chacune de ces capacités se calcule (en farads) comme celle d'un câble armé (Voir ci-dessus, page 351) en fonction de la longueur  $l$  en kilomètres, du log vulgaire du rapport  $\frac{D}{d}$  des diamètres extérieur et intérieur du diélectrique, et du pouvoir inducteur spécifique  $k$  de ce dernier, par la formule :

$$C = \frac{24 k}{10^9} \frac{l}{\log \frac{D}{d}}$$

tion réceptrice d'après un théorème établi ci-dessus

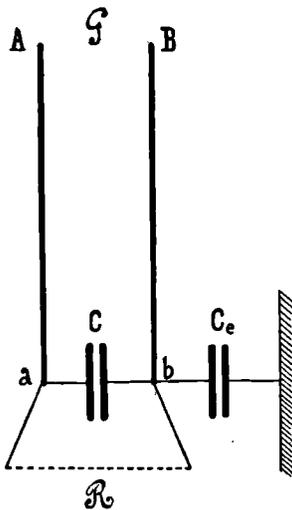


FIG. 352

(page 319), au sujet du fonctionnement d'un condensateur mis en dérivation aux bornes d'un récepteur. D'ailleurs le courant  $I$  est moins décalé relativement à la tension que le courant  $I_1$ .

L'expérience montre que, normalement, le conducteur externe d'une ligne à câbles concentriques est à un potentiel très peu différent de celui du sol. Il semblerait donc qu'on pût économiser de la

matière isolante entre ce conducteur et l'armure protectrice. Mais il faut tenir compte de la possibilité d'établissement, dans des circonstances accidentelles, de différences de potentiel considérables entre le conducteur extérieur et le sol, de telle sorte qu'une bonne gaine isolante autour du conducteur extérieur est de rigueur.



Une ligne en câbles armés ou en câbles concentriques se comportant comme une ligne ordinaire entre les deux fils de laquelle serait dérivée une capacité  $C$  (fig. 353), elle doit, même lorsqu'elle est ouverte à son extrémité, être le siège d'un courant, si son origine est en relation avec un générateur à force électromotrice alternative.

L'intensité de ce courant, dit **courant de capacité**, est

$$I_c = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}} = C\omega V$$

Elle est d'autant plus grande que la capacité **C** est plus grande et que la pulsation du courant ( $\omega = 2\pi F$ ) est plus grande.

Ainsi pour **F = 50**, **V = 1000** volts et **C =  $\frac{10}{10^6}$**  farad on aurait **I<sub>c</sub> = 3,14** ampères.

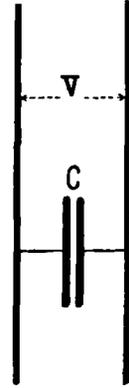


FIG. 353

Il y a donc, même quand la station réceptrice ne fonctionne pas, de l'énergie dissipée en ligne en raison de l'effet Joule dû au courant **I<sub>c</sub>**.



**D. — Effet Ferranti.**

Considérons le schéma (*fig. 354*) d'une ligne en câbles armés en relation par son origine avec une station

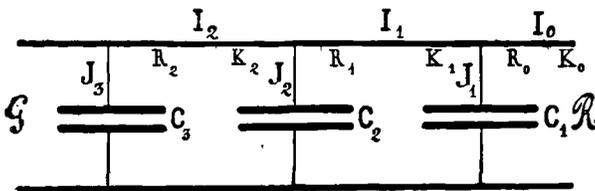


FIG. 354

génératrice **G** et par son extrémité avec une station réceptrice **R** aux bornes de laquelle se présente une différence de potentiel **V<sub>0</sub>**.

Soient  $I_0, I_1, I_2, \dots$  les intensités dans les différents tronçons limités aux points de dérivation des condensateurs successifs,  $C_1, C_2, C_3, \dots$  numérotés à partir de la station réceptrice. Soient, d'autre part,  $J_1, J_2, J_3, \dots$  les intensités dans les dérivations formées par ces condensateurs et  $V_1, V_2, V_3, \dots$  les différences de potentiel aux extrémités de ces dérivations.

Le vecteur  $\bar{V}_1$  est la résultante des vecteurs  $\bar{V}_0, \bar{R}_0\bar{I}_0$  et  $\bar{K}_0\bar{I}_0$ , si l'on désigne par  $R_0$  et  $K_0$  la résistance et la réactance du tronçon de ligne compris entre la station réceptrice et le premier condensateur. Nous représenterons cette relation par l'équation vectorielle :

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_0 + \bar{R}_0\bar{I}_0 + \bar{K}_0\bar{I}_0$$

D'autre part, le vecteur  $\bar{J}_1$ , décalé de  $\frac{\pi}{2}$  en avance sur  $\bar{V}_1$  vaut

$$J_1 = C_1\omega V_1$$

et l'on a

$$I_1 = J_1 + I_0$$

On a, de même,

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_1 + \bar{R}_1\bar{I}_1 + \bar{K}_1\bar{I}_1$$

$$J_2 = C_2\omega V_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{J}_2 + \bar{I}_1$$

$$\bar{V}_3 = \bar{V}_2 + \bar{R}_2\bar{I}_2 + \bar{K}_2\bar{I}_2$$

$$J_3 = C_3\omega V_3$$

$$\bar{I}_3 = \bar{J}_3 + \bar{I}_2$$

et ainsi de suite.

Les diagrammes (*fig. 355*) montrent comment, en traduisant graphiquement ces relations, on peut trouver les tensions  $V_1, V_2, V_3, \dots$  des points de plus en plus voisins de la station génératrice.

Ce diagramme est relatif à un cas où les récepteurs du courant  $I_0$  sont sans inductance et où par consé-

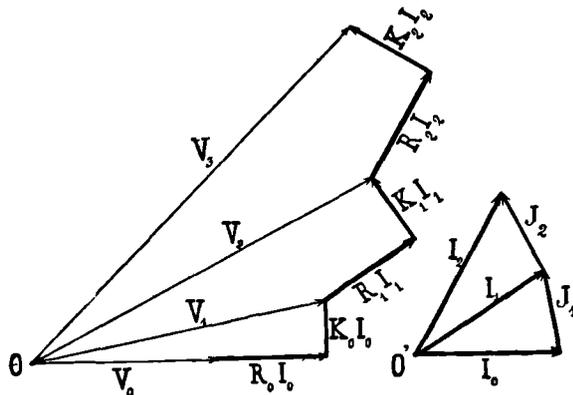


FIG. 355

quent, ce courant est en phase avec  $V_0$ .

La série des tensions  $V_0, V_1, V_2, \dots$  est croissante et, par suite, de la station génératrice à la station réceptrice, il y a chute de tension.

La série des intensités  $I_0, I_1, I_2, \dots$  est décroissante. Le courant a donc à la station réceptrice une intensité efficace supérieure à celle qu'il présente à la station génératrice.



Le diagramme (*fig. 356*) représente ce qui se passe lorsque l'extrémité de la ligne est ouverte ( $I_0 = 0$ ;  $V_1 = V_0$ ).

L'intensité est nulle à la station réceptrice, mais non à la station génératrice.

D'autre part, la série des tensions  $V_1, V_2, V_3$ , peut,

dans ce cas, être décroissante et par suite la tension

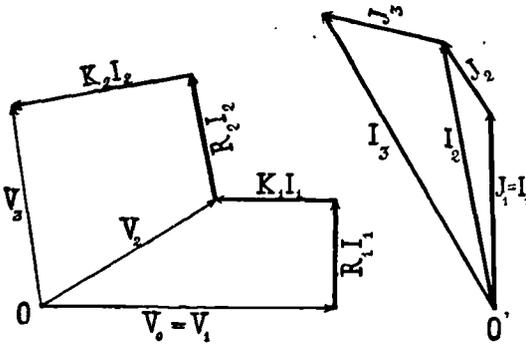


FIG. 356

$V_0$  à la station réceptrice être *supérieure* à la tension établie à la station génératrice.

Ce résultat d'apparence

paradoxale a été observé pour la première fois sur une ligne en câbles armés à l'usine de Deptford par M. Ferranti et constitue ce qu'on appelle l'**effet Ferranti**. Il s'explique, comme on vient de le voir, par la capacité de la ligne.



### E. Dangers dus à la capacité des lignes à courants alternatifs (1)

Considérons (*fig.* 357) le schéma d'une ligne en câbles armés et étudions l'effet d'une mise en communication avec le sol de l'un des câbles ((I) par exemple) par l'intermédiaire d'une résistance ohmique  $r'$ . Cette résistance devra être envisagée comme mise en parallèle avec la capacité  $C'$  correspondant au câble considéré.

Pour le faisceau ( $r', C'$ ) on a, en appelant  $K'$  la réactance due à  $C'$  :

1. Voir *Claude*: Sur les moyens d'augmenter la sécurité des distributions des courants alternatifs à haute tension.

*Bull. de la Soc. internat. des Electriciens*, t. x (1893), p. 435-451.

$$A = \frac{1}{r'}, \quad B = \frac{1}{k'}, \quad Z_1^2 = \frac{r'^2 k'^2}{r'^2 + k'^2},$$

$R_1 = AZ_1^2$ ,  $K_1 = BZ_1^2$ ,  
d'où, pour l'assemblage de ce faisceau en série avec la capacité  $C''$  (réactance  $K'' = K'$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^2 &= R_1^2 + (K + K')^2 = \\ &Z_1^2 + 2BZ_1^2K' + K' + K'^2 \end{aligned}$$

ou, en remarquant que

$$BK' = 1,$$

$$\mathcal{Z}^2 = 3Z_1^2 + K'^2$$

Le courant dans cet assemblage sera donné par l'expression :

$$I^2 = \frac{V^2}{\mathcal{Z}^2} = \frac{V^2}{3Z_1^2 + K'^2}$$

et, par suite le courant  $i'$  en  $r'$  par

$$i'^2 = \frac{Z_1^2 I^2}{r'^2} = \frac{Z_1^2 V^2}{r'^2 (3Z_1^2 + K'^2)} = \frac{V^2}{r'^2 \left( 3 + \frac{K'^2}{Z_1^2} \right)} = \frac{V^2}{4r' + K_1'^2}$$

Le courant  $i'$  sera donc d'autant plus grand que la résistance  $r'$  sera plus faible. Son maximum (pour  $r' = 0'$ ) sera  $\frac{V}{K} = C'_\omega V'$ .

Ainsi la mise au sol (par une résistance telle que  $r'$ ) d'un seul point d'un fil d'une ligne électrique à courants alternatifs détermine une perte, ce qui n'a pas lieu pour les lignes à courants continus, car alors on

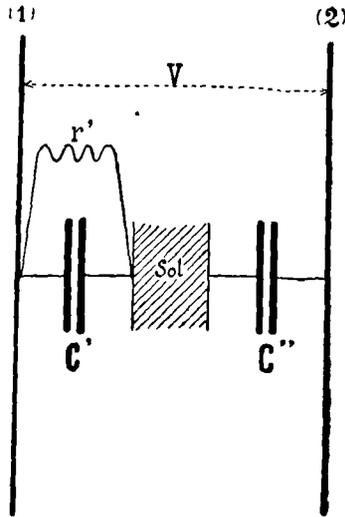


FIG. 357

donne simplement au point touché le potentiel du sol.

Le contact du corps d'une personne avec un fil d'une ligne à courants alternatifs suffit, d'après cela, pour que cette personne (jouant le rôle de la résistance  $r'$  précédente) soit traversée par un courant  $i'$ , lequel sera d'autant plus grand, et partant d'autant plus dangereux, que la différence de potentiel  $V$  entre les fils sera plus grande et que la réactance  $K'$  sera plus faible, c'est-à-dire que la capacité  $C'$  et la pulsation  $\omega$  seront plus grandes, puisque  $K' = \frac{1}{C'\omega}$ .

L'effet Joule en  $r'$  étant exprimé par

$$r'i'^2 = \frac{V^2}{4r' + \frac{K'^2}{r'}}$$

est susceptible d'offrir un maximum qui a lieu pour

$$4r' = \frac{K'^2}{r'} \text{ ou } r' = \frac{K'}{2} = \frac{1}{2C'\omega}$$

Pour atténuer le danger qu'offre, ainsi qu'on vient de le voir, le contact des personnes avec un fil d'une ligne à courants alternatifs, ainsi que les pertes d'énergie pouvant résulter de la mise en relation de la ligne avec le sol par des objets plus ou moins conducteurs (branches d'arbres, etc.), M. Claude a proposé de shunter les capacités  $C'$  et  $C''$ , par des selfs en vue d'accroître notablement l'impédance dérivée entre les fils.

Considérons en effet, (*fig.* 358) aux bornes de  $C''$  une dérivation de résistance  $r''$  et de réactance  $K''$ . L'impédance  $Z_2$  du faisceau formé par cette dérivation et la capacité  $C''$  (réactance  $K''$ ) satisfera à la relation :

$$Z_2^2 = \frac{(r''^2 + k''^2)K''^2}{r''^2 + (k'' + K'')^2}$$

et sera d'autant plus grande que  $k''$  sera plus près de la valeur  $-K''$ . Pour  $r'' = 0$  et pour  $k'' = -K''$  on aurait

$Z_2 = 0$ . Alors le courant  $i'$  serait nul et nulle aussi serait la différence de potentiel entre les deux extrémités de  $r'$ .

Un contact avec le fil (1) n'offrirait alors ni danger ni inconvénient.

De même, l'établissement aux bornes de  $C'$  (c'est-à-dire entre (1) et le sol) d'une self  $k' = -K'$  ferait disparaître tout inconvénient d'un contact accidentel avec le fil (2).

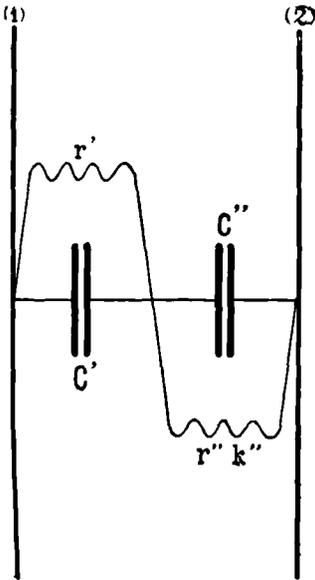


FIG. 358

La capacité étant uniformément répartie, il conviendra d'établir ces self protectrices de distance en distance.

L'impédance dérivée entre les fils étant alors infinie il n'y aurait plus de courant de capacité.

Avec le dispositif, il n'y a de danger à craindre qu'en cas de contact avec *les deux* fils simultanément, circonstance dont l'éventualité est beaucoup plus rare que celle du contact avec un seul fil.

Les inconvénients qui viennent d'être envisagés sont

beaucoup moindres pour les lignes aériennes, en raison de leur plus faible capacité (1).

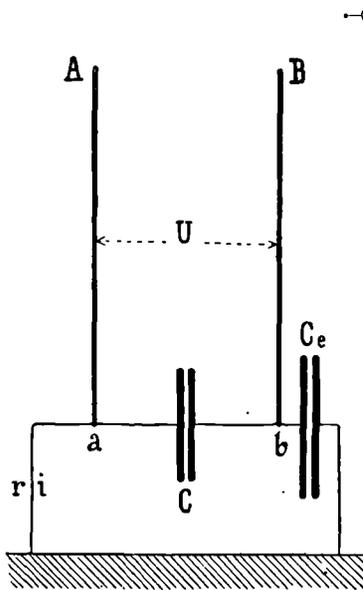


FIG. 359

#### F. Accidents propres aux câbles concentriques.

1. — Si le conducteur intérieur (Aa) (fig. 359) d'une ligne à câbles concentriques est accidentellement mis en communication avec le sol, on peut alors envisager les deux câbles comme shuntés non seulement par le condensateur C dont ils sont les armatures, mais encore par la résistance r du défaut associée en sé-

1. La capacité  $C_{1,2}$  du condensateur ayant pour armatures les deux fils d'une ligne aérienne de  $l$  kilomètres, la distance des fils d'axe étant  $d$  et leur rayon étant  $r$ , est donnée, en farads, par la formule :

$$C_{1,2} = \frac{12}{10^9} \frac{l}{\log \frac{d}{r}} \text{ farad.}$$

Pour  $l = 1$  (un km),  $d = 100$  cm,  $r = 0,5$  cm, on a  $C_{1,2} = \frac{5}{10^6}$  farad =  $\frac{5}{1000}$  microfarad.

La capacité  $C_{1,0}$  du condensateur formé par un fil d'une ligne aérienne et le sol dépend de  $l$ , de  $r$  et de la hauteur  $h$  du fil au-dessus du sol, suivant la formule :

$$C_{1,0} = \frac{24}{10^9} \frac{l}{\log \frac{2h}{r}} \text{ farad.}$$

Pour  $l = 1$ ,  $h = 300$  cm,  $r = 0,5$  cm, on a  $C_{1,0} = \frac{8}{10^6}$  farad =  $\frac{8}{1000}$  microfarad.

rie à la capacité  $C_e$  qui a pour armatures le conducteur extérieur **Bb** et l'armure protectrice du câble.

Cette seconde dérivation pouvant avoir, contrairement à la première, une résistance sensible peut, par suite, être le siège d'une dissipation de chaleur par effet Joule dont la valeur par seconde est :

$$ri^2 = r \frac{U^2}{r^2 + \frac{1}{C_e^2 \omega^2}}$$

La valeur maxima que peut atteindre cette quantité est  $\frac{U'}{2C_e\omega}$  et a lieu pour  $r = \frac{1}{C_e\omega}$  c'est-à-dire pour une

valeur de  $r$  d'autant plus faible que  $C_e$  et  $\omega$  sont plus grandes.



2. — Si, par mégarde, le conducteur intérieur **Aa** d'un premier tronçon de ligne à câbles concentriques est relié au conducteur extérieur **B'b'** d'un second tronçon (fig. 360), il y a alors entre les deux bornes **A** et **B** de la station génératrice non seulement la dérivation : **A a B' b' X a' A' b B** comprenant les câbles et l'appareil d'utilisation **X**, mais encore une seconde dérivation comprenant, en cascade, les capacités  $C_e$  et  $C'_e$  ayant pour armatures les conducteurs exté-

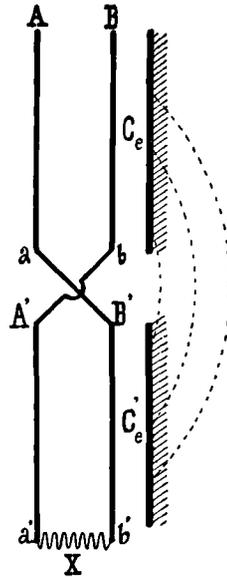


FIG. 360

rieurs de ces tronçons de câbles et leurs armures.

Cette seconde dérivation est le siège de courants qui vagabondent dans le sol entre les armures de ces deux tronçons et peuvent causer des perturbations dans des circuits voisins, notamment dans des circuits téléphoniques.



3. — Si dans une ligne à câbles concentriques comportant plusieurs tronçons réunis bout à bout, le conducteur extérieur se trouve coupé (*fig.*

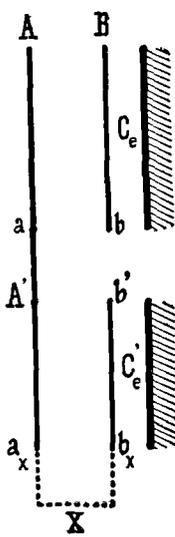


FIG. 361

*361*), (par suite de la fusion d'un plomb ou de la manœuvre d'un interrupteur), avant le conducteur intérieur, on a alors entre les bornes **A** et **B** de la station génératrice une dérivation **A a A'...** **a<sub>x</sub> X b<sub>x</sub> C'<sub>e</sub> C<sub>e</sub> B** comprenant, en série, le conducteur intérieur (non coupé) **Aa<sub>x</sub>**, la station réceptrice **X**, les deux tronçons du conducteur extérieur rompu, et, en cascade, les capacités **C'<sub>e</sub>, C<sub>e</sub>** comprises entre ces tronçons et les armures correspondantes.

Le schéma de cet assemblage est représenté par la *fig.* 362, **C** étant la capacité équivalente à la cascade (**C'<sub>e</sub>, C<sub>e</sub>**).

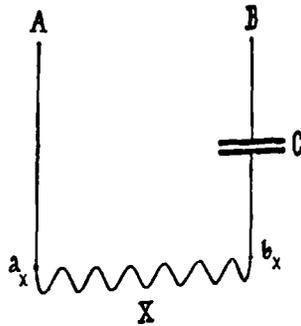


FIG. 362

L'expression vectorielle

de la différence de potentiel  $V$  entre  $A$  et  $B$  peut s'écrire :

$$\bar{V} = \bar{R}I + \bar{K}I + \bar{R}_x I + (-\bar{E}_x) + \bar{R}_c I + \bar{K}_c I$$

en appelant :

$R$  la résistance du conducteur  $Aa_x$

$K$  sa réactance

$R_x$  la résistance de l'appareil récepteur

$E_x$  la résultante (proportionnelle à  $I$ ) de toutes ses forces électro-motrices d'induction.

$R_c$  la résistance de la partie  $b_x B$

$K_c$  sa réactance formée en majeure partie de la réactance  $-\frac{1}{C\omega}$  de la capacité  $C$ .

A cette expression correspond le diagramme (*fig.* 363).

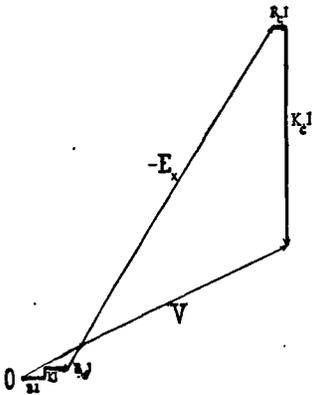


FIG. 363

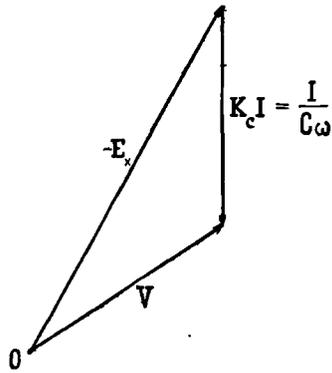


FIG. 364

Dans le cas usuel où les côtés  $RI$  sont très petits vis-à-vis de  $V$ , ce diagramme peut-être pratiquement réduit à la forme très simple représentée par la *fig.* 364,

c'est-à-dire à un triangle ayant pour côtés : 1° la tension  $V$  aux bornes de la station génératrice ; 2° la force électromotrice  $E_x$  de la station réceptrice et 3° la tension  $K_c I = \frac{I}{C\omega} = U$  entre les armatures de la capacité  $C$ . L'angle  $\xi$  (complément du décalage entre  $E_x$  et  $I$ ) est une constante dépendant de la constitution de l'appareil  $X$ . Il en est de même du coefficient  $X$  de proportionnalité entre  $E_x$  et  $\omega I$ .

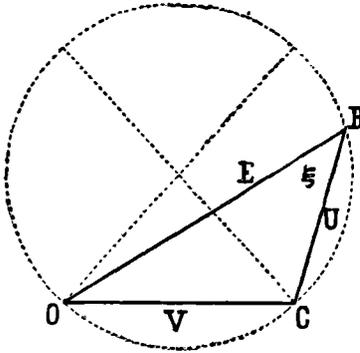


FIG. 365

Pour construire ce triangle, dans le cas d'une tension  $V$  et d'un appareil  $X$  donnés, il suffit de tracer sur  $OC = V$  (fig. 365) un segment capable de l'angle  $\xi$  et de prendre, sur ce segment, un point  $B$  dont les distances à  $O$  et à  $C$  sont

entre elles dans le rapport de  $X\omega$  à  $\frac{1}{C\omega}$ .

On fera donc l'étude des régimes correspondant, toutes choses égales d'ailleurs, à diverses valeurs de la capacité  $C$  en déplaçant le point  $B$  sur le segment capable auquel il appartient.

On voit ainsi clairement que si la capacité  $C$  est très grande, le rapport  $\frac{BO}{BC} = CX\omega^2$  étant alors très grand, le point  $B$  est très voisin de  $C$  ce qui indique que la tension  $U$  entre les armatures de  $C$  est très petite et

que l'intensité  $I = \frac{E}{X_{\omega}}$  du courant est voisine de  $\frac{V}{X_{\omega}}$  puisque  $E$  est voisine de  $V$ .

Si, à partir d'une valeur très grande,  $C$  diminue, le point  $B$  s'éloigne de  $C$  et par suite  $U$  et  $E_x$  augmentent.

$E_x$  devient maxima lorsque la corde  $BO$  passe par le centre du cercle. On a alors  $E_x = \frac{V}{\sin \xi}$ .

$C$  continuant à diminuer, la tension  $U$  devient à son tour maxima, ce qui arrive quand  $CB$  est un diamètre. On a alors  $U = \frac{V}{\sin \xi}$ . Ce maximum de  $U$  est d'autant plus grand que l'angle  $\xi$  est plus faible.

La capacité  $C$  qui rend la tension  $U$  maxima est donnée par la condition

$$\frac{BO}{BC} = CX_{\omega}^2 = \cos \xi$$

Pour éviter l'établissement, entre les conducteurs extérieurs de tronçons de câbles concentriques et leurs armures, de tensions qui peuvent, suivant les valeurs de  $C$  et de  $\xi$ , être bien supérieures à  $V$ , on aura donc soin de ne jamais exposer la jonction entre les conducteurs extérieurs de deux tronçons consécutifs à être rompue avant celle des conducteurs intérieurs.

Les interrupteurs devront, à cet effet, être disposés de façon que la fermeture se fasse en premier lieu pour les conducteurs extérieurs et l'ouverture en premier

lieu pour les conducteurs intérieurs. On évitera aussi de mettre des plombs fusibles sur le conducteur extérieur, car leur fusion pourrait donner lieu à l'accident qui vient d'être indiqué.



## QUARANTE-TROISIÈME LEÇON



# ALTERNO - ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*\*\*\*

## FORCES ÉLECTROMOTRICES POLYPHASÉES



### I

#### **Systèmes de forces électromotrices polyphasées**

Dans l'industrie électrique actuelle, les forces électromotrices alternatives sont le plus souvent employées par groupes, formés de forces électromotrices de même amplitude, de même période mais de phases différentes, et constituant ce qu'on appelle des **systèmes polyphasés**.

Les décalages mutuels des forces électromotrices d'un même groupe ne sont d'ailleurs pas pris au hasard. Ils sont choisis égaux entre eux et à une partie aliquote de période dont l'ordre est égal au nombre des forces électromotrices du groupe.

Par exemple, si celles-ci sont au nombre de deux, le décalage de la seconde par rapport à la première est égal à  $\frac{1}{2}$  période ; si elles sont au nombre de trois, le décalage de la seconde par

rapport à la première, de même que celui de la troisième par rapport à la seconde, est égal à  $\frac{1}{3}$  de période, et ainsi de suite.



Soit, en général,  $m$  le nombre des forces électromotrices d'un groupe constitué suivant cette règle. Si l'expression de la première est

$$e_1 = E_{\max} \sin \omega t,$$

celle de la seconde sera :

$$e_2 = E_{\max} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{m} \right),$$

celle de la troisième :

$$e_3 = E_{\max} \sin \left( \omega t - 2 \frac{2\pi}{m} \right)$$

et ainsi de suite; enfin celle de la  $m^e$  sera :

$$e_m = E_{\max} \sin \left( \omega t - (m - 1) \frac{2\pi}{m} \right)$$

Les vecteurs représentatifs de telles forces électromotrices sont égaux entre eux et répartis autour de leur origine commune de façon à former une étoile régulière à  $m$  branches, puisque chacun doit faire avec le suivant un angle égal à  $\frac{2\pi}{m}$ , c'est-à-dire à  $\frac{1}{m^c}$  de tour.

Leur valeur commune représente, suivant l'échelle adoptée,  $E_{\max}$  ou  $E_{\text{off}}$ .

De tels systèmes sont dits : **polyphasés réguliers**.



Les cas particuliers les plus simples sont d'ailleurs les plus usités. Ils correspondent à  $m = 2$  (*fig.* 366), à

$m = 3$  (fig. 367) à  $m = 4$  (fig. 368) et sont désignés respectivement sous les noms de **système biphasé** ( $m=2$ ), **système triphasé** ( $m = 3$ ), **système tétraphasé** ( $m = 4$ ).

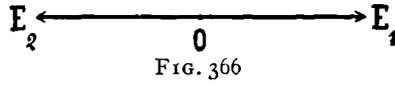


FIG. 366

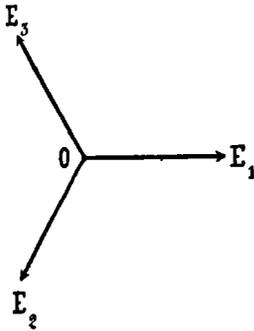


FIG. 367

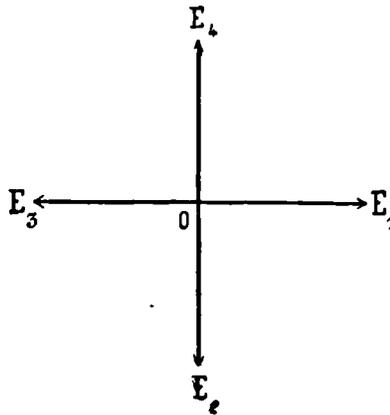


FIG. 368

On emploie aussi, sous le nom de **systèmes diphasés** des groupes non symétriques composés de deux forces électromotrices, de même période, décalées l'une sur l'autre de  $\frac{1}{4}$  de période :

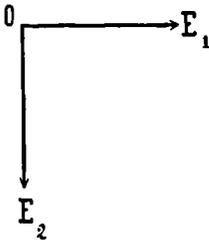


FIG. 369

$$e_1 = E_{\max} \sin \omega t$$

$$e_2 = E_{\max} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = - E_{\max} \cos \omega t$$

et correspondant, par suite, au diagramme de la fig. 369.



*La somme algébrique :*

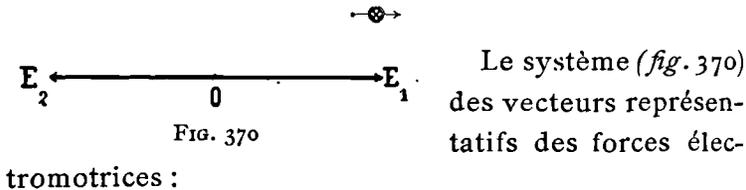
$$e_1 + e_2 + \dots + e_m$$

*ou, plus explicitement :*

$$\begin{aligned} E_{\max} \sin(\omega t) + E_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{m}\right) + \dots \\ + E_{\max} \sin\left(\omega t - (m-1) \frac{2\pi}{m}\right) \end{aligned}$$

*des valeurs instantanées des forces électromotrices d'un groupe sinusoïdal polyphasé symétrique est nulle, à chaque instant.*

En effet, cette somme est égale à la projection, sur une droite passant par l'origine, de la résultante des vecteurs représentatifs de ces forces électromotrices. Or, d'après l'égalité et la répartition symétrique de ces vecteurs, cette résultante est nulle; il en est de même, par conséquent, à chaque instant de sa projection.



tromotrices :

$$e_1 = E_{\max} \sin \omega t$$

$$e_2 = E_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{2}\right)$$

d'un groupe sinusoïdal *biphase symétrique* présente les particularités suivantes :

1. *Les deux vecteurs sont égaux et opposés (1). Leur résultante est nulle.*

1. Par conséquent, l'expression imaginaire du second s'obtiendra en multipliant celle du premier par  $-1$  :

$$E_2 = -E_1$$

2. Les segments ( $\overline{E_1E_2}$  et  $\overline{E_2E_1}$ ) joignant leurs extrémités sont superposés et égaux en longueur, celle-ci étant le double de la longueur ( $E$ ) de chacun des vecteurs.

3. La différence géométrique des vecteurs est en phase avec l'un d'eux, et égale à son double.

Ainsi on a (fig. 371):

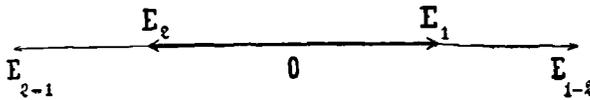


FIG. 371

$$\overline{OE_1} - \overline{OE_2} = \overline{OE_1} + (-\overline{OE_2}) = \overline{OE_{(1-2)}} = \overline{E_2E_1} = 2\overline{OE_1}$$

et

$$\overline{OE_2} - \overline{OE_1} = \overline{OE_2} + (-\overline{OE_1}) = \overline{OE_{(2-1)}} = \overline{E_1E_2} = 2\overline{OE_2}$$



Le système (fig. 372) des vecteurs représentatifs des forces électromotrices :

$$e_1 = E_{\max} \sin \omega t$$

$$e_2 = E_{\max} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$e_3 = E_{\max} \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

d'un groupe sinusoïdal triphasé symétrique présente les particularités suivantes:

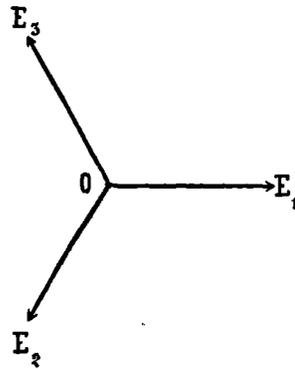


FIG. 372

1. Les trois vecteurs sont égaux et font entre eux des angles de  $120^\circ$  (1).

2. Chacun des vecteurs est opposé à la bissectrice de l'angle des deux autres; en d'autres termes, l'opposé de chacun d'eux fait avec les deux autres des angles égaux à  $60^\circ$ .

3. Chacun d'eux est égal et opposé à la résultante des deux autres.

Ainsi on a (fig. 373):

$$\overline{OE}_1 = -\overline{OE}_{(2+3)} = -(\overline{OE}_2 + \overline{OE}_3)$$

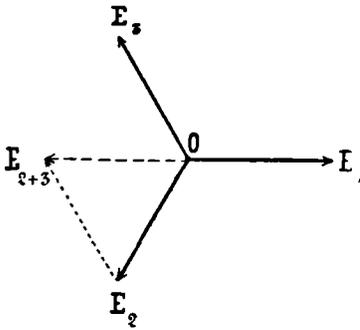


FIG. 373

4. La résultante de deux des vecteurs leur est égale en grandeur et est décalée par rapport à eux de  $60^\circ$ , (en retard sur le premier et en avance sur le second).

Telle est, par exemple,  $\overline{OE}_{(2+3)}$  par rapport à  $\overline{OE}_2$  et à  $\overline{OE}_3$  (fig. 373).

1. Par conséquent, l'expression imaginaire du second s'obtiendra en multipliant celle du premier par  $[\cos(-120^\circ) + j \sin(-120^\circ)] = \left[-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$ ; et celle du troisième en multipliant celle du second par le même facteur, ce qui revient à multiplier celle du premier par le carré de ce facteur. Ce carré étant égal à  $\frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}$  on aura ainsi:

$$\dot{E}_2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} \dot{E}_1$$

$$\dot{E}_3 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \dot{E}_1$$

5. La différence géométrique de deux des vecteurs est perpendiculaire sur le troisième, avec décalage en arrière, et sa longueur est égale au produit de celle  $E$  d'un des vecteurs par le facteur  $\sqrt{3}$ .

Cette différence est décalée en avant par rapport aux deux vecteurs d'où elle provient, savoir de  $30^\circ$  sur l'un et de  $150^\circ$  sur l'autre.

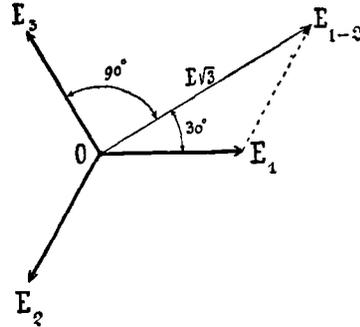


FIG. 374

Ainsi on a (fig. 374) :

$$\overline{OE}_{(1-2)} = \overline{OE}_1 - \overline{OE}_2 = \overline{OE}_1 + (-\overline{OE}_2) = E\sqrt{3}$$

et

$$\widehat{E_{(1-2)} OE_3} = 90^\circ$$

$$\widehat{E_1 OE_{(1-2)}} = 30^\circ$$

$$\widehat{E_2 OE_{(1-2)}} = 120^\circ + 30^\circ = 150^\circ$$

Le décalage de  $\overline{OE}_{(1-2)}$  par rapport à l'opposé ( $-\overline{OE}_2$ ) de  $\overline{OE}_2$  est arrière et égal au décalage avant ( $30^\circ$ ) de  $\overline{OE}_{(1-2)}$  par rapport à  $\overline{OE}_1$ .

6. Les segments  $\overline{E_1E_2}$ ,  $\overline{E_2E_3}$ ,  $\overline{E_3E_1}$ , joignant les extrémités des trois vecteurs pris deux à deux sont respectivement égaux et parallèles aux différences géométriques  $\overline{OE}_2 - \overline{OE}_1$ ,  $\overline{OE}_3 - \overline{OE}_2$ ,  $\overline{OE}_1 - \overline{OE}_3$ .

Ils forment un triangle équilatéral de côté  $E\sqrt{3}$ .



Le système (fig. 375) des vecteurs représentatifs des forces électromotrices

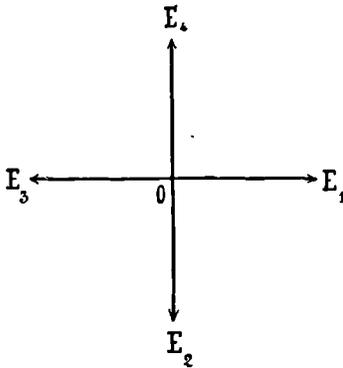


FIG. 375

$$e_1 = E_{\max} \sin(\omega t)$$

$$e_2 = E_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$e_3 = E_{\max} \sin\left(\omega t - 2 \cdot \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$e_4 = E_{\max} \sin\left(\omega t - 3 \cdot \frac{2\pi}{4}\right)$$

d'un groupe sinusoïdal *tétraphasé symétrique* présente les particularités suivantes :

1. Les quatre vecteurs sont égaux ; chacun est opposé à celui des trois autres qui présente la même parité ( $\overline{OE_1}$ , à  $\overline{OE_3}$ ,  $\overline{OE_2}$  à  $\overline{OE_4}$ ) et est perpendiculaire aux deux qui présentent une parité différente de la sienne (1).

2. Chacun des vecteurs est égal et opposé à la résultante des trois autres (laquelle se réduit au vecteur de même parité que la sienne).

3. La résultante de deux vecteurs de même parité est nulle.

4. La résultante de deux vecteurs de parités différen-

1. Par conséquent l'expression imaginaire de chacun de ces vecteurs s'obtiendra en multipliant celle du précédent par  $-j$ . Par suite, on aura :

$$\dot{E}_2 = -j \dot{E}_1$$

$$\dot{E}_3 = -\dot{E}_1$$

$$\dot{E}_4 = +j \dot{E}_1$$

tes est dirigée suivant leur bissectrice et vaut  $E^{\text{ma}}\sqrt{2}$ . Elle est décalée de  $45^\circ$  en arrière du premier est en avant du second.

Ainsi on a (fig. 376):

$$\overline{OE}_{(1+2)} = \overline{OE}_1 + \overline{OE}_2 = E\sqrt{2}$$

$$\text{et } \widehat{E}_{(1+2)}\overline{OE}_1 = \widehat{E}_2\overline{OE}_{(1+2)} = 45^\circ$$

5. La résultante de deux vecteurs de parités différentes est égale et opposée à celle des deux autres.

Ainsi:

$$\overline{OE}_1 + \overline{OE}_2 = -(\overline{OE}_3 + \overline{OE}_4)$$

6. La différence géométrique de deux vecteurs de même parité concorde en grandeur et en phase avec le double du premier.

Ainsi:

$$\overline{OE}_1 - \overline{OE}_3 = 2\overline{OE}_1$$

7. La différence géométrique de deux vecteurs de parités différentes est égale en grandeur à leur somme ( $E\sqrt{2}$ ) et en avance sur elle d'un angle droit.

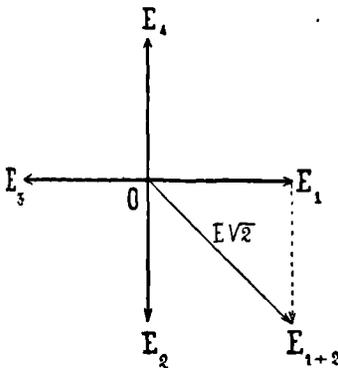


FIG. 376

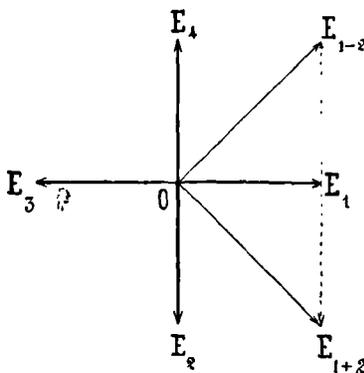


FIG. 377

Ainsi on a (*fig. 377*) :

$$\overline{OE}_{(1-2)} = \overline{OE}_1 - \overline{OE}_2 = E\sqrt{2}$$

et

$$\widehat{E}_1 OE_{(1-2)} = \widehat{E}_{(1+2)} OE_1 = 45^\circ$$

d'où

$$\widehat{E}_{(1+2)} OE_{(1-2)} = 90^\circ$$

·⊗→

*Les vecteurs représentatifs des forces électromotrices :*

$$e_1 = E_{\max} \sin \omega t$$

$$e_2 = E_{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

*d'un groupe sinusoïdal diphasé sont entre eux comme deux vecteurs de parités différentes d'un système tétraphasé.*



## II

### Associations de forces électromotrices polyphasées symétriques.

Les enroulements formant les diverses sections ou *phases* d'un appareil générateur de forces électromotrices polyphasées symétriques ne sont point laissés complètement indépendants. On établit, au contraire, entre eux des connexions qui en font des systèmes *liés* et qui réalisent certains assemblages des forces électromotrices correspondantes.

Pour concevoir clairement ces assemblages, il faut avoir égard à ce qu'on peut appeler les *extrémités homologues* des diverses phases ou sections de l'appareil.

Supposons d'abord ces sections pourvues de numéros d'ordre: **1, 2, 3, ...m..** Toute section passe, à tour de rôle, par la même série d'états que la première, avec un retard de phase dépendant de son numéro d'ordre, exactement comme chacune des parties d'un d'un chœur exécutant un canon à **m** voix chante le même air, mais avec un retard dépendant de sa place dans l'ensemble.

Si, à un instant **t**, la force électromotrice engendrée dans la section (**1**) a la valeur **e** et est dirigée, par exemple, de l'extrémité **O** à l'extrémité **A** de l'enroulement correspondant (**1**), cette même force électromotrice se retrouvera, après  $\frac{p-1}{m}$  de période, dans la section (**p**), et si la flèche qui, sur cette dernière, en représente le sens, est dirigée de l'extrémité **P** à l'extrémité **Q**, l'extrémité **P** sera dite l'homologue de **O** et par suite **Q** l'homologue de **A**.

Cette homologie des extrémités peut être assignée d'avance, d'après le sens des enroulements et celui des variations de flux auxquelles sont dues les forces électromotrices considérées.

Supposons donc cette correspondance des extrémités établie pour les diverses sections ou phases de

---

1. Ce sens de **O** vers **A** sera, dans la suite, adopté comme sens positif.

l'appareil, et marquée par des lettres analogues munies d'indices rappelant les numéros d'ordre. Les sections seront alors notées, par exemple :

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{O}}_1 \quad \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{O}_2 \quad \mathbf{A}_2 \\ \dots\dots \\ \mathbf{O}_m \quad \mathbf{A}_m \end{array}$$

les extrémités  $\mathbf{O}$ , d'une part, et les extrémités  $\mathbf{A}$ , d'autre part, étant homologues entre elles.

Cela étant, les appareils polyphasés usuels présentent entre leurs phases deux modes de connexions très simples :

Dans le premier, les diverses sections ont toutes leurs extrémités  $\mathbf{O}$  réunies par un conducteur de résistance négligeable, permettant de considérer toutes ces extrémités comme confondues en un même point, alors que les extrémités  $\mathbf{A}$  sont libres. Les diverses sections sont, dans ce cas, réunies à la façon des divers rayons d'une étoile. Aussi le mode d'assemblage qui en résulte pour les forces électromotrices est-il désigné sous le nom **d'assemblage ou de montage en étoile**.

Le schéma en est donné, dans l'hypothèse d'un système triphasé, par la *fig.* 378.

Dans le second mode d'assemblage, les diverses sections sont associées en série fermée, par connexion conductrice de l'extrémité  $\mathbf{A}$  de chaque phase avec l'extrémité  $\mathbf{O}$  de la suivante. Les diverses sections sont, dans ce cas, liées entre elles à la façon des côtés d'une

ligne polygonale. Aussi le mode d'assemblage qui en résulte pour les forces électromotrices est-il désigné sous le nom d'**assemblage** ou de **montage en polygone**.

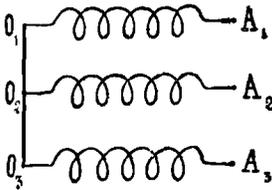
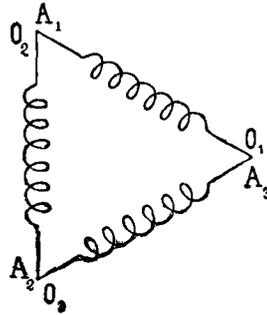
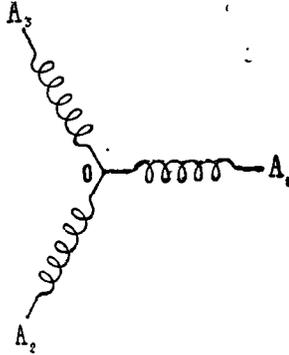


FIG. 378

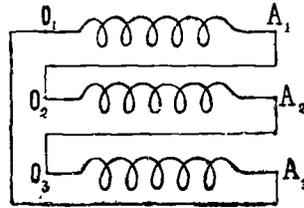


FIG. 379

Dans le cas d'un système triphasé, cet assemblage, qui est dit : **en triangle** (1), est représenté schématiquement par la *fig.* 379.



Un appareil générateur polyphasé est dit en état de fonctionnement **à vide** lorsque ses sections sont douées de leurs forces électromotrices et qu'il n'existe d'ailleurs entre ses bornes aucune connexion conductrice *extérieure*.

Dans un générateur polyphasé monté en polygone

1. La symétrie du langage exigerait le mot : *trigone*, qui n'est pas usité.

et fonctionnant à vide, malgré la constitution, par les sections elles-mêmes d'un circuit fermé, ces sections, si leurs forces électromotrices forment un système polyphasé bien symétrique, ne sont le siège d'aucun courant, car, ainsi qu'on l'a vu plus haut (page 372), la somme algébrique de toutes les forces électromotrices est nulle à chaque instant.

Cette condition est difficile à réaliser rigoureusement en pratique ; aussi préfère-t-on généralement le montage en étoile, pour lequel, dans le fonctionnement à vide, l'absence de tout circuit assure rigoureusement l'absence de tout courant.



Les extrémités libres des sections, dans le cas du montage en étoile, ou les points de jonction des extrémités deux à deux, dans le cas du montage en polygone forment ce qu'on appelle les **bornes** de l'appareil polyphasé considéré.

Ces bornes sont au nombre de deux dans le cas des appareils biphasés, de trois dans le cas des appareils triphasés, et de quatre dans le cas des appareils tétraphasés.

Dans les appareils diphasés, les extrémités  $O_1, A_1, O_2, A_2$ , des deux sections sont libres et constituent, par conséquent, quatre bornes.

Dans les appareils montés en polygone, on pourra désigner une borne soit par le nom de l'extrémité **A**, soit par celui de l'extrémité **O** qui s'y trouvent réunies (1).




---

1. Nous adopterons la lettre **A**.

Entre les bornes d'un générateur polyphasé fonctionnant à vide existent des différences de potentiel en relations très simples avec les forces électromotrices.

**A. Différences de potentiel, à vide, aux bornes d'un appareil polyphasé monté en étoile.**

Soient  $A_k$  et  $A_l$  (fig. 380), deux bornes d'un appareil polyphasé monté en étoile, et  $e_k$ ,  $e_l$  les expressions (sinusoïdales) des forces électromotrices dont sont douées les sections correspondantes. En adoptant, pour ces forces électromotrices, comme sens positif, celui, indiqué plus haut, de  $O$  vers  $A$ , et désignant par  $V_k$ ,  $V_l$ ,  $V_o$ , les potentiels en  $A_k$ ,  $A_l$  et  $O$ , on a, à chaque instant :

$$V_k - V_o = (e_k)$$

$$V_l - V_o = (e_l)$$

et par suite :

$$V_k - V_l = [e_k - e_l]$$

Cette relation indique qu'entre  $A_k$  et  $A_l$  existe à vide une différence de potentiel sinusoïdale égale, à chaque instant, à la différence des valeurs algébriques des forces électromotrices  $e_k$  et  $e_l$  et représentée, par conséquent, par le vecteur différence géométrique des vecteurs représentatifs de  $e_k$  et de  $e_l$ , ce que nous écrirons :

$$\bar{V}_{k,l} = \bar{E}_k - \bar{E}_l$$

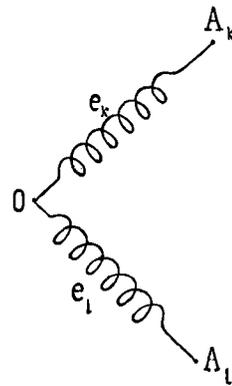


FIG. 380

Dans un appareil biphasé, (fig. 381) on aura donc :

$$\overline{V_1 - V_2} = \overline{V_{(1,2)}} = \overline{E_1 - E_2} = \overline{OV_{(1,2)}} = 2 \overline{OE_1}$$

$$\overline{V_2 - V_1} = \overline{V_{(2,1)}} = \overline{E_2 - E_1} = \overline{OV_{(2,1)}} = 2 \overline{OE_2}$$

La différence de potentiel aux bornes d'un appareil diphasé monté en étoile est donc en phase avec l'une des forces électromotrices et a une valeur efficace de valeur double.

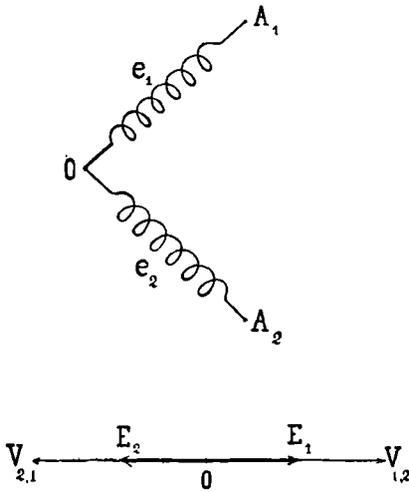


FIG. 381

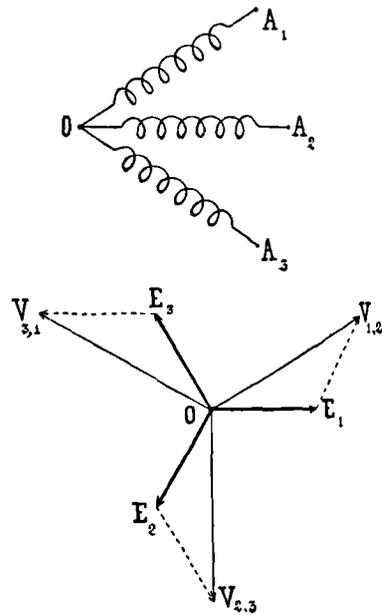


FIG. 382

Les effets d'un tel appareil seront donc les mêmes, à la grandeur près, que ceux d'un appareil monophasé.



Dans un appareil triphasé (fig. 382) on aura :

$$\overline{V_1 - V_2} = \overline{V_{(1,2)}} = \overline{E_1 - E_2} = \overline{OV_{(1,2)}}$$

$$\overline{V_2 - V_3} = \overline{V_{(2,3)}} = \overline{E_2 - E_3} = \overline{OV_{(2,3)}}$$

$$\overline{V_3 - V_1} = \overline{V_{(3,1)}} = \overline{E_3 - E_1} = \overline{OV_{(3,1)}}$$

Les trois différences de potentiel  $V_{(1,2)}$ ,  $V_{(2,3)}$ ,  $V_{(3,1)}$ , aux bornes d'un appareil triphasé symétrique ont donc même amplitude :  $E\sqrt{3}$  et sont respectivement en avance de  $30^\circ$  sur les trois forces électromotrices  $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$ ,  $\bar{E}_3$ . La somme de leurs valeurs instantanées est nulle. Bref, elles forment un système triphasé régulier.

Les différences contraires :  $V_{(2,1)}$ ,  $V_{(3,2)}$ ,  $V_{(1,3)}$ , forment également un système triphasé régulier, dont les vecteurs, égaux à  $E\sqrt{3}$  comme les précédents, leur sont respectivement opposés (fig. 383) et présentent par conséquent un décalage de  $30^\circ$  en arrière respectivement de  $\bar{E}_2$ ,  $\bar{E}_3$ ,  $\bar{E}_1$ .

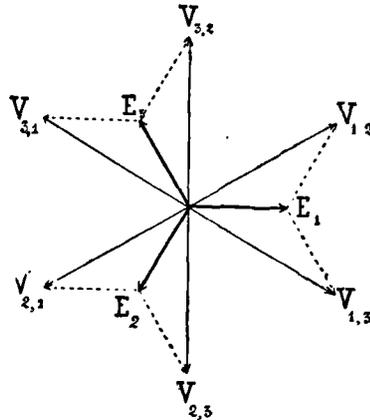


FIG. 383

D'après ces relations, il est visible que l'on a

$$\bar{V}_{(1,2)} - \bar{V}_{(3,1)} = \bar{V}_{(1,2)} + \bar{V}_{(1,3)} = 3 \bar{E}_1$$

$$\bar{V}_{(2,3)} - \bar{V}_{(1,2)} = \bar{V}_{(2,3)} + \bar{V}_{(2,1)} = 3 \bar{E}_2$$

$$\bar{V}_{(3,1)} - \bar{V}_{(2,3)} = \bar{V}_{(3,1)} + \bar{V}_{(3,2)} = 3 \bar{E}_3$$



Un simple coup d'œil jeté sur la fig. 384, montre que les différences  $V_{(1,2)}$ ,  $V_{(2,3)}$ ,  $V_{(3,4)}$ ,  $V_{(4,1)}$ , présentées, entre bornes de parités différentes, par un appareil tétraphasé monté en étoile, forment un système tétra-

phasé régulier représenté par les vecteurs  $\overline{OV}_{(1,2)}$ ,  $\overline{OV}_{(2,3)}$ ,  $\overline{OV}_{(3,4)}$ ,  $\overline{OV}_{(4,1)}$ , tous égaux à  $E\sqrt{2}$  et respectivement en avance de  $45^\circ$  sur  $\overline{E}_1$ ,  $\overline{E}_2$ ,  $\overline{E}_3$ ,  $\overline{E}_4$ .

Quant aux différences de potentiel  $V_{(1,3)}$  et  $V_{(2,4)}$  entre bornes de même parité, elles forment un système diphasé représenté par les vecteurs  $\overline{OV}_{(1,3)}$  et  $\overline{OV}_{(2,4)}$  respectivement égaux en grandeur et en phase à  $2\overline{E}_1$  et à  $2\overline{E}_2$ .

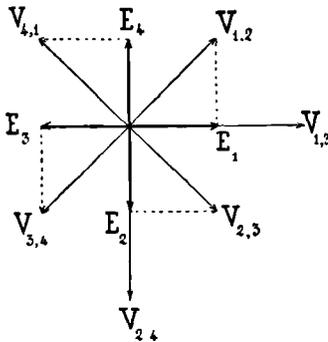


FIG. 384

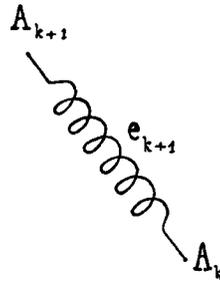


FIG. 385

### B. Différences de potentiel, à vide, aux bornes d'un appareil polyphasé régulier monté en polygone.

Soient  $A_k$  et  $A_{k+1}$  (*fig.* 385), deux bornes consécutives d'un appareil polyphasé monté en polygone. La section comprise entre elles est celle d'ordre  $k+1$ , dont la force électromotrice (comptée positivement dans le sens  $O_{k+1}$  à  $A_{k+1}$  et par suite de  $A_k$  à  $A_{k+1}$ ) est  $e_{k+1}$ . On a donc, à chaque instant, en appelant  $V_{k+1}$  et  $V_k$  les potentiels à ces deux bornes, et en

observant que, l'appareil étant supposé régulier, la section considérée n'est le siège d'aucun courant :

$$V_{k+1} - V_k = e_{k+1}$$

Cette relation indique qu'entre  $A_{k+1}$  et  $A_k$  existe une différence de potentiel sinusoïdale égale, à chaque instant, à la force électromotrice dont est douée la section correspondante. Cette force électromotrice est représentée par le vecteur  $\overline{E}_{k+1}$  lui-même.

*Donc, les différences de potentiel, à vide, aux bornes consécutives d'un appareil polyphasé symétrique monté en polygone forment un système polyphasé identique à celui des forces électromotrices.*

Dans les appareils triphasés, deux bornes quelconques sont consécutives. La proposition, pour eux, se formulera donc en disant :

*Les différences de potentiel, à vide, entre les bornes d'un appareil triphasé monté en triangle forment un système triphasé identique à celui des forces électromotrices des trois sections.*



Dans les appareils tétraphasés, il y a deux groupes de bornes non consécutives, ce sont ceux des bornes de même parité, savoir :  $A_3, A_1$  et  $A_4, A_2$ . On a, pour ce cas :

$$\overline{V_3 - V_1} = \overline{E_3} + \overline{E_2} = -(\overline{E_4} + \overline{E_1})$$

et

$$\overline{V_4 - V_2} = \overline{E_4} + \overline{E_3} = -(\overline{E_1} + \overline{E_2})$$

Ces deux différences sont représentées (*fig.* 386),

par les vecteurs  $\overline{OV}_{(3,1)}$  et  $\overline{OV}_{(4,2)}$  égaux à  $E\sqrt{2}$ , en avance de  $45^\circ$  respectivement sur  $\overline{E}_3$  et  $\overline{E}_4$ , rectangu-

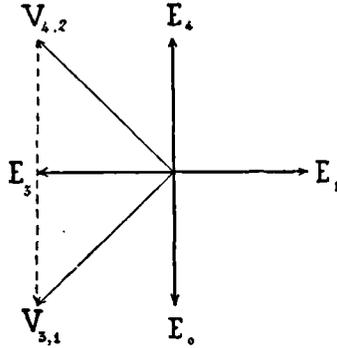


FIG. 386

lares entre eux, formant par conséquent un système diphasé.



## QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*\*\*\*

## COURANTS POLYPHASÉS



### I

#### **Production de courants polyphasés.**

Nous avons vu (page 382), que lorsqu'un appareil générateur à forces électromotrices sinusoïdales polyphasées symétriques fonctionne à vide, c'est-à-dire avec bornes non réunies entre elles par des conducteurs extérieurs, il n'est le siège d'aucun courant.

Il n'en est plus de même lorsqu'on vient à établir entre les bornes des liaisons conductrices extérieures. Ces liaisons, d'une part, les sections de l'appareil, d'autre part, sont alors le siège de courants alternatifs présentant entre eux des différences de phases et qu'on désigne, naturellement, sous le nom de **courants polyphasés**.

Si les liaisons conductrices entre les bornes sont formées par des portions de circuits identiques entre elles en résistance et en réactance, et connectées entre elles d'une manière symétrique, en étoile ou en polygone, à

la façon des sections d'un générateur polyphasé, elles constituent ce qu'on appelle un **système de circuits récepteurs polyphasés**.

Les récepteurs polyphasés n'ont que très rarement leurs bornes confondues avec celles des générateurs appelés à les actionner. La distance entre les deux sortes d'appareils est toujours plus ou moins grande et oblige à relier les uns aux autres, de bornes à bornes, par des fils conducteurs constituant ce qu'on appelle une **ligne polyphasée**.

L'ensemble que forment un générateur et un récepteur polyphasés reliés par une ligne constitue, dans son type le plus simple, une **installation polyphasée**.

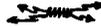
Dans une telle installation, il y a trois groupes de courants à considérer, savoir :

- 1° Les courants relatifs aux diverses sections ou phases du générateur ;
- 2° Les courants relatifs aux divers fils de ligne ;
- 3° Les courants relatifs aux diverses sections du récepteur.

Si l'installation est symétrique dans toutes ses parties, c'est-à-dire si les sections du générateur sont identiques entre elles, si les fils de la ligne sont identiques entre eux et symétriquement placés les uns par rapport aux autres, et enfin si les sections du récepteur sont identiques entre elles et montées en étoile ou en polygone, chacun des groupes de courants ci-dessus énumérés forme un **système de courants polyphasés symétrique ou régulier**.

Dans l'étude que nous allons faire de ces courants,

nous désignerons ceux des diverses sections du générateur par  $J_1, J_2, \dots, J_m$ , ceux des fils de ligne par  $I_1, I_2, \dots, I_m$ , et enfin ceux des diverses sections du récepteur par  $i_1, i_2, \dots, i_m$ .



II

**Systèmes réguliers usuels de courants polyphasés sinusoïdaux.**

**A. — Systèmes biphasés**

Une installation biphasée comprend (*fig. 387*) deux fils de ligne  $A_1 a_1, A_2 a_2$  réunissant respectivement les deux bornes  $A_1, A_2$ , d'un générateur  $\mathcal{G}$  biphasé  $\mathcal{G}$  aux deux bornes  $a_1 a_2$  d'un récepteur  $\mathcal{R}$ .

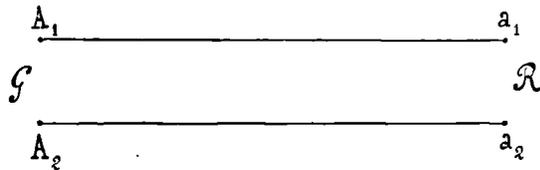


FIG. 387

En raison des deux montages possibles (étoile ou faisceau (1), tant du générateur que du récepteur, on peut avoir les quatre variantes suivantes :

- Etoile..... Etoile
- Etoile..... Faisceau
- Faisceau.... Etoile
- Faisceau.... Faisceau

1. C'est, en effet, un faisceau que donne l'assemblage polygonal particulier (à 2 côtés) auquel conduit la réunion de  $A_1$  avec  $O_2$  et de  $A_2$  avec  $O_1$ .

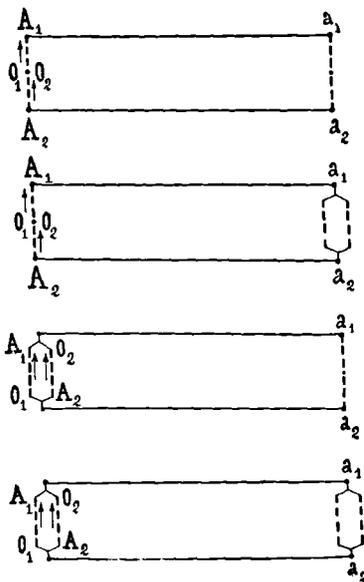


FIG. 388

représentées par les schémas de la fig. 388.

Ces quatre dispositions sont identiques, au fond, à des installations monophasées. La seule différence qu'on peut remarquer entre elles est purement quantitative et consiste dans la valeur de la force électromotrice dont dispose la station génératrice. Cette force électromotrice, dans le montage du générateur en étoile, résulte de la

mise en série de deux forces électromotrices monophasées synchrones et, dans le montage en faisceau, de leur mise en parallèle, en raison de ce fait que, lorsque la force électromotrice de la première phase est dirigée de  $O_1$  vers  $A_1$ , celle de la seconde est dirigée de  $A_2$  vers  $O_2$ , puisque le décalage entre elles est d'une demi-période.

**B. — Systèmes triphasés**

Une installation triphasée symétrique comprend (fig.

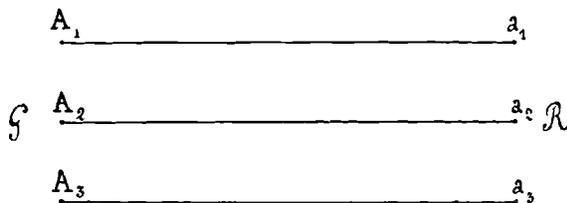


FIG. 389

389) *trois* fils de ligne  $A_1 a_1, A_2 a_2, A_3 a_3$  réunissant respectivement les trois bornes  $A_1, A_2, A_3$  d'un générateur triphasé  $\mathcal{G}$  avec les trois bornes  $a_1, a_2, a_3$  d'un récepteur triphasé  $\mathcal{R}$ , ou à un groupe de trois récepteurs monophasés identiques.

En raison des deux montages possibles (étoile ou triangle) tant du générateur que du récepteur, on peut avoir les quatre variantes suivantes :

Etoile.... Etoile  
 Etoile.... Triangle  
 Triangle.. Etoile  
 Triangle.. Triangle  
 représentées par les schémas (I), (II), (III), (IV), de la fig. 390.

Ces quatre dispositions sont nettement différentes de celles que présentent les systèmes monophasés ou biphasés. Elles sont caractéristiques des systèmes triphasés et méritent une étude spéciale, d'autant plus qu'elles constituent

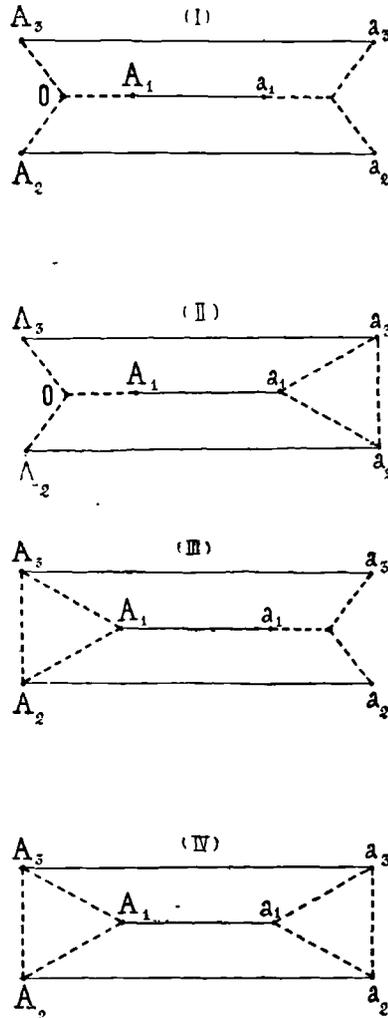


FIG. 390

l'espèce d'installation polyphasée la plus généralement usitée.



Nous envisagerons d'abord les courants de la ligne, sans nous préoccuper du mode de montage des sections du générateur et du récepteur. Nous verrons ensuite comment, suivant le mode de montage, les courants de ces sections sont liés à ceux de la ligne.

Par raison de symétrie, les trois courants de ligne :  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  forment un système triphasé symétrique et ont, par conséquent, comme vecteurs représentatifs (fig. 391) trois vecteurs égaux,  $\overline{OI_1}$ ,  $\overline{OI_2}$ ,  $\overline{OI_3}$ , faisant

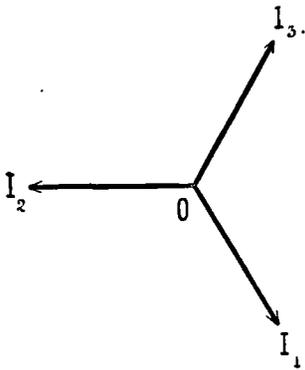


FIG. 391

entre eux des angles de  $120^\circ$ , et jouissant de propriétés identiques à celles énumérées ci-dessus (page 374) pour les trois vecteurs représentatifs d'un système régulier de forces électromotrices triphasées.

Cela étant, on a constamment, entre les valeurs algébriques instantanées  $I_1$ ,  $I_2$ ,

$I_3$  de ces courants, la relation :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

en comptant positivement les intensités des courants sortant de la station génératrice et négativement celles des courants entrants.

Puisqu'il n'y a que trois courants, si, à un moment

donné, deux d'entre eux sont sortants, le troisième est nécessairement entrant ou inversement. On peut donc traduire la relation précédente en disant qu'à chaque instant un des fils porte un courant égal et contraire à la somme des deux autres et joue, par conséquent, relativement à ces derniers, le rôle de fil de retour commun.

Les sommes algébriques de ces courants pris deux à deux, savoir :  $(I_1 + I_2)$ ,  $(I_2 + I_3)$  et  $(I_3 + I_1)$  équivalent (fig. 392) à un système de courants polyphasés qui serait représenté par des vecteurs égaux à  $I$  et respectivement opposés à  $\bar{I}_3$ ,  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ .

En effet, ces sommes valent respectivement  $-\bar{I}_3$ ,  $-\bar{I}_1$  et  $-\bar{I}_2$ .

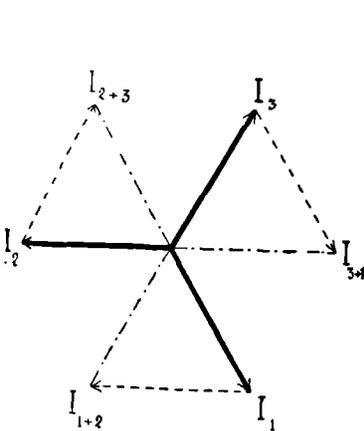


FIG. 392.

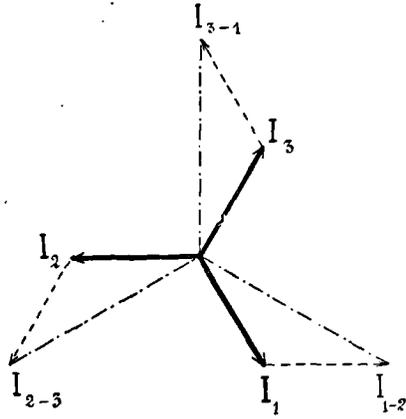


FIG. 393.

Les différences algébriques de ces courants pris deux à deux, savoir :  $(I_1 - I_2)$ ,  $(I_2 - I_3)$ ,  $(I_3 - I_1)$  équivalent (fig. 393) à un système de courants polyphasés dont les vecteurs représentatifs, égaux à  $I\sqrt{3}$ , seraient en avance de  $30^\circ$  respectivement sur  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .



Lorsque le générateur ou le récepteur sont montés en étoile, ce qui, au moins pour le générateur, est le cas le plus usuel, les courants dans ses sections sont respectivement les mêmes que dans les fils de ligne correspondants (*fig. 394*) ; leur étude se trouve, par conséquent, faite en même temps que celle de ces derniers.



Lorsque le générateur ou le récepteur sont montés en triangle (*fig. 395*), les courants dans ses sections for-

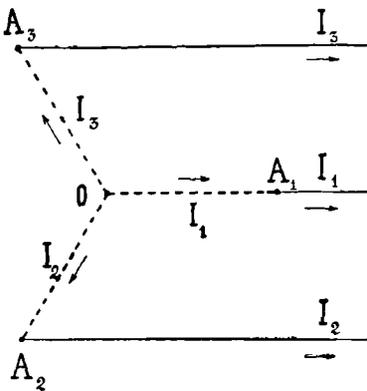


FIG. 394

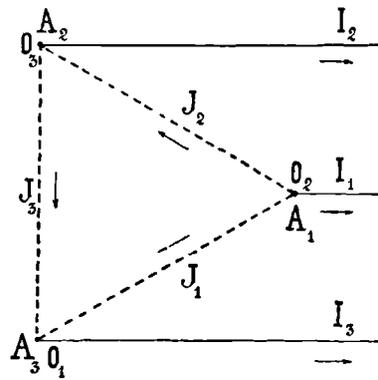


FIG. 395

ment un système triphasé différent de celui des courants de ligne.

Considérons, par exemple, le cas d'un générateur. Supposons toujours (ce que représentent les flèches de la figure) les courants de ligne pris positivement dans le sens s'éloignant des bornes et les courants de sections pris positivement dans le sens  $O_k A_k$ . Nous aurons alors, entre les valeurs algébriques de ces courants, à

chaque instant, en appliquant à chaque borne la première formule de Kirchoff (1).

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 - \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 - \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 - \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_1 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_3 \\ \mathbf{I}_3 &= \mathbf{J}_3 - \mathbf{J}_1 \end{aligned}$$

En retranchant la troisième égalité de la première on obtient :

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3 = 2\mathbf{J}_1 - (\mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3)$$

et, de même, en permutant les indices :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 &= 2\mathbf{J}_2 - (\mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_1) \\ \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2 &= 2\mathbf{J}_3 - (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2) \end{aligned}$$

D'autre part, appliquée au triangle, la seconde formule de Kirchoff (2) donne, en appelant  $\mathbf{Z}$  l'impédance imaginaire de chaque côté :

$$\mathbf{0} = \mathbf{Z} \sum \mathbf{J} - \sum \mathbf{e}$$

d'où  $\sum \mathbf{J} = \mathbf{0}$ , car  $\sum \mathbf{e} = \mathbf{0}$ .

On a donc :

$$\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 = \mathbf{0}$$

Remplaçant, en vertu de cette relation,  $\mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3$  par  $-\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_1$  par  $-\mathbf{J}_2$  et  $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_3$  par  $-\mathbf{J}_3$  dans les relations précédentes, on obtient :

1.  $\sum \mathbf{I} = \mathbf{0}$

2.  $\mathbf{0} = \sum \mathbf{R}(\mathbf{I}) - \sum (\mathbf{E})$ .

$$I_1 - I_3 = 3J_1$$

$$I_2 - I_1 = 3J_2$$

$$I_3 - I_2 = 3J_3$$

d'où enfin

$$J_1 = \frac{1}{3} (I_1 - I_3)$$

$$J_2 = \frac{1}{3} (I_2 - I_1)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} (I_3 - I_2)$$

Par conséquent: *la valeur à chaque instant du courant dans une section*

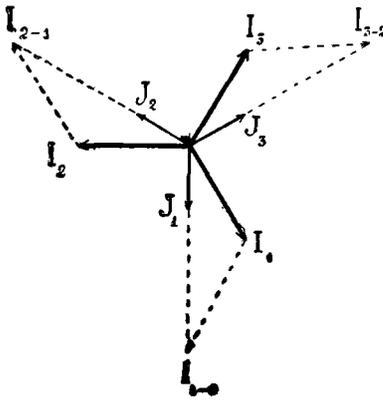


FIG. 396

*est égale au tiers de la différence des valeurs algébriques des courants dans les fils de ligne qui partent de ses extrémités A et O.*

Les vecteurs représentatifs des courants  $J_1, J_2, J_3$ , sont placés par rapport à ceux des courants de ligne  $I_1, I_2, I_3$  comme l'indique la fig. 396.

Ils ont comme longueur commune  $\frac{1}{3} I \sqrt{3} =$

$\frac{I}{\sqrt{3}}$  et sont décalés de  $30^\circ$  en arrière respectivement de  $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ .

Réciproquement les courants de ligne ont une valeur efficace égale au produit de la valeur efficace  $J$  des courants de sections par le facteur :  $\sqrt{3}$ .

$$I = J\sqrt{3}$$

et sont en avance sur eux de  $30^\circ$  ou  $\frac{1}{12}$  de tour.

Les mêmes remarques s'appliquent aux courants intérieurs d'un récepteur (toujours dans l'hypothèse d'une constitution symétrique parfaite).



Les installations tétraphasées n'étant pas usitées, nous laissons au lecteur, à titre de simple exercice, d'ailleurs facile, le soin de leur étendre les considérations précédentes.



### III

#### Systemes diphasés

Après avoir eu un instant de faveur, dans la période d'essai des courants polyphasés, les installations diphasées sont maintenant de plus en plus considérées comme des formes de transition appelées à disparaître, au profit des installations triphasées qui n'ont, par rapport à elles, que des avantages. Il n'est pas inutile, toutefois, ne fut-ce que pour bien faire ressortir la supériorité des systèmes triphasés, de jeter un coup d'œil sur les principales particularités des systèmes diphasés, ce qui constitue d'ailleurs un exercice très

propre à familiariser l'esprit avec l'application des principes généraux, dont on ne saisit bien le sens et la portée que par l'accumulation des exemples particuliers.



### A. Installations diphasées à quatre fils.

Soient  $O_1, A_1$  et  $O_2, A_2$  (*fig. 397*), les bornes des deux sections d'un générateur diphasé. Si on les réunit res-

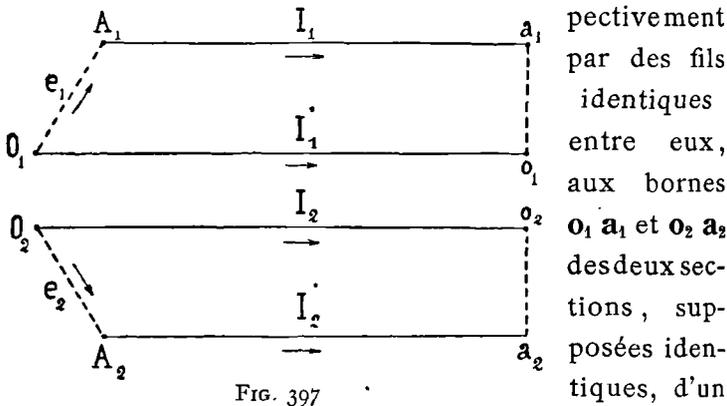


FIG. 397

pectivement par des fils identiques entre eux, aux bornes  $o_1 a_1$  et  $o_2 a_2$  des deux sections, supposées identiques, d'un récepteur diphasé, on obtient, dans la ligne à quatre fils ainsi formée, quatre courants  $I_1, I_1', I_2, I_2'$ , égaux et opposés deux à deux ( $I_1' = -I_1, I_2' = -I_2$ ) comme ceux d'un système tétraphasé, les courants des fils homologues, tels que  $A_1 a_1, A_2 a_2$  présentant une différence de phase d'un quart de période. .

En effet, on a affaire à deux circuits identiques séparés:  $O_1 A_1 a_1 o_1 O_1, O_2 A_2 a_2 o_2 O_2$ , dans lesquels agissent des forces électromotrices identiques  $e_1, e_2$  décalées entre elles d'un quart de période.

Chacun de ces circuits peut être traité comme un circuit à courant alternatif simple isolé, si le circuit con-

jugué a ses fils (2, 2') disposés (fig. 398) en croix par rapport à ceux (1, 1') du premier. Alors, en effet, l'induction mutuelle entre les deux lignes est nulle et l'on a, pour chacune d'elles, la même inductance que si elle était seule (1).

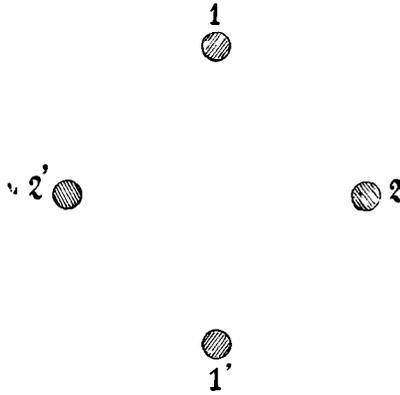


FIG. 398

**B. — Installations diphasées à trois fils**

Si, au lieu d'offrir aux retours des courants  $I_1$  et  $I_2$  deux fils distincts  $O_1 o_1$  et  $O_2 o_2$ , on ne leur en offre qu'un seul (fig. 399), en connectant entre elles, d'une

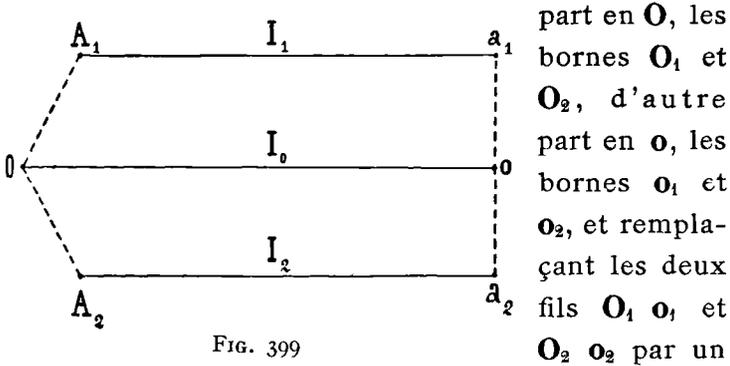


FIG. 399

1. La formule à appliquer à chaque ligne pour avoir son coefficient de self-induction  $L$  est, d'après les indications de la page 172 :

$$L = l \times \frac{1298,3 + 920,8 \log \frac{D}{d}}{10^6} \text{ henrys}$$

- $l$ : longueur en kilomètres.
- $D$ : distance des fils en centimètres.
- $d$ : diamètre d'un fil en millimètres.

seul  $O_0$  de section convenable, on obtient une ligne diphasée à trois fils, capable de donner lieu *approximativement* aux mêmes effets que la ligne à quatre fils, avec un poids de cuivre inférieur.

En effet, la résultante  $I_0$  des courants  $-I_1$  et  $-I_2$ , à laquelle est destiné le troisième fil  $O_0$ , a, si ces courants sont égaux et décalés entre eux d'un quart de période, une intensité efficace qui n'est pas la somme ( $2I$ ) des intensités efficaces de ces courants, mais présente la valeur moindre :  $I\sqrt{2} = 1,414 I$ . Pour assurer aux fils de la ligne à trois fils une même densité de courant efficace  $\delta'$ , il suffira donc qu'on donne au troisième fil une section égale à celle ( $s'_1$ ) de l'un des deux autres multipliée par  $\sqrt{2}$  (1). La section totale de la ligne sera par suite :  $s'_1 + s'_1\sqrt{2} + s'_1 = s'_1(2 + \sqrt{2}) = 3,414 s'_1$ .

Si l'on conserve dans les fils extrêmes la même intensité de courant que dans le premier montage, la perte en ligne par effet joule est, dans ces fils,  $2\rho l\delta'I$  et dans le troisième fil :  $\rho l\delta'I\sqrt{2}$  soit, en tout :  $\rho l\delta'I(2 + \sqrt{2})$ . Pour qu'elle ait une valeur égale à celle  $4\rho l\delta'I$  présentée pour la même valeur de  $I$ , par la ligne à 4 fils, il faut que l'on ait :

$\delta' = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} \delta$  et, par conséquent,  $s'_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} s_1$ . Alors la section totale de cuivre  $S'$  de la ligne à trois fils est à celle  $S$  de la ligne à quatre fils dans le rapport  $\frac{S'}{S} = \frac{(2 + \sqrt{2})s'_1}{4s_1} =$

$\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)^2 = 0,73$  environ. La ligne à trois fils réalise, dans ces conditions, sur la ligne à quatre fils, une économie de cuivre de 27 p. 100 environ.

Si l'on formait la ligne à trois fils simplement en supprimant un des fils ( $O_2 o_2$ ) de la ligne à quatre fils et connectant les bornes  $O_1 O_2, o_1 o_2$  comme précédemment, on ferait une économie de

---

1. La résistance de ce fil est alors la fraction  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  de celle de chacun des deux autres.

cuivre de 25 p. 100 et on aurait, pour la même intensité de courant, la même perte en ligne que dans l'installation à quatre fils.

En effet, cette perte serait pour les deux fils extrêmes :

$$2 \varphi \frac{l}{s} I^2 \text{ et pour le troisième fil : } \varphi \frac{l}{s} (I\sqrt{2})^2, \text{ soit en}$$

tout  $4 \varphi \frac{l}{s} I^2$ , comme pour les quatre fils primitifs. Seulement, alors, la densité du courant dans le troisième fil ne serait pas égale à celle des deux fils extrêmes.



Les trois courants  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_0$  d'une ligne diphasée à trois fils ont à chaque instant, comme l'exprime la première formule de Kirchoff appliquée au point  $\mathbf{O}$ , une somme algébrique nulle, soit

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_0 = \mathbf{0}$$

d'où

$$\mathbf{I}_0 = -(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)$$

et les vecteurs représentatifs de ces courants présentent la relation

$$\bar{\mathbf{I}}_0 = -\bar{\mathbf{I}}_1 - \bar{\mathbf{I}}_2 = -(\bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{I}}_2)$$

*Si les forces électromotrices  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  d'une installation diphasée à trois fils sont en quadrature (c'est-à-dire présentent une différence de phase d'un quart de période), les courants  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  ne le sont pas.*

En effet, l'expression imaginaire de la différence de potentiel  $V_{0,o}$  entre les points  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{o}$  est, en appelant  $\mathbf{Z}$  l'impédance imaginaire de la partie  $\mathbf{O} \mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{o}$  de l'installation (fig. 399) :

$$\mathbf{V}_{(0,o)} = \mathbf{Z} \mathbf{I}_1 - \mathbf{E}_1$$

On a aussi, en envisageant les points  $\mathbf{O}$  et  $\mathbf{o}$  comme les extrémités de la partie  $\mathbf{O} \mathbf{A}_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{o}$  :

$$\dot{V}_{(0,0)} = \dot{Z} \dot{I}_2 - \dot{E}_2$$

Les forces électromotrices étant en quadrature, on a

$$\dot{E}_2 = -j\dot{E}_1$$

Si les courants étaient aussi en quadrature, on aurait  $\dot{I}_2 = -j\dot{I}_1$  et la seconde des expressions précédentes de  $\dot{V}_{(0,0)}$  serait le produit de la première  $-j$ , ce qui ne peut pas être, puisqu'elle doit représenter la même quantité que la première.



*Le vecteur représentatif du courant  $\dot{I}_0$  a, en général, des décalages inégaux par rapport à  $\bar{E}_1$  et  $\bar{E}_2$ , ou, en d'autres termes, le vecteur  $\bar{I}_1 + \bar{I}_2$  a, en général, une direction différente de celle de la bissectrice des vecteurs  $\bar{E}_1$  et  $\bar{E}_2$ .*

En effet, des relations

$$\dot{V}_{(0,0)} = \dot{Z} \dot{I}_1 - \dot{E}_1$$

$$\dot{V}_{(0,0)} = \dot{Z} \dot{I}_2 - \dot{E}_2$$

on déduit par addition :

$$2\dot{V}_{(0,0)} = \dot{Z} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) - (\dot{E}_1 + \dot{E}_2)$$

Mais, en appelant  $\dot{Z}_0$  l'impédance imaginaire du fil  $Oo$ , on a

$$2\dot{V}_{(0,0)} = 2\dot{Z}_0 \dot{I}_0 = -2\dot{Z}_0 (\dot{I}_1 + \dot{I}_2)$$

Donc

$$-2\dot{Z}_0 (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \dot{Z} (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) - (\dot{E}_1 + \dot{E}_2)$$

d'où

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2}{\dot{Z} + 2\dot{Z}_0}$$

Si la direction du vecteur  $\bar{E}_1$  est prise comme axe de  $x$ , on a  $\dot{E}_1 = E$  et  $\dot{E}_2 = -jE$  ;

par suite, en posant  $\dot{Z} + 2\dot{Z}_0 = \mathcal{R} + j\mathcal{H}$ .

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E} - j\mathbf{E}}{\mathcal{R} + j\mathcal{B}} = \frac{(\mathbf{E} - j\mathbf{E})(\mathcal{R} - j\mathcal{B})}{\mathcal{R}^2 + \mathcal{B}^2}$$

ou enfin :

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{(\mathcal{R} - \mathcal{B})\mathbf{E}}{\mathcal{R}^2 + \mathcal{B}^2} - j \frac{(\mathcal{R} + \mathcal{B})\mathbf{E}}{\mathcal{R}^2 + \mathcal{B}^2}$$

expression signifiant que le vecteur  $\overline{\mathbf{I}}_1 + \overline{\mathbf{I}}_2$  a pour composantes suivant  $\overline{\mathbf{OE}}_1$  et suivant  $\overline{\mathbf{OE}}_2$  les quantités

$$\frac{\mathcal{R} - \mathcal{B})\mathbf{E}}{\mathcal{R}^2 + \mathcal{B}^2}$$

et

$$\frac{(\mathcal{R} + \mathcal{B})\mathbf{E}}{\mathcal{R}^2 + \mathcal{B}^2}$$

qui sont inégales si  $\mathcal{B}$  est différent de zéro, c'est-à-dire si la somme algébrique des réactances de  $\mathbf{OA}_1$  et de  $\mathbf{2Oo}$  n'est pas nulle.

Pour  $\mathcal{B} = 0$ , les deux composantes de  $\overline{\mathbf{I}}_1 + \overline{\mathbf{I}}_2$  suivant  $\overline{\mathbf{OE}}_1$  et  $\overline{\mathbf{OE}}_2$  sont égales et ce vecteur est dirigé suivant la bissectrice de l'angle droit  $\widehat{\mathbf{E}_2 \mathbf{OE}_1}$ . Il vaut alors  $\frac{E\sqrt{2}}{\mathcal{R}}$  et a, par rapport à  $\mathbf{OE}_1$ , un retard de  $45^\circ$  et, par rapport à  $\mathbf{OE}_2$ , une avance de la même quantité.

Puisque  $\overline{\mathbf{I}}_0 = -(\overline{\mathbf{I}}_1 + \overline{\mathbf{I}}_2)$ , le vecteur  $\overline{\mathbf{I}}_0$  a alors pour valeur

$$\frac{E\sqrt{2}}{\mathcal{R}} = \frac{E\sqrt{2}}{\mathbf{R}_{\mathbf{OA}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{o}} + 2\mathbf{R}_{\mathbf{Oo}}}$$

et est opposé à la bissectrice de l'angle  $\widehat{\mathbf{E}_2 \mathbf{OE}_1}$ .



Si l'on désigne par  $\mathbf{R}_0$  et  $\mathbf{K}_0$  la résistance et la réactance du fil  $\mathbf{Oo}$ , on a

$$\overline{\mathbf{V}}_{(0,0)} = \overline{\mathbf{R}}_0 \overline{\mathbf{I}}_0 + \overline{\mathbf{K}}_0 \overline{\mathbf{I}}_0$$

relation qui signifie que le vecteur  $\overline{\mathbf{V}}_{(0,0)}$  est (*fig. 400*)

la résultante d'un vecteur  $\overline{R_0 I_0}$  en phase avec  $\overline{I_0}$  et d'un vecteur  $\overline{K_0 I_0}$  perpendiculaire au premier.

Pour avoir le vecteur  $\overline{I_1}$ , il suffit en vertu de la relation :

$$\overline{V_{(0,0)}} = \overline{Z I_1} - \overline{E_1}$$

d'ajouter (*fig. 400*) au vecteur  $\overline{V_{(0,0)}}$  le vecteur  $\overline{E_1}$ , et de diviser le résultat par  $Z$ .

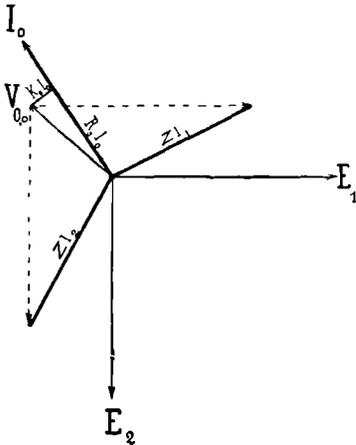


FIG. 400

De même, on aura

$$\overline{I_2} = \frac{\overline{V_{(0,0)}} + \overline{E_2}}{Z}$$

La *fig. 400*, où les constructions sont indiquées, montre nettement, qu'en général, les vecteurs  $\overline{I_1}$  et  $\overline{I_2}$  seront inégaux et dissymétriquement placés par rapport à  $\overline{E_1}$  et  $\overline{E_2}$ .

Ils ne sont égaux et symétriquement placés que si  $\overline{V_{(0,0)}}$  est dirigé suivant le prolongement de la bissectrice de l'angle  $\widehat{E_2 O E_1}$ . Mais même alors ces vecteurs  $\overline{E_1}$  et  $\overline{E_2}$  ne sont pas en quadrature.



Pour une production toute locale de courants diphasés, surtout si ces courants ne doivent avoir qu'une faible intensité, on peut se dispenser d'avoir recours

à un générateur de tels courants, c'est-à-dire à un système de forces électromotrices diphasées. On peut mettre à profit une simple installation monophasée, c'est-à-dire capable de maintenir entre deux points une différence de potentiel  $V$  alternative. Il suffit, pour obtenir des courants diphasés, d'établir entre ces deux points deux dérivation de résistances et de réactances convenablement choisies.

Supposons qu'on désire, par exemple, que le courant dans l'une des dérivation soit en avance d'un huitième de période sur la tension  $V$  et que l'autre, au contraire, soit en retard sur  $V$  de la même quantité, les deux courants ayant d'ailleurs la même valeur efficace.

Le diagramme, (*fig. 401*), établi conformément aux principes exposés précédemment (page 388 et suiv.) montre que les deux dérivation devront avoir des résistances égales et des réactances égales et de signes contraires, la valeur commune de ces dernières étant d'ailleurs égale à celle de la résistance.

La méthode symbolique conduit très simplement aussi aux mêmes résultats.

Puisqu'on a

$$\dot{V} = \dot{Z}_1 \dot{I}_1$$

$$\dot{V} = \dot{Z}_2 \dot{I}_2$$

d'où

$$\dot{Z}_1 \dot{I}_1 = \dot{Z}_2 \dot{I}_2$$

et qu'on veut avoir

$$\dot{I}_1 = \dot{I}' + j\dot{I}'$$

avec  $\dot{I}'' = \dot{I}'$ ,

T. 2

27

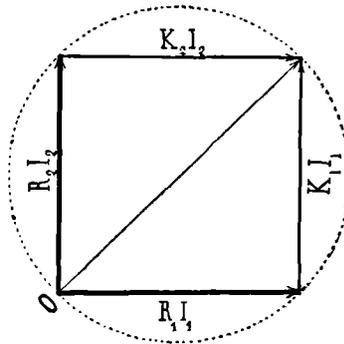


FIG. 401

$$I_2 = I' - jI'$$

il faut que

$$Z_1 (1 + j) = Z_2 (1 - j)$$

ou

$$(R_1 + jK_1) (1 + j) = (R_2 + jK_2) (1 - j)$$

ou

$$(R_1 - K_1) + j(R_1 + K_1) = (R_2 + K_2) - j(R_2 - K_2)$$

ce qui exige les deux conditions :

$$R_1 - K_1 = R_2 + K_2$$

$$R_1 + K_1 = R_2 - K_2$$

d'où, en ajoutant :

$$2R_1 = 2R_2$$

$$R_1 = R_2 = R$$

et, en retranchant :

$$2K_1 = -2K_2$$

$$K_1 = -K_2 = K$$

enfin la condition :  $\varphi = \text{angle tg } I$  exige

$$K = R$$

Les conditions :  $R_1 = R_2$  et  $K_1 = K_2$  assurent simplement la symétrie de position et l'égalité de deux vecteurs  $\overline{I_1}$ ,  $\overline{I_2}$ . La condition complémentaire  $K = R$  assure aux deux décalages la valeur  $\frac{\pi}{4}$  et, par suite, à leur somme, qui est le décalage mutuel, la valeur  $\frac{\pi}{2}$ .

La condition  $K_1 = -K_2$  ne peut être remplie qu'à la faveur de condensateurs.

Avec deux dérivations ayant des réactances de même signe, on ne peut, ainsi qu'on l'a vu page 317, qu'approcher pour le décalage mutuel, de la valeur  $\frac{\pi}{2}$  ; et comme alors il faut donner à l'une des branches une très grande résistance et à l'autre une très grande réactance, aux deux, par conséquent, une très grande impédance, on ne peut avoir que des courants très faibles.



## QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON



# ALTERNO - ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*\*\*\*

### LIGNES TRIPHASÉES (FORMULES GÉNÉRALES)



#### I

**Points neutres, tensions simples et tensions composées d'une installation à courants triphasés.**

Soit **N** un point relié aux trois bornes d'une station (génératrice ou réceptrice) à courants triphasés par des résistances égales assez grandes pour ne pas troubler sensiblement le régime de la station. On désigne un tel point sous le nom de **point neutre** et on appelle **tension simple** à une borne (**A** par exemple) la différence de potentiel

$$v = V_A - V_N$$

entre cette borne et le point neutre.

On donne, par contre, le nom de **tension composée** à la différence de potentiel

$$V = V_{A_1} - V_{A_2}$$

entre deux bornes **A<sub>1</sub>** et **A<sub>2</sub>**.



Les trois tensions simples :  $V_1, V_2, V_3$  d'une station triphasée sinusoïdale symétrique forment un système triphasé sinusoïdal symétrique.

En effet, elles sont respectivement proportionnelles aux trois courants sinusoïdaux symétriques dont sont le siège les trois fils qui concourent en N.

Les trois tensions composées :  $V_{1,2}, V_{2,3}, V_{3,1}$  d'une

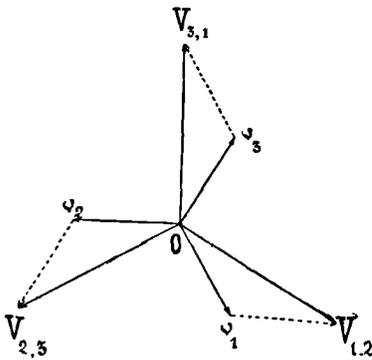


FIG. 402

station triphasée sinusoïdale symétrique forment un système triphasé sinusoïdal symétrique dont les vecteurs (fig. 402) sont respectivement égaux à ceux des tensions simples multipliés par  $\sqrt{3}$ , et décalés par rapport à eux (en avant), de  $30^\circ$ .

En effet, on a

$$\begin{aligned} V_{1,2} &= V_1 - V_2 = (V_1 - V_N) - (V_2 - V_N) = v_1 - v_2 \\ V_{2,3} &= V_2 - V_3 = (V_2 - V_N) - (V_3 - V_N) = v_2 - v_3 \\ V_{3,1} &= V_3 - V_1 = (V_3 - V_N) - (V_1 - V_N) = v_3 - v_1 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{V_{1,2}} &= \overline{v_1} - \overline{v_2} \\ \overline{V_{2,3}} &= \overline{v_2} - \overline{v_3} \\ \overline{V_{3,1}} &= \overline{v_3} - \overline{v_1} \end{aligned}$$

et, puisque les amplitudes de  $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ , ont la même valeur  $v$ , on a pour celles de  $\overline{V_{1,2}}, \overline{V_{2,3}}, \overline{V_{3,1}}$ , la même valeur :

$$V = v\sqrt{3}$$

Réciproquement :

$$v = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

*Le potentiel d'un point neutre d'une station génératrice sinusoïdale triphasée symétrique est égal à chaque instant à celui d'un point neutre de la station réceptrice, cette valeur étant d'ailleurs la moyenne des potentiels aux trois bornes de chaque station.*

En effet, de  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$

ou

$$(V_1 - V_N) + (V_2 - V_N) + (V_3 - V_N) = 0$$

on déduit, pour la station génératrice :

$$V_N = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

De même, en appelant  $U_n$  le potentiel au point neutre  $n$  de la station réceptrice et  $U_1, U_2, U_3$  les potentiels aux bornes, on a

$$U_n = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{3}$$

Or  $U_1 + U_2 + U_3 = V_1 + V_2 + V_3$

car

$$(V_1 - U_1) + (V_2 - U_2) + (V_3 - U_3) = 0$$

d'après les relations :

$$\begin{aligned} \overline{V_1} - \overline{U_1} &= \overline{rI_1} + \overline{kI_1} \\ \overline{V_2} - \overline{U_2} &= \overline{rI_2} + \overline{kI_2} \\ \overline{V_3} - \overline{U_3} &= \overline{rI_3} + \overline{kI_3} \end{aligned}$$

qui font de  $V_1 - U_1, V_2 - U_2$  et  $V_3 - U_3$  un système triphasé symétrique,  $I_1, I_2, I_3$  étant les courants de ligne et  $r, k$  respectivement la résistance et la réactance de chaque fil.



Lorsqu'un générateur ou un récepteur triphasé à sections identiques est monté en étoile, le point  $O$  commun aux trois sections, c'est-à-dire le centre de l'étoile, est un point neutre, et la différence de poten-

tiel entre une borne et ce point est la tension simple de l'appareil.

Lorsqu'un appareil triphasé est monté en triangle, il ne possède pas par lui-même de point neutre. Mais alors on en peut créer un en faisant concourir en un même point trois résistances égales attachées respectivement aux trois bornes. Il convient naturellement de choisir ces résistances assez grandes pour que les courants dont elles sont le siège n'aient qu'une valeur très minime et que, par suite, il n'en résulte pour l'énergie utile de l'appareil qu'un préjudice insignifiant.



## II

### Relation fondamentale entre les tensions simples aux deux stations d'une installation sinusoïdale triphasée symétrique.

Puisque, par définition, on a, à la station génératrice :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_N$$

et, de même, à la station réceptrice :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_n$$

et que, d'ailleurs, ainsi qu'on vient de le voir,  $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_N$  il en résulte :

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{U}_1$$

Or,  $\overline{\mathbf{V}_1} - \overline{\mathbf{U}_1} = \overline{\mathbf{r}}\overline{\mathbf{I}_1} + \overline{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{I}_1}$ ,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{k}$  étant respective-

ment la résistance et la réactance du fil reliant les bornes  $\bar{A}_1, \mathbf{a}_1$  considérées, de sorte que les vecteurs  $\bar{\mathbf{v}}_1$  et  $\bar{\mathbf{u}}_1$  sont liés entre eux et aux vecteurs  $\bar{r} \bar{\mathbf{I}}_1$  et  $\bar{k} \bar{\mathbf{I}}_1$  par la relation

$$\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{r} \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{k} \bar{\mathbf{I}}_1$$

ou

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{r} \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{k} \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_1$$

On a, de même, en considérant les deux autres tensions simples :

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{r} \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{k} \bar{\mathbf{I}}_2 + \bar{\mathbf{u}}_2$$

et

$$\bar{\mathbf{v}}_3 = \bar{r} \bar{\mathbf{I}}_3 + \bar{k} \bar{\mathbf{I}}_3 + \bar{\mathbf{u}}_3$$

Si l'installation est symétrique, ces trois relations vectorielles seront représentées par le même diagramme (*fig. 403*) dont les côtés donneront à volonté, suivant l'échelle adoptée, les valeurs maxima ou les valeurs efficaces des grandeurs correspondantes.

Ce diagramme est tout à fait, analogue à celui (page 341) qui traduit la relation existant entre

les tensions à origine et à l'extrémité d'une installation monophasée, avec cette seule différence que le diagramme ci-contre des tensions simples fait in-

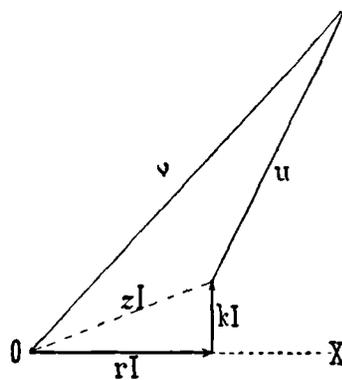


FIG. 403

tervenir la résistance  $r$  et la réactance  $k$  d'un seul fil, tandis que celui des tensions totales d'une installation monophasée fait intervenir la résistance  $2r$  et la réactance  $2k$  des deux fils de ligne.

Mais, d'ailleurs, on peut appliquer aux installations monophasées les notions du point neutre et des tensions simples et raisonner sur ces dernières comme sur celles d'une installation triphasée, en observant toutefois qu'elles valent  $\frac{1}{2}$  et non  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  des tensions composées correspondantes.

En effet, les tensions simples d'une station monophasée étant  $v_1 = V_1 - V_N$  et  $v_2 = V_2 - V_N$ , on a  $v_1 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)$  et  $v_2 = \frac{1}{2}(V_2 - V_1)$ , puisque  $V_N = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ .



Le résultat fourni par une somme géométrique étant indépendant de l'ordre dans lequel sont pris les vecteurs correspondants, on peut écrire :

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{rI} + \bar{kI}$$

et le diagramme offre alors la forme représentée par la fig. 404.

Trois figures identiques à celle-ci, assemblées autour d'une origine commune, et déca-

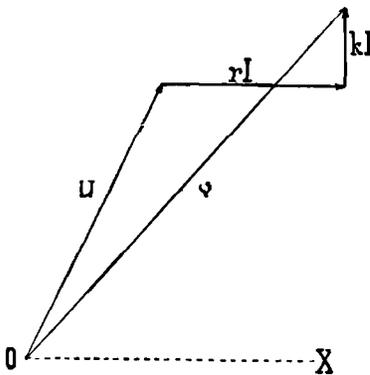


FIG. 404

lées entre elles de  $120^\circ$ , constituent le diagramme complet (fig. 405) d'une installation triphasée, montrant, en grandeurs et en positions relatives, les trois vecteurs  $\bar{\mathbf{v}}$  de la station génératrice, les trois vecteurs  $\bar{\mathbf{u}}$  de la station réceptrice, les trois vecteurs

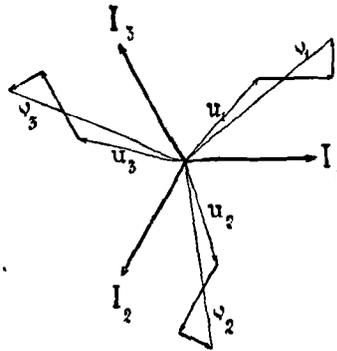


FIG. 405

$\bar{\mathbf{r}}\mathbf{I}$  respectivement proportionnels et parallèles aux vecteurs  $\bar{\mathbf{I}}$  et les trois vecteurs  $\bar{\mathbf{k}}\mathbf{I}$  à angle droit et en avance sur les  $\bar{\mathbf{r}}\mathbf{I}$ .



Le diagramme de la fig. 403 donne lieu à une étude toute pareille à celle qui a été faite précédemment (pages 341 et 342) sur le diagramme de la fig. 342. Nous la résumerons dans les propositions suivantes :

*La tension simple ( $\mathbf{u}$ ) de la station réceptrice d'une installation triphasée est moindre que celle ( $\mathbf{v}$ ) de la station génératrice.*

*La chute de tension ( $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ ) est supérieure au produit ( $\mathbf{r}\mathbf{I}$ ) et inférieure au produit ( $\mathbf{z}\mathbf{I}$ ).*

En vertu de la relation

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{Z}^2\mathbf{I}^2 + \mathbf{u}^2 + 2\mathbf{u}\mathbf{H}\mathbf{I}$$

dans laquelle,  $\mathbf{H} = \mathbf{R} \cos \psi + \mathbf{K} \sin \psi$  (1), on a

1.  $\psi$  étant le décalage entre  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{I}$ .

$$\mathbf{u} = -\mathbf{HI} + \sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{I}^2(\mathbf{R} \sin \psi - \mathbf{K} \cos \psi)^2}$$

en sorte que la valeur exacte de  $\mathbf{v} - \mathbf{u}$  est

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} - \sqrt{\mathbf{v}^2 - \mathbf{I}^2(\mathbf{R} \sin \psi - \mathbf{K} \cos \psi)^2} + \mathbf{HI}$$

Lorsque (ce qui est le cas habituel),  $\mathbf{v}$  s'élève à plusieurs milliers de volts, la quantité  $\mathbf{I}^2(\mathbf{R} \sin \psi - \mathbf{K} \cos \psi)^2$  est négligeable devant  $\mathbf{v}^2$ , et l'on peut, pratiquement, réduire l'expression précédente à la forme simple :

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{HI}$$



### III

#### Réactance d'un fil d'une ligne triphasée symétrique.

Nous considérerons, ce qui suffit en pratique, la réactance d'un fil d'une ligne triphasée comme consistant en une simple inductance :  $\Lambda \omega$ , le coefficient  $\Lambda = \Lambda_1 \mathbf{l}$  (proportionnel à la longueur  $\mathbf{l}$  du fil) étant défini par le rapport de la force électromotrice d'induction  $\mathbf{e}_i$  dans ce fil au taux  $\frac{d\mathbf{I}}{dt}$  de la variation du courant dont il est le siège (1).

---

1. La définition de  $\Lambda$  par l'expression  $\frac{1}{10^8} \frac{\Psi}{\mathbf{I}}$ , qui pouvait être adoptée comme équivalente à  $\frac{\mathbf{e}_i}{\frac{d\mathbf{I}}{dt}}$  dans le cas d'une installation monophasée, n'est plus de mise ici où les courants ne peuvent être considérés comme formant des circuits.

Supposons la ligne disposée symétriquement, c'est-à-dire les trois fils situés les uns relativement aux autres à une même distance **D** d'axe en axe, comme les trois arêtes d'un prisme triangulaire équilatéral (*fig.* 406). Supposons, de plus, ces fils cylindriques et d'égal rayon (**a**).



FIG. 406

La force électromotrice d'induction  $(e_i)_1$  dont l'unité de longueur de l'un des fils, (**1**) par exemple est le siège à un instant donné, par suite de la variation des trois courants, peut être envisagée comme exprimée par une somme de trois termes, le premier proportionnel à  $\frac{dI_1}{dt}$ , le second à  $\frac{dI_2}{dt}$ , le troisième à  $\frac{dI_3}{dt}$  et dus, respectivement, aux actions inductrices exercées, sur le fil (**1**), par lui-même, par le fil (**2**) et par le fil (**3**).

Appelons respectivement  $l_1$ ,  $m_{1,2}$  et  $m_{1,3}$  les coefficients de  $\frac{dI_1}{dt}$ ,  $\frac{dI_2}{dt}$ ,  $\frac{dI_3}{dt}$  et nous aurons :

$$(e_i)_1 = - l_1 \frac{dI_1}{dt} - m_{1,2} \frac{dI_2}{dt} - m_{1,3} \frac{dI_3}{dt}$$

Mais, par raison de symétrie, les coefficients  $m_{1,2}$  et  $m_{1,3}$  doivent être égaux entre eux. On a donc, en désignant par **m** leur valeur commune :

$$(\mathbf{e}_i)_1 = -l_1 \frac{d\mathbf{I}_1}{dt} - \mathbf{m} \left( \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{I}_3}{dt} \right)$$

D'autre part, en vertu de la relation :

$$\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = -\mathbf{I}_1$$

on a

$$\frac{d\mathbf{I}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{I}_3}{dt} = -\frac{d\mathbf{I}_1}{dt};$$

donc

$$(\mathbf{e}_i)_1 = -(l_1 - \mathbf{m}) \frac{d\mathbf{I}_1}{dt}$$

On a évidemment de même pour les deux autres fils :

$$(\mathbf{e}_i)_2 = -(l_2 - \mathbf{m}) \frac{d\mathbf{I}_2}{dt}$$

$$(\mathbf{e}_i)_3 = -(l_3 - \mathbf{m}) \frac{d\mathbf{I}_3}{dt}$$

avec, par raison de symétrie, la relation :

$$l_2 = l_3 = l_1$$

En résumé, pour l'unité de longueur d'un quelconque des trois fils d'une ligne triphasée parfaitement symétrique on a

$$\mathbf{e}_i = -(l_1 - \mathbf{m}) \frac{d\mathbf{I}}{dt}$$

et, par suite :

$$\Lambda_1 = l_1 - \mathbf{m}$$



Calculons de même le coefficient de self-induction  $L_1$  par unité de longueur d'une ligne monophasée dont les fils seraient parallèles et auraient même rayon  $a$  que ceux de la ligne triphasée précédente et même distance  $D$  d'axe en axe.

On a alors évidemment pour l'ensemble des deux fils

$$e_i = (e_i)_1 - (e_i)_2 = - (l_1 - m) \frac{dI_1}{dt} + (l_1 - m) \frac{dI_2}{dt}$$

ou

$$e = - (l_1 - m) \left( \frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt} \right)$$

Mais comme ici  $I_2 = - I_1$ ,

$$e_i = - 2 (l_1 - m) \frac{dI}{dt}$$

et, par suite :

$$L_1 = 2(l_1 - m)$$



En rapprochant ce résultat du précédent, on voit que le coefficient  $\Lambda_1$  relatif à l'unité de longueur d'un fil d'une ligne triphasée dont les fils forment un système équilatéral est le même que si ce fil faisait partie d'une ligne monophasée, et vaut, par conséquent, la moitié de celui ( $L_1$ ) relatif à l'unité de longueur de l'ensemble des deux fils de cette dernière (1).

Or, nous avons, dans une leçon précédente, (page

---

1. La même conclusion est applicable aux fils d'une ligne diphasée à trois fils, puisque la démonstration précédente ne repose que sur la relation  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ , vraie aussi dans ce cas.

172), trouvé pour  $L_1$ , dans le cas de fils de cuivre placés dans l'air (1) la valeur :

$$L_1 = \frac{1298,3 + 920,8 \log \frac{D}{d}}{10^6} \frac{\text{henry}}{\text{km}}$$

On calculera donc l'inductance d'un fil de longueur  $l$  km d'une ligne triphasée symétrique composée de fils de cuivre de même diamètre ( $d_{\text{mm}}$ ) placés dans l'air à des distances mutuelles ( $D_{\text{cm}}$ ) égales entre elles, par la formule :

$$K = \Lambda \omega$$

en faisant  $\Lambda = l \Lambda_1 = l \frac{L_1}{2}$ , et par conséquent :

$$\Lambda = l \frac{649,15 + 460,4 \log \frac{D}{d}}{10^6}$$

Exemple : Pour un kilomètre de fil de cuivre de 5 mm de diamètre, appartenant à une ligne triphasée symétrique à fils distants de 50 cm d'axe en axe, c'est-à-dire pour  $l = 1$ ,  $D = 50$   $d = 5$ , la formule donne  $\Lambda_1 = 0,00111 \frac{\text{henry}}{\text{kilom.}}$ .



1. Si les fils sont en métal de perméabilité magnétique  $\mu$  et placés dans un milieu de perméabilité  $\mu_0$ , la formule générale est ( $D$  et  $a$  étant exprimés en cm.) :

$$L_1 = \frac{2}{10^9} \left[ \frac{\mu}{2} + \mu_0 \log_e \frac{D^2}{a^2} \right] \frac{\text{henry}}{\text{centim.}}$$

Pour des lignes en fils de fer de faible diamètre placés dans l'air et pour de faibles courants, comme ceux employés en télégraphie, on peut admettre  $\mu = 150$  et  $\mu_0 = 1$ . La formule devient alors

$$L_1 = \frac{1}{10^9} \left[ 150 + 2 \log_e \frac{D^2}{a^2} \right] \frac{\text{henry}}{\text{centim.}}$$

(V. BLONDEL, « Inductance des lignes aériennes pour courants alternatifs. » L'Elair, il., t. I, p. 241, 312, 393, 493. (1894).

Dans le cas de lignes triphasées offrant une disposition non symétrique. c'est-à-dire ayant leurs trois fils non équidistants (1), le calcul de l'inductance d'un fil par la formule simple qu'on vient de voir n'est plus qu'approché. Mais il l'est toutefois assez pour qu'on puisse, dans la pratique industrielle, s'en contenter, comme indiquant au moins l'ordre de grandeur des quantités qu'on a besoin d'évaluer dans les avant-projets.

---

1. C'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque les axes des fils sont dans un même plan ou sont disposés comme les arêtes d'un prisme triangulaire simplement isocèle.



## QUARANTE-SIXIÈME LEÇON



# ALTERNO - ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*\*\*\*

### GRANDEURS ÉLECTRIQUES PÉRIODIQUES NON SINUSOIDALES CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES



#### I

### Expression générale des grandeurs électriques alternatives non sinusoïdales

Les forces électromotrices alternatives engendrées par les alternateurs industriels, sont assez approximativement périodiques, mais s'écartent toujours plus ou moins de la forme simple sinusoïdale.

Il en est de même des différences de potentiels et des intensités de courants auxquelles elles donnent naissance dans les circuits soumis à leur action.

Une expression telle que

$$G_{\max} \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + \gamma \right)$$

est donc insuffisante pour représenter exactement une grandeur électrique alternative usuelle de période  $T$ .

D'après un théorème dû au célèbre mathématicien

*Fourier* (1), toute fonction périodique d'une variable peut être représentée par une expression formée d'une constante suivie d'une somme de sinusoides ayant pour périodes, la première, le période **T** de la fonction, et les suivantes des sous-multiples de **T**.

L'expression, en fonction du temps, de toute grandeur électrique alternative **G** sera donc, en vertu de ce théorème, du type général :

$$G = G_0 + G_1 \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \gamma_1\right) + G_2 \sin\left(2\pi \frac{t}{\frac{T}{2}} + \gamma_2\right) + \dots \\ + G_n \sin\left(2\pi \frac{t}{\frac{T}{n}} + \gamma_n\right) + \dots$$

Si l'on pose :

$$\frac{2\pi}{T} = \omega$$

$$\text{et } G_n \cos \gamma_n = A_n; \quad G_n \sin \gamma_n = B_n \quad (2) :$$

on peut écrire :

$$G = G_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t + \dots \\ + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots + B_n \cos n\omega t + \dots$$



La valeur algébrique moyenne d'une telle expression dans le cours d'une période, soit  $\frac{1}{T} \int_0^T G dt$  est égale à son premier terme **G**<sub>0</sub>, car la valeur moyenne de tous les autres termes est nulle.

1. 1768-1830.

2. D'où :  $G_n^2 = A_n^2 + B_n^2$  et  $\text{tg } \gamma_n = \frac{B_n}{A_n}$ .

Si donc on a affaire à une quantité  $\mathbf{G}$  dont la valeur algébrique moyenne, relative à une période, est nulle, le terme constant  $\mathbf{G}_0$  de son expression développée suivant la formule de Fourier doit être nul.

Si, en outre, la quantité en question présente, pour deux valeurs de  $t$  différant d'une demi-période, des valeurs égales et de signes contraires, c'est-à-dire si elle satisfait à la condition

$$\mathbf{G}\left(t + \frac{\mathbf{T}}{2}\right) = -\mathbf{G}(t)$$

son développement suivant la formule de Fourier ne doit pas contenir de termes d'indices pairs.

En effet, si  $p$  est pair, la parenthèse du terme

$$A_p \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{\mathbf{T}} + \gamma_p\right),$$

reçoit, lorsque  $t$  augmente de  $\frac{\mathbf{T}}{2}$  un accroissement égal à  $p\pi$ , c'est-à-dire à un nombre pair de fois  $\pi$ , et, par conséquent, conserve sa valeur en grandeur et en signe.

Pour que l'on ait :  $\mathbf{G}\left(t + \frac{\mathbf{T}}{2}\right) = -\mathbf{G}(t)$ , le développement de  $\mathbf{G}$  ne doit donc contenir que des termes d'indices impairs, les seuls qui changent de signe.

Or, cette divisibilité de la période en deux demi-périodes symétriques par rapport au zéro, qu'exprime la relation  $\mathbf{G}\left(t + \frac{\mathbf{T}}{2}\right) = -\mathbf{G}(t)$ , est précisément un caractère ordinaire des grandeurs électriques alternatives usuelles.

Le type le plus fréquent de l'expression algébrique de ces grandeurs sera donc, en tenant compte des remarques qui précèdent :

$$G = G_1 \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} + \gamma_1 \right) + G_3 \sin \left( 2\pi \frac{t}{\frac{T}{3}} + \gamma_3 \right) + \dots$$

$$+ G_{2k+1} \sin \left( 2\pi \frac{t}{\frac{T}{2k+1}} + \gamma_{2k+1} \right) + \dots$$

ou

$$G = G_1 \sin (\omega t + \gamma_1) + G_3 \sin (3\omega t + \gamma_3) + \dots$$

$$+ G_{2k+1} \sin [(2k+1)\omega t + \gamma_{2k+1}] + \dots$$

La sinusoïde qui forme le premier terme du développement de **G** est de même période (**T**) que la grandeur considérée. On la désigne sous le nom de **sinusoïde fondamentale**.

Les autres ont pour périodes des sous-multiples de **T**; on les désigne sous le nom d'**harmoniques** (1).



Les variantes que peut présenter en pratique cette expression générale sont innombrables, puisqu'elles peuvent porter à la fois sur les amplitudes, sur le nombre et sur les phases relatives des harmoniques accompagnant la sinusoïde fondamentale.

Exemples (2) :

Les courbes (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), de la fig. 407, représentent respectivement (pour une demi-période) les expressions suivantes :

1. Ces expressions sont empruntées à l'Acoustique, qui offre des formules du même genre pour l'expression des vibrations complexes envisagées comme des résultantes de vibrations sinusoïdales correspondant à un son fondamental à ses harmoniques.

2. D'après *Steinmetz* : *Altern. Curr. Phenom.*, p. 398 et suiv.

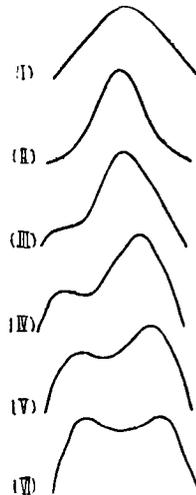


FIG. 407

(I)  $\sin \omega t$

(II)  $\sin \omega t - 0,3 \sin 3\omega t$

(III)  $\sin \omega t - 0,3 \sin \left( 3\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$

(IV)  $\sin \omega t - 0,3 \sin \left( 3\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$

(V)  $\sin \omega t - 0,3 \sin \left( 3\omega t - 3 \frac{\pi}{4} \right)$

(VI)  $\sin \omega t - 0,3 \sin \left( 3 \omega t - \pi \right)$

et mettent en évidence l'effet considérable d'un simple changement de la phase de l'unique harmonique mis en jeu. Quand le décalage de phase de cet harmonique augmente, le coefficient angulaire de la courbe au point  $t = 0$  augmente, et, en outre, la courbe s'allonge en pointe et même devient doublement pointue.

Les courbes (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), de la fig. 408 (1), représentent respectivement les expressions :

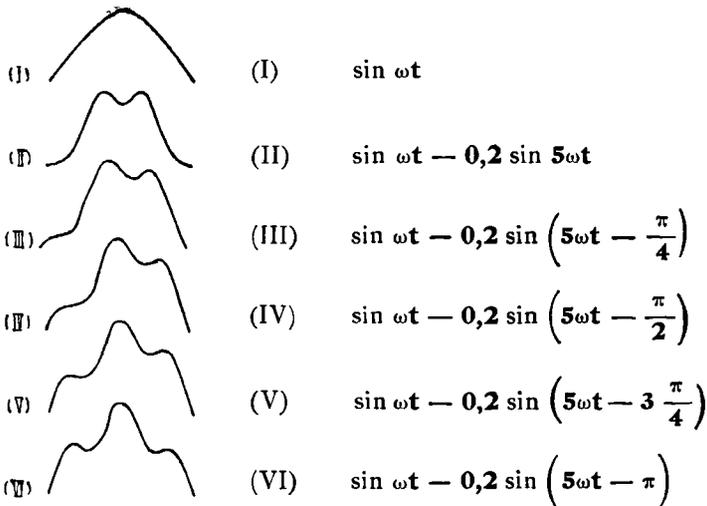


FIG. 408

et montrent que le 5<sup>e</sup> harmonique donne, aux faibles décalages,

1. *Steinmetz*, loc. cit.

une courbe doublement pointue à coefficient angulaire faible près du zéro, et que, pour des décalages croissants, cette courbe se relève près du zéro et acquiert une troisième pointe.

Les particularités pouvant faire pressentir la présence d'un troisième harmonique (*fig. 407*) seront donc :

ou : courbe pointue à variation lente près du zéro

ou : courbe soit aplatie, soit bi-pointue, à variation brusque près du zéro,

tandis que celles pouvant faire pressentir la présence d'un cinquième harmonique (*fig. 408*) seront :

ou : courbe pointue à variation brusque près du zéro

ou : courbe soit aplatie, soit bi-pointue à variation lente près du zéro.

Les courbes (I), (II), (III), (IV) de la *fig. 409* (1) représentent respectivement les expressions à deux harmoniques :

$$\sin \omega t - 0,15 \sin 3\omega t \quad - \quad 0,1 \sin 5\omega t \quad (I) \quad \text{---} \text{---} \text{---}$$


$$\sin \omega t - 0,15 \sin (3\omega t - \pi) - 0,1 \sin 5\omega t \quad (II) \quad \text{---} \text{---} \text{---}$$


$$\sin \omega t - 0,15 \sin 3\omega t \quad - \quad 0,1 \sin (5\omega t - \pi) \quad (III) \quad \text{---} \text{---} \text{---}$$


$$\sin \omega t - 0,15 \sin (3\omega t - \pi) - 0,1 \sin (5\omega t - \pi) \quad (IV) \quad \text{---} \text{---} \text{---}$$


FIG. 409

et mettent en évidence l'influence d'un changement de phase : soit du 3<sup>e</sup> harmonique seul (II), soit du 5<sup>e</sup> seul (III), soit des deux à la fois (IV).



Soit

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_1 \sin \omega t + \mathbf{A}_3 \sin 3\omega t + \mathbf{A}_5 \sin 5\omega t + \dots$$

$$+ \mathbf{B}_1 \cos \omega t + \mathbf{B}_3 \cos 3\omega t + \mathbf{B}_5 \cos 5\omega t + \dots$$

1. Steinmetz, *ibid.*

l'expression d'une grandeur électrique usuelle, alternative, périodique, à période divisible en deux demi-périodes inverses.

Si l'origine du temps coïncide avec un des zéros, c'est-à-dire si pour  $t = 0$  on a  $G = 0$ , les coefficients  $B$  doivent satisfaire à la relation :

$$B_1 + B_3 + B_5 + \dots = 0$$

En effet, c'est à cette somme que se réduit  $G$  pour  $t = 0$ .

Si, en outre, les valeurs de  $G$  correspondant à deux valeurs de  $t$  équidistantes de  $\frac{T}{4}$ , sont égales, c'est-à-dire si la portion de courbe représentant une demi-période comprise entre deux zéros est symétrique par rapport à son ordonnée maxima, les coefficients  $B$  sont nuls et, par conséquent, l'expression de  $G$  se réduit à

$$G = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + A_5 \sin 5\omega t + \dots$$

En effet, seuls les termes en sin. conservent leur valeur quand on y change  $t = \frac{T}{4} - \theta$  en  $t = \frac{T}{4} + \theta$ , quel que soit  $\theta$ .

Les harmoniques sont alors en phase ou en opposition directe avec l'harmonique fondamental (suivant que les coefficients  $A$  ont ou non le même signe que  $A_1$ ) et, de plus, la courbe représentative de  $G$  a les mêmes zéros que la sinusoïde fondamentale, puisque ces derniers sont aussi ceux des harmoniques.



Deux grandeurs  $G$  sont *identiques*, à la phase près, si pour passer de l'expression de l'une à celle de l'autre il suffit de changer dans la première  $t$  en  $t \pm \theta$ . La courbe représentative de la seconde n'est autre que celle

de la première déplacée de  $\theta$  parallèlement à l'axe des  $\mathbf{t}$ .

Deux grandeurs  $\mathbf{G}$  sont *semblables* lorsque l'expression de la seconde se déduit de la première en changeant  $\mathbf{t}$  en  $\mathbf{t} \pm \theta$  et en multipliant tous les termes par un même facteur.

Les coefficients  $\mathbf{G}_n$ , les coefficients  $\mathbf{A}_n$  et les coefficients  $\mathbf{B}_n$  de deux grandeurs  $\mathbf{G}$  semblables sont donc proportionnels.



## II

### Origine des harmoniques dans les grandeurs électriques alternatives usuelles.

L'expression de la force électromotrice d'induction  $\mathbf{E}_i$  fournie par un alternateur, étant liée à celle du flux  $\Phi$ , aux variations duquel elle est due, par la formule :

$$\mathbf{E}_i = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$$

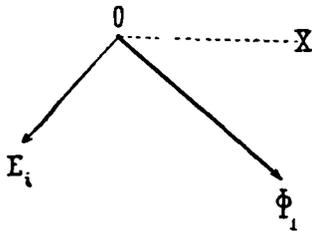
on voit qu'elle ne pourrait présenter la forme simple sinusoïdale que dans les cas très particuliers où l'expression de  $\Phi$  se réduirait à la plus simple expression possible, soit

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \sin (\omega \mathbf{t} - \varphi)$$

On aurait alors, en effet :

$$\mathbf{E}_i = - \frac{\omega \Phi_1}{10^8} \sin \left( \omega \mathbf{t} - \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

et le vecteur représentatif de  $E_i$  serait (fig. 410) décalé



de  $\frac{\pi}{2}$  en arrière de celui représentant le terme variable de  $\Phi$ .

En pratique, les flux  $\Phi$  auxquels on a affaire présentent toujours une loi de

FIG. 410

variation plus compliquée et les forces électromotrices  $E_i$  qui en résultent s'écartent, par conséquent, toujours plus ou moins de la forme sinusoïdale.

Soit par exemple, une bobine induite recueillant une fraction variable :  $\sin \omega t$  d'un flux  $\Phi_1$  émanant d'un pôle inducteur. L'expression du flux variable  $\Phi$  à travers cette bobine sera

$$\Phi = \Phi_1 \sin \omega t$$

et ne sera sinusoïdale que si  $\Phi_1$  est rigoureusement constant. Or il n'en est généralement pas ainsi. Si cette bobine et ses compagnes sont portées par un cylindre de fer muni d'encoches ou de dents, comme ceux représentés ci-dessus (pages 83 et 129), le défilé de ces encoches devant les pôles inducteurs fait varier périodiquement la réluctance des circuits magnétiques, en sorte que le flux  $\Phi_1$  émanant d'un pôle n'est pas constant mais éprouve des pulsations dont la période  $\Theta$  est le temps nécessaire à une encoche pour prendre la place de la suivante. On peut donc écrire :

$$\Phi_1 = \alpha \left[ 1 + \varepsilon \sin \left( 2\pi \frac{t}{\Theta} + \zeta \right) \right]$$

et par suite :

$$\Phi = \alpha \left[ 1 + \varepsilon \sin \left( 2\pi \frac{t}{\Theta} + \zeta \right) \right] \sin \omega t$$

Or si  $\delta$  est le nombre d'encoches ou de dents compris dans l'intervalle angulaire d'un pôle, l'intervalle angulaire correspondant à un groupe de deux pôles consécutifs en contient  $2\delta$ .

L'intervalle angulaire de deux dents est donc  $2\delta$  fois plus

petit que celui de deux pôles de même nom; par suite la période  $\Theta$  est  $2\delta$  fois plus petite que celle  $T$  de la force électromotrice induite, et l'on a :  $\frac{1}{\Theta} = \frac{2\delta}{T}$  ; donc :

$$\Phi = \mathcal{A} [1 + \varepsilon \sin (2\delta\omega t + \zeta)] \sin \omega t$$

L'expression de la force électromotrice induite

$$E_i = - \frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$$

dérivant de cette expression de  $\Phi$  est, tous calculs faits :

$$E_i = - \frac{\mathcal{A}\omega}{10^8} \left[ \cos \omega t + \frac{2\delta + 1}{2} \varepsilon \sin [(2\delta + 1) \omega t + \zeta] - \frac{2\delta - 1}{2} \varepsilon \sin [(2\delta - 1) \omega t + \zeta] \right]$$

On voit qu'elle contient des harmoniques d'ordres  $2\delta - 1$  et  $2\delta + 1$ , dits : **harmoniques de denture**.

Ces harmoniques sont :

pour $\delta = 1$	le 3 <sup>e</sup>
pour $\delta = 2$	le 3 <sup>e</sup> et le 5 <sup>e</sup>
pour $\delta = 3$	le 5 <sup>e</sup> et le 7 <sup>e</sup>

etc.

Ils ont naturellement des amplitudes d'autant plus accusées que les dents sont plus accentuées et que l'entrefer est plus faible, et inversement.

On les atténue notablement en disposant les encoches obliquement par rapport aux génératrices des pôles (1).



Lorsqu'un flux inducteur variable est produit, dans un appareil à noyau de fer, par un courant magnétisant variable, le défaut de proportionnalité entre le flux et la force magnétomotrice occasionne une différence de forme entre la courbe de flux et la courbe du courant

1. P. Guéry, *Sur la production des harmoniques dans les machines à courants alternatifs*. L'Eclair él. t. xxxvi, p. 51 (1903).

inducteur, et par suite entre celle-ci et la courbe de la force électromotrice induite.

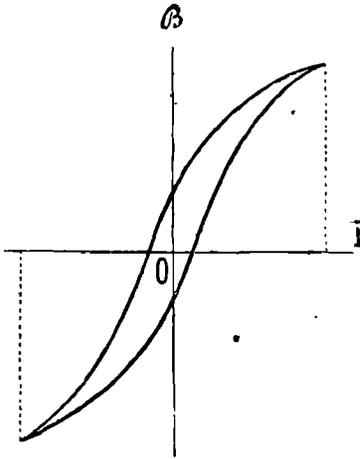


FIG. 411

sis en fonction de l'intensité  $I$  du courant magnétisant, on voit que les zéros de  $B$  ne se présentent qu'après ceux de  $I$  et que, si la variation de  $I$  en fonction de  $t$  est représentée par une courbe sinusoïdale telle que celle de la *fig. 412* (I), celle de  $B$ , qu'on obtiendra en prenant sur la courbe d'hystérésis les valeurs concomitantes de  $B$  et de  $I$ , sera représentée par une courbe (*fig. 412*, II) d'autant plus aplatie que le coefficient d'hystérésis sera plus grand.

L'hystérésis détermine une déformation dissymétrique de la courbe de flux qui décale la courbe de force électromotrice induite de plus d'un quart de période sur le courant.

Si l'on se reporte, en effet, à la courbe (*fig. 411*) représentant les valeurs de l'induction magnétique  $B$  d'un noyau de fer doué d'hysté-

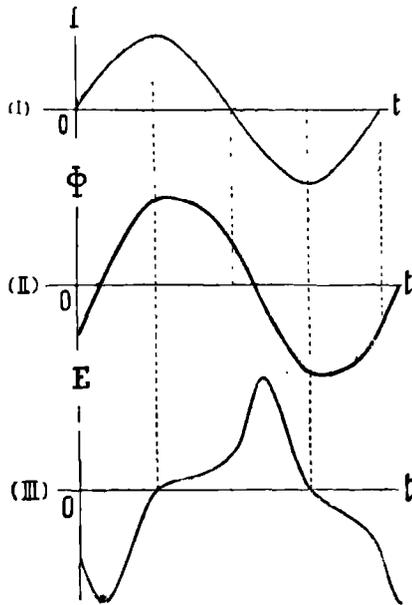


FIG. 412

A une pareille courbe de flux correspond (fig. 412, III) une courbe de force électromotrice  $(E = -\frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt})$  d'autant plus pointue que la courbe de flux est plus aplatie.

Ainsi, dans un appareil à noyau de fer à un courant sinusoïdal correspondent un flux et une force électromotrice d'induction non sinusoïdaux.

Inversement, à un flux sinusoïdal (fig. 413, I) correspondrait un courant non sinusoïdal, dont on obtiendrait la courbe représentative (fig. 413, II) en demandant à la courbe d'hystérésis la série des valeurs de I correspondant à la série des valeurs de  $\Phi$ .

Tandis que les zéros de ces courbes sont en discordance, leurs maxima coïncident, car  $\beta$  est maximum en même temps que I.

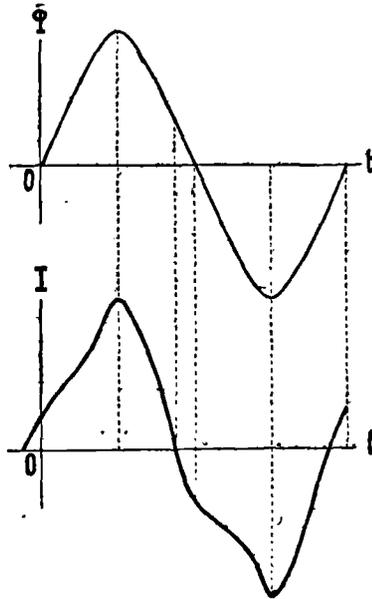


FIG. 413



### III

#### Systemes polyphasés non sinusoïdaux.

Des grandeurs électriques, en nombre  $m$ , alternatives, périodiques, de même période  $T$ , forment un **système polyphasé** lorsque,

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{f}(t)$$

étant l'expression de la première, celle de la seconde est

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{f}\left(t - \frac{T}{m}\right)$$

celle de la troisième

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{f}\left(t - 2\frac{T}{m}\right)$$

et ainsi de suite ; enfin celle de la  $m^{\circ}$

$$\mathbf{G}_m = \mathbf{f}\left(t - (m-1)\frac{T}{m}\right)$$

Il suffit, pour la pratique, de considérer le cas de  $m = 3$ . Soit donc un système triphasé :

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{f}(t) = \sum \mathbf{A}_n \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \gamma_n\right) \quad (1).$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{f}\left(t - \frac{T}{3}\right) = \sum \mathbf{A}_n \sin\left(2\pi \frac{t - \frac{T}{3}}{T} + \gamma_n\right)$$

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{f}\left(t - 2\frac{T}{3}\right) = \sum \mathbf{A}_n \sin\left(2\pi \frac{t - 2\frac{T}{3}}{T} + \gamma_n\right)$$

Supposons que ces grandeurs satisfassent à la relation :

$$\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 = 0$$

---

1 n impair.

ce qui a lieu, par exemple, pour les trois intensités d'une ligne triphasée sans fil neutre. On devra avoir, pour chaque harmonique figurant dans le développement de  $f(t)$ , une relation de la forme :

$$A_n \sin \left( 2\pi \frac{t}{\frac{T}{n}} + \gamma_n \right) + A_n \sin \left( 2\pi \frac{t - \frac{T}{3}}{\frac{T}{n}} + \gamma_n \right) + A_n \sin \left( 2\pi \frac{t - 2\frac{T}{3}}{\frac{T}{n}} + \gamma_n \right) = 0$$

qui peut s'écrire, en appelant  $\Theta$  la période  $\frac{T}{n}$  de cet harmonique :

$$\sin \left( 2\pi \frac{t}{\Theta} + \gamma_n \right) + \sin \left( 2\pi \frac{t - \frac{n\Theta}{3}}{\Theta} + \gamma_n \right) + \sin \left( 2\pi \frac{t - \frac{2n\Theta}{3}}{\Theta} + \gamma_n \right) = 0$$

Or, cette relation n'est possible que si  $n$  n'est pas un multiple de 3.

En effet, soit, pour simplifier l'écriture,  $\sigma(t)$  une fonction périodique de  $t$ , de période  $\Theta$ , satisfaisant à la condition  $\sigma(t) + \sigma\left(t - \frac{\Theta}{3}\right) + \sigma\left(t - 2\frac{\Theta}{3}\right) = 0$  et considérons l'expression :

$$\sigma(t) + \sigma\left(t - \frac{n\Theta}{3}\right) + \sigma\left(t - \frac{2n\Theta}{3}\right)$$

Si  $n$  n'est pas un multiple de 3 on a

ou bien :  $n = m \cdot 3 + 1$

ou bien :  $n = m \cdot 3 + 2$ .

Dans le premier cas, l'expression équivaut à

$$\sigma(t) + \sigma\left(t - \frac{\Theta}{3}\right) + \sigma\left(t - 2\frac{\Theta}{3}\right)$$

et, dans le second, à

$$\sigma(t) + \sigma\left(t - 2\frac{\Theta}{3}\right) + \sigma\left(t - \frac{\Theta}{3}\right)$$

Dans les deux cas, en vertu de la propriété attribuée à  $\sigma$ , cette somme est nulle.

Si  $n$  est un multiple de  $3$ , il n'en est pas ainsi, car l'expression prend alors la valeur  $3\sigma(t)$ .

Tout ceci s'appliquant à la fonction sinusoïdale  $\sigma(t) = \sin\left(2\pi\frac{t}{\Theta} + \gamma_n\right)$  on peut énoncer, avec *Bragstadt* (1) le théorème suivant :

*Dans le développement de l'expression, suivant la formule de Fourier, d'un courant d'un système triphasé ne doivent se trouver, en raison de la relation  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ , que des harmoniques impairs non multiples de 3, c'est-à-dire des harmoniques d'ordres : 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc.*

L'expression générale de l'ordre de tels harmoniques est :

$$6m \pm 1$$

car le reste de la division par  $6$  d'un nombre impair ne peut être que  $1$ ,  $3$ , ou  $5$ , et, si ce nombre n'est pas multiple de  $3$ , le reste ne peut être que  $1$  ou  $5$ , ce qui assigne au nombre la forme : mult. de  $6 + 1$  ou mult. de  $6 + 5 = \text{mult. de } 6 - 1$ .



Soient

$$v_{A,N} = v_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + v_3 \sin[3\omega t - \varphi_3] + v_5 \sin[5\omega t - \varphi_5] + \dots$$

$$v_{B,N} = v_1 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_1\right) + v_3 \sin\left[3\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_3\right] \\ + v_5 \sin\left[5\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_5\right] + \dots$$

1. *Bragstadt*. *Electrotechn. Zeitschr.* t. 21, p. 252 (mars 1900).

deux tensions simples non sinusoïdales d'un appareil triphasé monté en étoile. La tension composée correspondante est donnée par la relation :

$$V_{A,B} = v_{A,N} - v_{B,N}$$

soit :

$$V_{A,B} = \sum v_k \left[ \sin(k\omega t - \varphi_k) - \sin \left[ k \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) - \varphi_k \right] \right]$$

ou, en remplaçant les différences de sinus par des produits, d'après la relation :  $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \left( \frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$  :

$$V_{A,B} = \sum v_k 2 \sin \frac{k\pi}{3} \sin \left( k\omega t - \varphi_k - \frac{2k-3}{6} \pi \right)$$

Dans cette expression, les termes dont l'ordre  $k$  est multiple de  $3$  sont nuls, car alors  $\sin \frac{k\pi}{3} = 0$ . Quant aux autres, ils sont de la forme :

$$\sqrt{3} v_k \sin \left( k\omega t - \varphi_k + \frac{\pi}{6} \right)$$

pour  $k = 6m + 1$ ; ou de la forme :

$$\sqrt{3} v_k \sin \left( k\omega t - \varphi_k - \frac{\pi}{6} \right)$$

pour  $k = 6m - 1$ .

On a donc, plus explicitement :

$$V_{A,B} = \sqrt{3} \left[ v_1 \sin \left( \omega t - \varphi_1 + \frac{\pi}{6} \right) + v_5 \sin \left( 5\omega t - \varphi_5 - \frac{\pi}{6} \right) \right. \\ \left. + v_7 \sin \left( 7\omega t - \varphi_7 + \frac{\pi}{6} \right) + \dots \right]$$

et, par suite, ce théorème :

*La tension composée d'un appareil triphasé en étoile ne comporte que des harmoniques impairs non multiples de 3.*

Sa courbe représentative pourra donc être fort différente de celle de la tension simple qui, elle, peut présenter des harmoniques multiples de 3 et qui, en outre, renferme les autres avec des décalages différents de ceux qu'ils ont dans la tension composée.

En remarquant qu'un tiers de la période fondamentale représente un nombre entier de périodes des harmoniques d'ordres 3 ou multiples de 3, on voit, d'ailleurs sans calcul, que ces harmoniques sont en phase entre eux dans les tensions simples et par conséquent doivent s'éliminer quand on fait les différences de tensions simples qui donnent les tensions composées.



Soient

$$E_1 = e_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + e_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + e_5 \sin(5\omega t - \varphi_5) + \dots$$

$$E_2 = e_1 \sin\left[\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_1\right] + e_3 \sin\left[3\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_3\right] \\ + e_5 \sin\left[5\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_5\right] + \dots$$

$$E_3 = e_1 \sin\left[\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi_1\right] + e_3 \sin\left[3\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_3\right] \\ + e_5 \sin\left[5\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) - \varphi_5\right] + \dots$$

les expressions des forces électromotrices d'un générateur triphasé monté en triangle et fonctionnant à vide. La force électromotrice agissant dans le circuit fermé constitué par le triangle a pour expression :

$$E_1 + E_2 + E_3 = 3 [e_3 \sin (3\omega t - \varphi_3) + e_9 \sin (9\omega t - \varphi_9) + \dots]$$

Cette expression ne contient que des harmoniques dont l'ordre est multiple de **3**, car ainsi qu'on l'a vu ci-dessus (page 435) les sommes :

$$e_k \left\{ \sin [k\omega t - \varphi_k] + \sin \left[ k \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) - \varphi_k \right] + \sin \left[ k \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) - \varphi_k \right] \right\}$$

sont nulles pour toutes les valeurs de **k** non multiples de **3**.

Donc :

*Si la force électromotrice de chaque phase d'un appareil triphasé monté en triangle comporte des harmoniques d'ordres multiples de **3**, ces harmoniques donneront lieu, dans le triangle, à un courant qui se manifestera par un échauffement des enroulements de l'appareil fonctionnant à vide. ?*

*C'est pour éviter cet inconvénient qu'on donne la préférence au montage en triangle.*

*Etant donné un appareil triphasé monté en triangle et fonctionnant à vide, si l'on ouvre le triangle en un point, et qu'on examine la différence de potentiel entre les deux points séparés par la coupure, l'étude de cette différence de potentiel renseignera sur les harmoniques d'ordres multiples de **3** de la force électromotrice d'une phase. S'il arrive que la différence de potentiel observée est nulle, on en pourra conclure qu'aucun harmonique d'ordre multiple de **3** n'existe alors dans l'expression de la force électromotrice.*

Lorsque la force électromotrice d'un appareil tri-

phasé monté en triangle comporte des harmoniques d'ordres multiples de 3 et que par conséquent l'appareil fonctionnant à vide est le siège d'un courant intérieur  $i$ , la différence de potentiel  $V_A - V_c$  entre deux bornes est notablement différente comme allure de celle  $V_A - V_o$  que présenterait séparément le côté correspondant du triangle. En effet, on a

$$V_A - V_c = \sum -ri_k + l \frac{di_k}{dt} + E_k$$

et :

$$V_A - V_o = E = \sum E_k$$



## QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*\*\*\*

### GRANDEURS ÉLECTRIQUES PÉRIODIQUES NON SINUSOIDALES FORMULES FONDAMENTALES



#### I

**Valeurs moyenne, efficace et maxima d'une grandeur électrique périodique non sinusoïdale.**

La **valeur moyenne** d'une grandeur périodique  $\underline{\mathbf{G}}$  représentée par une expression de la forme :

$$\mathbf{G} = \sum \mathbf{A}_n \sin n \omega t + \sum \mathbf{B}_n \cos n \omega t$$

est numériquement égale à la hauteur d'un rectangle qui aurait même aire que la portion du plan située entre l'axe des temps et le tronçon de la courbe représentative de  $\mathbf{G}$  limité à deux zéros distants d'une demi-période.

Cette valeur moyenne est la somme des valeurs moyennes prises entre 0 et  $\frac{T}{2}$  des différents termes de l'expression de  $\mathbf{G}$ . Or la valeur moyenne des termes en cosinus est nulle, et la va-

leur moyenne des termes en sinus :  $A_n \sin n \omega t$  pour  $n$  impair est  $\frac{2}{n\pi} A_n$  (1). On a donc :

$$G_{\text{moy}} = \frac{2}{\pi} \sum \frac{A_n}{n}$$

cette somme ne comprenant que des termes relatifs aux valeurs impaires de  $n$ .



La **valeur efficace** d'une grandeur périodique  $G$  représentée par l'expression précédente ou par

$$G = \sum G_n \sin(n\omega t + \gamma_n)$$

est définie, comme celle d'une grandeur sinusoïdale, par *la racine carrée du moyen carré relatif à une période*.

Ce moyen carré est la somme des valeurs moyennes des différents termes qui figurent dans le carré de  $G$ . Or, parmi ces termes, ceux qui sont de la forme :  $2 G_h G_k \sin(h\omega t + \gamma_h) \sin(k\omega t + \gamma_k)$  ont une valeur moyenne nulle. Il ne reste donc que la somme des valeurs moyennes des termes de la forme :  $G_n^2 \sin^2(n\omega t + \gamma_n)$ , c'est-à-dire une somme de quantités telles que  $\frac{1}{2} G_n^2$ . On a donc.

$$(G^2)_{\text{moy}} = \frac{G_1^2 + G_3^2 + \dots + G_n^2 + \dots}{2} = \frac{1}{2} \sum G_n^2$$

et, par conséquent :

$$G_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{G_1^2 + \dots + G_n^2 + \dots}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum G_n^2}$$

1. En effet, en posant :  $n\omega t = z$ , on a

$$\frac{1}{T} \int_0^{\pi} A_n \sin n\omega t dt = \frac{2A_n}{n\omega T} \int_0^{n\pi} \sin z dz = \frac{2A_n}{n\omega T} [\cos 0 - \cos n\pi]$$

ce qui donne, puisque  $n$  est impair,  $\frac{4A_n}{n\omega T}$  et enfin  $\frac{2}{\pi} \frac{A_n}{n}$  puisque  $\omega T = 2\pi$ .

L'expression de la valeur efficace :  $\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$  d'une grandeur sinusoïdale n'est qu'un cas particulier de cette formule générale.



Graphiquement, la valeur efficace d'une grandeur  $G$  donnée s'obtiendra en prenant le rayon d'un demi-cercle équivalent à l'aire du diagramme représentatif d'une demi-période de  $G$  en coordonnées polaires.

En effet, l'aire de ce diagramme est

$$\int_0^\pi G \cdot \frac{1}{2} G d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi G^2 d\theta.$$

Le demi-cercle équivalent est  $\frac{1}{2} \pi R^2$ . On a donc :

$$R^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi G^2 d\theta. \text{ Mais } \frac{\theta}{\pi} = \frac{t}{T} \text{ et } \frac{d\theta}{\pi} = \frac{dt}{T}. \text{ Par suite :}$$

$$R^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} G^2 dt = (G^2)_{\text{moy}} \text{ et, par conséquent : } R = G_{\text{eff}}.$$



Si la ligne représentative de  $G$  est, dans l'intervalle de  $0$  à  $\frac{T}{2}$ , située tout entière d'un même côté de l'axe des temps, on a, en appelant  $S$  l'aire, de base  $\frac{T}{2}$ , qu'elle délimite :  $\frac{T}{2} G_{\text{moy}} = S$ . D'autre part, si  $g$  est l'ordonnée du centre de gravité de cette aire, on a :

$$gS = \int_0^{\frac{T}{2}} G dt \cdot \frac{G}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} G^2 dt = \frac{1}{2} \frac{T}{2} (G_{\text{eff}})^2$$

En rapprochant cette égalité de la précédente on a la relation :

$$gG_{\text{moy}} = \frac{1}{2} (G_{\text{eff}})^2$$

ou :

$$G_{\text{eff}} = \sqrt{2gG_{\text{moy}}}$$

De là résulte, pour le rapport de la valeur efficace à la valeur moyenne, l'expression remarquablement simple :

$$\frac{G_{\text{eff}}}{G_{\text{moy}}} = \sqrt{\frac{2g}{G_{\text{moy}}}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{1}{2} G_{\text{moy}}}} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$$

$g'$  désignant l'ordonnée du centre de gravité du rectangle de base  $\frac{T}{2}$  équivalent à l'aire  $S$ .

Comme, dans le cas que nous avons supposé, qui est celui de la pratique, (absence de zéros entre  $o$  et  $\frac{T}{2}$ ),  $g$  est supérieur à  $g'$ , il en résulte que la valeur efficace d'une grandeur électrique périodique usuelle est supérieure à sa valeur moyenne.

Par conséquent, si un ampèremètre du 2<sup>e</sup> degré et un ampèremètre du 1<sup>er</sup> degré, mis d'accord en courant continu, font partie d'un circuit présentant un courant variable de sens constant, tel qu'un courant redressé, ils cesseront d'être d'accord, l'indication de l'ampèremètre du 2<sup>e</sup> degré, qui correspondra à l'intensité efficace, étant supérieure à celle de l'autre, qui correspondra à l'intensité moyenne.



Le rapport :

$$f = \frac{G_{\text{eff}}}{G_{\text{moy}}}$$

présente une valeur d'autant plus grande que la courbe représentative de  $G$  est plus pointue. On peut le désigner, comme le fait *Fleming* (1), sous le nom de **Coefficient de déformation** de la courbe.

En voici les valeurs, ainsi que celles de  $\frac{G_{\text{moy}}}{G_{\text{max}}}$  et de  $\frac{G_{\text{eff}}}{G_{\text{max}}}$ , pour différentes formes simples de la ligne représentative d'une demi-période de  $G$  comprise entre deux zéros :

FORMES	$\frac{G_{\text{moy}}}{G_{\text{max}}}$	$\frac{G_{\text{eff}}}{G_{\text{max}}}$	$f = \frac{G_{\text{eff}}}{G_{\text{moy}}}$
Rectangle . . . . .	1	1	1
Demi-ellipse . . . . .	0,785	0,816	1,039
Demi-cercle . . . . .	0,7854	0,835	1,063
Parabole . . . . .	0,666	0,730	1,096
Sinusoïde . . . . .	0,637	0,707	1,1
Triangle . . . . .	0,5	0,58	1,16

1. The Electrician 1896 (n° 9).

Graphiquement, le rapport  $f$  s'obtiendra en divisant par la hauteur d'un rectangle équivalent à l'aire  $S$ , le rayon d'un demi-cercle équivalent à l'aire du diagramme représentatif d'une demi-période de  $G$  en coordonnées polaires.



La **valeur maxima** d'une grandeur électrique périodique non sinusoïdale, c'est-à-dire la plus grande valeur que prend cette grandeur dans le cours d'une période, présente, relativement à la valeur efficace, un rapport :  $\frac{G_{\max}}{G_{\text{eff}}}$  qui, ainsi qu'on peut en juger par la deuxième colonne du tableau précédent, dépend de la composition de l'expression de  $G$ .

En voici encore des exemples correspondant à divers cas usuels (1) :

1. — *Différence de potentiel comprenant un terme fondamental et un seul harmonique notable en phase avec le premier.*

Si

$$v = V_1 \sin \omega t + V_n \sin n\omega t$$

on a

$$\begin{aligned} V_{\max} &= V_1 + V_n \\ V_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{V_1^2 + V_n^2}{2}} \end{aligned}$$

par suite :

$$\frac{V_{\max}}{V_{\text{eff}}} = \frac{V_1 + V_n}{\sqrt{\frac{V_1^2 + V_n^2}{2}}}$$

La plus grande valeur possible de ce rapport est : **2**, et a lieu pour  $V_n = V_1$ .

2. — *Différence de potentiel ne devenant sensiblement différente de zéro que pendant une très petite partie  $\tau$  de chaque demi-période.*

1. M. Leblanc, *l'Eclairage élect.*, t. **xxi**, p. 82 (1899).

Plus le rapport  $\frac{\tau}{T}$  est petit, plus est petite la valeur efficace

$V_{\text{eff}}$ , plus est grand par suite le rapport  $\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{eff}}}$ .

On s'explique ainsi qu'un électromètre relié aux bornes d'une bobine de Ruhmkocf indique à peine quelques centaines de volts efficaces, alors qu'il est sillonné d'étincelles dont la longueur accuse une valeur maxima de la différence de potentiel de l'ordre de plusieurs milliers de volts (1).



## II

### Courants et différences de potentiels résultant de forces électromotrices non sinusoïdales.

Lorsqu'une force électromotrice de la forme :

$$e = \sum E_n \sin(n\omega t + \alpha_n)$$

est appliquée à un circuit, *chacun des harmoniques se comporte comme s'il était seul.*

Ainsi la force électromotrice représentée par le terme fondamental  $E_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$  produit un courant :

$$i_1 = \frac{E_1}{Z_1} \sin(\omega t + \alpha_1 + \varphi_1);$$

celle représentée par l'harmonique  $E_3 \sin(3\omega t + \alpha_3)$ , un courant :

$$i_3 = \frac{E_3}{Z_3} \sin(3\omega t + \alpha_3 + \varphi_3)$$

et ainsi de suite.

---

1. M. Leblanc. Loc. cit.

*Le courant  $i$  dont le circuit est effectivement le siège a comme expression la somme algébrique des expressions de ces divers courants partiels :*

$$i = \sum \frac{E_n}{Z_n} \sin (n\omega t + \alpha_n + \varphi_n)$$

Les impédances  $Z_1, Z_3, \dots Z_n, \dots$  du circuit, relativement aux divers harmoniques de  $E$ , sont liées à la résistance ohmique  $R$  du circuit et à ses réactances  $K_1 = L\omega - \frac{1}{C\omega}, K_3 = L\omega_3 - \frac{1}{C\omega_3}, \dots K_n = L\omega_n - \frac{1}{C\omega_n}, \dots$  par les relations :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{R^2 + K_1^2} = R\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_1} \\ Z_3 &= \sqrt{R^2 + K_3^2} = R\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_3} \\ &\dots\dots\dots \\ Z_n &= \sqrt{R^2 + K_n^2} = R\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_n} \end{aligned}$$

Quant aux décalages :  $\varphi_1, \varphi_3, \dots \varphi_n, \dots$  ils sont donnés, en grandeur et en signe, par les expressions :

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi_1 &= -\frac{K_1}{R} \\ \text{tg } \varphi_3 &= -\frac{K_3}{R} \\ &\dots\dots\dots \\ \text{tg } \varphi_n &= -\frac{K_n}{R} \end{aligned}$$

En résumé, tous les problèmes relatifs aux effets des forces électromotrices périodiques non sinusoïdales se présenteront, d'après cela, comme des sommes de pro-

blèmes relatifs aux effets de leurs composantes sinusoïdales.

On voit maintenant pourquoi il était non seulement commode, mais indispensable que nous fissions, avant d'aborder le cas général, l'étude du cas particulier des grandeurs électriques sinusoïdales.

Exemples :

**A. — Courants non sinusoïdaux correspondant à des différences de potentiel non sinusoïdales données.**

Si aux bornes d'une portion de circuit donnée est appliquée une différence de potentiel périodique dont l'expression est

$$v = \sum V_n \sin(\omega_n t + \delta_n)$$

le courant correspondant aura pour expression :

$$i = \sum \frac{V_n}{Z_n} \sin(\omega_n t + \delta_n + \varphi_n)$$

Il comprendra donc des harmoniques de même ordre que ceux de  $V$ , mais ces harmoniques auront des amplitudes relatives et des décalages relatifs en général tout autres que ceux de  $V$ .



Il est toutefois un cas où les amplitudes relatives et les décalages relatifs des harmoniques sont les mêmes pour  $i$  que pour  $V$ , c'est celui où la portion de circuit considérée est dépourvue de self-induction et de capacité, et présente, en un mot, une simple résistance ohmique, sans réactance.

On a alors :

$$I_n = \frac{V_n}{R}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = 0; \varphi_n = 0$$

et, par suite :

$$i = \sum \frac{V_n}{R} (\omega_n t + \delta_n) = \frac{v}{R}$$

La formule d'ohm est donc alors applicable et la courbe représentative du courant est semblable à celle de  $V$  et en phase avec elle.

C'est ce cas qu'on réalise quand on ramène l'étude oscillographique ou ondographique d'un courant à celle de la différence de potentiel aux bornes d'un conducteur sans réactance inséré dans le circuit.



Si la portion de circuit donnée offre une réactance due exclusivement à de la self-induction, un harmonique du courant a une amplitude  $I_n$  d'autant *moindre* que son ordre  $n$  est plus élevé, car l'impédance qui lui correspond :  $Z_n = \sqrt{R^2 + L^2 \omega_n^2} = \sqrt{R^2 + L^2 n^2 \omega^2}$  est d'autant plus grande que  $n$  est plus grand.

On exprime ce résultat en disant *qu'une inductance étouffe les harmoniques supérieurs du courant*.

Ainsi, dans une portion de circuit à forte inductance, le courant sera beaucoup moins éloigné de la forme sinusoïdale que la différence de potentiel à ses bornes.

Le décalage  $\varphi_n$  d'un harmonique du courant par rapport à l'harmonique correspondant de la différence de potentiel est d'autant plus grand que l'harmonique est

d'ordre plus élevé, car  $\operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{Ln\omega}{R}$  augmente en valeur absolue, avec  $n$ .



Si la portion de circuit donnée offre une réactance due exclusivement à de la capacité, un harmonique du courant a une amplitude  $I_n$  d'autant plus *grande* que son ordre  $n$  est plus élevé, car l'impédance qui lui correspond :  $Z_n = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega_n^2}} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 n^2 \omega^2}}$  est d'autant moindre que  $n$  est plus grand.

On exprime ce résultat en disant *qu'une capacitance renforce les harmoniques supérieurs du courant*.

Ainsi dans une portion de circuit à forte capacitance, le courant sera beaucoup plus éloigné de la forme sinusoïdale que la différence de potentiel à ses bornes.



Si deux portions de circuits ont même constante de temps, elles sont pour une même différence de potentiels appliquée à leurs bornes, le siège de courants *semblables* dont le rapport est l'inverse du rapport de leurs résistances.

En effet, soient  $z_n = \sqrt{r^2 + k_n^2}$  et  $Z_n = \sqrt{R^2 + K_n^2}$  les impédances de ces portions de circuits relativement à l'harmonique  $n^{\circ}$  de la différence de potentiels donnée. Les valeurs efficaces des courants dus à cet harmonique étant

$$i_n = \frac{V_n}{z_n}$$

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n}$$

on a pour leur rapport :

$$\frac{i_n}{I_n} = \frac{z_n}{Z_n} = \frac{R\sqrt{1 + \left(\frac{Kn}{r}\right)^2}}{r\sqrt{1 + \left(\frac{kn}{r}\right)^2}}$$

et, par suite, si  $\frac{k_n}{r} = \frac{K_n}{R}$  :

$$\frac{i_n}{I_n} = \frac{R}{r}$$

Il y a donc proportionnalité entre les harmoniques de l'un des courants et les harmoniques de même ordre de l'autre, et comme le coefficient de proportionnalité est le même pour tous, il y a proportionnalité entre les expressions mêmes des deux courants qui par suite sont *semblables*.

B.— *Méthode Blondel pour la mesure des faibles self-inductions.*

Considérons un alternateur diphasé à force électromotrice non sinusoïdale, Si  $e' = \sum E_{n'} \sin [n'\omega t - \alpha_{n'}]$  est l'expression de la force électromotrice de la première phase à un instant  $t$ , celle de la seconde phase, au même instant, sera

$$e'' = \sum E_{n''} \sin \left[ n''\omega \left( t - \frac{T}{4} \right) - \alpha_{n''} \right] \\ = \sum E_{n''} \sin \left[ n''\omega t - \alpha_{n''} - n''\frac{\pi}{2} \right]$$

Supposons que ces forces électromotrices soient appliquées respectivement à des circuits comprenant : l'un la bobine fixe  $B'$ , l'autre la bobine mobile  $B''$  d'un électrodynamomètre. Les intensités des courants dont on observera l'action mutuelle seront :

$$i' = \sum \frac{E_{n'}}{Z_{n'}} \sin [n'\omega t - \alpha_{n'} - \varphi'_{n'}] \\ \text{et } i'' = \sum \frac{E_{n''}}{Z_{n''}} \sin \left[ n''\omega t - \alpha_{n''} - n''\frac{\pi}{2} - \varphi''_{n''} \right]$$

et le couple moyen s'exerçant entre les deux bobines sera proportionnel à la valeur moyenne du produit  $i'i''$ , soit :

$$\sum \frac{E_n E_{n''}}{Z'_n Z''_{n''}} \sin [n' \omega t - \alpha_{n'} - \varphi''_{n'}] \sin [n'' \omega t - \alpha_{n''} - n'' \frac{\pi}{2} \varphi''_{n''}]$$

Dans le calcul de la valeur moyenne, les termes renfermant des valeurs de  $n$  différentes donnent un résultat nul car

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin [n' \omega t - \chi'] \sin [n'' \omega t - \chi''] dt = 0.$$

Quant aux termes renfermant des valeurs de  $n$  identiques ils donnent des résultats de la forme :  $h \frac{E_n^2}{Z'_n Z''_n} \cos \left[ n \frac{\pi}{2} + \varphi''_n - \varphi'_n \right]$

Si les deux circuits ont même constante de temps, on a  $\varphi''_n - \varphi'_n = 0$ , car  $\text{tg } \varphi''_n = \frac{n \omega L''}{R''}$  et  $\text{tg } \varphi'_n = \frac{n \omega L'}{R'}$ , valeurs identiques si  $\frac{L''}{R''} = \frac{L'}{R'}$ . Alors l'action mutuelle des deux bobines de l'électrodynamomètre est nulle, car  $\cos n \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $n$  étant impair.

Réciproquement, à ce signe on reconnaîtra que les deux circuits ont des constantes de temps identiques.

Supposons les deux bobines identiques et appelons  $I$  leur self,  $r$  leur résistance. Si l'on introduit dans le circuit de l'une un appareil  $X$ , de self  $L$  et de résistance  $R$ , on pourra, en introduisant dans le circuit de l'autre un étalon de self réglable, donner à cette dernière une valeur  $\lambda$  telle que les constantes de temps des deux circuits deviennent identiques, ce qu'on reconnaîtra à l'absence d'action entre les deux bobines  $B'$  et  $B''$ , et l'on aura, en appelant  $\rho$  la résistance de l'étalon :

$$\frac{L + I}{R + r} = \frac{\lambda + I}{\rho + r}$$

Pour obtenir l'équilibre en l'absence de l'appareil  $X$ , il faudra d'ailleurs donner à la self de l'étalon une autre valeur  $\lambda_0$  telle que

$$\frac{I}{r} = \frac{\lambda_0 + I}{\rho + r}$$

En éliminant  $I$  entre ces deux équations on obtiendra la valeur de  $L$  par l'expression :

$$L = \frac{\lambda \rho (R + r) - \lambda_0 r (R - \rho)}{\rho (\rho + r)}$$

Au lieu de compenser l'effet de l'appareil X par une self étalon, on peut le compenser par une simple modification de résistance du circuit qui la comprend, ce qui donne la relation :

$$\frac{L + l}{R + r + r'} = \frac{l}{r}$$

d'où

$$L = \frac{l(R + r')}{r}$$

$l$  étant connue par application de la méthode à une self  $L$  connue :

Ces deux procédés de détermination des self-inductions, particulièrement convenables pour des valeurs faibles, auxquelles ne conviennent pas très bien les méthodes usuelles, ont été imaginés par M. A. Blondel (1).

La méthode est d'autant plus sensible que les forces électromotrices mises en jeu sont plus grandes, que leur fréquence est plus élevée, que le couple de torsion de la suspension de la bobine mobile est plus faible et que la constante de temps  $\frac{l}{R}$  de chacune des bobines est plus grande.

Pour avoir des effets notables sans être obligé de donner aux bobines un trop grand nombre de spires et, par conséquent, en évitant les impédances trop grandes, il faut mettre en jeu des intensités de courants de l'ordre du  $\frac{1}{10}$  d'ampère. Les impédances des bobines ne doivent pas dépasser quelques dizaines d'ohms.

*C. — Remarque relative aux appareils de mesures à transformateurs.*

Lorsqu'on applique à la mesure d'une différence de potentiel périodique non sinusoïdale un voltmètre thermique à transformateur, le courant dans le secondaire de cet appareil n'est pas semblable à la différence de potentiel agissant sur le primaire : les harmoniques supérieurs, relativement auxquels l'inductance du

1. Congrès de l'Association Française pour l'avancement des sciences, tenu à Boulogne en 1902.

transformateur est considérable, sont très atténués dans le courant primaire et, par suite, dans la différence de potentiel secondaire appliquée au voltmètre, de sorte que la valeur efficace indiquée par ce dernier se réduit sensiblement à  $\sqrt{\frac{V_1^2}{2}}$ , c'est-à-dire à celle du terme fondamental, alors que la valeur efficace de  $V$  est, comme on l'a vu plus haut

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{V_1^2 + \dots + V_n^2 + \dots}{2}}$$

Le seul appareil capable de donner la mesure de la valeur efficace vraie d'une différence de potentiel alternative non sinusoïdale est donc un *voltmètre électrostatique du 2<sup>e</sup> degré*.

Mais pour qu'on puisse l'employer, il ne faut pas qu'il y ait dans  $V$  des harmoniques d'amplitudes trop élevées, car ils pourraient donner lieu, dans l'électromètre, à des étincelles dissipatives.

Une valeur modérée du voltage efficace<sup>1</sup> marqué par un voltmètre ordinaire n'implique donc pas nécessairement une valeur modérée du voltage maximum auquel sont soumis les isolants d'une installation donnée. Ainsi de Ferranti a trouvé que la distance explosive entre deux boules d'un pouce de diamètre reliées aux câbles principaux de l'Usine de Deptfort était de 14 m/m, ce qui correspondait à un  $V_{\text{max}}$  d'environ 50.000 volts, alors que l'électromètre ne marquait que 10.000 volts.

Des expériences sur la rigidité des diélectriques faites avec des courants alternatifs dont on ne connaîtrait que le voltage efficace marqué par des voltmètres ordinaires seraient sans signification précise et par suite sans valeur (1).



1. M. Leblanc. Loc. cit.

## QUARANTE-HUITIÈME LEÇON



# ALTERNO - ÉLECTROCINÉTIQUE

\*\*\*\*\*

## GRANDEURS ÉLECTRIQUES PÉRIODIQUES NON SINUSOIDALES ANALYSE HARMONIQUE



### I

#### Méthode géométrique

Etant donnée la courbe représentative d'une grandeur périodique  $G$ , obtenue par l'un quelconque des procédés indiqués précédemment (contact tournant, oscillographe, rhéographe, ondographe), il existe de nombreuses méthodes, soit analytiques, soit graphiques, permettant d'en faire l'**analyse harmonique**, c'est-à-dire de trouver les périodes, les amplitudes et les phases des harmoniques entrant dans l'expression de cette grandeur développée suivant la formule de Fourier (1).

1. P. Boucherot. — L'analyse des courbes périodiques. — *Lum. él.*, XLIX, p. 251.
- Hess. — Instrument pour l'analyse des courbes périodiques. — *Ibid.*, LII, p. 551.
- Hess. — Nouveaux analyseurs harmoniques. — *L'Eclair. électr.*, IV, p. 385.
- Hess. — Procédé graphique d'analyse harmonique. — *Ibid.*, V, p. 20.
- Allamet. — Analyse graphique des courbes périodiques. — *L'Electricien*, XII, p. 118.
- G. Weiss. — Analyse d'une courbe périodique par le procédé de Ludimar-Hermann. — *Bull. Soc. fr. de Phys.*, 1897, p. 84.

Parmi les méthodes graphiques, l'une des plus simples (1) repose sur les considérations suivantes :

Si une grandeur périodique  $\mathbf{G}$  ne renferme ni harmonique d'ordre  $\mathbf{h}$  ni harmonique d'ordre multiple de  $\mathbf{h}$ , la somme des valeurs qu'elle présente aux instants

$$0, \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{h}}, 2 \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{h}}, 3 \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{h}}, \dots (\mathbf{h} - 1) \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{h}}$$

(valeurs indiquées par les ordonnées de la courbe représentative correspondant aux points de division d'une période en  $\mathbf{h}$  parties égales) est nulle.

En effet, les vecteurs représentatifs des sinusôides composant l'expression de  $\mathbf{G}$  occupent, à ces instants, des positions dont les extrémités sont les sommets de polygones réguliers. Par exemple, les positions du vecteur représentatif de l'harmonique d'ordre  $\mathbf{k}$  (vecteur tournant avec la vitesse angulaire  $\mathbf{k}\omega$ ) sont séparées chacune de la suivante par un angle égal à la rotation  $\mathbf{k}\omega \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{h}} = \mathbf{k} \frac{2\pi}{\mathbf{h}}$  effectuée par ce vecteur durant le temps  $\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{h}}$ . Or on sait que la somme des sinus de  $\mathbf{h}$  angles en progression arithmétique de raison  $\mathbf{k} \frac{2\pi}{\mathbf{h}}$  est nulle lorsque  $\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{h}}$  n'est pas entier.

Mais s'il existe dans  $\mathbf{G}$  un harmonique d'ordre  $\mathbf{k}$  multiple de  $\mathbf{h}$ , c'est-à-dire d'ordre  $\mathbf{h}$ ,  $2\mathbf{h}$ , etc., la somme de ses valeurs aux instants considérés n'est pas nulle : elle est égale à  $\mathbf{h}$  fois sa valeur à l'instant zéro, car les positions du vecteur représentatif de cet harmonique à ces instants font entre eux des angles multiples de  $2\pi$ , et, par conséquent, coïncident.

En conséquence :

Pour rechercher, par exemple, si une grandeur pé-

---

1. Wedmore. — *Journal of the Institution of Electr. Engin.*, xxv, p. 224.

riodique **G** donnée par sa courbe représentative renferme des harmoniques d'ordres multiples de **3** (c'est-à-dire d'ordres **3**, **9**, etc.), on divisera un segment de **G** correspondant à une période en trois tronçons **PQ**, **QR**, **RS** répondant au

partage de cette période en trois parties égales (*fig. 414, I*); puis, à l'aide d'un papier calque, amenant les ordonnées originelles des deux derniers tronçons à coïncider avec celle du premier (*fig. 414, II*), on relèvera, pour chaque abscisse, la somme algébrique des ordonnées correspondantes et on trou-

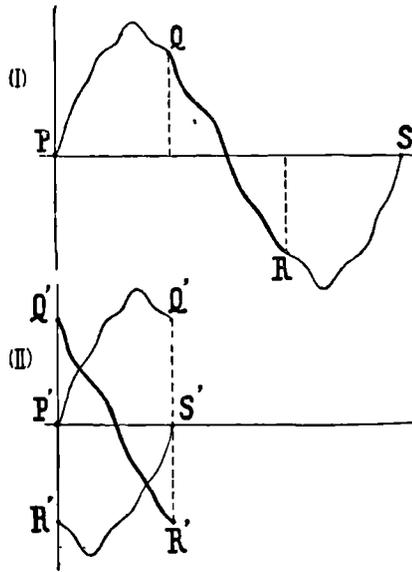


FIG. 414

vera la ligne (de fréquence **3F**) représentative de cette somme.

Si cette ligne se réduit à l'axe des temps, on en conclura que **G** ne renferme aucun harmonique d'ordre divisible par **3**.

Si, au contraire, cette ligne est distincte de l'axe des temps, elle est de fréquence **3F** et indique l'existence d'harmoniques d'ordres multiples de **3**.

Alors, de deux choses l'une : ou elle se présentera comme une sinusoïde parfaite, ou elle sera plus compliquée.

Le premier cas correspondra à l'existence du seul harmonique d'ordre **3**, et cet harmonique s'obtiendra en grandeur et en phase en divisant par **3** les ordonnées de la sinusoïde trouvée.

Le second cas adviendra lorsque coexisteront plusieurs harmoniques d'ordres multiples de **3**.

En divisant par **3** les ordonnées de la courbe trouvée, on obtiendra la courbe représentative de la somme de ces harmoniques.

Pour savoir ensuite si l'harmonique d'ordre **9** en fait partie, on divisera une période de **G** en **9** tronçons sur lesquels on opérera comme sur les trois de tout à l'heure et si la courbe, de fréquence **9F**, résultant de l'opération est une sinusoïde, on sera par là averti de l'existence de l'harmonique d'ordre **9**. Divisant par **9** les ordonnées de cette sinusoïde et retranchant les quotients, des ordonnées de la courbe de fréquence **3F**, obtenue précédemment, on aura une nouvelle courbe de fréquence **3F** plus simple que la précédente, et qui se réduira à la sinusoïde d'ordre **3** s'il n'y a pas d'autres harmoniques multiples de **3** que ceux d'ordres **3** et **9**.

D'une façon analogue, en partant de divisions d'une période de **G** en **5**, en **7** tronçons, etc., on procédera à la recherche des harmoniques d'ordres multiples de **5**, de **7**, etc.

Il n'y a pas lieu de rechercher des harmoniques d'ordres pairs, si la courbe représentative de **G** offre des demi-périodes identiques entre elles au signe près. On a vu, en effet (page 424), qu'alors les harmoniques d'ordres pairs n'existent pas.

Pour opérer méthodiquement, on observera que, les courbes relatives aux grandeurs électriques obtenues dans la pratique industrielle ne contenant que des harmoniques impairs d'ordres inférieurs à **30**, l'application du théorème ci-dessus aux valeurs  $h = 27, 25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11$  donnera d'emblée les sinusoides correspondantes.

En retranchant l'harmonique **21** de la somme des harmoniques **7** et **21** fournie par l'opération basée sur la division de **G** en **7** parties, on aura l'harmonique **7**.

En retranchant la somme des harmoniques **15** et **25** de la somme des harmoniques **5, 15** et **25** fournie par l'opération basée sur la division de **G** en **5** parties, on aura l'harmonique **5**.

L'harmonique **9°** s'obtiendra en retranchant le **27°** de l'ensemble **9** et **27** obtenu dans l'opération correspondant à  $h = 9$ .

Enfin, l'harmonique **3** se trouvera en retranchant les **9°, 15°, 21°** et **27°** de l'ensemble trouvé pour  $h = 3$ .



## II

### Méthode de Résonance

Les procédés graphiques d'analyse harmonique offrent peu de précision en raison des imperfections du trait fourni par les appareils inscripteurs de la courbe **G**. Certains harmoniques, qui s'accuseraient

par de fines dentelures visibles sur un tracé très délié, passent, en effet, inaperçus par la faute d'un trait un peu fort. En outre, les tracés obtenus dans des observations de peu de durée peuvent être affectés d'accidents non périodiques, conduisant à des résultats erronés. Aussi ne doit-on demander à ces procédés qu'une première indication.

Il existe, pour les recherches de précision, une méthode plus parfaite, fondée sur les considérations suivantes :

De même qu'un son complexe révèle ses harmoniques par les résonances qu'il est capable d'exciter, de même une grandeur électrique non sinusoïdale est capable de faire connaître ses harmoniques par son aptitude à exciter des effets plus ou moins notables dans des circuits accordés, comme des résonateurs, pour telles ou telles fréquences.



Par exemple, qu'on fasse passer un courant périodique dans les bobines d'un électro-aimant au devant duquel se trouve tendu un fil de fer, et l'on verra ce dernier entrer en vibrations notables si sa tension et sa longueur sont telles que sa période de vibration corresponde à celle d'un des harmoniques du courant. En faisant varier d'une manière continue, soit la longueur, soit la tension de ce fil, on aura, d'après la fréquence et l'amplitude de chacune des diverses résonances qu'il manifestera, le numéro d'ordre et l'amplitude relative de chacun des harmoniques du courant.

Cette méthode d'analyse d'un courant, très proche parente de la méthode d'analyse d'un son complexe au moyen du sonomètre, a été indiquée par *Healing et Le Tall* (1.)

Elle ne fait d'ailleurs pas connaître les différences de phases.



Si la bobine fixe d'un électro-dynamomètre reçoit un courant périodique

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}_1 \sin \omega t + \mathbf{A}_3 \sin 3\omega t + \dots + \mathbf{A}_p \sin p\omega t + \dots \\ + \mathbf{B}_1 \cos \omega t + \mathbf{B}_3 \cos 3\omega t + \dots + \mathbf{B}_p \cos p\omega t + \dots$$

et la bobine mobile un courant sinusoïdal

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \sin q\omega t$$

le couple déviant, proportionnel à la valeur moyenne du produit  $\mathbf{IJ}$ , sera maximum pour toute valeur de  $q$ , égale à un des coefficients de  $\omega t$  dans l'expression de  $\mathbf{I}$ . Si donc, en empruntant le courant  $\mathbf{J}$  à un petit alter-nateur réglable à volonté, on fait varier  $q$  d'une manière continue, chaque fois qu'on verra le couple  $\mathbf{C}$  de l'électro-dynamomètre passer par un maximum, on sera averti de la présence dans  $\mathbf{I}$  d'un harmonique dont on aura l'ordre  $p$  en considérant la valeur de  $q$  à ce moment.

D'ailleurs la valeur

$$\mathbf{C} = h \frac{\mathbf{J}_0 \mathbf{A}_p}{2}$$

---

1. *Journal of the Inst., of Electr. Eng.*, t. xviii, p. 284. — *Lum. élect.* t. xxxii. p. 584 ; 1899.

du couple à cet instant fera connaître  $\mathbf{A}_p$ , qui lui est proportionnel.

Ayant ainsi trouvé les différents coefficients  $\mathbf{A}$ , on obtiendra ensuite les  $\mathbf{B}$  en opérant de même avec un courant auxiliaire

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}'_0 \cos \mathbf{q}\omega t$$

Les harmoniques seront par là connus, non seulement en amplitude, mais aussi en phase d'après les relations :

$$\mathbf{I}_p = \sqrt{\mathbf{A}_p^2 + \mathbf{B}_p^2}$$

et

$$\operatorname{tg} \chi_p = - \frac{\mathbf{B}_p}{\mathbf{A}_p}$$

Cette élégante méthode, proposée par *Lamb et Smith* et par *Blondel*, (1) est d'une application délicate et n'est pas encore entrée dans la pratique.



Plus simple, plus expéditive, plus facile à appliquer, par conséquent, est la méthode de *Pupin* (2) ou méthode de résonance proprement dite, dont voici le principe :

Si, à l'ensemble obtenu en associant en série à une capacité  $\mathbf{C}$  une bobine de faible résistance  $\mathbf{R}$  et de notable self-induction  $\mathbf{L}$ , (*fig. 415*), on applique une différence de potentiel périodique :

1. *Industrie électrique*, 1893, p. 375.

2. **L. Pupin.** — *Méthode d'analyse des courants alternatifs.*  
Lum. électr. t. LIII, p. 288., (1894).

$$V = V_1 \sin(\omega t + \delta_1) + V_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3) + \dots + V_n \sin(\omega_n t + \delta_n) + \dots$$

le système sera le siège d'un courant :

$$i = \frac{V_1}{Z_1} \sin(\omega t + \delta_1 - \varphi_1) + \frac{V_3}{Z_3} \sin(\omega_3 t + \delta_3 - \varphi_3) + \dots + \frac{V_n}{Z_n} \sin(\omega_n t + \delta_n - \varphi_n) + \dots$$

dans lequel l'harmonique  $n$  sera dominant si  $L$  et  $C$  sont ajustés de façon que  $Z_n$  se réduise à  $R$ , ce qui aura lieu pour  $K_n = 0$ , c'est-à-dire pour

$$L\omega_n = \frac{1}{C\omega_n}$$

ou

$$CL\omega_n^2 = 1$$

ou enfin, puisque  $\omega_n = n\omega$  :

$$CLn^2\omega^2 = 1$$

Dans la différence de potentiel  $U$  aux bornes du condensateur, l'harmonique  $n$  aura aussi une amplitude prépondérante.

D'après cela, la méthode de recherche des harmoniques imaginée par M. *Pupin*, consiste à faire croître graduellement la capacité  $C$ , à partir de zéro, et à saisir, à l'aide d'un électromètre sensible mis en relation avec ses bornes, les maxima que présente, pour certaines valeurs de  $C$ , la différence de potentiel  $U$ . L'ordre  $n$  de l'harmonique correspondant à un maximum

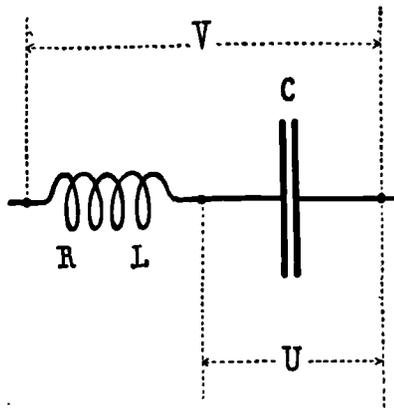


FIG. 415

observé se déduit de la valeur  $C$  de la capacité correspondante (1) par la formule  $CLn^2\omega^2 = 1$ .



M. *Armagnat* (2) a apporté à la méthode de Pupin un important perfectionnement par l'application d'un oscillographe ou d'un rhéographe à l'examen du courant  $i$ , dont est le siège le système formé par la bobine de self et le condensateur.

La courbe obtenue diffère peu de la sinusoïde correspondant à l'harmonique mis en résonance, et, si l'on produit en même temps, sur le même écran, à l'aide d'un deuxième rhéographe, la courbe représentative de la différence de potentiel  $V$  à étudier, on n'a qu'à compter les périodes de la première comprises dans une période de la seconde pour avoir l'ordre de l'harmonique considéré.

L'amplitude et la phase relatives de l'harmonique sont également directement visibles sur l'écran.

C'est par l'ajustement de  $L$ , au moyen d'une bobine à self variable, que la condition de résonance est le plus commodément réalisée.

Quand la différence de potentiel  $V$  à étudier est de plusieurs centaines de volts, l'appareil *Armagnat*, c'est à dire le résonateur de Pupin ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ), suivi d'un oscillographe ( $O$ ) est mis en dérivation (*fig. 416*) aux

1. En toute rigueur, la capacité qu'il faut introduire dans la formule est celle de tout l'assemblage formé par la bobine, le condensateur et l'électromètre.

2. *Armagnat*. *Application des oscillographes à la méthode de résonance*.  
Bull. de la Soc. fr. de phys. (décembre 1901).

extrémités d'une partie  $r_2$  d'une résistance non inductive  $r_1 + r_2$ .

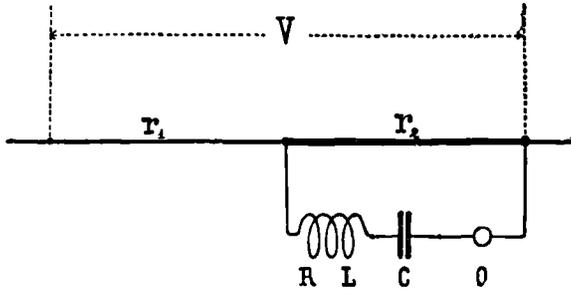


FIG. 416

L'harmonique  $n$  amené en résonance a, dans le courant  $i$  de l'oscillographe, une amplitude  $i_n$  qui est, à celle  $V_n$  de l'harmonique du même rang de  $V$ , dans le rapport déduit des relations :

$$\frac{i_n}{\frac{1}{R}} = \frac{(i_2)_n}{\frac{1}{r_2}} = \frac{(i_1)_n}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r_2}} = \frac{Rr_2}{R + r_2} \cdot \frac{V_n}{r_1 + \frac{Rr_2}{R + r_2}}$$

soit :

$$i_n = \frac{r_2}{r_1 r_2 + r_1 R + r_2 R} V_n$$

On choisit les résistances  $r_1$  et  $r_2$  de façon que la différence de potentiel  $r_2 i_2$  n'offre aucun danger pour le condensateur.



Lorsqu'on a étudié les harmoniques  $V_n$  de la différence de potentiel  $V$  aux bornes d'un alternateur, on peut en déduire ceux  $E_n$  de la force électromotrice  $E$ , en appliquant pour chacun d'eux la relation *vectorielle*

$$\bar{V}_n = -\bar{Z}_n \bar{I}_n + \bar{E}_n$$

$Z_n$  étant l'impédance de l'alternateur pour l'harmonique considéré.

Le vecteur  $E_n$  différera d'autant moins du vecteur  $V_n$  que le courant  $I_n$  débité par l'alternateur dans l'appareil appliqué à ses bornes sera plus faible. L'appareil d'étude devra donc, comme un voltmètre, avoir une résistance aussi grande que possible.



Pour faire l'analyse harmonique d'un courant, la méthode la plus simple consiste à opérer sur la différence de potentiel aux bornes d'une résistance non inductive faisant partie de son circuit. On a vu (page 449) que les harmoniques de cette différence de potentiel sont proportionnels à ceux du courant et en phase avec eux.

Mais comme les résistances sans self appréciable sont nécessairement faibles, les différences de potentiel que l'on est amené à étudier ainsi, sont peu élevées, et, pour que les courants correspondants dans l'appareil d'épreuve soient notables, on est conduit à diminuer  $R$  et  $L$  et à augmenter  $C$  d'une façon peu pratique.

Un procédé plus avantageux consiste à opérer sur la tension aux bornes du secondaire d'un transformateur élévateur à noyau non magnétique, dont le primaire est parcouru par le courant à étudier. L'harmonique observé à l'oscillographe est en phase avec la force électromotrice :

$$-\frac{M\omega_n I_n}{R} \sin\left(\omega_n t - \chi_n + \frac{\pi}{2}\right)$$

induite par le primaire dans le secondaire, et, par suite, en retard de  $\frac{\pi}{2}$  sur l'harmonique  $I_n$  lui-même.



Le mode opératoire employé par M. Armagnat comporte l'emploi d'une capacité réglable par dixièmes de micro facad (1) et d'une self-induction réglable d'une manière continue entre deux valeurs extrêmes (2), dans le genre de celles d'Ayrton et Perry ou de Brillouin (voir ci-dessus page 163 et 164.)

Un premier oscillographe-voltmètre trace sur l'écran la courbe représentative de la différence de potentiel  $V$  à analyser. A cet effet, il est mis, avec une résistance non inductive convenable, en dérivation aux bornes  $P, Q$  de cette différence de potentiel (fig. 417 O).

Entre ces mêmes bornes, est établi l'assemblage de la self  $L$  du condensateur  $C$  et de l'oscillographe analyseur  $O_a$ .

Par un réglage préalable des deux oscillographes, on fait coïncider sur l'écran les axes et les origines des temps.

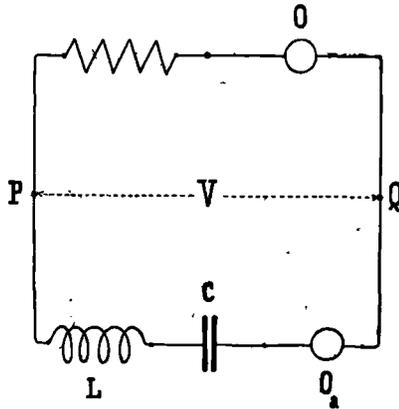


FIG. 417

Ensuite on donne au produit  $CL$  la valeur convenable pour mettre en résonance en  $O_a$  la sinusoïde principale. Une diminution graduelle de  $CL$  amène ensuite successivement en résonance les divers harmoniques existant dans  $V$ .

Quand la résonance est établie pour un harmonique, c'est-à-

1. Entre 0,1 et 10  $\mu F$ .

2. M. Armagnat conseille l'emploi de deux selfs, l'une allant de 0,1 à 0,2 henry, l'autre de 1 à 2 henrys.

dire quand on a  $\mathbf{CL} = \frac{1}{\mathbf{n}^2\omega^2}$  l'intensité du courant dû à l'harmonique  $\mathbf{q}$  dans le circuit de  $\mathbf{O}_a$ , qui est, en général :

$$\begin{aligned} i_q &= \frac{V_q}{Z_q} \sin(\omega_q t + \delta_q - \gamma_q) \\ &= \frac{V_q}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_q - \frac{1}{C\omega_q}\right)^2}} \sin(\omega_q t + \delta_q - \gamma_q) \end{aligned}$$

ou

$$i_q = \frac{V_q}{R \sqrt{1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2} \left(q - \frac{1}{CLq\omega^2}\right)^2}} \sin(\omega_q t + \delta_q - \gamma_q)$$

devient (en remplaçant 1 par  $\mathbf{CLn}^2\omega^2$ , dans  $\frac{1}{\mathbf{CLq}\omega^2}$ ) :

$$i_q = \frac{V_q}{R \sqrt{1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2} \left(\frac{q^2 - n^2}{q}\right)^2}} \sin(\omega_q t + \delta_b - \gamma_q)$$

et a d'autant moins d'importance, que la constante de temps  $\frac{L}{R}$  de la self employée dans le résonateur est plus grande. On doit donc, pour débarrasser la résonance de l'harmonique  $\mathbf{n}$  de tout effet parasite notable dû aux autres, adopter pour la constante de temps  $\frac{L}{R}$  une valeur aussi élevée que possible.

Mais comme la différence de potentiel maxima à laquelle est soumis le condensateur, par le fait de la mise en résonance de l'harmonique  $\mathbf{n}$  considéré, est

$$\frac{I_n}{C\omega_n} = \frac{V_n}{R} = \frac{L\omega_n V_n}{R} = \frac{nV_n L\omega}{R},$$

elle est proportionnelle à  $\frac{L}{R}$ , et cette considération vient à l'encontre de la précédente, c'est-à-dire ne permet pas pour  $\frac{L}{R}$  le choix de valeurs élevées, quand on opère sur un harmonique pour lequel  $nV_n$  présente une valeur un peu grande.

Lorsque la résonance n'est pas tout à fait réalisée, au lieu de  $CLn^2\omega^2 - 1 = 0$  on a  $CLn^2\omega^2 - 1 = \epsilon$ ,  $\epsilon$  étant un nombre très petit; et l'intensité du courant dû à l'harmonique  $n$  est

$$i'_n = \frac{V_n}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_n - \frac{1}{C\omega_n}\right)^2}} \sin(n\omega t + \delta_n - \chi'_n)$$

ou

$$i'_n = \frac{V_n}{\sqrt{R^2 + \frac{\epsilon^2}{C^2\omega_n^2}}} \sin(n\omega t + \delta_n - \chi'_n)$$

avec

$$\text{tg } \chi' = \frac{\epsilon^2}{C^2R^2\omega_n^2}$$

Donc, tant que  $CL$  n'est pas ajusté de façon que  $\epsilon = 0$ , on observe une amplitude  $\frac{V_n}{R\sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{R^2C^2\omega_n^2}}}$  et une phase  $\delta_n - \chi'_n$

différentes de celles  $\frac{V_n}{R}$  et  $\delta_n$  que l'on cherche. Il importe donc qu'on puisse faire varier  $CL$  d'une façon bien continue et qu'on saisisse exactement le moment où l'amplitude maxima est réalisée.

Si l'on tire  $C$  de la relation :  $CL\omega_n^2 = 1 + \epsilon$ , on peut écrire :

$$i'_n = \frac{V_n}{R\sqrt{1 + \frac{L^2\omega_n^2\epsilon^2}{R^2(1 + \epsilon)^2}}}$$

$$\text{tg } \chi' = \frac{L\omega_n\epsilon}{R(1 + \epsilon)}$$

et l'on voit que, pour une valeur donnée du dérèglement  $\epsilon$ , les valeurs de l'amplitude et de la phase observées diffèrent d'autant plus des valeurs vraies que la constante de temps  $\frac{L}{R}$  est plus grande, ce qui interdit encore de lui donner une valeur trop élevée. On doit donc adopter pour  $\frac{L}{R}$  une valeur juste suffisante pour rendre négligeable l'influence des harmoniques voisins de celui qu'on étudie.



Lorsque la condition de résonance de l'harmonique  $n$  est réalisée par une valeur convenable de  $CL$ , pour la valeur normale  $\omega_0$  de la pulsation du générateur auquel est due la différence de potentiel étudiée, on a

$$CLn^2\omega_0^2 = 1;$$

mais lorsque la pulsation prend une valeur différente  $\omega$ , par suite de l'irrégularité de marche du moteur qui commande le générateur, on a

$$CLn^2\omega^2 = 1 \pm \varepsilon$$

De ces relations on déduit :

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \pm \varepsilon$$

ou, en remarquant qu'on a sensiblement  $\omega + \omega_0 = 2\omega_0$ ,

$$\frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0} = \pm \varepsilon$$

D'ailleurs, au lieu d'avoir sa valeur normale

$$I_n = \frac{V_n}{R}$$

l'amplitude de la courbe donnée par l'oscillographe, à l'instant où a lieu cet écart  $\varepsilon$ , prend la valeur

$$I'_n = \frac{V_n}{R \sqrt{1 + \frac{4L^2n^2\omega^2}{R^2} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}}}$$

De la relation :

$$I_n = \frac{I_n}{\sqrt{1 + \frac{4L^2n^2\omega^2}{R^2} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}}}$$

on pourra donc, par des mesures de  $I_n$  et de  $I'_n$ , déduire le rapport  $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$  caractérisant, à l'instant considéré, le degré d'irrégularité du mouvement de la partie tournante du générateur de courant alternatif auquel on aura affaire. La relation précédente donne :

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{R}{2Ln\omega} \sqrt{\frac{I_n^2 - I_n'^2}{I_n'^2}}$$



## QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROMAGNÉTISME

### CHAMPS MAGNÉTIQUES ALTERNATIFS ELECTRO-AIMANTS A COURANTS ALTERNATIFS



#### I

#### Champs magnétiques alternatifs

Soit un espace dans lequel un courant continu, établi en un circuit  $C$ , donnerait lieu à la production d'un champ magnétique ayant, par exemple, en un point  $P$ , une direction  $PQ$  (fig. 418). Si, toutes choses égales d'ailleurs, on substitue dans le circuit  $C$ , à ce courant continu, un courant alternatif, on obtient, au lieu du champ magnétique continu précédent, un *champ alternatif*. En d'autres termes, au point  $P$  considéré, l'intensité  $H$  du champ est alors variable en grandeur avec

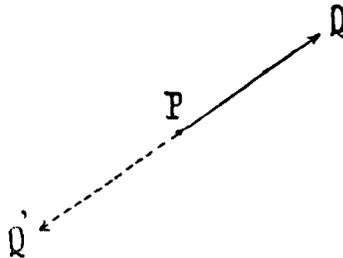


FIG. 418

l'intensité  $i$  du courant excitateur (1) et elle est dirigée alternativement suivant la direction  $PQ$  et suivant son opposé  $PQ'$ . Bref, l'intensité du champ, en tout point de l'espace soumis à l'action magnétique du circuit  $C$ , est alors une grandeur alternative.

Un champ magnétique alternatif est périodique lorsque le courant alternatif qui lui donne naissance est lui-même périodique. La période, et par suite la fréquence, du champ sont égales à celles du courant.

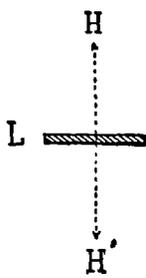
Tous les effets *dirigés* d'un champ magnétique alternatif sont alternatifs et, de plus, périodiques lorsque le champ est lui-même périodique.

Ces considérations générales trouvent leur application dans divers appareils :

#### A. — Oscillographes à fer doux

L'oscillographe à fer doux de Blondel est un appareil d'étude des courants alternatifs ou des différences de potentiel alternatives basé sur l'examen de champs alternatifs correspondants.

Dans cet instrument, l'organe révélateur du champ alternatif est une mince et étroite lame de fer doux tendue de façon que



les lignes de force du champ la traversent suivant son épaisseur (voir *fig. 419* une coupe horizontale de cette lame supposée placée verticalement.)

La lame tendant à s'orienter de manière à se présenter au champ par la tranche, mais, limitée dans ses déplacements par le couple antagoniste que fait naître sa torsion, effectue, de part et d'autre de sa position d'équilibre, de petites excursions angulaires  $\delta$  que rend visibles un faisceau

FIG. 419

1. Si la perméabilité du milieu est constante  $H$  est simplement proportionnel à  $i$ .

lumineux renvoyé par un minuscule miroir dont elle est munie.

Si l'expression du champ, au lieu d'être simplement sinusoïdale est de la forme plus générale :

$$\mathbf{G}i = \mathbf{G}I_1 \sin(\omega t - \gamma_1) + \dots + \mathbf{G}I_n \sin(n\omega t - \gamma_n) + \dots$$

on a, en généralisant les expressions trouvées précédemment (pages 210 et suiv.) :

$$\delta = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{C}} \left[ \frac{I_1 \sin(\omega t - \gamma_1 - \psi_1)}{\sqrt{\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}} \omega\right)^2 + \left(1 - \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{C}} \omega^2\right)^2}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{I_n \sin(n\omega t - \gamma_n - \psi_n)}{\sqrt{\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}} n\omega\right)^2 + \left(1 - \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{C}} n^2 \omega^2\right)^2}} + \dots \right]$$

ou

$$\delta = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{C}} \left[ \frac{I_1 \sin(\omega t - \gamma_1 - \psi_1)}{\sqrt{\left(2\alpha \frac{\tau_0}{\mathbf{T}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\tau_0^2}{\mathbf{T}^2}\right)^2}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{I_n \sin(n\omega t - \gamma_n - \psi_n)}{\sqrt{\left(2n\alpha \frac{\tau_0}{\mathbf{T}}\right)^2 + \left(1 - n^2 \frac{\tau_0^2}{\mathbf{T}^2}\right)^2}} + \dots \right]$$

avec

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{2n\alpha \frac{\tau_0}{\mathbf{T}}}{1 - n^2 \left(\frac{\tau_0}{\mathbf{T}}\right)^2}$$

On voit que le retard de phase d'un harmonique de  $\delta$  sur l'harmonique correspondant de  $\mathbf{H}$  est d'autant plus grand que l'ordre de l'harmonique est plus élevé, car  $\psi_n = \pi$  pour  $n = \infty$ .

Pour un harmonique d'ordre donné,  $\psi$  croît avec  $\alpha$ . Le synchronisme sera donc d'autant plus près d'être réalisé que  $\alpha$  sera plus petit.

Pour  $\alpha = 1$ , on a :

$$\delta = \sum \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{C}} \frac{I_n \sin(n\omega t - \gamma_n - \psi_n)}{1 + n^2 \left(\frac{\tau_0}{\mathbf{T}}\right)^2}$$

avec

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{2n \frac{\tau_0}{T}}{1 - n^2 \left(\frac{\tau_0}{T}\right)^2}$$

Plus le dernier harmonique de  $H$  sera d'ordre élevé plus  $\frac{\tau_0}{T}$  devra être faible pour que l'harmonique correspondant de  $\delta$  reste sensiblement en phase avec lui et ait une amplitude peu différente de  $\frac{I_n}{C}$ .

En d'autres termes, la période propre d'oscillation de l'instrument doit être d'autant plus petite, par rapport à celle du courant étudié, que les harmoniques élevés sont plus importants dans l'expression de ce dernier.

A cet égard, avec une période propre  $\tau_0$  de l'ordre de  $\frac{1}{8000}$  seconde, l'oscillographe à fer doux de Blondel, dans la pratique industrielle où  $T$  est de l'ordre de  $\frac{1}{50}$  sec. et où l'on ne rencontre pas d'harmonique d'ordre supérieur au trentième, donne toute satisfaction.

#### B. — Oscilloradiographe.

Dans cet appareil, dont l'idée première est dû à Hess (1) et qui a été mis au point par Braun (2), l'organe révélateur du

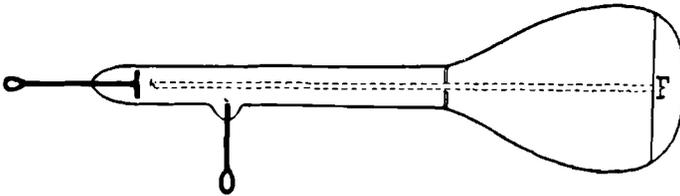


FIG. 420

champ alternatif mis en jeu est un étroit pinceau de rayons cathodiques produit dans un tube, dit tube de Braun, tel que celui représenté par la *fig.* 420, et rencontrant un écran fluo-

1. Hess. C. R. t. cxix, p. 57 (1894).

2. Wiedem Ann. LX, p. 552-559 (1897).

cent F. Le champ étant dirigé perpendiculairement au pinceau, ce dernier éprouve une déviation dans un plan perpendiculaire au champ (plan du papier, dans le cas de la *fig. 420* pour un champ normal au papier.) La grandeur et le sens de cette déviation étant liés à la grandeur et au sens du champ, la trace du pinceau sur l'écran, qui se réduit en l'absence du champ à une petite tache lumineuse devient, sous l'action de ce dernier, en vertu de la persistance des impressions sur la rétine, une ligne droite lumineuse qu'on transforme en courbe représentative de la loi des élongations en combinant ce déplacement avec un autre transversal et proportionnel au temps, soit par l'effet d'un miroir tournant (Braun), soit par l'action sur le pinceau d'un champ auxiliaire dû à un courant continu auquel la manœuvre d'un rhéostat liquide convertible impose une variation proportionnelle au temps (Schfehlner, Zenneck).

Cette méthode, toute récente, a déjà donné d'intéressants résultats (1).

C. — Phase-mètre de L. Rayleigh (2)

Cet appareil est basé sur la façon dont un champ alternatif faible se comporte vis à vis d'une aiguille de fer doux. La valeur instantanée du moment magnétique de l'aiguille est sensiblement proportionnelle à la valeur instantanée de la composante du champ suivant la longueur de cette aiguille.

Si donc (*fig. 421*) une aiguille horizontale de fer doux suspendue à un fil vertical de torsion est placée dans un champ magnétique alternatif horizontal, la valeur instantanée du couple magnétique agissant sur elle étant  $\mathcal{M}H$

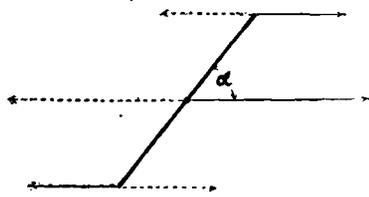


FIG. 421

$\sin \alpha$  et  $\mathcal{N}$  étant proportionnel à  $H \cos \alpha$ , ce couple sera à chaque instant proportionnel à  $H^2 \sin \alpha \cos \alpha$  ou à  $H^2 \sin 2\alpha$ , ou enfin à  $H^2$  si, à l'aide d'une torsion convenable du fil de suspen-

1. E. Zenneck. Wied. Ann. LXIX, p. 854, 851 (1899).

A. Wehnelt et B. Donath. Wied. Ann. LXIX, p. 861, 870 (1899).

A. Wehnelt et Zenneck. Wied. Ann. LXIX, p. 858 (1899).

2. Philos. Mag. XLIII p. 343.

sion, on maintient l'aiguille dans une direction faisant avec celle du champ un angle  $\alpha$  égal à  $45^\circ$ .

Soient alors **B** et **b** (fig. 422) deux bobines de même axe parcourues, la première par un courant alternatif sinusoïdal:  $I = I_0 \sin \omega t$ , et la seconde par un courant:  $J = J_0 \sin(\omega t - \gamma)$ , de même période mais de phase différente. Le champ résultant en un point de l'axe commun aura une expression de la forme  $a \sin \omega t + b \sin(\omega t - \gamma)$  et le couple exercé par lui sur une aiguille de fer doux maintenue à  $45^\circ$  de sa direction sera proportionnel au carré de son amplitude c'est-à-dire à  $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

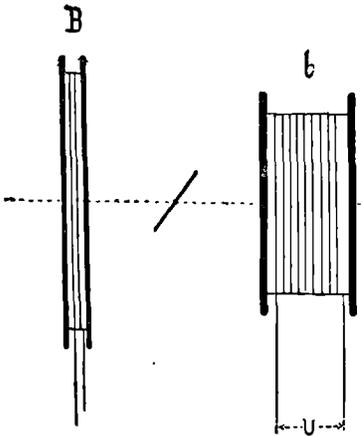


FIG. 422

En notant les torsions nécessaires pour conserver à l'aiguille sa position quand on fait agir soit la première bobine seule, soit la seconde

bobines à la fois, dans un sens ou dans l'autre, on aura des relations d'où l'on pourra aisément déduire l'angle  $\gamma$  de différence de phase des deux courants.

Par exemple, supposons qu'on ait réglé les distances des bobines à l'aiguille de façon qu'elles donnent lieu séparément à des couples égaux: soit  $\delta$  la torsion correspondante du fil de suspension. Soit d'ailleurs  $\theta$  la torsion observée lorsque les deux bobines, dans ces mêmes positions, agissent simultanément.

On aura

$$a^2 = b^2 = m\delta$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \chi = m\theta$$

d'où en remplaçant  $a^2 + b^2$  et  $2ab$  par leur valeur  $2m\delta$ .

$$2m\delta(1 - \cos \chi) = m\theta \text{ et enfin : } \cos \chi = \frac{2\delta - \theta}{2\delta}$$

On peut aussi, après avoir observé l'effet de **B**, régler la distance de **b** à l'aiguille de façon que l'action totale soit égale à celle de **B** et noter alors l'effet de **b** agissant isolément, etc.

Si  $\gamma$  est voisin de  $90^\circ$ , on déterminera avec avantage séparément  $a^2$ ,  $b^2$  et  $4ab \cos \gamma$ , cette dernière expression étant obtenue en prenant la différence des effets du groupe des deux bobines avant et après le renversement du sens d'action de l'une d'elles.

Si la bobine  $b$  ne comprend qu'un petit nombre de spires de faible diamètre, sa constante de temps peut être assez faible pour qu'on puisse considérer le courant  $J$  comme en phase avec la différence de potentiel  $U$  appliquée à ses bornes. L'appareil donnera alors sensiblement le décalage entre le courant  $I$  et la tension  $U$ , qui pourra être, par exemple, la tension d'alimentation d'un appareil parcouru par le courant  $I$ .

En réduisant  $B$  à une seule spire, on peut rendre l'induction mutuelle tout à fait négligeable.



Si à un champ magnétique continu  $H_c$  on superpose un champ alternatif  $H_a$  d'amplitude décroissante depuis une certaine valeur jusqu'à zéro, un fil ou une lame mince de fer ou d'acier soumis à leur action acquièrent une induction magnétique qui est la même fonction de  $H_c$  soit que ce champ continu reçoive une série de valeurs croissantes soit qu'il reçoive une série de valeurs décroissantes. En d'autres termes, la courbe représentative de  $\mathcal{B}$  en fonction de  $H_c$ , au lieu de présenter deux branches distinctes, l'une montante, l'autre descendante, comme l'indique la fig. 161 (page 26) correspondant au cas où le champ continu est seul en jeu, présente, à la faveur de l'action supplémentaire du champ alternatif décroissant, une branche unique (fig. 423) la même pour

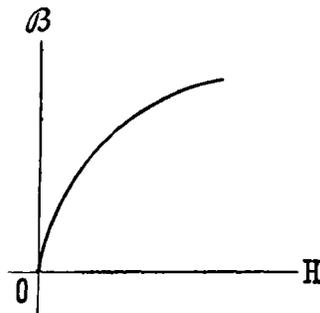


FIG. 423

les valeurs de  $H_c$  croissantes que pour les valeurs décroissantes.

On exprime ce fait en disant qu'un champ alternatif d'amplitude décroissante supprime l'hystérésis magnétique pour un échantillon mince de fer ou d'acier soumis, pendant son influence, à l'action magnétisante d'un courant continu. (1)

On obtient un résultat analogue en soumettant l'échantillon de métal magnétique considéré soit à une série de chocs mécaniques, soit à l'action du champ magnétique oscillant (fréquence:  $10^6$  à  $10^7$ ) dû à un circuit parcouru par la décharge oscillante d'un condensateur, soit à une aimantation transversale oscillante obtenue en insérant le métal magnétique lui-même dans un circuit parcouru par une décharge oscillante.

Toutefois les courbes d'aimantation auxquelles conduisent ces deux derniers procédés de réduction de l'hystérésis sont un peu différentes de celle à laquelle conduit l'un des deux premiers (champ alternatif ou chocs mécaniques) (2).

---

1. Franklin et Clarke. — *Physical Review*, t. VIII, p. 304 (1899).

2. Ch. Maurain. Etude et comparaison des procédés de réduction de l'hystérésis magnétique. *Bull. de la Soc. de Phys.* 1904. p. 67-84.



## . II

**Electro-aimants à courants alternatifs**

Entre un électro-aimant et son armature on observe une attraction aussi bien lorsqu'on l'excite par un courant alternatif que lorsqu'on l'excite par un courant continu. On peut donc demander à des électro-aimants à courants alternatifs les mêmes services qu'aux électro-aimants à courants continus.

Toutefois lorsqu'un électro-aimant est destiné à fonctionner d'une façon prolongée en courants alternatifs, il importe de donner à son noyau et à son armature une constitution feuilletée pour éviter la dissipation inutile d'énergie qui s'y produirait par courants de Foucault. En outre, pour réduire au minimum la perte par hystérésis, il convient de choisir, pour constituer ces pièces, des tôles présentant un coefficient Steinmetz aussi faible que possible.



D'expériences faites par *S.P. Thompson* et *Miles Walker* (1), il résulte que, tant que la valeur efficace de l'induction magnétique dans la section d'adhérence de l'armature au noyau est inférieure à une certaine limite, l'attraction moyenne exercée par un électro-aimant sur son armature  $a$ , pour une valeur donnée  $I$  de l'intensité

---

1. *Soc. de Phys. de Londres*, 27 avril 1894, Lum. él. : t. II, p. 588 (1894).

efficace du courant d'excitation, la même valeur en courants alternatifs qu'en courants continus, tandis que, pour des inductions dépassant cette limite, l'attraction est plus grande en courants continus qu'en courants alternatifs.

C'est ce que fait ressortir le tableau suivant relatif à l'électro-aimant étudié par les auteurs précités :

Excitation (ampères)	Induction magnétique	Force d'adhérence (grammes)	
		Courant continu	Courant alternatif
8	2300	280	280
12,5	3600	820	820
21	5600	2400	2200

• ⊗ →

La valeur efficace de la différence de potentiel à établir aux bornes d'un électro-aimant donné, pour obtenir un courant d'excitation de valeur efficace désirée  $I$ , n'est pas la même suivant qu'on opère en courant alternatif ou en courant continu.

Dans le premier cas, cette différence de potentiel ( $V_a$ ) est égale au produit de  $I$  par l'*impédance* de l'enroulement ; tandis que dans le second elle n'a que la valeur  $V_c$  égale qu'au produit de  $I$  par la *résistance ohmique*. On a donc :

$$V_a = ZI$$

$$V_c = RI$$

et

$$\frac{V_a}{V_c} = \frac{Z}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{R}$$

ou, si la résistance ohmique  $R$  est faible vis à vis de l'inductance  $L\omega$  :

$$\frac{V_a}{V_c} = \frac{L\omega}{R}$$

Pratiquement, on peut donc dire que le rapport des différences de potentiels efficaces correspondant à une même excitation est, toutes choses égales d'ailleurs, égal au produit de la constante de temps  $\frac{L}{R}$  de l'enroulement par la pulsation  $\omega$  du courant d'alimentation.

La constante des temps dépend (par  $L$ ) de la distance entre le noyau et l'armature, et va en diminuant lorsque cette distance augmente. Il en est de même du rapport  $\frac{V_a}{V_e}$ .



Dans la pratique, on a souvent à se demander comment doit se comporter un électro-aimant lorsqu'on l'excite sous une différence de potentiel de valeur efficace  $V$  constante.

Dans ce cas, si l'armature s'éloigne du noyau, l'impédance diminue, l'intensité du courant d'excitation augmente et compense à peu près l'effet de l'éloignement pour donner une attraction très peu décroissante, en sorte que, dans d'assez larges limites, un électro-aimant à courants alternatifs exerce sur son armature une action à peu près constante, alors que cette action est très rapidement décroissante quand l'excitation a lieu en courant continu.



Le nombre  $n$  de spires qu'exige un électro-aimant à courants alternatifs, pour produire, sous une tension

d'alimentation de valeur efficace donnée  $V$ , une attraction donnée sur son armature au contact, peut être approximativement déterminée de la façon suivante :

Soit  $\mathcal{B}$  la valeur efficace de l'induction magnétique nécessaire pour l'effet désiré. La valeur efficace du flux à travers une section  $S$  du noyau sera  $\Phi = \mathcal{B}S$ , et celle de la force électromotrice de self-induction, due à la variation du flux à travers les  $n$  spires de l'enroulement :  $E_s = \frac{n\omega\Phi}{10^8}$ . Or, si l'on néglige la résistance ohmique de l'enroulement, on a  $V = E_s$  et, par suite :

$$n = \frac{10^8 V}{\omega \Phi} .$$


Pour une situation donnée de l'armature d'un électro-aimant de noyau donné, le nombre  $A$  d'ampères-tours résultant de l'application à l'enroulement d'une tension de valeur efficace et de fréquence données et sensiblement en raison inverse du nombre de tours.

En effet, en négligeant la résistance ohmique de l'enroulement, et en appelant  $L$  le coefficient de self-induction, on a  $I = \frac{V}{L\omega}$ . D'ailleurs  $L = kn^2$ ,  $k$  dépendant de la situation de l'armature. La relation  $I = \frac{V}{kn^2\omega}$  donne bien :  $nI = A = \frac{V}{k\omega n}$  ou  $An = c^{te}$ .



Si un électro-aimant à noyau plongeur se trouve relié à deux points entre lesquels existe une différence de potentiel alternative de valeur efficace croissante, comme il arrive, par exemple, entre les deux charbons d'une lampe à arc par suite de l'augmentation de longueur de l'arc dû à l'usure des crayons, le courant dans le fil de l'électro augmente, mais comme, en même temps,

par l'enfoncement du noyau, la self-induction  $L$  augmente aussi, l'augmentation du courant est beaucoup moins grande, relativement à celle de la différence de potentiel, que si l'impédance de l'enroulement demeurait constante. Aussi les électros de réglage actionnés par des différences de potentiels alternatives sont-ils beaucoup moins sensibles que ceux qui sont mis en jeu par des différences de potentiels continues.

Pour remédier à cet inconvénient, M. Claude (1) a proposé d'associer en série avec tout électro devant obéir aux variations d'une différence de potentiel alternative, un condensateur de capacité  $C$  telle que  $\frac{1}{C\omega}$  soit supérieur à  $L\omega$ . L'impédance de l'ensemble est

alors :  $\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}$  et diminue quand, par

l'enfoncement du noyau, la self-induction augmente. Les conditions de fonctionnement de l'appareil deviennent alors meilleures même qu'en courants continus où l'impédance, réduite à la résistance, demeure constante.

Cet emploi des condensateurs est de réalisation facile dans les appareils comme les lampes à arc où les tensions mises en jeu ne sont que de quelques dizaines de volts. On peut alors diminuer beaucoup l'épaisseur des diélectriques et obtenir des capacités notables sous de faibles volumes. D'ailleurs en munissant les bobines de fils fins et donnant par conséquent à  $L$  de grandes

---

1. Claude. — Sur le fonctionnement des lampes à arc à courant alternatif. (*Société int. des Electric., juin 1897*). *Congrès international d'Electricité* (1900). T. 1, p. 430.

valeurs, on n'aura besoin que de valeurs de  $C$  faibles.

Comme il ne s'agit pas ici de neutralisation exacte, on n'a pas à se préoccuper de l'écart que les courbes de tensions peuvent présenter par rapport à la forme sinusoïdale.



On trouve des électro-aimants à courants alternatifs, dans un grand nombre d'appareils. Nous nous bornons ici aux deux exemples ci-après.

### 1. — Fréquence-mètre R. Kempf-Hartman.

Si à un électro-aimant à courants alternatifs, on donne comme armature une anche d'acier  $a$ , fixée à un bout et libre à l'autre,

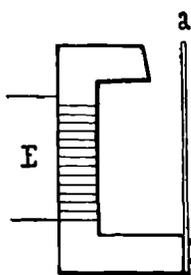


FIG. 424

à la façon des anches des tuyaux sonores (fig. 424), l'action attractive, périodique en intensité, à laquelle cette anche est alors soumise lui imprime un mouvement vibratoire forcé, d'amplitude très faible tant que la période  $\frac{T}{2}$  de cette action attractive diffère de la période  $\Theta$  des vibrations propres de l'anche, et, au contraire, d'amplitude notable lorsque  $\frac{T}{2} = \Theta$ .

Si donc on présente un même électro-aimant successivement à toute une série d'anches de périodes  $\Theta$  graduellement croissantes ou décroissantes par intervalles très petits, le rang de celle que cet électro mettra en résonance notable caractérisera l'ordre de grandeur de la fréquence du courant alternatif mis en jeu, et pourra même conduire à la connaissance de cette fréquence si l'on a préalablement déterminé, à l'aide de courants de fréquences connues, la fréquence du courant excitateur optimum de chacune des anches de la série.

Tel est le principe du **fréquence-mètre** très pratique imaginé par R. Kempf-Hartman (1).

1. Congrès intern. d'Electr., Paris 1900. — Annexes, p. 32.

## 2. — Interrupteur Villard.

Qu'une lame  $fl$  (fig. 425), fixée à une de ses extrémités  $f$  et libre à l'autre  $l$ , soit entourée d'une bobine  $b$  parcourue par un courant alternatif, elle sera simplement soumise à une aimantation longitudinale alternative, et demeurera en repos. Mais, si l'on soumet son extrémité libre à l'action d'un champ magnétique continu, de direction perpendiculaire, dans le plan des déplacements que la lame peut éprouver par flexion, on la verra aussitôt prendre un mouvement vibratoire.

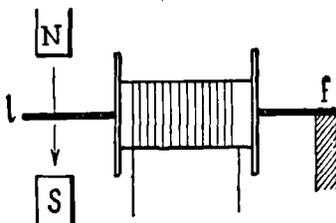


FIG. 425

Ce mouvement est de période égale à celle de la tension alternative appliquée à la bobine  $b$ . En effet, pendant toute la demi-période où l'extrémité  $l$  de la lame est constituée à l'état de pôle nord, cette extrémité se déplace dans le sens du champ qui agit sur elle, fuyant le pôle  $N$  et tendant vers le pôle  $S$  de l'aimant producteur de ce champ. Au contraire, pendant la demi-période suivante, où l'extrémité  $l$  est constituée à l'état de pôle Sud, elle se déplace en sens contraire. Le synchronisme sera d'autant plus vite atteint que la lame sera soumise à une action amortissante plus énergique. Pour satisfaire à cette condition on peut, par exemple, la munir d'une palette métallique immergée dans un liquide.

Si cette lame est disposée de façon à faire office d'interrupteur dans un circuit parcouru par un courant alternatif de même période que la tension  $u$ , agissant sur sa bobine, elle pourra rompre ce circuit pendant toutes les demi-périodes où le courant aurait un certain sens et, au contraire, ne permettre à ce courant de passer que pendant les demi-périodes où il se présenterait dans l'autre sens.

C'est sur ces remarques que M. Villard a fondé la construction d'un interrupteur permettant d'utiliser tous les alternances de même sens d'un courant alternatif pour produire des effets (charges d'accumulateurs, alimentation de bobines de Ruhmkorf, etc.) du même genre que ceux obtenus avec des courants continus<sup>(1)</sup>.

1. Interrupteur à mercure pour courant alternatif. L'industrie électrique, t. XII, p. 221 (1903).

Soit  $K \frac{d^2y}{dt^2} + A \frac{dy}{dt} + Cy = 0$  l'équation définissant le mouvement propre amorti de la lame vibrante ; la pseudo-période de ce mouvement (voir page 204) sera :  $\tau = \frac{4\pi K}{\sqrt{4CK - A^2}}$

et sa pulsation :  $\Omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{C}{K} - \left(\frac{A}{2K}\right)^2}$ .

Le mouvement forcé imposé à cette lame par la bobine  $b$ , siège du courant  $i = I_{\max} \sin \omega t$  de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , dû à la différence de potentiel alternative sinusoïdale  $u$ , sera, après un régime variable d'autant plus court que l'amortissement sera plus grand, un mouvement sinusoïdal de période  $T$  présentant, relativement au courant  $i$ , une différence de phase  $\varphi$  définie (voir

page 211) par la relation  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A\omega}{C - K\omega^2} = \frac{\frac{A}{K} \omega}{\frac{C}{K} - \omega^2}$ , ou, en

tirant  $\frac{C}{K}$  de l'expression de  $\Omega$  :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{A}{K} \omega}{\left(\frac{A}{2K}\right)^2 + \Omega^2 - \omega^2}$$

Cette formule montre que si  $\omega$  diffère peu de  $\Omega$  et si  $\frac{A}{K}$  est un peu grand,  $\operatorname{tg} \varphi$  se réduit sensiblement à  $\frac{\omega}{\frac{1}{4} \frac{A}{K}}$  et les petites variations de  $\omega$  influent alors très peu sur le décalage  $\varphi$ .

La vibration de la lame présentant un retard de phase  $\varphi$  sur  $i$ , et  $i$  lui-même présentant un décalage  $\chi$  sur  $u$ , il s'ensuit que les oscillations de la tige dans le godet de mercure présentent, relativement au courant qu'elles interrompent et rétablissent, un décalage qu'on pourra régler en modifiant soit  $\varphi$ , soit  $\chi$ , soit à la fois  $\varphi$  et  $\chi$ .

En raccourcissant la lame vibrante, on diminuera  $\tau$ , on augmentera en conséquence  $\Omega$  et, finalement, on diminuera  $\varphi$ . Au

contraire, une augmentation de la longueur de la partie vibrante entraînera un accroissement de  $\varphi$ . Ce réglage s'effectue aisément au moyen d'un étrier qui glisse le long de l'aimant et qu'on fixe à l'aide d'une vis de pression.

Le réglage de  $\chi$  s'obtient en modifiant la self et la résistance du circuit de la bobine **b** par l'insertion ou la suppression dans ce circuit de groupes de spires et de lampes à incandescence.

Pour obtenir un courant redressé on règle l'interrupteur de façon que la tige reste plongée dans le mercure pendant toute la durée d'une des alternances du courant et se trouve en dehors pendant toute l'alternance suivante.

Pour effectuer la charge d'une batterie d'accumulateurs, on effectue le réglage de telle façon que la fermeture du circuit ait lieu au moment où la différence de potentiel alternative dont on dispose devient supérieure à la force électro-motrice de la batterie et l'ouverture au moment où elle est sur le point de lui devenir inférieure.

Pour actionner une bobine de Ruhmkorf, on met le primaire de celle-ci en série avec la lame vibrante, en immobilisant l'interrupteur de la bobine dans sa position d'ouverture et on règle la différence de phase de façon que l'interruption se fasse au moment où le courant primaire est maximum. L'interruption ayant toujours lieu sur les alternances de même sens, le résultat obtenu sera le même que lorsqu'on fournit au primaire du courant continu.

Tous les réglages dont il vient d'être question sont grandement facilités si l'on a soin de tracer avec un ondographe les courbes des différences de potentiels et des courants mis en jeu.



## CINQUANTIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROMAGNÉTISME

\*\*

## CHAMPS TOURNANTS DE FERRARIS



### I

#### Théorèmes généraux

Par analogie avec les résultats fournis en Acoustique et en Optique par la combinaison de vecteurs sinusoïdaux (expérience de *Lissajous*, polarisation circulaire et elliptique), *Galileo Ferraris* (1) a établi, dans le domaine des champs magnétiques, les théorèmes suivants (2) :

*Si, en un point O (fig. 426), existent deux champs magnétiques sinusoïdaux rectangulaires  $H_1$ ,  $H_2$ , de même pulsation  $\omega$ , de même amplitude  $H$ , mais présentant l'un par rapport à l'autre une différence de phase d'un quart de période, leur résultante est un champ d'intensité constante  $H$ , dont la direction*

---

1. Physicien et ingénieur italien (1847-1897).

2. **G. Ferraris**. — Mémoire sur la rotation électrodynamique produite au moyen des courants alternatifs.

*Atti della r. Acc. delle sc. di Torino*, vol. xxiii (1885).

*tourne autour de ce point d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire  $\omega$ .*

En effet, les vecteurs représentatifs des champs composants ont à chaque instant des expressions

$$H_1 = H \sin \omega t$$

$$H_2 = H \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ = H \cos \omega t$$

identiques à celles des projections sur  $X'X$  et sur  $Y'Y$  d'un vecteur  $H$  faisant avec  $OX$  un angle  $\omega t$ .

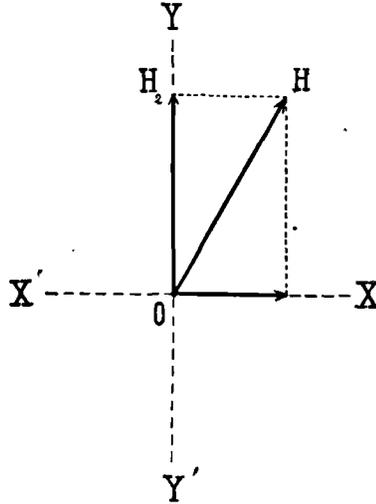


FIG. 426

La résultante, par suite, n'est autre que ce vecteur  $H$ .

Elle est donc constante en grandeur et tournante.

Un tel champ magnétique se nomme **champ tournant circulaire**, l'extrémité  $H$  du vecteur tournant qui le représente décrivant un cercle de centre  $O$ .

Si  $F$  est la fréquence des champs composants, on a  $\omega = 2\pi F$ , et, par conséquent, le champ résultant tournant effectue, autour du point  $O$ ,  $F$  révolutions par seconde, soit un tour en un temps égal à la période  $T$  des champs composants. . . . .

Plus généralement :

*Si l'on a, en un point  $O$ ,  $m$  champs sinusoïdaux de même pulsation  $\omega$ , de même amplitude :  $H$ , mais décalés, en phase et en direction, chacun par rapport au suivant de  $\frac{2\pi}{m}$  (les lignes d'action de ces champs ayant pour parties positives  $m$  demi-droites fixes fai-*

sant entre elles des angles  $\frac{2\pi}{m}$  ) le champ résultant est de grandeur constante :  $m \frac{H}{2}$  et tourne autour du point considéré avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

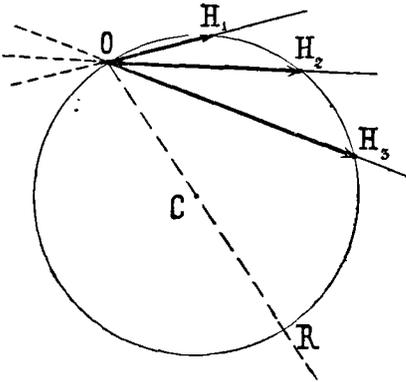


FIG. 427

En effet, à chaque instant, une représentation géométrique des champs donnés est fournie (fig. 427) par les segments  $OH_1, OH_2, \dots, OH_m$ , découpés, sur les  $m$  lignes d'action correspondantes, par une circonférence  $C$ , de diamètre  $H$ , située dans le plan de ces lignes, passant par le point  $O$ , et tournant, autour de ce point, d'un mouvement uniforme, avec une vitesse angulaire

$\omega$ ; car si l'angle compris entre le diamètre  $OCR$  et le premier segment est  $\frac{\pi}{2} - \omega t$ , les segments en question ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
 & H \sin \omega t \\
 & H \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{m} \right) \\
 & H \sin \left( \omega t - 2 \frac{2\pi}{m} \right) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & H \sin \left( \omega t - (m - 1) \frac{2\pi}{m} \right)
 \end{aligned}$$

expressions qui sont celles mêmes des champs donnés.

Evaluons la somme de leurs projections sur  $OCR$ .

On a, évidemment :

$$\begin{aligned}
 \text{proj. } OH_1 &= OC + \text{proj. } CH_1 \\
 \text{proj. } OH_2 &= OC + \text{proj. } CH_2 \\
 \dots \dots \dots \\
 \text{proj. } OH_m &= OC + \text{proj. } CH_m
 \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant :

Proj. de la résultante =  $m \cdot OC$  + proj. de  $m$  rayons équidistants

. Or la somme algébrique des projections sur une droite de  $m$  rayons d'un cercle formant une étoile régulière (1) est nulle.

On a donc :

$$\text{proj. de la résultante} = m \cdot OC = m \cdot \frac{H}{2}$$

D'ailleurs, la projection de la résultante sur une perpendiculaire à  $OCR$  est nulle (comme égale à  $m$  proj.  $OC$  (nulle) + proj. de  $m$  rayons équidistants (nulle)).

En définitive, la résultante des champs considérés est dirigée suivant  $OCR$  et égale à  $m \frac{H}{2}$ . Elle est donc bien constante en grandeur et animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\omega$ .



Le cas particulier le plus simple de ce théorème

général est celui de trois champs décalés d'un tiers de période et ayant respectivement pour lignes d'action positives trois demi-droites  $O1$ ,  $O2$ ,  $O3$ , écartées mutuellement de  $\frac{2\pi}{3}$ , (fig. 428).

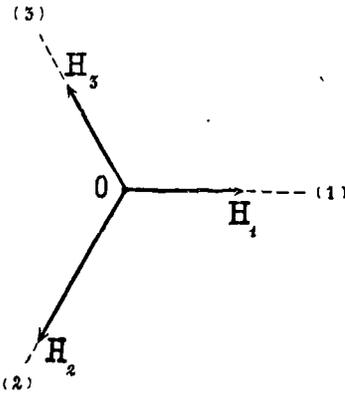


FIG. 428

sants de même direction (fig. 429) qui ont pour résultante

Si l'on fait  $m = 2$ , on a deux champs compo-

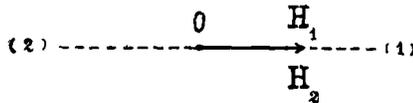


FIG. 429

1. Les arcs  $OM_1, H_1, H_2, \dots, H_{m-1}, M_m$ , sont égaux comme interceptés par les côtés d'angles égaux ayant leurs sommets en un point  $O$  de la circonférence.

tante un champ alternatif et non un champ tournant.

Pour avoir un système réduit à deux champs composants

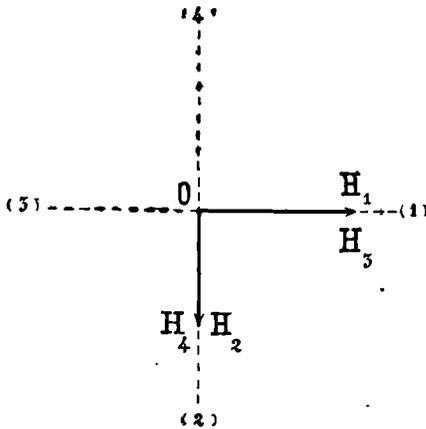


FIG. 430

posants rectangulaires il faut faire  $m = 4$  (fig. 430), et ne garder que deux ( $B_1$  et  $B_2$ , ou  $B_3$  et  $B_4$ ) des 4 bobines qui donneraient le groupe des 4 champs  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ .

De même, le groupe de bobines réalisant le cas de trois

champs composants peut être envisagé comme la moitié du groupe qui réaliserait le cas de  $m = 6$ .

D'une manière générale, d'un système réalisant le cas de  $m$  pair ( $m = 2n$ ) on peut ne conserver qu'un seul des deux champs composants qui se présentent suivant chaque ligne d'action, le second ne faisant que doubler l'effet du premier. On a alors un champ résultant tournant dont l'amplitude n'est que  $\frac{1}{2} \left( m \frac{H}{2} \right)$ .

Exemples :

Deux bobines à angle droit, alimentées par des courants sinusoïdaux de même période, de même amplitude  $H$  et décalés l'un par rapport à l'autre d'un quart de période donneront un champ tournant de grandeur :  $\frac{1}{2} \left( 4 \frac{H}{2} \right) = H$  (résultat trouvé directement ci-dessus, page 489).

Trois bobines équi-inclinées de  $120^\circ$ , alimentées par des courants sinusoïdaux de même période, de même amplitude  $H$  et

décclés, chacun par rapport au suivant, d'un tiers de période donneront un champ tournant de grandeur  $3 \frac{H}{2}$ .



Le vecteur **OH** représentatif d'un champ magnétique alternatif sinusoïdal :  $H \sin (\omega t - \varphi)$  de pulsation  $\omega$  et de direction fixe **YY'** (fig. 431) est, à chaque instant, la résultante de deux vecteurs **OT**, **OT'**, constants, égaux à la moitié de son amplitude, tournant autour de **O** en sens inverses, avec une même vitesse angulaire  $\omega$ , et offrant à chaque instant des directions symétriques l'une de l'autre par rapport à **YY'**.

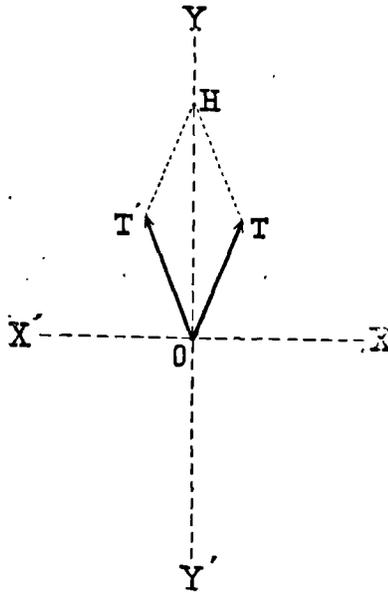


FIG. 431

En effet,  $\omega t - \varphi$  étant l'angle que fait **OT** avec **OX** à l'instant  $t$ , la résultante de **OT** et de **OT'** est égale à cet instant à  $2.OT. \sin (\omega t - \varphi)$ ; or,  $2.OT = H$ ; cette résultante n'est donc autre que  $H \sin (\omega t - \varphi)$  c'est-à-dire le champ alternatif donné.

Pour faciliter le langage nous appellerons les vecteurs mobiles **OT**, **OT'** ci-dessus définis, les *index des composantes tournantes* ou encore les *composantes tournantes* du champ [sinusoïdal donné de direction fixe **OH**.

Le théorème précédent offre cet intérêt de permettre soit de remplacer un champ sinusoïdal fixe donné par le système de ses composantes tournantes, soit, inversement, de remplacer un système de deux champs tournants égaux par leur résultante alternative de direction fixe.



## II

## Corollaires

Un système formé (fig. 432) de deux champs tournants inégaux  $OT$ ,  $OT'$  animés de la même vitesse

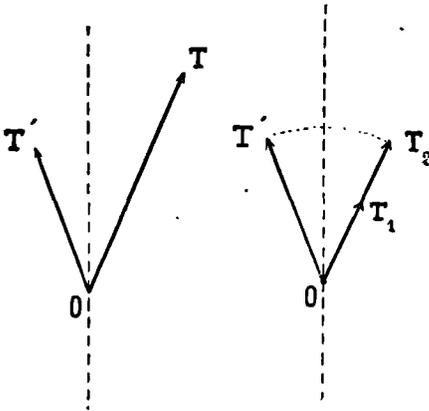


FIG. 432

angulaire  $\omega$  en sens contraires, équivaut à un champ tournant égal à leur différence, dont le sens de rotation est le même que celui du plus grand, et à un champ fixe sinusoïdal d'amplitude double du plus petit.

En effet, on peut substituer à  $OT$  le système des deux vecteurs de même direction  $OT_1 = OT - OT'$  et  $OT_2 = OT'$  qui peuvent être considérés comme ses composantes. Or le système  $OT_1, OT_2, OT'$  ainsi obtenu, et équivalent au système donné, peut

lui-même être remplacé par le vecteur fixe résultant de la combinaison des vecteurs tournants égaux et contraires  $OT_2$  et  $OT'$ , joint au vecteur tournant  $OT_1$ .

*Un système formé (fig. 433) de deux champs tournants animés de la même vitesse angulaire  $\omega$  dans le même sens équivaut à un champ tournant, de même sens, dont la grandeur est la somme géométrique de celles des premiers.*

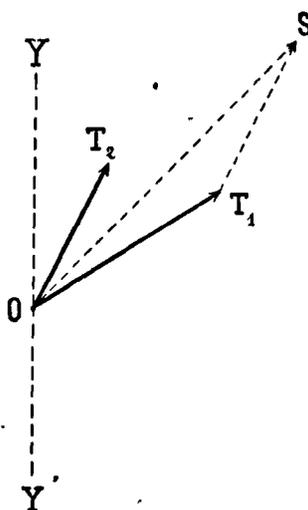


FIG. 433

En effet, si  $OT_1$  et  $OT_2$  tournent ensemble, dans le même sens, avec la même vitesse angulaire  $\omega$ , la figure  $OT_1 OT_2$  tourne elle-même, sans altération de forme ni de grandeur, et la résultante de  $OT_1$  et de  $OT_2$  n'est autre à chaque instant que la diagonale  $OS$  d'un parallélogramme de forme invariable, de côtés  $OT_1$ ,  $OT_2$ , tournant autour de  $O$  avec la vitesse  $\omega$ .



Les propositions qui précèdent définissent, dans tous les cas possibles, la composition des champs tournants de même vitesse angulaire et permettent, par conséquent, de remplacer les opérations sur les champs sinusoïdaux fixes (de même pulsation) par des opérations faites sur leurs composantes tournantes.

Par exemple, soit à trouver le résultat de la composition de deux champs sinusoïdaux fixes  $OH_1$ ,  $OH_2$  (fig. 434).

Substituons à chacun d'eux ses composantes tournantes. Nous

aurons alors (même *fig.*) à combiner quatre champs tournants :  $OT_1, OT_1', OT_2, OT_2'$ .

Ce système de quatre vecteurs peut tout d'abord se réduire à

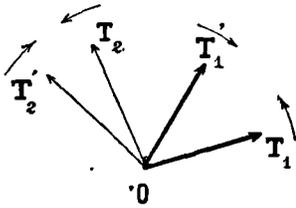
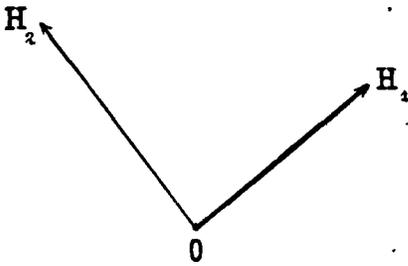


FIG. 434

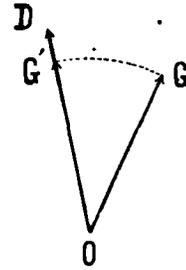
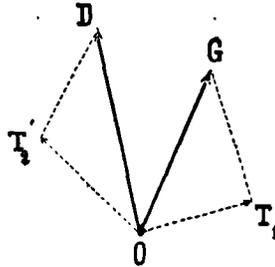


FIG. 435

deux (*fig.* 435), savoir  $OG$  résultant de  $OT_1$  et de  $OT_2$ , qui tournent dans le premier sens  $\curvearrowleft$ , et  $OD$ , résultant de  $OT_1'$  et de  $OT_2'$ , qui tournent dans le second sens  $\curvearrowright$ .

Enfin ces deux champs tournants  $OG, OD$ , de sens contraires équivalent (*fig.* 435) à un vecteur tournant égal à leur différence  $G'D$  et à un champ fixe sinusoïdal d'amplitude égale au double du plus petit  $OG$ .

*Le résultat de la combinaison de deux champs sinusoïdaux fixes de même pulsation est un champ qui a pour index un vecteur variable en grandeur et en direction dont l'extrémité décrit une ellipse.*

En effet, les composantes de ce champ suivant deux axes rectangulaires  $OX, OY$  passant par  $O$ , étant les sommes algébriques

des projections sur ces axes des vecteurs sinusoïdaux donnés, sont des sommes de sinusoïdes de même période et ont, par conséquent, des expressions elles-mêmes sinusoïdales et de même période telles que

$$X = A \sin (\omega t - \xi)$$

$$Y = B \sin (\omega t - \eta)$$

Or le lieu de l'extrémité du vecteur correspondant est représenté par l'équation en  $X$  et  $Y$  résultant de l'élimination de  $t$  entre ces deux expressions.

Cette équation :

$$\frac{X^2}{A^2} - 2 \frac{X}{A} \frac{Y}{B} \cos (\eta - \xi) + \frac{Y^2}{B^2} = \sin^2 (\eta - \xi)$$

est celle d'une ellipse de centre  $O$ .

Un tel champ tournant dont l'index varie de telle façon que son extrémité décrive une ellipse est désigné sous le nom de **champ tournant elliptique**.

Un champ tournant à index constant ou champ tournant circulaire, tel que ceux que nous avons tout d'abord considérés, n'en est qu'un cas particulier, un cercle n'étant qu'un cas particulier d'ellipse.

Un champ alternatif à ligne d'action fixe en est encore un autre cas particulier, la trajectoire de l'extrémité de l'index étant ici un segment de droite qui peut être considéré comme une ellipse infiniment aplatie.



*Pour que le résultat de la combinaison de deux champs sinusoïdaux fixes de même pulsation se réduise à un champ sinusoïdal fixe, il faut que ces deux champs soient en concordance de phase.*

En effet, il faut que, dans le système équivalent ci-dessus défini la partie tournante :  $\mathbf{G'D}$  (fig. 435) soit nulle, ce qui nécessite l'é-

galité de  $OG$  et de  $OD$ . Or cette égalité implique celle des triangles  $OT_1G$ ,  $OT_1D$  qui ont alors leurs trois côtés égaux chacun à chacun, et il en sera ainsi lorsque les angles  $T_1OT_1'$  et  $T_2OT_2'$  seront égaux, c'est-à-dire lorsque les champs donnés  $OH_1$ ,  $OH_2$  seront en concordance de phase.

*Pour que le résultat de la combinaison de deux champs sinusoïdaux fixes de même pulsation se réduise à un champ tournant circulaire, il faut que les index de leurs composantes tournantes dans un des sens soient égaux et contraires.*

En effet, si, par exemple,  $OT_1$  (fig. 434) est égal et contraire à  $OT_2$ , on aura (fig. 435)  $OG = 0$  et il ne restera que le vecteur tournant  $OD$ .

Plus généralement :

*Pour que le résultat de la combinaison de  $m$  champs sinusoïdaux fixes de même pulsation se réduise à un champ tournant circulaire, il faut que le polygone de leurs composantes tournantes dans un sens soit fermé.*



Soient  $OG_1$  et  $OD_1$ , les positions, à un instant donné,

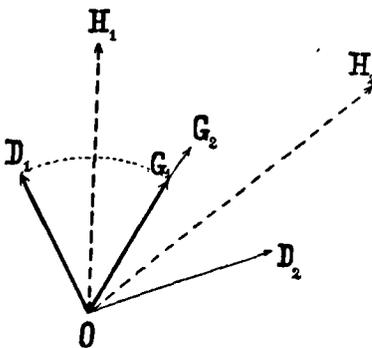


FIG. 436

des composantes tournantes d'un champ fixe sinusoïdal  $OH_1$  (fig. 436). Si un second champ sinusoïdal  $OH_2$ , de même pulsation, présente, par rapport au premier, une avance de phase égale à l'angle  $\alpha$  que

fait sa direction avec celle du premier, il a ses composantes tournantes  $\mathbf{OG}_2$   $\mathbf{OD}_2$  faisant, à l'instant considéré, avec  $\mathbf{OG}_1$  et  $\mathbf{OD}_1$ , des angles  $\mathbf{G}_1\mathbf{OG}_2$  et  $\mathbf{D}_1\mathbf{OD}_2$  respectivement égaux à  $\mathbf{O}$  et  $2\alpha$ .

En effet, sans l'avance de phase  $\alpha$ ,  $\mathbf{OG}_2$  serait à une distance angulaire  $\alpha$  de  $\mathbf{OG}_1$ . L'avance  $\alpha$  le ramène sur  $\mathbf{OG}_1$ , tandis qu'elle écarte  $\mathbf{OD}_2$  d'un nouvel angle  $\alpha$  par rapport à  $\mathbf{OD}_1$ .

Si à ces deux champs  $\mathbf{OH}_1$   $\mathbf{OH}_2$ , on en joint un troisième faisant avec  $\mathbf{OH}_2$  un angle  $\mathbf{H}_2\mathbf{OH}_3 = \alpha$  et présentant par rapport à  $\mathbf{OH}_2$  une avance de phase  $\alpha$ , il aura sa composante tournante  $\mathbf{OG}_3$  en concordance avec  $\mathbf{OG}_2$  et par conséquent avec  $\mathbf{OG}_1$  et sa composante  $\mathbf{OD}_3$  faisant avec  $\mathbf{OD}_2$  (vers la droite) un angle  $\mathbf{D}_2\mathbf{OD}_3 = \alpha$ , et ainsi de suite.

Pour de tels champs, le polygone des  $\mathbf{G}$  se réduit à une droite et le polygone des  $\mathbf{D}$  à une ligne brisée dont chaque côté fait avec le précédent un angle  $2\alpha$ .

La condition pour que cette dernière ligne se ferme est que ses côtés soient égaux et que l'ensemble de ses angles extérieurs  $2\alpha$  soit une multiple de  $2\pi$ . Le système se réduit alors à  $\Sigma \mathbf{OG} = \mathbf{mOG}$ .

On retrouve ainsi ce théorème déjà établi ci-dessus (pages 489 et 490) par une autre méthode :

*Un système de  $\mathbf{m}$  champs sinusoïdaux fixes, de même pulsation  $\omega$  et de même amplitude  $\mathbf{H}$ , dont les lignes d'action, situées dans un même plan, font entre elles des angles égaux  $\alpha = \frac{\mathbf{k}\pi}{\mathbf{m}}$  ( $\mathbf{k}$  étant un nombre entier non divisible par  $\mathbf{m}$ ), se réduit, si chaque champ présente par rapport au suivant, une différence de phase égale*

à  $\alpha$ , à un champ tournant circulaire d'amplitude  $m \frac{H_{\max}}{2}$ .

Dans le cas d'un retard de phase, au lieu d'une avance, c'est le polygone des  $\mathbf{OG}$  qui se fermerait, tandis que celui des  $\mathbf{OD}$  se réduirait à un vecteur  $m\mathbf{OD}$  tournant en sens contraire du précédent.

Si l'on applique le théorème au cas de deux champs, on trouve pour condition :  $2 \cdot 2\alpha = 2\pi$  ou  $\alpha = \frac{2\pi}{4}$ .

Donc :

*Deux champs sinusoïdaux de même pulsation présentant une différence de phase d'un quart de période donnent comme résultante, s'ils sont rectangulaires, un champ tournant circulaire.*



Si deux champs sinusoïdaux  $\mathbf{OH}_1, \mathbf{OH}_2$ , de même pulsation, présentent une différence de phase  $\delta$  et si la ligne d'action de celui qui est en avance, soit  $\mathbf{H}_2$ , fait avec celle de l'autre, dans le sens droit par exemple, un angle supplémentaire de  $\delta$ , soit  $\pi - \delta$ , l'index de la composante tournante  $\mathbf{D}_2$  de  $\mathbf{OH}_2$  avancera de  $\delta + \pi - \delta$ , c'est à dire de  $\pi$  sur  $\mathbf{D}$ , en sorte que l'ensemble de ces deux champs, s'ils sont égaux en amplitude, se réduira à leurs composantes tournantes  $\mathbf{G}$ , et, par conséquent, à un champ tournant circulaire ayant pour index la résultante de  $\mathbf{G}_1$  et de  $\mathbf{G}_2$  soit  $2\mathbf{G} \sin \delta$ , car  $\mathbf{G}_2$  fait avec  $\mathbf{G}_1$  un angle  $\pi - \delta - \delta = \pi - 2\delta$ , et de plus  $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}$ .

Donc, si deux champs sinusoïdaux de même pulsa-

*tion et de même amplitude présentent l'un par rapport à l'autre une différence de phase angulaire égale au supplément de l'angle compris entre leurs lignes d'action, ils donnent lieu à un champ tournant circulaire; et réciproquement :*

*Si deux champs sinusoïdaux de même pulsation et de même amplitude sont orientés de façon à donner lieu à un champ tournant circulaire, on en peut conclure que l'angle caractéristique de leur différence de phase est le supplément de l'angle compris entre les parties positives de leurs lignes d'action.*

De là une méthode de détermination de la différence de phase de deux courants alternatifs sinusoïdaux donnés, qui consiste à orienter deux bobines parcourues respectivement par ces courants, et donnant lieu d'ailleurs à des champs alternatifs égaux en amplitude, de telle manière que le champ de Ferraris résultant soit un champ tournant circulaire.

Dans le phasemètre *Engelmeyer* l'examen du champ tournant, en vue de saisir le moment où il est rendu circulaire, se fait par une méthode optique. Dans un des phasemètres de R. Arno, cet examen se fait à l'aide d'une petite bobine exploratrice fermée sur elle-même et ayant le plan de ses spires perpendiculaire à celui du vecteur tournant (1). Lorsque le champ tournant est circulaire, le couple exercé par lui sur la bobine exploratrice, en raison du courant induit dont cette bobine est le siège, est, par raison de symétrie, indépendant de l'azimut dans lequel on place cette bobine.

Ce couple est d'ailleurs facile à évaluer :

Soient :

$$X = A \sin \omega t$$

$$Y = A \cos \omega t$$

les composantes du champ circulaire suivant deux axes rectangulaires *OX*, *OY*. Si l'on imagine la bobine exploratrice (*n* spires de

---

1. R. Arno. — Misura della differenza di fase, *Torino, Un. typ.* (1897) p. 17 et 33.

surface  $s$ ) placée perpendiculairement à  $OX$ , elle est le siège d'un flux alternatif proportionnel à  $X$  dont l'expression, en désignant par  $\Phi_0 = n.s.A$ , son amplitude est

$$\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$$

Ce flux donne lieu à une force électro-motrice induite :

$$e = \frac{\omega \Phi_0}{10^8} \cos \omega t \text{ volts}$$

et cette force électro-motrice à un courant

$$i = \frac{\omega \Phi_0}{10^8 Z} \cos(\omega t - \chi) \text{ amp.}$$

$Z$  étant à l'impédance :  $\sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}$  de la bobine et  $\chi$  le décalage de  $i$  sur  $e$ , défini par  $\text{tg } \chi = \frac{l\omega}{r}$ .

En raison de ce courant la bobine est soumise, de la part du champ, à un couple dont la valeur instantanée en dyne-centimètres est :  $\frac{1}{10} i.n.s.Y = i\Phi_0 \cos \omega t$ , soit :

$$C = \frac{\omega \Phi_0^2}{10^9 Z} \cos(\omega t - \chi). \Phi_0 \cos \omega t \text{ dyne-centim.}$$

et dont la valeur moyenne est  $\frac{\omega \Phi_0^2}{10^9 Z} [\cos \omega t \cos(\omega t - \chi)]_{\text{moy}}$  soit

$$C = \frac{\omega \Phi_0^2}{2 \cdot 10^9 Z} \cos \chi \text{ dyne-centim.}$$

ou, enfin, puisque  $\cos \chi = \frac{r}{Z}$  :

$$C = \frac{r\omega \Phi_0^2}{2 \cdot 10^9 Z^2} = \frac{r\omega \Phi_0^2}{2 \cdot 10^9 (r^2 + l^2 \omega^2)} \text{ dyne-centim.}$$

En raison de ce couple, la bobine, si elle est abandonnée à elle-même, prend sous l'action du champ tournant un mouvement de rotation dans le sens même de l'index du champ.

Un cylindre massif de métal conducteur se comporte de même, grâce aux courants induits dont il devient le siège.

C'est par des rotations de ce genre que G. Ferraris a vérifié expérimentalement l'exactitude de ses conceptions théoriques relatives aux champs tournants.



Etant donné un champ elliptique défini par

$$\begin{aligned} X &= A \sin (\omega t - \xi) \\ Y &= B \sin (\omega t - \eta) \end{aligned}$$

sa composante suivant l'axe **OX** reste toujours comprise entre  $+ A$  et  $- A$ , et sa composante suivant **OY**, entre  $+ B$  et  $- B$ . L'ellipse, lieu de l'extrémité de son index est donc inscrite dans un rectangle de côtés  $2A$ ,  $2B$  parallèles aux axes de coordonnées.

Le rayon de l'ellipse qui fait un angle  $\alpha$  avec l'axe **OX** a pour longueur ( $r$ )

$$\rho_{\alpha} = \frac{AB \sin (\eta - \xi)}{\sqrt{B^2 \cos^2 \alpha - 2AB \sin \alpha \cos \alpha \cos (\eta - \xi) + A^2 \sin^2 \alpha}}$$

Le rayon, perpendiculaire au premier, faisant avec **OX** l'angle  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ , a pour longueur :

$$\rho_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \frac{AB \sin (\eta - \xi)}{\sqrt{B^2 \sin^2 \alpha + 2AB \sin \alpha \cos \alpha \cos (\eta - \xi) + A^2 \cos^2 \alpha}}$$

Considérons la projection du champ sur la direction faisant l'angle  $\alpha$  avec **OX**. Elle est représentée par l'expression sinusoïdale

$$X \cos \alpha + Y \sin \alpha = A \cos \alpha \sin (\omega t - \xi) + B \sin \alpha \sin (\omega t - \eta)$$

qui a pour amplitude :

$$H_{\alpha} = \sqrt{A^2 \cos^2 \alpha + 2AB \sin \alpha \cos \alpha \cos (\eta - \xi) + B^2 \sin^2 \alpha}$$

On a donc la relation :

$$\rho_{\alpha + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{H_{\alpha}} AB \sin (\eta - \xi)$$

permettant de déduire le rayon vecteur de l'ellipse relatif à une direction donnée, de l'amplitude observée pour la projection du champ suivant la direction perpendiculaire.

Par exemple, si l'on dispose suivant une direction, et perpendiculairement au plan du champ tournant, le plan d'une bobine d'épreuve reliée à un électrodynamomètre, l'intensité efficace

1. On obtient cete expression à l'aide de la relation  $\rho_{\alpha}^2 = \frac{X^2}{\cos^2 \alpha}$  et de la valeur de  $X^2$  fournie par l'équation de l'ellipse où l'on fait  $Y = X \operatorname{tg} \alpha$ .

du courant observé dans cet appareil sera proportionnelle à l'amplitude de la projection du champ suivant l'axe de la bobine, et par suite, en vertu du théorème précédent, au rayon vecteur de l'ellipse suivant l'azimut du plan de la bobine.

On peut ainsi tracer expérimentalement l'ellipse représentative d'un champ tournant donné.

Une fois cette ellipse tracée, si l'on prend le rapport du rayon vecteur  $\rho_0$  suivant  $OX$  au demi-côté correspondant  $A$  du rectangle circonscrit, on a

$$\frac{\rho_0}{A} = \sin(\eta - \xi)$$

ce qui fournit un moyen simple de connaître la différence de phase  $\eta - \xi$  des deux composantes du champ tournant.

Si ces deux composantes sont dues à des bobines parcourues par des courants alternatifs donnés on peut, par cette voie, parvenir à la détermination de la différence de phase de ces courants..

Un *phasemètre* conçu par G. Ferraris, d'après cette idée a été réalisé par R. Arno (1).



Si un circuit plan de résistance  $r$  et de self-induction  $l$  est disposé dans le champ considéré perpendiculairement à  $OX$ , il est le siège d'un flux variable dont l'amplitude est proportionnelle à  $A$  et d'un courant alternatif sinusoïdal dont la valeur instantanée  $i$  est proportionnelle à  $\frac{\omega A}{Z} \cos(\omega t - \xi - \gamma)$ ,  $Z$  étant

l'impédance:  $\sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}$  de ce circuit, et  $\gamma$  le décalage du courant par rapport à la force électromotrice induite, défini par la

$$\text{relation } \text{tg } \gamma = \frac{l\omega}{r}.$$

Le champ ayant à l'instant  $t$  une composante suivant le plan du circuit égale à  $B \sin(\omega t - \eta)$ , la valeur instantanée du couple appliqué au circuit est proportionnelle à  $\frac{\omega AB}{Z} \sin(\omega t - \eta) \cos(\omega t - \xi - \gamma)$  et sa valeur moyenne proportionnelle à  $\frac{\omega AB}{2Z} \sin(\xi - \eta + \gamma)$ .

1. R. Arno. — Loc. cit. p. 19.

Si l'inductance du circuit est négligeable devant sa résistance, c'est-à-dire si  $\chi = 0$ , ce couple est simplement proportionnel à  $\frac{\omega AB}{2r} (\sin \xi - \eta)$ , c'est-à-dire au sinus de la différence de phases des deux composantes du champ suivant **OX** et **OY**.

Appliquons cette remarque au champ tournant produit par les deux bobines rectangulaires d'un électrodynamomètre parcourues respectivement par deux courants  $I_1$  et  $I_2$  de même période. Le couple agissant sur une bobine d'épreuve auxiliaire, disposée comme il vient d'être dit donnera une quantité proportionnelle à  $\sin(\xi - \eta)$ . D'autre part, le couple exercé par l'une des bobines de l'électrodynamomètre sur l'autre donnera une quantité proportionnelle à la valeur moyenne du produit des courants  $I_1$  et  $I_2$ , c'est-à-dire proportionnelle à  $AB \cos(\xi - \eta)$ .

Le quotient des deux lectures sera donc proportionnel à  $\tan(\xi - \eta)$  et l'appareil, dont l'idée est due à *R. Arno*, méritera le nom de *phasemètre des tangentes* (1).



Soit **BB** (*fig. 437*) la coupe suivant un plan diamétral horizontal d'une bobine mobile autour d'un axe vertical situé dans le plan de sa spire moyenne.

Si cette bobine est parcourue par un courant constant, et est en repos, le champ magnétique en son centre **O**, sera représenté par un vecteur constant et de direction fixe.

Si cette bobine est parcourue par un courant constant et tourne autour de son axe, son champ magnétique en **O** sera constant en grandeur et tournant.

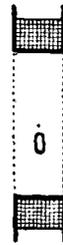


FIG. 437

1. *R. Arno*. — *Loc. cit.* p. 17.

Si cette bobine est parcourue par un courant alternatif sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et est en repos, son champ en **O** sera alternatif et fixe, et équivaudra, en vertu des théorèmes établis ci-dessus, à deux champs constants  $\frac{H_{\max}}{2}$  tournant en sens inverse avec la vitesse angulaire  $\omega$ . La bobine elle-même équivaut alors à deux bobines à courant constant  $\frac{I_{\max}}{2}$  tournant en sens inverses avec la vitesse  $\omega$ .

Si cette bobine, parcourue par le courant alternatif dont il vient d'être question, tourne autour de son axe d'un mouvement uniforme avec la vitesse  $\omega'$ , les deux composantes tournantes de son champ auront dans l'espace des vitesses angulaires absolues respectivement égales à

$$\omega + \omega'$$

et

$$\omega - \omega'$$

la première vitesse étant celle de la composante dont le mouvement est de même sens que celui de la bobine, et la seconde celle de la composante tournant en sens contraire.

Cette dernière sera fixe dans l'espace si  $\omega' = \omega$ .

Dans ce dernier cas la bobine équivaudrait à un système de deux autres bobines à courant constant  $\frac{I_{\max}}{2}$ , l'une fixe, l'autre tournant avec la vitesse angulaire  $2\omega$  et le couple moyen exercé sur elle par un champ constant étranger se réduirait au couple cons-

tant agissant sur la première bobine fictive, le couple moyen exercé sur la seconde étant nul (1).



Si une bobine est le siège d'un courant et se trouve dans un champ magnétique, divers cas pourront se présenter, suivant la nature du courant et celle du champ, le courant dans la bobine pouvant être ou continu, ou alternatif, ou variable suivant une loi quelconque, et le champ pouvant être ou constant, ou alternatif, ou tournant.

Si la bobine, au lieu d'être fixe, est mobile, au courant qui peut lui être fourni par une force électro-motrice extérieure s'ajoute un courant induit dû aux variations du flux magnétique provenant du champ et aux variations du courant lui-même.

Le mouvement qu'il y a lieu de considérer comme le plus usuel est un mouvement de rotation de la bobine autour d'un axe situé dans le plan de symétrie perpendiculaire à son axe magnétique.

Une telle bobine est soumise, de la part du champ extérieur à un ou plusieurs couples. Considérons, pour les cas particuliers les plus fréquents, les expressions des moments de ces couples relativement à l'axe de rotation, que nous supposerons perpendiculaire à la direction du champ à chaque instant, et perpendiculaire, par conséquent, dans le cas d'un champ tournant,

---

1. En effet, l'expression instantanée de ce couple est proportionnelle au sinus de l'angle variable compris entre le champ fixe étranger et l'axe magnétique mobile de cette seconde bobine fictive. Or, on sait que la valeur moyenne d'un sinus pendant une période est nulle.

au plan décrit par le vecteur représentatif de ce dernier en un point.

On peut classer ces cas particuliers en deux groupes, correspondant aux deux formes les plus simples du courant dans la bobine : courant continu ou courant alternatif sinusoïdal, chaque groupe comprenant trois cas, suivant l'état du champ : constant, alternatif ou tournant, et chaque cas se subdivisant en deux sous-cas suivant la condition de repos ou de mouvement de la bobine.

**A. — Bobine alimentée par un courant constant :  $I_0$ .**

Le moment magnétique de la bobine est alors proportionnel à  $I_0$ .

Si  $n$  est le nombre des spires,  $s$  la surface, évaluée en centimètres carrés, embrassée par chacune d'elles, et  $I_0$  l'intensité du courant en ampères, la valeur **CGS** du moment magnétique de la bobine sera

$$\frac{1}{10} \cdot n \cdot s \cdot I_0$$

Le produit de cette expression par la composante  $H$  du champ parallèlement au plan des spires, évaluée en gauss, donnera la valeur **CGS**, c'est à dire la valeur en dynes-centimètres, du moment du couple exercé par le champ sur la bobine, soit :

$$c = \frac{1}{10} \cdot n \cdot s \cdot I_0 \cdot H \text{ dynes-centim.}$$

**Premier Cas. — Champ constant :  $H_0$ .**

Ce cas se trouve réalisé dans les galvanomètres à cadre mobile pour courants continus.

Pour une position de la bobine telle que son axe magnétique fasse un angle  $\delta$  avec la direction du champ on a  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \sin \delta$  et par suite :

$$\mathbf{c} = \frac{1}{10} \mathbf{n.s.I}_0 \mathbf{H}_0 \sin \delta \text{ (dyne-centim.)}$$

Pour une bobine ( $\mathbf{n}, \mathbf{s}$ ), un courant ( $\mathbf{I}_0$ ) et un champ ( $\mathbf{H}_0$ ) donnée ce couple dépend de l'orientation de la bobine et est maximum quand l'axe magnétique de celle-ci est perpendiculaire au champ ( $\delta = \frac{\pi}{2}$ ), (le champ étant alors parallèle aux plans des spires). Quand l'axe magnétique de la bobine coïncide avec le champ ( $\delta = 0$ ), le couple est minimum et nul. Ses valeurs dans les situations intermédiaires sont représentées par les ordonnées d'une sinusoïde d'amplitude :  $\frac{1}{10} \mathbf{n.s.I}_0 \mathbf{H}_0$ .

Le couple change de sens quand  $\sin \delta$  change de signe; il tend toujours à ramener l'axe magnétique de la bobine en coïncidence avec la direction du champ.

Si la bobine, au lieu d'être fixée dans une position donnée, tourne autour de son axe de rotation, au courant continu précédent se superpose un courant variable  $\mathbf{J}$ , induit par les variations du flux  $\Phi$  qui résultent des changements de positions de la bobine par rapport au champ.

Pour un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire  $\Omega$ , on a :

$$\begin{aligned} \delta &= \Omega t \\ \Phi &= \mathbf{n.s.H}_0 \cos \Omega t \text{ gauss} \end{aligned}$$

$$e = -\frac{1}{10^8} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{10^8} \Omega \cdot n \cdot s \cdot H_0 \sin \Omega t \text{ volts}$$

$$J = \frac{1}{10^8} \frac{\Omega \cdot n \cdot s \cdot H_0}{z} \sin (\Omega t - \varphi) \text{ amp.}$$

$z = \sqrt{r^2 + l^2 \Omega^2}$  étant l'impédance, calculée pour la pulsation  $\Omega$ , du circuit de la bobine, de résistance  $r$  et de coefficient de self-induction  $l$ , et  $\varphi$  étant le décalage de  $J$  par rapport à  $e$ , défini par  $\text{tg} \varphi = \frac{l\Omega}{r}$ .

Par suite de ce courant induit, la bobine est soumise à un couple supplémentaire de moment :

$$c_i = \frac{1}{10} n \cdot s \cdot H_0 \cdot J \cdot \sin \delta \text{ dyne-centim.}$$

ou en remplaçant  $J$  par sa valeur :

$$c_i = \frac{1}{10^9} \frac{\Omega \cdot n^2 \cdot s^2 \cdot H_0^2}{z} \sin (\Omega t - \varphi) \sin \Omega t$$

La valeur moyenne du produit :  $\sin (\Omega t - \varphi) \sin \Omega t$ , lorsque  $\Omega$  varie de  $2\pi$ , étant  $\frac{1}{2} \cos \varphi$  la valeur moyenne de  $C_i$  pour une révolution de la bobine est :

$$(c_i)_{\text{moy}} = \frac{1}{2 \cdot 10^9} \frac{\Omega \cdot n^2 \cdot s^2 \cdot H_0^2}{z} \cos \varphi \text{ dyne-centim.}$$

ou, si l'on remarque que  $\cos \varphi = \frac{r}{z}$

$$(c_i)_{\text{moy}} = \frac{1}{2 \cdot 10^9} \cdot \frac{r \cdot \Omega \cdot n^2 \cdot s^2 \cdot H_0^2}{z^2} \text{ dyne-centim.}$$

ou enfin :

$$(c_i)_{\text{moy}} = \frac{1}{2 \cdot 10^9} \cdot \frac{r \cdot \Omega \cdot n^2 \cdot s^2 \cdot H_0^2}{r^2 + l^2 \Omega^2} \text{ dyne-centim.}$$

Si le courant alternatif  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\max} \sin(\omega \mathbf{t} - \varphi)$  existait dans la bobine au repos, le moment magnétique de celle-ci serait représenté par un vecteur alternatif  $\frac{1}{10} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{J}$  qu'on pourrait envisager comme la résultante de deux vecteurs tournants, égaux à  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{J}_{\max}$ , animé de vitesses angulaires  $+\Omega$  et  $-\Omega$  et faisant au temps  $\mathbf{t} = \mathbf{o}$ , avec l'axe magnétique de la bobine, des angles  $+\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$  et  $-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ . Mais comme la bobine qui est le siège du courant  $\mathbf{J}$  tourne avec la vitesse angulaire  $+\Omega$ , la vitesse angulaire absolue de l'un des vecteurs composants du moment magnétique est nulle tandis que celle de l'autre, dont le sens concorde avec celui du mouvement de la bobine, est  $2\Omega$ . Or, dans le calcul du couple moyen dû au champ, le vecteur immobile par rapport au champ, donne seul un résultat différent de zéro, qui est :

$$\frac{1}{2 \cdot 10} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{J}_{\max} \cdot \mathbf{H}_o \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{1}{2 \cdot 10^9} \frac{\Omega \cdot \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{s}^2 \cdot \mathbf{H}_o^2}{z} \cos \varphi$$

parfaitement concordant avec celui tiré à la page précédente de l'expression de la valeur instantanée du couple magnétique ce qui montre la légitimité en même temps que la facilité d'emploi du point de vue indiqué ci-dessus, page 506.

Deuxième cas. — *Champ alternatif* :  $\mathbf{H}_o \sin \omega \mathbf{t}$ .

On aurait un exemple de ce cas en recevant dans la bobine fixe d'un électro-dynamomètre un courant alter-

natif pendant que la bobine mobile recevrait un courant continu.

Si l'axe magnétique de la bobine siège du courant  $\mathbf{I}_0$  fait avec le champ un angle  $\delta$ , le moment du couple, par rapport à l'axe de rotation de la bobine, est :

$$\mathbf{c} = \frac{1}{10} \mathbf{n.s.I}_0 \cdot \mathbf{H}_0 \sin \omega \mathbf{t} \cdot \sin \delta \text{ dyne-centim.}$$

Ce couple est une fonction sinusoïdale du temps qui, pour un courant, un champ et une bobine donnés, a une amplitude dépendant (par  $\sin \delta$ ) de l'orientation de la bobine. Cette amplitude est maxima pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$  et nulle pour  $\delta = 0$ .

La valeur moyenne du couple pendant une période du champ est nulle, puisqu'elle est proportionnelle à la valeur moyenne de  $\sin \omega \mathbf{t}$  pendant que  $\omega \mathbf{t}$  varie de  $0$  à  $2\pi$ .

Si la période des oscillations propres de la bobine autour de son axe est grande relativement à celle des variations du champ, ce couple ne peut produire que des oscillations extrêmement faibles et laisse par conséquent la bobine pratiquement en repos (voir page 212).

Si la bobine est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire,  $\Omega$  on a alors  $\delta = \delta_0 + \Omega \mathbf{t}$  et, par suite, pour expression du couple :

$$\mathbf{c} = \frac{1}{10} \cdot \mathbf{n.s.I}_0 \cdot \mathbf{H}_0 \cdot \sin \omega \mathbf{t} \cdot \sin (\delta_0 + \Omega \mathbf{t}) \text{ dyne-centim.}$$

expression périodique dont la période est le plus petit multiple commun de celles du champ et du mouvement de la bobine.

La valeur moyenne de ce couple pendant une de ses périodes est nulle si  $\Omega$  est différent de  $\omega$ .

Lorsque  $\Omega = \omega$ , c'est-à-dire lorsque la bobine fait un tour sur elle-même juste pendant une période du champ; la valeur moyenne du couple est

$$c_{\text{moy}} = \frac{1}{2 \cdot 10} \mathbf{n.s.I}_0 \cdot \mathbf{H}_0 \cdot \cos \delta_0 \text{ dyne-centim.}$$

car la valeur moyenne du produit :  $\sin \omega \mathbf{t} \sin (\delta_0 + \omega \mathbf{t})$ , égale à celle du produit :  $\sin \omega \mathbf{t} \sin \omega \mathbf{t} \cos \delta_0$  est  $\frac{1}{2} \cos \delta_0$ .

On arrive au même résultat en considérant les composantes tournantes du champ alternatif  $\mathbf{H}_0 \sin \omega \mathbf{t}$ . L'une d'elles, celle qui tourne dans le même sens que la bobine, fait avec l'axe magnétique de celle-ci un angle constant, puisque les vitesses angulaires sont les mêmes et le mouvement relatif, par conséquent, nul.

Cet angle est  $\frac{\pi}{2} + \delta_0$ , car au temps  $\mathbf{t} = \mathbf{o}$  la composante tournante considérée est à  $90^\circ$  de  $\mathbf{H}$  et l'axe magnétique de la bobine à  $\delta_0$  de  $\mathbf{H}$ . Le couple dû à cette composante est donc :

$$\frac{1}{10} \mathbf{n.s.I}_0 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}_0 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \delta_0 \right) = \frac{1}{2 \cdot 10} \mathbf{n.s.I}_0 \mathbf{H}_0 \cos \delta_0$$

et c'est là aussi la valeur moyenne du couple total, car la valeur moyenne du couple dû à la seconde composante, qui tourne par rapport à la bobine avec la vitesse angulaire  $2\omega$ , est nulle, du moins en ce qui concerne le courant  $\mathbf{I}_0$  qui seul nous occupe en ce moment. Il y

aurait, en outre, à tenir compte de l'effet du courant d'induction dû au flux variable de pulsation  $2\omega$  provenant de ce champ tournant. Le problème se ramène au premier cas en envisageant le champ tournant comme fixe et la bobine comme se déplaçant par rapport à lui avec la vitesse angulaire  $2\omega$ .

Troisième cas. — *Champ tournant (circulaire).*

Si  $H_0$  est l'intensité du champ et  $\Omega$  sa vitesse angulaire, l'angle  $\delta$  qu'il fait avec l'axe magnétique de la bobine est une fonction du temps de la forme  $\delta = \delta_0 + \Omega t$ , en sorte que le moment du couple est

$$c = \frac{1}{10} n.s.I_0.H_0 \sin(\delta_0 + \Omega t) \text{ dyne-centim.}$$

expression sinusoïdale dont l'amplitude ne dépend que de la bobine, du courant et du champ, et dont la période dépend de la vitesse  $\Omega$  du mouvement angulaire du champ. Sa valeur moyenne pendant une révolution du champ est nulle, en sorte que si la durée de cette révolution est faible et le moment d'inertie de la bobine un peu grand, cette dernière demeure pratiquement en repos, du chef de ce couple.

Mais le flux variable  $\Phi = n.s.H_0 \cos(\delta_0 + \Omega t)$ , envoyé par le champ tournant dans la bobine, donne lieu à un courant induit et, par suite, à un couple tel que celui dont nous avons fait le calcul ci-dessus (pages 509 et 510), car, le mouvement relatif étant seul à considérer, on peut envisager le problème comme celui d'une bobine tournant avec la vitesse  $\Omega$  dans un champ fixe.

Si la bobine tourne autour de son axe de rotation

avec la vitesse angulaire  $\Omega'$ , on a  $\delta = \delta_0 + (\Omega - \Omega') t$   
 et par suite :  $\mathbf{C} = \frac{1}{10} \mathbf{n.s. I}_0 \mathbf{H}_0 \sin [\delta_0 + (\Omega - \Omega') t]$   
 dyne-centim. et  $\Phi = \mathbf{n.s. H}_0 \cos [\delta_0 + (\Omega - \Omega') t]$ .

En particulier si  $\Omega'$  est égale à  $\Omega$  et de même sens, la vitesse relative  $\Omega - \Omega'$  est nulle et le problème se trouve ramené au cas d'une bobine fixe dans un champ constant. Le couple est constant et il n'y a pas de courant induit, le flux reçu par la bobine étant constant.

Si  $\Omega'$  est de sens contraire à  $\Omega$ , on peut envisager le problème comme celui d'une bobine tournant avec la vitesse  $\Omega'' = \Omega + \Omega'$  dans un champ constant et l'on est ramené à la seconde partie du premier cas.

**B. — Bobine alimentée par un courant alternatif :  $I_0 \sin \omega t$ .**

Le moment magnétique de la bobine est alors :  
 $\frac{1}{10} \mathbf{n.s. I}_0 \sin \omega t$ , c'est-à-dire variable avec le temps suivant la loi sinusoïdale, avec une fréquence égale à celle du courant.

On peut le remplacer par deux vecteurs tournants égaux à la moitié de son amplitude, soit :  $\frac{1}{2.10} \mathbf{n.s. I}_0$  animés de vitesses angulaires  $+\omega$  et  $-\omega$ .

Quatrième cas. — *Champ constant :  $H_0$ .*

Ce cas se trouve réalisé lorsque, par exemple, un galvanomètre électromagnétique à cadre mobile reçoit un courant alternatif.

Il ne diffère pas, au fond, du deuxième, car si la bobine est fixe, on a

$$c = \frac{1}{10} n.s.I_0 \sin \omega t.H_0 \sin \delta \text{ dyne-centim.}$$

et si la bobine tourne avec une vitesse angulaire  $\Omega$  :

$$c = \frac{1}{10} n.s.I_0 \sin \omega t.H_0 \sin (\delta_0 + \Omega t) \text{ dyne-centim.}$$

Dans cette dernière éventualité, il faut en outre tenir compte d'un couple relatif au courant d'induction de pulsation  $\Omega$  auquel le flux variable reçu par la bobine donne naissance, problème déjà envisagé dans la seconde partie du premier cas (page 509).

Cinquième cas. — *Champ alternatif* :  $H_0 \sin (\Omega t - \chi)$ .

Ce cas se trouve réalisé, par exemple, lorsque la bobine fixe et la bobine mobile d'un électrodynamomètre reçoivent l'une et l'autre des courants alternatifs.

Si la bobine est maintenue fixe et si  $\delta$  est l'angle que fait son axe magnétique avec la direction du champ, on a

$$c = \frac{1}{10} n.s.I_0 \sin \omega t.H_0 \sin (\Omega t - \chi). \sin \delta. \text{ dyne-centim.}$$

expression du même genre que celle d'un des couples auxquels est soumise une bobine alimentée par un courant alternatif et tournant d'un mouvement uniforme dans un champ constant.

Si  $\Omega$  est différent de  $\omega$ , la valeur moyenne de ce couple est nulle.

Si  $\Omega = \omega$ , ce qui est le cas, par exemple, lorsque les courants admis dans les bobines d'un électrodynamomètre sont de même fréquence, la valeur moyenne du couple est

$$c_{\text{moy}} = \frac{1}{2 \cdot 10} \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{I}_0 \mathbf{H}_0 \cos \chi \cdot \sin \delta = \frac{1}{10} \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{I}_{\text{eff}} \mathbf{H}_{\text{eff}} \cos \chi \sin \delta \quad (1)$$

Nulle pour  $\delta = 0$ , elle est maxima pour  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . C'est cette dernière condition qu'on réalise dans les électrodynamomètres en plaçant les axes magnétiques des deux bobines à angle droit.

Outre le couple  $\mathbf{C}$ , relatif au courant  $\mathbf{I}_0 \sin \omega t$ , il faut prendre en considération le couple  $\mathbf{C}_i$  relatif au courant induit  $\mathbf{J}$  engendré dans la bobine par le flux alternatif :  $\Phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{H}_0 \sin (\Omega t - \chi) \cos \delta$  qu'elle reçoit du champ extérieur. Ce couple a pour valeur moyenne :

$$(c_i)_{\text{moy}} = \frac{1}{2 \cdot 10^9} \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \Omega \cdot \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{s}^2 \cdot \mathbf{H}_0^2 \cdot \cos \delta \sin \delta}{\mathbf{r}^2 + \mathbf{I}^2 \Omega^2} \quad (1)$$

Si la bobine tourne autour de son axe de rotation avec une vitesse angulaire  $\omega'$ , ses composantes tournantes peuvent être considérées comme animées, relativement au champ, de vitesses angulaires  $\omega + \omega'$  et  $\omega - \omega'$  et la recherche de l'action du champ sur elles se ramène à un cas déjà étudié : bobine à courant constant mobile dans un champ alternatif (voir page 512).

Sixième cas. — *Champ tournant (circulaire).*

Si  $\mathbf{H}_0$  est l'intensité du champ et si  $\Omega$  est sa vitesse angulaire, l'angle  $\delta$  qu'il fait avec l'axe magnétique de la bobine est une fonction linéaire du temps :  $\delta = \delta_0 +$

---

1. Comme exercice, le lecteur pourra retrouver cette formule en remplaçant le champ et la bobine par leurs composantes tournantes.

$\Omega t$ , en sorte que le moment du couple relatif au courant  $I_0 \sin \omega t$  est

$$c = \frac{1}{10} \mathbf{n.s.I}_0 \sin \omega t. \mathbf{H}_0 \sin (\delta_0 + \Omega t)$$

expression déjà rencontrée dans le deuxième et le quatrième cas (pages 512 et 516).

Pour  $\Omega = \omega$ , la valeur moyenne du couple est

$$c_{\text{moy}} = \frac{1}{2 \cdot 10} \mathbf{n.s.I}_0 \cos \delta_0$$

Si la bobine occupe une position telle qu'au moment où son courant s'annule le champ tournant soit à une distance angulaire  $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$  de son axe magnétique, ce couple moyen est nul et cette position est pour la bobine une position d'équilibre.

Qu'on substitue alors, dans la bobine, au courant précédent, un courant de même fréquence et décalé, par rapport au précédent, d'un angle  $\varphi$ , et la nouvelle position d'équilibre de la bobine sera séparée de la précédente précisément par cet angle  $\varphi$ . En effet, l'instant où le courant de la bobine s'annulera sera non plus  $t = 0$  mais  $t = \frac{\varphi}{\omega}$  et le champ tournant étant alors en  $\delta = \frac{\pi}{2} + \varphi$  l'axe magnétique, pour en être séparé par un intervalle  $\frac{\pi}{2}$ , devra être à une distance angulaire  $\varphi$  de sa première position.

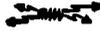
L'Ingénieur *A. Mottura* a fondé sur cette remarque la cons-

truction d'un phase-mètre (1), dans lequel la différence de phase  $\varphi$  de deux courants successivement admis dans une bobine mobile soumise à l'action d'un champ tournant de même période est indiquée directement en grandeur et en sens par l'écart angulaire des deux positions d'équilibre trouvées successivement pour la bobine. Nul poids, nul ressort, nulle action parasite n'intervient : l'appareil donne directement des indications absolues sans aucun coefficient : la construction de son échelle est, par conséquent, on ne peut plus simple et sûre.

Si une bobine, soumise à l'action d'un champ tournant, de vitesse angulaire  $\Omega$ , tourne elle-même avec une vitesse angulaire  $\Omega'$ , on peut considérer le champ comme fixe et la bobine comme tournant relativement à lui avec la vitesse angulaire  $\Omega - \Omega'$  ou  $\Omega + \Omega'$  suivant que  $\Omega$  et  $\Omega'$  seront de même sens ou de sens contraires.

---

1. **A. Mottura.** — *Fasometro a misura diretta*. L'Elettricista, 2° s, t. III, p. 251 (15 septembre 1904).



## CINQUANTE-UNIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROMAGNÉTISME

\*\*\*

## CHAMPS TOURNANTS INDUSTRIELS

(DANS DES ENTREFERS CYLINDRIQUES)



### I

#### Construction et modes de production (1)

A peine introduite dans la science, la notion de champ magnétique tournant a évolué de la façon la plus heureuse et abouti à l'invention de champs tournants occupant des entrefers cylindriques, grâce auxquels ont pu être constitués des moteurs doués de qualités spéciales et précieuses qui manquaient aux moteurs à champ magnétiques fixes et qui ont permis aux courants alternatifs de rivaliser dans les applications mécaniques avec les courants continus jusqu'alors plus avantageux.

Il convient donc de présenter ici, dans ses traits généraux, cette notion capitale de l'électrotechnique actuelle.

---

1. Voir, Blondel. — *Quelques propriétés générales des champs magnétiques tournants*. L'Éclairage électrique t. IV, p. 241. (1895).

Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux cylindres de fer coaxiaux (fig. 438), laissant entre eux un entrefer cylindrique  $e$  (1).

Concevons, établis suivant des génératrices du premier, des fils conducteurs, régulièrement espacés, parcourus par des courants alternatifs sinusoïdaux de même amplitude  $I_{\max}$ , de même période  $T$ , et décalés, chacun par rapport au

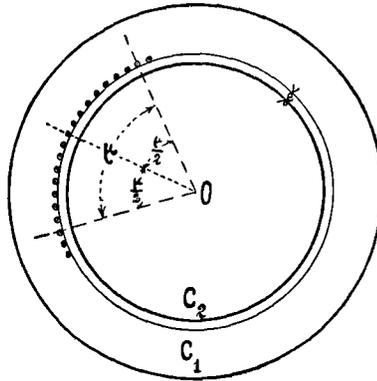


FIG. 438

suisant, de  $\frac{1}{m}$  de période.

Soit  $\mu$  un angle au centre embrassant  $m + 1$  conducteurs consécutifs. A chaque instant, les conducteurs distants de cet angle sont dans des états identiques, puisque leurs courants présentent une différence de phase d'une période. Nous les désignerons sous le nom de *conducteurs homologues*.

La série des intensités des courants qui se présentent, à un moment donné, dans un groupe de conducteurs correspondant à un angle  $\mu$  se retrouve au même instant, dans tous les angles  $\mu$  comptés à partir de celui-là. En d'autres termes, les groupes de conducteurs compris dans des angles  $\mu$  consécutifs sont homologues.

Soit  $C_0$  un conducteur dans lequel, à un instant

1. Sur cette fig. et les suivantes, on a, par raison de clarté, beaucoup exagéré l'épaisseur relative de l'entrefer.

donné, l'intensité est nulle. Considérons, à cet instant, l'état du groupe constitué par ce conducteur et les  $m - 1$  suivants. Dans la première moitié du groupe, les courants sont dirigés dans un sens (vers l'avant, par exemple:  $\odot$ ) et, dans la seconde moitié, ils sont en sens contraire:  $\bullet$ . Quant aux intensités, elles sont croissantes dans le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>e</sup> quart du groupe, et décroissantes dans le 2<sup>e</sup> et le 4<sup>e</sup>. Deux conducteurs séparés par un angle  $\frac{\mu}{2}$  sont donc, à chaque instant, le siège de courants égaux et contraires. On peut, en conséquence, les supposer réunis par une de leurs extrémités, de façon à former une boucle dans laquelle le courant entrerait par un des conducteurs et sortirait par l'autre; en outre, cette boucle peut être supposée associée en série avec toutes ses homologues.

Envisageons maintenant le champ magnétique constitué par ces conducteurs dans l'entrefer.

Il est visible que ce champ est maximum dans les parties de l'entrefer qui sont en regard des conducteurs où  $I = 0$  et minimum dans celles qui correspondent

- (I)  aux premiers points, les actions magnétiques des conducteurs situés, à droite et à gauche sont concordantes en raison des directions inverses des courants, (fig. 439, I) tandis que, vis à vis des seconds points, les actions des conducteurs voisins sont discordantes, en raison du sens identique des courants (fig. 439, II).
- (II) 

FIG. 439

D'ailleurs, aux maxima, les lignes de force sont alternativement centripètes et centrifuges (*fig. 440*).

La série des flux alternativement centripètes et centrifuges ainsi créés est symétrique par rapport à l'axe commun des cylindres, si  $\mu$  est contenu un nombre entier de fois dans  $2\pi$ , c'est-à-dire si

$$2\pi = p\mu$$

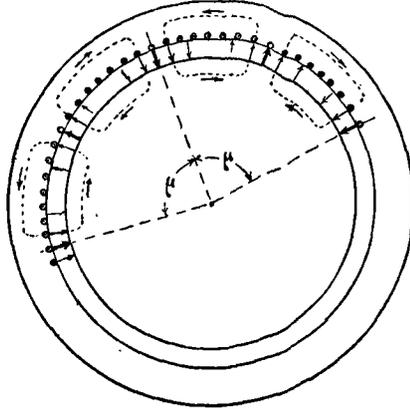


FIG. 440

Le nombre des flux centripètes est égal à celui des flux centrifuges, et ce nombre est précisément  $p$ .

Le nombre total de flux, qui est aussi celui des circuits magnétiques auxquels leurs lignes de forces peuvent être rapportées, est égal à  $2p$ .

D'un instant à un autre, le système des intensités de courants et des champs reste le même en soi, mais tourne autour de l'axe, puisque les divers conducteurs passent, à tour de rôle, par la même série d'états.

Il faut un temps  $T$ , égal à la période des courants d'alimentation, pour qu'une valeur donnée de l'intensité parcoure les  $m$  conducteurs situés dans un angle  $\mu$ .

Le système des champs magnétiques que nous venons de considérer tourne donc, autour de l'axe, de façon à décrire un angle  $\mu$  dans le temps  $T$ , de façon, par suite, à faire un tour ( $2\pi$ ) en un temps  $p T$  (puisque dans un tour il y a  $p$  angles  $\mu$ ).

La vitesse angulaire de rotation  $\omega$ , en conséquence, la valeur :  $\frac{2\pi}{pT} = \frac{1}{p} \omega$ .

Quant à la vitesse linéaire, comptée sur la circonférence moyenne de l'entrefer, elle est  $V = \frac{\pi D}{pT}$  ou  $\frac{L}{T}$  en appelant  $L$  la longueur d'arc correspondant à un angle  $\mu$ .

De tels champs peuvent être désignés sous le nom de **champs tournants radiaux multipolaires**.



Dans l'hypothèse d'une uniformité de valeur de la perméabilité des cylindres, l'induction  $\mathcal{B}$ , en un point de l'entrefer séparé d'un maximum par une longueur d'arc  $x$ , comptée sur la circonférence moyenne, serait :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\max} \cos 2\pi \frac{x}{L}$$

La répartition de l'induction dans l'entrefer serait donc alors, à chaque instant, *sinusoïdale*.

Le flux magnétique traversant la partie de l'entrefer comprise dans un angle  $\frac{\mu}{2}$  correspondant à une région complète de lignes de forces centripètes ou de lignes de force centrifuge est, en appelant  $b$  la longueur d'une génératrice des cylindres.

$$\Phi = \sum_{x=0}^{x=\frac{L}{2}} b dx \cdot \mathcal{B}_{\max} \cos 2\pi \frac{x}{L}$$

ou

$$\Phi = b\beta_{\max} \frac{2}{\pi} \frac{L}{2} = \frac{bL\beta_{\max}}{\pi}$$

Si l'on envisage l'induction en un point fixe **P** de l'entrefer et que l'on compte le temps à partir du moment où elle a, en ce point, sa valeur maxima  $\beta_{\max}$ , elle sera, à un instant postérieur **t** :

$$\beta_p = \beta_{\max} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

A ce même instant **t**, en un point **Q** situé à une distance **x** de **P** (comptée dans le sens de la rotation du champ), l'induction a la valeur qu'elle présentait en **P** un temps  $\frac{x}{V}$  auparavant; donc

$$\beta_q = \beta_{\max} \cos 2\pi \frac{t - \frac{x}{V}}{T}$$

ou, en remarquant que  $VT = L$  :

$$\beta_q = \beta_{\max} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right)$$

Telle est la formule qui, dans le champ tournant à répartition sinusoïdale qui nous occupe, donnerait la valeur de l'induction en un point **Q** en fonction du temps **t** et de la position de ce point définie par sa distance curviligne **x** à un point fixe **P**.

Si ce même champ, au lieu de tourner, était fixe et alternatif, sa valeur au point **Q** à l'instant **t** serait donnée par la formule toute différente :

$$\beta = \beta_{\max} \cos 2\pi \frac{x}{L} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

—⊗→

Il serait difficile de réaliser le système que nous venons d'étudier avec un nombre élevé d'encoches dans chaque angle  $\mu$ . On se contente, en pratique, de dispositions correspondant à des valeurs très simples du nombre  $m$ , soit :

$$m = 4$$

et

$$m = 6$$

Dans le premier cas ( $m = 4$ ), les encoches (1, 2, 3, 4) correspondant à un angle  $\mu$  sont munies (fig. 441, I) de conducteurs groupés de façon à former 2 boucles [(1, 3), (2, 5)] qui sont alimentées par 2 courants alternatifs de même amplitude et de même période décalés d'un quart de période (courants diphasés).

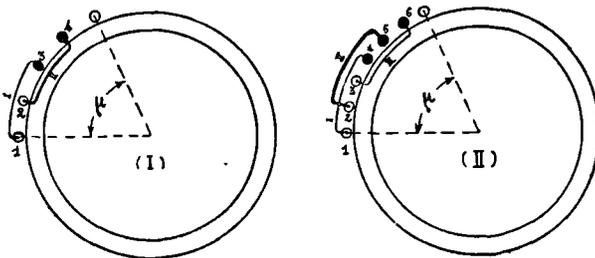


FIG. 441

Dans le second cas ( $m = 6$ ), les 6 encoches (1, 2, 3, 4, 5, 6) correspondant à un angle  $\mu$ , sont munies (fig. 441, II) de conducteurs groupés de façon à former 3 boucles [(1, 4), (3, 6), (2, 5)] alimentées respectivement par 3 courants alternatifs de même amplitude et de même période (courants triphasés).



Voyons en quoi l'effet de ces dispositions pratiques diffère de celui précédemment examiné.

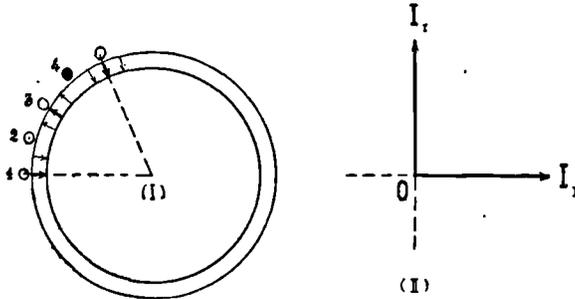


FIG. 442

La fig. 442 (I) représente pour un appareil à champ tournant diphasé l'état des courants dans les 4 encoches correspondant à un angle  $\mu$ , à un instant où le courant ( $I_1$ ) de la première phase, qui alimente les fils des encoches (1) et (3) est nul. A cet instant, le courant ( $I_m$ ) de la seconde phase, qui alimente les fils des encoches (2) et (4) est maximum, et si ce courant est dirigé en avant ( $\odot$ ) pour les fils de l'encoche (2), il est dirigé en arrière ( $\bullet$ ) pour ceux de l'encoche (4).

En regard de l'encoche (1) le champ est maximum et centripète; en regard de (3) il est maximum et centrifuge; en regard de (2) et de (4) il est nul.

Les ampères-tours agissant sur le circuit magnétique dont font partie les lignes de force franchissant l'entrefer en regard des encoches (1) et (3) sont ceux de la boucle constituée par les fils des encoches (2) et (4). Si le nombre total des fils logés dans les quatre encoches correspondant à l'angle  $\mu$  est  $n$ , celui des fils d'une encoche sera  $\frac{n}{4}$  et le nombre d'ampères-tours fourni,

à l'instant considéré, par la boucle (2), (4) sera  $\frac{n}{4} I_{\max}$  puisque

$I_{\max}$  est l'intensité du courant à cet instant dans les fils de cette boucle. A ce nombre d'ampères-tours correspond une force

magnétomotrice :  $\mathcal{F} = \frac{4}{10} \pi \frac{n}{4} I_{\max}$ .

La chute de potentiel magnétique  $\mathcal{U}$  sur un tronçon du circuit magnétique considéré correspondant à l'entrefer en regard

de l'encoche (1) est, en appelant  $\Phi$  le flux propagé par ce circuit  $\mathcal{R}_e$  la réluctance de l'entrefer :  $u = \mathcal{R}_e \Phi$ ; or si  $\mathcal{R}$  est la réluctance totale du circuit,  $\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$ , d'où  $u = \frac{\mathcal{R}_e}{\mathcal{R}} \mathcal{F}$ . Mais si l'on néglige la part du fer dans la réluctance totale, celle-ci se réduit à  $2 \mathcal{R}_e$  (somme des réluctances des deux entrefers traversés par le circuit magnétique considéré). On a donc enfin, pratiquement :  $u = \frac{1}{2} \mathcal{F} = \frac{1}{2} \frac{4}{10} \pi \frac{n}{4} I_{\max}$ .

Tous les tubes de flux traversant l'entrefer dans la partie (d'étendue angulaire  $\frac{\mu}{2}$ ) comprise entre deux encoches acti-

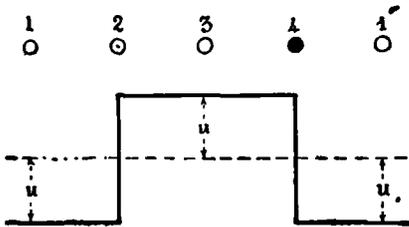


FIG. 443

ves, (2) et (4) par exemple, sont, à l'instant considéré, dans les mêmes conditions. A cet instant, la représentation des valeurs de  $u$  aux différents points est la ligne brisée rectangulaire de la fig. 443.

$$\Phi = \sum \varphi = \sum \frac{u}{r_e} = u \sum \frac{1}{r_e} = u \frac{1}{\mathcal{R}_e} = u \frac{1}{\frac{e}{b \frac{L}{2}}}$$

soit

$$\Phi = \frac{bL}{2e} \cdot \frac{1}{2} \frac{4}{10} \pi \frac{n}{4} I_{\max}$$

Il est dû aux ampères-tours :  $\frac{n}{4} I_{\max}$  de la bobine (2), (4).

Considérons maintenant (fig. 444, I) l'état des courants, dans les 4 encoches, un huitième de période après l'instant précédent, c'est-à-dire à un moment où, comme le représente le diagramme (fig. 441, II) les courants  $I_1$  et  $I_2$  sont de sens contraires et de valeurs absolues égales à  $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

Dans l'intervalle des encoches (1) et (2), le champ est centripète; dans l'intervalle entre (3) et (4), il est centrifuge; il est nul, enfin, dans l'intervalle entre (2) et (3).

La chute de potentiel magnétique sur le tronçon de circuit magnétique comprenant l'entrefer en regard de (1),(2) est, de même qu'en regard de (3), (4),

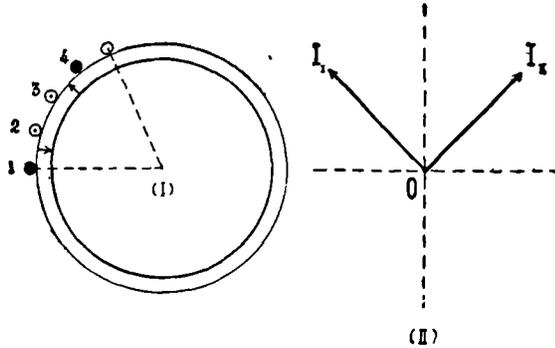


FIG. 444

même qu'en regard de (3), (4),  $u = \frac{1}{2} \frac{4}{10} \pi \times 2 \frac{n}{4} \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$ , les ampères-tours agissant sur le circuit magnétique à considérer cette fois étant ceux, concordants, des bobines (1), (3) et (2), (4), c'est-à-dire

$$\frac{n}{4} \frac{I_{max}}{2} + \frac{n}{4} \frac{I_{max}}{2} = 2 \cdot \frac{n}{4} \frac{I_{max}}{2}$$

1      2      3      4      1'

●      ⊙      ⊙      ●      ●

FIG. 445

La distribution des valeurs de  $u$  est alors représentée par la fig. 445.

Le flux traversant l'entrefer dans la partie située en regard de la bobine (2), (4) est

$$\Phi = \sum_{(2)}^{(4)} \varphi = \sum_{(3)}^{(4)} \frac{u}{r_e} = u \sum_{(3)}^{(4)} \frac{1}{r_e} = u \frac{l}{\mathcal{R}_e} = u \frac{l}{\frac{e}{b} \frac{L}{4}}$$

soit

$$\Phi = \frac{bL}{4e} \cdot \frac{1}{2} \frac{4}{10} \pi \cdot 2 \frac{n}{4} \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

valeur égale à celle que donnerait la bobine (2), (4) seule pour un nombre d'ampères-tours  $X$  défini par

$$\frac{bL}{2e} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \pi X = \frac{bL}{4e} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \pi \cdot 2 \cdot \frac{n}{4} \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{soit } X = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n}{4} I_{\max}.$$

Le flux dans la partie d'entrefer considérée a donc, dans le cours d'un quart de période, une valeur moyenne peu différente de celle que donnerait la seule bobine (2), (4) pour un nombre d'ampères-tours égal à la moyenne des valeurs ci-dessus trouvées :  $\frac{n}{4} I_{\max}$  et  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n}{4} I_{\max}$ , soit  $0,86 \frac{n}{4} I_{\max} = 0,43 \frac{n}{2} I_{\max}$ .



Pour un appareil à champ tournant alimenté par des courants triphasés, l'état des courants dans les 6 encoches correspondant à un angle  $\mu$  est représenté par la fig. 446 (I) à un instant où le

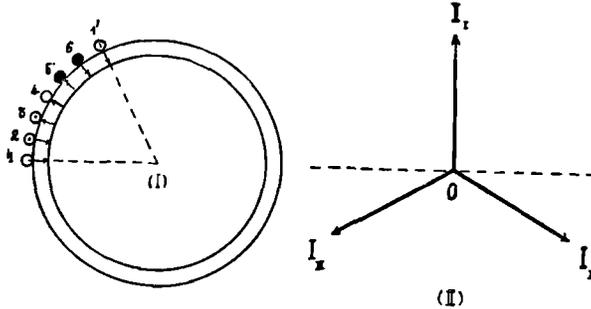
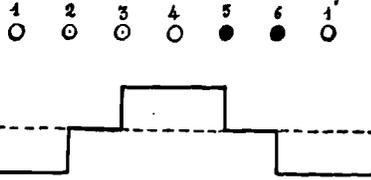


FIG. 446

courant  $I_I$  de la première phase [(qui alimente les encoches (1) et (4)] est nul, les deux autres :  $I_{II}$  [encoches (3) et (6)] et  $I_{III}$  [encoches (5) et (2)] ayant, à cet instant, comme le montre le diagramme fig. 446 (II), les valeurs  $+\frac{I_{\max}\sqrt{3}}{2}$  et  $-\frac{I_{\max}\sqrt{3}}{2}$ .

La chute de potentiel magnétique dans l'entrefer [région (3) à (5)] a la valeur  $u = \frac{1}{2} \mathcal{F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{6} \frac{I_{\max}\sqrt{3}}{2}$ .

La répartition des valeurs de  $u$  est donc représentée par la fig.



447.

Le flux traversant l'entrefer dans la partie située en regard de l'intervalle (3) à (5) est

FIG. 447

$$u \cdot \frac{1}{e} = \frac{bL}{3e} \cdot \frac{1}{2} \frac{4}{10} \pi \cdot 2 \frac{n}{6} \frac{I_{\max} \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{bL}{3}$$

La bobine (3), (6) donnerait le même flux moyen pour un nombre  $X$  d'ampères-tours défini par l'équation

$$\frac{bL}{2e} \cdot \frac{1}{2} \frac{4}{10} \pi X = \frac{bL}{3e} \cdot \frac{1}{2} \frac{4}{10} \pi \cdot 2 \frac{n}{6} \frac{I_{\max} \sqrt{3}}{2}$$

soit  $X = \frac{n}{2} I_{\max} \frac{2\sqrt{3}}{9}$ .

Un douzième de période après, c'est-à-dire à un instant où les courants ont respectivement en (1), (4) la valeur  $\frac{I_{\max}}{2}$ , en (3), (6) la valeur  $I_{\max}$  et en (5), (2) la valeur  $\frac{I_{\max}}{2}$  (fig. 448 (I) et (II),

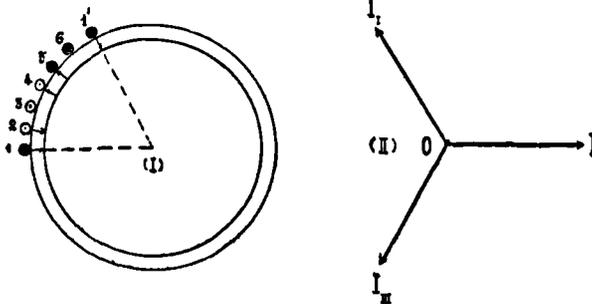


FIG. 448

la répartition des valeurs de  $u$  est représentée par la fig. 449, avec les valeurs :  $u' = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \pi \cdot 2 \frac{n}{6} \left( \frac{I_{\max}}{2} + I_{\max} \right)$ ;

$$u'' = \frac{1}{2} \frac{4}{10} \pi \cdot 2 \frac{n}{6} \frac{I_{\max}}{2}$$

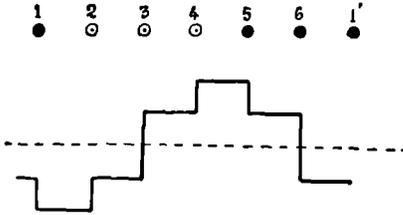


FIG. 449

$$X = \frac{4}{9} \frac{n}{2} I_{\max} = 0,444 \frac{n}{2} I_{\max}.$$



et le flux traversant la portion d'entrefer située en regard de la bobine (3), (6) a alors une valeur telle que pour la produire seule cette bobine devrait avoir un nombre d'am-pères-tours

En réalité, et surtout si les encoches ne sont pas fendues, les lignes représentatives de la répartition des

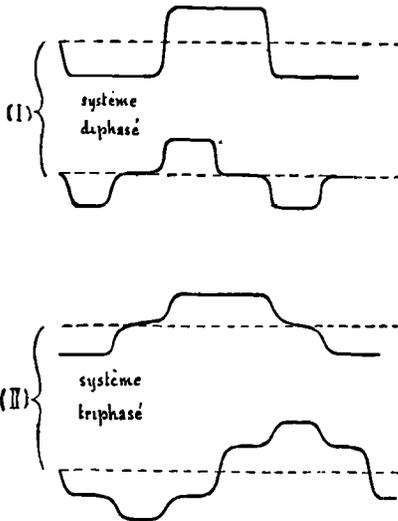


FIG. 450

valeurs de  $u$  dans l'entrefer présentent des angles arrondis, et offrent, par conséquent, au lieu des formes rectilignes théoriques des *fig.* 443, 445, 447, 449, les formes adoucies qu'indique la *fig.* 450 (I) et (II).

Il faut noter aussi que le résultat obtenu dépend beaucoup du nombre de paires d'en-

coches affectées à chaque phase dans chaque angle  $\mu$ . On le voit nettement par la *fig.* 451 qui montre en

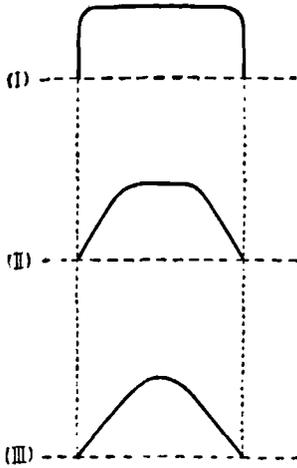


FIG. 451

(I), (II), (III) les répartitions du potentiel magnétique obtenues, avec un même nombre d'ampères-tours, suivant que les fils sont disposés en une seule bobine (I) ou en cinq (II) ou en dix bobines chevauchantes (III). Dans le dernier cas, la répartition est pratiquement sinusoïdale (1).



II

**Théorèmes fondamentaux**

On a vu (page 525) que si dans l'entrefer compris entre deux cylindres de fer concentriques est établi un champ alternatif à répartition sinusoïdale et non tournant, l'expression de l'induction  $\mathcal{B}$  à l'instant,  $t$  en un point défini par sa distance curviligne  $x$  à une origine convenable, prise sur la circonférence moyenne, est :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\max} \cos 2\pi \frac{x}{L} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

Or on a identiquement, en vertu de la formule qui

1. Blondel, loc. cit.

permet de transformer un produit de cosinus en une somme :

$$\begin{aligned} \beta_{\max} \cos 2\pi \frac{x}{L} \cos 2\pi \frac{t}{T} &= \frac{\beta_{\max}}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} \right) \\ &+ \frac{\beta_{\max}}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) \end{aligned}$$

Mais les expressions qui figurent au second membre de cette relation représentent des champs à répartition sinusoïdale, d'amplitudes égales  $\frac{\beta_{\max}}{2}$ , tournant en sens contraires, avec la même vitesse angulaire  $\omega$ , et, par conséquent, avec la même vitesse linéaire  $V = \frac{L}{T}$ .

De là cet important théorème formulé pour la première fois par M. *Leblanc* (1) :

*Tout champ alternatif fixe, à répartition sinusoïdale dans un entrefer cylindrique, peut être considéré comme équivalent à un système de deux champs tournants, à répartition sinusoïdale de même pas, ayant des vitesses de rotation égales et contraires et des amplitudes égales à la moitié de celle du champ alternatif fixe considéré.*



Soit dans un entrefer cylindrique un champ alternatif fixe représenté par

$$\beta' = \beta_0 \cos 2\pi \frac{x}{L} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

produit par un premier groupe de bobines, réparties

1. M. *Leblanc*. Lumière él., oct. 1890.

symétriquement sur le cylindre **C**, et alimentées par un courant alternatif de période **T**.

Si un second groupe de bobines, également porté par **C**, et décalé par rapport au précédent d'un tiers de pas:  $\frac{L}{3}$  (par exemple vers la droite:  $\curvearrowright$ ) est alimenté par un courant alternatif de même amplitude et de même période que le premier, mais en retard par rapport à lui d'un tiers de période  $\left(\frac{T}{3}\right)$ , il produira, dans le même entrefer, un champ alternatif fixe à répartition sinusoïdale représenté par l'expression obtenue en remplaçant dans la précédente **x** par  $x - \frac{L}{3}$  et **t** par  $t - \frac{T}{3}$ , soit :

$$\beta'' = \beta_0 \cos 2\pi \frac{x - \frac{L}{3}}{L} \cos 2\pi \frac{t - \frac{T}{3}}{T}$$

Un troisième groupe de bobines, décalé par rapport au premier de deux tiers de pas  $\left(2 \frac{L}{3}\right)$  et alimenté par un courant alternatif de même amplitude et de même période que le premier, mais en retard sur lui de deux tiers de période  $\left(2 \frac{T}{3}\right)$ , donnerait enfin un champ représenté par

$$\beta''' = \beta_0 \cos 2\pi \frac{x - \frac{2L}{3}}{L} \cos 2\pi \frac{t - 2 \frac{T}{3}}{T}$$

Le premier champ équivaut, en vertu du théorème de *Leblanc*, aux deux champs tournants :

$$\int \frac{\beta_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} \right) \quad \text{et} \quad \int \frac{\beta_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right)$$

le second, aux deux champs tournants :

$$\int \frac{\beta_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{et} \quad \int \frac{\beta_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right)$$

et enfin le troisième aux deux champs tournants :

$$\int \frac{\beta_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} - \frac{4}{3} \right) \quad \text{et} \quad \int \frac{\beta_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right)$$

Les trois champs tournants dans le sens :  $\curvearrowleft$ , c'est-à-dire en sens contraire du sens de permutation des bobines des trois phases, ont une résultante nulle.

En effet, la somme

$$\cos 2\pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} \right) + \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} - \frac{2}{3} \right) + \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} + \frac{t}{T} - \frac{4}{3} \right)$$

des cosinus de trois angles en progression arithmétique de raison :  $-\frac{2}{3} 2\pi$  est nulle.

Les trois champs tournants dans le sens :  $\curvearrowright$ , c'est-à-dire dans le sens de permutation des bobines des trois phases, sont identiques en grandeur et en position et ont une résultante, triple de l'un deux, soit :

$$\frac{3\beta_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right)$$

C'est ainsi qu'en alimentant un système de trois groupes de bobines magnétisantes, convenablement placées, par un système de courants triphasés, on obtient en pratique un champ tournant.

La vitesse de rotation  $\omega'$  de ce champ est liée au nombre  $\mathbf{p}$  de pas adopté pour chaque groupe de bobines et à la pulsation  $\omega$  du courant d'alimentation par la relation

$$\omega = \frac{1}{\mathbf{p}} \omega$$

puisque le champ avance d'une quantité  $\frac{2\pi}{\mathbf{p}}$ , égale au pas, dans le temps  $\mathbf{T}$ .

L'amplitude du champ est égale aux  $\frac{3}{2}$  de celle du champ fixe que donnerait un seul des trois groupes de bobines.



Deux groupes de bobines décalés l'un par rapport à l'autre d'un quart du pas, et alimentés par des courants diphasés, donnent aussi un champ tournant.

En effet, le champ dû au premier groupe :

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_0 \cos 2\pi \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} \cos 2\pi \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}}$$

équivalent aux champs tournants :

$$\uparrow \frac{\mathcal{B}_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} + \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} \right) \text{ et } \uparrow \frac{\mathcal{B}_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} - \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} \right)$$

et celui dû au second :

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B}_0 \cos 2\pi \frac{\mathbf{x} - \frac{\mathbf{L}}{4}}{\mathbf{L}} \cos 2\pi \frac{\mathbf{t} - \frac{\mathbf{T}}{4}}{\mathbf{T}}$$

aux champs tournants :

$$\uparrow \frac{\mathcal{B}_0}{2} \cos 2\pi \left( \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} + \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} - \frac{1}{2} \right) \text{ et } \uparrow \frac{\mathcal{B}_0}{2} \left( \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} - \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} \right)$$

L'ensemble des champs  $\leftarrow$  est nul, et les champs  $\rightarrow$ , identiques entre eux, donnent une somme double de l'un d'eux, soit:

$$\mathcal{B}_0 \cos 2\pi \left( \frac{x}{2} - \frac{t}{L} \right)$$

Plus généralement :

*Dans un système  $\mathbf{q}$  — phasé, les  $\mathbf{q}$  champs tournants composants d'un certain sens s'ajoutent, tandis que les  $\mathbf{q}$  champs tournants de l'autre sens se détruisent.*



En réalité, la répartition du flux alternatif fixe donné dans un entrefer usuel par un groupe de bobines tel que ceux que nous venons de considérer n'est pas rigoureusement sinusoïdale.

Si l'on veut tenir compte de cette dérogation à la simplicité théorique, on peut, relativement aux termes en  $\mathbf{x}$ , développer l'expression de  $\mathcal{B}$  en série de Fourier et la représenter, en admettant d'ailleurs que l'expression en chaque point est sinusoïdale par rapport à  $\mathbf{t}$ , par une somme de termes de la forme:

$$\mathcal{B}_n \cos 2\pi \left( \frac{\mathbf{x}}{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{n}}} - \delta_n \right) \cdot \cos 2\pi \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}}, \text{ (pour des valeurs}$$

impaires de  $\mathbf{n}$ , à cause de la relation  $\mathcal{B}_x + \frac{2}{L} = -\mathcal{B}_x$ ).

Considérons le cas le plus usuel d'un système triphasé.

Le premier groupe de bobines donnera :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' = & \mathcal{B}_1 \cos 2\pi \left( \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} - \delta_1 \right) \cos 2\pi \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} \\ & + \mathcal{B}_3 \cos 2\pi \left( \frac{\mathbf{x}}{\frac{\mathbf{L}}{3}} - \delta_3 \right) \cos 2\pi \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}} + \dots \end{aligned}$$

le second :

$$\beta'' = \beta_1 \cos 2\pi \left( \frac{x - \frac{L}{3}}{L} - \delta_1 \right) \cos 2\pi \frac{t - \frac{T}{3}}{T} \\ + \beta_3 \cos 2\pi \left( \frac{x - \frac{L}{3}}{\frac{L}{3}} - \delta_3 \right) \cos 2\pi \frac{t - \frac{T}{3}}{T} + \dots$$

et le troisième :

$$\beta''' = \beta_1 \cos 2\pi \left( \frac{x - \frac{2L}{3}}{L} - \delta_1 \right) \cos 2\pi \frac{t - \frac{2T}{3}}{T} \\ + \beta_3 \cos 2\pi \left( \frac{x - \frac{2L}{3}}{\frac{L}{3}} - \delta_3 \right) \cos 2\pi \frac{t - \frac{2T}{3}}{T} + \dots$$

Remplaçons les termes d'un même ordre par les champs tournants équivalents, suivant le théorème de Leblanc, c'est-à-dire

$$\beta_n \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n \right) \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \\ \beta_n \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n - \frac{n}{3} \right) \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{3} \right) \\ \beta_n \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n - \frac{2n}{3} \right) \cdot \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{2}{3} \right)$$

respectivement par :

$$\frac{\beta_n}{2} \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n + \frac{t}{T} \right) + \frac{\beta_n}{2} \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n - \frac{t}{T} \right) \\ \frac{\beta_n}{2} \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n + \frac{t}{T} - \frac{n+1}{3} \right) + \frac{\beta_n}{2} \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n - \frac{t}{T} - \frac{n-1}{3} \right) \\ \frac{\beta_n}{2} \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n + \frac{t}{T} - \frac{2n+2}{3} \right) + \frac{\beta_n}{2} \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n - \frac{t}{T} - \frac{2n-2}{3} \right)$$

La somme de ces expressions est différente suivant que  $n$  est un multiple de 3, ou un multiple de 3 plus 1, ou un multiple de 3 moins 1.

Pour  $n = m.3$  elle est nulle, car on a alors affaire à des sommes de cosinus d'angles en progression arithmétique de raison  $\frac{2\pi}{3}$ .

Pour  $n = m.3 + 1$ , la somme des termes de la première colonne seule est nulle et celle des termes de la seconde, qui sont alors identiques entre eux, vaut  $\frac{3\beta_n}{2} \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} - \delta_n - \frac{t}{T} \right)$  et représente un champ tournant dans le sens : ↷.

Pour  $n = m.3 - 1$ , c'est, au contraire, la somme des trois termes de la seconde colonne qui est nulle, celle des termes de la première, qui sont alors identiques entre eux, valant :  $\frac{3\beta_n}{2} \cos 2\pi \left( \frac{nx}{L} \delta_n + \frac{t}{T} \right)$  et représentant un champ tournant dans le sens : ↶.

En appliquant ces résultats aux différents groupes de termes des séries précédentes, pour lesquels on a successivement  $n = 1 = m.3 + 1$ ,  $n = 3$ ,  $n = 5 = m.3 - 1$ , etc., on voit que l'ensemble  $\beta^1 + \beta^3 + \beta^5$  équivaut à l'ensemble des champs tournants suivants :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \beta_1 \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \delta_1 - \frac{t}{T} \right), \quad \text{sens : } \uparrow \\ \frac{3}{2} \beta_5 \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \delta_5 + \frac{t}{T} \right), \quad \text{sens : } \uparrow \\ \frac{3}{2} \beta_7 \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \delta_7 - \frac{t}{T} \right), \quad \text{sens : } \uparrow \end{aligned}$$

etc.

Dans le temps  $T$  le premier de ces champs parcourt un espace  $L$ , le second un espace  $\frac{L}{5}$  le troisième un espace  $\frac{L}{7}$  et ainsi de suite. Ils ont donc des vitesses linéaires :  $\frac{V}{n}$ , en raison inverse de leurs indices  $n$ .

Sur une armature portant des circuits induits et tournant avec la vitesse périphérique  $V$ , les champs d'indices  $n$  supérieurs au premier donneraient lieu à des effets d'induction gênant le mouvement.

Les courants parasites dus à ces champs harmoniques produisant des effets magnétiques sensiblement égaux et contraires aux leurs, il en résulte què dans l'entrefer, en présence d'une armature en mouvement, il ne reste sensiblement à prendre en considération que le champ tournant fondamental:

$$\frac{3}{2} \mathcal{B}_1 \cos 2\pi \left( \frac{x}{L} - \delta_1 - \frac{t}{T} \right)$$

Grâce à cet effet d'épuration dû aux courants induits, on pourra, en pratique, considérer dans les appareils usuels, lors du mouvement, les champs, qu'on nomme alors *champs dynamiques*, comme offrant une répartition sinusoïdale, tout comme si les champs composants étaient réduits à leur premier harmonique dans l'espace.



Si les courants d'alimentation des bobines excitatrices, au lieu d'être sinusoïdaux présentent des harmoniques, ou considérera l'expression du champ donné par chaque groupe de bobines sous forme de série dont le terme général, en admettant alors une répartition sinusoïdale dans l'entrefer, sera:  $\mathcal{B}_n \cos 2\pi \frac{x}{L}$   
 $\cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \alpha_n \right)$  et, par un calcul analogue au précéd-

ent, on sera amené à concevoir le système donné comme soumis à une série de champs tournants parcourant l'espace  $L$  en des temps  $\frac{T}{n}$  et par conséquent avec des vitesses  $nV$ , d'autant plus grandes que leur numéro d'ordre sera plus élevé, ceux qui tournent dans le même sens que le premier étant favorables au mouvement de l'armature, les autres lui étant, par contre, défavorables.



## CINQUANTE-DEUXIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROTHERMIE

## EFFET JOULE ET COURANTS DE FOUCAULT



### I

#### Effet Joule

Soit  $i$  la valeur, à un instant  $t$ , d'un courant alternatif de fréquence usuelle (**50** à **100**). La quantité de chaleur engendrée par effet Joule dans un conducteur, de résistance ohmique  $R$ , qui en est le siège, est, pendant un laps de temps infiniment petit  $dt$  :

$$dq = A.Ri^2dt$$

et, pendant un laps de temps fini s'étendant d'un instant  $t_1$  à un autre instant  $t_2$  :

$$q = A.R \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt$$

L'intensité  $I$  d'un courant continu qui dégagerait, dans la même résistance, la même quantité de chaleur dans le même temps serait définie par la condition :

$$q = A.RI^2(t_2 - t_1)$$

qui donne :  $I^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \frac{q}{A.R}$  et, par suite, d'après l'expression précédente de  $q$  :

$$I^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt$$

relation qui n'est autre que celle même définissant l'intensité efficace du courant variable donné, dans l'intervalle de temps considéré.

Si donc un même appareil est mis, toutes choses égales d'ailleurs, dans le même état thermique 1° par un courant variable de médiocre fréquence, 2° par un courant continu, on pourra considérer l'intensité de ce dernier comme donnant la valeur de l'intensité efficace du premier.

Tel est le principe de l'emploi des appareils thermiques à la détermination des valeurs efficaces des intensités et des différences de potentiels alternatives usuelles, ces appareils étant préalablement gradués en courants continus.



#### **Remarques relatives aux voltmètres et ampèremètres thermiques**

Les appareils de cette sorte présentent, pour les mesures en courants alternatifs, un avantage tout particulier, en raison de leur très faible self-induction, leur construction ne faisant intervenir que de faibles longueurs de fils non bobinés. Grâce à cette circons-

tance, leurs indications sont pratiquement indépendantes de la fréquence.

#### A. — Voltmètres

Soit  $\delta$  la déviation de l'index d'un voltmètre de résistance  $r$  et de self  $l$  sous l'action d'une différence de potentiel efficace  $V$  de pulsation  $\omega$ . Une différence de potentiel de pulsation  $\omega'$  donnant lieu à la même déviation n'aura pas comme valeur l'indication  $V$  donnée par l'instrument. Sa valeur  $V'$  sera telle que le carré de l'intensité efficace du courant dans l'instrument ait la même valeur que pour la première, puisque  $\delta$  est fonction de ce carré.

Entre l'indication  $V$  de l'appareil et la valeur réelle  $V'$  de la différence de potentiel efficace appliquée aux bornes existe donc la relation :

$$\frac{V'^2}{r^2 + l^2 \omega'^2} = \frac{V^2}{r^2 + l^2 \omega^2}$$

d'où

$$V' = V \sqrt{\frac{1 + \frac{l^2}{r^2} \omega'^2}{1 + \frac{l^2}{r^2} \omega^2}}$$

On voit que c'est seulement dans le cas où la constante de temps  $\frac{l}{r}$  de l'instrument est pratiquement nulle, que l'on a  $V' = V$ , quelles que soient la pulsation d'étalonnage  $\omega$  et la pulsation d'emploi  $\omega'$ .

C'est ce qui a lieu pour les voltmètres thermiques. Les voltmètres électromagnétiques ne présentent

pas cet avantage. Ils ne sont exacts qu'à la fréquence pour laquelle ils ont été étalonnés. Aux autres fréquences ils exigent une correction indiquée par la relation précédente, qu'on peut mettre sous la forme :

$$V' = V \sqrt{\frac{1 + f^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

en désignant par  $\varphi$  le décalage (1) entre le courant dans le voltmètre et la tension aux bornes pour la fréquence normale, et par  $f$  le rapport  $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{F'}{F}$  de la fréquence  $F'$  lors de l'emploi à la fréquence normale  $F$ .

Le facteur de correction est le même pour tous les points de l'échelle si le coefficient de self  $l$  est constant, c'est-à-dire pratiquement indépendant de la position de l'équipage mobile. Il suffit alors de déterminer ce facteur pour un point, par comparaison avec un voltmètre thermique donnant la vraie valeur de  $V'$ .

Si le voltmètre électro-magnétique considéré a été étalonné en courants continus, on a en posant :

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{l\omega'}{r}.$$

$$V' = V \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi'} = \frac{V}{\cos \varphi'}$$

De la connaissance de  $V'$  et de  $V$  on peut déduire  $\varphi'$  et par suite  $l = \frac{r \operatorname{tg} \varphi'}{\omega'}$ , ce qui permettra de calculer

1.  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{l\omega}{r}$ . Par exemple pour  $r = 2000$ ,  $l = 1$  et  $\omega = 314$ , on aurait :  $l\omega = 314$  et  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{314}{2000} = 0,157$ .

ensuite le coefficient de correction pour toutes les fréquences.

### B. — Ampèremètres

Les ampèremètres thermiques industriels sont à shunt. L'appareil indicateur est, en réalité, un voltmètre sensible dérivé aux bornes d'un conducteur gros et court inséré dans le circuit qui porte le courant à mesurer (fig. 452).

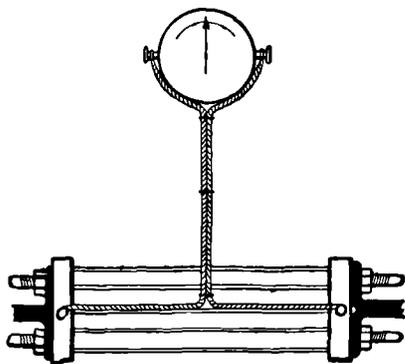


FIG. 452

Pour les grandes intensités ce shunt est formé d'un faisceau de lames posées de champ et réunissant deux plaques terminales épaisses.

Les cordons du cadran partent de deux bornes situées au milieu du côté supérieur de ces lames.

Il est très important de disposer ces cordons comme l'indique la fig. 452, de façon qu'ils soient exactement appliqués l'un contre l'autre sur la plus grande longueur possible, afin de réduire au minimum, et toujours à la même valeur, l'étendue de la boucle qu'ils forment et à travers laquelle le conducteur qui est le siège du courant à mesurer donne lieu à un flux alternatif dont l'action se combine avec celle de la différence de potentiel aux extrémités du shunt. Si, lors de l'emploi de l'appareil, cet effet d'induction est, par

suite d'une disposition inexacte des cordons, plus grand que lors de l'étalonnage, les lectures faites sont supérieures aux intensités de courants à mesurer.

Il va sans dire que l'appareil doit être employé avec les cordons mêmes qui ont servi à l'étalonnage et que tout excès de résistance du circuit du cadran, par mauvais contacts ou intercalation de conducteurs étrangers, doit être soigneusement évité.



Le régime thermique d'un conducteur parcouru par un courant variable est nécessairement variable ; en d'autres termes, l'excès de la température d'un point de ce conducteur sur la température ambiante, est une fonction du temps.

Considérons avec M. Ch. Eug. Guye (1) le cas simple d'un conducteur filiforme assez mince pour que sa température  $\tau$  puisse être considérée comme uniforme en tous les points d'une section, et assez long pour présenter une région moyenne pratiquement à l'abri de l'influence perturbatrice des points d'attache.

Le gain de chaleur effectué par ce conducteur, de masse  $m$  et de chaleur spécifique  $c$ , en un temps  $dt$ , soit :  $m \cdot c \cdot d\tau$  est l'excès de la chaleur  $A \cdot r \cdot i^2 \cdot dt$ , qui y est engendrée par l'effet Joule, sur la chaleur  $K \cdot S \cdot \tau \cdot dt$ , perdue par rayonnement, d'où l'équation :

---

1. Ch. Eug. Guye. — Quelques remarques sur les variations de température d'un conducteur parcouru par des courants alternatifs.

*Archives des sc. phys. et nat. de Genève*, 4<sup>e</sup> partie, t. III, p. 254-262 (15 mars 1897).

*L'Eclair. él.* t. XI (1897), p. 216.

$$\mathbf{m.c.} \frac{d\tau}{dt} = \mathbf{A.r.i^2} - \mathbf{KS}\tau$$

ou, en posant, pour simplifier,  $\mathbf{mc} = \lambda$ ,  $\mathbf{KS} = \rho$  :

$$\lambda \cdot \frac{d\tau}{dt} + \rho \cdot \tau = \mathbf{Ari^2}.$$

Envisageons, en particulier, le cas où le courant variable  $\mathbf{i}$  est sinusoïdal :  $\mathbf{i} = \mathbf{I_{max}} \sin \omega \mathbf{t}$ , en sorte que  $\mathbf{Ari^2} = \mathbf{a} \sin^2 \omega \mathbf{t} = \frac{\mathbf{a}}{2} (1 - \cos 2\omega \mathbf{t})$ . Nous aurons à résoudre l'équation :

$$\lambda \frac{d\tau}{dt} + \rho \cdot \tau = \frac{\mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{a}}{2} \cos 2\omega \mathbf{t}$$

tout à fait analogue à celle à laquelle on serait conduit dans l'étude du courant produit dans un circuit de self  $\mathbf{L}$ , de résistance  $\mathbf{R}$  par le système de deux forces électromotrices l'une constante :  $\frac{\mathbf{a}}{2}$ , l'autre cosinusoidale :  $\frac{\mathbf{a}}{2} \cos 2\omega \mathbf{t}$ , de pulsation  $\omega_1 = 2\omega$ . L'équation de ce courant, en effet, serait :

$$\mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}}{dt} + \mathbf{RI} = \frac{\mathbf{a}}{2} - \frac{\mathbf{a}}{2} \cos 2\omega \mathbf{t}$$

On connaît, dans ce cas, le résultat :  $\mathbf{I}$  est la somme algébrique de deux courants, l'un constant  $\mathbf{I}_0 = \frac{\mathbf{a}}{2\mathbf{R}}$ , l'autre cosinusoidale :

$$I_1 = -\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_1^2}} \cos(2\omega t - \varphi), \text{ l'angle } \varphi \text{ étant défini par } \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega_1}{R}.$$

En transposant, c'est à dire en remplaçant  $L$  par  $\lambda$ ,  $R$  par  $\rho$ ,  $I$  par  $\tau$ , on aura donc

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 = \frac{a}{2\rho} - \frac{a}{2\sqrt{\rho^2 + \lambda^2\omega_1^2}} \cos(2\omega t - \varphi)$$

$$i \operatorname{vectg} = \frac{\lambda\omega_1}{\rho} = \frac{2\lambda\omega}{\rho} = \frac{2m\mathbf{c}\omega}{\mathbf{KS}}.$$

Il suit de là que, sous l'action d'un courant sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , les variations de la température d'un conducteur long et mince sont également sinusoïdales, mais de pulsation  $\omega$ , double de  $\omega$ . L'amplitude de ces variations est

$$\frac{a}{2\sqrt{\rho^2 + \lambda^2\omega_1^2}} = \frac{ArI_{\max}^2}{2\mathbf{KS}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{ArI_{\max}^2}{2\mathbf{KS}} \cos \varphi$$

Lorsque  $\varphi$  est très petit, c'est-à-dire lorsque  $2m\mathbf{c}\omega$  est faible par rapport à  $\mathbf{KS}$ , l'amplitude des variations

de la température se réduit sensiblement à  $\frac{ArI_{\max}^2}{2\mathbf{KS}}$  et

le décalage  $\varphi$  des pulsations de la température sur sur celles du courant est pratiquement nul. Au contraire, si  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2m\mathbf{c}\omega}{\mathbf{KS}}$  a une valeur un peu notable,

$\varphi$  est voisin de  $\frac{\pi}{2}$  et le décalage est voisin de  $\frac{T_1}{4}$  et,

par conséquent, de  $\frac{T}{8}$ , puisque  $T_1 = \frac{T}{2}$ .

Ce dernier cas se trouverait réalisé, par exemple, pour un fil de cuivre de 0,1 millimètre de diamètre et de 1 mètre de longueur.

En effet, pour ce fil on aurait: (1)  $m = 7.d^2\text{gram.} = 7.(0,1)^2 = 0,07 \text{ gram.}$  et, comme  $c = 0,095$ ,  $mc = 0,00665$ . D'ailleurs  $2\omega = 4\pi F$  est de l'ordre de  $4\pi \times 50$ , c'est à dire de 600 et toujours au moins à supérieur 300, de sorte que  $2mc\omega$ , pour le fil considéré serait, en pratique, supérieur à  $0,00665 \times 300 = 1,995$

D'autre part, un tel fil parcouru par un courant continu de 0,67 amp. subit, dans un air tranquille, une élévation de température stationnaire de  $50^\circ$ , ce qui donne la relation:  $Ar.\overline{0,67^2} = KS.50$  dans laquelle (voir t. I, p. 231) A doit, si l'on envisage des petites calories, recevoir la valeur: 0,24. On a

donc  $0,24.r.\overline{0,67^2} = KS.50$ , d'où  $KS = \frac{0,24.r.\overline{0,67^2}}{50}$ . Mais (voir

t. I, p. 154),  $r_{15} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{21}{d^2} = \frac{21}{1000.0,1^2} = 2,1$  d'où  $r = r_{50}$

$= r_{15} [1 + 0,004.(50 - 15)] = r_{15} (1 + 0,14) = 2,1.1,14 = 2,39$ ,

d'où, par conséquent:  $KS = \frac{0,24.2,39.\overline{0,67^2}}{50} = 0,00514$ , et,

enfin:  $\frac{2mc\omega}{KS} = \text{tg } \varphi > \frac{1,995}{0,00514} = 388$ , relation entraînant

pour  $\varphi$  une valeur extrêmement voisine de  $\frac{\pi}{2}$ .

Pour ce fil,  $\rho = KS$  étant tout à fait négligeable devant  $\lambda\omega_1 = 2mc\omega$ , on pourrait réduire l'expression de  $\tau$  à :

$$\begin{aligned} \frac{a}{2\tau} \left[ 1 - \frac{\rho}{2\lambda\omega_1} \cos \left( 2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] &= \tau_0 \left( 1 - \frac{KS}{4mc\omega} \sin 2\omega t \right) \\ &= \tau_0 \left( 1 - \frac{1}{776} \sin 2\omega t \right) \end{aligned}$$

d'où il suit que l'excès de température resterait compris entre

$$\tau_0 \left( 1 - \frac{1}{776} \right) \text{ et } \tau_0 \left( 1 + \frac{1}{776} \right).$$



1. Voir t. I page 155 : la formule  $P = 7d^2$  qui donne le poids en Kg. par Km., donne aussi la masse en gramme-masse par mètre.

Des considérations du même genre ont été appliquées par *M. Janet* (1) aux filaments des lampes à incandescence.

La chaleur engendrée en un temps  $dt$  dans un filament de résistance  $r$  aux extrémités duquel est appliquée une différence de potentiel sinusoïdale  $e = E_0 \sin \omega t$  est

$$A \frac{E_0^2 \sin^2 \omega t}{r} dt = \frac{1}{2} \frac{AE_0^2}{r} (1 - \cos 2\omega t) dt$$

Si  $S$  est la surface latérale de ce filament,  $\theta$  sa température absolue, la perte par rayonnement est, d'après une formule de *H. F. Weber* :

$$ks\theta e^{a\theta} dt$$

$a$  étant une constante, la même pour tous les corps dont la valeur **CGS** est **0,0043**, et  $k$  une constante, particulière au charbon gris, dont la valeur est **0,000013**.

La chaleur gardée par le filament et correspondant à l'accroissement  $d\theta$  de sa température est, en désignant par  $m$  sa masse et par  $c$  sa chaleur spécifique.

$$mcd\theta$$

On a donc l'équation :

$$\frac{1}{2} \frac{AE_0^2}{r} (1 - \cos 2\omega t) dt = ks\theta e^{a\theta} dt + mcd\theta$$

Posons :  $\theta = \theta_0 + \vartheta$

1. *P. Janet. Sur les variations de température des lampes à incandescence parcourues par des courants alternatifs.*

L'éclairage électrique t. XI p. 507 — 509 (juin 1897).

En appelant  $\theta_0$  la température du filament et  $\vartheta$  la partie variable, que nous supposons sinusoïdale et de faible amplitude.

Le développement de  $ks\theta e^{a\theta}$  borné aux termes du premier degré en  $\vartheta$  est  $kse^{a\theta_0} [\theta_0 + \vartheta(1 + a\theta_0)]$ . On a donc l'équation :

$$mc \frac{d\vartheta}{dt} + kse^{a\theta_0} (1 + a\theta_0) \vartheta + ks\theta_0 e^{a\theta_0} = \frac{1}{2} \frac{AE_0^2}{r} (1 - \cos 2\omega t)$$

qui, puisque  $\vartheta$  est une fonction sinusoïdale, se décompose évidemment en deux autres :

$$ks\theta_0 e^{a\theta_0} = \frac{1}{2} \frac{AE_0^2}{r} = \frac{AE_{\text{eff}}^2}{r}$$

et

$$mc \frac{d\vartheta}{dt} + kse^{a\theta_0} (1 + a\theta_0) \vartheta = - \frac{AE_{\text{eff}}^2}{r} \cos 2\omega t$$

La première signifie que  $\theta_0$  est la température stationnaire qu'atteindrait le filament si on lui appliquait une force électromotrice constante, égale à la valeur efficace de la force électromotrice sinusoïdale donnée.

La seconde donne pour l'amplitude de  $\vartheta$  la valeur :

$$\frac{\frac{AE_{\text{eff}}^2}{r}}{\sqrt{k^2 s^2 e^{2a\theta_0} (1 + a\theta_0)^2 + m^2 c^2 \cdot 4\omega^2}}$$

Appliquant ces formules au filament d'une lampe Siemens de 16 bougies pour lequel on avait :  $E_H = 98$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 40$ ,  $r = 181$ ,

$$k = 0,000013, \quad s = \pi dl = \pi \cdot 0,01512 \cdot 15,6, \quad m = \frac{\pi d^2}{4} \cdot m_s = \pi \frac{0,01512^2}{4} \cdot 1,9 \quad \text{et} \quad c = 0,51 \text{ M. Janet a trouvé :}$$

$$\theta = 1567^\circ + 9,5 \sin(2\omega t + 2^\circ 41')$$

Les variations de température de cette lampe dans les conditions indiquées étaient donc de l'ordre de 10° en plus et en moins de la température moyenne 1567°. Ces variations faisaient osciller la puissance lumineuse entre 14,1 et 18,5 bougies.

Les variations d'éclat d'une lampe à incandescence alimentée par un courant alternatif se voient très bien quand on agite au voisinage de la lampe un objet brillant, certaines des positions successives de cet objet étant alors plus vivement éclairées que les autres



*Soumis à une même force électromotrice sinusoïdale  $\mathbf{C} = E_{\max} \sin \omega t$  deux conducteurs de même résistance ohmique  $\mathbf{R}$ , l'un dépourvu de self-induction et de capacité, l'autre pourvu d'une self  $\mathbf{L}$  et d'une capacité  $\mathbf{C}$  satisfaisant à la condition :  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  sont équivalents au point de vue de l'effet Joule.*

En effet, l'intensité efficace dans le second conducteur, exprimée en général par :  $I^2 = \frac{E^2}{Z^2} = \frac{E^2}{R^2 + K^2} = \frac{E^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  est égale, lorsque la relation  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  est réalisée, à l'intensité efficace  $\frac{E^2}{R^2}$  relative au premier.

Mais lorsque la force électromotrice n'est pas sinusoïdale simple et présente des harmoniques, aucune relation entre  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{C}$  ne peut identifier les deux effets Joule.

En effet, l'intensité efficace dans le conducteur doué de self et de capacité est donnée alors par une somme de termes

$$I^{n2} = \frac{1}{2} \sum \frac{E_n^2}{R^2 + K_n^2}$$

et l'intensité efficace dans la pure résistance ohmique par une somme de termes

$$I^{n2} = \frac{1}{2} \sum \frac{E_n^2}{R^2}$$

dont chacun est plus grand que son correspondant dans l'autre somme.

Aucune relation entre  $L$  et  $C$  ne peut donner à la fois  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 0, \dots, K_n = 0$ , ce qui serait nécessaire pour l'identification des deux sommes.

*Ainsi, avec des courants quelconques, aucune compensation des selfs par les capacités ne peut être réalisée au point de vue de l'effet Joule.*

La compensation n'est possible que dans le cas des courants sinusoïdaux.

En matière de courants alternatifs, des questions d'échauffement des canalisations électriques, de limitation des intensités de courants dans des conducteurs donnés ou, inversement, de choix des conducteurs pour des intensités données, se posent de la même manière qu'en courants continus et se résolvent de même (1) en ayant égard aux *valeurs efficaces* des courants mis en jeu.



La question des rhéostats se complique de la considération de l'inductance des conducteurs dont ils sont formés, à moins que ceux-ci ne soient de faible longueur ou enroulés de façons particulières, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus (pages 155-156).

1, Voir t, I 17<sup>e</sup> Leçon p. 226 et suiv.



## II

### Courants de Foucault dus à des flux magnétiques alternatifs

Les courants de Foucault, dont sont le siège les noyaux des bobines à courants alternatifs sont des courants dus aux flux magnétiques variables auxquels ces noyaux sont soumis.

Ces courants contribuent pour une part au dégagement de chaleur qui a lieu dans les noyaux en fer et à l'échauffement qui en résulte, l'autre part étant due à l'hystérésis.

Toutes choses égales d'ailleurs, la part d'échauffement due aux courants de Foucault est d'autant moindre, pour une feuille ou pour un fil parallèles au champ, que leur épaisseur est moindre, ainsi que le montrent les calculs suivants.

#### A. — Noyaux en paquets de tôles.

Soit, par exemple, **ABCD** (*fig. 453*) la section rectangulaire d'une tôle conductrice mince soumise à l'action d'un champ alternatif perpendiculaire à cette section.

Supposons la longueur **BC** = *l* de cette section assez grande vis à vis de la largeur **AB**, qui est l'épaisseur **e** de la tôle, pour qu'on puisse considérer les circuits des

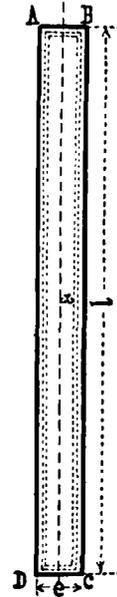


FIG. 453

courants de Foucault, tel que celui représenté en traits ponctués, comme ayant un développement égal à  $2BC = 2l$ , et par conséquent une résistance  $r$  égale à  $\rho \frac{2l}{s}$ ,  $s$  étant leur section et  $\rho$  la résistivité du métal.

La section du circuit considéré est un rectangle de côtés  $dx$  et  $h$ , en désignant par  $h$  la hauteur de la tôle perpendiculairement au plan de la figure. On a donc

$$r = \rho \frac{2l}{h dx} .$$

Ce circuit entoure une espace d'étendue  $2xl$  et si  $\mathcal{B}_{\max}$  est la valeur maxima de l'induction magnétique à laquelle est soumis cet espace, la valeur maxima du flux magnétique correspondant sera  $\Phi_{\max} = \mathcal{B}_{\max} \cdot 2xl$ .

Or la force électromotrice d'induction due à un flux sinusoïdal a pour valeur efficace (en volts)  $E = \frac{\omega \Phi_{\max}}{10^8 \sqrt{2}}$ .

On a donc, en supposant ici ce cas simple,  $E = \frac{\omega \mathcal{B}_{\max} \cdot 2xl}{10^8 \sqrt{2}}$ .

La quantité de chaleur dégagée, par seconde, dans un circuit de résistance  $r$  soumis à une force électromotrice de valeur efficace  $E$  étant exprimée en joules par la formule :  $\frac{E^2}{r}$ , on a, pour la quantité de chaleur due en une seconde au courant de Foucault qui a pour siège le circuit considéré, l'expression :

$$\frac{\omega^2 \mathcal{B}_{\max}^2 4x^2 l^2}{10^{16} \cdot 2} \cdot \frac{h dx}{2\rho l} = \frac{hl}{10^{16} \rho} \omega^2 \mathcal{B}_{\max}^2 x^2 dx$$

En faisant la somme de toutes les expressions de ce genre correspondant à toutes les valeurs de  $x$  comprises entre 0 et  $\frac{\epsilon}{2}$ , on aura l'expression de la chaleur dégagée, en une seconde dans la tôle entière, soit :

$$j_1 = \frac{hl}{10^{16}\rho} \omega^2 \mathcal{B}_{\max}^2 \int_0^{\frac{\epsilon}{2}} x^2 dx = \frac{hl}{10^{16}\rho} \omega^2 \mathcal{B}_{\max}^2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^3$$

ou en remarquant que  $hle$  est le volume  $u$  de la tôle :

$$j_1 = \frac{u\omega^2 \mathcal{B}_{\max}^2 \epsilon^2}{24 \cdot 10^{16}\rho}$$

La chaleur dégagée, en une seconde, par centimètre cube de tôle est donc :

$$(j_1)_1 = \frac{j_0}{u} = \frac{\omega^2 \mathcal{B}_{\max}^2 \epsilon^2}{24 \cdot 10^{16}\rho} \frac{\text{joule}}{\text{sec. cm}^3}$$

En remplaçant  $\omega$  par  $2\pi F$ , et  $\epsilon$ , épaisseur de la tôle en centimètres, par l'expression équivalente  $\frac{e}{100}$  qu'on obtient un représentant par  $e$  l'épaisseur estimée en dixièmes de millimètres, on a finalement :

$$(j_1)_1 = \frac{\pi^2 F^2 \mathcal{B}_{\max}^2 e^2}{6 \cdot 10^{20} \cdot \rho} = \frac{1,6 F^2 \mathcal{B}_{\max}^2 e^2}{10^{20} \cdot \rho}$$

Pour le fer,  $\rho$  est de l'ordre de  $\frac{10}{10^6} = \frac{1}{10^5}$ , on a donc, pour ce métal :

$$(j_1)_1 = \frac{16}{10^{16}} e^2 F^2 \mathcal{B}^2$$

Ainsi se trouve justifiée la formule donnée précédemment (t. II, page 131).

## B. — Noyaux en paquets de fils

Dans le cas d'un fil, pour le circuit de rayon  $x$  et de section  $hdx$  représenté sur la fig. 454, on a :

$$r = \rho \frac{2\pi x}{hdx} \text{ et } \Phi_{\max} = \mathcal{B}_{\max} \cdot \pi x^2, \text{ d'où } E = \frac{\omega \mathcal{B}_{\max} \pi x^2}{10^8 \sqrt{2}} \text{ et}$$

$$\frac{E^2}{r} = \frac{\omega^2 \mathcal{B}^2 \pi^2 x^4}{10^{16} \cdot 2} \cdot \frac{hdx}{\rho \cdot 2\pi x} = \frac{h\pi}{4 \cdot 10^{16} \rho} \omega^2 \mathcal{B}^2 x^3 dx.$$

$$\text{Par suite : } j_1 = \frac{h\pi}{4 \cdot 10^{16} \rho} \omega^2 \mathcal{B}^2 \int_0^{\frac{\delta}{2}} x^3 dx = \frac{h\pi \delta^4 \omega^2 \mathcal{B}^2}{4 \cdot 64 \cdot 10^{16} \rho}$$

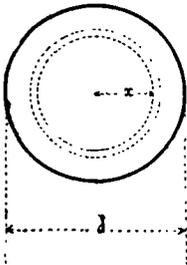


FIG. 454

et, en remarquant que  $h\pi \frac{\delta^2}{4}$  est le volume  $u$  du tronçon de fil de longueur  $h$  considéré

$$j_1 = \frac{u \delta^2 \omega^2 \mathcal{B}^2}{64 \cdot 10^{16} \cdot \rho}$$

ce qui donne finalement pour la chaleur dissipée, en une seconde, par centimètre cube de fil, l'expression :

$$(j_1)_1 = \frac{\delta^2 \omega^2 \mathcal{B}^2}{64 \cdot 10^{16} \cdot \rho} \cdot \frac{\text{joule}}{\text{sec. cm}^3}$$

En remplaçant  $\omega$  par  $2\pi F$ , et  $\delta$ , diamètre du fil en centimètres par l'expression équivalente  $\frac{d}{100}$  qu'on obtient en représentant par  $d$  le diamètre estimé en dixièmes de millimètres, on a finalement :

$$(j_1)_1 = \frac{\pi^2}{16 \cdot 10^{16}} \frac{d^2 F^2 \mathcal{B}^2}{\rho}$$

Pour le fer, eu égard à l'ordre de grandeur de  $\rho$ , on a, en chiffres ronds :

$$(j_1)_1 = \frac{6}{10^{16}} d^2 F^2 \mathcal{B}^2.$$

### C. — Comparaison des tôles aux fils

Une lame et un fil de même métal donneront lieu, à égalité de valeurs de  $F$  et de  $\mathcal{B}$ , au même dégagement de chaleur par centimètre cube et par seconde, si l'épaisseur  $e$  de l'une présente, relativement au diamètre  $d$  de l'autre, la relation définie par l'égalité :

$$16 e^2 = 6 d^2$$

ou

$$\frac{d}{e} = \sqrt{\frac{16}{6}} = 1,63$$



## CINQUANTE-TROISIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROTHERMIE

\*\*

## ARCS ÉLECTRIQUES A COURANTS ALTERNATIFS



### I

#### **Arcs entre charbons Circonstances de production**

Entre deux baguettes de charbon faisant partie d'un circuit où agit une force électromotrice alternative, on peut faire jaillir un arc électrique.

Il faut, pour cela, que la valeur efficace de la force électromotrice en jeu soit supérieure à une trentaine de volts ; que sa fréquence ne soit pas inférieure à **20** ; que l'impédance du circuit ne soit pas trop grande et que, par conséquent, l'intensité du courant puisse atteindre un certain nombre d'ampères ; enfin que les baguettes de charbon aient été d'abord amenées au contact et séparées ensuite jusqu'à une distance de quelques millimètres, qui peut être, d'ailleurs, d'autant plus grande que la force électromotrice de la source est plus élevée.

Entre deux points présentant une différence de potentiel alternative d'une valeur efficace de l'ordre de **100 volts** on peut disposer en série trois et même, quoique plus difficilement, quatre couples de baguettes de charbon donnant lieu simultanément à des arcs électriques.



Un arc à courant alternatif diffère notablement d'un arc à courant continu :

Et d'abord, le simple examen de ses charbons, après un certain temps de fonctionnement, montre que leur taille par le courant n'est pas du tout la même que pour un arc continu. Au lieu d'un cratère et d'une pointe, on trouve ici, comme extrémités des charbons, deux troncatures sensiblement planes et identiques entre elles (*fig. 455*), ce qui révèle dans les rôles des deux charbons, une identité qui n'existe pas en courants continus (1). Et cela se conçoit : puisque le courant, dans le cas actuel, change alternativement de sens, chacun des charbons devient, à tour de rôle, positif et négatif. Au total, après un certain temps, les deux charbons ont passé par la même série d'états, et il suffit qu'ils soient de même diamètre pour que leur usure soit très approximativement la même.



FIG. 455

Si, comme la taille des charbons le fait pressentir, le cratère, au lieu d'appartenir exclusivement à l'un des

1. Voir t. I, p. 273.

charbons, appartient alternativement à l'un et à l'autre et passe de celui-ci à celui-là chaque fois que le courant se renverse, la répartition de la lumière dans l'espace environnant un arc à courant alternatif ne doit pas être la même que pour un arc à courant continu et doit, notamment, présenter, relativement à un plan horizontal passant par le point moyen de l'arc, une quasi-symétrie qui n'a pas lieu pour l'arc continu.

C'est, en effet, ce qui résulte des mesures photométriques faisant connaître l'intensité lumineuse suivant diverses directions. La courbe des intensités offre, dans le cas usuel de charbons placés verticalement

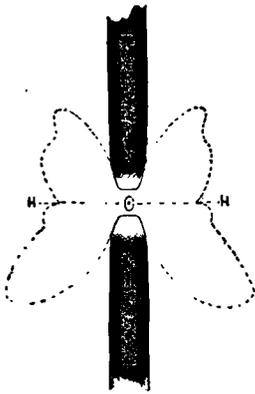


FIG. 456

suivant le prolongement l'un de l'autre, l'allure représentée par la fig. 456, Elle manifeste en faveur de la partie inférieure, un léger défaut de symétrie tenant à ce que le charbon supérieur est un peu plus chaud, et, partant, un peu plus lumineux que l'autre, grâce au courant ascendant de gaz chauds qui le préserve mieux que l'autre du refroidissement. Lors donc qu'un arc à courants alternatifs sera destiné à l'éclairage de surfaces horizontales placées au-dessous de lui, l'emploi d'un réflecteur s'imposera pour ramener vers le bas la lumière envoyée par le charbon inférieur au-dessus du plan horizontal **HH**.



On peut constater directement, à l'œil, que l'arc à courant alternatif est un phénomène périodique et qu'il présente des renversements, séparés par des extinctions suivies de rallumages, à chaque demi-période du courant : il suffit, pour cela, comme l'ont fait pour la première fois *Jamin* et *Roger* (1), d'étaler dans l'espace, sur un écran, à l'aide d'un miroir tournant porté par l'arbre de l'alternateur fournissant le courant, les images successives de l'arc et des charbons aux différents instants d'une période. On voit sur l'écran deux cercles lumineux, lieux des images des pointes des charbons, et, entre eux, une plage, lieu des images de l'arc, divisée, par des points où l'arc est absent, en autant de sections qu'ils y a de demi-périodes du courant dans un tour de l'alternateur.

Il est visible par là que l'arc s'éteint et se rallume à chaque demi-période et l'on reconnaît de plus que les charbons échangent leur rôle, car le cercle, lieu des images de chacun d'eux est divisé en arcs alternativement plus et moins lumineux, les instants d'éclat maximum correspondant aux demi-périodes pendant lesquelles le charbon correspondant est positif. (2)

On peut aussi, comme l'a indiqué M. Joubert, regarder l'arc à travers une fente étroite portée par un disque opaque calé sur l'arbre de l'alternateur. En déplaçant l'œil autour de l'axe, on aperçoit l'arc pour différentes positions de la fente et par conséquent à différentes phases de sa période.

Ce caractère périodique de l'arc produit à l'aide des forces électromotrices alternatives industrielles, la périodicité qui en résulte pour la perturbation produite dans l'air ambiant, refoulé à chaque rallumage, expliquent le bourdonnement caractéristique de l'arc alternatif. La détermination de la hauteur du son correspondant montre d'ailleurs nettement que cette hauteur correspond au nombre d'alternances, c'est-à-dire au nombre de demi-périodes, du courant.



L'éclairement produit par un arc alternatif en un point donné est périodique et passe alternativement par un maximum et un minimum. Ce minimum n'est pas

1. Comptes rend. de l'Ac. des sc, t. LXVI, p. 37 (1868).

2. Journal de physique, 1881.

nul, car, lorsque l'arc est éteint, les charbons demeurent encore incandescents. Il suit de cette fluctuation de l'éclairement que si l'on agite un objet étroit, comme, par exemple, une baguette, à la lumière d'un tel arc, on aperçoit certaines des positions de cet objet plus vivement que les autres, ce qui donne l'apparence d'un objet multiple. Cette expérience donne un moyen très simple de distinguer, en l'absence de perception du bourdonnement caractéristique, un arc alternatif d'un axe continu.

Si l'on examine, à la lumière d'un arc alternatif, un disque présentant un série de secteurs alternativement noirs et blancs

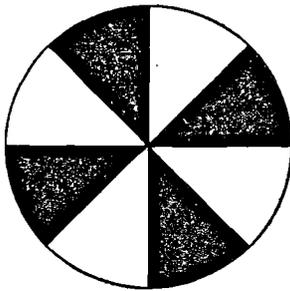


FIG. 457

(fig. 457). et animé d'une vitesse graduellement croissante, on aperçoit, pour une certaine vitesse, les secteurs presque aussi nettement que si le disque était immobile. Il en est ainsi lorsque le temps que met un secteur d'une espèce pour prendre la place du secteur de même espèce suivant est juste égal à la période des variations de l'éclairement, c'est-à-dire à la demi-période du courant.

On peut se servir de cette remarque pour régler et mesurer la vitesse de rotation du disque, d'après la fréquence du courant alimentant l'arc, ou, inversement, pour déterminer la fréquence du courant, d'après la vitesse connue de la rotation du disque.

Si l'alternateur qui produit le courant d'alimentation d'un arc est à inducteur mobile, le temps qu'emploie un pôle inducteur pour venir prendre la place du suivant est juste égal à une demi-période, en sorte que, vu à la lumière de l'arc, le système des pôles inducteurs tournants paraît immobile.

Si l'on regarde à cette même lumière la partie tournante d'un autre alternateur identique, on jugera qu'elle est soit exactement au pas avec la première, soit en avance, soit en retard, sui-

vant qu'elle semblera immobile ou paraîtra se déplacer dans un sens ou dans l'autre.

C'est là, dans toute l'acception étymologique du mot, un exemple très net de la méthode **stroboscopique**.



Comme dans toutes les études relatives à des phénomènes comportant des changements d'aspects, on peut, dans celles qui ont trait aux apparences successives d'un arc alternatif, appeler la photographie à venir en aide à l'œil, et cela avec avantage, puisqu'elle conserve des traces durables des observations faites et permet, par conséquent, d'examiner à loisir leurs moindres particularités.

C'est ce qu'a fait M. Blondel (1) en projetant sur un cylindre tournant, revêtu d'une pellicule sensible et adapté à l'arbre d'un alternateur, l'image d'un arc alimenté par cet alternateur.

Un écran opaque muni d'une fente étroite parallèle aux génératrices du cylindre tournant ne laissait se peindre sur la pellicule qu'une région étroite de l'image, correspondant, dans l'arc, soit à une ligne équatoriale **ee** (fig. 458 (I)), soit à une ligne méridienne **mm** (fig. 458, II), suivant l'orientation donnée, par un jeu



FIG. 458

1. *Études expérimentales sur l'arc à courants alternatifs*, t. XLII pp. 551 et 618 (1891).

de miroirs, à l'image de l'arc par rapport à la fente.

Ce dispositif a l'avantage: 1° de ne pas exiger d'organe spécial pour donner au cliché le mouvement rapide nécessaire 2° de fournir des épreuves ayant toutes même échelle et exactement repérées relativement aux périodes du courant; 3° de permettre l'emploi de temps de pose variés, puisque les apparences successives de l'arc se reproduisent suivant des séries semblables à chaque tour du tambour.

Les clichés obtenus quand la pellicule reçoit la série des impressions produites par les différents états de

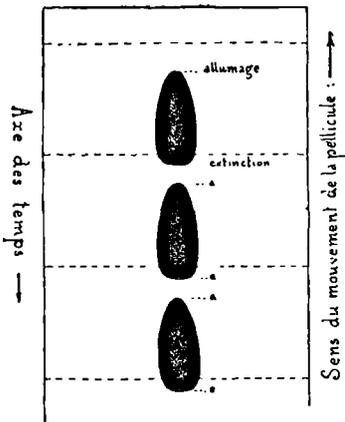


FIG. 459

l'arc suivant la ligne équatoriale **ee**, présentent l'aspect indiqué par la fig. 459.

Les lacunes existant entre les taches obtenues marquent les instants où l'arc est éteint.

Les taches, par contre, résultent des impressions reçues par la pellicule aux instants où l'arc est rallumé.

La figure pyriforme de ces taches indique que la largeur de l'arc change d'un instant à l'autre : faible au moment de l'allumage, elle croît ensuite plus ou moins rapidement, reste quelques instants à peu près constante, puis décroît un peu et alors survient assez brusquement l'extinction, puis tout recommence, suivant

le même ordre, à l'alternance suivante, avec la simple interversion du rôle des charbons.

La largeur initiale de l'arc est à peu près égale à celle des facettes terminales des charbons; on en peut conclure que l'arc s'établit simultanément sur toute la surface terminale et déborde ensuite autour.



L'examen des clichés obtenus dans des conditions variées conduit aux conclusions suivantes :

*La largeur des parties terminales des crayons, qui est aussi la largeur initiale de l'arc, est d'autant plus grande que l'intensité efficace du courant d'alimentation est plus élevée.*

*Dans les arcs longs et de faible ampérage les durées d'extinction sont presque égales aux durées d'allumage.*

*A longueur d'arc et à ampérage constant, un accroissement de la self-induction d'un circuit comprenant la source et une lampe unique abrège les extinctions et diminue la largeur maxima de l'arc.*

*A longueur d'arc et à self constantes, l'accroissement de l'intensité efficace du courant abrège les extinctions.*

*A intensité efficace et à self constantes, l'accroissement de l'écart entre les charbons, augmente la durée des extinctions.*



Les clichés obtenus quand la pellicule reçoit la série des impulsions produites par les différents états de

l'arc suivant la ligne méridienne **mm**, présentent l'aspect indiqué par la fig. 460.

Ils permettent d'énoncer les propositions suivantes :

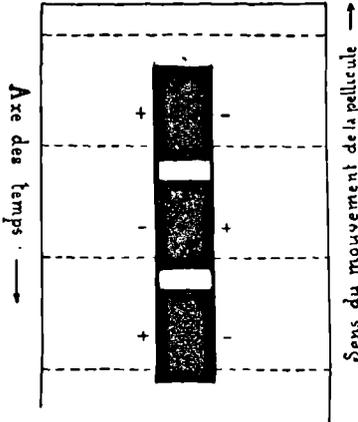


FIG. 460

*L'éclat de l'arc est le même dans toute sa hauteur.*

*L'éclat du charbon positif, très vif pendant l'allumage, tombe très rapidement, lors de l'extinction, à une valeur beaucoup plus faible et reste, pendant la fin de la période, très inférieur à sa valeur première (1).*

La température moyenne d'une pointe de charbon d'un arc à courant alternatif doit être, par suite, notablement inférieure à celle du crayon positif d'un arc continu, et cela d'autant plus que les durées d'extinction seront plus longues.

L'accroissement de l'intensité efficace et l'augmentation de la fréquence du courant ayant pour conséquence d'abrèger les extinctions l'un en valeur absolue, l'autre en valeur relative, devront augmenter la température moyenne des charbons.

On peut dès lors prévoir : 1° que l'arc alterné sera inférieur comme rendement lumineux, toutes choses égales d'ailleurs, à l'arc continu, abstraction faite de

1. Ce fait avait été déjà très nettement indiqué par M. Joubert (*Société Française de Physique*), déc. 1891).

*l'énergie dissipée en chaleur dans les résistances auxiliaires de stabilité; 2° que l'arc alterné donnera une lumière d'autant plus rouge que l'intensité efficace qui y sera mise en jeu sera plus faible.*

En examinant, sur certains clichés, l'image des trajectoires de particules de carbone incandescentes transportées d'un charbon à l'autre, M. Blondel a reconnu que ces trajectoires étaient un peu inclinées sur les génératrices du cylindre tournant, d'où résultait la preuve qu'elles mettaient un temps appréciable pour effectuer le parcours de l'intervalle entre les deux charbons. De plus, le sens de leur inclinaison montrait qu'elles étaient projetées du charbon positif vers le charbon négatif. Le degré d'inclinaison permet de fixer l'ordre de grandeur de leur vitesse à environ

$$160 \frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}.$$


Ces données déjà fort instructives de la photographie ont été très heureusement confirmées, précisées et complétées par des études oscillographiques, dues également à M. Blondel (1), sur la différence de potentiel **V** aux crayons et l'intensité **I** du courant.

Les circonstances principales qui déterminent l'allure des courbes **V** et **I**, et surtout celle de la première, ainsi que la position de leurs zéros par rapport à ceux de la force électromotrice **E** de la source, sont : la na-

1. A. Blondel. — *Nouvelles recherches sur l'arc à courants alternatifs*. La Lum. électr., t. XLIX (1893), pp. 501, 557, 608. — *Sur l'arc à courants alternatifs*. C. R. 12 déc. 1898.

ture des crayons (homogènes ou à mèche) et la constitution du circuit en tant qu'elle donne à ce dernier une inductance négligeable ou notable.

La combinaison des deux conditions relatives au circuit avec les deux qui concernent les charbons conduit, par conséquent, à la distinction de quatre cas, savoir :

- 1<sup>er</sup> cas : Crayons homogènes, circuit non inductif ;
- 2<sup>e</sup> cas : Crayons homogènes, circuit inductif ;
- 3<sup>e</sup> cas : Crayons à mèche, circuit non inductif ;
- 4<sup>e</sup> cas : Crayons à mèche, circuit inductif.

L'allure typique des courbes obtenues dans le premier cas est indiquée par la fig. 461.

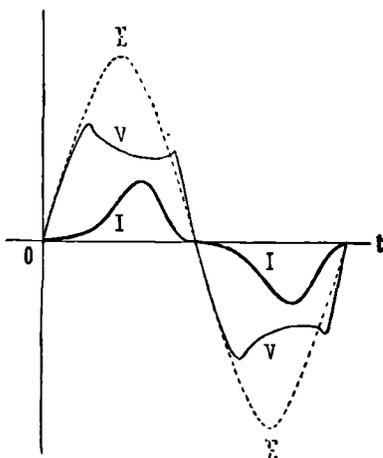


FIG. 461

Pendant un certain temps, de part et d'autre des zéros de  $E$ , le courant est nul, ce qui correspond à l'extinction de l'arc.

La tension  $V$  entre les crayons se confond alors avec  $E$ , et quand elle a atteint une valeur suffisante, d'autant plus élevée que l'écart des charbons

est plus grand, l'arc se reconstitue par une sorte de décharge disruptive après laquelle la tension  $V$  baisse un peu.

Quand, ensuite,  $E$  diminuant devient inférieure à

la valeur de  $V$  exigée pour le maintien de l'arc, celui-ci s'éteint et la courbe  $V$  rejoint alors celle de  $E$ . Mais  $E$  augmentant ensuite en sens contraire, après s'être annulée, il se produit bientôt un nouvel allumage, et ainsi de suite.

La présence, dans le circuit, d'une self-induction notable modifie l'allure et la situation respective des courbes comme l'indique la fig. 462.

Il n'y a plus alors d'annulations du courant persistantes, et comme, cependant, ainsi que le montre l'étude photographique, il y a encore des extinctions de l'arc bien marquées, on doit penser que pendant celles-ci, en l'absence de la vapeur de

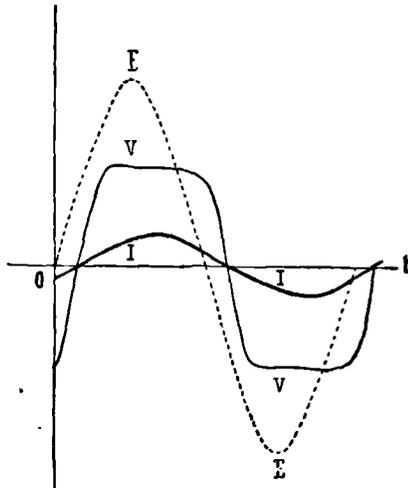


FIG. 462

carbone, le courant passe à la faveur des gaz chauds.

Les zéros de  $V$  coïncident encore avec ceux de  $I$ , mais sont, comme ceux-ci, décalés par rapport aux zéros de  $E$ , et cela d'autant plus que l'inductance du circuit est plus grande.

La courbe  $V$  est exempte de becs à l'allumage et à l'extinction, sauf dans le cas d'arcs très courts et sifflants, où l'on voit apparaître une phase de courant nul, et augmenter la valeur efficace du courant, pen-

quantité qui diminue, au contraire, la valeur efficace de la tension  $V$ .

Avec des crayons à mèche et dans des circuits non inductifs (3<sup>e</sup> cas), seuls les arcs de très faible intensité

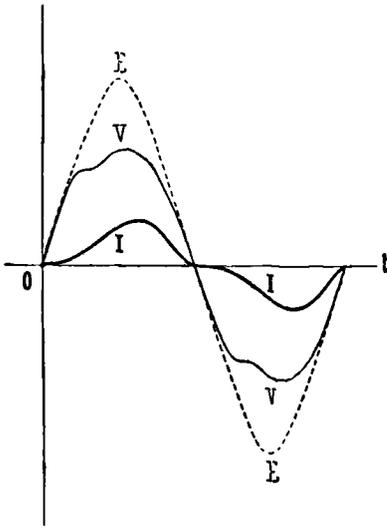


FIG. 463

( $< 9$  amp.) présentent encore des annulations de courants persistantes (fig. 463), mais les becs correspondants de  $V$  sont peu accusés.

Les arcs criards (rares avec ce genre de charbons) présentent des courbes  $V$  plus arrondies qu'avec les crayons homogènes.

Les arcs silencieux et d'intensités supérieures à 9 ampères présentent des courbes  $V$  et  $I$  d'autant plus arrondies que les charbons sont pourvus de mèches plus conductrices ; les vapeurs des matières constituant les mèches offrent passage au courant même aux instants où la tension est insuffisante pour donner lieu à la vaporisation du carbone, et elles permettent un rallumage plus facile, de sorte que l'arc présente une allure plus stable et plus silencieuse.

Enfin, sur circuits inductifs, les crayons à mèche donnent des courbes  $V$  et  $I$  qui se décalent sur  $E$ , mais toujours également, de façon que leurs zéros coïncident encore (fig. 464).

En outre, ces courbes tendent à se rapprocher de la forme sinusoïdale, la courbe **V** étant toutefois un peu aplatie et la courbe **I** un peu pointue.

Seule l'existence, sur la courbe **I**, d'un point anguleux ou d'une inflexion au voisinage du zéro, rappelle qu'il se produit une extinction de l'arc entraînant un changement brusque de résistance.

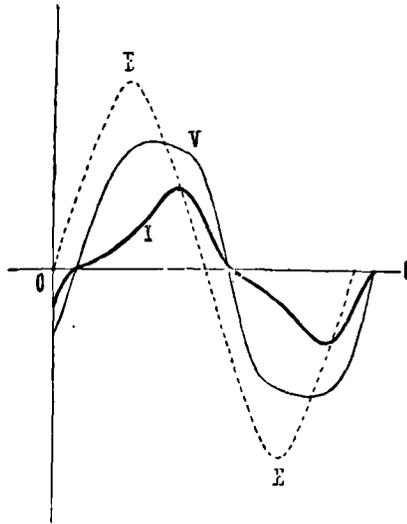


FIG. 464

Pour rendre manifeste la durée de l'extinction de l'arc qui n'apparaît pas sur la courbe **I** donnée par l'oscillographe éclairé à l'aide d'une lumière étrangère, M. Blondel a projeté sur le tambour tournant de son appareil photographique la lumière de l'arc lui-même à l'aide du miroir d'un oscillographe traversé par le courant d'alimentation. La courbe ainsi obtenue (fig. 465) n'est autre que la courbe représentative de **I** coupée de lacunes correspondant aux instants d'extinction de l'arc, les gaz chauds qui servent de véhicule au courant à ces instants n'ayant pas un pouvoir actinique suffisant pour impressionner la pellicule photographique.



En aucun cas, il n'existe de décalage entre **V** et **I**. On en peut con-

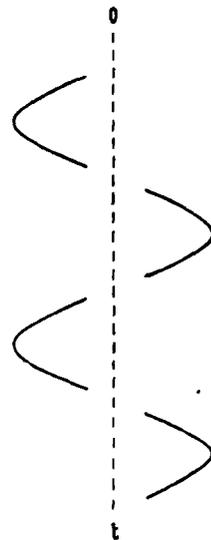


FIG. 465

clure qu'il n'y a dans l'arc ni polarisation, ni force contre électromotrice sensibles.

La différence de potentiel observée entre les deux charbons se répartit, comme pour l'arc continu, en trois chutes d'inégale importance : la plus grande a lieu à la surface du crayon positif, la seconde a lieu à la surface du crayon négatif et est à peu près proportionnelle à la première. Quant à la troisième, elle est due à la résistance propre de l'arc.

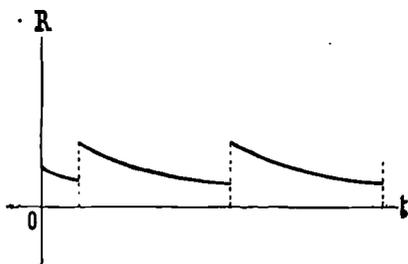


FIG. 466

La loi de variation de cette résistance, déduite du quotient des valeurs successives de la différence de potentiel  $V$  observée aux extrémités de l'arc (entre deux électrodes de

charbon auxiliaires), par les valeurs correspondantes de l'intensité  $I$  du courant, est représentée par une courbe telle que celle de la fig. 466 indiquant pour  $R$  un minimum vers le milieu de chaque alternance, c'est-à-dire quand  $I$  est maximum.



## II

### Conditions de stabilité

On nomme **stabilité** (1) d'un arc la faculté plus ou

1. A. Blondel. Loc. cit.

moins grande qu'il présente de résister aux causes accidentelles d'extinction, telles qu'un changement brusque du régime électrique du circuit, ou l'action d'un courant d'air.

A ces perturbations soudaines, les organes de réglage d'une lampe à arc, même les plus parfaits, ne sauraient faire face, leur action ne pouvant être assez rapide. Pour résister à ces causes fortuites d'extinction l'arc doit donc présenter, par lui-même, une certaine élasticité de régime.

La stabilité d'un arc alternatif dépend essentiellement de la durée des extinctions, car de celle-ci dépendent essentiellement le refroidissement des gaz et des charbons et, par suite, les résistances correspondantes.

A la fréquence de **50** périodes, la stabilité disparaît lorsque les extinctions atteignent une durée égale à celle des allumages.

Les arcs courts sont plus faciles à entretenir que les longs : l'intensité minima exigée par des crayons donnés est d'autant plus élevée que l'écart adopté est plus grand.

*(Exemple : 8 amp. pour un écart de 2 mm. et 12 amp. pour un écart de 3 mm.)*

Avec des crayons homogènes on réalise assez facilement des arcs de **30** à **40** amp. à l'aide de forces électromotrices alternatives de l'ordre de **40** à **45** volts.

Pour obtenir des arcs d'un ampérage moindre, on ne peut ni diminuer **E**, ni, en conservant **E**, introduire en circuit des résistances ou des inductances ;

dans les deux cas, l'arc s'éteint. La seule solution du problème consiste à augmenter  $E$  en même temps qu'on augmente soit la résistance soit l'inductance du circuit.

La force électromotrice  $E$  doit dépasser notablement la tension de rallumage et celle-ci dépasse d'autant plus la tension correspondant à la vaporisation normale du carbone à la surface du charbon que l'intensité du courant d'alimentation est moindre. On doit donc élever  $E$  si l'on veut pouvoir abaisser  $I$ , et, pour avoir un courant plus faible avec une plus grande force électromotrice, il faut nécessairement accroître  $R$  ou  $L$ .

L'augmentation de  $L$  est préférable à celle de  $R$ , d'une part, en raison de la moindre dissipation d'énergie qui a lieu dans une self que dans la résistance équivalente, et d'autre part, en raison de l'abréviation des extinctions qu'amène la self grâce à la forme favorable qu'elle donne à la courbe  $V$  : en effet, en faisant aborder par cette courbe l'axe des temps sous un angle voisin de  $90^\circ$  elle réduit la durée pendant laquelle, à chaque alternance,  $V$  est inférieure à la tension exigée pour l'existence de l'arc.

L'intensité du courant dans le circuit d'un arc ne peut d'ailleurs avoir de valeur déterminée que si ce circuit renferme une certaine résistance en dehors de celle de l'arc, ou une certaine self-induction. Soit  $u_1$ , en effet, la chute de tension existant à la surface du crayon  $\dagger$  et correspondant à la vaporisation du carbone. On a, en désignant par  $a$  la résistance de l'arc, par  $R$  celle du

reste du circuit, par  $L$  la self totale, et par  $e$  la valeur instantanée de la force électromotrice :

$$u_1 = - ai - Ri - L \frac{di}{dt} + e$$

Or  $a$  est sensiblement en raison inverse de  $i$ , d'où il suit que le terme  $ai$  est à peu près constant. Le courant  $i$  serait donc indéterminé s'il n'existait pas de termes en  $Ri$  ou en  $L \frac{di}{dt}$ .

Quand on diminue l'intensité du courant d'alimentation d'un arc, il faut réduire en même temps le diamètre des charbons, afin de maintenir toujours la densité du courant à une valeur convenable (environ 0,5 amp. par mm<sup>2</sup>).

Les crayons à mèche donnent des arcs beaucoup plus stables que les crayons homogènes, et cela d'autant plus que les mèches sont plus tendres.

Par exemple, avec un même alternateur, M. Blondel a pu obtenir, en employant des charbons à mèche, un arc ayant jusqu'à 32 mm de longueur, alors qu'avec des crayons homogènes durs la longueur d'arc maxima réalisable n'était que de 3 mm., soit dix fois moindre.

Le voltage nécessaire à la production d'un arc est notablement réduit par les charbons à mèche, qui se classent à cet égard en trois catégories désignées dans le commerce sous les dénominations de charbons à haut, moyen ou bas voltage.

Pour donner des arcs d'environ 12 amp. avec environ 3 mm. d'écart, les premiers exigent de 30 à 35 volts, et les derniers environ 25 volts seulement.

Avec des charbons à très bas voltage, on peut réduire à 40

volts environ la force électromotrice  $E$  nécessaire à l'entretien d'arcs stables de 8 amp., qui offrent alors entre leurs crayons des différences de potentiels  $V$  de l'ordre de 25 à 30 volts.



Dans tout ce qui précède il n'a été question que de circuits comprenant un seul arc. Cette disposition simple était nécessaire pour l'étude expérimentale nette des diverses circonstances capables d'influer sur le phénomène. Dans la pratique, les arcs sont souvent produits au nombre de plusieurs dans un même circuit.

Si un circuit comprenant  $n$  arcs et soumis à l'action d'une force électromotrice  $E$  présente, hors de ses arcs une résistance totale  $R$  et une self  $L$ , on peut, pratiquement, assimiler chaque arc à un arc isolé, alimenté par un circuit de résistance  $\frac{R}{n}$ , de self  $\frac{L}{n}$  soumis à l'action d'une force électromotrice  $\frac{E}{n}$ .

Au contraire, si les  $n$  arcs sont placés en dérivation entre deux points d'un circuit de résistance  $R$  et de self  $L$  contenant une force électromotrice  $E$ , on peut envisager chacun d'eux comme alimenté par un circuit de résistance  $nR$  de self  $nL$  et soumis à l'action de la même force électromotrice  $E$ .

Lorsque plusieurs arcs sont groupés en série, leur stabilité individuelle est plus grande que lorsqu'ils sont isolés, et croît avec leur nombre, car l'élasticité nécessaire est fournie par la résistance totale du circuit : en effet, si l'un d'eux est soumis à une cause accidentelle

d'extinction, il est rare que tous les autres soient, en même temps, exposés au même accident, de sorte que l'arc profite de la différence existant entre **E** et la somme des tensions aux électrodes. On s'explique ainsi la stabilité assez bonne que présentent, il est vrai avec des charbons à mèches excessivement conductrices, des arcs marchant par quatre en série sur **110** volts.

La self ou le rhéostat nécessaires à la stabilité peuvent être d'autant plus réduits que les charbons employés à produire l'arc sont à mèches plus tendres ; mais, par contre, ces charbons atteignent une incandescence moins vive que les charbons durs.

Pour avoir une meilleure incandescence des charbons et un meilleur effet lumineux, il est préférable de monter les lampes par trois seulement en série sur **110** ou **120** volts, en employant des crayons à moyen voltage pour lesquels la valeur de **V** est de **30** à **35** volts donnant une bonne stabilité sans trop grande dépense d'énergie et par conséquent sans trop grand préjudice pour le rendement.



### III

#### Arcs entre charbon et métal (r) et arcs entre métaux.

Si l'on remplace un des charbons d'une lampe à arc à courants alternatifs par une baguette de métal (d'au-

---

A. Blondel. — *Sur les arcs à courants alternatifs dissymétriques entre métal et charbon* C. R. de l'Ac. des Sc. 20 mars 1899.

moins **3** à **4** mm. de diamètre), on peut, entre le charbon et le métal, obtenir un arc, si l'on a soin de laisser, avant de les séparer, les deux baguettes en contact assez longtemps pour que celle de métal soit bien incandescente et présente à sa pointe une gouttelette fondue d'où l'arc jaillit dans le sens métal-charbon.

Les diverses particularités du phénomène sont qualitativement les mêmes pour tous les métaux, qui ne présentent entre eux, à cet égard, que des différences quantitatives.

Il n'est pas nécessaire, mais il est préférable, si l'on désire des arcs stables et un peu longs, que la baguette de charbon soit à mèche.

On obtient deux types d'arcs différents suivant qu'on opère avec de très petits écarts des crayons (moins d'un millimètre) ou avec des écarts plus grands.

L'*arc court*, correspondant au premier cas est relativement stable, et d'autant plus que l'écart des crayons est moindre.

La différence de potentiels entre les crayons est inférieure à **25** volts lorsque la baguette métallique est en cuivre ou en aluminium et atteint **30** volts lorsqu'elle est en fer.

L'intensité du courant peut être abaissée au-dessous de **10** amp. avec le cuivre, mais doit être au moins de **30** amp. avec le fer.

Les courbes **V** et **I** sont analogues à celles obtenues pour les arcs entre charbons, avec toutefois une dissymétrie plus ou moins accusée entre les alternances successives.

Cette dissymétrie est très nette dans le cas du fer, et d'un circuit inductif, ainsi que le montre la fig. 467,

le courant atteignant un maximum plus élevé quand il va du charbon au fer que lorsqu'il va du fer au charbon, et la courbe de

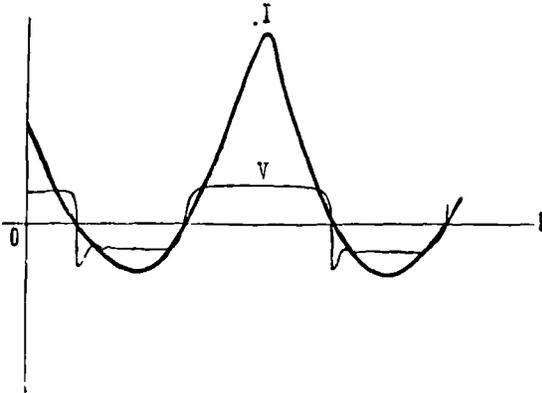


FIG. 467

tension présentant, dans ce dernier cas, un bec qui n'existe pas dans l'autre.

La présence d'une self notable en circuit, arrondit les courbes, comme dans le cas de l'arc entre charbons.

L'*arc long*, obtenu pour des écarts supérieurs à un millimètre, fait entendre un son criard et ne présente qu'une faible stabilité.

Le cuivre exige au moins **15** ampères.

Le zinc se prête mal à l'expérience à cause de sa trop grande fusibilité. Il en est de même de l'aluminium qui, en outre, se recouvrant d'alumine, donne lieu à de promptes extinctions, après lesquelles un nettoyage du métal est nécessaire pour qu'on puisse rallumer l'arc.

Le fer se prête bien, au contraire, à la production d'arcs longs, à condition qu'on dispose d'un voltage atteignant au moins **80** volts et qu'on puisse réaliser un courant d'au moins **25** ampères.

L'*arc long* est caractérisé par la suppression d'une

alternance sur deux, l'allumage n'ayant plus lieu dans le sens charbon-métal (*fig. 468*).

Si l'écart permet aux deux régimes : arc court et

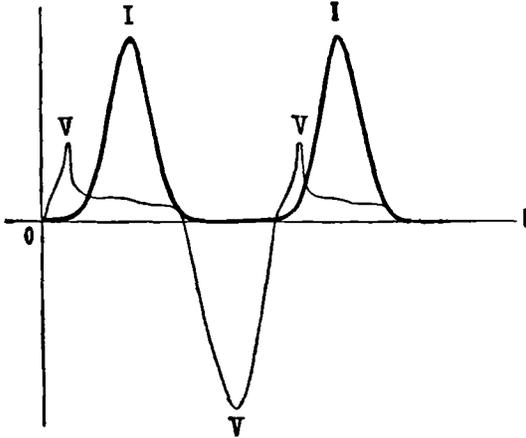


FIG. 468

peubruyant, arc long et criard, des'établir indifféremment, on constate, en opérant sur circuit inductif, que lors du passage du premier régime

au second, se produit un brusque accroissement de l'intensité efficace du courant (par exemple de 9 à 20 amp. pour le cuivre). Cet effet tient à ce que les alternances métal-charbon sont, par l'effet de la self induction, allongées au point que le courant a le temps de croître beaucoup plus que dans le premier régime, si bien que la courbe des carrés des intensités pendant cette alternance est plus grande que la somme des aires correspondant aux deux alternances de l'arc court.



Cette dissymétrie des deux alternances d'un arc entre charbon et métal, si bien mise en évidence par la méthode oscillographique, donne la signification exacte des prétendus effets de courants continus signalés

pour la première fois par *Jamin* et *Manœuvrier* (1) dans des circuits à courants alternatifs munis d'un tel arc, et particulièrement dans le cas où l'électrode métallique est constitué par du mercure. Ces observateurs constatèrent, en effet, qu'en un pareil circuit pouvaient fonctionner : une boussole des tangentes, un voltmètre, une lampe à arc à courants continus. C'étaient là évidemment des manifestations de la prédominance d'une des alternances du courant alternatif. On les observe même avec des arcs entre charbons, si l'un des charbons est notablement plus gros que l'autre.



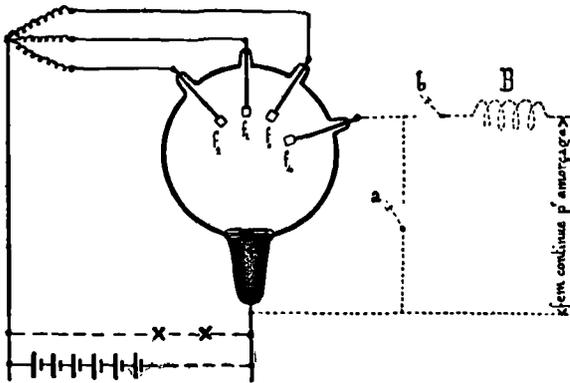
Une ampoule de verre vide d'air et contenant, comme électrodes, une masse de mercure et une tige de platine munie d'une petite masse de fer à son extrémité, constitue une lampe à arc à vapeur de mercure, douée d'une remarquable dissymétrie. En établissant entre les électrodes une différence de potentiel suffisamment élevée, on peut amorcer entre elles un arc si cette différence se présente comme une chute dans le sens fer-mercure, mais non si elle se présente en sens contraire.

Soumis à une différence de potentiel alternative suffisamment élevée, ce tube ne laissera donc passer que les alternances comportant un courant allant du fer au mercure, et son circuit sera le siège de courants redressés.

En le munissant de trois électrodes de fer reliées

1. C. R. de l'Ac. des Sc. t. XCIV p. 1615 (1882).

respectivement (*fig. 469*) aux trois bornes d'un appareil triphasé, pendant que le mercure est relié au point



neutre, on peut obtenir, dans des appareils interposés (batteries d'accumulateurs, lampes, etc.) un cou-

rant légèrement ondulé équivalant pratiquement à un courant continu, le tube ne chômant jamais puisqu'il y a constamment au moins une des phases en état de l'actionner.

La quatrième électrode de fer  $f_4$  que montre la figure est destinée à l'amorçage initial du tube par l'effet d'une bobine d'induction à courant continu qui, au moment de l'ouverture de la clef **a**, établit entre cette électrode  $f_4$  et le mercure une tension convenable. En même temps la clef **b** est soulevée et la bobine **B** mise au repos.

Quand l'appareil est en fonctionnement, la chute de tension entre les électrodes fer et mercure n'est que de **14** volts environ. Pour une tension d'alimentation de **1000** volts, la perte ne serait donc que de **1,4 p. 100**, ce qui assurerait à l'appareil le très beau rendement de **98,6 p. 100**.

Ces faits intéressants ont été signalés par *M. Cooper Hewitt* dans le cours des recherches poursuivies par lui sur les tubes à vapeur de mercure qui actionnés d'ailleurs en courants continus constituent des lampes électriques à certains égards très remarquables.

Quand ils doivent être employés comme lampes, ces tubes sont munis soit de deux électrodes de mercure, soit d'une électrode de mercure et d'une électrode de platine, le fer ne convenant, comme seconde électrode, que dans le fonctionnement en redresseurs.



Dans l'air, entre des électrodes métalliques, un arc alternatif est plus difficile à amorcer et à maintenir qu'entre des électrodes de charbon.

L'amorçage exige des forces électromotrices supérieures à **200** volts (1) et la production de l'arc n'est régulière que si la distance n'est ni trop grande ni trop petite.

Lorsque la distance des électrodes est trop grande l'arc est irrégulier et instable : les points entre lesquels il jaillit changent constamment ; la différence de potentiel entre ses extrémités oscille dans de larges limites.

Lorsque la distance des électrodes est trop petite, la différence de potentiel aux électrodes cesse de varier proportionnellement à la longueur, elle est beaucoup plus grande que ne le comporterait la longueur si l'arc était normal. Elle peut même donner lieu à un flux

---

1. *Zuchristian*. — Sitz. der Akad. Wien. t. CII-II a, p. 567, 1893.

d'étincelles dans un voltmètre électrostatique dérivé entre ses bornes, alors qu'avec des arcs normaux plus longs le voltmètre donne des indications parfaitement tranquilles. En outre, ces arcs trop courts, au lieu d'être simplement bourdonnants comme les arcs normaux, font entendre un son aigu et crépitant. Ils comportent une série de décharges dissipatives, visibles au miroir tournant.

Ces *arcs critiques* s'observent avec tous les métaux purs. Avec des électrodes en fer du commerce ils ne se produisent pas, sans doute à cause du charbon qu'elles renferment, car on ne les observe pas non plus entre des crayons de charbons ou entre un crayon de charbon et un crayon métallique.

La présence de l'oxygène dans le milieu où l'arc jaillit accentue ces phénomènes, lesquels, par contre, dans l'azote, sont fort atténués.

Lorsque l'arc est normal, pour une intensité donnée, la relation qui lie le voltage à la longueur est linéaire.

A intensité et à longueur égales, le voltage nécessaire pour la production d'un arc normal est en général d'autant plus grand que le poids atomique du métal constituant les électrodes est plus élevé (1).

---

1. Ch.-Eug. Guye et B. Monasch. — *Recherches sur l'arc alternatif de très faible intensité jaillissant entre électrodes métalliques.*

L'Eclairage élect. 28 fév., 14 mars, 4 av. 1903.



## CINQUANTE-QUATRIÈME LEÇON



# ALTERNO-ÉLECTROCHIMIE

\*

## ÉLECTROLYSE PAR COURANTS ALTERNATIFS CLAPETS ÉLECTROLYTIQUES



### I

#### Electrolyse par courants alternatifs

Une cuve électrolytique insérée dans un circuit où agit une force électromotrice alternative ne s'oppose pas, en général, à la production, dans ce circuit, d'un courant alternatif; mais l'effet produit dans la cuve dépend d'une foule de circonstances : nature de l'électrolyte, nature, dimensions, position relative des électrodes, fréquence du courant, densités du courant aux électrodes, etc.

Le vaste champ d'études offert par l'examen de ces diverses circonstances commence à peine à attirer l'attention des expérimentateurs. Aussi les résultats jusqu'à présent acquis sur ce sujet sont-ils encore en petit nombre.

De toutes les cuves électrolytiques c'est, naturellement, celle à eau acidulée, le classique voltamètre, qui a fait l'objet des premiers essais, et une des principales manifestations des courants alternatifs fournis par les premières machines d'induction était le dégage-

ment, sur les deux électrodes d'un voltamètre à eau, d'un gaz tonnant formé d'un mélange d'oxygène et d'hydrogène, montrant que chaque électrode fonctionnait alternativement comme anode et comme cathode (1).

Ce phénomène a été étudié avec quelque détail par MM. *Chappuis* et *Manœuvrier* (2) qui sont arrivés aux conclusions suivantes :

« 1<sup>o</sup> Pour des courants d'intensité déterminée, il existe une électrode en platine de surface telle que les gaz ne s'y dégagent pas et que l'électrolyse soit, ou paraisse, complètement enrayée. Si l'on diminue alors graduellement la surface de cette électrode, le dégagement gazeux apparaît, et il est d'autant plus abondant que les électrodes ont été réduites dans une plus forte proportion.

« 2<sup>o</sup> Inversement, pour des électrodes en platine de dimensions déterminées, il existe une intensité de courant au-dessous de laquelle il n'y a pas de dégagement gazeux ; la décomposition se produit, au contraire, pour une intensité supérieure à cette limite et elle augmente en même temps que l'intensité.

« 3<sup>o</sup> Dans tous les cas, l'analyse chimique prouve que les gaz, recueillis, à l'une et l'autre électrode, ont la même composition. Ce sont les gaz de l'eau, formant un mélange détonant, mais avec une proportion d'oxygène inférieure au tiers du volume total. De plus, le volume de ce gaz tonnant, qui est dégagé *par ampère* et *par minute* est toujours plus ou moins inférieur à la quantité théorique : 10, 4 cm<sup>3</sup>, qui serait dégagée dans les mêmes conditions par un courant continu. »

Cette électrolyse par courants alternatifs est accompagnée généralement d'une production d'ozone, plus ou moins importante, suivant la densité du courant, la nature des électrodes et de l'électrolyte.

1. De La Rive. — C. R. de l'Ac. des Sc., t. IV, p. 835 (1837).  
Archiv. de l'Electric., t. I, p. 188 (1841).

2. J. Chappuis et G. Manœuvrier. — *Sur l'électrolyse par les courants alternatifs des machines dynamo-électriques.*

C. R. de l'Ac. des Sc., t. CVI, p. 1719 et CVII, p. 31.

Les gaz ne se dégagent que dans la mesure où ils peuvent échapper à leur action mutuelle ou aux réactions auxquelles se prêtent les électrodes.

Dans le cas du platine on n'observe que le surplus de ce que le métal peut condenser et ramener, par suite, en combinaison.

Avec des électrodes de cuivre on observe une production de cuivre rouge réduit pulvérulent indiquant que le métal est, d'une part, oxydé par l'oxygène ozonisé et, d'autre part, réduit par l'hydrogène, avec recomposition de l'eau, en sorte que si la surface des électrodes est suffisante pour utiliser ainsi tous les produits de l'électrolyse, aucune trace de gaz n'apparaît.

Avec des électrodes de mercure à large surface, on observe un très faible dégagement d'hydrogène en même temps que se produit un nuage d'une matière blanche qui n'est autre que du sulfate de sous-oxyde de mercure peu soluble.

En somme, les effets observés dépendent du rapport entre la vitesse de recombinaison des éléments de l'électrolyte et la vitesse de décomposition. Toute circonstance (faible intensité du courant, grande étendue des électrodes, grande fréquence, etc.), qui rendra la première égale à la seconde empêchera l'électrolyse de devenir apparente; toute circonstance qui fera, au contraire, prédominer la seconde, rendra manifestes les produits de la décomposition ou de leurs actions secondaires.

Lorsqu'on recueille les gaz produits, dans un voltamètre, par l'action d'un courant alternatif, en coiffant

les électrodes de platine avec des éprouvettes, on observe que lorsque le niveau du liquide s'abaisse, dans ces dernières, suffisamment pour découvrir une notable partie des électrodes, le mélange gazeux recueilli fait explosion. Ce phénomène étant dangereux, il est bon d'en connaître la cause et de savoir l'éviter. La cause est l'échauffement anormal qu'éprouvent les électrodes quand leur surface de contact avec le liquide est suffisamment réduite, échauffement dû à l'accroissement de la densité du courant à leur surface et à la diminution de l'action refroidissante du liquide. Pour pouvoir remplir les éprouvettes sans découvrir les électrodes, on n'aura qu'à coiffer chacune de celles-ci d'un entonnoir immergé dans le liquide et présentant un petit tube abducteur droit sur lequel on posera les cloches à gaz.



On peut utiliser le passage d'un courant alternatif convenable dans une cuve électrolytique à électrodes métalliques soit pour obtenir une dissolution du métal des électrodes dans l'électrolyte, soit pour obtenir, par oxydation des électrodes, une réduction de l'électrolyte.

Un exemple du premier cas est fourni par une cuve électrolytique contenant un bain de cyanure de potassium et des électrodes de cuivre (1).

Pourvu que la fréquence ne soit pas supérieure à 350 environ, on observe une dissolution du cuivre plus active qu'en l'absence

---

1. Le Blanc et Schick. — *Zeitschr. für Elektr.*, t. IX, p. 636 (1903).

André Brochet et J. Petit. — *Sur l'emploi du courant alternatif en électrolyse*. C. R. de l'Ac. des Sc., 8 fév. et 2 mai 1904.

du courant et donnant du cyanure double de cuivre et de potassium :  $\text{Cu}^2 \text{Cy}^2 (\text{K Cy})^6$ , suivant la formule :



Le zinc et le nickel se comportent de façon analogue et donnent des sels doubles de la forme :  $\text{M Cy}^2 (\text{K Cy})^2$ .

Avec des électrodes de platine et un bain de cyanure de baryum on obtient du platinocyanure de baryum, ce qui constitue un moyen commode de préparation de ce sel si employé actuellement en radioscopie (1).

Le cadmium, le plomb, l'argent, le mercure ne donnent rien.

Mais, dans un bain d'hyposulfite de soude, des électrodes de cadmium se dissolvent en donnant du sulfure de cadmium (procédé *Richards et Ræpper* (2)).

Le cuivre, le nickel, le cobalt, se dissolvent aussi, sous l'action d'un courant alternatif, dans les sels ammoniacaux (carbonate, sulfate, chlorure); mais, comme leur attaque par ces bains, en l'absence du courant, est nulle, la réaction est bien moins active que dans le cas du cyanure (3).

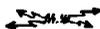


Comme exemples de réductions d'électrolytes on peut citer celles de l'alun ferrique et des nitrates alcalins (4).

Dans le premier bain, les électrodes qui conviennent le mieux sont celles d'aluminium, de plomb, de cadmium. Avec des électrodes de platine, la quantité de fer réduite est faible

Dans les bains de nitrates, la réduction est abondante avec des électrodes de cadmium et de zinc, et presque nulle avec des électrodes de fer, de cuivre et de charbon.

Ces effets de réduction exigent une densité de courant supérieure à une certaine limite, au-dessous de laquelle on observe simplement une dissolution des électrodes.



1. J. Petit. — Nouveau procédé de fabrication du platinocyanure de baryum. *Le Radium*, n° 1 (15 juillet 1904), p. 20.

2. *Trans. of Amer. electroch. Soc.*, t. 1, p. 221 (1902).

3. A. Brochet et J. Petit. — *Sur l'influence des ions complexes dans l'électrolyse par courants alternatifs*. C. R. de l'Ac. des Sc., 15 fév. 1904.

4. F. Pearce et Ch. Couchet. — *Sur des phénomènes de réduction produits par l'action de courants alternatifs*.

C. R. de l'Ac. des Sc., 8 février 1904.

## II

## Clapets électrolytiques

Parmi toutes les cuves électrolytiques il en est une qui par ses propriétés singulières et les applications auxquelles elle a donné lieu intéresse tout particulièrement l'électrotechnicien, c'est celle que l'on constitue en plongeant dans un bain d'eau acidulée sulfurique ou, mieux encore, dans un bain de phosphate de potassium, une électrode d'aluminium et une électrode d'un autre métal, de plomb, par exemple.

Un voltamètre dont une des électrodes est en aluminium possède une curieuse dissymétrie, découverte par le physicien allemand *Buff* (1) en 1857 et retrouvée en 1875 en France par *Ducretet* (2).

Si on l'insère dans un circuit contenant une force électromotrice de quelques volts (20 au plus), il permet l'établissement d'un courant lorsque le sens de la force électromotrice est tel que l'aluminium, soit cathode (*fig.* 470, I) et s'oppose, au contraire, à la production de tout courant appréciable si l'aluminium est anode (*fig.* 470, II).

1. *Buff*. — *Ueber das elektrische Verhalten des Aluminiums.*

*Ann. de Liebig*, t. cii, p. 265 (1857).

2. *E. Ducretet*. — *Note relative à la résistance électro-chimique offerte par l'aluminium employé comme électrode positive dans un voltamètre.*

*C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. lxxx, p. 280 (1874).

*E. Ducretet*. — *Note sur un rhéotome liquide à direction constante, fondé sur une propriété de l'Aluminium.*

*Journ. de Phys.*, 1<sup>re</sup> série, t. iv, p. 84 (1875).

Un tel voltamètre se comporte donc dans un circuit électrique comme un *clapet* dans un circuit hydraulique, permettant le passage du courant dans un sens et non dans l'autre. Aussi l'a-t-on désigné sous le nom de **clapet électrolytique**.

Le sens de passage du

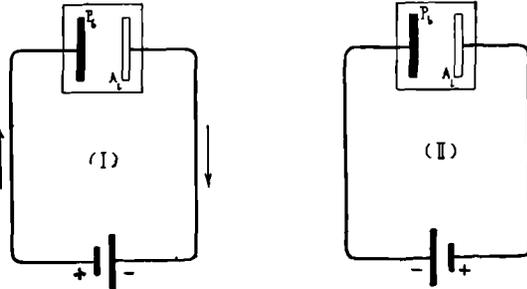


FIG. 470

courant est le sens qui va, à l'intérieur de la cuve, du plomb à l'aluminium.

L'obstacle au courant, dans le sens contraire, est dû à une pellicule isolante d'oxyde d'aluminium se formant à la surface de la lame d'aluminium lorsque celle-ci joue le rôle d'anode. Cette pellicule peut être envisagée comme le diélectrique d'un condensateur dont les armatures seraient l'aluminium, d'une part, et l'électrolyte, de l'autre.



Les applications qu'on peut concevoir pour les clapets électrolytiques sont nombreuses et importantes (I) :

Soit **R** (*fig.* 471, I) un récepteur à alimentation unilatérale, comme par exemple une lampe à arc à courant continu, une batterie d'accumulateurs en charge,

1. Hutin et Leblanc. — *Etude sur les courants alternatifs et leurs applications industrielles*, 2<sup>e</sup> partie, chap. x.

etc., exigeant pour fonctionner correctement que sa borne **P** soit reliée au pôle  $+$  de la source et sa borne **N** au pôle  $-$ . On pourra éviter tout effet fâcheux d'une

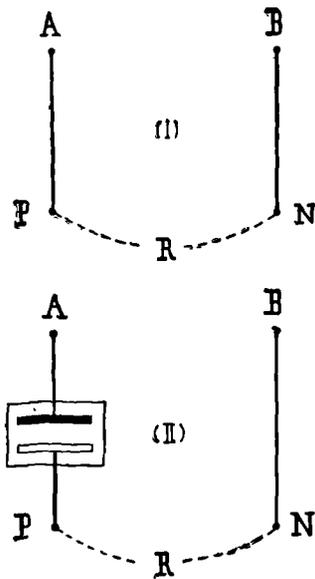


FIG. 471

erreur de connexions, en attachant en **P** (fig. 471, II) l'électrode aluminium d'un clapet électrolytique, car le courant ne passera pas si, par mégarde, on reliait **N** au pôle  $+$  de la source et la lame de plomb **P<sub>b</sub>** au pôle  $-$ , ce montage faisant de la lame d'aluminium une anode; tandis que le courant passera et aura le sens voulu si **P<sub>b</sub>** est relié au pôle  $+$  et **N** au pôle  $-$ .

Une batterie d'accumulateurs ainsi munie d'un clapet ne pourra se décharger dans

l'appareil de charge, au cas où celui-ci viendrait à présenter une force électromotrice inférieure à celle de la batterie. Le clapet jouerait alors le rôle d'un appareil de retenue.

Si l'on voulait adapter le clapet à la borne **N** de l'appareil récepteur, il faudrait, naturellement, l'y attacher par son électrode plomb.

Imaginons qu'un récepteur à alimentation unilatérale **PN**, muni d'un clapet relié à sa borne **P** par son électrode aluminium, soit mis en relation avec les bornes **A**, **B** d'un générateur à force électromotrice

alternative ; ce récepteur fonctionnera pendant toutes les alternances rendant la borne **A** positive, et sera au repos pendant toutes celles rendant, au contraire, cette borne négative.

L'adjonction à la borne **N** d'un clapet attaché à cette borne par son électrode plomb (*fig. 472, I*) ne changerait rien au résultat, car ce second clapet serait d'un effet concordant avec le premier.

Si l'on voulait rendre le récepteur actif pendant les alternances où il était tout à l'heure inactif

et inversement, il faudrait évidemment relier à **B** l'électrode plomb du premier clapet et à **A** l'électrode aluminium du second, ainsi que le représente la *fig. 472, II*.

Veut-on enfin éviter tout chômage du récepteur, c'est-à-dire le rendre actif pendant les deux sortes d'alternances ? on

n'aura pour cela qu'à réaliser à la fois les deux montages ainsi que l'indique la *fig.*

473.

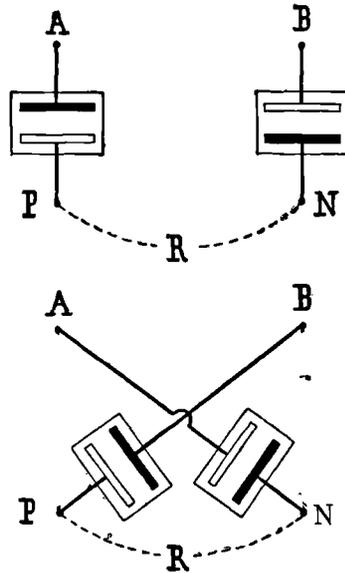


FIG. 472

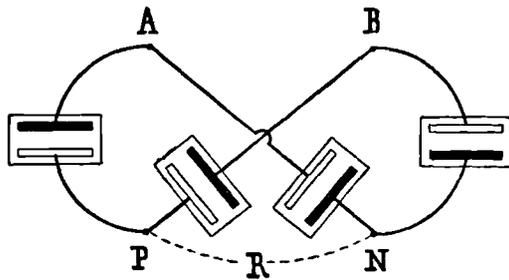


FIG. 473

On peut, pour retenir aisément l'ordre des connexions, rapprocher le schéma de ce montage de celui d'un pont de *Wheatstone* dont l'une des diagonales

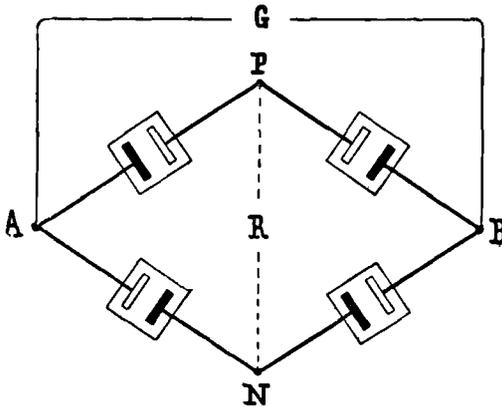


Fig. 474

AB (fig. 474)

serait occupée par le générateur alternatif **G**, l'autre **PN**, par le récepteur **R**, et les côtés par les clapets, disposés de façon que ceux de **P** présentent à ce point

leurs électrodes d'aluminium, ceux de **N** présentant à ce dernier leurs électrodes de plomb.

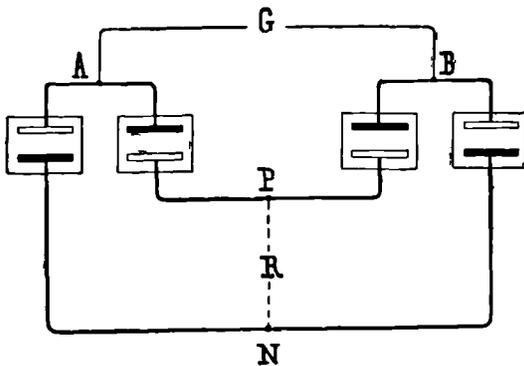


FIG. 475

Le même montage est encore représenté par la fig. 475 (1).

On peut dire aussi que

chaque borne du générateur est munie d'un clapet

1. Graetz. — *Sur un procédé électrochimique de transformation des courants alternatifs en courants continus.*

Soc. all. d'électrochimie. Congrès de Munich (juin 1897).

Eclair. électr., t. XIV, p. 289 (1898).

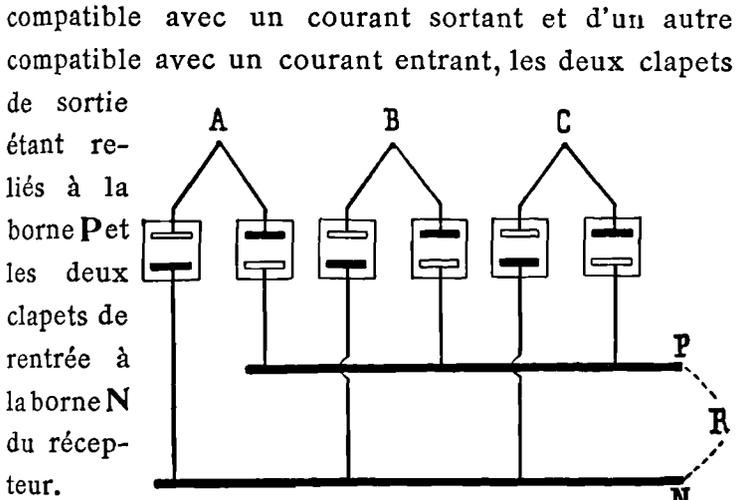


FIG. 476

Cette dernière règle est générale et convient à la définition du montage (*fig. 476*) applicable au cas d'un générateur triphasé.

En ce cas, le courant dans le récepteur, au lieu d'être fortement pulsatoire comme l'est le courant redressé d'un générateur **R** monophasé, qui oscille entre un certain maximum et un minimum nul (*fig. 477, I*), n'est plus que très légèrement ondulé (*fig. 477, II*).

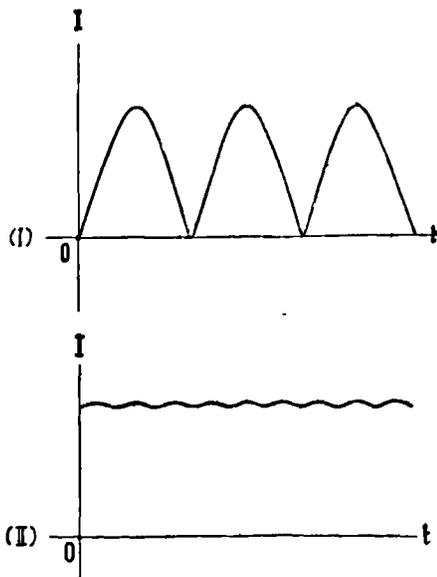


FIG. 477

L'avantage d'un courant simplement ondulé avec minimum non nul peut être obtenu aussi dans le cas

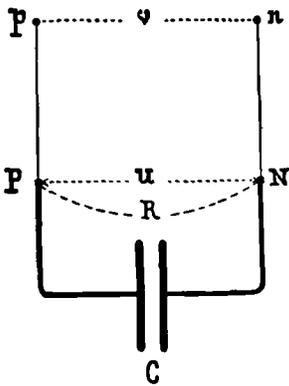


FIG. 478

d'un générateur monophasé, mais à la faveur d'un artifice consistant à établir en dérivation aux bornes du récepteur **R** un condensateur **C** (fig. 478).

Tout se passe comme si les bornes **P**, **N** étaient reliées à deux points **p**, **n** entre lesquels se manifeste une différence de potentiel **v** oscillant entre un certain maximum et zéro. Considérons, pour

la commodité du calcul, le cas simple où cette différence de potentiel serait de la forme:  $v = V_0 - V_0 \cos \omega t$ , expression dont le maximum est  $2V_0$  et le minimum zéro, et cherchons l'expression qui en résulterait pour la différence de potentiel **u** entre les points **P** et **N**, bornes communes de **R** et de **C**, et que nous supposons séparés de **p** et de **n** par de simples résistances ohmiques dont nous désignerons l'ensemble par **r**.

Appelons **I** la valeur instantanée du courant en **R**, **J** celle du courant dans la branche **C** et **ℱ** leur somme **I** + **J**. En supposant le récepteur **R** sans self appréciable nous aurons simplement:

$$I = \frac{u}{R}; \text{ d'autre part: } J = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du}{dt}, \text{ si } Q = Cu \text{ désigne}$$

la valeur instantanée de la charge du condensateur. Enfin:  $v - u$

$$= r\mathcal{F} \text{ et, par conséquent: } \mathcal{F} = \frac{v - u}{r}, \text{ en sorte que l'équa-}$$

tion:  $I + J = \mathcal{F}$  prend la forme:

$$\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} = \frac{v - u}{r}$$

qu'on peut écrire, en rassemblant les termes en **u** et en posant

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r'}:$$

$$\frac{u}{r'} + C \frac{du}{dt} = \frac{v}{r}$$

D'après l'expression admise pour  $v$ , soit:  $v = V_0 - V_0 \cos \omega t$ , cette équation donne pour  $u$  une expression de la forme:

$$u = U_0 - U \cos (\omega t - \delta)$$

dont le maximum est  $U_0 + U$  et dont le minimum est  $U_0 - U$ .

Or ce minimum n'est pas nul, car on a

$$U_0 = V_0 \frac{r'}{r}$$

et

$$U = \frac{\frac{V_0}{r}}{\sqrt{\frac{1}{r'^2} + C^2 \omega^2}} = V_0 \frac{r'}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + c^2 r'^2 \omega^2}}$$

Ainsi, grâce à la présence d'une capacité en dérivation, la différence de potentiel entre les bornes **P**, **N** du récepteur sera simplement ondulée et il en sera de même du courant **I** dans ce récepteur.

Comme capacité **C** capable de jouer ce rôle de volant atténuateur des fluctuations du courant utile **I**, *M. Nodon* (1) a essayé avec succès d'employer une cuve électrolytique munie de deux lames d'aluminium dont l'une, destinée à jouer le rôle de lame positive et à être reliée, par conséquent, à la borne **P**, a reçu préalablement une oxydation superficielle en fonctionnant comme anode.

La capacité du condensateur dont cette couche superficielle isolante forme le diélectrique peut être très élevée sous une faible étendue, car elle est de l'ordre de 1 farad par centimètre carré, valeur considérable qui s'explique par l'extrême minceur du diélectrique.

1. Nodon. — C. R. de l'Ac. des Sc., t. CXXXVI, p. 445 (16 février 1903).

L'aptitude des voltamètres à lame d'aluminium à jouer le rôle de condensateurs et la grandeur de leur capacité avaient déjà été signalées par M. Pollak en 1897 (1).

S'il arrive que le diélectrique d'un tel condensateur soit percé par une décharge disruptive entre l'aluminium et le liquide électrolytique, il se répare de lui-même instantanément à la faveur d'une nouvelle électrolyse au point défectueux.



Le clapet électrolytique de Buff (à eau acidulée) ne pouvait tenir en échec qu'une force électromotrice d'une vingtaine de volts, en sorte que des cascades de clapets eussent été nécessaires pour fonctionner avec des forces électromotrices de l'ordre de **100** volts comme celles mises en jeu dans les circuits d'utilisation des installations industrielles usuelles. M. *Pollak* (2) a apporté à cet appareil un perfectionnement capital, et lui a réellement ouvert le domaine des applications véritablement industrielles en le rendant capable de tenir en échec des forces électromotrices de **100 à 200** volts.

Ce progrès a été réalisé, par la substitution aux électrolytes essayés précédemment, et qui n'offraient pas d'avantages marqués sur l'eau acidulée, d'une dissolution neutre ou légèrement acide de *phosphate de potassium*.

1. Pollak. — C. R. de l'Ac. des Sc., t. cxxiv, p. 1443 (21 juin 1897).

2. Pollak. — Brevets allemands, n° 1096 (14 janv. 1896) et 107.435 (31. août 1898).

Il importe que la solution ne soit pas alcaline, car elle attaquerait l'aluminium d'une manière permanente.

Lorsque la plaque d'aluminium fonctionne comme anode, il y a à sa surface, par suite d'une oxydation opérée aux dépens de l'ion  $\text{PO}^4$ , formation d'une couche isolante. Pendant ce temps l'ion  $\text{K}$  forme à la cathode de la potasse et de l'hydrogène qui réduit le plomb peroxydé.

Lorsque la lame d'aluminium fonctionne ensuite comme cathode, l'oxyde d'aluminium de sa surface est réduit par le potassium, pendant qu'à l'anode la surface du plomb se peroxyde, et que l'acide phosphorique réagit sur la potasse pour reformer du phosphate de potassium.

La rapidité de réaction qu'exigent les courtes alternances des courants industriels est assurée ici par l'ion  $\text{K}$  mieux que ne le fait l'ion  $\text{H}$  dans l'eau acidulée.

Pour que l'appareil présente son maximum d'efficacité, il faut que la lame d'aluminium ait subi une *formation* préalable qui consiste, après un décapage dans une solution faible de soude caustique, à la soumettre, dans le bain de phosphaté, à l'action d'une force électro-motrice qu'on élève graduellement jusqu'à **200** volts (*Pollak*), ou encore à mettre le clapet en série avec une lampe à incandescence de **16** bougies et à appliquer à l'ensemble une force électromotrice continue de **110** volts qu'on inverse toute les cinq minutes (*A. Soulier* (1)), les progrès de la formation étant, dans ce

---

1. *A. Soulier*. — *Quelques applications des clapets électrolytiques*. L'industrie électrique, t. XI, p. 522 (1902).

dernier cas, rendus sensibles par la diminution graduelle et l'annulation finale de l'éclat que présente la lampe lorsque la lame d'aluminium est anode. On peut aussi opérer la formation en envoyant dans la soupape un courant alternatif avec une tension graduellement croissante réglée à l'aide d'une résistance et d'une self qu'on diminue progressivement.

Si l'on veut assurer à la lame d'aluminium d'un clapet électrolytique une durée un peu longue (quelques centaines d'heures) il faut avoir soin : 1° que les lames, quand l'appareil est en service, plongent entièrement dans le liquide ; 2° qu'elles ne soient en contact avec aucune autre matière que du caoutchouc ; 3° que la température du liquide ne dépasse pas 40°.

On satisfait cette dernière condition soit en donnant au vase contenant l'électrolyte une forme rectangulaire aplatie et de grande hauteur, offrant à l'action refroidissante de l'air ambiant une grande surface de contact, soit en plaçant la cuve, si elle est en verre, dans un courant d'eau.

Quand on opère le refroidissement par l'air, la cuve peut être faite en fer ou en plomb et sert alors elle-même de seconde électrode.

La forme la plus connue en France de clapet électrolytique est la **soupape Nodon** (1) qui consiste (*fig. 479*) en un récipient cylindrique en fer **F**, contenant une solution concentrée de phosphate d'ammonium et suivant l'axe duquel est soutenu, par un bouchon de caoutchouc **B** traversant le fond, une baguette **A<sub>1</sub>** formée d'un alliage d'aluminium et de zinc. Un tube de verre **T** glissant à frottement doux sur cette baguette permet de régler

1. Nodon. — L'électricien, 13 juillet 1901.

à volonté l'étendue de la surface active d'après les intensités de courants dont on a besoin.

Pour des essais rapides en petit, on peut, comme l'a indiqué *M. A. Soulier* (1), se contenter de fixer, à l'aide d'un bouchon de liège, dans un bocal de verre contenant l'électrolyte, une lame d'aluminium et une lame de plomb de quelques centimètres de largeur et de hauteur appropriée à celle du vase (*fig. 480*).

Pour déterminer l'étendue de surface active d'aluminium que doit présenter un clapet on peut admettre une densité de courant de l'ordre de 5 à 10 ampères par décimètre carré.

Dans les modèles où les électrodes sont prises sous forme de plaques, on ajuste la surface à la valeur voulue pour le débit désiré en associant ces plaques en plus ou moins grand nombre comme on le fait pour les accumulateurs.



Bien que leur mise au point industrielle soit de date toute récente, les clapets électrolytiques ont déjà donné lieu à d'intéressants essais d'applications diverses.

Ils se prêtent très bien à l'alimentation, sur réseaux alternatifs, d'une foule d'appareils s'accommodant de courants redressés, comme, par exemple, des batteries d'accumulateurs, de petits moteurs, des appareils électro-médicaux, des installations radioscopiques, etc.

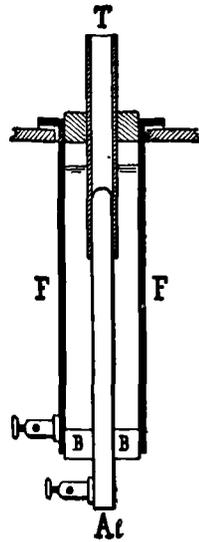


FIG. 479

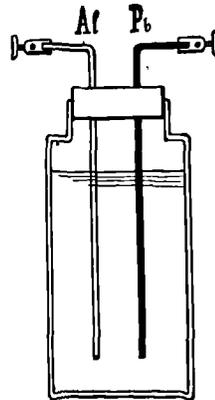


FIG. 480

1. L'industrie électrique, 11<sup>e</sup> année, 25 novembre 1902.

En adaptant **6** clapets, suivant le schéma de la fig. 476, à une distribution d'énergie électrique par courants triphasés à **215** volts, M. E. Mors, (1) a obtenu un courant continu, sous **230** volts, capable d'alimenter d'une façon parfaite **6** lampes à arc montées en tension.

En reliant un transmetteur téléphonique à un galvanomètre sensible par l'intermédiaire d'un clapet électrolytique, MM. Estaurié et Montpellier (2) ont observé une élongation fixe de l'aiguille du galvanomètre et constitué par conséquent une méthode de mesure des courants téléphoniques.

L'ensemble d'un clapet et d'un galvanomètre peut remplacer avec avantage le téléphone dans les méthodes de mesure des résistances qui comportent l'emploi de courants alternatifs (3).

---

1. E. Mors. — *Redressement des courants triphasés par les clapets électrolytiques.*

L'industrie électrique, 13<sup>e</sup> année, p. 128, 25 mars 1904.

2. Nodon. — C. R. de l'Ac. des Sc., t. cxxxvi, p. 446, 26 fév. 1903.

3. A. Soulier. — Loc. cit.



## CINQUANTE-CINQUIÈME LEÇON



# ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE

## ÉNERGIE ET PUISSANCE ÉLECTRIQUES (CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES)



### I

#### Définition de l'Énergie électrique

Un circuit qui est le siège d'un courant électrique est un système dans lequel de l'énergie, sous une ou plusieurs de ses formes sensibles (chimique, thermique ou mécanique) est consommée.

En effet, si le générateur du courant est une *pile voltaïque*, il consomme de l'*énergie chimique*; s'il est une *pile thermo-électrique*, il consomme de l'*énergie thermique*, et s'il est une *machine dynamo-électrique*, il consomme de l'*énergie mécanique*.

Mais en même temps qu'il est le siège d'opérations *consommant* de l'énergie, un circuit électrique en activité est aussi le siège de phénomènes qui en *déga- gent*.

En effet, chacune des parties du circuit éprouve, en vertu de l'effet Joule, un échauffement plus ou moins notable et dégage, par conséquent, de l'énergie ther-

mique (1). Certaines parties, en outre, peuvent éprouver des décompositions chimiques, fournissant ainsi de l'énergie chimique (2). D'autres parties enfin, convenablement disposées, peuvent engendrer des mouvements en surmontant des obstacles et produire, par conséquent, de l'énergie mécanique.

Si, envisageant le circuit dans son ensemble, on fait, d'une part, la somme (A) des énergies sensibles absorbées et, d'autre part, la somme (D) des énergies sensibles dégagées, on trouve entre ces deux sommes, dans les limites de précision des expériences, une balance exacte :

$$D = A$$

Exemples (3):

Eléments du circuit	Energies sensibles absorbées (a)		Energies sensibles dégagées (d)		
	Formes	Valeurs (4)	Formes	Valeurs (4)	
(1) { Pile de Smée (5)  Conducteur métallique interpolaire (6)	Chimique <sup>(7)</sup>	18703	Calorifique	ensemble: 18691 (moy. de trois déter- minations)	
	Néant	0	Calorifique		
	TOTAL (A):	18703	TOTAL (D):	18691	

1. Voir tome I, Electrothermie, pages 226 et suiv.

2. Voir tome I, Electrochimie, pages 287 et suiv.

3. C.-A. Favre. — *Mémoire sur la transformation et l'équivalence des forces chimiques.* — Mém. prés. par div. sav. à l'Ac. des sc. de l'Institut nat. de France, t. xxv, n° 1, p. 15.

4. En petites calories.

5. Élément à un liquide formé de platine et de zinc amalgamé plongés dans de l'eau acidulée sulfurique.

6. Fil de platine.

7. Dissolution du zinc dans l'acide sulfurique.

(II)	}	Pile et fils conducteurs	<i>Chimique</i>	18664	<i>Calorifique</i>	15427
		Moteur électro- magnétique	.....	.....	<i>Calorifique</i>	2947
			<i>Néant</i>	<u>0</u>	<i>Mécanique</i>	<u>308</u> <sup>(8)</sup>
		TOTAL (A) :		18863	TOTAL (D) :	18682

Si, au lieu d'envisager l'ensemble du circuit, on en considère une partie seulement, et qu'on évalue toutes les énergies sensibles qui y sont mises en jeu, on ne trouve plus entre la somme (**d**) de l'énergie dégagée et la somme (**a**) de l'énergie absorbée la relation d'égalité qui a lieu pour le circuit tout entier ; mais on a, suivant les cas, ou :  $\mathbf{d} > \mathbf{a}$  ou :  $\mathbf{d} < \mathbf{a}$ .

Soit, par exemple, un fil homogène traversé par un courant. Il s'échauffe et dégage, par suite, une certaine quantité (**d**) d'énergie calorifique. D'autre part, on ne lui voit consommer aucune énergie sensible.

On a donc, dans ce cas,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  et par suite :  $\mathbf{d} > \mathbf{a}$ .

Tel est le cas du conducteur intermédiaire de l'exemple (I) ci-dessus.

Soit, en second lieu, comme dans l'exemple (II), une portion de circuit constituée par un moteur électrique. Il s'y produit à la fois de l'énergie mécanique et de l'énergie calorifique. D'ailleurs, aucune énergie sensible n'y est absorbée. On a donc encore ici  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  et par suite  $\mathbf{d} > \mathbf{a}$ .

8. Correspondant à un travail effectué de 131,24 kilogrammètres (élévation d'un poids).

En effet, 1 petite calorie équivaut à 0,425 kilogrammètre, en sorte que 131,24 kgm. correspondent à  $\frac{131,24}{0,425} = 308$  pet. calor.

Soit, enfin, une cuve électrolytique présentant, dans le sens du courant, une chute de potentiel. Le liquide étant échauffé comme conducteur en même temps que décomposé en éléments comme électrolyte se trouve être le siège à la fois d'un dégagement de chaleur et d'une production d'énergie chimique. D'autre part, de l'énergie chimique ou de l'énergie calorifique peuvent y être absorbées, suivant l'état sous lequel se présentent les produits de la décomposition et suivant les actions qu'ils peuvent exercer sur les électrodes ou sur l'électrolyte lui-même. Mais la somme (**a**) de l'énergie absorbée est inférieure à la somme (**d**) de l'énergie dégagée. On a donc encore dans ce cas  $d > a$ .

Exemple (1) :

COMPOSITION de la Cuve électrolytique	Energies sensibles absorbées ( <b>a</b> )		Energies sensibles dégagées ( <b>d</b> )	
	Formes	Valeurs(2)	Formes	Valeurs(2)
VOLTAMÈTRE à Eau acidulée sulfurique	Néant	0	Calorifique	23609
		.	Chimique(3)	34229
	TOTAL (a):	0	TOTAL (d):	57838

Des exemples de l'inégalité inverse :  $d < a$  sont offerts par les portions de circuits qui constituent des sources électriques.

1. Calculé à l'aide des données expérimentales fournies par *F.-M. Raoult*, dans son mémoire : *Sur les forces électromotrices et les quantités de chaleur dégagées dans les combinaisons chimiques* : *Ann. de chim. et de phys.*, 4<sup>e</sup> s., t. IV, p. 392 (1865).

2. En petites calories.

3. Mise en liberté de 1 gr. d'hydrogène et de 8 gr. d'oxygène.

Ainsi la pile de l'expérience (II) de Favre rapportée ci-dessus (page 607) donnait :

$$\mathbf{d} = 15427$$

et

$$\mathbf{a} = 18664$$

Ainsi encore une machine dynamo-électrique en activité dégage de la chaleur, et consomme, d'autre part, de l'énergie mécanique puisque l'agent qui meut sa partie tournante surmonte des actions électromagnétiques antagonistes. Mais l'énergie calorifique déagée :  $\mathbf{d}$  est de beaucoup inférieure à l'énergie mécanique absorbée :  $\mathbf{a}$ .



C'est l'interprétation des inégalités que nous venons de passer en revue qui conduit à la notion d'**énergie électrique**.



En premier lieu, que signifie l'inégalité  $\mathbf{d} > \mathbf{a}$  ?

Elle exprime que la portion de circuit à laquelle elle se rapporte *émet* en dehors plus d'énergie sensible qu'elle n'en *reçoit*.

D'où provient alors l'excédent  $\mathbf{d} - \mathbf{a}$  ?

Si nous ne voulons pas admettre que de l'énergie sensible puisse être créée de rien ; si nous avons foi en la généralité de la remarque, toujours faite jusqu'à présent, que toute énergie émise par un appareil à l'état de régime n'est que la manifestation d'une énergie reçue par lui d'autre part, soit sous la même forme,

soit sous une forme différente, nous dirons que cet excédent est la manifestation, sous forme sensible, d'une énergie équivalente reçue par la portion de circuit considérée sous une forme particulière, non perceptible à nos sens ; et nous donnerons à ce mode spécial d'énergie, dû évidemment aux conditions électriques du système, le nom d'**énergie électrique**.

D'autre part, que signifie, quand elle se présente, l'inégalité inverse :  $d < a$  ?

Elle exprime que les parties de circuit auxquelles elle se rapporte *dégagent* moins d'énergie sensible qu'elles n'en *absorbent*.

Mais alors que devient la différence  $a - d$  ?

Si nous ne voulons pas admettre que ce déficit soit anéanti ; si nous sommes persuadés que de l'énergie, cessant de se manifester sous une certaine forme, existe nécessairement, en quantité équivalente, sous une autre forme, nous dirons que ce déficit est la représentation, sous la forme d'énergie électrique non perceptible à nos sens, d'une quantité équivalente d'énergie sensible (chimique, thermique ou mécanique) reçue par la portion de circuit considérée.

Nous sommes donc ainsi amenés à concevoir, sous le nom d'**énergie électrique**, une forme particulière d'énergie, non perceptible à nos sens, pouvant provenir d'une quelconque et aussi se convertir en une quelconque des formes sensibles : chimique, thermique, mécanique.

*La conception de l'énergie électrique est, en définitive, la conséquence nécessaire de l'extension aux por-*

tions de circuits parcourues par des courants du principe de la conservation de l'énergie.



Pour une portion de circuit qui présentera l'inégalité :  $\mathbf{d} > \mathbf{a}$ , on écrira donc en appelant  $\varepsilon_a$  l'énergie électrique *absorbée* :

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \varepsilon_a$$

Pour une portion de circuit qui présentera l'inégalité inverse,  $\mathbf{d} < \mathbf{a}$ , on écrira en appelant  $\varepsilon_d$  l'énergie électrique *dégagée* :

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \varepsilon_d$$

Considérons alors deux parties d'un circuit complémentaires l'une de l'autre, c'est-à-dire telles que leur ensemble forme le circuit tout entier. Ajoutons membre à membre les équations :

$$\mathbf{d}' = \mathbf{a}' + \varepsilon'_a$$

$$\mathbf{d}'' = \mathbf{a}'' - \varepsilon''_d$$

qui leur correspondent. Nous aurons, en appelant  $\mathbf{D}$  l'énergie sensible totale dégagée et  $\mathbf{A}$  l'énergie sensible totale absorbée :

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \varepsilon'_a - \varepsilon''_d$$

Mais entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{A}$  existe, comme on l'a vu plus haut (page 605), l'égalité :

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}$$

De là résulte la relation

$$\varepsilon'_a = \varepsilon''_d$$

En d'autres termes, si l'on considère deux parties

*d'un circuit complémentaires l'une de l'autre, l'énergie électrique absorbée par l'une est égale à l'énergie électrique dégagée par l'autre.*



## II

### Générateurs et récepteurs d'énergie électrique. Puissance électrique.

Tout appareil électrique qui se présentera comme *produisant* de l'énergie électrique, en consommant plus d'énergie sensible qu'il n'en dégagera, méritera la dénomination de **générateur d'énergie électrique** ou plus simplement de **générateur électrique**.

Tout appareil électrique qui se présentera comme *consommant* de l'énergie électrique, en dégageant, au contraire, plus d'énergie sensible qu'il n'en recevra, méritera la dénomination de **récepteur d'énergie électrique** ou plus brièvement de **récepteur électrique**.



Pour comparer entre eux des appareils destinés à mettre en œuvre une forme quelconque d'énergie, il faut avoir égard non seulement aux quantités d'énergie mises en jeu, mais encore aux temps correspondants.

Un appareil est dit d'autant plus **puissant** qu'il met en œuvre une quantité d'énergie plus grande en un temps plus court. En d'autres termes, les **puissances**

de deux appareils qui mettent en œuvre de l'énergie sont, entre elles, en raison directe des quantités d'énergie mises en jeu et en raison inverse des temps correspondants.

Appliquées aux générateurs et aux récepteurs d'énergie électrique, ces considérations conduisent à la notion de **puissance électrique**, qui est à celle d'énergie électrique ce que les notions de puissance thermique et de puissance mécanique sont respectivement aux notions d'énergie thermique et d'énergie mécanique, c'est à-dire une combinaison de la notion d'énergie avec la notion de temps.



### III

#### Evaluation numérique de l'énergie et de la puissance électriques.

L'évaluation de l'énergie électrique absorbée par une portion de circuit est facile lorsque cette portion de circuit est constituée par un conducteur homogène, dans lequel le seul effet résultant du passage du courant est un dégagement de chaleur **d**. On a alors, en effet,

$$\epsilon_a = \mathbf{d}$$

D'expériences faites par Joule il résulte, comme on sait (1), que la chaleur dégagée **d** est, toutes choses

1. Voir tome 1, pages 230 et suiv.

égales d'ailleurs, proportionnelle à la résistance  $r$  du conducteur, au carré  $I^2$  de l'intensité du courant et à la durée  $t$  du passage de ce dernier. Par conséquent  $d$  est proportionnelle au produit  $rI^2t$ . Mais, si  $V$  est la chute de potentiel que présente, entre ses extrémités, le conducteur considéré, on a :  $rI = V$ , d'où il suit que  $d$  est proportionnelle au produit  $VIt = VQ$ ,  $Q$  étant l'expression de la quantité d'électricité mise en jeu pendant le temps  $t$  considéré.

Ainsi l'énergie électrique absorbée par un conducteur homogène qui est le siège d'une chute de potentiel  $V$  est proportionnelle à cette chute et à la quantité d'électricité  $Q$  mise en jeu. En d'autres termes, elle est égale à  $VQ$  fois la quantité d'énergie qui serait absorbée pour une chute  $I$  par le passage d'une quantité d'électricité égale à  $1$ .

L'énergie correspondant au transport d'une coulomb à travers un conducteur présentant une chute de potentiel égale à un volt a été trouvée équivalente à la fraction :

$$\frac{1}{9,8} = 0,102$$

d'un kilogrammètre ou à la fraction :

$$0,24$$

d'une petite calorie.

On a donné à cette quantité d'énergie le nom de **joule**.

Si l'on se rappelle que  $1$  kilogrammètre vaut  $9,8 \cdot 10^7$  ergs, on voit que le joule, valant  $\frac{1}{9,8}$  kgm, est égal à  $10^7$  ergs.

D'après ce qui précède, le passage de  $Q$  Coulombs dans un conducteur homogène qui présente une chute de potentiel de  $V$  volts développe une quantité d'énergie calorifique égale à

$$VQ \text{ joules.}$$



Considérons plus généralement (*fig. 481*) une portion de circuit **ACB** présentant, en même temps qu'un dégagement de chaleur, un dégagement d'énergie chimique ou mécanique. Soit  $I$  l'intensité du courant, que nous supposons dû à l'action d'une pile **P** de force électromotrice

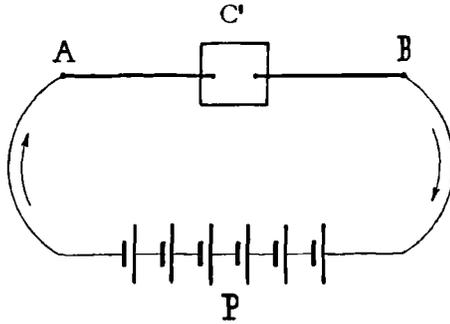


FIG. 481

constante. Soit  $V'$  la chute de potentiel existant entre les extrémités **A** et **B** de la partie **C'** du circuit considéré. Si  $\epsilon'_a$  est l'énergie électrique absorbée dans cette partie de circuit pendant un certain temps  $t$  et si  $d'$  est la somme des énergies sensibles dégagées pendant ce temps, on a  $d' = \epsilon'_a$ . Mais, en désignant par  $d$  l'énergie sensible dégagée, et par  $a$  l'énergie sensible absorbée, pendant le temps  $t$ , par la partie de circuit complémentaire : **APB**, on a :  $d = a - \epsilon'_a$ , d'où  $\epsilon'_a = a - d$ .

Supprimons maintenant la partie **ACB** du circuit et remplaçons-la par un conducteur homogène **ACB**

(fig. 482), dégageant uniquement de l'énergie thermique, et choisi de telle façon que l'intensité du courant prenne, dans

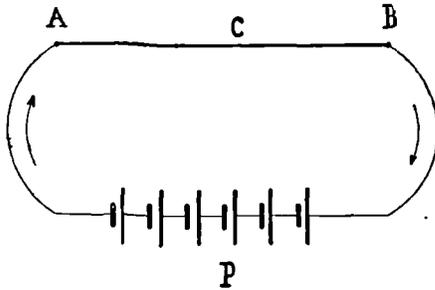


FIG. 482

le circuit, exactement la même valeur  $I$  que tout à l'heure. La grandeur des actions chimiques dont la pile est le siège dépendant uniquement de l'intensité du courant et du temps, l'énergie chimique absorbée par la pile aura, dans le temps  $t$ , la même valeur  $a$  que tout à l'heure. L'énergie dégagée par la partie **APB** du circuit, aura, dans le même temps, la même valeur  $d$ , car rien n'est changé dans le régime électrique des divers conducteurs qui la constituent. L'énergie électrique engendrée pendant le temps  $t$  en **APB**, et consommée pendant le même temps en **ACB**, sera donc  $\epsilon_a = a - d$  et, par suite,  $\epsilon_a = \epsilon'_a$ .

Or, si  $V$  est la chute de potentiel existant, actuellement, entre **A** et **B** on a, en vertu de la loi de Joule,  $\epsilon_a = VQ$  joules. Donc  $\epsilon'_a = VQ$  joules.

Mais l'expérience montre que la valeur actuelle  $V$  de la chute de potentiel entre **A** et **B** est identique à la valeur  $V'$  qui présentait cette chute lorsque se trouvait entre ces deux points la portion de circuit **C'** qui produisait à la fois de l'énergie calorifique et de l'énergie chimique ou mécanique. On a donc  $\epsilon'_a = V'Q$ .

Ainsi, même lorsqu'une portion de circuit dégage

de l'énergie sensible sous plusieurs formes à la fois, l'énergie électrique absorbée est exprimée, comme dans le cas d'un conducteur dégageant uniquement de l'énergie thermique, par le produit :

$$VQ$$

de la chute de potentiel existant entre les extrémités par la quantité d'électricité mise en jeu pendant le temps considéré.

Cette expression est générale :

*Quel que soit l'appareil formant une partie quelconque d'un circuit électrique, s'il existe entre le point d'entrée et le point de sortie du courant une chute de potentiel  $V$ , le passage d'une quantité d'électricité  $Q$  dans cet appareil correspond à une absorption d'énergie électrique proportionnelle à  $VQ$ .*

Cette expression rappelle exactement celle de l'énergie mécanique résultant du passage d'une quantité d'eau  $Q$  dans un appareil hydraulique présentant entre le point d'entrée et le point de sortie du liquide une différence de niveau  $V$ .

Si  $V$  est la valeur numérique en *volts* de la chute éprouvée par une quantité d'électricité dont  $Q$  est la valeur numérique en *coulombs*,  $VQ$  est la valeur numérique de l'énergie électrique correspondante estimée en *joules*.

On exprimera aisément cette énergie en kilogrammètres, ou en ergs, ou en calories en se rappelant les relations suivantes :

$$1 \text{ joule} = 0,102 \text{ kilogrammètre}$$

$$1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergs}$$

**1** joule = **0,24** petite calorie

*C'est le joule qui est l'unité pratique d'énergie électrique.*



Si  $\varepsilon$  est la valeur numérique de l'énergie électrique mise en jeu par un appareil électrique (générateur ou récepteur) et si  $t$  est la valeur numérique du temps correspondant, on peut juger de la puissance moyenne de cet appareil pendant ce temps par la valeur du quotient  $\pi = \frac{\varepsilon}{t}$  auquel on peut donner le nom de **module de puissance électrique** de l'appareil considéré.

*Deux puissances électriques sont entre elles comme leurs modules.*

La valeur numérique  $w$  d'une puissance électrique étant égale au rapport de cette puissance  $W$  à la puissance unitaire  $W_1$ , on l'obtiendra, d'après la relation précédente, en divisant le module  $\pi$  de la première par le module  $\pi_1$  de la seconde :

$$w = \frac{W}{W_1} = \frac{\pi}{\pi_1}$$

Parmi tous les choix qu'on peut faire concernant la puissance unitaire, le plus simple et le plus avantageux est évidemment celui qui consiste à adopter, à cet effet, la puissance ayant comme module **1**, car, alors, la valeur numérique d'une puissance se réduit tout simplement à son module.

*C'est d'après ce système qu'a été adoptée, comme*

*unité pratique de puissance électrique, la puissance d'un appareil mettant en jeu l'unité pratique d'énergie électrique, c'est-à-dire un joule, dans l'unité pratique de temps, c'est-à-dire une seconde.*

Cette puissance a reçu le nom de **watt**.

On aura donc, en watts, la puissance électrique moyenne d'un appareil pendant un temps donné, en divisant la valeur numérique, en joules, de l'énergie mise en jeu, par la valeur numérique, en secondes, du temps correspondant.

Par exemple, si à un moment donné, la différence de potentiel aux bornes d'un appareil est de **V** volts et si le débit dont cet appareil est le siège est de **I** ampères, sa puissance électrique à ce même moment sera

$$w = VI \text{ watts}$$

En effet, l'appareil, mettant en jeu **VI dt** joules dans le temps **dt**, a un module de puissance  $\pi = \frac{VI dt}{dt} = VI$ ;

et comme, d'après le choix de l'unité de puissance,  $\pi_1 = 1$ , on a :  $w = \frac{\pi}{\pi_1} = \pi = VI$ .

*Si cet appareil est dénué de force électromotrice,* on a **V = RI** et, par suite :

$$w = RI^2$$

Des deux formules précédentes :

$$w = VI$$

et

$$w = RI^2$$

la première seule est générale, la seconde n'étant ap-

plicable qu'aux appareils dénués de force électromotrice.



Le **watt** est équivalent à une puissance de

$$\frac{1}{9,8} = 0,102 \frac{\text{kilogrammètre}}{\text{seconde}}$$

ou de :

$$10^7 \cdot \frac{\text{erg}}{\text{seconde}} = 10^7 \cdot \frac{\text{dyne-cm}}{\text{seconde}}$$

ou encore de

$$0,00136 \text{ cheval-vapeur}$$

Cette puissance étant un peu petite relativement à celles que l'on a à évaluer habituellement dans l'industrie électrique, on prend souvent, comme unité secondaire usuelle, la puissance de **1000 watts**, qu'on désigne sous le nom de **kilowatt**.

Un **kilowatt** équivaut donc à une puissance de

$$102 \cdot \frac{\text{kilogrammètre}}{\text{seconde}}$$

ou de

$$10^{10} \cdot \frac{\text{erg}}{\text{seconde}} = 10^{10} \cdot \frac{\text{dyne-cm}}{\text{seconde}}$$

ou de

$$1,36 \text{ cheval-vapeur}$$

Pour passer du **kilogrammètre** par seconde et du cheval-vapeur au watt, on fera usage des formules suivantes :

$$1 \frac{\text{kilogrammètre}}{\text{seconde}} = 9,8 \text{ watts}$$

$$1 \text{ cheval-vapeur} = 736 \text{ watts}$$

Au watt se rattache une unité secondaire d'énergie, le **watt-heure**, qui est l'énergie mise en jeu par un appareil d'une puissance d'un watt en une heure, soit

**3600** joules

ou

**367,2** kilogrammètres.

Un **kilowatt-heure** vaut par suite

**3600000** joules

ou

**367200** kilogrammètres.

L'**hectowatt-heure** est le dixième du kilowatt-heure.

C'est en hectowatts-heures et en kilowatts-heures que sont évaluées, dans la pratique, les quantités d'énergie vendues à leurs clients par les usines productrices d'énergie électrique.



Les deux tableaux suivants résument les relations précédentes, en donnant, de la grandeur écrite sur chaque ligne, la valeur numérique en fonction des grandeurs indiquées en tête des colonnes correspondantes :

### I. — UNITÉS D'ÉNERGIE

	Joule	Kilogrammètre	Erg	Petite calorie
<b>Joule</b> .....	<b>1</b>	<b>0,102</b>	<b>10<sup>7</sup></b>	<b>0,24</b>
<b>Kilogrammètre</b>	<b>9,8</b>	<b>1</b>	<b>9,8.10<sup>7</sup></b>	<b>2,35</b>
<b>Erg</b> .....	$\frac{1}{10^7}$	$\frac{1}{9,8.10^7}$	<b>1</b>	$\frac{1}{4,17.10^7}$
<b>Petite calorie</b> ..	<b>4,17</b>	<b>0,425</b>	<b>4,17.10<sup>7</sup></b>	<b>1</b>

## II. — UNITÉS DE PUISSANCE

	Watt	$\frac{\text{Kgmètre}}{\text{Seconde}}$	$\frac{\text{Erg}}{\text{Seconde}}$	Cheval-vapeur	$\frac{\text{Petite calorie}}{\text{Seconde}}$
Watt . . . . .	1	0,102	$10^7$	0,00136	0,24
$\frac{\text{Kilogrammètre}}{\text{Seconde}}$	9,8	1	$9,8 \cdot 10^7$	$\frac{1}{75}$	2,35
$\frac{\text{Erg}}{\text{Seconde}}$	$\frac{1}{10^7}$	$\frac{1}{9,8 \cdot 10^7}$	1	$\frac{1}{75 \cdot 9,8 \cdot 10^7}$	$\frac{1}{4,17 \cdot 10^7}$
Cheval-vapeur.	736	75	$75 \cdot 9,8 \cdot 10^7$	1	2,35,75
$\frac{\text{Petite calorie}}{\text{Seconde}}$	4,17	0,425	$4,17 \cdot 10^7$	$\frac{1}{2,35,75}$	1

—⊗→

On sait que la puissance  $P$  d'un appareil tournant s'exprime en fonctions du couple qui lui est appliqué et de la vitesse angulaire dont il est animé, par la relation :

$$P = C\omega$$

La vitesse angulaire étant exprimée en *radians par seconde* (1), pour avoir l'expression de  $P$  en *kilogrammètres par seconde*, il faut évaluer  $C$  en *mètres-kilogrammes*, c'est-à-dire estimer les bras de levier en *mètres* et les forces en *kilogrammes*.

Pour avoir la puissance en unités **CGS**, c'est-à-dire en *ergs-par-seconde*, il faut multiplier par  $\omega$  la valeur numérique de  $C$  en *centimètres-dynes*, qu'on obtiendra en estimant les bras de levier en *centimètres* et les forces en *dynes*.

Pour avoir l'expression de  $P$  en *watts*, il faudra, puisque le watt vaut  $10^7$  ergs-par-seconde, diviser par  $10^7$  l'expression de  $P$  en ergs-par-seconde, ou ce qui

1. Par la formule :  $\omega = 2\pi N_1$ , si  $N_1$  est le nombre de tours par seconde.

revient au même, évaluer  $C$  à l'aide d'une unité de couple valant  $10^7$  fois l'unité **CGS**.

Cette nouvelle unité de couple, qui est au joule ce que le centimètre-dyne est à l'erg, n'a pas reçu de nom spécial. Sans aller, comme certains auteurs, jusqu'à lui donner celui de joule, qui appartient à l'unité pratique d'énergie, on peut, pour rappeler la parenté étroite avec le joule, l'appeler *joule-couple*.

Lors donc que dans des calculs pratiques on aura à évaluer à la fois des puissances électriques et des puissances mécaniques, on devra pour rendre ces dernières immédiatement comparables et combinables aux premières, les évaluer, comme celles-ci, en watts. A cet effet, on évaluera les couples en *joules-couples*, ce qu'on fera soit en divisant par  $10^7$  leurs valeurs numériques en centimètres-dynes, soit en multipliant par **9,81** leurs valeurs numériques en mètres-kilogrammes, car  $1 \text{ mètre-kgm} = 98.100.000 \text{ centim.-dyne} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ centim.-dyne} = 9,81 \text{ joule-couple}$ .

Par exemple, l'expression du couple considéré ci-dessus (page 502) et trouvée égale à

$$\frac{r\omega\Phi_0^2}{2 \cdot 10^9(r^2 + l^2\omega^2)} \text{ centim.-dyne}$$

sera, en joule-couples :

$$\frac{r\omega\Phi_0^2}{2 \cdot 10^{16}(r^2 + l^2\omega^2)}$$

On aurait de même, pour l'expression à l'aide de la même unité, du couple  $(C_i)_{\text{moy}}$  considéré page 510 :

$$\frac{1}{2 \cdot 10^{16}} \cdot \frac{r\Omega n^2 s^2 H_0^2}{r^2 + l^2\Omega^2}$$



# CINQUANTE-SIXIÈME LEÇON



## ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE

\*\*

### ÉNERGIE ET PUISSANCE ÉLECTRIQUES PROBLÈMES USUELS (COURANTS CONTINUS)



I

#### Générateurs à courants continus

Lorsqu'une portion de circuit  $AB$  (fig. 483) joue le rôle de **générateur électrique**, entre le point **A**, par lequel y entre le courant, et le point **B**, par lequel il en sort, existe une élévation de potentiel, c'est-à-dire que l'on a

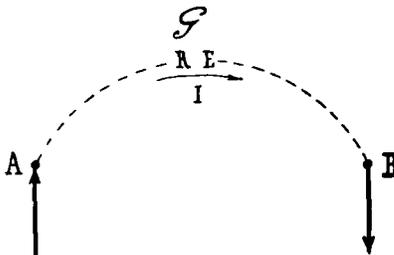


FIG. 483

lequel y entre le courant, et le point **B**, par lequel il en sort, existe une élévation de potentiel, c'est-à-dire que l'on a

$$V_A < V_B$$

ou

$$V_A - V_B < 0$$

Le point de sortie du courant (**B**) est le *pôle positif* ou la *borne positive* du générateur. Le point d'entrée (**A**) est le *pôle négatif* ou la *borne négative*.



Si  $W_a$  est la puissance sensible absorbée par une telle portion de circuit, si  $W_d$  est la puissance sensible dégagée, on a

$$W_a > W_d$$

et la différence

$$W_a - W_d$$

est la puissance électrique émise au dehors.

D'ailleurs si  $V$  est la valeur numérique (en volts) de la différence de potentiel  $V_b - V_a$  et si  $I$  est la valeur numérique (en ampères) de l'intensité du courant, l'expression (en watts) de cette puissance électrique est

$$W_e = VI$$

en sorte que si  $W_a$  et  $W_d$  sont aussi exprimés en watts, on peut écrire l'égalité :

$$VI = W_a - W_d$$

Soit  $R$  la résistance ohmique du générateur et  $E$  la force électro-motrice totale dont il est le siège ; on sait qu'on a :

$$V_b - V_a = V = -RI + E$$

ce qui permet de donner à l'expression de  $VI$  la forme :

$$VI = EI - RI^2$$

et d'énoncer ce théorème :

*La puissance électrique émise au dehors par un générateur électrique est égale au produit  $EI$  de sa force électromotrice par l'intensité du courant diminué de la puissance calorifique dissipée dans ce générateur en raison de l'effet Joule.*



$W_a$  représentant la consommation de puissance sensible au prix de laquelle est obtenue la puissance électrique  $W_e = VI$  disponible à l'extérieur du générateur, ce dernier sera d'autant plus efficace, comme convertisseur de puissance sensible en puissance électrique, que le rapport

$$\eta = \frac{W_e}{W_a}$$

sera plus voisin de l'unité.

On donne à ce rapport le nom de **rendement industriel** du générateur.

Lorsque le générateur est mis *en court circuit*, c'est-à-dire lorsque ses bornes sont réunies par un conducteur dénué de force électromotrice et dont la résistance est pratiquement nulle, le courant  $I_{cc} = \frac{E}{R}$  est maximum, mais, par contre, la différence de potentiel  $V$  entre les bornes est nulle ; nulle aussi est la puissance électrique  $VI$  émise en dehors par le générateur, nul enfin est le rendement, car de la puissance sensible absorbée  $W_a$  aucune fraction n'est alors émise au dehors sous forme de puissance électrique.

Lorsque le générateur est à *circuit ouvert* ou, plus généralement, ne débite aucun courant, l'expression  $VI$  est encore nulle, parce qu'alors son facteur  $I$  est nul, et s'il y a néanmoins de l'énergie sensible absorbée, le rendement est encore nul.

On peut dire, en général, que le rendement industriel d'un générateur électrique, de constitution et de régime donnés est une fonction du débit qui est nulle pour les

valeurs extrêmes de celui-ci  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_c$  et  $\mathbf{I} = \mathbf{o}$ , et qui, pour un certain débit intermédiaire, doit passer par un maximum.



Appliquons ces considérations générales aux générateurs usuels qui sont, d'une part, les piles voltaïques et, d'autre part, les machines dynamo-électriques.

#### A. — Piles voltaïques.

Une pile voltaïque est un générateur à courant continu qui engendre de l'énergie électrique en consommant de l'énergie chimique et parfois aussi de l'énergie thermique.

Si  $\mathbf{W}_c$  est la puissance chimique consommée et  $\mathbf{W}_\theta$  la puissance thermique dégagée (cette dernière quantité étant un nombre négatif dans les cas où il y a chaleur absorbée) la relation générale

$$\mathbf{W}_e = \mathbf{W}_c - \mathbf{W}_\theta$$

s'écrit pour une pile :

$$\mathbf{W}_e = \mathbf{W}_c - \mathbf{W}_\theta$$

ou, en remplaçant  $\mathbf{W}_e$  par son expression :  $\mathbf{EI} - \mathbf{RI}^2$

$$\mathbf{EI} - \mathbf{RI}^2 = \mathbf{W}_c - \mathbf{W}_\theta$$

Les produits des différents termes de ces égalités par un temps  $\mathbf{t}$  représentent les énergies  $\mathcal{E}_e$ ,  $\mathcal{E}_c$ ,  $\mathcal{E}_\theta$  mises en jeu pendant ce temps, et l'on a

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_\theta$$

ou

$$\mathbf{EIt} - \mathbf{RI}^2\mathbf{t} = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_\theta$$

Les premiers physiciens qui ont fait des études sur

ces différentes énergies, notamment *P. A. Favre* et *F. M. Raoult*, les évaluaient en calories et désignaient la quantité

### EIT

sous le nom de **chaleur voltaïque**, et la quantité

$$\mathcal{E}_c$$

sous le nom de **chaleur chimique**.

Entre ces deux quantités existe la relation :

$$\text{EIT} = \mathcal{E}_c - (\mathcal{E}_\theta - \mathbf{RI}^2t)$$

ou :

$$\text{Chaleur voltaïque} = \text{chaleur chimique} - (\mathcal{E}_\theta - \mathbf{RI}^2t)$$

d'où il résulte que, suivant la pile à laquelle on a affaire, la chaleur voltaïque peut être inférieure, égale ou supérieure à la chaleur chimique.

La chaleur voltaïque est *inférieure* à la chaleur chimique lorsque  $\mathcal{E}_\theta - \mathbf{RI}^2t$  est positif, c'est-à-dire lorsque la pile dégage en fonctionnant une quantité de chaleur  $\mathcal{E}_\theta$  supérieure à celle correspondant à l'effet Joule  $\mathbf{RI}^2t$  dont elle est le siège.

La chaleur voltaïque est *égale* à la chaleur chimique lorsque  $\mathcal{E}_\theta - \mathbf{RI}^2t$  est nul, c'est-à-dire lorsque la pile dégage une quantité de chaleur juste égale à celle correspondant à l'effet Joule dont elle est le siège.

Enfin, la chaleur voltaïque est *supérieure* à la chaleur chimique lorsque  $\mathcal{E}_\theta - \mathbf{RI}^2t$  est négatif, c'est-à-dire lorsque la pile dégage une quantité de chaleur inférieure à celle correspondant à l'effet Joule ou encore lorsque, au lieu de dégager de la chaleur, elle en absorbe.

Voici, d'après les expériences de Raoult (1), des exemples de ces trois cas :

CONSTITUTION de la PILE				CHALEUR VOLTAÏQUE (en pet. calor.)	CHALEUR CHIMIQUE (en pet. calor.)	DIFFÉRENCE Chal. volt. — chal. chim.	
Cu	SO <sup>4</sup> Cu	SO <sup>4</sup> Fe	Fe	Cu	14 579	19 095	— 4 516
Cu	SO <sup>4</sup> Cu	SO <sup>4</sup> Zn	Zn	Cu	23 300	23 205	Voisine de 0
Cu	SO <sup>4</sup> Cu	KOH	Zn	Cu	32 260	30 230	+ 2 030

Pour les piles usuelles, c'est le premier cas qui est réalisé, c'est-à-dire que la chaleur voltaïque y est inférieure à la chaleur chimique. En d'autres termes, ces piles, en travaillant, dégagent plus de chaleur que n'en met en jeu l'effet Joule à leur intérieur.

Quand il y a égalité entre l'énergie voltaïque et l'énergie chimique, on a la relation :

$$\mathcal{E}_v = EIt = \mathcal{E}_c$$

d'où

$$E = \frac{\mathcal{E}_c}{It}$$

Par conséquent, alors, on peut calculer en volts la force électromotrice de la pile en divisant l'énergie chimique qu'elle absorbe, évaluée en joules, par la quantité d'électricité mise en jeu, évaluée en coulombs; ou plus simplement: la valeur en volts de la force électromotrice est égale à la valeur en joules de l'énergie ( $\mathcal{E}_c$ )<sub>1</sub> correspondante à l'effet chimique relatif au passage d'un coulomb :

1. F. M. Raoult. — Recherches sur les forces électromotrices et les quantités de chaleur dégagées dans les combinaisons chimiques.

Ann. de chim. et de phys., 4<sup>e</sup> s., t. IV, p. 392-426 (1865).

$$\mathbf{E} = (\mathcal{E}_c)_1$$

Par des considérations qui ne peuvent trouver place ici (1), on a trouvé qu'on avait, en général,

$$\mathbf{E} = (\mathcal{E}_c)_1 + \theta \frac{d\mathbf{E}}{d\theta}$$

$\theta$  étant la température absolue de la pile (2) et  $\frac{d\mathbf{E}}{d\theta}$  le coefficient de variation de  $\mathbf{E}$  en fonction de  $\theta$ .

Les piles pour lesquelles on a  $\mathbf{E} = (\mathcal{E}_c)_1$  et aussi  $\mathcal{E}_v = \mathcal{E}_c$  sont celles pour lesquelles  $\frac{d\mathbf{E}}{d\theta} = 0$ , c'est-à-dire celles dont la force électromotrice ne varie pas avec la température.

Les piles pour lesquelles on a  $\mathbf{E} < (\mathcal{E}_c)_1$  et aussi  $\mathcal{E}_v < \mathcal{E}_c$  sont celles pour lesquelles  $\frac{d\mathbf{E}}{d\theta}$  est négatif, c'est-à-dire celles dont la force électromotrice diminue lorsque la température s'élève.

Enfin, les piles pour lesquelles on a  $\mathbf{E} > (\mathcal{E}_c)_1$  et aussi  $\mathcal{E}_v > \mathcal{E}_c$  sont celles pour lesquelles  $\frac{d\mathbf{E}}{d\theta}$  est positif, c'est-à-dire celles dont la force électromotrice augmente lorsque la température s'élève.

Les accumulateurs appartiennent pratiquement à la première catégorie.

### B. Machines dynamo-électriques.

Une machine dynamo-électrique est un générateur à courant continu qui engendre de l'énergie électrique

1. Voir les Traités de Physique générale.

2. Obtenue en ajoutant 273 à la température centigrade.

en consommant de l'énergie mécanique, que lui fournit un agent extérieur chargé de déplacer, relativement à un champ magnétique inducteur, un système de conducteurs induits.

La puissance dépensée par cet agent est employée en partie à vaincre les frottements mécaniques auxquels est sujette la partie tournante de l'appareil (frottements de l'arbre sur les coussinets, résistance de l'air), en partie à vaincre la résistance que rencontrent, en vertu des courants de Foucault, les parties métalliques de l'organe tournant pour se déplacer dans le champ magnétique inducteur; en partie à vaincre la résistance que rencontrent, en vertu de leur hystéris, les parties ferro-magnétiques de l'organe tournant, qui, éprouvant dans le champ inducteur des déplacements périodiques, parcourent, par cela même, des cycles d'aimantation.

Si, de la puissance totale  $\mathbf{W}$  dépensée par l'agent moteur, on défalque les puissances  $\mathbf{W}_f$ ,  $\mathbf{W}_r$ ,  $\mathbf{W}_h$  employées à vaincre ces diverses résistances et qui, finalement, se dissipent en chaleur, il y a un reste, représentant la partie de  $\mathbf{W}$  transformée en puissance électrique à l'intérieur du générateur.

Mais de cette puissance électrique une partie  $\mathbf{W}_j = \mathbf{RI}^2$  est dissipée en chaleur, dans les fils conducteurs du générateur lui-même en raison de l'effet Joule dont ils sont le siège. Il ne reste donc, en définitive, comme puissance électrique émise au dehors, ou suivant l'expression consacrée, comme puissance électrique *utile*, que

$$\mathbf{W}_u = \mathbf{W} - (\mathbf{W}_f + \mathbf{W}_r + \mathbf{W}_h + \mathbf{W}_j)$$

dont l'expression électrique est

$$VI = EI - RI^2.$$

Le rendement du générateur électrique constitué par une machine dynamo sera donc

$$\eta_a = \frac{VI}{W}$$

ou, en remplaçant soit  $VI$  soit  $W$  par des expressions équivalentes :

$$\eta_a = \frac{W - (W_f + W_p + W_h + W_j)}{W}$$

$$\eta_a = \frac{VI}{VI + (W_f + W_p + W_h + W_j)}$$

Ce rendement est fonction du débit  $I$ , car  $V$  et  $W$  le sont. Il est nul pour les régimes extrêmes correspondant à la marche en court circuit ( $V = 0$ ) ou à circuit ouvert ( $I = 0$ ), et présente un maximum pour un certain régime intermédiaire.

Ce rendement maximum est d'autant meilleur qu'il est plus voisin de 1, et il en approche d'autant plus que plus faible est, relativement à  $W$ , la puissance  $W_p = W_f + W_p + W_h + W_j$  dissipée en chaleur, par suite des effets parasites : frottements, courants de Foucault, hystérésis, effet Joule.

Dans les bonnes dynamos actuelles de notable puissance (100 kilowatts et au-dessus) le rendement maximum peut atteindre jusqu'à 94 %.



## II

## Récepteurs à courants continus

Lorsqu'une portion de circuit  $A\mathcal{R}B$  (fig. 484) joue le rôle de *récepteur électrique*, entre le point  $A$  par lequel y entre le courant et le point  $B$  par lequel il en sort existe une *chûte de potentiel*, c'est-à-dire que l'on a

$$V_A > V_B$$

ou

$$V_A - V_B > 0$$

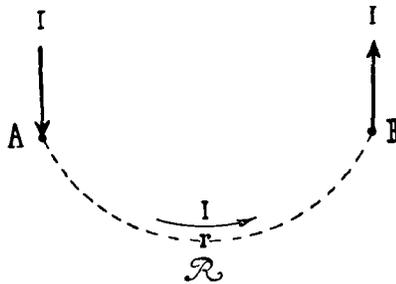


FIG. 484

Il y a lieu de faire entre les récepteurs électriques une distinction suivant qu'ils sont dépourvus ou doués d'une force électromotrice.

#### A. — Récepteurs dépourvus de force électromotrice

A cette première catégorie appartiennent notamment les *rhéostats*, les *enroulements d'électro-aimants*, les *lampes électriques à incandescence et à arc*.

Un tel récepteur absorbe uniquement de l'énergie électrique et la dissipe intégralement en chaleur, par effet Joule.

Si  $r$  est sa résistance et si  $v$  est la chute de potentiel entre le point d'entrée et le point de sortie du courant, on a

$$v = rI$$

et

$$vI = rI^2$$

Si c'est la chaleur qu'il dégage qu'on demande à ce récepteur, son rendement est égal à l'unité. Mais il n'en est ainsi que dans les appareils de chauffage électrique. Dans d'autres cas, cette chaleur représente une dépense au prix de laquelle est obtenu l'effet utile demandé au récepteur.



Considérons, par exemple, le coût du fonctionnement d'un *rhéostat* introduit dans un circuit donné.

Soit  $I_0$  l'intensité du courant dans le circuit de résistance totale  $R_0$  en l'absence du rhéostat, et  $I$  la valeur à laquelle l'insertion du rhéostat de résistance  $x$  doit réduire l'intensité. Si la force électromotrice  $E$  en jeu dans le circuit est indépendante du débit, comme il arrive dans le cas où le générateur employé est une pile impolarisable, on a :  $E = R_0 I_0 = (R_0 + x) I$ , et, par suite :

$$x = R_0 \frac{I_0 - I}{I} = R_0 \left( \frac{I_0}{I} - 1 \right)$$

d'où :

$$xI^2 = R_0 (I_0 - I) I$$

La première formule montre que la résistance du rhéostat doit être d'autant plus grande que le courant désiré  $I$  est plus faible relativement au courant primitif.

La seconde formule montre que la puissance dissipée par le rhéostat est proportionnelle au produit de la diminution d'intensité par l'intensité finale, et que, par

conséquent, le plus coûteux, comme fonctionnement, de tous les rhéostats possibles applicables au circuit donné, sera celui qui aura mission de réduire l'intensité à la moitié de sa valeur primitive, parce qu'alors le produit des deux facteurs  $I_0 - I$  et  $I$ , dont la somme est constante, est maximum.

Cette remarque fournit immédiatement la solution de la question suivante :

*Etant donnée une pile constante, de force électromotrice  $E$  et de résistance intérieure  $R$ , quelle résistance  $r$  faut-il donner à un récepteur purement ohmique établi entre ses bornes pour que ce récepteur emprunte à la pile la plus grande puissance possible ?*

Ce récepteur peut être envisagé comme un rhéostat inséré dans le circuit constitué primitivement par la pile fermée en court circuit. Il répondra donc au problème s'il donne lieu à une intensité  $I$  égale à la moitié de l'intensité  $I_{cc} = \frac{E}{R}$  qui peut fournir la pile en court circuit, et pour cela sa résistance  $r$  devra être égale à celle  $R$  de la pile.

La puissance électrique maximum que peut fournir une pile constante à un récepteur extérieur est donc :  $R \cdot \left(\frac{I_{cc}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot R I_{cc}^2 = \frac{1}{4} \frac{E^2}{R}$ , c'est-à-dire le quart de la puissance électrique développée dans la marche en court circuit.

L'intensité du courant vaut alors :  $\frac{1}{2} I_{cc}$  et la différence de potentiel aux bornes :  $\frac{1}{2} E$ .

Une pile sera donc d'autant plus avantageuse à cet égard qu'elle aura une plus grande force électromotrice et une plus faible résistance intérieure.



L'excitation d'un *électro-aimant* entraîne une dépense d'énergie, puisqu'entre le point d'entrée et le point de sortie du courant excitateur dans son enroulement existe une chute de potentiel.

La puissance  $w_m$  mise en jeu, pour une résistance  $r$  de l'enroulement et pour une intensité  $I$  du courant d'alimentation est:  $w_m = rI^2$ , ou si  $m$  est le nombre des spires magnétisantes,  $l$  leur longueur moyenne et  $s$  la section du fil qui les constitue,  $w_m = \rho \frac{ml}{s} i^2 = \rho \cdot l \cdot mi \cdot \delta_c$ .

Pour une résistivité  $\rho$  du fil, une longueur moyenne  $l$  par spire et une densité de courant  $\delta_c$  données, cette puissance et, par suite, la dépense entraînée par le fonctionnement de l'électro-aimant, sont proportionnelles aux ampères-tours  $mi$  dont on a besoin.

Le prix d'établissement de l'enroulement est aussi, pour  $l$  et  $\delta_c$  données, proportionnel aux ampères-tours, car le volume de cuivre:  $u$  en dépend, suivant la formule:  $u = m \cdot s \cdot l = m \cdot \frac{i}{\delta_c} l = \frac{l}{\delta_c} \cdot mi$ .

Quand donc on aura besoin d'un flux magnétique déterminé, tourni par un électro-aimant, on devra, par raison d'économie de construction et de fonctionnement, s'efforcer de l'obtenir avec le moins d'ampères-

tours possible, ce qu'on fera en donnant au circuit magnétique auquel seront appliqués ces ampères-tours, la moindre réluctance possible.

Si l'on a affaire à un circuit magnétique donné, les ampères-tours  $\mathbf{mi}$  nécessaires pour l'obtention d'un flux  $\Phi$  assigné à l'avance sont déterminés; alors la relation  $\mathbf{w}_m = \rho \mathbf{l} \cdot \mathbf{mi} \cdot \delta_c$  fait dépendre le choix de la densité de courant d'excitation de la dépense de puissance consentie:  $\mathbf{w}_m$ .



Les *lignes électriques* peuvent être traitées comme des rhéostats obligatoirement imposés par la nécessité de réunir électriquement la source d'énergie électrique aux récepteurs qu'elle est chargée d'alimenter.

On appelle **tension à l'origine** d'une ligne à courants continus, la différence de potentiel  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b$  entre les points **a** et **b** d'attache des deux fils à la station génératrice et **tension à l'extrémité**, la différence de potentiel  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{a'} - \mathbf{V}_{b'}$  entre les points **a'** et **b'** d'attache des deux fils à la station réceptrice.

Si **a** est le point de sortie et **b** le point d'entrée du courant à la station génératrice, entre les points extrêmes **a** et **a'** du premier fil existe une chute de potentiel:  $\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{a'} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{I}$  égale au produit de la résistance  $\mathbf{r}_1$  de ce fil par l'intensité  $\mathbf{I}$  du courant. De même, entre les points **b'** et **b** du second fil, qui est parcouru par le courant  $\mathbf{I}$  dans le sens **b' b**, existe une chute de potentiel  $\mathbf{V}_{b'} - \mathbf{V}_b = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{I}$  si  $\mathbf{r}_2$  est la résistance de ce fil.

La somme de ces deux chutes de potentiel est

$$\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{a'} + \mathbf{V}_{b'} - \mathbf{V}_b = (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b) - (\mathbf{V}_{a'} - \mathbf{V}_{b'}) = \mathbf{V} - \mathbf{U}$$

La tension  $U$  à l'extrémité d'une ligne à courants continus est donc toujours inférieure à la tension  $V$  à l'origine, et la différence  $v = V - U$  représente ce qu'on appelle **la chute** ou la **perte de tension en ligne**.

Le rapport de cette chute  $v$  à la tension  $V$  à l'origine se nomme **chute relative de tension** :  $q = \frac{v}{V}$ .

D'après les relations précédentes on a

$$V - U = (r_1 + r_2)I$$

et

$$(r_1 + r_2)I^2 = (V - U)I$$

c'est-à-dire, que, d'une part :

*La perte de tension en ligne est égale au produit de la résistance de la ligne par l'intensité du courant ;*

et, d'autre part :

*La puissance dissipée en ligne par effet Joule est égale au produit de la chute de tension par l'intensité du courant.*

On appelle **rendement électrique d'une ligne** le rapport ( $\eta$ ) de la puissance électrique  $UI$  qu'elle cède, à son extrémité, à la station réceptrice, à la puissance  $VI$  que lui confie, à son origine, la station génératrice.

Ce rapport est égal à celui  $\frac{U}{V}$  des tensions à l'arrivée et au départ. Il dépend de la chute relative de tension  $\frac{v}{V}$  car  $U = V - v$  et  $\frac{U}{V} = 1 - \frac{v}{V} = 1 - q$ .

Le rendement d'une ligne diffère donc d'autant plus de l'unité que la chute relative de tension est plus grande.

Puisque  $\mathbf{v} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \mathbf{I}$ , le rendement d'une ligne dépend de la résistance de celle-ci et de l'intensité du courant suivant la formule :

$$\eta_l = 1 - \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$



Les principaux paramètres concernant une ligne électrique à courants continus en activité sont :

Longueur de la ligne.....	$\mathbf{l}$
Section du fil.....	$\mathbf{s}$
Résistance (de la ligne).....	$\mathbf{R}$
Tension à l'origine.....	$\mathbf{V}$
Tension à l'extrémité.....	$\mathbf{U}$
Perte relative de tension.....	$\mathbf{q}$
Intensité du courant.....	$\mathbf{I}$
Puissance à l'origine.....	$\mathbf{W}_G$
Puissance à l'extrémité.....	$\mathbf{W}_R$

Entre ces neuf quantités existent les cinq relations :

$$\mathbf{R} = 2 \cdot \rho \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{V} - \mathbf{U}}{\mathbf{V}}$$

$$\mathbf{V} - \mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{W}_G = \mathbf{V} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{W}_R = \mathbf{U} \mathbf{I}$$

permettant de déterminer cinq des paramètres si les quatre autres sont donnés.

Dans tout problème posé à l'occasion d'une ligne électrique il y aura donc quatre données et cinq incon-

nues, l'objet du problème étant la recherche d'une ou plusieurs des cinq inconnues.

**Exemples :**

I. — *Une ligne étant formée de fils de cuivre de longueur  $l$  et de section  $s$ , quelle puissance permettra-t-elle de recueillir à la station réceptrice sous une tension  $U$ , avec une perte relative de tension  $q$  ?*

Ici les quatre données sont :  $l$ ,  $s$ ,  $U$ ,  $q$ , et l'on désire particulièrement connaître  $W_R$ .

On aura successivement :

$$R = 2 \cdot \rho \frac{l}{s}$$

$$V = \frac{U}{1 - q}$$

$$V - U = \frac{q}{1 - q} U$$

$$I = \frac{V - U}{R}$$

$$W_R = UI$$

II. — *Une ligne étant formée de fils de cuivre de longueur  $l$  et de section  $s$ , quelle doit être la tension à l'origine si l'on veut obtenir à l'extrémité une puissance  $W_R$  sous une tension  $U$  ?*

Ici les quatre données sont :  $l$ ,  $s$ ,  $U$ ,  $W_R$  et l'on désire particulièrement connaître  $V$ .

On aura successivement :

$$R = 2 \cdot \rho \frac{l}{s}$$

$$I = \frac{W_R}{U}$$

$$V - U = RI$$

$$V = U + RI$$

III. — *Avec des fils de cuivre de section  $s$  à quelle distance  $l$  d'une station génératrice où la tension est  $V$  pourra-t-on porter une puissance  $W_R$  demandée sous une tension  $U$  ?*

Ici les quatre données sont  $s$ ,  $V$ ,  $U$ ,  $W_R$  et l'on désire particulièrement connaître  $l$ .

On aura successivement :

$$I = \frac{W_R}{U}$$

$$R = \frac{V - U}{I}$$

$$I = \frac{Rs}{2\rho}$$

IV. — *Quelle est la section des fils à employer pour transporter à une distance donnée  $l$  une puissance  $W_R$  demandée sous une tension  $U$  avec une perte relative de tension  $q$  ?*

Ici les quatre données sont :  $l$ ,  $U$ ,  $q$ ,  $W_R$  et l'on désire particulièrement connaître  $s$ .

On aura successivement :

$$I = \frac{W_R}{U}$$

$$V - U = \frac{q}{1 - q} U$$

$$R = \frac{V - U}{I}$$

$$s = \frac{2\rho l}{R}$$

V. — *Une ligne formée de fils de cuivre de section  $s$  partant d'une station génératrice où la tension a une valeur  $V$ , sous quelle tension fournira-t-elle, à une distance  $l$ , une puissance  $W_R$  ?*

Ici les quatre données sont :  $l$ ,  $s$ ,  $V$ ,  $W_R$  et l'on désire particulièrement connaître  $U$ .

On aura successivement :

$$R = 2 \cdot \rho \frac{l}{s}$$

$$V - U = RI$$

$$UI = W_R$$

et, en faisant le produit membre à membre de ces deux dernières égalités :

$$U(V - U) = RW_R$$

La question revient donc à trouver deux quantités  $U$  et  $V - U$  connaissant leur somme  $V$  et leur produit  $RW_R$ .

Pour que le problème soit possible, il faut, comme on sait, que la quantité donnée comme produit soit inférieure ou au plus égale au carré de la moitié de la quantité donnée comme somme, ce qui entraîne la condition :

$$RW_R \leq \left(\frac{V}{2}\right)^2$$

qu'on peut écrire :

$$W_R \leq \frac{V^2}{4R}$$

ou encore :

$$R \leq \frac{V^2}{4W_R}$$

Graphiquement, le problème revient à trouver les côtés d'un rectangle ayant un demi-périmètre numériquement égal à  $V$  et une surface équivalente à celle d'un carré de côté numériquement égal à  $\sqrt{RW_R}$ .

Analytiquement, en résolvant l'équation du second degré

$$U^2 - VU + RW_R = 0$$

on trouve pour  $U$  l'expression :

$$U = \frac{V}{2} \pm \sqrt{\frac{V^2}{4} - RW_R}$$

A la plus grande des deux valeurs de  $U$  données par cette formule correspondront le plus faible courant et le plus grand rendement, puisque  $I = \frac{W_R}{U}$  et  $\eta_l = \frac{U}{V}$ . Cette solution sera donc préférable à l'autre au point de vue économique.

L'expression correspondante du rendement

$$\eta_l = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{R \cdot W_R}{V^2}}$$

suggère les remarques suivantes :

*Toutes choses égales d'ailleurs, le rendement correspondant au problème ici envisagé dépend de la puissance  $W_R$  à fournir à la station réceptrice. Il est d'autant plus petit que cette puissance est plus grande et se réduit à  $\frac{1}{2}$  pour la valeur extrême  $W_R = \frac{V^2}{4R}$ .*

Pour une valeur donnée de  $V$ , diverses lignes ayant des résistances  $R$  différentes, offriront le même rendement si les puissances  $W_R$  qu'elles sont appelées à transmettre sont en raison inverse des résistances, car pour  $V$  donnée,  $\eta$  ne dépend que du produit  $RW_R$ .

Le rendement d'une ligne de résistance  $R$  portant à une station réceptrice une puissance  $W_R$  sera d'autant plus grand que la tension  $V$  au départ sera plus élevée.

De l'expression ci-dessus de  $\eta$ , on déduit :

$$R = \frac{V^2}{W_R} \eta (1 - \eta)$$

Ce qui montre que le transport d'une puissance  $W_R$ , pour une valeur donnée de  $V$ , peut avoir lieu avec un rendement  $\eta$  assigné à l'avance, mais à condition de donner à la ligne une résistance  $R$  convenable, d'autant plus faible que le rendement exigé est plus voisin de 1.



### B. — Récepteurs doués de forces électromotrices.

A cette seconde catégorie de récepteurs appartiennent les *cuves électrolytiques* et les *moteurs électriques*.

La force électromotrice d'un tel récepteur a un sens contraire à celui du courant et joue, par conséquent, le rôle de force *contre-électromotrice*.

Entre la chute de potentiel  $v$  du point d'entrée au point de sortie du courant, la résistance ohmique  $r$  du récepteur et sa force contre-électromotrice  $e$ , existe la relation

$$v = rI + e$$

L'expression de la puissance électrique absorbée par le récepteur est donc

$$vI = rI^2 + eI$$

Elle est d'ailleurs égale à l'excès de la puissance

sensible  $w_a$  dégagée par le récepteur sur la puissance sensible absorbée  $w_a$ .



Dans le cas d'une *cuve électrolytique* la puissance dégagée et la puissance absorbée comprennent, en général, de la puissance chimique et de la puissance thermique, en sorte que si l'on désigne par  $w_c$  la somme *algébrique* des puissances chimiques (en comptant positivement celles qui sont dégagées et négativement celles qui sont absorbées), et par  $w_\theta$  la somme *algébrique* des puissances thermiques, avec la même convention de signes, on a

$$vI = rI^2 + eI = w_c + w_\theta$$

d'où

$$eI = w_c + (w_\theta - rI^2)$$

équation exprimant la relation entre la puissance voltaïque  $eI$  et la puissance chimique  $w_c$  d'une cuve électrolytique et se prêtant à une discussion analogue à celle qui concerne les piles.

Le rendement d'une cuve électrolytique (au point de vue énergétique) est égal au rapport de la puissance *utile* dégagée :  $w_c$  à la puissance électrique consommée  $vI$  :

$$\eta = \frac{w_c}{vI} = \frac{vI - w_\theta}{vI} = \frac{eI - (w_\theta - rI^2)}{vI}$$

En fait, ce qui intéresse plutôt le praticien c'est le rapport de la quantité de matière utile élaborée dans la cuve à l'énergie électrique dépensée corrélativement par celle-ci. Par exemple, dans une cuve à raffinage du

cuivre, ce sera le poids de cuivre recueilli sur la cathode par joule fourni à la cuve.

Le poids de matière utile élaborée dans la cuve, pour un fonctionnement d'une durée  $t$ , en régime régulier correspondant à une intensité de courant  $I$ , est donné par l'expression :

$$P = p_1 Q$$

où  $Q$  représente la quantité d'électricité ( $It$ ) ayant traversé la cuve pendant le temps considéré et  $p_1$  le poids de matière utile mis en jeu par l'unité de quantité.

Si l'on évalue  $I$  en ampères et  $t$  en secondes, le produit  $It$  donnera la valeur de  $Q$  en coulombs. Si l'on évalue  $I$  en ampères et  $t$  en heures, le produit  $It$  donnera la valeur de  $Q$  en ampères-heures. Dans le premier cas, on mettra à la place de  $p_1$  le poids de matière utile indiqué par les tables telles que celle de la page 331 ( $t. I$ ) comme représentant l'effet d'un coulomb, et dans le second cas celui représentant l'effet d'un ampère-heure.

L'énergie absorbée par la cuve considérée sera exprimée, à l'aide de la valeur de  $Q$  en coulombs, par l'une des expressions suivantes, selon qu'on la voudra en joules, en kilogrammètres ou en chevaux-heures :

$$\mathcal{E} = vQ \text{ joules}$$

$$\mathcal{E} = \frac{vQ}{9,81} \text{ kilogrammètres}$$

$$\mathcal{E} = \frac{vQ}{9,81.75.3600} \text{ chevaux-heures}$$

Si l'on veut faire usage de la valeur  $Ah$  de la quantité d'électricité en ampères-heures, on aura, en remarquant que

$$Ah = \frac{Q}{3600} :$$

$$\mathcal{E} = 3600.v.Ah \text{ joules}$$

$$\mathcal{E} = \frac{3600}{9,81} v.Ah \text{ kilogrammètres}$$

$$\mathcal{E} = \frac{v.Ah}{9,81.75} \text{ chevaux-heures}$$

Le fonctionnement d'une cuve électrolytique sera d'autant

plus économique que l'énergie dépensée par unité de poids de matière utile élaborée sera moindre. On en jugera par le rapport

$$\frac{\mathcal{E}}{P} = \frac{v}{p_1} \cdot \frac{\text{joule}}{\text{unité de poids}} = \frac{v}{p_1} \cdot \frac{\text{kgmètre}}{\text{unité de poids}} = \frac{v}{p_1 \cdot 9,81.75.3600} \cdot \frac{\text{chev.-heure}}{\text{unité de poids}}$$

Les dénominateurs de ces expressions étant formés de constantes dont l'opérateur ne dispose pas, un abaissement de la valeur de ce rapport ne pourra résulter que d'une diminution du numérateur  $v$ . Or, comme  $v = rI + e$ , une diminution de  $v$  ue peut résulter que d'une diminution de  $rI$ , car  $e$  est déterminé

par la nature de la cuve. Mais  $rI = \rho \frac{l}{S} I$ . Donc, en définitive,

les conditions les plus économiques du fonctionnement d'une cuve électrolytique donnée se trouveront dans une réduction de l'épaisseur  $l$  de liquide comprise entre les électrodes et une augmentation de la surface  $S$  de ces dernières. Comme on ne peut évidemment avoir  $l$  par trop faible, de crainte des courts-circuits entre électrodes, ni  $S$  par trop grande, l'encombrement, le poids et le prix des cuves et des électrodes (qui croissent avec  $l$ ) devant être contenus dans de justes limites,  $v$  est forcément toujours supérieur à  $e$  et  $\frac{\mathcal{E}}{P}$  supérieur à  $\frac{e}{p_1}$ .



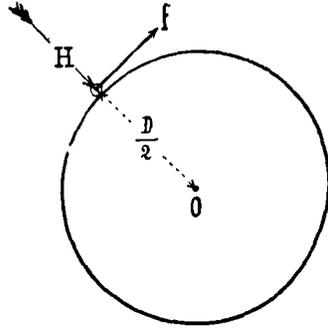
De la puissance  $vI$  qu'il reçoit un *moteur électrique* dissipe en chaleur une partie :  $w_j$ , correspondant à l'effet Joule dont ses enroulements sont le siège, et transforme le reste :  $vI - w_j = eI$  en puissance mécanique.

Calculons, en effet, le couple moteur électro-magnétique qui sollicite sa partie tournante et qui provient de l'action que le champ magnétique  $H$  dans lequel elle est située exerce sur chacun des conducteurs de sa périphérie, en raison du courant  $i$  que portent ces conducteurs (*fig.* 485).

Pour un de ces conducteurs, de longueur  $l$  (en cen-

timètres), l'effort  $f$  dû à l'action du champ a pour bras de levier le demi-diamètre  $\left(\frac{D}{2}\right)$  du cylindre décrit par l'axe de ce conducteur, et a une valeur (en dynes) exprimée par :  $\frac{1}{10} i/H$ , en sorte que le moment, par rapport à l'axe de rotation  $o$ , du couple correspondant est

$$\frac{1}{10} i/H \frac{D}{2} \text{ centim.-dyne}$$



ou, suivant la remarque faite dans la précédente leçon (page 623),

Fig. 485

$$\frac{1}{10^8} i/H \frac{D}{2} \text{ joule-couple}$$

Si le nombre total des fils actifs à la périphérie de l'armature du moteur est  $n$ , comme l'enroulement est fait de façon que leurs actions soient toutes concordantes, on aura pour le couple total l'expression

$$C = \frac{n}{10^8} i/H \frac{D}{2}$$

Pour obtenir la puissance  $w_m$  correspondant à l'action de ce couple, il suffit de multiplier cette expression par la vitesse angulaire :  $\omega = 2\pi \cdot N_1$ , ce qui donne

$$w_m = C\omega = \frac{\pi N_1 n}{10^8} i/H D$$

ou, si l'on remarque que le produit  $N_1 \pi D$  représente la vitesse linéaire  $v_1$  d'un point de l'axe du conducteur,

dans son mouvement de rotation autour de l'axe du cylindre, on peut écrire

$$w_m = C_\omega = \frac{ni/Hv_i}{10^8}$$

Mais  $\frac{iHv_i}{10^8}$  exprime en volts (voir page 88) la force électromotrice d'induction  $e_i$  engendrée par le déplacement d'un des conducteurs dans le champ  $H$ . On a donc

$$w_m = C_\omega = ne_i$$

Si les  $n$  conducteurs considérés forment un faisceau de  $b$  branches comprenant chacune  $t$  conducteurs en tension, on a, en appelant  $e$  la force électromotrice du groupe et  $I$  le courant total d'alimentation,  $e = te_i$ ,  $I = bi$  et par suite :  $e_i = \frac{e}{t}$ ,  $i = \frac{I}{b}$ , d'où  $ne_i i = n \frac{e}{t} \frac{I}{b}$  et, puisque  $t \cdot b = n$ ,

$$w_m = eI$$

De cette puissance mécanique, la partie tournante du moteur dissipe une portion  $w_f$  en chaleur, en raison des frottements mécaniques qu'implique inévitablement son mouvement ; une autre portion :  $w_p$ , également en chaleur, en raison des courants de Foucault dont ses parties conductrices, qui se déplacent dans un champ magnétique variable, sont le siège ; une autre portion encore :  $w_h$ , également en chaleur, en raison de l'hystérésis de ses parties ferro-magnétiques soumises à des cycles magnétiques, en sorte qu'il ne reste, comme puissance mécanique disponible au dehors, pour un effet utile, que la différence :

$$W_u = W_M - (W_f + W_F + W_H)$$

Le rendement industriel d'un moteur électrique sera donc exprimé par l'une quelconque des formules suivantes :

$$\eta_M = \frac{W_u}{vI}$$

$$\eta_M = \frac{vI - (W_j + W_f + W_F + W_H)}{vI}$$



# CINQUANTE-SEPTIÈME LEÇON



## ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE

\*\*\*

### ÉNERGIE ET PUISSANCE ÉLECTRIQUES PROBLÈMES USUELS (COURANTS VARIABLES)



#### I

#### **Energie électrique potentielle d'un condensateur**

Un condensateur chargé est dépositaire d'une certaine quantité d'énergie qui est rendue manifeste dans les phénomènes (étincelles électriques, échauffements de conducteurs, arrachement ou volatilisation de particules métalliques, etc.) accompagnant sa décharge.

On peut laisser s'écouler un temps quelconque entre la charge et la décharge d'un condensateur, et, dans cet intervalle, on peut dire que l'énergie confiée par l'appareil de charge au condensateur est gardée par ce dernier en réserve, ou à l'état latent.

A la différence des autres récepteurs d'énergie électrique, un condensateur, au lieu de dissiper cette énergie au fur et à mesure qu'il la reçoit, la laisse s'accu-

muler en lui et passer à l'état d'énergie en disponibilité ou potentielle, convertissable ultérieurement en d'autres formes d'énergie au moment où il plait à l'opérateur qui dispose du condensateur d'en provoquer la décharge.

Lorsqu'on provoque la décharge d'un condensateur par l'établissement entre ses armatures d'une chaîne conductrice, on observe dans cette chaîne des phénomènes impliquant des dégagements d'énergie qui dépendent, en grandeur, de la capacité du condensateur et de la différence de potentiel établie par la charge entre ses armatures.

Par exemple, si la chaîne conductrice est formée (fig. 486) de deux conducteurs gros et courts comprenant entre eux un très mince fil métallique, la décharge détermine dans ce dernier un dégagement de chaleur qui peut servir de mesure à l'énergie mise en jeu, l'échauffement du premier étant insignifiant. Ce dégagement de chaleur peut être mesuré à l'aide de l'accroissement de pression qu'il détermine dans

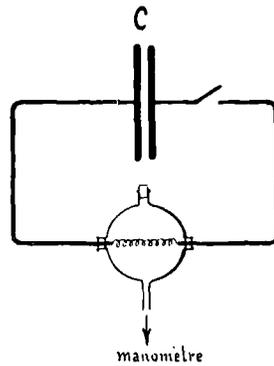


FIG. 486

une masse d'air limitée entourant le fil (*Thermomètre électrique de Riess*); ou encore, si le fil est en fer, on peut ajuster sa longueur de façon qu'il soit, par la chaleur dégagée, amené juste à son point de fusion, circonstance qui est réalisée quand on voit le fil se

résoudre en gouttelettes tranquillement, après quelques secondes d'hésitation ; alors la quantité de chaleur mise en jeu est proportionnelle à la longueur de fil amené par la décharge à cet état.

Par des mesures ainsi faites, on a reconnu que la quantité de chaleur dégagée par la décharge d'un condensateur était proportionnelle à la capacité et au carré de la différence de potentiel de charge.

Si  $C$  est la capacité évaluée en *farads* et  $V$  la différence de potentiel entre les armatures évaluée en *volts*, l'énergie mise en jeu hors du condensateur lors de la décharge est donnée en *joules* par la formule :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} CV^2$$

En effet, au passage, par le circuit extérieur, d'une quantité d'électricité  $dq$  d'une armature à l'autre correspond une consommation d'énergie électrique  $d\mathcal{E} = vdq$  si  $v$  est, pendant le temps  $dt$  où s'effectue ce passage, la valeur moyenne de la chute de potentiel entre les deux armatures. D'ailleurs  $v = \frac{q}{C}$ . On a donc entre  $\mathcal{E}$  et  $q$  la relation

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{C} qdq$$

d'où  $\mathcal{E} = \int_{\mathcal{E}}^{\infty} d\mathcal{E} = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} qdq$ , soit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{2} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

et, comme  $Q = CV$ ,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathbf{C} \mathbf{V}^2$$



Ces formules sont applicables aux batteries résultant du groupement d'un certain nombre de condensateurs, à condition de mettre à la place de  $\mathbf{C}$  l'expression de la capacité du groupe.

Soit, par exemple, une batterie formée de  $\mathbf{n}$  condensateurs identiques entre eux de capacité  $\mathbf{c}_1$ , groupés *en surface* (voir t. I page 37). On aura  $\mathbf{C} = \mathbf{n} \mathbf{c}_1$  et par suite :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{Q}^2}{\mathbf{n} \mathbf{c}_1}$$

ou

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathbf{n} \mathbf{c}_1 \mathbf{V}^2$$

La première formule montre que si l'on dispose d'une quantité d'électricité déterminée :  $\mathbf{Q}$ , on obtiendra, en la confiant à la batterie, une quantité d'énergie  $\mathbf{n}$  fois moindre que si on la confiant à un seul condensateur.

La seconde formule montre que si l'on dispose d'une différence de potentiel déterminée  $\mathbf{V}$ , on obtiendra, en l'appliquant à la batterie, une quantité d'énergie  $\mathbf{n}$  fois plus grande que si on l'appliquait à un seul condensateur.

De même, dans le domaine de l'hydraulique, si l'on dispose d'une quantité d'eau déterminée  $\mathbf{Q}$ , il y a avantage, au point de vue du travail qu'on en peut tirer, à la confier à un réservoir de section faible où elle attein-

dra une grande hauteur, tandis que si l'on dispose d'une hauteur d'eau déterminée, il y aura avantage à mettre en œuvre un réservoir de grande capacité.

Soit, en second lieu, une batterie formée de  $n$  condensateurs identiques entre eux, de capacité  $C_1$ , groupés *en cascade* (voir t. I page 107). On aura alors  $C = \frac{C_1}{n}$  et, par suite :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} n \cdot \frac{Q^2}{C_1}$$

ou

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 V^2}{n}$$

La première formule indique que si l'on dispose d'une quantité d'électricité déterminée :  $Q$ , on obtiendra, en la confiant à la batterie, une quantité d'énergie  $n$  fois plus grande que si on la confiait à un seul condensateur.

La seconde formule indique que si l'on dispose d'une différence de potentiel déterminée :  $V$ , on obtiendra, en l'appliquant à la batterie, une quantité d'énergie  $n$  fois moindre que si on l'appliquait à un seul condensateur.

En résumé, une batterie en surface est, au point de vue de l'énergie, préférable à un seul condensateur quand il s'agit d'utiliser une différence de potentiel donnée, et une batterie en cascade l'est, au contraire, quand il s'agit d'utiliser une quantité donnée d'électricité.



L'énergie potentielle  $\mathcal{E}$  dont on dispose quand on possède une batterie chargée formée de  $n$  condensateurs identiques entre eux est, quel que soit le mode de groupement, égale à  $n$  fois celle  $\mathcal{E}_1$  qui réside en un seul condensateur.

En effet, si la batterie est en surface on a

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} n C_1 V^2 = n \cdot \frac{1}{2} C_1 V^2$$

or  $\frac{1}{2} C_1 V^2$  est l'énergie unitaire, puisque chaque condensateur a comme capacité  $C_1$  et comme différence de potentiel entre ses armatures  $V$ .

Si la batterie est en cascade, on a

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{C_1 V^2}{n}$$

or  $V = n V_1$ , d'où

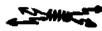
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C_1 n V_1^2 = n \cdot \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = n \cdot \mathcal{E}_1$$

Donc, étant donnés  $n$  condensateurs pourvus chacun d'une réserve d'énergie  $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} Q_1 V_1$ , qu'on les groupe comme on voudra, on ne changera pas le total d'énergie disponible.

Le mode de groupement n'influera que sur la valeur des deux facteurs de cette énergie : quantité d'électricité et différence de potentiel, mais non sur leur produit, en sorte que si l'on élève l'un l'autre s'abaissera dans le même rapport.

Par le groupement en surface, on mettra en jeu une

quantité d'électricité  $nQ_1$  sous une différence de potentiel moyenne  $\frac{1}{2} V_1$ , tandis que par le groupement en cascade on mettra en jeu simplement la quantité  $Q_1$ , mais sous une différence de potentiel moyenne  $\frac{1}{2} nV_1$ . L'énergie aura pour facteurs, dans le premier cas :  $nQ_1$  et  $\frac{1}{2} V_1$ , et, dans le second cas :  $Q_1$  et  $\frac{1}{2} nV_1$ , mais sa valeur restera la même :  $\frac{1}{2} nQ_1V_1 = n \cdot \frac{1}{2} Q_1V_1 = n \cdot \mathcal{E}_1$ .



## II

### Energie électrique potentielle d'une portion de circuit

Lorsque, comme nous l'avons fait dans la leçon précédente, on considère une portion de circuit parcourue par un courant constant, l'énergie électrique qui y est mise en jeu est, au fur et mesure, intégralement dépensée, sans qu'aucune fraction soit mise en réserve. C'est là la caractéristique de l'état de régime accusé par la constance du courant.

Dans une portion de circuit qui est le siège d'un courant variable, il n'en est pas de même.

Soit  $v$  la différence de potentiel entre ses extrémités à l'instant  $t$ ,  $i$  l'intensité du courant,  $e$  la force électro-

motrice non inductive que cette portion de circuit peut renfermer,  $\varphi_s$  le flux de self induction ; on a alors :

$$\mathbf{v} = \mathbf{ri} - \mathbf{e} + \frac{1}{10^8} \frac{d\varphi_s}{dt}$$

au lieu de la relation

$$\mathbf{v} = \mathbf{ri} - \mathbf{e}$$

qu'on aurait si le courant était invariable.

Il en résulte que l'énergie électrique  $\mathbf{v.i.dt}$  mise en jeu durant le temps  $dt$ , au lieu d'équivaloir à  $\mathbf{ri}^2.dt - \mathbf{e.i.dt}$ , se trouve en partie représentée en la quantité

$$\frac{1}{10^8} \mathbf{i} . d\varphi_s$$

qui représente de l'énergie électrique mise en réserve quelque part si  $\mathbf{ri}^2 dt - \mathbf{e.i dt}$  est moindre que  $\mathbf{v.i dt}$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{ri} - \mathbf{e}$  est moindre que  $\mathbf{v}$ , ou si  $\frac{d\varphi_s}{dt}$  est positif, ou enfin si, à l'instant considéré, le courant  $\mathbf{i}$  est en train de croître, tandis que cette quantité représente de l'énergie venant de quelque autre part que du circuit si  $\mathbf{ri}^2 dt - \mathbf{e.i dt}$  est supérieur à  $\mathbf{v.i dt}$ , ce qui a lieu lorsque le courant  $\mathbf{i}$ , à l'instant considéré, est en train de décroître.

Considérons, pour fixer les idées, le premier cas.

L'énergie déficiente :  $\frac{1}{10^8} \mathbf{i} . d\varphi_s$  peut être envisagée comme mise en réserve, à titre d'énergie potentielle, dans le milieu extérieur au circuit, pour lui être empruntée ultérieurement si le courant vient ensuite à décroître.

Nous admettrons donc que toute variation du courant dans une portion de circuit donnée entraîne pour le milieu extérieur une variation d'énergie potentielle électrique exprimée par  $-\frac{1}{10^8} \mathbf{i} \cdot d\varphi_s$ ,  $d\varphi_s$  étant la variation du flux de self-induction de cette portion de circuit.

Sur le diagramme (*fig.* 487, I) représentant  $\varphi_s$  en fonction de  $\mathbf{i}$ , cette quantité  $\frac{1}{10^8} \mathbf{i} d\varphi_s$  est représentée, au facteur près  $\frac{1}{10^8}$ , par l'aire du trapèze infiniment petit de base  $\mathbf{i}$  et de la hauteur  $d\varphi_s$  indiqué par des hachures.

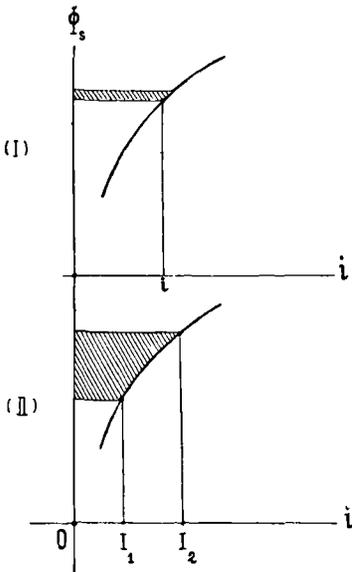


FIG. 487

La variation d'énergie potentielle du milieu provenant de la portion de circuit considérée pour une variation d'intensité du courant faisant passer celui-ci d'une valeur initiale  $\mathbf{I}_1$  à une valeur finale  $\mathbf{I}_2$ , sera donc représentée par la somme *algébrique* des aires  $\mathbf{i} \cdot d\varphi_s$  obtenues en donnant à  $\mathbf{i}$  la série des valeurs comprises entre  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  (*fig.* 487, II).

Considérons, en particulier, le cas où la valeur

finale du courant serait égale à la valeur initiale.

Si le point représentatif des valeurs successives de  $\varphi_s$  suit, pour son retour à sa position initiale, la ligne même qu'il avait parcourue en s'en éloignant, en d'autres termes, si  $\varphi_s$  repasse, pendant la phase de décroissance de  $\mathbf{i}$ , par les mêmes valeurs que pendant la phase de croissance, les trapèzes infiniment petits négatifs ont respectivement les mêmes valeurs absolues que ceux qui doivent être comptés positivement et la somme totale est nulle. L'énergie potentielle reprend donc alors, à la fin du cycle des variations de  $\mathbf{i}$ , la même valeur qu'au début, et ce cycle n'entraîne pour le milieu extérieur au circuit ni dépense, ni gain d'énergie.

Ce cas se présente lorsque le milieu intéressé par la portion de circuit considérée ne renferme aucune substance ferro-magnétique, car alors la ligne représentative des valeurs de  $\varphi_s$  pour  $\mathbf{i}$  croissant ou pour  $\mathbf{i}$  décroissant est une seule et même ligne droite. On a en effet (Voir page 155)  $\varphi_s = 10^8 \cdot \mathbf{L} \mathbf{i}$ .

Alors  $d\Phi_s = 10^8 \mathbf{L} d\mathbf{i}$  et  $\mathbf{i} d\Phi_s = 10^8 \mathbf{L} \mathbf{i} d\mathbf{i}$ , de sorte que l'énergie mise en jeu lorsque le courant  $\mathbf{i}$  passe de 0 à

son maximum  $\mathbf{I}_{\max}$  est  $\mathbf{L} \int_0^{\mathbf{I}_{\max}} \mathbf{i} d\mathbf{i}$  soit

$$\frac{1}{2} \mathbf{L} \mathbf{I}_{\max}^2$$

Cette énergie est restituée lorsque le courant repasse de sa valeur maxima à zéro.

Si le point représentatif des valeurs successives de  $\varphi_s$  suit pour  $\mathbf{i}$  décroissant une ligne distincte de celle correspondant à  $\mathbf{i}$  croissant et qui présente, pour les

mêmes  $\varphi_s$ , des abscisses plus grandes, les trapèzes élémentaires négatifs l'emportent sur les positifs, et l'accomplissement du cycle entraîne dans le milieu extérieur une dépense d'énergie, proportionnelle à l'aire (fig. 488) enclose dans la courbe fermée parcourue par le point représentatif.

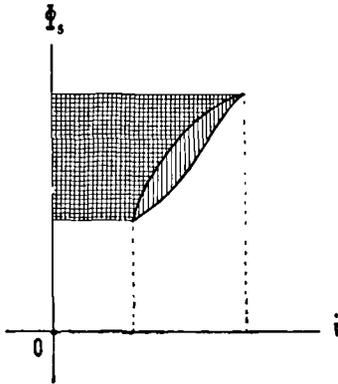


FIG. 488

Ce cas se présente lorsque le milieu intéressé par la portion de circuit considérée renferme des substances ferro-magnétiques douées d'hystérésis. Et voilà pourquoi, alors, des variations cycliques du courant donnent lieu à une dissipation d'énergie qui se traduit par un dégagement de chaleur au sein de ces substances.

Considérons un tore formé d'une telle substance et entièrement recouvert d'un enroulement régulier comprenant  $n$  spires. Si  $s$  est sa section, on  $d\varphi_s = n \cdot s \cdot d\beta$ , et, par suite,  $\frac{1}{10^8} \cdot i d\varphi_s = \frac{1}{10^8} i \cdot n \cdot s \cdot d\beta$ , ou, en désignant par  $l$  la longueur de la circonférence moyenne et par  $n_1$  le nombre de spires par unité de longueur :

$\frac{1}{10^8} i d\varphi_s = \frac{1}{10^8} i n_1 l s \cdot d\beta$ . Mais  $l s$  représente le volume du noyau magnétique considéré. L'énergie mise en jeu par unité de volume est donc :

$\frac{1}{10^8} n_1 \cdot i \cdot d\beta$ . Or si l'on désigne par  $H$  le champ magnétisant, on a

$H = \frac{4\pi}{10} n_1 i$ , d'où :  $n_1 i = \frac{10H}{4\pi}$  et en portant cette valeur de  $n_1 i$  dans la formule précédente, on obtient finalement pour l'énergie mise en jeu par unité de

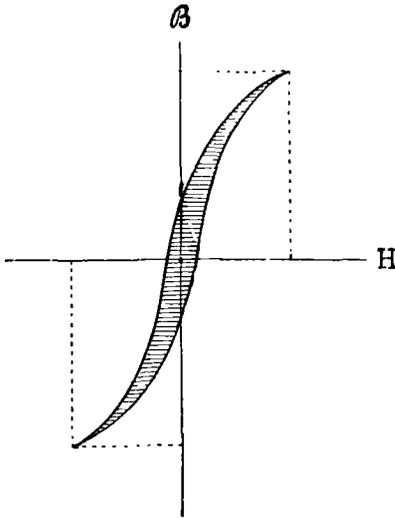


FIG. 489

volume pour une variation  $d\mathcal{B}$  de l'induction magnétique, l'expression :  $\frac{1}{4\pi \cdot 10^7} H \cdot d\mathcal{B}$

en sorte que l'expression (en joules) de la chaleur dissipée par centimètre cube dans un cycle d'aimantation d'un métal magnétique est égale au produit par le facteur numérique

$$\frac{1}{4\pi \cdot 10^7} \text{de l'aire } \int_c H \cdot d\mathcal{B}$$

comprise (fig. 489) dans la boucle formée par la représentation de  $\mathcal{B}$  en fonction de  $H$  pour ce cycle.

Par des considérations d'énergétique, on peut, comme l'a montré *Boy de La Tour* (1), justifier très simplement la formule relative (voir page 21) à la force portante d'un électro-aimant.

Imaginons que l'électro-aimant représenté par la fig. 490 soit soumis au cycle d'opérations suivant :

1° Aimantation, par établisse-

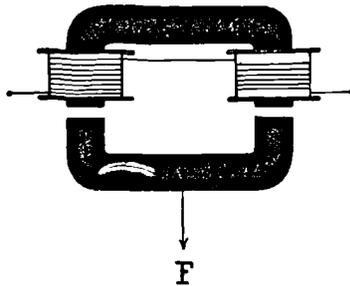


FIG. 490

1. L'Industrie électrique, t. IX, p. 10-12 (10 janv. 1920).

ment, entre les bornes de l'enroulement, d'une différence de potentiel  $V$ ;

2° Déplacement de l'armature accroissant de  $dI_e$  la longueur de l'entrefer, et, en même temps, maintien de l'intensité finale du courant ;

3° Désaimantation, par mise en court-circuit de l'enroulement, et, par suite, retour à l'état initial.

La première opération crée un flux magnétique  $\varphi$  augmentant avec  $i$  jusqu'à une valeur finale  $\Phi_1$  correspondant à la valeur finale :  $I$  du courant, suivant une loi représentée par la portion  $OM_1$  de la courbe d'aimantation (I) (*fig. 491*).

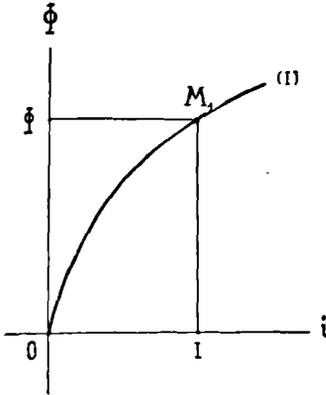


FIG. 491

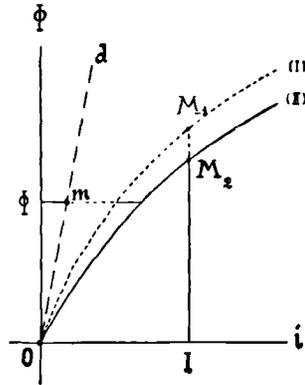


FIG. 492

Pour conserver au courant son intensité  $I$  pendant la seconde opération, en dépit de la force électromotrice d'induction due à la variation de flux causée par le déplacement de l'armature, on doit faire varier la différence de potentiel aux bornes de l'enroulement de façon qu'elle satisfasse à la relation :  $U = rI + \frac{m}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$ , dans laquelle  $m$  est le nombre de spires et  $\Phi$  le flux à travers une section du noyau.

Après cette seconde opération, le flux a la valeur de l'ordonnée  $\Phi_2$ , correspondant à l'abscisse  $I$ , sur une courbe d'aimantation (II) située (*fig. 492*) au-dessous de (I) et se déduisant de (I, suivant la méthode d'Hopkinson (voir page 74), par l'addition aux abscisses de (I) des abscisses des points de mêmes ordonnées de la droite  $od$  figurant la caractéristique d'aimantation du supplément d'entrefer  $2.dc$ .

L'abscisse  $i$  d'un point de cette droite étant liée à l'ordonnée  $\Phi$  par la relation :  $mi = 2.dl_0 \frac{\Phi}{\frac{4}{10} \pi . s}$ , en désignant par  $s$  la section de

l'entrefer, l'angle de  $od$  avec  $o\Phi$  a pour tangente et, pratiquement aussi pour sinus, puisqu'il est infiniment petit :  $\frac{i}{\Phi} = \frac{dl_0}{\frac{2}{10} \pi . s . m}$ .

Remarquons que les aires infiniment petits comprises entre les deux caractéristiques d'aimantation (I) et (II) jusqu'à une parallèle à  $oi$  située à une distance  $\Phi$  de l'origine sont équivalentes, à celles comprises entre  $o\Phi$  et  $od$  comme constituées d'éléments égaux chacun à chacun (petits rectangles de bases  $di$  et de hauteurs  $d\Phi$ ). Leur valeur commune est égale à celle du triangle  $o\Phi m$ , c'est-à-dire à  $\frac{1}{2} . o\Phi . \Phi m = \frac{1}{2} \Phi . \frac{\Phi . dl}{\frac{2}{10} \pi . s . m} = \frac{\Phi^2 . dl}{\frac{4}{10} \pi . s . m}$ .

La première des opérations faites ci-dessus entraîne pour l'agent qui l'effectue un déficit d'énergie égal à l'accroissement d'énergie potentielle électromagnétique du milieu et représenté (voir page 658) par

$$\frac{1}{10^8} \int_0^i i . d\Phi_s = \frac{m}{10^8} \int_0^i i d\Phi = \frac{m}{10^8} \text{ aire } A_1 \text{ (fig. 493, I).}$$

La seconde opération coûte à l'agent extérieur une quantité d'énergie égale au travail  $F . dl$  accompli, dans le déplacement de l'armature, à l'encontre de la force attractive  $F$  moins la quantité d'énergie potentielle libérée par la substitution, à intensité de courant constante, de la deuxième caractéristique d'aimanta-

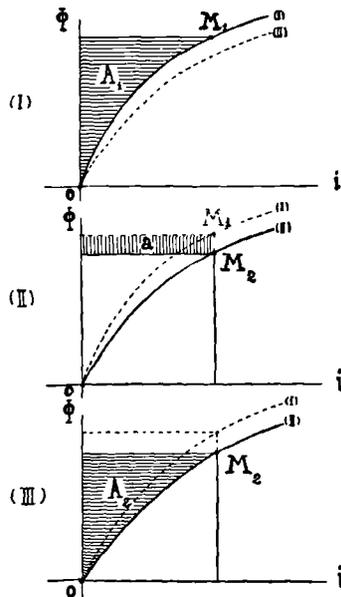


FIG. 493

tion à la première, quantité représentée par  $\frac{m}{10^8} \int f d\Phi = \frac{m}{10^8}$

$$I(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{m}{10^8} I.M_1M_2 = \frac{m}{10^8} \text{ aire } a \text{ (fig. 493, II)}.$$

La troisième opération, en libérant la quantité d'énergie :  $\frac{m}{10^8} \int i . d\Phi = \frac{m}{10^8} \cdot \text{ aire } A_2$  (fig. 493, III), dédommage complètement l'agent extérieur de ses pertes précédentes, en sorte qu'on peut écrire l'équation :

$$\frac{m}{10^8} \cdot \text{ aire } A_1 + F.dl - \frac{m}{10^8} \text{ aire } a = \frac{m}{10^8} \cdot \text{ aire } A_2$$

d'où

$$F.dl = \frac{m}{10^8} [A_2 - (A_1 - a)]$$

Or l'aire  $A_2 - (A_1 - a)$  est égale à la portion de  $A_2$  comprise entre les deux courbes d'aimantation. Sa valeur, suivant la remarque faite ci-dessus (page 663) est  $\frac{\Phi_2^2 \cdot dl}{\frac{4}{10} \pi . s . m}$  ; on a donc :

$$F.dl = \frac{1}{10^7} \frac{\Phi_2^2 dl}{4\pi s} \text{ joule-couple}$$

d'où

$$F = \frac{\Phi_2^2}{4\pi s} \text{ dynes}$$

Mais  $\Phi_2^2 = \mathcal{B}^2 s^2$  ; donc

$$F = \frac{1}{4\pi} \mathcal{B}^2 s \text{ dynes}$$

La surface  $S$  d'adhérence de l'armature au noyau étant double de la section  $s$  de ce dernier, on peut écrire

$$F = \frac{S\mathcal{B}^2}{8\pi} \text{ dynes}$$

ce qui donne la formule citée page 21 et d'où l'on déduit, comme on l'a vu, la valeur de la pression d'adhérence  $\frac{F}{S}$  en fonction de  $\mathcal{B}$  (voir pages 21, 22, 77).



## CINQUANTE-HUITIÈME LEÇON



# ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE

\*\*\*\*

### ÉNERGIE ET PUISSANCE ÉLECTRIQUES PROBLÈMES USUELS (COURANTS ALTERNATIFS)



#### I

#### **Puissance instantanée et puissance moyenne d'un appareil à courants alternatifs**

Etant donné un appareil à courants alternatifs de fréquence usuelle, soit  $V$ , à un instant  $t$ , la valeur *algébrique* de la différence de potentiel  $V_A - V_B$  entre ses bornes **A** et **B**, et soit  $I$ , à ce même instant, la valeur *algébrique* de l'intensité du courant ;  $I$  étant positif si le courant, à l'instant considéré, va de **A** à **B**, et négatif s'il va de **B** à **A**, le produit  $VI$  sera, à cet instant, positif si  $V$  et  $I$  sont de même signe, c'est-à-dire si le courant va dans le sens de la chute de potentiel, tandis qu'il sera négatif si  $V$  et  $I$  sont de signes contraires, c'est-à-dire si le courant va en sens contraire de la chute de potentiel.

Dans le premier cas ( $V$  et  $I$  de même signe,  $VI$  posi-

tif) l'appareil, à l'instant considéré, fait fonction de *récepteur* de puissance électrique.

Dans le second cas (**V** et **I** de signes contraires, **VI** négatif) l'appareil, à l'instant considéré, fait fonction de *générateur*.

En résumé, pour un appareil à courants alternatifs, le produit **VI** des valeurs algébriques instantanées de la différence de potentiel aux bornes et de l'intensité du courant représente la **puissance instantanée** ou puissance mise en jeu à l'instant considéré, le signe + de ce produit correspondant au cas où cette puissance est *absorbée* et le signe — au cas où elle est *dégagée*.



La puissance instantanée **VI** à un instant **t** peut être envisagée comme la puissance moyenne de l'appareil pendant un laps de temps infiniment petit **dt** comprenant l'instant considéré, de sorte que le produit : **VIdt** représente l'*énergie électrique* mise en jeu dans l'appareil durant cet intervalle de temps, énergie absorbée ou dégagée suivant que son expression est positive ou négative.

L'énergie mise en jeu dans un appareil durant le laps de temps fini compris entre deux instants donnés **t<sub>1</sub>** et **t<sub>2</sub>** est, par suite, en grandeur et en signe :

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{VI} dt.$$

Dans le cas de courants alternatifs périodiques de faibles périodes, comme les courants alternatifs industriels usuels, un laps de temps d'une seconde peut être

pratiquement envisagé comme un multiple de la période d'ordre marqué par la fréquence  $F$ , et l'énergie mise en jeu en une seconde a pour expression, en grandeur et en signe :

$$F. \int_0^T VI. dt = \frac{1}{T} \int_0^T VI. dt$$

Cette expression représente aussi ce qu'on appelle la **puissance moyenne**  $[W]_{\text{moy}}$  de l'appareil considéré, c'est-à-dire le paramètre, qui, multiplié par un laps de temps donné  $t$ , permettra d'obtenir l'énergie mise en jeu par l'appareil durant ce laps de temps.

Ainsi on aura :

$$[W]_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T VI. dt$$

et

$$\mathcal{E} = [W]_{\text{moy}} \cdot t$$

Souvent, lorsqu'il ne peut y avoir méprise, on supprime, pour abrégé l'écriture, l'indice : moy. et l'on écrit simplement :  $W$  pour  $W_{\text{moy}}$ .

La puissance moyenne d'un appareil à courants alternatifs est représentée géométriquement par l'ordonnée moyenne de la courbe représentative de  $VI$  en fonction de  $t$ .

Elle s'exprime, en pratique, suivant son ordre de grandeur, en watts, en hectowatts ou en kilowatts, et le produit de sa valeur, ainsi formulée, par un laps de temps estimé en secondes ou en heures donne l'énergie mise en jeu, évalué en joules, hecto-joules, kilo-joules ou en watts-heures, hectowatts-heures, kilowatts-heures.

Pour un appareil à courant continu, la puissance moyenne et la puissance instantanée se confondent.



On se trouvera en présence d'une puissance instantanée conservant constamment le même signe si l'on a affaire à un appareil pour lequel la différence de potentiel aux bornes et l'intensité du courant offrent des zéros concomitants, ainsi que le représente la fig. 494.

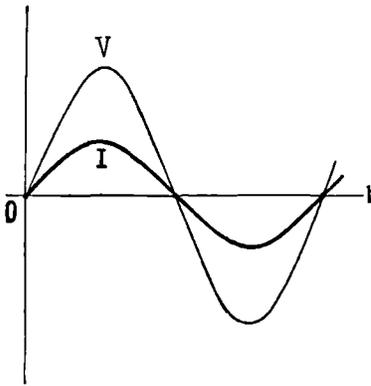


FIG. 494

En pratique, il en est ainsi pour un conducteur offrant, tel le filament d'une lampe à incandescence, une pure résistance ohmique, sans réactance sensible.

Il en est ainsi encore, comme on l'a vu dans une leçon précédente, (pages 570 et suiv.) pour un *arc* électrique (1).

En toute autre circonstance, par suite de la non coïncidence des zéros de **V** et de **I**, il y aura, dans le cours d'une période, des moments où **V** et **I** seront de même signe et d'autres où ils seront de signes contraires

---

1. Il ne faut pas entendre par là une *lampe à arc* électrique, comme on le fait souvent dans le langage industriel, mais bien un *arc* proprement dit, c'est-à-dire la portion de circuit comprise entre les pointes des crayons de la lampe. Appliquée à la portion de circuit comprise entre les bornes de la lampe et renfermant un ou plusieurs électro-aimants, la proposition serait inexacte.

(fig. 495). Par suite, la courbe représentative des  $V.I$  présentera des parties situées au-dessus et des parties situées au-dessous de l'axe des temps.

Ainsi tout appareil à courants alternatifs, autre qu'une pure résistance ohmique ou un arc électrique, n'est ni constamment générateur, ni constamment récepteur d'énergie électrique. Pour

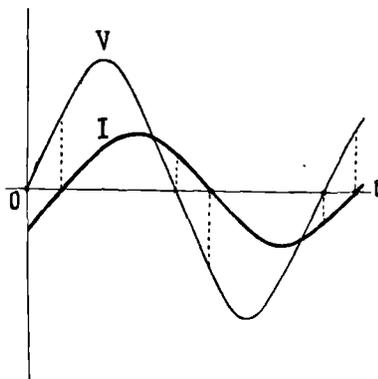


FIG. 495

savoir à quelle catégorie il doit être rapporté, il faut considérer le bilan de son fonctionnement pendant une période.

Si, au total, la quantité  $\int_0^T V.I.dt$  est négative; si, en d'autres termes, durant une période, l'appareil dégage plus d'énergie qu'il n'en consomme, il doit être considéré comme **producteur** ou **générateur d'énergie électrique**.

L'aire comprise entre la courbe représentative de  $V.I$  et l'axe des temps offre alors (fig. 496, I) des parties négatives qui l'emportent sur les positives.

Tel est le cas, par exemple, d'un alternateur en activité.

Si, par contre, la quantité  $\int_0^T V.I.dt$  est positive; si, en d'autres termes, durant une période, l'appareil absorbe plus d'énergie qu'il n'en dégage, il doit être con-

sidéré comme un **consommateur** ou **récepteur d'énergie électrique**.

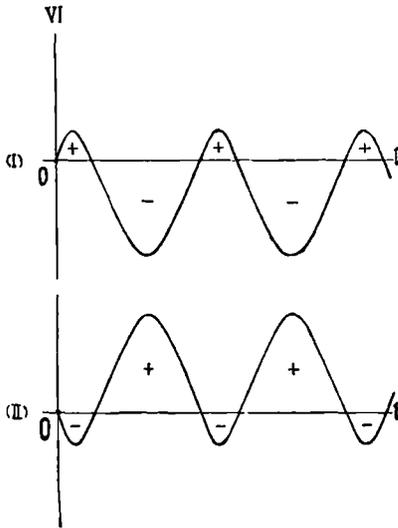


FIG. 496

considéré soit tel que, durant une période, il restitue exactement, à certains moments, toute l'énergie électrique qu'il absorbe à d'autres. Il ne peut être rangé alors ni dans la catégorie des générateurs, ni dans celle des récepteurs, particularité qui ne se présente pas dans le domaine des courants continus.

L'aire comprise entre la courbe des **V.I** et l'axe des temps offre alors (*fig. 497*) des parties positives et des parties négatives qui se compensent

L'aire comprise entre la courbe des **V.I** et l'axe des temps offre alors (*fig. 496, II*) des parties positives qui l'emportent sur les négatives.

Tel est le cas d'un électro-aimant à courants alternatifs, d'un transformateur, d'un moteur, etc.

Enfin, il peut arriver que l'appareil con-

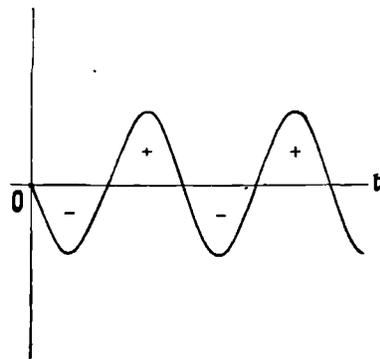


FIG. 497

Tel est le cas d'un condensateur de capacité invariable. En effet, lorsque la différence de potentiel  $U$  entre les armatures passe de  $0$  à  $U_{\max}$ , le condensateur se charge et par conséquent, ainsi qu'on l'a vu dans la leçon précédente, absorbe une quantité d'énergie égale à  $\frac{1}{2} CU_{\max}^2$ ; et quand, ensuite, la différence de potentiel tombe de  $U_{\max}$  à  $0$ , le condensateur se décharge et restitue cette même quantité d'énergie.

Il en est ainsi également pour une portion de circuit présentant une self-induction constante sans résistance sensible, telle une bobine de self à gros fil sans noyau ferro magnétique. En effet, on a alors  $\Phi_s = 10^8 Li$ , et, par conséquent :  $d\mathcal{E} = \frac{1}{10^8} id\Phi_s = Lidi$ , d'où,  $\int \frac{1}{10^8} id\Phi_s = \frac{1}{2} LI^2$ , en sorte que lorsque le courant croît de  $0$  à  $I_{\max}$ , l'appareil absorbe une quantité d'énergie :  $\frac{1}{2} L \cdot I_{\max}^2$  qu'il restitue ensuite quand le courant décroît de  $I_{\max}$  à  $0$ .

Les condensateurs et les selfs pures sont donc des appareils à courants alternatifs à puissance moyenne nulle.

C'est pour cela que les bobines de self constituent des appareils de réglage des courants alternatifs préférables, au point de vue économique, aux rhéostats, la dépense d'énergie s'y réduisant à celle correspondant à leur résistance ohmique, qu'on peut prendre très faible, et à l'hystérésis de leur noyau qu'on peut limi-

ter aussi de façon qu'au total la bobine consomme moins d'énergie qu'un rhéostat équivalent au point de vue de son effet sur le courant.



L'expression la plus générale de la différence de potentiel instantanée  $V$  existant entre les bornes d'une portion de circuit à courant alternatif est

$$V = RI - (E_s - U + E_i)$$

$R$  étant la résistance ohmique,  $E_s$  la force électromotrice de self-induction,  $U$  la différence de potentiel aux bornes de la capacité, si cette portion de circuit en renferme, et  $E_i$  la force électromotrice d'induction.

L'expression la plus générale de la puissance électrique instantanée est donc :

$$VI = RI^2 + (-E_s I) + UI + (-E_i I)$$

A tout instant la résistance ohmique *absorbe* de la puissance électrique,  $RI^2$  étant toujours positif.

La self-induction *absorbe* de la puissance quand l'intensité  $I$  est *croissante*, car alors  $E_s$  est de sens contraire à  $I$  (voir page 154) et  $-E_s I$  est positive. Elle en *restitue*, au contraire, lorsque  $I$  est en voie de décroissance.

La capacité *absorbe* de la puissance électrique quand  $U$  est de même signe que  $I$ , car alors le condensateur se charge; elle en *restitue*, par contre, quand  $U$  et  $I$  sont de signes contraires, ce qui a lieu quand le condensateur est en voie de décharge.

La force électromotrice d'induction  $E_i$  *absorbe* de la puissance quand elle est de sens contraire à  $I$ , c'est-à-

dire quand elle se présente comme force contre-électromotrice; elle en *produit*, au contraire, quand elle est de même sens que  $\mathbf{I}$ , c'est-à-dire quand elle agit comme force électromotrice.

Pour une pure résistance ohmique, l'équation de la puissance instantanée se réduit à

$$\mathbf{VI} = \mathbf{RI}^2$$

et, pour une pure capacité, à

$$\mathbf{VI} = \mathbf{UI}$$

Pour une bobine de self, un électro-aimant, une ligne électrique, etc., elle sera de la forme :

$$\mathbf{VI} = \mathbf{RI}^2 - \mathbf{E}_s \mathbf{I}$$

Enfin, pour un générateur ou un moteur d'induction elle s'écrira :

$$\mathbf{VI} = \mathbf{RI}^2 - \mathbf{E}_s \mathbf{I} - \mathbf{E}_i \mathbf{I}$$

L'expression générale de la puissance moyenne sera

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{VI} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{RI}^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{UI} dt \\ &\quad + \int_0^T -\mathbf{E}_s \mathbf{I} dt + \frac{1}{T} \int_0^T -\mathbf{E}_i \mathbf{I} dt \end{aligned}$$

ou, puisque la puissance moyenne relative à la capacité est nulle,

$$\mathbf{W}_{\text{moy}} = (\mathbf{RI}^2)_{\text{moy}} + (-\mathbf{E}_s \mathbf{I})_{\text{moy}} + (-\mathbf{E}_i \mathbf{I})_{\text{moy}}$$

Si la résistance  $\mathbf{R}$  est constante, on a

$$(\mathbf{RI}^2)_{\text{moy}} = \mathbf{R} (\mathbf{I}^2)_{\text{moy}} = \mathbf{RI}_{\text{eff}}^2$$

par conséquent : *pour un appareil à résistance constante, la partie de la puissance moyenne qui dépend*

*de cette résistance est positive et égale au produit de cette dernière par le carré de la valeur efficace du courant.*

La partie de la puissance moyenne relative à la self induction, nulle lorsque celle-ci ne fait intervenir aucune substance ferro-magnétique, est positive, en raison de l'hystérésis (voir page 660) lorsqu'une telle substance intervient. Au point de vue de l'énergie (mais à ce point de vue seulement) le résultat est le même que si l'appareil, dépourvu de tout effet d'hystérésis, présentait une résistance supérieure à sa résistance ohmique. Cette fiction ne serait pas admissible à tout autre point de vue, par exemple à celui de la forme des courbes du courant ou des différences de potentiel.

Lorsqu'un appareil est le siège de courants de Foucault on peut aussi interpréter le supplément corrélatif de puissance consommée comme correspondant à une majoration convenable de résistance ohmique.

Les bilans de fonctionnement des générateurs et récepteurs électriques à courants alternatifs s'établissent, au point de vue de l'énergétique, comme ceux des générateurs et récepteurs à courants continus, en considérant les puissances moyennes de tous genres qui sont mises en jeu.



## II

**Générateurs et récepteurs à courants  
alternatifs**

Un générateur à courants alternatifs est un appareil appelé **alternateur** qui engendre de l'énergie électrique en consommant de l'énergie mécanique, à lui fournie par un agent extérieur chargé de déplacer, relativement à un champ magnétique inducteur, un système de conducteurs induits.

La puissance moyenne dépensée par cet agent est employée en partie à vaincre les frottements auxquels est sujette la partie tournante de l'alternateur ; en partie à vaincre la résistance que rencontrent, en vertu des courants de Foucault, les parties métalliques de l'organe tournant pour se déplacer dans le champ magnétique inducteur ; en partie à vaincre la résistance que rencontrent, en vertu de leur hystérésis, les parties ferro-magnétiques de l'organe tournant, dans leurs déplacements cycliques relativement au champ électromagnétique ; en partie, enfin, à vaincre un couple magnétique dû à l'action du champ inducteur sur les fils induits.

Si, de la puissance moyenne  $\mathbf{W}$  dépensée par l'agent moteur, on défalque les puissances moyennes  $\mathbf{W}_f$ ,  $\mathbf{W}_F$ ,  $\mathbf{W}_H$ , dépensées en raison des frottements, des courants de Foucault et de l'hystérésis, il y a un reste, représentant la partie de  $\mathbf{W}$  transformée en puissance élec-

trique, à l'intérieur du générateur. Mais, de cette puissance électrique, une partie:  $\mathbf{W}_j + \mathbf{W}'_f + \mathbf{W}'_h$  est dissipée en chaleur en raison des effets Joule, Foucault et d'hystérésis dus au courant de l'induit. Il reste donc comme puissance électrique moyenne émise au dehors:

$$\mathbf{W}_u = \mathbf{W} - (\mathbf{W}_f + \mathbf{W}_F + \mathbf{W}_H + \mathbf{W}_j + \mathbf{W}'_f + \mathbf{W}'_h)$$

ou, en appelant  $\mathbf{W}_p$  la puissance totale dissipée en effet parasites de tous genres, suivant le détail contenu dans la parenthèse :

$$\mathbf{W}_u = \mathbf{W} - \mathbf{W}_p$$

Le rendement d'un alternateur est donc exprimé par le quotient

$$\eta_\lambda = \frac{\mathbf{W}_u}{\mathbf{W}}$$

qu'on pourra écrire, en remplaçant  $\mathbf{W}_u$  et  $\mathbf{W}$  par des expressions équivalentes, ou bien

$$\eta_\lambda = \frac{\mathbf{W}_u}{\mathbf{W}_u + \mathbf{W}_p}$$

ou bien

$$\eta_\lambda = \frac{\mathbf{W} - \mathbf{W}_p}{\mathbf{W}}$$

La discussion détaillée de cette expression n'est possible qu'après une étude approfondie de la théorie détaillée du fonctionnement des alternateurs.

Pour les bons alternateurs actuels de notable puissance (100 kilowatts et au-dessus) le rendement maximum peut atteindre jusqu'à 94 %.

Le couple résistant agissant sur la partie tournante d'un alternateur, en vertu de l'action du champ magnétique extérieur sur les fils induits a, pour moment, par

rapport à l'axe de rotation, d'après un calcul analogue à celui déjà fait précédemment (page 647)

$$\sum \frac{1}{10^8} H.l.i \frac{D}{2} \text{ joules-couples}$$

le signe  $\Sigma$  embrassant tous les fils actifs.

La puissance correspondante, qui est la puissance électrique instantanée engendrée par l'agent moteur à l'intérieur de l'appareil diminuée des pertes  $W'_f$  et  $W'_h$  par courants de Foucault et hystérésis, a donc pour expression

$$W'_e = \sum \frac{1}{10^8} H.l.i \frac{D}{2} \omega \text{ watts}$$

ou, puisque  $\frac{D}{2} \omega$  est la vitesse linéaire  $v_i$  d'un point de l'axe d'un fil :

$$W'_e = \sum \frac{1}{10^8} H.l.v_i.i$$

ou enfin :

$$W'_e = \sum e_i.i$$

$e_i$  désignant la force électromotrice d'induction dont un fil est le siège à l'instant considéré, y compris celle de self induction, et  $i$  l'intensité du courant dans ce fil au même instant.

Évaluons cette somme  $\Sigma$  respectivement dans les cas usuels d'un alternateur monophasé, d'un alternateur triphasé monté en étoile et d'un alternateur triphasé monté en triangle.

S'il s'agit d'un alternateur monophasé, les  $n$  fils induits actifs sont, au même instant, le siège de forces

électromotrices et de courants identiques. On a donc alors

$$W'_e = \sum e_i i = n \cdot e_i \cdot i$$

Or si les fils sont groupés de façon à former un faisceau à  $b$  branches comprenant chacune  $t$  fils en tension, on a

$$e_i = \frac{E}{t}, \quad i = \frac{I}{b}$$

et par suite

$$W'_e = E_i I$$

$E_i$  étant la force électromotrice et  $I$  le courant de l'induit.

Mais si  $V_A - V_B$  est, à l'instant considéré, la différence de potentiel aux bornes de l'induit, on a, en désignant par  $R$  la résistance ohmique de ce dernier :

$$V_A - V_B = RI - E_i$$

d'où  $E_i I = RI^2 - (V_A - V_B) I$ .

En appelant  $I_A$  la valeur algébrique du courant

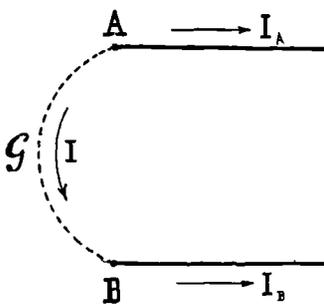


FIG. 498

dans le fil de ligne qui part de la borne  $A$  (fig. 498) et  $I_B$  celle du courant dans le fil qui part de la borne  $B$ ,  $I$  étant la valeur algébrique du courant dans l'alternateur, compté positivement de  $A$  à  $B$ , tandis que  $I_A$  et  $I_B$  sont comptés positive-

ment vers l'extérieur, on a la relation

$$I = -I_A = +I_B$$

qui permettent de donner à l'expression de  $W'_e$  la forme très symétrique :

$$W'_e = E_i I = RI^2 + V_A I_A + V_B I_B$$

Dans l'équation :

$$W = W_f + W_r + W_h + W'_p + W'_h + RI^2 + W_u$$

$RI^2 + W_u$  n'est autre que  $E_i I$  ; on a donc

$$W_u = E_i I - RI^2 = V_A I_A + V_B I_B$$

C'est bien là, en effet, l'expression qu'on devait trouver puisque la valeur de  $W_u$  si on la compte positivement comme puissance électrique produite, ce qu'on fait dans l'équation  $W = W_p + W_u$ , est  $W_u = -(V_A - V_B) I$ , expression dans laquelle on peut remplacer  $-I$  par  $I_A$  et  $I$  par  $I_B$ .



Dans un alternateur triphasé monté en étoile, (*fig.* 499) considérons tout d'abord les  $n_1$  fils induits correspondant à une phase ; ils

sont le siège de la même force électromotrice :  $e_1$  et du même courant :  $i_1$ . La partie de la somme  $\sum e_1 i_1$  correspondant à cette phase est  $n_1 e_1 i_1$ . Or, si l'on appelle  $E_1$  la force électromotrice de cette

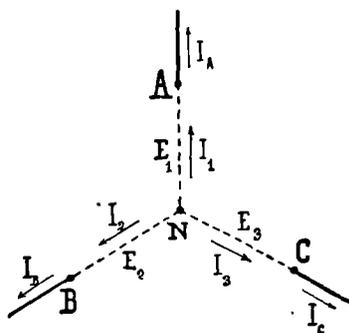


FIG. 499

phase et  $I_1$  son courant, on a  $e_1 = \frac{E_1}{t_1}$  et  $i_1 = \frac{I_1}{b_1}$ , avec

$$b_1 t_1 = n_1, \text{ d'où } n_1 \cdot e_1 \cdot i_1 = E_1 I_1.$$

Mais si  $V_A$  et  $V_N$  sont respectivement, à l'instant considéré, les potentiels à la borne **A** de cette phase et au point neutre, on a

$$V_A - V_N = -R_1 I_1 + E_1$$

d'où pour la partie de  $W'_e$  qui est relative à cette phase l'expression :

$$E_1 I_1 = R_1 I_1^2 + (V_A - V_N) I_1$$

Les deux autres phases fournissent des expressions analogues, en sorte que l'on a, au total :

$$W'_e = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 \\ + [(V_A - V_N) I_1 + (V_B - V_N) I_2 + (V_C - V_N) I_3]$$

et, par conséquent, en remplaçant  $I_1, I_2, I_3$  respectivement par  $I_A, I_B, I_C$

$$W_u = (V_A - V_N) I_A + (V_B - V_N) I_B + (V_C - V_N) I_C$$

ou, plus simplement encore, lorsque  $I_A + I_B + I_C = 0$

$$W_u = V_A I_A + V_B I_B + V_C I_C$$



Dans le cas d'un alternateur triphasé monté en triangle

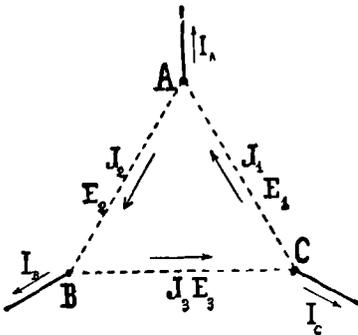


FIG. 500

(fig. 500), on a, en considérant tout d'abord la partie de  $\sum e_i i$  qui concerne les  $n_1$  fils d'une phase :

$$\sum_1 e_i i = n_1 e_i i = E_1 J_1$$

Or

$$V_C - V_A = R_1 J_1 - E_1$$

par suite :

$$E_1 J_1 = R_1 J_1^2 + (V_A - V_C) J_1$$

et, en tenant compte des expressions analogues relatives aux deux autres phases :

$$W_e = R_1 J_1^2 + R_2 J_2^2 + R_3 J_3^2 + (V_A - V_C) J_1 \\ + (V_B - V_A) J_2 + V_C - V_B) J_3$$

d'où

$$W_u = W_e - W_j = V_A(J_1 - J_2) + V_B(J_2 - J_3) + V_C(J_3 - J_1)$$

Mais  $J_1 - J_2$ ,  $J_2 - J_3$ ,  $J_3 - J_1$  ne sont autres respectivement que  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ . On a donc finalement :

$$W_u = V_A I_A + V_B I_B + V_C I_C$$



Ainsi, dans tous les cas de la pratique usuelle, l'expression algébrique de la puissance électrique utile mise en jeu par un générateur à courants alternatifs, sera donnée par la somme algébrique des produits obtenus en multipliant les potentiels aux bornes à l'instant considéré par les courants extérieurs correspondants (pris positivement dans le sens s'éloignant des bornes).

Comme cette même puissance électrique est celle absorbée par la partie de l'installation extérieure à l'alternateur, et qui a les mêmes bornes que celui-ci, on en conclut immédiatement que l'expression algébrique de la puissance électrique *absorbée* par un récepteur usuel (monophasé ou triphasé) sera donnée d'une façon analogue par la somme algébrique des produits obtenus en multipliant les potentiels aux

bornes, à l'instant considéré, respectivement par les courants mis en jeu extérieurement à ces bornes, au même instant, ces courants étant comptés positivement dans le sens correspondant à l'entrée dans le récepteur.

En pratique, au point de vue de l'évaluation de la puissance électrique, il n'y aura donc pas de distinction à faire, entre les appareils générateurs et les appareils récepteurs, sinon quant au sens de la mise en jeu de cette puissance lequel sera connu *a priori* d'après la fonction même de l'appareil considéré.

Etant donné un appareil usuel à courants alternatifs, on peut, dans tous les cas, l'envisager comme un appareil polyphasé.

S'il est à courants alternatifs simples, on peut le con-

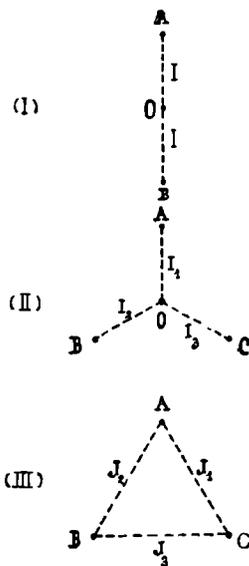


FIG. 501

sidérer comme appareil biphasé, les deux phases étant les parties comprises entre le milieu **O** de son enroulement et les deux bornes (**OA**, **OB**, *fig. 501 I*).

S'il est à courants triphasés et monté en étoile, il présente trois phases comprises respectivement entre le centre **O** de l'étoile et les trois bornes (**OA**, **OB**, **OC**, *fig. 501 II*).

S'il est à courants triphasés et monté en triangle, il présente trois phases comprises respectivement entre les bornes en-

visagées deux à deux (**CA**, **AB**, **BC**, *fig. 501 III*).

D'une manière générale, la puissance mise en jeu dans une phase, à un instant donné, est égale au produit de la différence de potentiel aux extrémités de cette phase par l'intensité du courant dont elle est le siège à ce même instant. On aura donc respectivement dans les trois cas usuels que nous venons d'envisager :

$$(I) \quad W_1 = (V_A - V_0) I$$

$$(II) \quad W_1 = (V_A - V_0) I_1$$

$$(III) \quad W_1 = (V_A - V_c) J_1$$

La puissance moyenne d'une phase sera donnée par la valeur moyenne de l'expression correspondante (I).

---

1. Pour les problèmes relatifs aux lignes électriques à courants alternatifs, consulter l'ouvrage suivant :

**Guide pratique pour le calcul des Lignes électriques aériennes à courants alternatifs simples et triphasés**, par *J. Pionchon et Th. Heilmann*. — Grenoble, A. Gratier, édit., 1902.



# CINQUANTE-NEUVIÈME LEÇON



## ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE

\*\*\*\*\*

### ÉNERGIE ET PUISSANCE ÉLECTRIQUES PROBLÈMES USUELS

(COURANTS ALTERNATIFS)

— suite —



#### I

### Puissance moyenne vraie et puissance moyenne apparente Facteur de puissance

*Si, à chaque instant, l'intensité du courant mis en jeu dans une portion de circuit est proportionnelle à la différence de potentiel aux bornes, la puissance moyenne est égale tout simplement au produit de la valeur efficace de l'intensité par la valeur efficace de la différence de potentiel.*

En effet, si  $i = kV$ , on a  $vi = kV^2$  et  $(VI)_{\text{moy}} = k (V^2)_{\text{moy}} = kV_{\text{eff}}^2 = V_{\text{eff}} \cdot kV_{\text{eff}}$ . Or  $kV_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}$ . Donc enfin :

$$(VI)_{\text{moy}} = V_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

Il en est ainsi, par exemple, lorsqu'une différence de

potentiel (quelle qu'elle soit) est appliquée aux bornes d'une portion de circuit de réactance nulle, car alors on a  $I = \frac{V}{R}$ , c'est-à-dire  $I$  proportionnel à  $V$ , le facteur de proportionnalité étant l'inverse  $\left(\frac{1}{R}\right)$  de la résistance ohmique de cette portion de circuit.

Mais lorsqu'il n'y a pas proportionnalité entre  $I$  et  $V$ , le produit  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  n'est pas égal à  $(VI)_{\text{moy}}$ ; il lui est inférieur.

D'une manière générale, on peut énoncer le théorème suivant :

*La valeur moyenne  $(G_1 \cdot G_2)_{\text{moy}}$  du produit des valeurs instantanées de deux grandeurs  $G_1, G_2$ , fonctions de  $t$ , est moindre que le produit  $G_{1\text{eff}} \cdot G_{2\text{eff}}$  des valeurs efficaces de ces grandeurs, calculées pour le même intervalle de temps ( $\tau$ ).*

En effet, la quantité  $(G_{1\text{eff}} \cdot G_2 - G_{2\text{eff}} G_1)^2$  étant un carré est nécessairement positive, ce qui entraîne la relation :

$$G_{1\text{eff}}^2 G_2^2 + G_{2\text{eff}}^2 G_1^2 > 2G_1 G_2 G_{1\text{eff}} G_{2\text{eff}}$$

laquelle subsiste entre les valeurs moyennes des deux membres, prises pour un même intervalle de temps, soit :

$$G_{1\text{eff}}^2 (G_2^2)_{\text{moy}} + G_{2\text{eff}}^2 (G_1^2)_{\text{moy}} > 2(G_1 G_2)_{\text{moy}} G_{1\text{eff}} G_{2\text{eff}}$$

Mais  $(G_2^2)_{\text{moy}} = G_{2\text{eff}}^2$  et  $(G_1^2)_{\text{moy}} = G_{1\text{eff}}^2$ ; donc

$$2G_{1\text{eff}}^2 \cdot G_{2\text{eff}}^2 > 2G_{1\text{eff}} G_{2\text{eff}} (G_1 G_2)_{\text{moy}}$$

et finalement :

$$(G_1 G_2)_{\text{moy}} < G_{1\text{eff}} \cdot G_{2\text{eff}}$$

Donc, si l'on compare la puissance moyenne mise en jeu dans une portion de circuit au produit des valeurs

1. W. E. Sumpner. — Journ. of. El. Eng., t. XXI, p. 630-631 (1902).

efficaces de la différence de potentiel aux bornes et de l'intensité, on devra écrire, en général :

$$(\mathbf{VI})_{\text{moy}} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}_{\text{eff}}$$

$\mathbf{f}$  étant un nombre moindre que  $\mathbf{1}$ , auquel on donne le nom de **facteur de puissance** de l'appareil considéré.

Le produit  $\mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}_{\text{eff}}$  est habituellement désigné, par abréviation, sous le nom de **puissance apparente** de la portion de circuit considérée, et alors la valeur moyenne du produit  $\mathbf{VI}$  des valeurs instantanées, c'est-à-dire la puissance moyenne, est appelée par opposition **puissance vraie**.

On exprime, avec ces dénominations, le résultat précédent en disant que la *puissance vraie* ( $\mathbf{W}$ ) *mise en jeu dans une portion de circuit à courants alternatifs est inférieure à la puissance apparente* ( $\mathbf{W}_a$ ), *la première étant égale à la seconde multipliée par un coefficient moindre que 1 constituant le facteur de puissance de l'appareil considéré pour le régime considéré.*



Dans le cas particulier où les grandeurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{I}$  auxquelles on a affaire sont *sinusoïdales*, le facteur de puissance offre une expression remarquable très simple : il est égal au cosinus de l'angle caractérisant le décalage entre  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{V}$ .

En effet, si

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \sin \omega t$$

et

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \sin (\omega t - \varphi)$$

on a

$$\langle VI \rangle_{\text{moy}} = W_{\text{moy}} = V_0 I_0 (\sin^2 \omega t \cos \varphi)_{\text{moy}} = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi$$

$$\text{or } \frac{V_0 I_0}{2} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = W_a$$

donc enfin ;

$$W_{\text{moy}} = W_a \cos \varphi$$

et, par conséquent :

$$f = \cos \varphi$$

Pour un appareil à tension et à courant sinusoïdaux, on peut donc être renseigné, par la considération du facteur de puissance, sur l'existence et la grandeur d'un décalage entre le courant et la tension.

Mais on tomberait dans une grande erreur si l'on pensait pouvoir soumettre à la même interprétation le facteur de puissance d'un appareil dans lequel la tension et le courant ne suivraient pas la loi sinusoïdale.

Si les courbes **V** et **I** sont de formes différentes, alors même que leurs zéros coïncident, il y a un facteur de puissance inférieur à l'unité.

Par exemple, si l'une des lignes (**V**) (*fig. 502*) était rectangulaire, de base **b** et de hauteur **a**, la valeur efficace de la grandeur correspondante serait : **a**. Si l'autre ligne (**I**) était triangulaire, avec la même base **b** et une hauteur **h**, la valeur efficace

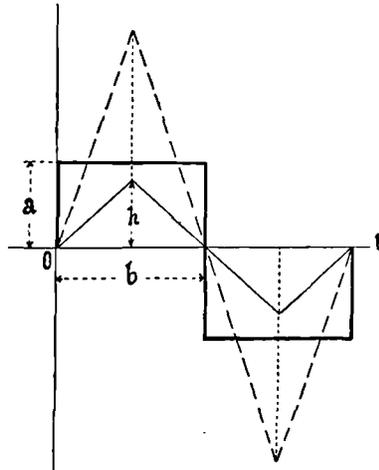


FIG. 502

correspondante serait (1) :  $\frac{h}{\sqrt{3}}$ . Le produit des valeurs efficaces aurait donc pour valeur :  $\frac{ah}{\sqrt{3}}$ .

D'autre part, la ligne représentative du produit VI serait une ligne triangulaire de base  $b$  de hauteur  $ah$ , en sorte que VI aurait comme valeur moyenne :  $\frac{1}{2} ah$ . Le rapport  $\frac{(VI)_{\text{moy}}}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}$  serait

$$\text{donc : } \frac{\frac{1}{2} ah}{\frac{1}{\sqrt{3}} ah} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,732}{2} = 0,866.$$

Un arc électrique à courants alternatifs n'est pas très éloigné de ce cas théorique, car sa courbe de tension, ainsi qu'on l'a vu (page 571) est d'allure rectangulaire, tandis que sa courbe d'intensité est d'allure triangulaire. Aussi présente-t-il un facteur de puissance notablement inférieur à l'unité, ce qui n'implique pourtant aucun décalage entre  $V$  et  $I$ , ainsi que le prouvent les tracés oscillographiques.

Avant que ces courbes fussent aussi bien connues qu'elles le sont aujourd'hui, certains auteurs, les supposant, à tort, sinusoïdales, avaient conclu, à tort aussi, du fait de l'existence, pour l'arc, d'un facteur de puissance inférieur à l'unité, à l'existence d'un décalage entre le courant et la tension, ce qui n'est pas, puisque l'expérience par l'étude directe des courbes montre bien nettement que  $V$  et  $I$  ont les mêmes zéros.



1. En effet, de  $x = 0$  à  $x = \frac{b}{2}$  l'expression de l'ordonnée en fonction de l'abscisse est  $\frac{y}{x} = \frac{h}{\frac{b}{2}}$  ou  $y = \frac{2h}{b} x$ ; on a donc  $y^2 = \frac{4h^2}{b^2} x^2$  et

$$\Sigma y^2 dx = \frac{4h^2}{b^2} \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} x^2 dx = \frac{4h^2}{b^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{2}} = \frac{h^2 b}{6} \text{ et par suite } (y^2)_{\text{moy}} =$$

$$y^2_{\text{eff}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{h^2 b}{6} = \frac{h^2}{3}; \text{ d'où } y_{\text{eff}} = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

L'expression  $\mathbf{W} = \mathbf{VI} \cos \varphi$  de la puissance mise en jeu, dans le cas de grandeurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{I}$  sinusoïdales, en une portion de circuit douée simplement de résistance ohmique et d'inductance, est susceptible de transformations intéressantes.

1. — *Expression de  $\mathbf{W}$  en fonction de la conductance*

Si l'on remarque que  $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$ , on peut écrire  $\mathbf{W} = \mathbf{ZI}^2 \cos \varphi$  et, puisque  $\mathbf{Z} \cos \varphi = \mathbf{R}$ , on a tout simplement

$$\mathbf{W} = \mathbf{RI}^2$$

Mais, en remplaçant  $\mathbf{I}$  par  $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}}$ , il vient

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}^2} \mathbf{V}^2$$

ou, si l'on se rappelle que  $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}^2}$  représente (voir page 313) la conductance  $\mathcal{C}$  de la portion de circuit considérée :

$$\mathbf{W} = \mathcal{C}\mathbf{V}^2$$

En courant continu, la même expression se présente avec cette seule différence qu'alors  $\mathcal{C} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}^2} = \frac{1}{\mathbf{R}}$ , tandis qu'en courant alternatif sinusoïdal  $\mathcal{C} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}^2}$ .

2. — *Expression de  $\mathbf{W}$  en fonction des expressions imaginaires de  $\mathbf{V}$  et de  $\mathbf{I}$*

Si l'on appelle  $\delta$  et  $\chi$  les angles des vecteurs  $\bar{\mathbf{V}}$  et  $\bar{\mathbf{I}}$  avec l'axe  $\text{OX}$ , on a

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}' + j\mathbf{V}'' = \mathbf{V} \cos \delta + j\mathbf{V} \sin \delta$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I}' + j\mathbf{I}'' = \mathbf{I} \cos \chi + j\mathbf{I} \sin \chi$$

et, puisque  $\cos \varphi = \cos \delta \cos \chi + \sin \delta \sin \chi$ , l'expression

$$\mathbf{W} = \mathbf{VI} \cos \varphi = \mathbf{VI} \cos \delta \cos \chi + \mathbf{VI} \sin \delta \sin \chi$$

peut s'écrire

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}'\mathbf{I}' + \mathbf{V}''\mathbf{I}''$$

ce qui, en langage ordinaire signifie que pour avoir  $\mathbf{W}$ , il suffit,

au produit  $V'I'$  des parties réelles de  $V$  et de  $I$ , d'ajouter le produit  $V''I''$  des coefficients de  $j$ .

On peut dire encore que  $W$  est la partie réelle du produit :

$$(V' + jV'')(I' - jI'')$$

ou aussi celle du produit :

$$(V' - jV'')(I' + jI'')$$

d'où la règle suivante (1) :

« Pour avoir la puissance mise en jeu dans un appareil de force électromotrice imaginaire  $E$  traversé par un courant dont l'intensité imaginaire est  $I$ , on changera  $j$  en  $-j$  dans l'une des deux quantités  $E$  ou  $I$  (on choisira celle où le changement entraîne le moins de calculs) ; on fera le produit : la partie réelle de ce produit représentera la puissance cherchée. — En particulier, si l'on prend comme origine des phases la phase de l'une des deux quantités  $E$  ou  $I$ , cette quantité est réelle ; il suffit alors de faire sans aucun changement le produit  $EI$  : la puissance est représentée par la partie réelle de ce produit.



Dans le cas où  $V$  et  $I$  sont des fonctions périodiques non sinusoïdales de la forme

$$V = V_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + V_3 \sin(3\omega t - \alpha_3) + \dots$$

$$I = I_1 \sin(\omega t - \beta_1) + I_3 \sin(3\omega t - \beta_3) + \dots$$

on a, en posant  $\beta_1 - \alpha_1 = \varphi_1$ ,  $\beta_3 - \alpha_3 = \varphi_3$ , ..

$$[VI]_{\text{moy}} = \frac{1}{2} [V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots]$$

D'ailleurs

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [V_1^2 + V_3^2 + \dots]^{\frac{1}{2}}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [I_1^2 + I_3^2 + \dots]^{\frac{1}{2}}$$

1. P. Janet. Sur application des imaginaires au calcul des courants alternatifs.

L'éclairage électrique 18 décembre 1897, p. 329.

$$\mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} [\mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_3^2 + \dots]^{\frac{1}{2}} [\mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_3^2 + \dots]^{\frac{1}{2}}$$

L'expression du facteur de puissance sera donc, dans ce cas :

$$f = \frac{\mathbf{V}_1 \mathbf{I}_1 \cos \varphi_1 + \mathbf{V}_3 \mathbf{I}_3 \cos \varphi_3 + \dots}{\sqrt{\mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_3^2 + \dots} \sqrt{\mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_3^2 + \dots}}$$

On peut en trouver expérimentalement la valeur en demandant les quantités  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_3, \dots, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_3, \dots, \varphi_1, \varphi_3, \dots$  à l'analyse harmonique des courbes représentatives de  $\mathbf{V}$  et de  $\mathbf{I}$  fournies par des oscillographes.

Sur le graphique présentant la décomposition de  $\mathbf{V}$  en ses harmoniques, on peut lire l'intervalle de temps  $\theta_3$  séparant l'instant  $t_3 = \frac{\alpha_3}{3\omega}$  d'un zéro de l'harmonique (3) de l'instant  $t_1 = \frac{\alpha_1}{\omega}$  d'un zéro de la sinusoïde fondamentale, et déduire de

la relation  $\theta_3 = \frac{\frac{\alpha_3}{3} - \alpha_1}{\omega}$  la valeur de  $\frac{\alpha_3}{3} - \alpha_1 = \delta_3$ , d'où  $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 3\delta_3$ , et de même pour les autres harmoniques  $\alpha_5 = 5\alpha_1 + 5\delta_5$ , etc.

Sur le graphique présentant la décomposition de  $\mathbf{I}$ , on obtiendra de même :  $\tau_3 = \frac{\beta_3}{\omega} - \beta_1$ , d'où  $\frac{\beta_3}{3} - \beta_1 = \gamma_3$  et  $\beta_3 = 3\beta_1 + 3\gamma_3$ , etc., d'où les relations

$$\varphi_3 = \beta_3 - \alpha_3 = 3(\beta_1 - \alpha_1) + 3(\gamma_3 - \delta_3) = 3\varphi_1 + 3(\gamma_3 - \delta_3)$$

$$\varphi_5 = \beta_5 - \alpha_5 = 5(\beta_1 - \alpha_1) + 5(\gamma_5 - \delta_5) = 5\varphi_1 + 5(\gamma_5 - \delta_5)$$

etc.

qui, jointes aux suivantes :

$$\text{tg } \varphi_3 = \frac{3L\omega}{R} = 3 \text{tg } \varphi_1$$

$$\text{tg } \varphi_5 = \frac{5L\omega}{R} = 5 \text{tg } \varphi_1$$

permettront de déterminer  $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$ , etc.

Par exemple, pour avoir  $\text{tg } \varphi_1$  on aura à résoudre l'équation:

$$3 \text{tg } \varphi_1 = \text{tg} [3\varphi_1 + 3(\gamma_3 - \delta_3)]$$



Considérons une tension sinusoïdale ayant même valeur efficace qu'une tension périodique quelconque donnée  $\mathbf{V}$ , et une intensité sinusoïdale ayant même valeur efficace que l'intensité  $\mathbf{I}$  correspondante, cette seconde sinusoïde étant décalée relativement à la première d'un angle  $\varphi$  tel que  $\cos \varphi$  soit égal au facteur de puissance  $\mathbf{f}$  de l'appareil présentant la tension  $\mathbf{V}$  et le courant  $\mathbf{I}$ . Un appareil qui présenterait cette tension sinusoïdale et ce courant sinusoïdal affecterait un ampèremètre et un voltmètre indiquant les valeurs efficaces de la même façon que l'appareil donné et mettrait en jeu la même puissance  $\mathbf{W}$ . On pourrait pour toutes les questions concernant  $\mathbf{V}_{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{I}_{\text{eff}}$  et  $\mathbf{W}$  substituer sa considération à celle du premier. C'est ce qu'on fait quand on envisage ce qu'on appelle les **sinusoïdes équivalentes** à une tension et à une intensité périodiques quelconques données, et qu'on représente par des vecteurs les valeurs efficaces observées.

La sinusoïde équivalente à une tension  $\mathbf{V}$  dont on connaît les harmoniques

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \sin(\omega t - \alpha_1) + \mathbf{V}_3 \sin(3\omega t - \alpha_3) + \dots$$

aura pour valeur maxima

$$\sqrt{\mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_3^2 + \dots}$$

et pour expression

$$\sqrt{\mathbf{V}_1^2 + \mathbf{V}_3^2 + \dots} \sin \omega t$$

La sinusoïde équivalente au courant correspondant

$$I = I_1 \sin(\omega t - \beta_1) + I_3 \sin(3\omega t - \beta_3) + \dots$$

aura comme expression :

$$\sqrt{I_1^2 + I_3^2 + \dots} \sin \omega t - \text{angle tg } f)$$



## II

### Courant efficace ou watté et Courant complémentaire ou déwatté

Imaginons qu'à la tension  $\mathbf{v}$  agissant aux bornes d'un appareil à courants alternatifs de facteur de puissance  $\mathbf{f}$  soit associé, au lieu du courant d'alimentation réel  $\mathbf{i}$ , un courant fictif :  $\mathbf{i}_w$  à chaque instant proportionnel à  $\mathbf{v}$ , le facteur de proportionnalité ayant la valeur  $\mathbf{k} = \mathbf{f} \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$ , expression dans laquelle  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{V}$  désignent les valeurs efficaces du courant d'alimentation  $\mathbf{i}$  et de la tension  $\mathbf{v}$ . On aura :

$$(\mathbf{v}\mathbf{i}_w)_{\text{moy}} = \mathbf{k}\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}\mathbf{I}_w$$

or, d'après la valeur admise pour  $\mathbf{k}$ , on a :  $\mathbf{k}\mathbf{V}^2 = \mathbf{f}\mathbf{V}\mathbf{I}$  ;  
donc

$$\mathbf{f}\mathbf{V}\mathbf{I} = \mathbf{W} = \mathbf{V}\mathbf{I}_w$$

Ainsi ce courant  $\mathbf{i}_w$  est tel que le produit de sa valeur efficace  $\mathbf{I}_w$  par la valeur efficace  $\mathbf{V}$  de la tension exprime la puissance moyenne mise en jeu de l'appareil considéré.

Rien n'empêche de concevoir le courant  $\mathbf{i}$  existant dans l'appareil comme la somme algébrique de deux

courants dont l'un serait le courant  $i_w$  que nous venons de considérer et l'autre un courant complémentaire  $i_c$  défini par la condition :

$$i = i_w + i_c$$

Alors on pourra appeler  $i_w$  la partie *efficace* du courant  $i$ .

C'est à ce courant  $i_w$  que beaucoup d'auteurs ont donné jusqu'à présent le nom de **courant watté**, tandis qu'ils donnaient au courant complémentaire  $i_c$  le nom de **courant déwatté**, et le représentaient par le symbole  $i_d$ .

*La somme des carrés des valeurs efficaces  $I_w$  et  $I_d$  du courant watté et du courant déwatté est égale au carré de la valeur efficace du courant  $I$ .*

En effet, de la définition même :  $i_d = i - i_w$  du courant  $i_d$  on déduit :  $i_d^2 = i^2 + i_w^2 - 2ii_w$  et, en prenant les valeurs moyennes des deux membres :  $I_d^2 = I^2 + I_w^2 - 2(ii_w)_{\text{moy}}$ . Or,  $i_w = kv$  et, par suite,  $2(ii_w)_{\text{moy}} = 2k(iv)_{\text{moy}} = 2kW = 2k^2V^2 = 2I_w^2$ ; donc  $I_d^2 = I^2 + I_w^2 - 2I_w^2 = I^2 - I_w^2$ , d'où enfin :

$$I_w^2 + I_d^2 = I^2$$

Il suit de là que la valeur efficace du courant  $I$  peut être représentée (*fig. 503*) par l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont respectivement les valeurs efficaces  $I_w$  et  $I_d$  des courants watté et déwatté.

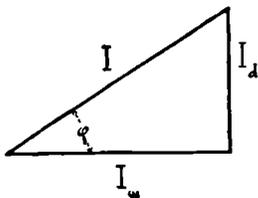


FIG. 503

Puisqu'on a  $VI_w = W = f.VI$ , et, par suite :

$$I_w = f.I$$

il en résulte que dans le triangle rectangle des valeurs

efficaces, l'angle  $\varphi$  compris entre  $\mathbf{I}_w$  et  $\mathbf{I}$  a pour cosinus le facteur de puissance :

$$\cos \varphi = f$$

Ces propositions relatives au courant watté et au courant déwatté et à leurs relations avec  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{I}$  et  $f$  étant générales, conviennent en particulier au cas spécial où  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{i}$  sont des grandeurs sinusoïdales.

Elles sont alors évidentes, puisque si

$$\mathbf{v} = V_0 \sin \omega t$$

$$\mathbf{i} = I_0 \sin (\omega t - \varphi)$$

on a

$$(\mathbf{vi})_{\text{moy}} = \mathbf{VI} \cos \varphi$$

et par conséquent :

$$\mathbf{I}_w = \mathbf{I} \cos \varphi$$

D'ailleurs l'expression de  $\mathbf{i}$  développée donne :

$$\mathbf{i} = I_0 \cos \varphi \sin \omega t - I_0 \sin \varphi \cos \omega t$$

et montre que  $\mathbf{i}$  est la somme algébrique de deux courants dont l'un :  $I_0 \cos \varphi \sin \omega t$ , ayant pour valeur efficace  $\frac{I_0 \cos \varphi}{\sqrt{2}} = \mathbf{I} \cos \varphi$ , n'est autre que  $\mathbf{i}_w$ , et dont l'autre, par conséquent, n'est autre que  $\mathbf{i}_d$  et a pour valeur efficace

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{I} \sin \varphi$$

L'angle  $\varphi$  étant ici (*fig. 504*) l'angle de décalage des vecteurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{I}$ , le courant watté, qui est *en phase* avec  $\mathbf{V}$  est représenté par la projection

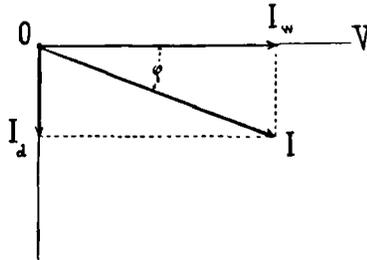


FIG. 504

de  $\mathbf{I}$  sur  $\mathbf{V}$ , et le courant déwatté, qui est *en quadrature* avec  $\mathbf{V}$ , est représenté par la projection de  $\mathbf{I}$  sur la perpendiculaire à  $\mathbf{OV}$ . Aussi alors peut-on dire que le courant watté et le courant déwatté sont des composantes du courant  $\mathbf{I}$ , l'une ( $\mathbf{I}_w$ ) en phase avec la tension, l'autre ( $\mathbf{I}_d$ ) en quadrature avec elle, la puissance correspondante à la première étant égale à  $\mathbf{W}$  et celle correspondante à la seconde étant nulle, ce qu'on peut rappeler, comme l'ont proposé certains auteurs, en appelant la première **composante active** et la seconde **composante réactive**.



Etant donné un appareil à courants alternatifs, si l'on appelle  $\Phi$  le flux d'induction aux variations duquel est due la force électromotrice totale  $\mathbf{E}$  dont cet appareil est le siège, la relation vectorielle

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{E}}$$

ou

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{I}} + \frac{\mathbf{I}}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$$

se traduit graphiquement par le diagramme (*fig. 505*)

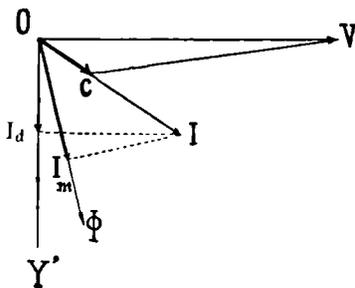


FIG. 505

dans lequel  $\mathbf{OV}$  est le vecteur représentant la différence de potentiel aux bornes,  $\mathbf{OC}$  le vecteur  $\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{I}}$ , en phase avec celui du courant, et  $\mathbf{CV}$  le vecteur  $\frac{\mathbf{I}}{10^8} \frac{d\Phi}{dt}$ , en

phase avec la dérivée du vecteur  $\bar{\Phi}$ . D'après cela, le vecteur représentatif de  $\Phi$  a la direction de la perpendiculaire abaissée de  $\mathbf{O}$  sur  $\mathbf{CV}$ . D'ailleurs cette direction est aussi celle du courant magnétisant  $\mathbf{i}_m$  défini par la

relation  $\Phi = \frac{4}{10} \frac{\pi n^2 \mathbf{i}_m}{\mathcal{R}}$ . Elle fait avec celle de la per-

pendiculaire menée de  $\mathbf{O}$  à  $\mathbf{OV}$ , du même côté, c'est-à-dire avec la direction du courant déwatté, un angle égal à l'angle  $\mathbf{CVO}$  que fait  $\mathbf{CV}$  avec  $\mathbf{OV}$ , angle qui est d'autant moindre que  $\mathbf{OC}$  est plus petit relativement à  $\mathbf{OV}$ .

Or, dans la pratique,  $\mathbf{OC}$ , c'est-à-dire la valeur efficace  $\mathbf{RI}$  de la *chute ohmique de tension* d'un appareil est toujours une petite fraction (1 à 2 p. %) de la valeur efficace de la tension aux bornes ; c'est-à-dire de  $\mathbf{V}$ , il en résulte que, pratiquement, l'angle  $\mathbf{Y'OP}$  étant très voisin de zéro, on peut prendre l'une pour l'autre la composante déwattée et la composante magnétisante du courant  $\mathbf{I}$ , ce qui fait que le courant déwatté est très souvent désigné sous le nom de **courant magnétisant**.

L'énergie électrique mise en jeu par le courant magnétisant ( $\mathbf{i}_m$ ) dans le quart de période pendant lequel ce courant passe de zéro à son maximum  $\mathbf{I}_m \text{ max}$  est

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L (\mathbf{I}_m \text{ max})^2$$

Or  $L = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Phi_{\text{max}}}{(\mathbf{I}_m)_{\text{max}}}$  et  $\frac{\Phi_{\text{max}}}{10^8} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{E}_i)_{\text{max}}$ ; par conséquent  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{\omega} \frac{(\mathbf{E}_i)_{\text{max}} (\mathbf{I}_m)_{\text{max}}}{2} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{E}_i)_{\text{eff}} (\mathbf{I}_m)_{\text{eff}} = \frac{1}{\omega} \cdot \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{I}_m$

Si l'on confond  $E_i$  avec  $V$  et  $I_m$  avec  $I_d$ , on peut écrire

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{\omega} \cdot VI_d = \frac{1}{\omega} \cdot VI \sin \varphi$$

En divisant l'expression de cette énergie par le temps  $\frac{T}{4}$  durant lequel elle est mise en jeu, on obtient l'expression usuelle de ce qu'on appelle la **puissance moyenne magnétisante** mise en jeu dans l'appareil considéré

$$W_m = \frac{2}{\pi} VI_d$$

ou

$$W_m = \frac{2}{\pi} VI \sin \varphi$$

—⊗—>

*M. Boucherot* a énoncé (1), relativement à cette quantité, pour des courants sinusoïdaux, le théorème suivant :

*Dans un réseau de circuits à courants alternatifs, ne comportant ni collecteurs, ni commutateurs tournants, ni résistances variables pendant la période, la somme des puissances magnétisantes est nulle, comme la somme des puissances réelles.*

Que la somme  $\Sigma vi$  des puissances électriques instantanées soit nulle, cela résulte du principe même de la conservation de l'énergie et de la définition de la puissance électrique (page 611).

On a donc

---

1. Congrès international d'Electricité 1900, p. 423.

$$\sum V_o I_o \sin(\omega t + \delta) \sin(\omega t + \delta - \varphi) = 0$$

équation qui se scinde en deux :

$$\sum V_o I_o \sin^2(\omega t + \delta) \cos \varphi = 0$$

et

$$\sum V_o I_o \sin(\omega t + \delta) \cos(\omega t + \delta) \sin \varphi = 0$$

Prenons la valeur moyenne de la première, pour une période (entre  $\omega t + \delta = 0$  et  $\omega t + \delta = 2\pi$ ) et celle de la seconde, pour un quart de période (entre  $\omega t + \delta = 0$  et  $\omega t + \delta = \frac{\pi}{2}$ ) : il vient, d'une part :

$$\sum VI \cos \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \sum W = 0$$

et, d'autre part :

$$\sum \frac{2}{\pi} VI \sin \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \sum W_m = 0$$

Ce qui établit le théorème.

*M. Swyngedauw* a montré (1) que ce théorème pouvait s'étendre à des courants symétriques quelconques, c'est-à-dire à des courants périodiques dont les courbes d'intensité et de tension sont formées de boucles positives identiques aux négatives et symétriques par rapport à l'ordonnée maximum.



Lorsqu'un appareil récepteur donne lieu à un décalage  $\psi$  entre le courant  $I$  qu'il reçoit et la tension  $U$  sous laquelle ce courant lui est fourni (*fig. 506*), l'intensité du courant a une valeur

---

**R. Swyngedauw.** — Sur une généralisation d'un théorème de M. Boucherot. C. R. de l'Ac. des Sc. (15 juin 1903).

plus grande que celle qu'exigerait un appareil de même puissance  $W$  fonctionnant sous la même tension sans décalage.

En effet, pour ce dernier on aurait

$$I' = \frac{W}{U} = I_w = I \cos \psi$$

Relativement à  $I'$ , le courant  $I$  est donc majoré dans le rapport

$$\frac{I}{I'} = \frac{1}{\cos \psi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \sqrt{1 + \left(\frac{I_d}{I_w}\right)^2}$$

rapport qui est d'autant plus grand que la composante déwattée  $I_d$  est plus grande relativement à la composante wattée.



Dans une ligne alimentant un récepteur impliquant une composante déwattée la perte par effet Joule est plus grande que si le récepteur, pour la même puissance, admettait sous la même tension, un courant entièrement watté.

En effet, la perte étant, dans le premier cas

$$RI^2 = R(I_w^2 + I_d^2) = RI_w^2 + RI_d^2$$

serait, dans le second,  $RI_w^2$  seulement.



La chute de tension entre l'origine et l'extrémité d'une ligne alimentant à un récepteur à composante déwattée est plus grande que si ce récepteur mettait en jeu la même puissance sous la même tension sans décalage.

En effet, dans le cas d'un récepteur impliquant entre  $U$  et  $I$  un décalage  $\psi$ , le diagramme de la ligne (voir page 341) est de la forme représentée par la fig. 507, d'où l'on déduit pratiquement :

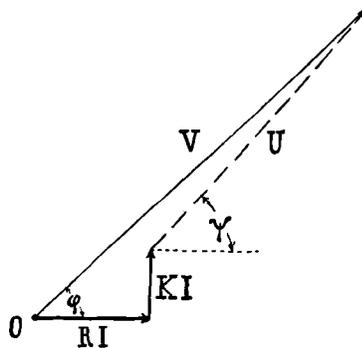


Fig. 507

$$V - U = \text{proj. de } \overline{RI} + \overline{KI} \sin U$$

ou

$$V - U = RI \cos \psi + KI \sin \psi$$

ou enfin

$$V - U = RI_w + KI_d$$

expression dont la valeur est d'autant plus grande, toutes choses égales d'ailleurs, que la composante déwattée  $I_d$  est plus importante.



Le décalage  $\varphi$  entre le courant  $I$  et la tension  $V$  à l'origine de la ligne croît également avec  $\psi$ .

Si l'on jette les yeux sur le diagramme (fig. 508) représentant la relation entre  $V$  et la force électromotrice  $E_1$  de l'appareil générateur du courant  $I$  (appareil dont  $R_1$  et  $K_1$  sont respectivement la résistance et la réactance), on voit que tant que  $\varphi$  est inférieur à l'angle  $\gamma_1$  défini par  $\text{tg } \gamma_1 = \frac{K_1}{R_1}$ , ce qui est le cas de la pratique, la différence  $E_1 - V$  croît avec  $\varphi$ .

Les récepteurs à décalage ont donc l'inconvénient d'exiger, toutes choses égales d'ailleurs, des générateurs dont les forces électromotrices sont plus grandes qu'il ne serait nécessaire en l'absence du décalage.

On peut remédier à cet inconvénient en mettant en parallèle avec des récepteurs à composante déwattée en arrière des appareils à composante déwattée en avant, car alors la composante déwattée de l'ensemble n'est que la différence de celles des deux sortes d'appareils pris séparément.

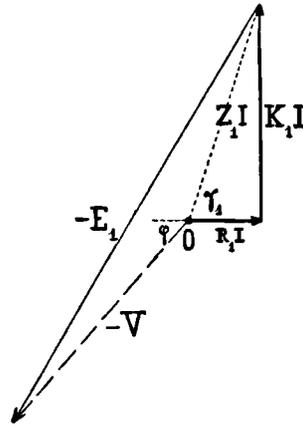


FIG. 508



## SOIXANTIÈME LEÇON



# ELECTRO-ENERGÉTIQUE

\*\*\*\*\*

MESURE DE LA PUISSANCE ÉLECTRIQUE  
(APPAREILS A COURANTS CONTINUS ET A COURANTS ALTERNATIFS  
SIMPLES)  
MÉTHODES FONDÉES SUR L'EMPLOI  
D'AMPÈREMÈTRES ET DE VOLTMÈTRES



Le problème de la détermination expérimentale, à l'aide d'ampèremètres et de voltmètres, de la puissance électrique mise en jeu dans une portion de circuit est des plus simples lorsqu'on a affaire à un courant continu. Aussi convient-il d'examiner tout d'abord ce premier cas avant d'aborder le problème un peu plus complexe qu'offrent les installations à courants alternatifs.



### I

#### Mesures en courants continus

En courants continus, un ampèremètre et un voltmètre d'un type quelconque, admettant dans l'étendue de leurs échelles l'intensité de courant et la différence de potentiel présentées par la portion de circuit à étu-

dier, pourront servir à trouver la puissance mise en jeu.

L'ampèremètre **A** étant monté en série avec cette portion de circuit **MXN** (*fig. 509*), et le voltmètre **V** en dérivation entre ses bornes **M** et **N** on aura pour expression de la puissance relative à l'ensemble **MAXN** formé par l'ampèremètre **A** et l'appareil **X** :

$$W = VI$$

**V** et **I** étant respectivement les volts et les ampères correspondant aux indications du voltmètre et de l'ampèremètre.

Si  $R_A$  est la résistance de ce dernier, la part de puissance qui lui reviendra sera  $R_A I^2$ . On aura donc, en fin de compte, comme afférente à l'appareil **X** considéré, une puissance

$$W_x = VI - R_A I^2$$

Souvent, en pratique, le second terme de cette expression est négligeable devant le premier, et l'on se borne, alors, à écrire :

$$W_x = VI$$

Si l'ampèremètre était placé avant la dérivation formée par le voltmètre, ainsi

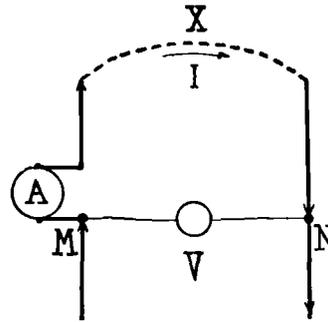


FIG. 509

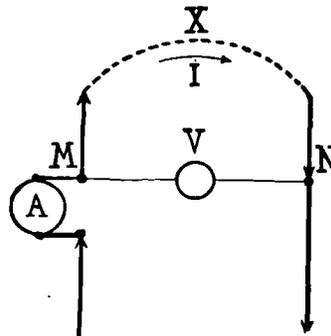


FIG. 510

que l'indique la fig. 510, le produit  $VI$  des données des deux appareils exprimerait la puissance mise en jeu dans l'ensemble formé par l'appareil  $X$  et le voltmètre et l'on devrait en retrancher la puissance  $\frac{V^2}{R_v}$  afférente au voltmètre.

En effet, si  $R_v$  est la résistance du voltmètre, le courant dont cet appareil est le siège est  $i = \frac{V}{R_v}$ ; par suite la puissance correspondante est  $Vi = \frac{V^2}{R_v}$ .

Pour  $V = 100$  et  $R_v > 10000$  ohms, cette puissance est inférieure à 1 watt.

L'erreur relative commise en prenant  $VI$  pour  $W_x$  est, dans le cas du premier montage (fig. 509) :  $\frac{R_v I}{V}$  ; et, dans le cas du deuxième montage (fig. 510) :  $\frac{V}{R_v I}$ . Il suffira donc de connaître les résistances des deux appareils de mesures employés pour pouvoir apprécier, dans chaque cas particulier, le montage le meilleur et pour pouvoir, si on le juge nécessaire, faire la correction convenable.



## II

### Mesures en courants alternatifs

#### A. — Méthode des trois ampèremètres

Soit  $MXN$  (fig. 511) la portion de circuit à étudier et  $MN$  une dérivation *non inductive*, de résistance  $r$  établie entre ses bornes  $M$  et  $N$ .

Soient  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{i}$ , les valeurs, à un instant donné, des courants dans le circuit principal et dans les branches  $\mathbf{MXN}$  et  $\mathbf{MN}$ . Soit  $\mathbf{V}$ , au même instant, la différence de potentiel entre les points  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$ .

La puissance moyenne mise en jeu en  $\mathbf{MXN}$  est

$$\mathbf{W}_{\text{moy}} = (\mathbf{VI})_{\text{moy}}$$

Mais, puisque la dérivation  $\mathbf{MN}$  est sans self, on a  $\mathbf{V} = \mathbf{ri}$  et, par suite :

$$\mathbf{W}_{\text{moy}} = \mathbf{r}(\mathbf{Ii})_{\text{moy}}$$

D'autre part, de la relation :  $\mathbf{J} = \mathbf{I} + \mathbf{i}$  on tire :

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}^2 + \mathbf{i}^2 + 2\mathbf{Ii} \text{ et } (\mathbf{Ii})_{\text{moy}} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{I}^2 - \mathbf{i}^2)_{\text{moy}} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{\text{eff}}^2 - \mathbf{I}_{\text{eff}}^2 - \mathbf{i}_{\text{eff}}^2) \text{ d'où enfin :}$$

$$\mathbf{W}_{\text{moy}} = \frac{\mathbf{r}}{2} (\mathbf{J}_{\text{eff}}^2 - \mathbf{I}_{\text{eff}}^2 - \mathbf{i}_{\text{eff}}^2)$$

Cette formule, due à *Fleming* (1), donne la puissance cherchée, à l'aide de la résistance  $\mathbf{r}$  et des carrés des intensités efficaces accusées par trois ampèremètres à courants alternatifs traversés respectivement par les courants  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{i}$ , ce qui a fait désigner cette méthode d'évaluation de  $\mathbf{W}$  sous le nom de **méthode des trois ampèremètres**.

Cette méthode est très générale car elle est valable

1. — *Fleming*. — *The Measurement of Electric Power given to an inductive circuit* (The Electrician, 8 mai 1891).

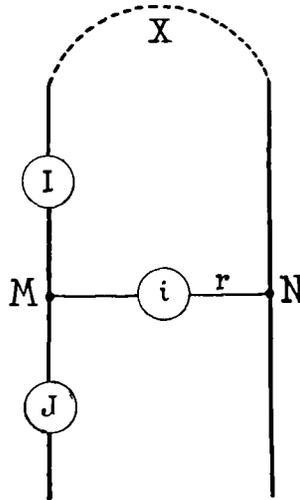


FIG. 511

quelle que soit la forme des courants mis en jeu, pourvu qu'ils soient périodiques.

Elle est applicable aussi aux courants continus.

Dans le cas particulier où les courants  $I$  et  $i$  sont sinusoïdaux, on a  $W_{\text{moy}} = r I_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \varphi$  et une erreur  $dI$  commise sur la mesure de chacun des courants  $I$  et  $i$  conduit pour  $W$  à une erreur  $dW = r (I_{\text{eff}} + i_{\text{eff}}) dI \cos \varphi$  qui est d'autant moindre que la somme  $I_{\text{eff}} + i_{\text{eff}}$  est plus petite. Or cette somme, pour une valeur donnée du produit  $I_{\text{eff}} i_{\text{eff}}$ , est minima quand les deux intensités sont égales. On aura donc intérêt, au point de vue de la précision, à choisir la dérivation  $r$  de façon que les intensités efficaces  $i_{\text{eff}}$  et  $I_{\text{eff}}$  soient égales.

Il en sera sensiblement de même dans le cas général.

Mais pour mettre à profit cette remarque il faut pouvoir disposer d'un courant  $J$  presque double de celui que réclame l'appareil  $X$  à étudier.



Imaginons qu'on remplace les trois ampèremètres appliqués à la mesure des courants  $J$ ,  $I$  et  $i$  par trois résistances  $r'$  égales entre elles, placées dans des calorimètres faisant connaître les quantités de chaleur  $\mathcal{Q}$ ,  $Q$ ,  $q$  que les courants  $y$  dégagent durant un même temps  $t$ . Puisqu'on a  $\mathcal{Q} = Ar'J_{\text{eff}}^2 t$ ,  $Q = Ar'I_{\text{eff}}^2 t$ ,  $q = Ar'i_{\text{eff}}^2 t$ , la quantité :  $(J_{\text{eff}}^2 - I_{\text{eff}}^2 - i_{\text{eff}}^2)$  peut s'exprimer au moyen de  $\mathcal{Q}$ ,  $Q$  et  $q$ , par la formule :  $\frac{\mathcal{Q} - Q - q}{Ar't}$  et, par suite, la puissance  $W$  mise en jeu dans l'appareil  $X$  se déduira des mêmes quantités suivant l'expression

$$W = \frac{r}{2} \frac{\mathcal{Q} - Q - q}{Ar't}$$

dans laquelle  $r$  désigne la valeur totale de la résistance de la dérivation sans self  $MN$ .

Cette variante calorimétrique de la méthode des

trois ampèremètres a été récemment proposée et essayée avec succès par MM. *Ch.-Eug. Guye* et *Alph. Bernoud* (1).



### B. — Méthode des trois voltmètres

Soit, en série avec la portion de circuit **MXN** à étudier (*fig. 512*) une résistance **NP** = *r* non inductive.

Si **V**, **v** et **U** sont, à un instant donné, les valeurs des différences de potentiel entre **M** et **N**, **N** et **P**, **M** et **P**, la valeur, à ce même instant, du cou-

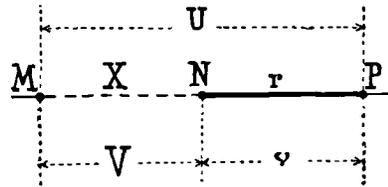


FIG. 512

rant **I** est  $\frac{V}{r}$  et la puissance moyenne mise en jeu en **MXN** a pour expression

$$W_{\text{moy}} = (VI)_{\text{moy}} = \frac{1}{r} (Vv)_{\text{moy}}$$

Mais, puisque **MXN** et **NP** sont contigus, on a, à chaque instant,  $U = V + v$ , par suite :  $U^2 = V^2 + v^2 + 2Vv$  et, en conséquence :  $(Vv)_{\text{moy}} = \frac{1}{2} (U_{\text{eff}}^2 - V_{\text{eff}}^2 - v_{\text{eff}}^2)$  d'où finalement

$$W_{\text{moy}} = \frac{1}{2r} [U_{\text{eff}}^2 - V_{\text{eff}}^2 - v_{\text{eff}}^2]$$

formule donnant la puissance cherchée à l'aide des

1. — *Ch.-Eug. Guye* et *Aph. Bernoud*. — *Sur une nouvelle méthode électrothermique pour mesurer la puissance moyenne des courants de fréquence élevée.*

Archives des Sciences physiques et naturelles. Janvier 1904.

carrés des tensions efficaces accusées par trois voltmètres, ce qui a fait donner à cette méthode, due à MM. *Ayrton et Sumpner*, le nom de **méthode des trois voltmètres**.

Comme dans la méthode des trois ampèremètres, la précision est maxima quand les lectures relatives à l'appareil à étudier et à la résistance sans self sont égales entre elles.

On ne pourra mettre cette remarque à profit que si l'on dispose d'une tension  $U$  sensiblement double de celle que réclame l'appareil à étudier,

Comme la précédente aussi, la méthode des trois voltmètres est très générale et n'implique pas d'autre condition que celle relative au caractère périodique des grandeurs électriques mises en jeu.

#### C. — Méthode des Electrodynamomètres

Il est clair que dans la mise en pratique de la méthode de *Fleming* on pourrait employer comme ampèremètres des électrodynamomètres. Mais si l'on dispose d'appareils de ce genre, une méthode due à *Blakesley* (1) permet d'obtenir la puissance cherchée à l'aide de deux instruments seulement.

Si, dans l'expression

$$W_{\text{moy}} = r(\mathbf{Ii})_{\text{moy}}$$

obtenue ci-dessus (page 705, *fig. 511*) on remplace  $i$  par  $\mathbf{J} - \mathbf{I}$ , on a

$$W_{\text{moy}} = r[\mathbf{I}(\mathbf{J} - \mathbf{I})]_{\text{moy}}$$

ou

$$W_{\text{moy}} = r[(\mathbf{IJ})_{\text{moy}} - (\mathbf{I}^2)_{\text{moy}}].$$

ce qui réduit la recherche de  $\mathbf{W}$  à celle de deux expres-

1. *Philosophical Magazine*, Avril 1891.

sions :  $(\mathbf{I}\mathbf{J})_{\text{moy}}$  et  $(\mathbf{I}^2)_{\text{moy}}$  que peuvent donner deux électrodynamomètres ayant, le premier, sa bobine fixe sur le courant  $\mathbf{J}$  et sa bobine mobile sur le courant  $\mathbf{I}$ , et, le second, ses deux bobines sur le courant  $\mathbf{I}$ .

#### D. — Méthodes électrométriques

Certains voltmètres électrostatiques permettent des mesures de puissance ne faisant intervenir qu'un seul instrument.

Tel est l'électromètre *Curie et Blondlot* formé (fig. 513) d'un système fixe de deux demi-cercles conducteurs isolés  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  au-dessus duquel est suspendu, par un fil de torsion, un équipage mobile constitué par deux demi-cercles conducteurs  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  dont la ligne de séparation est perpendiculaire à celle des premiers.

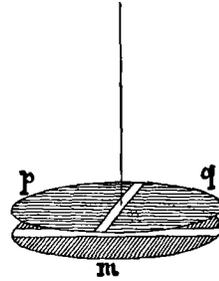


FIG. 513

Si l'on met les bornes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  (fig. 514) d'un appareil  $\mathbf{MXN}$ , dont on veut connaître la puissance électrique, en relation avec

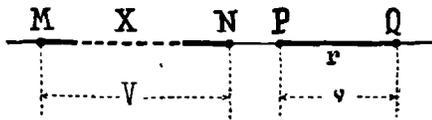


FIG. 514

les demi-cercles fixes  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ , pendant que les demi-cercles mobiles  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  sont reliés aux deux bornes  $\mathbf{PQ}$  d'une résistance  $\mathbf{r}$  non inductive placée en série avec  $\mathbf{MXN}$ , la déviation  $\delta$  de l'électromètre sera proportionnelle à la valeur moyenne du produit des différences de potentiel  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{v}$ . On aura donc

$$(\mathbf{V}\mathbf{v})_{\text{moy}} = \mathbf{h}\delta$$

$\mathbf{h}$  étant un coefficient déterminé par une étude préalable de l'électromètre faite avec des différences de potentiel constantes connues. Or  $(\mathbf{V}\mathbf{v})_{\text{moy}} = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}\mathbf{I})_{\text{moy}} = \mathbf{r}(\mathbf{V}\mathbf{I})_{\text{moy}} = \mathbf{r}\mathbf{W}_{\text{moy}}$ . Donc

$$\mathbf{W}_{\text{moy}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{r}} \delta$$

expression qui fournira la puissance cherchée à l'aide de la seule lecture  $\delta$ .

On peut également tirer parti d'un électromètre à quadrants.

Le mode opératoire imaginé par *M. Potier* (1) consiste à relier les bornes **P** et **Q** de la résistance non inductive  $\mathbf{r}$  (*fig. 514*) aux deux paires de quadrants et à noter les déviations  $\alpha$  et  $\beta$  observées en mettant l'aiguille en relation successivement avec les bornes **M** et **N** de l'appareil **X**. La première déviation est proportionnelle à  $\left[ (\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_q) \left( \mathbf{V}_m - \frac{\mathbf{V}_p + \mathbf{V}_q}{2} \right) \right]_{\text{moy}}$ , la seconde à  $\left[ (\mathbf{V}_p - \mathbf{V}_q) \left( \mathbf{V}_n - \frac{\mathbf{V}_p + \mathbf{V}_q}{2} \right) \right]_{\text{moy}}$ ; leur différence est donc proportionnelle, à la différence de ces deux quantités soit  $(\mathbf{V}\mathbf{v})_{\text{moy}} = (\mathbf{V}\mathbf{r}\mathbf{I})_{\text{moy}} = \mathbf{r}(\mathbf{V}\mathbf{I})_{\text{moy}}$ . On aura donc, en appelant  $\mathbf{h}$  une constante de l'instrument :

$$\mathbf{W}_{\text{moy}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{r}} (\alpha - \beta)$$

La formule :  $(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \left( \mathbf{v} - \frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2}{2} \right) = \mathbf{h}\delta$  reliant les po-

1. Journal de Physique, t. X, (1881), p. 445.

tentiels mis en jeu dans l'électromètre à quadrants à la déviation  $\delta$  de l'aiguille n'étant qu'approximative et valable seulement pour des valeurs médiocres ( $< 200$  volts) de la différence de potentiel  $V_1 - V_2$  établie entre les quadrants, l'application de la méthode de M. Potier est soumise à la même restriction.

*Swinburne* a indiqué un mode opératoire n'exigeant qu'une seule lecture.

Il consiste (*fig. 515*) à relier les quadrants **m**, **n**, **p**, **q** de l'électromètre respectivement aux bornes **M**, **N** de

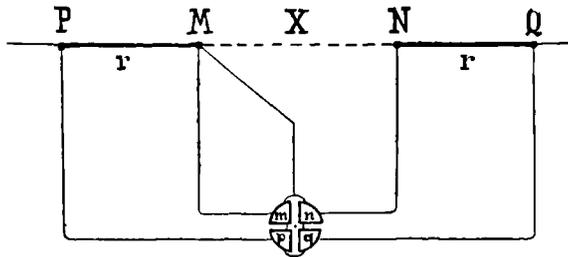


FIG. 515

l'appareil **X** et aux bornes extrêmes **P**, **Q** de deux résistances **r** sans self, égales entre elles, et placées, l'une **PM** immédiatement avant, l'autre **NQ** immédiatement après l'appareil à étudier, l'aiguille étant d'ailleurs reliée au point **M**.

Si, à un instant donné, **V** est la valeur de la différence de potentiel entre **M** et **N**, le couple qui s'exerce, à cet instant entre l'aiguille et le quadrant **n** est proportionnel à  $+V^2$ . Soit **v**, à ce même instant, la différence de potentiel entre **N** et **Q**; elle sera alors  $V + v$  entre **M** et **Q** et, par suite, le couple s'exerçant (en sens contraire du précédent) entre le quadrant **q** et l'aiguille sera proportionnel à  $-(V + v)^2$ . Enfin la différence de potentiel entre **M** et **P** étant au même instant  $-v$ , le

couple s'exerçant entre le quadrant **p** et l'aiguille sera de même sens que le premier et proportionnel à  $v^2$ , de sorte qu'en définitive, le couple total sera proportionnel à  $V^2 + v^2 - (V + v)^2$ , soit à  $Vv$  et par suite à la puissance mise en jeu en **X** à l'instant considéré. La déviation de l'aiguille, proportionnelle au couple moyen, le sera donc aussi à la puissance moyenne cherchée.



Toutes les méthodes envisagées en cette leçon font intervenir des résistances non inductives. Ces résistances s'obtiennent, en pratique, assez facilement à l'aide de faisceaux de lampes à incandescence. Toutefois la difficulté et le coût de telles installations deviennent sérieux lorsqu'on a affaire à des intensités de courants un peu grandes.

Pour connaître ces résistances dans les conditions même de leur emploi, on les met en série avec un ampèremètre sans self et l'on divise par l'indication de cet ampèremètre celle d'un voltmètre placé en dérivation aux bornes de l'ensemble.



# SOIXANTE-UNIÈME LEÇON



## ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE

\*\*\*\*\*

MESURE DE LA PUISSANCE ÉLECTRIQUE  
(APPAREILS A COURANTS CONTINUS ET A COURANTS ALTERNATIFS  
SIMPLES)

MÉTHODE DU WATTMÈTRE



### I

#### Emploi du wattmètre en courants continus

Soit un électrodynamomètre ayant sa bobine fixe **B** (à gros fil) en série (fig. 516) avec la portion de circuit **MXN** à étudier, et sa bobine mobile **b** (à fil fin) additionnée d'une résistance notable **r**, en dérivation aux bornes **M**, **N** de cette portion de circuit. Le courant en **b** étant  $i = \frac{V}{b + r}$ ,

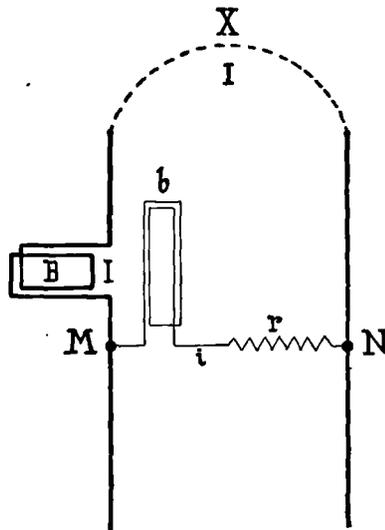


Fig. 516

l'action mutuelle des deux bobines sera proportionnelle à  $\frac{\mathbf{VI}}{\mathbf{b} + \mathbf{r}}$ , et, par suite, à la puissance  $\mathbf{VI}$  mise en jeu en  $\mathbf{MXN}$ .

Si une étude préalable, portant sur des valeurs connues de  $\mathbf{V}$  et de  $\mathbf{I}$ , a fait connaître les valeurs de  $\mathbf{VI}$  correspondant aux divers degrés de torsion du ressort antagoniste maintenant la bobine mobile dans sa position normale, ou bien aux diverses déviations de la bobine mobile, au cas où l'appareil est à lecture directe, l'appareil fera connaître, par le simple relevé de la position d'un index sur une échelle, la puissance mise en jeu dans la portion de circuit à laquelle il sera appliqué.

Aussi donne-t-on, à un électrodynamomètre ainsi employé à la mesure des puissances le nom de **wattmètre**.

En toute rigueur, pour avoir la puissance afférente à l'appareil  $\mathbf{X}$ , il faut retrancher de la puissance indiquée par le wattmètre celle  $\mathbf{BI}^2$  qui correspond à la bobine fixe ( $\mathbf{B}$  désignant la résistance de cette dernière). En omettant cette correction on fait une erreur relative égale à  $\frac{\mathbf{BI}^2}{\mathbf{VI}} = \frac{\mathbf{BI}}{\mathbf{V}}$ , d'autant moindre que le courant  $\mathbf{I}$  d'alimentation de l'appareil  $\mathbf{X}$  est plus faible et sa tension  $\mathbf{V}$  plus élevée.

Lorsqu'on a affaire à un fort courant et à une faible tension, il peut y avoir avantage à disposer, comme l'indique la fig. 517, la bobine  $\mathbf{B}$  avant le point  $\mathbf{M}$ . Il faut alors retrancher de la puissance indiquée par le

wattmètre celle  $V_i = \frac{V^2}{b+r}$  qui est absorbée par le

circuit à fil fin et l'erreur relative provenant de l'omission de cette correction est

$$\frac{V_i}{V(I+i)} = \frac{i}{I+i}$$

Entre la déviation  $\delta$  de l'index du wattmètre et la valeur correspondante de  $V_i$  existe une relation de proportionnalité.

$$V_i = h\delta$$

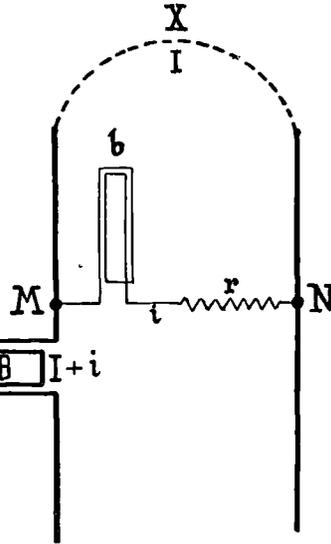


FIG. 517

En effet, l'expression du couple électrodynamique étant  $kIi = k \frac{VI}{b+r}$ , et celle du couple de torsion antagoniste  $C_1\delta$ , on a, d'après leur relation d'équilibre, l'équation :  $k \frac{VI}{b+r} = C_1\delta$ , d'où  $V_i = \frac{C_1(b+r)}{k} \delta$ .

Le coefficient  $h = \frac{C_1(b+r)}{k}$ , par lequel il faut multiplier la lecture faite  $\delta$  pour avoir  $V_i$  se nomme la **constante du wattmètre**.

Sa valeur est donnée empiriquement par un étalonnage effectué avec une valeur connue de  $V_i$ . A cet effet, il n'est pas nécessaire de mettre en jeu la puissance  $V_i$ . Il suffit d'établir dans la bobine à gros fil **B**

le courant  $\mathbf{I}$ , à l'aide d'une batterie d'accumulateurs à faible tension et, de soumettre la bobine à fil fin  $\mathbf{b}$  à l'action d'une autre batterie de tension suffisante pour que le courant  $y$  présente la même valeur  $\mathbf{i}$  que celle qui résulterait de l'application d'une tension  $\mathbf{V}$  à l'ensemble  $\mathbf{b} + \mathbf{r}$ . L'appareil est alors dans le même état que s'il était appliqué, suivant le montage représenté par la fig. 516, à un récepteur admettant un courant  $\mathbf{I}$  sous une tension  $\mathbf{V}$ . La lecture faite  $\delta$  sera donc celle devant correspondre dans l'usage normal de l'appareil à une puissance de  $\mathbf{VI}$  watts, et il en résulte pour la signification d'une division, c'est-à-dire pour la constante de l'appareil la valeur  $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{VI}}{\delta}$ .

Il est bon de faire cette détermination pour diverses valeurs de  $\delta$  et d'en représenter graphiquement les résultats en portant en abscisses les valeurs de  $\delta$  et en ordonnées les valeurs correspondantes de  $\mathbf{h}$ . Si le couple de torsion est bien proportionnel à  $\delta$  et si les résistances  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{r}$  sont bien invariables, la ligne représentative de  $\mathbf{h}$  doit être une droite parallèle à l'axe des  $\delta$ .

Dans les wattmètres actuels les plus perfectionnés, la lecture est directe, c'est-à-dire porte sur des déviations de la bobine mobile ; ces déviations sont proportionnelles aux puissances, et, grâce à un amortisseur convenable, sont atteintes par l'équipage sans oscillations, ce qui rend les lectures à la fois rapides et faciles ; la dépense d'énergie dans les bobines est très minime ; enfin les résistances  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{r}$ , par un choix

convenable du métal qui les constitue (manganine ou platinoïd) sont indépendantes des variations de températures, ce qui assure à  $h$  une constance parfaite.

En vertu de la relation entre  $h$  et  $r$  on peut, en donnant à cette résistance additionnelle  $r$  différentes valeurs, obtenir pour  $h$  différentes valeurs et, par conséquent, étendre plus ou moins l'échelle d'un même instrument. Les wattmètres usuels sont généralement accompagnés, à cet effet, d'un jeu de résistances additionnelles.

Soit  $h_0$  la valeur de la constante pour  $r = 0$ , et  $h$  sa valeur pour une valeur  $r$  de la résistance additionnelle ; des expressions  $h_0 = \frac{C_1 b}{k}$  et  $h = \frac{C_1 (b + r)}{k}$ , résulte la relation :

$$h = h_0 \left( 1 + \frac{r}{b} \right)$$

dont on fera usage pour calculer la constante  $h$  à employer avec chaque résistance additionnelle  $r$  mise en jeu.

On peut aussi changer la constante dans le rapport de **1** à **2** en constituant la bobine fixe de deux parties qui peuvent être associées soit en série, soit en parallèle. Ce changement fait varier  $k$  dans le rapport de **2** à **1**.



Il importe de faire attention à la place donnée à la résistance additionnelle. Sa position normale est entre  $b$  et  $N$ , comme l'indique la fig. 516.

Si on la plaçait par mégarde entre  $M$  et  $b$ , il y aurait entre les deux bobines  $B$  et  $b$  une différence de potentiel de l'ordre de  $V$ ,

qui, en cas de valeur élevée de cette dernière, pourrait occasionner entre les bobines une décharge dangereuse pour les fils ou leurs enveloppes.

Avec la première disposition, cet accident n'est pas à craindre, car les deux bobines y sont très sensiblement au même potentiel, quelque grande que soit la différence  $V_M - V_N = V$ .



Toutes les fois qu'on se sert en courants continus d'un wattmètre à torsion, soit pour l'étalonner, soit pour lui demander une mesure de puissance, il faut avoir soin de l'orienter de façon que le champ terrestre n'ait aucune action déviante sur la bobine mobile, afin que le couple antagoniste maintenant la bobine au zéro représente uniquement l'effet de la bobine fixe. Il faut, pour cela, que le champ terrestre soit parallèle au champ de la bobine mobile. Expérimentalement on reconnaît qu'il en est ainsi lorsque faisant passer un courant dans la bobine mobile seule on constate que cette bobine n'a aucune tendance à quitter sa position normale de repos.

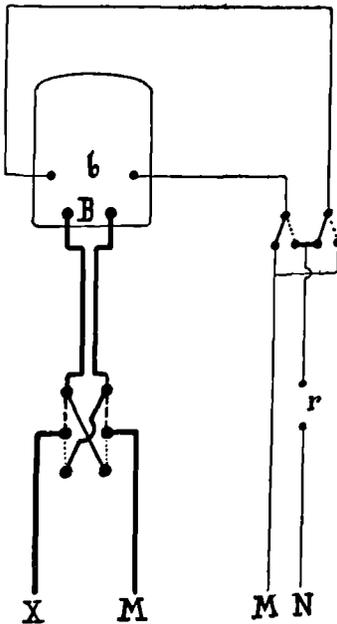


FIG. 518

Lorsqu'on ne peut prendre cette précaution, et il est clair qu'elle n'est pas de mise dans les wattmètres à lecture directe, il faut changer, à l'aide d'inverseurs, les sens des courants dans les deux bobines **B** et **b** à la fois, et faire deux lectures, l'une avant, l'autre après l'inversion, et en prendre la moyenne. Dans ces conditions, le couple dû au champ terrestre s'inverse tandis que celui qui correspond à l'action mutuelle des deux bobines ne change pas de sens. L'erreur étant additive dans un cas et soustractive dans l'autre se trouve éliminée par la moyenne des deux lectures.

La figure 518 donne le schéma du montage à l'aide duquel

cette manœuvre est effectuée dans l'emploi du wattmètre de précision *Siemens et Halske*.

Les extrémités du circuit de la bobine **b** sont attachées aux points marqués **MN** sur les fig. 516 et 517 et la bobine **B** reçoit le courant **I** ou le courant  $I + i$  comme l'indiquent les mêmes figures.

Les conducteurs amenant à l'appareil le courant  $I + i$  doivent être tordus ensemble ou au moins rapprochés l'un de l'autre le plus possible, de façon à rendre négligeable l'effet perturbateur de leur champ magnétique; et, pour la même raison on doit éviter de placer l'instrument à proximité d'appareils ou de canalisations donnant lieu à des champs magnétiques sensibles.

Dans la plupart des wattmètres, la bobine fixe (à gros fil) est composée de deux parties **B'** et **B''** qu'on peut, à volonté, associer en série ou en parallèle. Ainsi dans le wattmètre de précision de l'*Allgemeine Electricitäts Gesellschaft*, dont la fig. 519 représente schématiquement les connexions, on met **B'** et **B''** en série par une fiche placée dans l'encoche 1, tandis qu'on les met en parallèle si l'on place des fiches dans les encoches 2 et 2.

Si  $n_1$  est le nombre des spires d'une des moitiés **B'** ou **B''** de la bobine **B**, quand ces deux demi-bobines sont associées en série et traversées, par conséquent, l'une et l'autre par le courant **I**, le nombre des ampères-tours réglant l'intensité du champ par lequel la bobine **B** agit sur **b** est  $n_1 I + n_1 I = 2n_1 I$ ; tandis que lorsque les deux demi-bobines sont associées en parallèle, et ne reçoivent, par conséquent, chacune que la moitié du courant extérieur **I**, le nombre des ampères-tours totaux de la bobine **B**

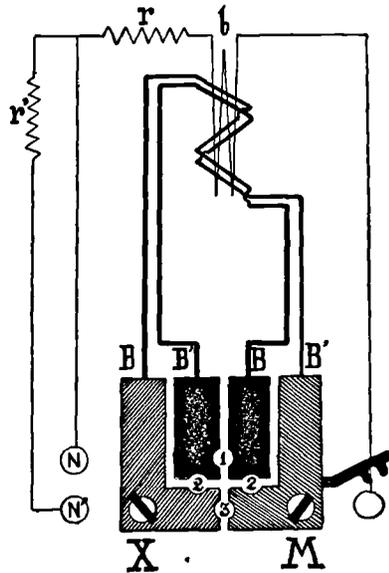


FIG. 519

est  $n_1 \frac{I}{2} + n_1 \frac{I}{2} = n_1 I$ . Toutes choses égales d'ailleurs, l'action de **B** sur **b** est alors moitié moindre qu'avec le premier montage et le coefficient par lequel il faut multiplier une déviation lue pour avoir la puissance correspondante est double de ce qu'il est dans le premier cas.

En résumé, si la constante du wattmètre est **K** avec le premier montage (en série), elle est **2K** avec le second (en parallèle). On porte ainsi du simple au double l'étendue de l'échelle de l'instrument.

Une fiche dans l'encoche **3** met **B'** et **B''** en court-circuit, ce qui équivaut à la mise de l'instrument hors-circuit.



## II

### Emploi du wattmètre en courants alternatifs simples

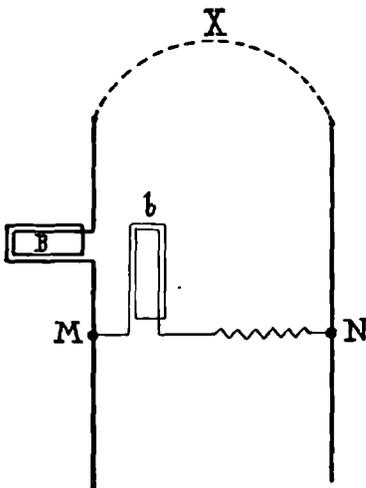


FIG. 520

Considérons un wattmètre appliqué (fig. 520) à une portion de circuit à courant alternatif comme il le serait si cette portion de circuit était le siège d'un courant continu. Si la fréquence du courant alternatif est de l'ordre de celles usitées dans la pratique industrielle, le couple

**C** d'action mutuelle des bobines présente une fréquence double, d'ordre par conséquent assez élevé pour que l'appareil donne une indication  $\delta$  qui est la même que celle qu'il présenterait sous l'action d'un couple continu de valeur égale à la valeur moyenne  $C_{\text{moy}}$  du couple variable **C**.

Si  $C_1$  est la valeur du couple pour  $\delta = 1$ , on a

$$C_{\text{moy}} = C_1 \delta$$

Il s'agit de voir quelle relation existe entre ce couple moyen, objet immédiat de l'observation, et la puissance moyenne  $W_{\text{moy}} = (VI)_{\text{moy}}$  mise en jeu dans la portion de circuit **MXN** à laquelle est appliqué l'instrument.

La relation en question est très simple, quelle que soit la forme des courants alternatifs mis en jeu, si la partie à fil fin du wattmètre a une réactance négligeable. Elle est moins simple, mais toutefois calculable pour des courants sinusoïdaux, lorsque le circuit à fil fin a une réactance sensible. Elle est trop complexe enfin pour être exprimée utilement lorsque le courant à fil fin a une réactance sensible et que les courants mis en jeu diffèrent notablement de la forme sinusoïdale.

Considérons donc tout d'abord le cas où le circuit à fil fin (formé de la bobine mobile **b** et de la résistance additionnelle **r**) a une réactance négligeable.

Le courant **i** dans la bobine **b** est alors à chaque instant en relation de proportionnalité avec **V** et l'on a :

$$C_{\text{moy}} = C_1 \delta = k (Ii)_{\text{moy}} = \frac{k}{b + r} (VI)_{\text{moy}}$$

d'où

$$W_{\text{moy}} = \frac{C_1 (b + r)}{k} \delta = h\delta$$

relation signifiant que l'on a alors la valeur de la puissance moyenne mise en jeu en  $MXN$  en traitant la lecture  $\delta$  faite au wattmètre comme on le ferait s'il s'agissait d'une opération effectuée en courant continu.

Si l'on appelle **puissance indiquée** ( $W_i$ ) la puissance calculée à l'aide de la lecture  $\delta$  faite au wattmètre traitée comme en courant continu, ce résultat peut être exprimé en disant que, *quelle que soit la forme du courant alternatif mis en jeu, si le circuit à fil fin du wattmètre est pratiquement dépourvu de réactance, la puissance mise en jeu dans une portion de circuit à l'étude de laquelle est appliqué le wattmètre, est égale à la puissance indiquée, ce qu'exprime la formule :*

$$W = W_i$$



Il n'en est plus ainsi lorsque le circuit à fil fin a une réactance sensible. Alors, en effet, il n'y a plus proportionnalité entre  $i$  et  $V$ , ni par conséquent entre  $C = kiI$  et  $VI$ , ni enfin entre  $C_{\text{moy}} = C_1 \delta$  et  $W_{\text{moy}} = (VI)_{\text{moy}}$ .

Étudions la question dans le cas de courants sinusoïdaux.

On a alors  $k(iI)_{\text{moy}} = k i_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\psi - \varphi)$  en désignant par  $\psi$  et  $\varphi$  les décalages respectifs de  $\tilde{i}$  et  $\tilde{I}$  sur  $\tilde{V}$ . Par conséquent

$$C_1 \delta = k i_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\psi - \varphi)$$

Or, en appelant  $\mathbf{z}$  l'impédance de la branche à fil fin, on a  $\mathbf{V}_{\text{eff}} = \mathbf{z}\mathbf{i}_{\text{eff}}$  et  $\mathbf{i}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{eff}}}{\mathbf{z}}$ . Donc

$$\mathbf{C}_1\delta = \mathbf{k} \frac{\mathbf{V}_{\text{eff}}\mathbf{I}_{\text{eff}} \cos(\varphi - \psi)}{\mathbf{z}}$$

et, en faisant apparaître  $\cos \varphi$  en facteur :

$$\mathbf{C}_1\delta = \frac{\mathbf{k}\mathbf{V}_{\text{eff}}\mathbf{I}_{\text{eff}} \cos \varphi [\cos \psi + \sin \psi \operatorname{tg} \varphi]}{\mathbf{z}}$$

Mais  $\mathbf{V}_{\text{eff}}\mathbf{I}_{\text{eff}} \cos \varphi$  n'est autre que l'expression de la puissance moyenne  $\mathbf{W}$  mise en jeu en  $\mathbf{MXN}$ . On peut donc écrire

$$\mathbf{C}_1\delta = \frac{\mathbf{k}\mathbf{W} [\cos \psi + \sin \psi \operatorname{tg} \varphi]}{\mathbf{z}}$$

ou, si l'on remarque que  $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{r}}{\cos \psi}$

$$\mathbf{C}_1\delta = \frac{\mathbf{k}\mathbf{W} \cos^2 \psi [1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi]}{\mathbf{b} + \mathbf{r}}$$

ou, encore en remplaçant  $\cos^2 \psi$  par  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}$

$$\mathbf{C}_1\delta = \frac{\mathbf{k}\mathbf{W}}{\mathbf{b} + \mathbf{r}} \frac{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}$$

De là on déduit

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{C}_1(\mathbf{b} + \mathbf{r})\delta}{\mathbf{k}} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi}$$

et, enfin, en remarquant que  $\frac{\mathbf{C}_1(\mathbf{b} + \mathbf{r})\delta}{\mathbf{k}}$  est la puissance indiquée  $\mathbf{W}_i$  :

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_i \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi}$$

Cette formule, en langage ordinaire, signifie que, dans le cas de courants sinusoïdaux, la puissance  $\mathbf{W}$  mise en jeu dans un appareil donné est égale à la puissance indiquée  $\mathbf{W}_i$  multipliée par le facteur :

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi}$$

Ce facteur, appelé **facteur de correction du wattmètre**, dépend des décalages  $\psi$  et  $\varphi$  que les courants  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{I}$  présentent par rapport à la tension  $\mathbf{V}$  entre les points  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$ .

En remplaçant  $\operatorname{tg} \psi$  et  $\operatorname{tg} \varphi$  respectivement par  $\frac{\sin \psi}{\cos \psi}$  et  $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ , on peut, comme certains auteurs, mettre ce facteur sous la forme :

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \psi \cos(\psi - \varphi)}$$

—⊗→

L'étude de ce facteur, sous l'une ou l'autre forme, donne lieu à la série des remarques suivantes :

Pour  $\varphi = 0$ , c'est-à-dire dans le cas où l'on a affaire à un appareil  $\mathbf{X}$  sans réactance, le facteur de correction du wattmètre se réduit à

$$1 + \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{1}{\cos^2 \psi}$$

et peut être déduit de la mesure de la self  $\mathbf{l}$  de la bobine à fil fin, d'après la relation  $\operatorname{tg} \psi = \frac{\mathbf{l}\omega}{\mathbf{b} + \mathbf{r}}$ .

Pour  $\varphi < \psi$ , c'est-à-dire dans le cas d'un appareil  $\mathbf{X}$

dont la réactance est moindre que celle du circuit à fil fin, le facteur de correction du wattmètre est plus grand que l'unité.

Pour  $\varphi = \psi$ , c'est-à-dire dans le cas d'un appareil **X** dont la réactance est égale à celle du circuit à fil fin, le facteur de correction du wattmètre est égal à l'unité.

Pour  $\varphi > \psi$ , c'est-à-dire dans le cas d'un appareil **X** dont la réactance est supérieure à celle du circuit à fil fin, le facteur de correction du wattmètre est inférieur à l'unité.

Si l'on voulait calculer en toute rigueur le facteur de correction dans le cas général, il faudrait joindre à la détermination de  $\psi$  qui est relativement facile et peut se faire une fois pour toutes, celle de  $\varphi$  qui serait spéciale à chaque cas, puisqu'elle dépend de l'appareil **X**, et ne laisserait pas que d'être longue et difficile, car elle devrait être fondée sur des relevés oscillographiques. Elle rendrait d'ailleurs inutile l'emploi du wattmètre, car si l'on connaissait  $\varphi$ , il serait plus simple de calculer **W** en multipliant par  $\cos \varphi$  la puissance apparente  $\mathbf{W}_a = \mathbf{VI}$ .

Le wattmètre n'est donc avantageux que s'il se trouve dans des conditions grâce auxquelles l'estimation du facteur de correction peut se faire d'une façon suffisamment approchée sans exiger la connaissance de  $\varphi$ .

Il en est ainsi pour de très petites valeurs de  $\operatorname{tg} \psi$ , qui permettent de donner au facteur de correction

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi}, \text{ l'expression approchée :}$$

$$1 - \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi$$

en négligeant  $\operatorname{tg}^2 \psi$  devant l'unité au numérateur et en effectuant d'une façon abrégée le quotient  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi}$ , ce qui est permis si le produit  $\operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi$  est suffisamment petit, et ce qui exclut les cas où  $\varphi$  serait voisin de  $\frac{\pi}{2}$ .

Avec cette expression simplifiée du facteur de correction on a  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_i (1 - \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi) = \mathbf{W}_i - \frac{\mathbf{W}_i \sin \varphi}{\cos \varphi} \operatorname{tg} \psi$ , et si l'on remplace, comme première approximation,  $\cos \varphi$  par  $\frac{\mathbf{W}_i}{\mathbf{W}_a}$ , alors que sa valeur exacte est  $\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{W}_a}$ , on a

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_i - \mathbf{W}_a \sin \varphi \operatorname{tg} \psi$$

et, en remplaçant  $\sin \varphi$  par  $\pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \pm \frac{\sqrt{\mathbf{W}_a^2 - \mathbf{W}_i^2}}{\mathbf{W}_a}$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_i \pm \operatorname{tg} \psi \sqrt{\mathbf{W}_a^2 - \mathbf{W}_i^2}$$

A l'aide de cette formule qui, d'après son origine même, n'est valable que dans les cas où le décalage  $\varphi$  n'est pas très grand, on aura la puissance  $\mathbf{W}$  à l'aide de la puissance indiquée  $\mathbf{W}_i = \frac{\mathbf{C}_i (\mathbf{b} + \mathbf{r}) \delta}{\mathbf{k}}$ , de la puissance apparente  $\mathbf{W}_a = \mathbf{VI}$  et de  $\operatorname{tg} \psi = \frac{l \omega}{\mathbf{b} + \mathbf{r}}$ .

On prendra dans cette formule le signe — dans les cas où  $\varphi$  sera positif, c'est-à-dire quand on aura affaire à un appareil  $\mathbf{X}$  dans lequel le courant  $\mathbf{I}$  sera en *retard* sur la tension  $\mathbf{V}$ , et le signe + dans le cas contraire.



Une autre méthode, récemment indiquée par *Beattie* (1) consiste à noter les puissances  $W_i'$  et  $W_i''$  indiquées par le wattmètre 1° quand on insère dans le circuit à fil fin une bobine additionnelle sans self, de résistance égale à celle de la bobine mobile; 2° quand on remplace cette bobine additionnelle par une autre identique, en self et en résistance, à la bobine mobile. En négligeant  $\text{tg}^2\psi$  devant l'unité, on a, dans le premier cas

$$W_i' = W(1 + \text{tg}\psi' \text{tg}\varphi)$$

et, dans le second :

$$W_i'' = W(1 + 2 \text{tg}\psi' \text{tg}\varphi)$$

Multipliant la première égalité par 2 et en retranchant la seconde, on élimine  $\text{tg}\varphi$  et on obtient :

$$W = 2W_i' - W_i''$$

—⊗→

En partant de la seconde forme du facteur de correction et par conséquent de la relation

$$W = W_i \frac{\cos\varphi}{\cos\psi \cos(\psi - \varphi)}$$

et remarquant que  $\frac{W}{\cos\varphi} = W_a$ , on a successivement :

$$W_i = W_a \cos\psi \cos(\psi - \varphi) - W \cos^2\psi + W_a \sin\varphi \sin\psi \cos\psi$$

$$W = \frac{W_i}{\cos^2\psi} - W_a \sin\varphi \text{tg}\psi \\ = W_i(1 + \text{tg}^2\psi) - W_a \sin\varphi \text{tg}\psi$$

et, dans le cas où  $\text{tg}^2\psi$  serait négligeable devant l'unité :

1. *Industrie électrique*, 1902, p. 133.

$$W = W_i - \frac{l\omega}{b+r} W_a \sin \varphi$$

Pour les grands décalages,  $\sin \varphi$  est voisin de  $\pm 1$  et la formule devient alors (1)

$$W = W_i \mp \frac{l\omega}{b+r} W_a$$

le signe  $-$  convenant aux cas où la réactance de l'appareil  $X$  est positive ( $\varphi$  positif,  $I$  en retard sur  $V$ ) et le signe  $+$ , au cas contraire.



Si, avec *M. Blondel* (2), de la relation :

$$W_i = W_a \cos \psi \cos(\varphi - \psi)$$

transformée en équation du second degré par rapport à  $\cos \varphi$ , on tire :

$$\cos \varphi = \frac{W_i}{W_a} \mp \sin \psi \sqrt{1 - \left(\frac{W_i}{W_a \cos \psi}\right)^2}$$

et par suite :

$$W_a \cos \varphi = W = W_i \mp W_a \sin \psi \sqrt{1 - \left(\frac{W_i}{W_a \cos \psi}\right)^2}$$

on obtient une formule tout à fait générale qui n'exige que la connaissance de  $\psi$ , et qui, lorsque  $\psi$  est assez petit pour que  $\cos \psi$  puisse être pris égal à l'unité, offre la forme simple :

$$W = W_i \mp \sin \psi \sqrt{W_a^2 - W_i^2}$$

le signe  $-$  convenant au cas où  $\varphi$  est supérieur à  $\psi$  et le signe  $+$  au cas contraire, puisqu'on sait que

1. *Drysdale*. *The Electrician*, 15 mars 1901.

2. *Blondel*. *Industrie électrique*, 1901, p. 148.

$W$  est, dans le premier cas, inférieur à  $W_i$  et, dans le second cas, supérieur.

$\cos \varphi$  s'obtiendra en divisant l'expression de  $W$  par  $W_a$ , ce qui donnera

$$\cos \varphi = \frac{W_i}{W_a} \mp \sin \psi \sqrt{1 - \left(\frac{W_i}{W_a}\right)^2}$$

→⊗←

Le premier soin du possesseur d'un wattmètre destiné à des mesures de puissances en courants alternatifs pratiquement sinusoïdaux doit, d'après ce qui précède, être la recherche de la valeur numérique de  $\sin \psi$  ou de  $\operatorname{tg} \psi$  en vue de l'application, s'il y a lieu, des formules de correction.

La valeur de  $\sin \psi$  se déduit aisément de celle de  $\operatorname{tg} \psi$ . C'est donc cette dernière qui doit être l'objet de cette étude préalable.

La réactance du circuit à fil fin ne peut pas se conclure de la seule estimation de la self de la bobine  $b$ , car elle dépend à la fois de l'inductance  $L\omega$  de cette bobine et de sa capacité ainsi que de celle de la bobine sans self qui constitue la résistance additionnelle  $r$ . Il faut donc déterminer cette réactance expérimentalement et cela pour chacun des groupes  $b + r$  correspondant aux diverses sensibilités du wattmètre.

Lorsque  $\operatorname{tg} \psi$  est de l'ordre de **0,0001** le facteur de correction  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi}$  reste pratiquement égal à **1** pour toutes les valeurs de  $\cos \varphi$  supérieures à **0,1**, c'est-à-dire dans tous les cas usuels.

Lorsque  $\operatorname{tg} \psi$  est de l'ordre de **0,01** le facteur de correction est de l'ordre de **0,97** pour  $\cos \varphi = 0,3$  et de **0,9** pour  $\cos \varphi = 0,1$ , Son omission entraînerait donc dans ces cas des erreurs importantes.

Si  $\psi$  est négatif, le facteur de correction est supérieur à l'unité quel que soit  $\varphi$  (à moins que  $\varphi$  ne soit lui-même négatif).

On trouve maintenant de bons wattmètres industriels dans lesquels  $\operatorname{tg} \psi$  est de l'ordre de  $\frac{1}{400}$  et les wattmètres à miroir employés dans les laboratoires s'accrochent en raison de leur

sensibilité de bobines **b** d'assez faibles selfs pour que  $\operatorname{tg} \psi$  soit de l'ordre de **0,0001**, et la correction par conséquent négligeable.



Si un wattmètre pour courants alternatifs présentait des masses métalliques un peu importantes, ces masses seraient le siège d'une dissipation de puissance en raison des courants de Foucault qui y seraient induits, et cette puissance parasite serait impliquée dans l'indication du wattmètre, sans qu'il fût possible à l'opérateur de l'estimer en vue de la déduire du total et d'obtenir la puissance imputable au seul appareil **X** à étudier. Il importe donc de ne faire entrer dans la constitution de l'instrument, en dehors des bobines, que des matières non conductrices et, par surcroît de précaution, d'entailler les bandes de cuivre constituant la bobine **B** de façon à y rendre les courants de Foucault pratiquement négligeables.



Etant donné un électrodynamomètre dont la bobine fixe **B** est divisée en deux parties indépendantes **B'** et **B''**, et dont la bobine mobile **b** est capable de recevoir le courant **I** d'alimentation de l'appareil **X** à étudier, on peut en faire un wattmètre en effectuant le montage suivant :

Mise en série de **B''** et de **b** avec **X**; établissement en dérivation aux bornes **M** et **N** de cet ensemble d'une résistance *non inductive* **r**; admission en **B'** du courant  $\mathbf{J} = \mathbf{I} + \mathbf{i}$ , avant sa bifurcation en **M** entre **MB''bX** et **MN**, le sens de parcours de **B'** par ce cou-

rant étant choisi de telle façon qu'il y ait opposition entre les actions de  $\mathbf{B}'$  et de  $\mathbf{B}''$  sur  $\mathbf{b}$ .

Dans ces conditions on aura pour valeur instantanée  $\mathbf{C}$  du couple exercé par  $\mathbf{B}$  sur  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{C} = h(\mathbf{J} - \mathbf{I}) \mathbf{I}$$

Or  $\mathbf{J} - \mathbf{I} = \mathbf{i} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{r}}$ , en désignant par  $\mathbf{V}$  la différence de potentiel aux bornes de  $\mathbf{r}$ , c'est-à-dire entre les points  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$ . Donc

$$\mathbf{C} = h \frac{\mathbf{VI}}{\mathbf{r}}$$

et

$$[\mathbf{C}]_{\text{moy}} = h \frac{[\mathbf{VI}]_{\text{moy}}}{\mathbf{r}} = k\delta$$

Or si  $\mathbf{W}$  désigne la puissance moyenne mise en jeu par le courant  $\mathbf{I}$  entre les points  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$ , on aura

$$\mathbf{W} = \frac{[\mathbf{C}]_{\text{moy}} \mathbf{r}}{h} = \frac{k\mathbf{r}\delta}{h}$$

Cette formule est tout à fait indépendante de la loi de variation de  $\mathbf{I}$  et de  $\mathbf{V}$ .

Pour avoir la puissance mise en jeu dans l'appareil  $\mathbf{X}$ , on n'aura qu'à défalquer de  $\mathbf{W}$  la puissance mise en jeu dans les bobines  $\mathbf{B}''$  et  $\mathbf{b}$ .

On déterminera la valeur de  $\frac{k}{h}$  dans une opération faite en courant continu, en mesurant  $\mathbf{W}$  à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre.

Cette ingénieuse transformation d'un électrodynamomètre en wattmètre est due à *Eboral* (1).

1. **J. Perry**. Industrie électrique (1895) p. 419.



## SOIXANTE-DEUXIÈME LEÇON



# ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE

\*\*\*\*\*

## MESURE DE LA PUISSANCE ÉLECTRIQUE

(APPAREILS A COURANTS TRIPHASÉS)



### I

#### Puissance moyenne totale

Si **A**, **B**, **C**, (*fig. 521*) sont les trois boîtes d'un appareil triphasé quelconque : si  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  sont les

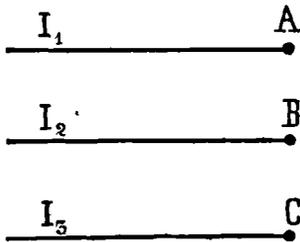


FIG. 521

valeurs algébriques instantanées des intensités des courants dans les fils qui y aboutissent (valeurs comptées positivement vers l'extérieur), on a vu (page 681) que l'expression de la puissance électrique instantanée émise ou consommée par l'appareil est

$$W = V_A I_1 + V_B I_2 + V_C I_3$$

En désignant par **V** le potentiel en un point quelconque, on peut mettre cette expression sous la forme :

$$W = (V_A - V) I_1 + (V_B - V) I_2 + (V_C - V) I_3$$

car on ne fait ainsi qu'ajouter au second terme de la précédente la quantité :  $- V (I_1 + I_2 + I_3)$  qui est nulle puisque  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ .

Si l'on applique cette formule générale en faisant  $V = V_C$ , ce qui est permis puisque  $V$  désigne un potentiel quelconque, on obtient, en particulier :

$$W = (V_A - V_C) I_1 + (V_B - V_C) I_2$$

et, par suite :

$$(W)_{\text{moy}} = [(V_A - V_C) I_1]_{\text{moy}} + [(V_B - V_C) I_2]_{\text{moy}}$$

Qu'on imagine alors deux wattmètres ayant, comme l'indique la fig. 522, l'un sa bobine fixe  $B'$  traversée par le courant  $I_1$  et sa bobine mobile  $b'$  reliée aux points  $A$  et  $C$ ; l'autre sa bobine fixe  $B''$  traversée par le courant  $I_2$  et sa bobine mobile  $b''$  reliée aux points  $B$  et  $C$ , et l'on aura, en considérant les valeurs algébriques  $W'$ ,  $W''$  des puissances correspondantes à leurs indications :

$$[W]_{\text{moy}} = W' + W''$$

car la puissance moyenne  $W'$  accusée par le premier donnera la valeur de  $[(V_A - V_C) I_1]_{\text{moy}}$  et celle  $W''$  accusée par le second la valeur de  $[(V_B - V_C) I_2]_{\text{moy}}$ .

Cette méthode simple de détermination de la puissance électrique moyenne totale mise en jeu aux bornes

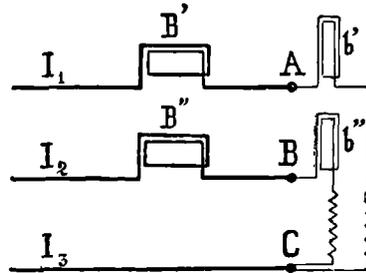


FIG. 522

d'un appareil triphasé quelconque (sans fil neutre) a été imaginée simultanément en 1893 par *MM. Behn Eschenburg et Aron*. Elle est désignée sous le nom de **méthode des deux wattmètres**.

Si l'on a affaire à un appareil dont le régime est régulier, on peut, au lieu d'employer deux wattmètres et de faire les deux lectures simultanément, déterminer successivement  $W'$  et  $W''$  en donnant à un même wattmètre, d'abord la disposition représentée par la fig. 523 (I), et ensuite la disposition représentée par la fig. 523 (II).

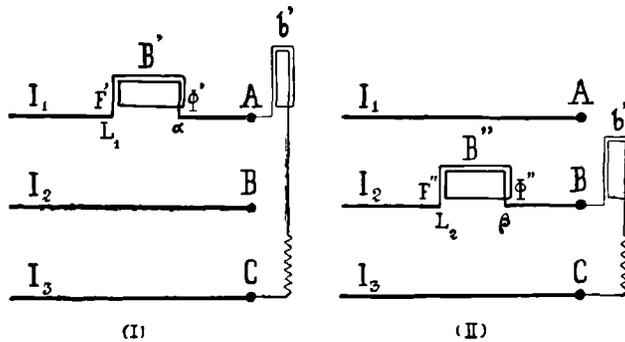


FIG. 523

Pour éviter toute erreur dans les signes dont doivent être affectées les deux puissances  $W'$  et  $W''$  dont on doit faire la *somme algébrique*, il importe de faire bien attention à l'ordre des connexions.

A cet effet, appelons  $F$  et  $\Phi$  les bornes de la bobine fixe  $m$ , et  $\mu$  celles de la bobine mobile d'un wattmètre, et désignons par  $L$  le côté ligne et par  $\alpha$ ,  $\beta$ , ou  $\gamma$  le côté borne de la coupure faite pour l'insertion de la bobine fixe sur un fil d'alimentation de l'appareil à étudier.

Nous appellerons côtés homologues des échelles de deux wattmètres ceux où se portent leurs index quand on substitue ces wattmètres l'un à l'autre au regard d'un même appareil en remplaçant  $F'$  par  $F''$ ,  $\phi'$  par  $\phi''$ ,  $m'$  par  $m''$  et  $\mu'$  par  $\mu''$ . Ceci posé, ayant installé le premier wattmètre en reliant  $F'$  à  $L_1$ ,  $\Phi'$  à  $\alpha$ ,  $m'$  à  $A$  et  $\mu'$  à  $C$ , on installera le second d'une façon semblable, c'est-à-dire en reliant  $F''$  à  $L_2$ ,  $\Phi''$  à  $\beta$ ,  $m''$  à  $B$  et  $\mu''$  à  $C$ . Si, alors, les index se présentent sur des côtés homologues de leurs échelles respectives, on donnera aux puissances observées  $W'$  et  $W''$  un même signe et leur somme algébrique s'obtiendra en mettant ce même signe devant la somme arithmétique de leurs valeurs numériques. Si, au contraire, les index se présentent sur des côtés non homologues, la somme algébrique de  $W'$  et de  $W''$  sera donnée par la *différence* des valeurs numériques de ces puissances.

C'est suivant la grandeur du décalage  $\varphi$  entre le courant  $I_1$  et la tension simple  $v_A = V_A - V_N$  ( $N$  étant un point neutre) qu'il peut arriver que les puissances  $W'$  et  $W''$  soient ou ne soient pas de même signe.

On voit, en effet, par le diagramme de la fig. 524 que, dans le cas de quantités sinusoïdales on a, en grandeur et en signe :

$$W' = [(V_A - V_C)I_1]_{\text{moy}} = [(v_A - v_C)I_1]_{\text{moy}} = V_{A,C} I_1 \cos(30^\circ - \varphi)$$

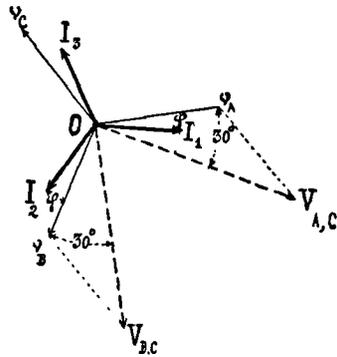


FIG. 524

et

$$\mathbf{W}'' = [(\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_C) \mathbf{I}_2]_{\text{moy}} = [(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_C) \mathbf{I}_2]_{\text{moy}} = \mathbf{V}_{B,C} \mathbf{I}_2 \cos(30^\circ + \varphi)$$

Ces deux expressions sont de même signe tant que  $\varphi$  est inférieur à  $60^\circ$  et de signes contraires pour  $\varphi$  compris entre  $60^\circ$  et  $90^\circ$ .



Lorsqu'on pourra traiter les grandeurs électriques en jeu comme sinusoïdales, la mesure de  $\mathbf{W}'$  et de  $\mathbf{W}''$  conduira aisément à la connaissance du décalage  $\varphi$ , car des relations

$$\mathbf{W}' = \mathbf{VI} \cos(30^\circ - \varphi)$$

et

$$\mathbf{W}'' = \mathbf{VI} \cos(30^\circ + \varphi)$$

on déduira.

$$\mathbf{W}' + \mathbf{W}'' = 2\mathbf{VI} \cos 30^\circ \cos \varphi = \mathbf{VI} \sqrt{3} \cos \varphi$$

et

$$\mathbf{W}' - \mathbf{W}'' = 2\mathbf{VI} \sin 30^\circ \sin \varphi = \mathbf{VI} \sin \varphi$$

d'où

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{\mathbf{W}' - \mathbf{W}''}{\mathbf{W}' + \mathbf{W}''}$$

et par suite :

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3(\mathbf{W}' - \mathbf{W}'')^2}{(\mathbf{W}' + \mathbf{W}'')^2}}}$$



Dans le cas de courants sinusoïdaux et de phases également chargées, on a pour l'expression de la puissance totale mise en jeu dans un appareil triphasé les formules très simples :

$$W = 3vI \cos(v, I)$$

si l'appareil est monté en étoile, et

$$W = 3VJ \cos(V, J)$$

si l'appareil est monté en triangle.

Or, dans le premier cas,  $v = \frac{V}{\sqrt{3}}$ , et, dans le second,

$J = \frac{I}{\sqrt{3}}$ , de sorte que,  $V$  désignant la tension efficace

composée (tension entre deux bornes), et  $I$  l'intensité efficace dans un fil de ligne, on a, dans le premier cas :

$$W = VI\sqrt{3} \cos(v, I)$$

et, dans le second,

$$W = VI\sqrt{3} \cos(V, J)$$



Lorsqu'une installation réceptrice triphasée montée en étoile est destinée à présenter des phases très inégalement chargées, on atténue les différences entre ses tensions simples en reliant par un conducteur son point neutre à celui de la station génératrice. Les deux stations sont alors reliées par quatre fils, savoir : trois fils de ligne proprement dits, unissant les bornes des appareils générateurs à celles des appareils récepteurs, et un quatrième fil, dit **fil neutre**, réunissant les points neutres. Le calibre de ce fil neutre peut être notablement moindre que celui des fils de ligne proprement dits, car le courant  $I_0$  dont il est le siège, égal à chaque instant à la somme algébrique des courants  $I_1, I_2, I_3$  des trois autres, reste voisin de zéro.

On obtient la puissance mise en jeu dans une telle installation en faisant la somme des puissances indiquées par trois wattmètres ayant respectivement leurs bobines fixes insérées sur les fils de ligne et leurs bobines mobiles branchées entre le fil neutre et le fil de ligne correspondant.

On a, en effet :

$$W = (V_A - V_N) I_1 + (V_B - V_N) I_2 + (V_C - V_N) I_3$$



## II

### Puissance moyenne d'une phase

Lorsqu'on présume que les trois phases d'un appareil triphasé ordinaire sont inégalement chargées, on a intérêt, pour juger de l'importance du défaut d'équilibre, à déterminer séparément la puissance moyenne de chaque phase.

La méthode à suivre alors dépend du montage de l'appareil à étudier.

#### A. — Appareil monté en étoile

S'il s'agit d'un appareil monté en étoile dont le point neutre soit accessible, on aura la puissance moyenne  $[W_1]_{\text{moy}}$  correspondant à une phase en consultant simplement un wattmètre ayant, comme le représente la fig. 525, sa bobine fixe **B** insérée sur le fil de ligne

aboutissant à cette phase et sa bobine mobile **b** reliée à la borne de cette phase et au point neutre.

En effet, l'expression de  $[W_1]_{\text{moy}}$  est, par définition même,

$$[W_1]_{\text{moy}} = \tilde{[(V_A - V_N) I_1]_{\text{moy}}}$$

or, c'est précisément cette quantité que donne le wattmètre ainsi disposé.

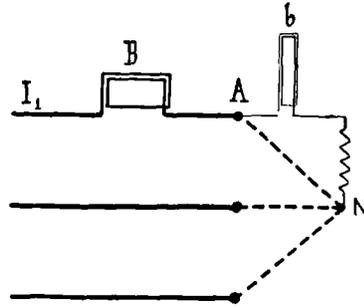


FIG. 525

Lorsque le point neutre n'est pas facilement accessible, on peut se dispenser de le faire intervenir si les forces électromotrices en jeu dans les trois phases ne renferment aucun harmonique d'ordre multiple de 3.

En effet, on a alors  $V_N = \frac{V_A + V_B + V_C}{3}$  tout comme

en un point quelconque  $N'$  relié à **ABC** par des conducteurs identiques entre eux en résistance et en réactance et puisque  $V_{N'} = V_N$ , on peut opérer sur  $N'$  comme on le ferait sur  $N$ .

La méthode, dite du **point neutre artificiel** (*Blondel*), consiste donc alors à consulter un wattmètre dont la bobine fixe **B** est insérée sur le fil de ligne aboutissant à la phase à étudier et dont la bobine mobile **b** est reliée d'une part à la borne de cette phase et d'autre part à un point  $N'$  rattaché d'ailleurs aux deux autres bornes par des résistances **r** et des réactances **l** identiques à celles du circuit à fil fin du wattmètre.

Si l'appareil triphasé considéré présente des forces

électromotrices ayant des harmoniques multiples de  $\mathbf{3}$ , on n'a pas  $\mathbf{3V}_N = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_C$ , car

$$\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_N = -\mathbf{RI}_1 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}_1}{dt}$$

$$\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_N = -\mathbf{RI}_2 + \mathbf{E}_2 - \mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}_2}{dt}$$

$$\mathbf{V}_C - \mathbf{V}_N = -\mathbf{RI}_3 + \mathbf{E}_3 - \mathbf{L} \frac{d\mathbf{I}_3}{dt}$$

et

$$\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_C - \mathbf{3V}_N = \mathbf{0} + \Sigma \mathbf{E} + \mathbf{0} \neq \mathbf{0}$$

puisque alors  $\Sigma \mathbf{E}$  se réduit à la somme des harmoniques multiples de  $\mathbf{3}$ , qui, ainsi qu'on la vu page 439, n'est pas nulle. Comme, d'ailleurs, on a toujours  $\mathbf{3V}_N = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_C$ , en vertu des relations :

$$\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_{N'} = -\mathbf{ri}_1 - \mathbf{l} \frac{di_1}{dt}$$

$$\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_{N'} = -\mathbf{ri}_2 - \mathbf{l} \frac{di_2}{dt}$$

$$\mathbf{V}_C - \mathbf{V}_{N'} = -\mathbf{ri}_3 - \mathbf{l} \frac{di_3}{dt}$$

on ne peut plus prendre alors  $\mathbf{V}_{N'}$  pour  $\mathbf{V}_N$ .

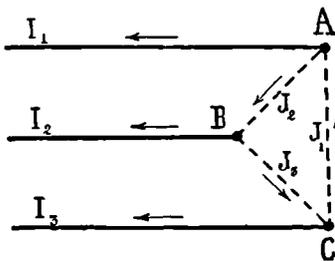


FIG. 526

#### B. — Appareil monté en triangle

L'expression de la puissance instantanée relative à la phase comprise entre les bornes  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{A}$  d'un appareil monté en triangle (fig. 526) est

$$\mathbf{W} = \mathbf{J}_1 (\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_a)$$

Mais comme on ne peut opérer sur le courant  $\mathbf{J}_1$ , on ne pourra parvenir à une détermination expérimentale de  $[\mathbf{W}_1]_{\text{moy}}$  que si l'on peut exprimer  $\mathbf{J}_1$  à l'aide des courants extérieurs.

La chose est possible lorsque la somme des forces électromotrices des trois phases est nulle, ce qui arrive quand ces forces électromotrices ne contiennent pas d'harmoniques multiples de 3.

On a alors

$$\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_a = \mathbf{R}\mathbf{J}_1 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{J}_1}{dt}$$

$$\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b = \mathbf{R}\mathbf{J}_2 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{J}_2}{dt}$$

$$\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_c = \mathbf{R}\mathbf{J}_3 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{J}_3}{dt}$$

et, par conséquent, en ajoutant

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3$$

d'où, en vertu des relations

$$\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2 = \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_3 = \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{J}_3 - \mathbf{J}_1 = \mathbf{I}_3$$

$$2\mathbf{J}_1 - (\mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3) = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3$$

$$3\mathbf{J}_1 = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3$$

et enfin :

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{3} (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3)$$

On peut donc, alors, écrire :

$$W_1 = \frac{1}{3} (I_1 - I_3) (V_c - V_A)$$

et

$$[W_1]_{\text{moy}} = \frac{1}{3} [(I_1 - I_3) (V_c - V_A)]_{\text{moy}}$$

relation, d'après laquelle on obtiendra la puissance cherchée en consultant un wattmètre muni de deux bobines fixes indépendantes traversées respectivement par les courants  $I_1$  et  $-I_3$ , la bobine mobile étant

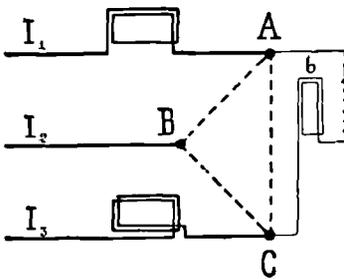


FIG. 527

d'ailleurs reliée aux bornes **C** et **A** de la phase étudiée (fig. 527).

Cette méthode, imaginée par *M. Blondel*, porte le nom de **Méthode différentielle**.

La constante à employer est celle que possède le wattmètre lorsque les deux bobines fixes fonctionnent en parallèle. Elle est double de celle **K** correspondant au fonctionnement des deux bobines en série. On a donc si  $\delta$  est la déviation observée :

$$[(I_1 - I_3) V_{c,A}]_{\text{moy}} = 2K\delta$$

et par suite

$$[W_1]_{\text{moy}} = \frac{2}{3} K\delta$$



# SOIXANTE-TROISIÈME LEÇON



## ELECTRO-ENERGÉTIQUE

\*\*\*\*\*

### MESURE DE L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE COMPTEURS ÉLECTRIQUES (NOTIONS GÉNÉRALES)



Les mesures de puissance électrique servent à décider si un appareil électrique est apte à assurer tel ou tel service et à présenter, en l'effectuant, un rendement satisfaisant. Mais quand il s'agit de déterminer la redevance qui, pour la marche de cet appareil pendant un laps de temps donné, est due par son détenteur au fournisseur d'énergie électrique chargé de l'alimenter, c'est à des mesures d'énergie électrique qu'il faut avoir recours.

C'est l'énergie électrique, en effet, qui est la marchandise vendue à leurs clients par les entreprises industrielles.

L'étude détaillée des appareils nombreux et divers permettant la mesure de l'énergie électrique dans les circonstances les plus variées de la pratique industrielle appartient au domaine de l'électrotechnique appliquée. Aussi nous bornerons-nous, pour clore notre exposé sommaire des notions fondamentales de l'énergétique,

à esquisser ici simplement les principes de cette branche importante des mesures électriques, en renvoyant pour les détails d'application aux ouvrages spéciaux publiés sur la matière (1).



L'énergie électrique mise en jeu durant un laps de temps infiniment petit  $dt$  dans une portion de circuit qui reçoit sous une tension  $V$  un courant ayant pendant ce temps une intensité  $I$  est égale, comme on sait, à

$$VI dt$$

en sorte que l'énergie  $\mathcal{E}$  mise en jeu pendant un laps de temps fini s'étendant d'un instant  $t_1$  à un instant  $t_2$  est donnée par la somme :

$$\mathcal{E} = \sum_{t_1}^{t_2} VI dt$$

exprimant cette énergie en joules si les temps sont évalués en secondes, les intensités en ampères et les différences de potentiel en volts.

Si l'on envisage la courbe représentative en fonction du temps du produit  $VI$ , c'est-à-dire la courbe représentative de la puissance électrique mise en jeu dans la portion de circuit considérée, on voit que  $\mathcal{E}$  est représentée graphiquement par l'aire que délimitent cette courbe et l'axe des temps entre les ordonnées relatives aux instants  $t_1$  et  $t_2$  marquant l'origine et la fin du laps de temps considéré.



1. Voir notamment l'opuscule consacré, dans la **Bibliothèque de l'Élève-Ingénieur**, aux **Compteurs électriques**. (Grenoble, A. Gratier et J. Rey, éditeurs).

L'évaluation de  $\mathcal{E}$  est très simple lorsque la portion de circuit considérée reçoit un courant constant  $\mathbf{I}$  sous une tension constante  $\mathbf{V}$ , et lorsque, par conséquent, elle met en jeu une puissance électrique  $\mathbf{W} = \mathbf{VI}$  invariable.

On a alors, en effet :

$$\mathcal{E} = \mathbf{VI} \sum_{t_1}^{t_2} dt = \mathbf{W}(t_2 - t_1)$$

et la valeur de  $\mathcal{E}$  résulte simplement du produit de la puissance  $\mathbf{W}$  de l'installation, par la durée  $t_2 - t_1$  de son fonctionnement, demandée à un compteur de temps mis en marche à l'instant  $t_1$  et arrêté à l'instant  $t_2$ .

Le produit de la valeur de  $\mathbf{W}$  en watts, hectowatts ou kilowatts par la valeur de  $t_2 - t_1$  en heures donne la valeur de  $\mathcal{E}$  en watts-heures, hectowatts-heures ou kilowatts-heures.

C'est là une solution très simple, mais aussi très exceptionnelle du problème de la détermination de  $\mathcal{E}$ , car la constance simultanée de  $\mathbf{V}$  et de  $\mathbf{I}$  qu'elle implique est bien rarement réalisée :

Les distributions d'énergie électrique ont lieu plus souvent, soit à intensité constante, soit, de préférence, à tension constante.



Si l'on a  $\mathbf{I} = \text{const.}$ , l'expression de  $\mathcal{E}$  devient :

$$\mathcal{E} = \mathbf{I} \sum_{t_1}^{t_2} \mathbf{V} dt$$

et la valeur de  $\mathcal{E}$  résulte du produit de la valeur de  $\mathbf{I}$

constituant le courant normal de l'installation par la quantité  $\sum_{t_1}^{t_2} V dt$  représentée graphiquement par l'aire que délimitent l'axe des temps et la courbe des tensions  $V$  dans sa partie comprise entre les ordonnées relatives aux instants  $t_1$  et  $t_2$ .

Cette quantité représente des *volts-heures* si les tensions sont exprimées en volts et les temps en heures. Son produit par la valeur de  $I$  en ampères représentera la valeur de  $\mathcal{E}$  en watts-heures. La centième partie de ce produit sera la valeur  $\mathcal{E}$  en hectowatts-heures, ou sa millième partie l'expression de  $\mathcal{E}$  en kilowatts-heures.

La détermination expérimentale de  $\sum_{t_1}^{t_2} V dt$  peut être effectuée par un instrument, nommé **volts heures-mètre**, qui consiste essentiellement en un enroulement à fil fin soumis à la tension  $V$  et prenant, dans un champ magnétique constant, dû à un aimant permanent, un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\omega$  proportionnelle à  $V$ . L'angle  $\alpha$  décrit de l'instant  $t_1$  à l'instant  $t_2$ , par un index lié à l'arbre porteur de cet organe tournant est

$$\alpha = \sum_{t_1}^{t_2} \omega dt$$

et il est proportionnel à  $\sum_{t_1}^{t_2} V dt$  puisque  $\omega$  est proportionnelle à  $V$ . Un enregistreur de tours sur les cadrans

duquel seront inscrites les valeurs de  $\sum \mathbf{V}dt$  correspondant aux valeurs corrélatives de  $\alpha$  donnera donc les volts-heures mis en jeu.



Si l'on a  $\mathbf{V} = \text{const.}$ , l'expression de  $\mathcal{E}$  prend la forme :

$$\mathcal{E} = \mathbf{V} \sum_{t_1}^{t_2} \mathbf{I}dt$$

et la valeur de  $\mathcal{E}$  résulte alors du produit de la tension d'alimentation par la quantité  $\sum_{t_1}^{t_2} \mathbf{I}dt$  qui n'est autre que la *quantité d'électricité* reçue par l'installation ou l'appareil considérés dans le laps de temps compris entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

Divers instruments ont été imaginés pour obtenir la détermination expérimentale de ce facteur de  $\mathcal{E}$ . Ils sont désignés sous les noms de **Coulombs-mètres** ou **compteurs de quantités**.



La solution générale du problème de la détermination expérimentale de  $\mathcal{E}$  est fournie par des appareils qui font connaître directement, sans impliquer la constance de  $\mathbf{I}$  ni de  $\mathbf{V}$ , la quantité

$$\sum \mathbf{W}dt$$

La plupart d'entre eux procèdent de l'idée générale suivante :

Soit un appareil comportant un organe tournant

soumis à un couple moteur proportionnel à  $\mathbf{W}$  et en même temps à un couple résistant proportionnel à sa vitesse angulaire de rotation  $\omega$ . Le couple résistant s'égalant à chaque instant au couple moteur,  $\omega$  sera, à chaque instant, proportionnelle à  $\mathbf{W}$ , et par consé-

quent la rotation  $\alpha = \sum_{t_1}^{t_2} \omega t$  de l'organe tournant dans

le laps de temps  $t_2 - t_1$  sera proportionnelle à  $\sum_{t_1}^{t_2} \mathbf{W} dt$ ,

de sorte que la marche d'un compteur de tours de cet organe fera connaître directement, à la faveur d'un étalonnage préalable, la quantité d'énergie électrique mise en jeu.

De nombreux appareils ont été imaginés suivant ce principe et constituent autant de types différents de compteurs d'énergie électrique ou **joules-mètres**.

Leurs différences résident surtout dans le choix de l'organe mobile et dans la façon dont est obtenu le couple moteur proportionnel à  $\mathbf{W}$ . Dans tous, par contre, le couple antagoniste proportionnel à  $\omega$  est demandé à des courants de Foucault ayant pour siège une masse métallique (disque ou cylindre) fixée à l'arbre de la partie mobile et tournant entre des poles d'aimants. Ces courants sont proportionnels aux forces électromotrices d'induction développées dans cette masse métallique; or, ces forces électromotrices sont proportionnelles à  $\omega$ . Il en est de même du couple résistant dû à l'action du champ de l'aimant inducteur sur ces courants.



Dans une installation à courant continu, on a

$$W = VI$$

en sorte que le couple moteur de l'organe tournant du compteur peut alors très simplement être obtenu par l'action électrodynamique d'un enroulement à gros fil recevant le courant  $I$ , ou un courant proportionnel à  $I$ , sur un enroulement à fil fin soumis à la tension  $V$  ou à une tension proportionnelle à  $V$ .



Dans une installation à courants alternatifs simples, l'expression instantanée de  $W$  étant aussi :  $W = VI$ , le compteur n'exigera également qu'un seul couple moteur dont l'expression comprendra deux facteurs l'un proportionnel à  $V$ , l'autre proportionnel à  $I$ . Mais alors le couple moyen dont dépendra la vitesse moyenne de rotation  $\omega$  et la marche de l'index dans un temps donné seront proportionnels à  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi - \xi)$ , l'angle  $\xi$  représentant le décalage entre le courant  $i$  dans l'enroulement à fil fin du compteur et la tension  $V$  et l'angle  $\varphi$  le décalage entre  $V$  et  $I$ . Pour avoir l'énergie correspondant à la puissance moyenne  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$  mise en jeu, durant ce même temps, dans l'installation à laquelle est appliqué le compteur, il faudrait donc multiplier l'indication de ce dernier, pour ce temps, par le facteur :  $\frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi - \xi)}$ . On peut éviter cette opération par un artifice qui consiste à rendre le second facteur du couple moteur proportionnel non pas à  $I$  mais à un courant  $J$ , de même intensité, décalé sur  $I$

du même angle  $\xi$  dont  $\mathbf{i}$  est décalé sur  $\mathbf{V}$ . Ce courant  $\mathbf{J}$  est décalé ainsi de  $\varphi$  sur  $\mathbf{i}$ , en sorte que le couple moteur moyen, proportionnel à  $(\mathbf{iJ})_{\text{moy}}$  et par conséquent à  $\mathbf{VI} \cos \varphi$  est finalement proportionnel à  $\mathbf{W}_{\text{moy}}$ .

• ⊗ →

Dans une installation à courants triphasés, l'expression de  $\mathbf{W}$  est, en général, la somme algébrique de plusieurs termes de la forme  $\mathbf{VI}$  :

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}'\mathbf{I}' + \mathbf{V}''\mathbf{I}'' + \dots$$

en sorte qu'un compteur fondé sur le principe exposé ci-dessus devra avoir son organe tournant soumis à la fois à plusieurs couples moteurs proportionnels, en grandeur et en signe, à chacun des termes de  $\mathbf{W}$ .

Des compteurs ont été adaptés à chacune des diverses formes de l'expression de  $\mathbf{W}$  qu'on peut déduire de la formule fondamentale :

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_1\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_2\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_3\mathbf{I}_3$$

Si l'installation ne comporte pas de fil neutre, on a  $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{0}$ , et, en retranchant de l'expression précédente le produit  $\mathbf{V}_3(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3)$  qui est nul, on peut écrire :

$$\mathbf{W} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3)\mathbf{I}_1 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3)\mathbf{I}_2$$

Cette expression, suivant laquelle  $\mathbf{W}$  est la somme algébrique de deux termes de la forme  $\mathbf{VI}$  est mise à profit dans des compteurs offrant des enroulements à gros fils aux courants  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  et des enroulements à fils fins aux différences de potentiels  $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_3$  et  $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3$ . La mesure d'énergie est alors corrélative de la me-

sure de la puissance par la méthode des deux wattmètres ou méthode cumulative.

La relation précédente et celles qu'on en déduit par permutation circulaire donnent le tableau :

$$W = V_{1,3} I_1 + V_{2,3} I_2 = V_{1,3} (I_1 - I_2) + (V_{2,3} + V_{1,3}) I_2$$

$$W = V_{2,1} I_2 + V_{3,1} I_3 = V_{2,1} (I_2 - I_3) + (V_{3,1} + V_{2,1}) I_3$$

$$W = V_{3,2} I_3 + V_{1,2} I_1 = V_{3,2} (I_3 - I_1) + (V_{1,2} + V_{3,2}) I_1$$

d'où l'on tire, par des additions :

$$2W = (V_{1,2} + V_{1,3}) I_1 + V_{2,3} (I_2 - I_3)$$

$$2W = (V_{2,3} + V_{2,1}) I_2 + V_{3,1} (I_3 - I_1)$$

$$2W = (V_{3,1} + V_{3,2}) I_3 + V_{1,2} (I_1 - I_2)$$

et, en combinant ces nouvelles relations avec les précédentes :

$$3W = (V_{1,2} + V_{1,3}) (I_1 - I_3) + (V_{2,1} + V_{2,3}) (I_2 - I_3)$$

$$3W = (V_{2,3} + V_{2,1}) (I_2 - I_1) + (V_{3,2} + V_{3,1}) (I_3 - I_1)$$

$$3W = (V_{3,1} + V_{3,2}) (I_3 - I_2) + (V_{1,3} + V_{1,2}) (I_1 - I_2)$$

Les relations mutuelles des vecteurs  $\overline{V_{1,2}}$ ,  $\overline{V_{2,1}}$ ,  $\overline{V_{2,3}}$ ,  $\overline{V_{3,2}}$ ,  $\overline{V_{3,1}}$ ,  $\overline{V_{1,3}}$ , et de leurs sommes sont représentées par un diagramme tel que celui de la fig. 383 (page 385).



Toutes ces expressions de  $W$  sont du type :

$$W = V'I + V''I''$$

$V'$  et  $V''$  désignant des tensions, ou des différences de tensions,  $I'$  et  $I''$  des courants ou des différences de courants.



Pour soumettre un arbre de compteur à un couple moteur proportionnel à  $V'I$ , il suffit, quand  $V'$  et  $I'$  sont des grandeurs alternatives, de faire agir norma-

lement à un disque métallique porté par cet arbre, un premier champ magnétique proportionnel à  $\mathbf{I}'$  en même temps qu'un second proportionnel à  $\mathbf{V}'$  et présentant par rapport à  $\mathbf{V}'$  un décalage d'un quart de période, c'est-à-dire un champ proportionnel à une tension représentée par un vecteur  $\mathbf{V}'_1$  égal et perpendiculaire à  $\mathbf{V}'$ . Un courant induit dans le disque par ce deuxième champ est proportionnel à  $\frac{d\mathbf{V}'_1}{dt}$ . Or si

l'on a  $\mathbf{I}' = \mathbf{I}'_{\max} \sin \omega t$  et  $\mathbf{V}'_1 = \mathbf{V}'_{1\max} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$  on

$$a \frac{d\mathbf{V}'_1}{dt} = \omega \mathbf{V}'_{1\max} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \omega \mathbf{V}'_{1\max} \sin (\omega t - \varphi)$$

et le couple résultant de l'action du premier champ sur le courant induit par le second a une valeur moyenne proportionnelle à  $\left( \mathbf{I}' \frac{d\mathbf{V}'_1}{dt} \right)_{\text{moy}} = \omega \mathbf{I}'_{\text{eff}} \mathbf{V}'_{\text{eff}} \cos \varphi = \omega (\mathbf{V}' \mathbf{I}')_{\text{moy}} = 2\pi \mathbf{F} (\mathbf{V}' \mathbf{I}')_{\text{moy}}$ .



Si l'on prend l'expression de  $\mathbf{W}$  dans le premier groupe des relations précédentes (page 751) :

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_{1,3} \mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_{2,3} \mathbf{I}_2$$

on a  $\mathbf{I}' = \mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{1,3}$ . Le premier champ sera fourni par une bobine parcourue par le courant  $\mathbf{I}_1$  et le second, en quadrature avec  $\mathbf{V}_{1,3}$ , par une bobine à fil fin décalant de  $30^\circ$  un courant engendré en elle par la tension  $\mathbf{V}_{2,3}$ .

On pourrait aussi produire le deuxième champ avec une bobine soumise à la tension  $\mathbf{V}_{\mathbf{B} \mathbf{N}'}$ , existant entre la 2<sup>e</sup> borne  $\mathbf{B}$  et un point neutre artificiel  $\mathbf{N}'$ .

Enfin, on pourrait aussi employer une bobine donnant un courant décalé de  $60^\circ$  sur  $V_{N',B}$ .

Le couple proportionnel à  $V_{2,3} I_2$  s'obtiendrait naturellement par des procédés analogues.



Si l'on prend l'expression de  $W$  dans le troisième groupe des formules de la page 751, on a, par exemple :

$$W = \frac{1}{3} [(V_{1,2} + V_{1,3}) (I_1 - I_3) + (V_{2,1} + V_{2,3}) (I_2 - I_3)]$$

On obtiendra un champ en quadrature avec  $V_{1,2} + V_{1,3}$  en le produisant à l'aide d'une bobine donnant un courant décalé de  $60^\circ$  sur  $V_{1,3}$ ; ce champ sera en même temps proportionnel à  $V_{1,2} + V_{1,3}$  dont l'amplitude vaut  $\sqrt{3}$  fois celle de  $V_{1,3}$ .

On aura de même le champ en quadrature avec  $V_{2,1} + V_{2,3}$  à combiner avec celui de  $I_2 - I_3$  en le produisant à l'aide d'une bobine donnant un courant décalé de  $60^\circ$  sur  $V_{2,1}$ .

Dans le cas d'une installation à phases également chargées, on a, en additionnant les trois expressions de  $W$  du premier groupe (page 751)

$3W = (V_{1,3} + V_{1,2}) I_1 + (V_{2,1} + V_{2,3}) I_2 + (V_{3,2} + V_{3,1}) I_3$   
et comme les trois parties de cette expression ont alors même valeur moyenne, il suffit que le compteur mette en œuvre celle de l'un d'eux. On a donc dans ce cas

$$W = (V_{1,3} + V_{1,2}) I_1$$

Le champ en quadrature avec  $V_{1,3} + V_{1,2}$  sera fourni

par une bobine donnant un courant décalé de  $60^\circ$  sur  $V_{1,3}$ .



Dans le cas d'une installation à phases inégalement chargées et à fil neutre, on a, en appelant  $N$  le point neutre et  $I_0$  l'intensité dans le quatrième fil :

$$W = (V_1 - V_N) I_1 + (V_2 - V_N) I_2 + (V_3 - V_N) I_3$$

avec

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_0 = 0$$

d'où, en remplaçant dans  $W$  le courant  $I_3$  par sa valeur :  $-(I_1 + I_2 + I_0)$

$$W = (V_1 - V_N) I_1 + (V_2 - V_N) I_2 - (V_3 - V_N) (I_1 + I_2 + I_0)$$

ou

$$W = (V_1 - V_N) I_1 + (V_2 - V_N) I_2 - (V_3 - V_N) I_0$$

Mais comme on a sensiblement

$$V_N = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

et, par suite :

$$V_3 - V_N = \frac{V_3 - V_1 + V_3 - V_2}{3} = - \frac{V_{1,3} + V_{2,3}}{3}$$

il vient :

$$W = V_{1,3} I_1 + V_{2,3} I_2 + \frac{1}{3} (V_{1,3} + V_{2,3}) I_0$$

expression différant de celle

$$W = V_{1,3} I_1 + V_{2,3} I_2$$

correspondant à l'absence de fil neutre par un terme

$\frac{1}{3} (V_{1,3} + V_{2,3}) I_0$  dépendant de l'intensité  $I_0$  du courant dans le fil neutre.

En réalité, l'expression de  $\mathbf{W}$  ne contient encore ici que deux termes du type  $\mathbf{VI}$ , car on a

$$\mathbf{W} = V_{1,3} \left( \mathbf{I}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{I}_0 \right) + V_{2,3} \left( \mathbf{I}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{I}_0 \right)$$

Un compteur utilisant cette formule mettra en œuvre les tensions  $V_{1,3}$ ,  $V_{2,3}$  ou des tensions en quadrature et les courants  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{I}_0$ , ce dernier agissant dans une bobine pourvue de trois fois moins de spires que celles dévolues à  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$ , ou située à plus grande distance.





# ERRATA

## TOME I

Pages	Lignes	Au lieu de:	Lire :
17	3	Oxides	Oxydes
31	12	Nature	Naturel
40		Retourner la figure 16.	
52	Note	Isolante la traversée	Isolante à la traversée
106	21	Tension d'un fil	Torsion d'un fil
117	4	Intensité $\delta$ du courant	Intensité du courant
122	22	Observateur d'ampère	Observateur d'Ampère
123	5	$I, H \sin \theta$	$I.H \sin \theta$
145	4 (du bas)	Echelle de résistance	Echelle de résistances
149	7	Constantan (60; 40 Ni)	Constantan (60 Cu, 40 Ni)
154	18	$+\frac{1,643}{10^6}$	$= -\frac{1,643}{10^6}$
154	(Note)	$R_o = \frac{1,96}{d^2}$	$R_o = \frac{19,6}{d^2}$
243	22	l'intensité du courant	l'intensité de courant
306	3 (du bas)	$\Delta c = i n$	$\Delta c = C_1 i n$
312	10	d'un conducteur	d'un condensateur
362	19	méthodes usuelles	formules usuelles



## TOME II

7		Retourner la figure 151.	
20	8	$\beta H = \mu$	$\beta = \mu H$
53	16	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}_a$
»	17.	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}_e$
57	24 (formule)	$\Phi \frac{l'}{\mu' l'}$	$\Phi \frac{l'}{\mu' s'}$

Pages	Lignes	Au lieu de :	Lire :
63	15 (formule)	$2 \frac{l}{s_e}$	$2 \frac{l_e}{s_e}$
68	19	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}_c$
84	11 (formule)	$\mathcal{R}''_c$	$\mathcal{R}''_e$
131	20	$e^2 F \beta$	$e^2 F \beta^2$
137	9	(1)	(2)
138		Retourner la figure 218.	
169	fig. 338	$ds$	$d\sigma$
170	(2) du bas	dans ce premier cas	dans le premier cas
189	4	$R_1$	$R$
191	13	$i$	$i_2$
211	23	$\frac{A\omega}{\sqrt{C - K\omega^2}}$	$\frac{A\omega}{C - K\omega^2}$
213	8	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha \frac{\tau_0}{T}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{T}\right)^2}}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\alpha \frac{\tau_0}{T}}{1 - \left(\frac{\tau_0}{T}\right)^2}$
215	22	pratiquant	pratiquement
218	16	$(E_i)_2 = -\frac{1}{10^8} \frac{dMi_1}{dt}$	$(E)_2 = -\frac{dMi_1}{dt}$
299	3 (du bas)	$V = (I) - R(E)$	$(V) = R(I) - (E)$
319	1	$K_1 = L_1\omega$ et $K_2 = \frac{1}{C\omega}$	$K_1 = L_1\omega, R_2 = 0$ et $K_3 = \frac{1}{C\omega}$
»	2	$C = \frac{L}{R_1^2 + L_1^2\omega^2}$	$C = \frac{L_1}{R_1^2 + L_1^2\omega^2}$
321	3	$\frac{1}{R_1^2}$	$\frac{1}{R_1^2}$
325	13	$(r^2 + k_2)(i'^2 + i''^2)$	$(r^2 + k^2) i'^2 + i''^2$
334	4	$\frac{V}{\sqrt{2 + k^2}}$	$\frac{V}{\sqrt{R^2 + k^2}}$
397	19	$o = Z \sum J$	$o = Z \sum J$
»	20	$\sum . = o$	$\sum e = o$
407	2 (du bas)	$I_1 = I' + jI''$	$I_1 = I' + jI''$
439	17	en triangle	en étoile

Pages	Lignes	Au lieu de :	Lire :
451	2	$\frac{R \sqrt{1 + \left(\frac{kn}{r}\right)^2}}{r \sqrt{1 + \left(\frac{kn}{r}\right)^2}}$	$\frac{R \sqrt{1 + \left(\frac{K_n}{R}\right)^2}}{r \sqrt{1 + \left(\frac{K_n}{r}\right)^2}}$
452	8	$\operatorname{tg} \varphi'_n = \frac{n\omega t'}{R'}$	$\operatorname{tg} \varphi'_n = \frac{n\omega L'}{R'}$
453	Note	1902	1899
537	5	$\omega = \frac{1}{p} \omega$	$\omega' = \frac{1}{p} \omega$
549	6	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda\omega l}{\rho}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda\omega l}{\rho}$
557	6	<b>hIe</b>	<b>hIε</b>
583	6	un voltmètre	un voltmètre
607	4	<b>18863</b>	<b>18663</b>
689	(6) du bas	$\dot{I} = I' + jV''$	$\dot{I} = I' + jI''$





# INDEX ALPHABÉTIQUE

---

	Pages		Pages
<b>A</b>			
<b>ABEGG</b> (amorcer).....	250	<b>BOUCHEROT</b> (syst. de distrib.).....	345
<b>ABRAHAM</b> (rhéographe).....	214	— (théorème).....	698
— (méthode).....	266	<b>Boucle induite</b> .....	90
<b>Acier Martin</b> .....	41	<b>Bougies d'allumage</b> .....	247
<b>Admittance</b> .....	312	<b>BOY DE LA TOUR</b> (force portante d'un aimant).....	661
<b>A. E. G.</b> (wattmètre).....	719	<b>BRAUN</b> (oscilloradiographe).....	474
<b>Aimant amortisseur</b> .....	120	<b>BREGUET</b> (coup de poing).....	251
<b>Aimants permanents</b> .....	28	<b>BUFF</b> (voltam. à Al.).....	592
<b>Aimantation résiduelle</b> .....	28	<b>C</b>	
— tournante.....	31	<b>Cables concentriques</b> .....	362
<b>Alternateurs</b> (déf.).....	99	<b>CALDWELL</b> (interrupteur).....	227
— (puiss.).....	675	<b>CAMPBELL SWINTON</b> (interrupt.).....	228
<b>Amorces</b> .....	250	<b>Capacitance</b> .....	285
<b>Ampèremètres</b> (méth. des trois).....	704	<b>Capacité</b> (courants de).....	355
— du 1 <sup>er</sup> degré.....	140	— des lignes.....	351
— du 2 <sup>e</sup> degré.....	140	<b>Chaleur chimique</b> .....	628
— à induction.....	144	— voltaïque.....	628
<b>Apériodicité critique</b> .....	210	<b>Champs tournants circulaires</b> .....	489
<b>Arc alternatif</b> .....	560	— elliptiques.....	497
— (courbes).....	570	— industriels.....	520
<b>Arcs critiques</b> .....	586	<b>CHAPPUIS et MANŒUVRIER</b> (exp.).....	588
<b>Arcs entre métaux et charbons</b> .....	579	<b>Charge d'un condensateur</b> .....	193
<b>ARMAGNAT</b> (méthode).....	464	<b>Chûte de tension</b> .....	341
<b>Armatures dentées</b> .....	128	<b>Circuit magnétique</b> .....	45
<b>Assemblages de condensateurs</b> .....	299	<b>Clapets électrolytiques</b> .....	592
<b>B</b>			
<b>Balistique</b> (galv.).....	247	<b>Coefficient d'amortissement critique</b> .....	206
<b>BASSÉE et MICHEL</b> (bougie).....	247	— de déformation.....	444
<b>BELLÀTI</b> (galvanom.).....	143	— d'hystérésis.....	39-40
<b>Biphasés</b> (systèmes).....	391	<b>Coefficients d'induction</b> (mes.)... ..	261
<b>BISSON et BERGER</b> (bougie).....	247	<b>Compteurs électriques</b> .....	743
<b>BLONDEL</b> (méthode).....	451	<b>Compteur de temps</b> .....	745
— .....	482	<b>Condensateur</b> (énergie).....	650
<b>Bobine d'induction</b> .....	217	<b>Conductance</b> .....	313
— longue.....	166	<b>Conjoncteur tournant</b> .....	105
— de self.....	335	<b>Constante de temps</b> .....	180
		— d'un condensat.....	194
		— d'un wattmètre.....	715

	Pages		Pages
<b>COOPER HEWITT</b> (lampe).....	585	<b>Electrolyse</b> par cour. alt.....	587
<b>Coude</b> d'une caractérist. d'excit.....	75	<b>Encoches</b> .....	129
<b>Coulombs-mètres</b> .....	747	<b>Energie électrique</b> .....	610
<b>Coup de poing</b> de Breguet.....	251	— potentielle.....	656
<b>Courant alternatif</b> .....	136	<b>Entrefers</b> .....	53
— de capacité.....	355	<b>Enveloppe de fer</b> (effets).....	81-83
— de fermeture.....	230	<b>Etalon de self-induction</b> .....	163
— d'induction.....	117	<b>Etalonnage</b> d'un galv. balist.....	16
— magnétisant.....	697	<b>Etoile</b> (montagne en).....	380
— parasite.....	124	<b>Excitation</b> d'un circuit magnét.....	64
— de rupture.....	230	— — (calcul).....	68
— variable.....	136	— (caractéristique d').....	74
— déwatté.....	624	— d'un électro-aimant.....	636
— — (inconven.).....	700	<b>Exploration</b> des champs magnét.....	12
<b>CURIE ET BLONDLOT</b> (électrom.).....	709	<b>Expressions imaginaires</b> .....	295
<b>Cuves électrolytiques</b> (énergie).....	644	<b>Extra-courant de rupture</b> .....	249
<b>Cycle d'aimantation</b> .....	30		
		<b>F</b>	
<b>D</b>		<b>Facteur de correction</b> d'un wattmètre.....	724
<b>Décalage</b> .....	138	<b>Facteur de puissance</b> .....	686
<b>Décharge</b> d'induction.....	6	<b>Faisceau cathodique</b> .....	254
— oscillante.....	196	<b>FAVRE</b> (exp.).....	606
— d'un condensat.....	195	<b>Feuilletage</b> des masses métalliques....	125
<b>DE DION BOUTON</b> (bougie).....	247	<b>Fer doux</b> (appareils à).....	142
<b>Décrément logarithmique</b> .....	206	<b>Fermeture</b> (courant de).....	230
<b>Déformation</b> (coeff. de).....	444	<b>FERRANTI</b> (effet).....	355
<b>Degré d'amortissement</b> .....	207	<b>FERRARIS</b> (champs tournants de)....	488
<b>Denture</b> (harmoniques de).....	431	<b>Fil neutre</b> .....	737
<b>Différence de phase</b> .....	109-138	<b>FLEMING</b> (méthode).....	705
<b>Différence de potentiel alternative</b> .....	99	<b>Flux alterné</b> .....	94
— — magnétique..	55	— d'induction.....	7
<b>Diphases</b> (syst.).....	399	— magnétique.....	12
<b>Dispersion magnétique</b> .....	52	— ondulé.....	94
<b>Dissipation d'énergie</b> (hyst.).....	34	— perdu.....	52-63
<b>Distance explosive</b> .....	242	— uniforme.....	8
<b>DUANE</b> (méthode).....	278	— (unité de).....	9
<b>DUCRETET</b> (interrupt.).....	223	— utile.....	63
<b>Dynamos</b> .....	99	<b>Focus</b> (tube).....	255
		<b>Force coercitive</b> .....	29
<b>E</b>		<b>Force électromotrice induite</b> .....	80
<b>EBORAL</b> (méthode).....	731	— (sens)..	85
<b>Effet Ferranti</b> .....	355	<b>Force électromotrice induite</b> (val. numér.).....	87
<b>Electro-aimant</b> (calcul).....	76	<b>Force magnétomotrice</b> .....	47
— à cour. alt....	479	<b>Force portante</b> d'un électro-aimant ...	21-661
<b>Electrodynamomètres</b> (emploi).....	334	<b>Formule d'Hopkinson</b> .....	49
— (facteur de cor.)	343	<b>Formules d'Olm</b> et de <i>Kirchoff</i> .....	125
— (méthode des)..	708	— de <i>Steinmetz</i> .....	39

	Pages		Pages
<b>FOUCAULT</b> (exp.).....	121	<b>Joule</b> .....	614
— (courants de).....	122-543	<b>Joule-couple</b> .....	623
— (interrupteur).....	222	<b>Joules mètres</b> .....	748
<b>FOURIER</b> (série de).....	423		
<b>Frein Marcel Desprez</b> .....	123	<b>K</b>	
<b>Fréquence</b> .....	138	<b>KEMPF-HARTMANN</b> (fréquencemètre).....	484
<b>Fuites magnétiques</b> .....	62	<b>Kilowatt</b> .....	620
		<b>Kilowatt-heure</b> .....	620
<b>G</b>			
<b>Galettes</b> .....	220	<b>L</b>	
<b>Galvanomètre balistique</b> (théorie)....	200	<b>LACOSTE</b> (vibrateur).....	221
<b>GAMBEY</b> (observation de).....	120	<b>LEBLANC</b> (théorème).....	534
<b>Générateurs électriques</b> .....	612	<b>LENZ</b> (loi de).....	119
— (puissance)....	624	<b>Lignes à cour. alt.</b> .....	339
<b>GILBERT</b> .....	48	— à cour. continus.....	638-640
<b>GRIMSEHL</b> (interrupteur).....	223		
		<b>M</b>	
<b>H</b>		<b>Machines dynamo-él.</b> .....	630
<b>Harmonique</b> (analyse).....	455	<b>MARCEL DEPREZ</b> (cinémomètre)....	124
<b>Harmoniques</b> .....	425	— (interrupteur)....	221
— de denture.....	431	<b>MARGOT</b> (interrupteur).....	223
<b>Henry</b> .....	159	<b>MAXWELL</b> (méthodes de).....	270-273
<b>HOPKINSON</b> (formules).....	49	<b>Maxwell</b> .....	9
— (rapport d').....	68	<b>Méthode différentielle</b> .....	742
<b>HOSPITALIER</b> (ondographe).....	107	<b>Module de puissance</b> .....	618
<b>Hystérésimètres</b> .....	35	<b>Moteurs électriques</b> .....	646
<b>Hystérésimètre Blondel-Carpentier</b> ...	36		
— <i>Ewing</i> .....	35	<b>N</b>	
<b>Hystérésis magnétique</b> .....	27	<b>NEEF</b> (interrupteur de).....	220
		<b>NODON</b> (soupape).....	602
<b>I</b>		<b>Noyaux divisés</b> .....	129
<b>Impédance</b> .....	289		
— imaginaire.....	297	<b>O</b>	
<b>Inclinomètre de Weber</b> .....	14	<b>Oerstedt</b> .....	48
<b>Inductance</b> .....	279	<b>Ondographe</b> .....	107
<b>Induction</b> .....	79	<b>Oscillographes</b> (principe des).....	102
<b>Induction magnétique</b> .....	19	— (théorie).....	210
<b>Induction mutuelle</b> .....	160-173	— (à fer doux).....	472
<b>Intensité efficace</b> .....	141	<b>Oscilloradiographe</b> .....	474
<b>Interrupteurs mécaniques</b> .....	220		
— électrolytiques.....	224	<b>P</b>	
— à orifices.....	227	<b>Parallèle</b> (conducteurs en).....	305
		<b>Perméabilité magnétique</b> .....	20
<b>J</b>			
<b>JOUBERT</b> (méthode de).....	104		
<b>JOULE</b> (effet).....	543		

	Pages		Pages
<b>Perméamètre</b> <i>Bruger</i> .....	57	<b>Réaction propre</b> .....	136
— <i>Ewing</i> .....	59	<b>Récepteurs électriques</b> .....	612
— <i>Hopkinson</i> .....	56	— à cour. cont.,	633
— <i>Kœpsel et Keunely</i> .....	57	— doués de force.	643
— <i>S. Thompson</i> .....	59	<b>RECLUS</b> (bougie).....	247
<b>Perméance</b> .....	49	<b>Régime permanent</b> .....	100
<b>Pertes par cour.</b> de Foucault.....	131	— variable.....	100
<b>Phasemètre</b> <i>R. Arno</i> .....	504	<b>Réductance</b> .....	47
— <i>Mottura</i> .....	519	— d'un circuit.....	50
— <i>Rayleigh</i> .....	475	— unité.....	48
<b>Point neutre</b> .....	409	— d'un joint.....	51
— artificiel.....	739	<b>Rendement</b> industriel.....	626
<b>POLLACK</b> (soupape).....	600	— d'une ligne.....	638
<b>Polygone</b> (montage en).....	381	<b>Résistance</b> non inductive... ..	153
<b>Polyphasés</b> (courants).....	389	<b>Résonance</b> (condition de).....	320
<b>Polyphasées</b> (installation).....	390	— (méthode de).....	459
— (lignes).....	390	<b>Rhéographe</b> Abraham-Carpentier.....	214
<b>Polyphasés</b> (systèmes).....	369	<b>RICHARDS et KOEPPER</b> (procédé). ..	591
<b>POTIER</b> (méthode).....	710	<b>RÖNTGEN</b> (rayons).....	252
<b>Puissance</b> apparente.....	686	<b>RUHMKORF</b> (bobine de).....	217
— électrique.....	613		
— indiquée.....	722	<b>S</b>	
— instantanée.....	666	<b>Section utile</b> d'un noyau.....	130
— magnétisante.....	698	<b>Self-induction</b> .....	152
— moyenne.....	667	— (coefficient de).....	155
— d'une phase.....	738	— (force électromotrice de). ..	155
— unité.....	622	— (unité de).....	158
— vraie.....	686	— d'une bobine longue... ..	166
<b>PUPIN</b> (méthode).....	462	— d'un câble concentrique. ..	169
		— d'une ligne.....	171
<b>Q</b>		— d'un tore.....	166
<b>Quadrant</b> .....	159	<b>Sens</b> d'une décharge.....	10
<b>Quadrature</b> .....	138	<b>Série</b> (conducteurs en).....	299
<b>Quantité</b> d'elect. induite.....	11	<b>Shunt</b> (d'un galv. balist.).....	193
		<b>SIEMENS et HALSKE</b> (wattmètre)... ..	719
<b>R</b>		<b>Signe</b> d'une variation de flux.....	11
<b>Radioconducteur</b> .....	259	<b>SIMON</b> (interrupteur).....	227
<b>Radiographie</b> .....	256	<b>Sinusoïde</b> fondamentale.....	425
<b>Radioscopie</b> .....	256	<b>Sinusoïdes</b> équivalentes.....	692
<b>Rainures</b> .....	83	<b>Soupape</b> <i>Nodon</i> .....	602
<b>Rapport</b> d' <i>Hopkinson</i> .....	68	<b>Stabilité</b> d'un arc.....	575
<b>RAYLEIGH</b> (méthode).....	269	<b>STEINMETZ</b> (coefficient de)... ..	39
— (phasemètre).....	475	— (formule de).....	39
<b>Rayons</b> cathodiques.....	254	<b>Stroboscopique</b> (méthode).....	103
— de <i>Rœnigen</i> .....	252	<b>Susceptance</b> .....	313
<b>Réactance</b> .....	288	<b>SWINBURNE</b> (méthode).....	711
— d'un fil de ligne triph.....	416	<b>SWYNGEDAUF</b> (théorème).....	699
		<b>Système</b> biphasé.....	371

INDEX ALPHABÉTIQUE.

765

	Pages		Pages
<b>Système</b> diphasé.....	371	<b>Valeur</b> moyenne d'une diff. de pot.....	113-441
— triphasé.....	371	<b>VASCHY</b> (méthode de).....	265
— tétraphasé.....		<b>Vibrateur</b> <i>Lacoste</i> .....	221
<b>T</b>			
<b>Télégraphie sans fils</b> .....	259	<b>Vide</b> (fonctionnement à).....	381
<b>Tension</b> (chûte de).....	341-638	— (diff. de pot. à).....	383-386
— composée.....	409	<b>VILLARD</b> (interrupteur).....	222-485
— à l'extrémité d'une ligne.....	637	<b>Vitesse</b> de variation d'un flux.....	92
— à l'origine d'une ligne.....	637	<b>Voltmètres</b> du 1 <sup>er</sup> degré.....	110
— simple.....	409	— du 2 <sup>e</sup> degré.....	110
<b>Thermiques</b> (appareils).....	543	— (méthode des trois).....	707
<b>Thermomètre</b> de Riess.....	651	<b>Volts-heures</b> .....	746
<b>THOMPSON</b> (perméamètre de S.)....	22	<b>Volts-heures-mètres</b> .....	746
<b>Tirage des mines</b> .....	250	<b>VON KOCZICZKA</b> (amorçe).....	250
<b>Tore circulaire</b> .....	167	<b>W</b>	
<b>Transformateur</b> (app. de mesure à)...	146-453	<b>Watt</b> .....	619
<b>Triangle</b> (montage en).....	381	<b>Watt-heure</b> .....	621
<b>Triphasés</b> (systèmes).....	393	<b>Wattmètre</b> .....	713-720
<b>Tube focus</b> .....	255	— A. E. G.....	719
<b>Tube de force magnétique</b> .....	5	— (facteur de correction).....	724
<b>Tubes</b> régénérables.....	258	— <i>Siemens et Halske</i> .....	719
<b>V</b>			
<b>Valeur</b> efficace d'une diff. de pot.....	115-462	<b>Wattmètres</b> (méthode des deux).....	734
		<b>WEBER</b> (inclinomètre).....	14
		<b>WEHNELT</b> (interrupteur).....	224





# TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
VINGT-QUATRIÈME LEÇON	
INDUCTION MAGNÉTIQUE. — Flux d'induction magnétique. Méthode balistique d'exploration des champs magnétiques.....	5
VINGT-CINQUIÈME LEÇON	
INDUCTION MAGNÉTIQUE. — Induction et perméabilité magnétique. Hystérésis. Hytérésimètres.....	18
VINGT-SIXIÈME LEÇON	
INDUCTION MAGNÉTIQUE. — Circuits magnétiques. Formules d'Hopkinson. Application à divers perméamètres.....	42
VINGT-SEPTIÈME LEÇON	
INDUCTION MAGNÉTIQUE. — Calculs usuels relatifs aux électro-aimants.....	61
VINGT-HUITIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Forces électromotrices d'induction (lois élémentaires).....	79
VINGT-NEUVIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Forces électromotrices et différences de potentiel variables. Forces électromotrices et différences de potentiel alternatives usuelles. Alternovoltmètres.....	98
TRENTIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Courants induits. Loi de Lenz. Courants de Foucault.....	117
TRENT-UNIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Courants variables. Courants alternatifs. Ampères-mètres pour courants alternatifs.....	135

	Pages
TRENTÉ-DEUXIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Forces électromotrices de self-induction et d'induction mutuelle. Coefficients d'induction.....	149
TRENTÉ-TROISIÈME LEÇON.	
INDUCTION. — Courants variables. Problèmes usuels.....	177
TRENTÉ-QUATRIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Courants variables (suite). Théories du Galvanomètre balistique, des oscillographes et du rhéographe.....	200
TRENTÉ-CINQUIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Bobines d'induction (description).....	217
TRENTÉ-SIXIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Bobines d'induction (Fonctionnement).....	229
TRENTÉ-SEPTIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Bobines d'induction (applications).....	245
TRENTÉ-HUITIÈME LEÇON	
INDUCTION. — Principales méthodes de mesure des coefficients d'induction.....	261
TRENTÉ-NEUVIÈME LEÇON	
ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Inductance. Capacité. Réactance Impédance.....	279
QUARANTIÈME LEÇON	
ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Formules fondamentales relatives aux assemblages de conducteurs.....	299
QUARANTE-UNIÈME LEÇON	
ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Problèmes usuels (conducteurs en série).....	329

TABLE DES MATIÈRES.

769

Pages

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Problèmes usuels (conducteurs en dérivation)..... 343

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Forces électromotrices polyphasées..... 369

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Courants polyphasés..... 389

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Lignes triphasées (Formules générales)..... 409

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Grandeurs électriques périodiques non sinusoïdales (Considérations générales)..... 422

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Grandeurs électriques périodiques non sinusoïdales (Formules fondamentales)..... 441

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROCINÉTIQUE. — Grandeurs électriques périodiques sinusoïdales (Analyse harmonique)..... 455

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROMAGNÉTISME. — Champs magnétiques alternatifs. Electro-aimants à courants alternatifs..... 471

CINQUANTIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROMAGNÉTISME. — Champs tournants de Ferraris. 488

CINQUANTE-UNIÈME LEÇON

ALTERNO-ÉLECTROMAGNÉTISME. — Champs tournants industriels (dans des entrefers cylindriques)..... 520

	Pages
CINQUANTE-DEUXIÈME LEÇON	
ALTERNO-ÉLECTROTHERMIE. — Effet Joule et courants de Foucault.	542
CINQUANTE-TROISIÈME LEÇON	
ALTERNO-ÉLECTROTHERMIE. — Arcs électriques à courants alternatifs.....	560
CINQUANTE-QUATRIÈME LEÇON	
ALTERNO-ÉLECTROCHIMIE. — Electrolyse par courants alternatifs. Clapets électrolytiques.....	587
CINQUANTE-CINQUIÈME LEÇON	
ELECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Energie et Puissance électriques (considérations générales).....	605
CINQUANTE-SIXIÈME LEÇON	
ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Energie et Puissance électriques. Problèmes usuels (courants continus).....	624
CINQUANTE-SEPTIÈME LEÇON	
ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Energie et Puissance électriques. Problèmes usuels (courants variables).....	650
CINQUANTE-HUITIÈME LEÇON	
ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Energie et Puissance électriques. Problèmes usuels (courants alternatifs).....	665
CINQUANTE-NEUVIÈME LEÇON	
ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Energie et Puissance électriques. Problèmes usuels (suite).....	684
SOIXANTIÈME LEÇON	
ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Mesure de la puissance électrique (appareils à courants continus et à courants alternatifs simples). Méthodes fondées sur l'emploi d'ampèremètres et de voltmètres.....	702

TABLE DES MATIÈRES. 771

Pages

SOIXANTE-UNIÈME LEÇON

ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Mesure de la puissance électrique.  
Méthode du wattmètre..... 713

SOIXANTE-DEUXIÈME LEÇON

ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Mesure de la puissance électrique.  
(appareils à courants triphasés)..... 732

SOIXANTE-TROISIÈME LEÇON

ÉLECTRO-ÉNERGÉTIQUE. — Mesure de l'énergie électrique. Com-  
pteurs électriques (notions générales).. 743





